Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

EL PROBLEMA MATRICIAL DE MOMENTOS DE HAUSDORFF PARA EL CASO PAR DE MOMENTOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA

BARUCH EMMANUEL MEDINA HERNÁNDEZ

ASESOR

DR. ABDON EDDY CHOQUE RIVERO

MORELIA, MICH. NOVIEMBRE DE 2021

A mis padres con gratitud.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi supervisor de tesis Dr. Abdon Eddy Choque Rivero, por dedicar de su tiempo, conocimiento, paciencia y constancia a este trabajo que al principio parecía complicado pero que gracias a sus consejos, ideas y sobre todo aportes profesionales, pude hacer una investigación más accesible y así escribir lo que hoy he logrado. También agradecerle mucho por la confianza que tuvo en mí para realizar este trabajo y sus palabras de motivación que me fueron muy útiles para finalizar, ya que sin todo lo mencionado anteriormente esta investigación no hubiera sido completada. Gracias por sus orientaciones.

También quiero agradecer a mis padres ya que con ustedes fue posible terminar este trabajo. Ustedes han sido siempre el motivo que me impulsa para conseguir mis sueños y esperanzas, quienes me apoyaron y estuvieron siempre a mi lado en los días y noches más difíciles durante mis horas de estudio. Siempre han sido mis mejores guías de vida. Hoy cuando concluyo mis estudios, les dedico a ustedes este logro amados padres, como una meta más conquistada. Orgulloso de tenerlos como mis padres y de que estén a mi lado en este momento tan importante. Gracias por creer en mí. También quiero incluir a mi hermano porque gracias a su gran apoyo y palabras de aliento me permitieron seguir adelante.

Extiendo mi gratitud hacia los profesores de la facultad, con los cuales tuve la oportunidad de recibir sus conocimientos rigurosos y precisos, a ustedes les debo lo que aprendí. Gracias por su paciencia, por compartir sus conocimientos de manera profesional, por su dedicación y tolerancia. En particular agradezco a mis sinodales: Dr. Petr Zhevandrov Bolshakova, Dr. Anatoli Merzon, Dr. Francisco J. Domínguez Mota y Dr. Joaquín Estévez Delgado por el tiempo que dedicaron a la revisión de esta tesis.

Finalmente quiero agradecer a mis compañeros más cercanos que tuve durante mi etapa de duración en esta carrera, por sus consejos, por sus experiencias, compartir horas de estudio a lo largo de nuestra formación. Gracias por estar siempre allí. En general dar gracias a todas y cada una de las personas que con su apoyo han hecho posible la realización del presente trabajo.

Abstract

In the present work, we review the Hausdorff moment problem in the matrix version for the case of an even number of moments. To solve this problem, we transform the moment problem into a problem of finding a holomorphic function $S(z)$ on $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ and such that $S(z)$ is the solution of the system of inequalities of the V.P. Potapov-type. In the case in which the two matrices of Hankel constructed by the moments are positive definite, the set of solutions is given in terms of the given moments.

It is worth mentioning that in this work an explicit relationship is obtained between the resolvent matrices proposed in [CR] of 2001 and [CDFK] of 2006, respectively.

Resumen

En el presente trabajo revisamos el problema de momentos de Hausdorff en la versión matricial para el caso de un número par de momentos. Para resolver este problema, trasladamos el problema de momentos a un problema de encontrar funciones que son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ y que son las soluciones del sistema de desigualdades del tipo de V.P. Potapov. En el caso cuando las dos matrices de Hankel construidas por los momentos son positivas definidas se describe la solución en términos de los datos dados.

Cabe mencionar que en este trabajo se obtiene una relación explícita entre las matrices resolvente propuestas en [CR] del 2001 y [CDFK] del 2006, respectivamente.

Palabras clave: transformada de Stieltjes, sistema de desigualdades de Potapov, matriz resolvente.

Índice general

Introducción

Antecedentes

El término *problema de momento* aparece por primera vez en el trabajo de T. Stieltjes de 1894-1895 [S]. Stieltjes define para cada $k \in \mathbb{N}$ el momento generalizado de orden k como la integral

$$\int_0^\infty u^k d\sigma(u)$$

donde σ es una función monótona no decreciente. Al final del Capítulo 4 de [S], Stieltjes escribió: "Daremos el nombre del problema de momento al siguiente problema: se requiere encontrar una función no decreciente positiva en el intervalo $[0, \infty)$, dados los momentos de orden $k(k = 0,\, 1,\, 2,\, \dots)$".

El problema de momentos en el caso matricial fue considerado por primera vez por M.G. Krein en 1949. El problema de momentos en el intervalo acotado, también llamado el problema de momentos de Hausdorff en el caso matricial, ha sido desarrollado en varias direcciones: en el ámbito de los polinomios ortogonales matriciales factores de Blaschke-Potapov, parámetros de Dyukarev-Stieltjes y además esta técnica ha sido utilizada para resolver problemas del área de estabilidad y teoría de control.

En el punto central del presente trabajo se tiene la consideración de un problema de momentos matricial. Antes de iniciar con el estudio del tema anunciado demos algunas observaciones sobre el problema de momentos y su clasificación dentro del ámbito de las matemáticas. El estudio del problema de momentos y los problemas relativos, es un tema que es de interés desde la segunda parte del siglo XIX y ha desarrollado una gran actividad en parte de un número importante de matemáticos y aún es un campo activo de las matemáticas. Las causas para lo anterior son varias, uno de los puntos principales es que el problema de momentos es un área que está muy relacionada con varias disciplinas de las matemáticas (teoría de probabilidad, teoría de funciones de variable compleja, teoría de aproximación, teoría de polinomios ortogonales, teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert, teoría de conos convexos en espacios de Banach, teoría de aproximación de Padé, entre otros). Lo anterior se puede constatar por un número importante de libros los cuales se centran en el problema de momentos por ejemplo: Akhiezer [Ak], Akhiezer/Krein [AKr], Berg/Christensen/Ressel [BCR], Bisgaard/Sasvári [BS], Dette/Studden [DS], Freud [Fr], Geronimus [G], Grenander/Szegö [GS], Karlin/Shapley [KSh], Karlin/Studden [KSt], Koosis [Koo], Krein/Nudelman [KN], Nikishin/Sorokin [NS], Shohat/Tamarkin [ST], Perron [P], Wall [Wa], Widder [Wi] y Wintner [Win]. Los fundamentos del estudio del problema de momentos se originaron en la primera parte del siglo XIX. Se consideraron problemas en las fronteras de teoría de probabilidades. Los primeros estudios importantes en este sentido fueron realizados por la escuela de San Petersburgo, representados por P.L. Chebyshev y sus colaboradores Vertretern A.N. Korkin, E.I. Zolotarev, K.A. Possé y en particular A.A. Markov. Parte de los estudios de A.A Markov se tradujeron al idioma francés en la tesis de Possé [Pos]. Los autores Chebyshev y Markov consideraron en el siglo XIX intensamente, el método de las fracciones continuas. La técnica de las fracciones continuas determinó la dirección y el desarrollo de la primera fase del estudio del problema de momentos. Los trabajos de Chebyshev tuvieron una influencia fuerte en los trabajos de H. Hamburger [Ham] y E. Hellinger [He] que se realizaron en lenguaje de fracciones continuas en la primera década del siglo

XX. En base a esta teoría, en particular, en el trabajo fundamental de M.G. Krein y sus monografías con sus colaboradores Krein/Nudelman se ve claramente una interrelación con la generalización con la teoría de A.A. Markov.

El problema de momentos matricial de Hamburger y sus análogos se estudiaron mediante el método de Potapov [KP], [K]. Las generalizaciones de este método fueron propuestas en los artículos [Nu], [IS], [KKY], [DK], [D]. En la década de 1960 a 1970 ha sido resuelto por Potapov y sus colaboradores. El presente trabajo se fundamenta en el método de la desigualdad fundamental de V.P. Potapov que cuyo contenido forma parte del desarrollo de la J teoría de Potapov llevado a cabo a finales de la década de 1960-1970 del siglo XX. El problema de momentos en el caso matricial para un intervalo acotado fue también fue resuelto en el 2001, en [CR], para el caso donde se da un número par e impar de momentos. En el 2006, en [CDFK], se resuelve el problema de momentos en un intervalo acotado para el caso de un número par de momentos.

Objetivo de la tesis

El objetivo de la tesis es revisar el problema matricial de momentos en un intervalo acotado $[a, b]$ en el caso de un número par de momentos s_0, s_1, …, s_{2n+1}. Además, es también objetivo desarrollar en detalle los resultados del artículo [CR]. Por otra parte es objetivo de esta tesis, obtener una relación explícita entre la matriz resolvente del artículo [CR] y la matriz resolvente del artículo [CDFK].

Planteamiento del problema

Sean s_0, s_1, …, s_{2n+1} matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Se requiere describir el conjunto de todas las funciones matriciales $\sigma(t)$ definidas en el intervalo $[a, b]$, $(-\infty < a < b < +\infty)$, que son no decrecientes y Hermitianas no negativas en $[a, b]$, tales que

$$\int_a^b t^j d\sigma(t) = s_j, \; j = 0, ..., 2n+1. \tag{1}$$

Cabe señalar que este problema, para $a = 0$, $b = 1$, representa el problema de momentos de Hausdorff. Para $a = 0$, $b \to +\infty$, representa el problema de momentos de Stieltjes $a = 0$, $b \to +\infty$ y para $a \to -\infty$, $b \to +\infty$, el problema planteado representa el problema de momentos de Hamburger. Además, este problema fue estudiado para el caso *escalar* en [KN].

Metodología

Usamos el método de Potapov que consiste en traducir el problema planteado de momentos matricial en un intervalo acotado, en un sistema de dos desigualdades matriciales. Previamente el problema de encontrar el conjunto de funciones matriciales σ se transforma en el problema de encontrar funciones holomorfas $S(z)$ en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$. Posteriormente se resuelve el sistema de desigualdades matriciales de Potapov. Para resolver estas desigualdades se define la llamada matriz resolvente

$$U_n(z) = \begin{pmatrix} \alpha_n(z) & \beta_n(z) \\ \gamma_n(z) & \delta_n(z) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

cuyas entradas son bloques de dimensión $q \times q$. Se reescribe la desigualdad de Potapov para el caso no degenerado, que es cuando las matrices de Hankel

$$H_{1,n} = (-as_{j+k} + s_{j+k+1})_{j,k=0}^{n} \quad \text{y} \quad H_{2,n} = (bs_{j+k} - s_{j+k+1})_{j,k=0}^{n},$$

son positivas definidas. Luego resolvemos el sistema transformado y finalmente la solución se escribe en términos de la matriz resolvente (2) y los pares negativos. Cabe mencionar que dentro del presente trabajo reproducimos el criterio de existencia de la solución al problema planteado. Además en el caso no degenerado el conjunto de soluciones del problema de momentos considerado es un conjunto infinito.

Contribuciones de la tesis

La contribución de esta tesis es la obtención de una relación explícita entre la matriz resolvente del artículo [CR] y la matriz resolvente del artículo [CDFK]. Esta relación se escribe en términos de los elementos que fueron definidos en esos trabajos. La importancia de esta contribución se explica por el hecho de que una matriz resolvente está normada en $z = a$, mientras que la otra matriz resolvente está normada en $z = 0$. Con este resultado, se puede construir una nueva familia de polinomios ortogonales y fracciones continuas que corresponden al problema planteado.

Organización de la tesis

En el capítulo 1 se plantea el problema de momentos de Hausdorff en la versión matricial para el caso de un número par de momentos. Se reproduce el resultado de que el conjunto de todas las soluciones del sistema de desigualdades matriciales fundamental del tipo de V.P. Potapov asociado a la versión matricial del problema de momentos de Hausdorff, es equivalente al conjunto de todas las funciones matriciales $S(z)$ definidas en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ tales que

$$S(z) = \int_a^b \frac{1}{t-z} d\sigma(t). \tag{3}$$

donde σ está dada como en (1). En el capítulo 2, reescribimos el sistema de desigualdades matriciales fundamental del tipo de V.P. Potapov para el caso no degenerado y además, en ese mismo caso encontramos las soluciones. También, estudiamos las propiedades sobre la matriz resolvente (2). En el capítulo 3 damos una descripción del conjunto todas las funciones $S(z)$ que describen la solución al problema de momentos en la versión matricial para un intervalo acotado en el caso par. Finalmente, el capítulo 4 se centra en la obtención de la relación entre la matriz resolvente de [CR] y la matriz resolvente de [CDFK].

Capítulo 1

Desigualdades matriciales de V.P. Potapov

En este capítulo planteamos el problema de momentos en términos de funciones que pertenecen al conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]]$, el cual se define en la Definición 1.11. Después veremos en el Teorema 1.5 cómo se relacionan las soluciones del sistema de desigualdades matriciales fundamental del tipo de V.P. Potapov con el conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]]$. Cabe mencionar que en las secciones 1.3 y 1.5 se verán todos los resultados para concluir con la demostración del Teorema 1.5.

Notación 1. *Usaremos* $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}_0$ *y* $\mathbb{N}$ *para denotar el conjunto de los números complejos, el conjunto de los números reales, el conjunto de todos los enteros no negativos, y el conjunto de todos los enteros positivos, respectivamente.*

Notación 2. *Para todos* $m,n \in \mathbb{N}_0$, *designamos a* $\mathbb{N}_{m,n}$ *el conjunto de todos los enteros* k *que satisfacen* $m \leq k \leq n$.

Notación 3. *Sean* $p,q \in \mathbb{N}$. *El símbolo* $\mathbb{C}^{p\times q}$ *representa el conjunto de todas las matrices con entradas en* $\mathbb{C}$ *y de dimensión* $p \times q$. *Si* $A \in \mathbb{C}^{q\times q}$ *entonces denotamos a* $\mathfrak{Re}\, A$ *y* $\mathfrak{Im}\, A$ *la parte real de* A *y la parte imaginaria de* A, *respectivamente.*

Notación 4. *Sean* $p,q \in \mathbb{N}$. *Para cada* $A \in \mathbb{C}^{p\times q}$ *denotamos mediante* $||\cdot||$ *el operador norma,* $\|A\|_E$ *representa la norma Euclidiana de la matriz* A *y* $\|A\|$ *es la norma inducida, es decir*

$$||A|| := \sup_{x\in\mathbb{C}^q,\quad x\neq 0} \frac{||Ax||_E}{||x||_E}.$$

Notación 5. *Sean* X *y* Y *conjuntos no vacíos y si* Z *es un subconjunto no vacío de* X, *y además* $f: X \to Y$ *es una función, entonces* $f_{|Z}$ *representa la función restricción de* f *en* Z.

Definición 1.1. *Sea* $q \in \mathbb{N}$ *y sea* $X \subseteq \mathbb{C}$ *no vacío. Sea* $F: X \to \mathbb{C}^{q\times q}$. *Llamamos a la función* F *como una* función matricial compleja de $q \times q$. *Cuando se hace referencia a la función matricial* F, *tenemos la siguiente forma:*

$$F(z) = \begin{pmatrix} F_{11}(z) & \dots & F_{1q}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{q1}(z) & \dots & F_{qq}(z) \end{pmatrix}$$

para cada $z \in X$. *Así, si* $\mathbb{N}_{1,q}$ *está denotado mediante la Notación 2, para cada* $m,n \in \mathbb{N}_{1,q}$, *tenemos la función escalar* $F_{mn}: X \to \mathbb{C}$ *de* F *que se encuentra en la entrada* (mn) *de* $F(z)$. *Claramente, la función* F *se puede escribir como* $F(z) = \mathfrak{Re}\, F(z) + i\mathfrak{Im}\, F(z)$ *para cada* $z \in X$.

Notación 6. *Si* Z *es un subconjunto no vacío de* $\mathbb{C}$ *y si* F *es una función matricial definida en* Z, *entonces para cada* $z \in Z$ *usaremos* $F^*(z)$ *para representar la matriz transpuesta conjugada. Esta matriz también se denotará como* $(F(z))^*$.

Incluimos las siguientes definiciones que son importantes para este trabajo.

Definición 1.2. *Sea $q \in \mathbb{N}$. Una matriz $A \in \mathbb{C}^{q\times q}$ se dice que es Hermitiana si $A = A^*$, donde A^* es la matriz transpuesta conjugada de A.*

Definición 1.3. *Sean $q \in \mathbb{N}$ y $X \subseteq \mathbb{C}$ no vacío. Sea $F : X \to \mathbb{C}^{q\times q}$ una función matricial. Decimos que $F(z)$ es Hermitiana en X, si para cada $z \in X$, $F(z)$ es Hermitiana. Es decir, $F(z) = F^*(z)$ para cada $z \in X$.*

Definición 1.4. *Sea $q \in \mathbb{N}$. Decimos que una matriz $A \in \mathbb{C}^{q\times q}$ es* no negativa *si*

$$x^*Ax \geq 0 \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{C}^q \textit{ tal que } x \neq 0.$$

Una matriz no negativa se abrevia como $A \geq 0$. Si en la desigualdad solamente se cumple la desigualdad estricta, es decir $x^*Ax > 0$, entonces decimos que A es positiva definida *y abreviamos como $A > 0$.*

Definición 1.5. *Sean $q \in \mathbb{N}$ y $X \subseteq \mathbb{C}$ no vacío. Sea $F : X \to \mathbb{C}^{q\times q}$ una función matricial. Decimos que, $F(z)$ es no negativa en X, si para cada $z \in X$, $F(z)$ es no negativa y se denota como $F(z) \geq 0$ en X. Similarmente, decimos que $F(z)$ es positiva en X, si para cada $z \in X$, $F(z)$ es positiva y se denota como $F(z) > 0$ en X.*

Definición 1.6. *Sean $q \in \mathbb{N}$ y $X \subseteq \mathbb{C}$ no vacío. Sea $F : X \to \mathbb{C}^{q\times q}$ una función matricial. F se llama monótona no decreciente, si para cada t_0, $t_1 \in X$ tales que $t_1 \geq t_0$ se cumple que $F(t_1) - F(t_0) \geq 0$ en X.*

En el Apéndice A se ubica la definición de la función holomorfa en el caso escalar. Ahora introducimos la siguiente noción análoga para funciones matriciales.

Definición 1.7. *Sean $q \in \mathbb{N}$ y $X \subseteq \mathbb{C}$ no vacío. Sea $F : X \to \mathbb{C}^{q\times q}$ una función matricial compleja de dimensión $q \times q$. Sea F_{mn} definida como en la Definición 1.1 y sea $\mathbb{N}_{1,q}$ de acuerdo a la Notación 2. Decimos que F es holomorfa en A si para cada $m, n \in \mathbb{N}_{1,q}$, F_{mn} es holomorfa en A.*

Observación 1.1. *Sea $q \in \mathbb{N}$. Si $A, B \in \mathbb{C}^{q\times q}$ y si escribimos $A \geq B$ (respectivamente, $A > B$), entonces significa que $A - B$ es no negativa. (respectivamente, $A - B$ es positiva).*

Finalmente, se definen dos conjuntos que hacen referencia a la parte superior e inferior respectivamente, del plano complejo

Notación 7. $\Pi_+ := \{\omega \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}\, \omega \in (0, +\infty)\}$ *y* $\Pi_- := \{\omega \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}\, \omega \in (-\infty, 0)\}$.

1.1. El problema de momentos y la clase $\mathcal{R}_q[a,b]$

En está sección reescribimos la versión matricial del problema de momentos en términos de un subconjunto de la clase de funciones denotada por $\mathcal{R}_q[a,b]$. También agregamos los elementos necesarios para definir el sistema fundamental matricial de desigualdades de V.P. Potapov. Para dar comienzo a esta sección, introducimos los conjuntos de las funciones que tienen las propiedades de nuestro interés y las cuales deseamos describir explícitamente.

Definición 1.8. *Sea $q \in \mathbb{N}$. Sean a y b números reales que satisfacen $a < b$. Denotamos mediante $\mathcal{M}^q_{\geq}[a,b]$ como el conjunto de todas las funciones $\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$ no decrecientes, y que además son Hermitianas no negativas en $[a,b]$.*

Definición 1.9. *Sea $q \in \mathbb{N}$. Sea $f(t)$ una función continua en $[a,b]$ y $\sigma(t) = (\sigma_{ij}(t))_{i,j=1}^{q}$ una función matricial Hermitiana en $[a,b]$ de dimensión $q \times q$. Definimos*

$$\int_a^b f(t)d\sigma(t) := \begin{pmatrix} \int_a^b f(t)d\sigma_{11}(t) & \cdots & \int_a^b f(t)d\sigma_{1q}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b f(t)d\sigma_{q1}(t) & \cdots & \int_a^b f(t)d\sigma_{qq}(t) \end{pmatrix}, \tag{1.1.1}$$

donde σ_{ij} para cada $i, j = 1, \ldots, q$, es una función continua a trozos en $[a,b]$ tal que la integral de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f(t)d\sigma_{ij}(t)$ está definida en $[a,b]$ (ver [CB, pág. 89]).

En adelante, la integral de la forma $\int_a^b f(t)d\sigma(t)$ se entiende como en (1.1.1).

Definición 1.10. *Sean $q \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}_0$. Sean a y b números reales que satisfacen $a < b$. Sean $s_0, s_1, \ldots, s_{2n+1}$ matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Sea $\mathcal{M}_{\geq}^{q}[a,b]$ definido como en la Definición 1.8 y sea $\mathbb{N}_{0,2n+1}$ de acuerdo a la Notación 2. Denotamos mediante $\mathcal{M}_{\geq}^{q}[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ el conjunto de todas las funciones $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^{q}[a,b]$ tales que*

$$\int_a^b t^j d\sigma(t) = s_j. \tag{1.1.2}$$

para cada entero $j \in \mathbb{N}_{0,2n+1}$.

Claramente, se tiene que $\mathcal{M}_{\geq}^{q}[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}] \subseteq \mathcal{M}_{\geq}^{q}[a,b]$. Una secuencia $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ de matrices complejas de dimensión $q \times q$ es una secuencia de matrices Hermitianas si se satisface $s_j = s_j^*$ para cada $j \in \mathbb{N}_{0,2n+1}$, donde $\mathbb{N}_{0,2n+1}$ está determinado en la Notación 2. Consideremos una secuencia $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ de matrices complejas de $q \times q$, y supongamos que s_j está definido como en (1.1.2) y que $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^{q}[a,b]$, entonces tenemos que cada s_j es una matriz Hermitiana ya que σ también lo es. Así, lo anterior es un caso particular de considerar una secuencia de matrices complejas de $q \times q$ que son Hermitianas, es decir, sin conocer como está definido el término s_j de la secuencia dada. Con lo escrito hasta ahora, podemos reescribir nuestro problema de momentos en la versión matricial de la siguiente manera:

Planteamiento del problema de momentos de Hausdorff para el caso par de momentos

Problema 1.1. *Sea $\mathbb{N}_0$ denotado como en la Notación 1. Sean $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$ y $b \in (a, \infty)$. Además, sea $\mathcal{M}_{\geq}^{q}[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido como en la Definición 1.10. Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$, se requiere describir el conjunto $\mathcal{M}_{\geq}^{q}[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$.*

El conjunto $\mathcal{M}_{\geq}^{q}[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ dado en la Definición 1.10 en realidad es para nuestro caso, el conjunto de soluciones de la versión matricial del problema de momentos.

En el Teorema 1.2, veremos que el problema planteado se traslada al área de funciones holomorfas, en particular, a la clase de funciones $\mathcal{R}_q[a,b]$.

Definición 1.11. *Sea $q \in \mathbb{N}$. Sea Π_+ dado como en la Notación 7. Denotamos mediante $\mathcal{R}_q[a,b]$ la clase de todas las funciones matriciales $S : \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}^{q \times q}$, que satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *S es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$.*
2. *Para cada $\omega \in \Pi_+$, la matriz $\mathfrak{Im}\, S(\omega)$ es Hermitiana no negativa.*
3. *Para cada $t \in (-\infty, a)$, la matriz $S(t)$ es Hermitiana no negativa.*

4. *Para cada $t \in (b, +\infty)$, la matriz $-S(t)$ es Hermitiana no negativa.*

Teniendo en consideración los conjuntos $\mathcal{M}^q_{\geq}[a,b]$ y $\mathcal{R}_q[a,b]$, el Teorema 1.2 describe la relación entre dichos conjuntos. Cabe mencionar que esta idea fue usada por M.G. Krein y A.A. Nudelman (ver [KN, pág. 394]) para el caso escalar $q = 1$.

Teorema 1.2. *Sea $q \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{M}^q_{\geq}[a,b]$ definido como en la Definición 1.8 y $\mathcal{R}_q[a,b]$ definido como en la Definición 1.11*

(a) *Para cada $\sigma \in \mathcal{M}^q_{\geq}[a,b]$ la función matricial $S^{[\sigma]} : \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$ definida por*

$$S^{[\sigma]}(z) := \int_a^b \frac{1}{t-z} d\sigma(t) \tag{1.1.3}$$

pertenece a $\mathcal{R}_q[a,b]$.

(b) *Para cada $S \in \mathcal{R}_q[a,b]$ existe una única $\sigma \in \mathcal{M}^q_{\geq}[a,b]$ tal que*

$$S(z) := \int_a^b \frac{1}{t-z} d\sigma(t) \tag{1.1.4}$$

se satisface para todo $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$.

Demostración. Probaremos la condición suficiente. Sea $\sigma \in \mathcal{M}^q_{\geq}[a,b]$. Observemos que $S^{[\sigma]}(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$. En efecto, sean $z, z_0 \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$, y U una vecindad de z_0 en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} \frac{S^{[\sigma]}(z) - S^{[\sigma]}(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z\to z_0} \frac{\int_a^b \frac{1}{t-z} d\sigma(t) - \int_a^b \frac{1}{t-z_0} d\sigma(t)}{z-z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{\int_a^b [\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-z_0}] d\sigma(t)}{z-z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{\int_a^b [\frac{(z-z_0)}{(t-z)(t-z_0)}] d\sigma(t)}{z-z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} \int_a^b \frac{(z-z_0)}{(t-z)(t-z_0)(z-z_0)} d\sigma(t) \\
&= \lim_{z\to z_0} \int_a^b \frac{1}{(t-z)(t-z_0)} d\sigma(t) \\
&= \int_a^b \frac{1}{(t-z_0)^2} d\sigma(t).
\end{aligned}$$

Como se puede ver, la función matricial $S^{[\sigma]}$ es complejo diferenciable en cada una de sus entradas para cualquier $z_0 \in U$ donde U es una vecindad arbitraria de $\mathbb{C} \setminus [a,b]$, entonces $S^{[\sigma]}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$. Sea $\omega \in \Pi_+$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Im}\, S^{[\sigma]}(\omega) &= \frac{S^{[\sigma]}(\omega) - (S^{[\sigma]}(\omega))^*}{2i} \\
&= \frac{1}{2i} \int_a^b \left(\frac{1}{t-\omega} - \frac{1}{t-\bar{\omega}} \right) d\sigma(t) \\
&= \frac{1}{2i} \int_a^b \frac{2i\mathfrak{Im}\,\omega}{|t-\omega|^2} d\sigma(t) = \int_a^b \frac{\mathfrak{Im}\,\omega}{|t-\omega|^2} d\sigma(t).
\end{aligned}$$

Claramente se sigue que $\mathfrak{Im}\, S^{[\sigma]}(\omega) \geq 0$ para cada $\omega \in \Pi_+$. Ahora, sea $x \in (-\infty, a)$, entonces

$$S^{[\sigma]}(x) = \int_a^b \frac{1}{t-x} d\sigma(t),$$

ya que $t \in [a,b]$, se sigue que $S^{[\sigma]}(x) \geq 0$ para cada $x \in (-\infty, a)$. Sea $x \in (b, +\infty)$, se tiene

$$S^{[\sigma]}(x) = \int_a^b \frac{1}{t-x} d\sigma(t)$$

y como $x \in [a,b]$, tenemos que $S^{[\sigma]}(x) \leq 0$, y además $-S^{[\sigma]}(x) \geq 0$. Por lo tanto, $S^{[\sigma]}(z) \in \mathcal{R}_q[a,b]$. La condición suficiente queda demostrada.

Probaremos la condición necesaria. Sea $S \in \mathcal{R}_q[a,b]$. Sea $g \in \mathbb{C}^q$ constante y sea $s : \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}$ una función escalar definida mediante $s(z) = (g, S(z)g)$. Ya que S es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$, se sigue inmediatamente que s es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$. Claramente se cumple que

$$\Pi_+ \subset \mathbb{C} \setminus [a,b]. \tag{1.1.5}$$

Entonces de (1.1.5) tenemos que s es holomorfa en Π_+. Sea $z \in \Pi_+$, de acuerdo a la Ecuación $(B.1)$ del Apéndice B, tenemos que

$$\mathfrak{Im}\,(g, S(z)g) = g^* \mathfrak{Im}\, S(z) g,$$

es decir,

$$\mathfrak{Im}\, s(z) = g^* \mathfrak{Im}\, S(z) g. \tag{1.1.6}$$

Ya que por hipótesis $\mathfrak{Im}\, S(z) \geq 0$ para cada $z \in \Pi_+$, de (1.1.6) tenemos que $\mathfrak{Im}\, s(z) \geq 0$ para cada $z \in \Pi_+$. En vista de la Definición (B.1) del Apéndice B, podemos concluir que

$$s \in \mathcal{R}_1. \tag{1.1.7}$$

Sea $t \in (-\infty, a)$, tenemos

$$s(t) = (g, S(t)g) = g^* S(t) g \tag{1.1.8}$$

y por hipótesis, $S(t) \geq 0$ para cada $t \in (-\infty, a)$, entonces de (1.1.8) se sigue

$$s(t) \geq 0 \quad \text{para cada} \quad t \in (-\infty, a). \tag{1.1.9}$$

Similarmente, sea $t \in (b, +\infty)$, tenemos

$$s(t) = (g, S(t)g) = g^* S(t) g.$$

o bien

$$-s(t) = -g^* S(t) g = g^*(-S(t))g. \tag{1.1.10}$$

Por hipótesis, para cada $t \in (b, +\infty)$ se cumple que $-S(t) \geq 0$ y de (1.1.10), obtenemos que

$$-s(t) \geq 0 \quad \text{para cada} \quad t \in (b, +\infty). \tag{1.1.11}$$

De acuerdo a (1.1.7), tenemos por el Teorema B.3 del Apéndice B que existe una única σ no decreciente tal que

$$s(z) = \gamma + \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z}. \tag{1.1.12}$$

Tenemos que $s(z)$ es holomorfa para $z = x < a$ y $z = x > b$. Además de (1.1.9) y (1.1.11) tenemos que $s(z)$ es real para $z = x < a$ y $z = x > b$, se sigue de la fórmula de inversión de Stieltjes $(B.4)$ del Apéndice B que la función $\sigma(t)$ que aparece en (1.1.12) es constante para $t < a$ y $t > b$, de manera que de hecho σ está acotado y tenemos

$$s(z) = \gamma + \beta z + \int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t-z} \tag{1.1.13}$$

donde $\beta \geq 0$. Supongamos que $\beta > 0$, entonces para $z = x > a$ suficientemente grande

$$s(x) = \gamma + \beta x + \int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t-x}$$

y si x es suficientemente grande solo queda el término βx, entonces para ese x se debería tener $s(x) \geq 0$, pero de (1.1.11) tenemos que $s(x) \leq 0$, entonces $\beta = 0$. Ahora, si $\gamma \neq 0$, se tiene

$$s(x) = \gamma + \int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t-x} \quad \text{y} \quad s(-x) = \gamma + \int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t+x},$$

entonces para $x > 0$ suficientemente grande los valores de $s(x)$ y $s(-x)$ por hipótesis deberían tener signos opuestos, pero para ese x es imposible. Así $\gamma = 0$. De esta manera reescribimos (1.1.13) como

$$s(z) = \int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t-z}. \tag{1.1.14}$$

Por lo tanto, queda demostrado el caso escalar. Utilizando (1.1.14), y el método de la polarización ubicado en la sección B.1 del Apéndice B, se demuestra el caso matricial. ■

Según el Teorema 1.2, el mapeo $f : \mathcal{M}_{\geq}^q[a,b] \to \mathcal{R}_q[a,b]$ dado por $f(\sigma) := S^{[\sigma]}$ es biyectivo. Para todo $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$, la función matricial $S^{[\sigma]} : \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$ definida en (1.1.3) es llamada como la transformada de Stieltjes de σ. Recíprocamente, si la función matricial $S \in \mathcal{R}_q[a,b]$ es dada, entonces la única $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$ que satisface (1.1.4) para todo $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$ se dice que es la función distribución de Stieltjes que corresponde a S. Ahora veamos que la transformada de Stieltjes se puede escribir como una serie.

Teorema 1.3. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$ y $\mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$ definido como en la Definición 1.8. Sea $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$. Denotamos a $S^{[\sigma]}$ como la transformada de Stieltjes de σ. Para cada $j \in \mathbb{N}_0$ denotamos a $s_j^{(\sigma)}$ el $j-$ésimo momento definido como en (1.1.2) correspondiente a σ. Además sea $z \in \mathbb{C}$ elegido de manera que $|z| > \max\{|a|,|b|\}$ se cumple. Entonces $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$ y*

$$S^{[\sigma]}(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k^{(\sigma)}}{z^{k+1}}. \tag{1.1.15}$$

Demostración. Sea $t \in [a,b]$. Entonces

$$|t| \leq \max\{|a|,|b|\}.$$

Debido a la elección de z, se sigue que

$$z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$$

y $|t| < |z|$, es decir, $z \neq 0$ y

$$\left|\frac{t}{z}\right| = \frac{|t|}{|z|} < 1.$$

En vista de la fórmula para la serie geométrica, se tiene lo siguiente

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{-z\left(1-\frac{t}{z}\right)} = -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{z}\right)^k. \tag{1.1.16}$$

Ahora mostramos que la convergencia de la serie (1.1.16) es uniforme para todo $t \in [a,b]$. Sea $t \in [a,b]$. Entonces

$$\begin{aligned} \left|\left(\frac{t}{z}\right)^k\right| &= \frac{|t|^k}{|z|^k} \leq \frac{\max\{|a|,|b|\}^k}{|z|^k} \\ &= \left(\frac{\max\{|a|,|b|\}}{|z|}\right)^k. \end{aligned} \tag{1.1.17}$$

Ya que

$$0 < \frac{\max\{|a|,|b|\}}{|z|} < 1$$

luego se tiene, debido a la fórmula para la serie geométrica,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\text{máx}\{|a|,|b|\}}{|z|}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{\text{máx}\{|a|,|b|\}}{|z|}} \tag{1.1.18}$$

Debido a (1.1.17) y (1.1.18), por el criterio de Weierstrass se tiene una convergencia uniforme de la serie de funciones entonces

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[a,b]}\left|\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{t}{z}\right)^k-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{z}\right)^k\right|=0.$$

Esto significa que se permite que la integración y la suma correspondiente a series se intercambien en el siguiente cálculo y si se observa el resultado (1.1.16) tenemos

$$\begin{aligned}
S^{[\sigma]}(z) &= \int_a^b \frac{1}{t-z}d\sigma(t)\\
&= \int_a^b\left(-\frac{1}{z}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{z}\right)^k d\sigma(t)\\
&= \left(-\frac{1}{z}\right)\cdot\int_a^b\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{z}\right)^k\right)d\sigma(t)\\
&= \left(-\frac{1}{z}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\int_a^b\left(\frac{t}{z}\right)^k d\sigma(t)\\
&= \left(-\frac{1}{z}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^k}\int_a^b t^k d\sigma(t)\\
&= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_k^{(\sigma)}}{z^{k+1}}.
\end{aligned}$$

■

Definición 1.12. *Sean $q\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}_0$ $a\in\mathbb{R}$ y $b\in(a,\infty)$. Sea $\mathcal{M}_{\geq}^{q}[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido como en la Definición 1.10. Mediante $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ denotamos a el conjunto de todas las funciones matriciales $S^{[\sigma]}:\mathbb{C}\setminus[a,b]\to\mathbb{C}^{q\times q}$ definidas como en (1.1.3), es decir, $S^{[\sigma]}:=\int_a^b(t-z)^{-1}d\sigma(t)$ para cada $\sigma\in\mathcal{M}_{\geq}^{q}[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$.*

Nótese que $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ también es el conjunto de las transformadas de Stieltjes de todas las distribuciones σ Hermitianas no negativas que pertenecen a $\mathcal{M}_{\geq}^{q}[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$. Con las notaciones actuales, la versión matricial del problema de momentos de Hausdorff puede escribirse como:

Replanteamiento del problema de momentos en términos de $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$.

Problema 1.4. *Sea $\mathbb{N}_0$ denotado como en la Notación 1. Sean $q\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}_0$, $a\in\mathbb{R}$ y $b\in(a,\infty)$. Además sea $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido como en la Definicion 1.12. Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q\times q$, se requiere describir el conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$.*

La consideración de esta versión reformulada del problema de momentos tiene la ventaja de que se pueden aplicar métodos de teoría de funciones. Claramente de la parte (a) del Teorema 1.2 se tiene que

$$\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]\subseteq\mathcal{R}_q[a,b]$$

y esto representa un problema en la clase $\mathcal{R}_q[a,b]$. Notemos que

$$\mathcal{M}_{\geq}^{q}[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]\neq\emptyset \quad \text{si y solo si} \quad \mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]\neq\emptyset.$$

Ahora, pasamos a introducir notaciones adicionales, adecuadas e importantes ya que se usarán en la mayor parte de lo que sigue.

Definición 1.13. *Consideremos $q \in \mathbb{N}$. Usaremos I_q para designar la matriz identidad que pertenece a $\mathbb{C}^{q\times q}$. La notación $0_{q\times q}$ representa la matriz nula que pertenece a $\mathbb{C}^{q\times q}$. Si la dimensión de una matriz identidad o una matriz nula es obvia, omitiremos los índices. Para todo $j \in \mathbb{N}_0$ y toda $k \in \mathbb{N}_0$, sea δ_{jk} el símbolo de Kronecker, es decir, $\delta_{jk} := 1$ si $j = k$ y $\delta_{jk} := 0$ si $j \neq k$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, sea*

$$T_n := (\delta_{j,k+1} I_q)_{j,k=0}^{n} = \begin{bmatrix} 0_{q\times q} & 0_{q\times q} & \dots & 0_{q\times q} & 0_{q\times q} \\ I_q & 0_{q\times q} & \dots & 0_{q\times q} & 0_{q\times q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{q\times q} & 0_{q\times q} & \dots & I_q & 0_{q\times q} \end{bmatrix} \tag{1.1.19}$$

y sea $R_{T_n} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{(n+1)q\times(n+1)q}$ definida por

$$R_{T_n}(z) := (I - zT_n)^{-1} = \begin{bmatrix} I_q & 0_{q\times q} & \dots & 0_{q\times q} \\ zI_q & I_q & \dots & 0_{q\times q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^n I_q & z^{n-1} I_q & \dots & I_q \end{bmatrix}. \tag{1.1.20}$$

Sea $v_0 := I_q$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$v_n := \begin{bmatrix} I_q \\ 0_{nq\times q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q \\ 0_{q\times q} \\ \vdots \\ 0_{q\times q} \end{bmatrix}. \tag{1.1.21}$$

Definición 1.14. *Sea $q \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y cada secuencia $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$, llamaremos a*

$$\tilde{H}_{1,n} := \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n} \end{bmatrix}, \tag{1.1.22}$$

$$\tilde{H}_{2,n} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n+1} \end{bmatrix} \tag{1.1.23}$$

como la primera (respectivamente, la segunda) matriz de bloque de Hankel asociada a $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$. Más aún, para todos números reales a y b que satisfacen $a < b$, para cada entero no negativo n, y para cada secuencia $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$, llamaremos a las matrices

$$H_{1,n} := -a\tilde{H}_{1,n} + \tilde{H}_{2,n}, \tag{1.1.24}$$

respectivamente,

$$H_{2,n} := b\tilde{H}_{1,n} - \tilde{H}_{2,n} \tag{1.1.25}$$

como la primera (respectivamente, la segunda) matriz de bloque de Hankel asociada a el intervalo $[a,b]$ y la secuencia $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y cada secuencia $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$, definimos

$$\tilde{u}_n := - \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}, \tag{1.1.26}$$

$$u_{1,n} := \tilde{u}_n - aT_n\tilde{u}_n, \tag{1.1.27}$$

$$u_{2,n} := -\tilde{u}_n + bT_n\tilde{u}_n. \tag{1.1.28}$$

Definición 1.15. *Sea $q \in \mathbb{N}$. Sean a y b números reales que satisfacen $a < b$. Sea $S : \mathbb{C} \setminus [a, b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$ una función matricial. Definimos las funciones matriciales como sigue $\tilde{S}_1 : \mathbb{C} \setminus [a, b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$*

$$\tilde{S}_1(z) := (z - a)S(z), \tag{1.1.29}$$

y $\tilde{S}_2 : \mathbb{C} \setminus [a, b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$

$$\tilde{S}_2(z) := (b - z)S(z). \tag{1.1.30}$$

Llamamos a $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$, como la primera función matricial asociada canónicamente a S y la segunda función matricial asociada canónicamente a S, respectivamente.

Tengamos en cuenta que M.G Krein y A.A. Nudelman (ver [KN, pág. 394]) mencionan que, en el caso $q = 1$, las funciones $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ puden usarse para caracterizar la clase $\mathcal{R}_1[a, b]$. Este resultado será probado para el caso matricial, es decir, para la clase $\mathcal{R}_q[a, b]$, en el Lema 1.10.

Definición 1.16. *Sean $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $q \in \mathbb{N}$ y $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q\times q$. Sea $S : \mathbb{C}\setminus[a, b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$ una función matricial que es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus [a, b]$. Además, sean T_n, $R_{T_n}(z)$, v_n, $H_{1,n}$, $H_{2,n}$, $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ definidos como en las Definiciones 1.13, 1.14 y 1.15, respectivamente. Decimos que S es solución del sistema de desigualdades matriciales fundamental de tipo V.P. Potapov asociado a $[a, b]$ y $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ si para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, las matrices*

$$K_{1,n}^{[S]}(z) := \begin{pmatrix} H_{1,n} & R_{T_n}(z)\,[\,v_n\tilde{S}_1(z) - u_{1,n}\,] \\ [\tilde{S}_1^*(z)v_n^* - u_{1,n}^*]R_{T_n}^*(z) & \{\tilde{S}_1(z) - \tilde{S}_1^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{pmatrix} \tag{1.1.31}$$

y

$$K_{2,n}^{[S]}(z) := \begin{pmatrix} H_{2,n} & R_{T_n}(z)\,[\,v_n\tilde{S}_2(z) - u_{2,n}\,] \\ [\tilde{S}_2^*(z)v_n^* - u_{2,n}^*]R_{T_n}^*(z) & \{\tilde{S}_2(z) - \tilde{S}_2^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{pmatrix} \tag{1.1.32}$$

ambas son Hermitianas no negativas.

Observación 1.2. *Las matrices $K_{1,n}^{[S]}(z)$ y $K_{2,n}^{[S]}(z)$ definidas como en la Definición 1.16, son de dimensión $(n + 2)q \times (n + 2)q$.*

Definición 1.17. *Sean $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ y $q \in \mathbb{N}$. Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. El símbolo $\mathcal{P}_q[[a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ representará el conjunto de todas las soluciones del sistema de desigualdades matriciales fundamental de tipo V.P. Potapov asociado a $[a, b]$ y $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$.*

Teorema 1.5. *Sean $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ y $q \in \mathbb{N}$. Sea s_j definido como en (1.1.2). Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q\times q$. Sean $\mathcal{R}_q[[a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ y $\mathcal{P}_q[[a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definidos como en las Definiciones 1.12 y 1.17, respectivamente. Entonces se satisface*

$$\mathcal{R}_q[[a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}] = \mathcal{P}_q[[a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$$

La demostración del Teorema 1.5 queda pendiente ya que requiere de los resultados que se encuentran en las secciones 1.3 y 1.5.

1.2. Principales identidades

En esta sección mostraremos y destacaremos las identidades esenciales que conectan a las matrices de bloques introducidas en la sección 1.1, más específicamente, nos referimos a las Ecuaciones (1.1.19)-(1.1.28) y que además nos servirán para simplificar cálculos posteriores.

En principio, introducimos algunas identidades triviales.

Observación 1.3. *Supongamos que $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ y $b \in (a, \infty)$. En vista de (1.1.19)-(1.1.28), para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $z \in \mathbb{C}$, y cada secuencia $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$, de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$, entonces claramente se satisfacen las identidades*

$$R_{T_n}^{-1}(z) = (I - zT_n), \quad R_{T_n}^*(\bar{z}) = R_{T_n^*}(z), \quad [R_{T_n}^*(\bar{z})]^{-1} = (I - zT_n^*)$$

$$R_{T_n}^{-1}(a) = (I - aT_n), \quad R_{T_n}^*(a) = R_{T_n^*}(a), \quad [R_{T_n}^*(a)]^{-1} = (I - aT_n^*),$$

$$\tilde{u}_n = -\tilde{H}_{1,n} v_n,$$

$$u_{1,n} = [R_{T_n}(a)]^{-1} \tilde{u}_n,$$

$$u_{2,n} = -[R_{T_n}(b)]^{-1} \tilde{u}_n,$$

y

$$R_{T_n}(a) u_{1,n} = -R_{T_n}(b) u_{2,n}.$$

Observemos que si $n \in \mathbb{N}_0$ y si $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ es una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que $H_{1,n} \geq 0$ y $H_{2,n} \geq 0$, entonces la ecuación

$$\tilde{H}_{1,n} = \frac{1}{b-a}(H_{1,n} + H_{2,n}) \tag{1.2.1}$$

demuestra que también $\tilde{H}_{1,n}$ es Hermitiana no negativa. La identidad (1.2.1) se obtiene de resolver las Ecuaciones (1.1.24) y (1.1.25) para $\tilde{H}_{1,n}$. Además, de $H_{1,n}^* = H_{1,n}$ y $H_{2,n}^* = H_{2,n}$ se sigue que $\tilde{H}_{2,n}^* = \tilde{H}_{2,n}$ ya que

$$\tilde{H}_{2,n} = \frac{1}{b-a}(bH_{1,n} + aH_{2,n}). \tag{1.2.2}$$

Similarmete la identidad (1.2.2) se obtiene de (1.1.24) y (1.1.25).

Lema 1.6. *Supongamos que $a \neq 0$ y $q \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ un secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Además sean T_n, v_n, $\tilde{H}_{1,n}$, $\tilde{H}_{2,n}$, $H_{1,n}$ y $\tilde{u}_n$ definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14. Entonces se satisfacen las siguientes igualdades*

$$\tilde{u}_n v_n^* = \tilde{H}_{2,n} T_n^* + \frac{H_{1,n} - \tilde{H}_{2,n}}{a} \tag{1.2.3}$$

y

$$v_n \tilde{u}_n^* = T_n \tilde{H}_{2,n} + \frac{H_{1,n} - \tilde{H}_{2,n}}{a}. \tag{1.2.4}$$

Demostración. Por un lado tenemos que se satisface:

$$\tilde{u}_n v_n^* = \begin{bmatrix} -s_0 \\ \vdots \\ -s_n \end{bmatrix} [I_q \ 0 \ \dots \ 0] = \begin{bmatrix} -s_0 & 0 & \dots & 0 \\ -s_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -s_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,

$$H_{2,n} T_n^* = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_q & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & I_q \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & s_1 & \dots & s_n \\ 0 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & s_{n+1} & \dots & s_{2n} \end{bmatrix}.$$

Si restamos la matriz $\tilde{H}_{1,n}$, tenemos

$$\tilde{H}_{2,n}T_n^* - \tilde{H}_{1,n} = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & \dots & s_n \\ 0 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & s_{n+1} & \dots & s_{2n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -s_0 & 0 & \dots & 0 \\ -s_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -s_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

que es precisamente $\tilde{u}_n v_n^*$, entonces

$$\tilde{u}_n v_n^* = \tilde{H}_{2,n}T_n^* - \tilde{H}_{1,n} \tag{1.2.5}$$

y si $a \neq 0$, entonces de (1.1.24) y de (1.2.5) se sigue (1.2.3). Además

$$v_n \tilde{u}_n^* = (\tilde{u}_n v_n^*)^* = (\tilde{H}_{2,n}T_n^* - \tilde{H}_{1,n})^*.$$

Debido a que $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ es un secuencia de matrices Hermitianas, entonces

$$v_n \tilde{u}_n^* = T_n \tilde{H}_{2,n} - \tilde{H}_{1,n} \tag{1.2.6}$$

y si $a \neq 0$, entonces de (1.1.24) y de (1.2.6) se sigue (1.2.4). ■

Proposición 1.7. (Identidades de tipo Ljapunov). *Sean $n \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N}$ y $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ un secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Además, sean T_n, v_n, $H_{1,n}$, $H_{2,n}$ $u_{1,n}$ y $u_{2,n}$ definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14. Entonces para cada $r \in \{1, 2\}$, se satisface la siguiente igualdad*

$$H_{r,n}T_n^* - T_n H_{r,n} = u_{r,n}v_n^* - v_n u_{r,n}^*. \tag{1.2.7}$$

Demostración. Sea $r = 1$. De acuerdo a (1.1.27), del lado derecho de (1.2.7) se tiene

$$u_{1,n}v_n^* - v_n u_{1,n}^* = (I - aT_n)\tilde{u}v_n^* - v_n\tilde{u}^*(I - aT_n^*).$$

En vista de (1.2.5) y (1.2.6)

$$u_{1,n}v_n^* - v_n u_{1,n}^* = (I - aT_n)(\tilde{H}_{2,n}T_n^* - \tilde{H}_{1,n}) - (T_n\tilde{H}_{2,n} - \tilde{H}_{1,n})(I - aT_n^*).$$

Al distribuir y simplificar, tenemos

$$\begin{aligned} &(I - aT_n)(\tilde{H}_{2,n}T_n^* - \tilde{H}_{1,n}) - (T_n\tilde{H}_{2,n} - \tilde{H}_{1,n})(I - aT_n^*) \\ &= \tilde{H}_{2,n}T_n^* - \tilde{H}_{1,n} - aT_n\tilde{H}_{2,n}T_n^* + aT_n\tilde{H}_{1,n} - T_n\tilde{H}_{2,n} + \tilde{H}_{1,n} + aT_n\tilde{H}_{2,n}T_n^* - a\tilde{H}_{1,n}T_n^* \\ &= \tilde{H}_{2,n}T_n^* + aT_n\tilde{H}_{1,n} - T_n\tilde{H}_{2,n} - a\tilde{H}_{1,n}T_n^* \\ &= (\tilde{H}_{2,n} - a\tilde{H}_{1,n})T_n^* + T_n(a\tilde{H}_{1,n} - \tilde{H}_{2,n}) = H_{1,n}T_n^* - T_nH_{1,n}. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$u_{1,n}v_n^* - v_n u_{1,n}^* = H_{1,n}T_n^* - T_nH_{1,n}.$$

Similarmente, se puede demostrar (1.2.7) para $r = 2$. Por lo tanto,

$$H_{r,n}T_n^* - T_n H_{r,n} = u_{r,n}v_n^* - v_n u_{r,n}^*.$$

■

1.3. Del problema de momentos a las desigualdades matriciales de V.P. Potapov.

El objetivo en esta sección, es demostrar que toda función matricial que pertenece al conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido como en la Definición 1.12, es una solución del sistema de desigualdades matriciales fundamental del tipo de V.P. Potapov, es decir, pertenece al conjunto $\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ según la Definición 1.17.

Definición 1.18. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ y $b \in (a,\infty)$. Dirijamos nuestra atención al conjunto definido en la Definición 1.8 $\mathcal{M}_{\geq}^{q}[a,b]$. Para cada $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^{q}[a,b]$ y cada $j \in \mathbb{N}_0$, definimos*

$$s_j^{[\sigma]} := \int_a^b t^j d\sigma(t). \tag{1.3.1}$$

Además, para todo $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^{q}[a,b]$ y todo $m \in \mathbb{N}_0$, sea $\tilde{H}_{1,m}^{[\sigma]}$ (respectivamente, $\tilde{H}_{2,m}^{[\sigma]}$) la primera (respectivamente, la segunda) matriz de bloques de Hankel asociada a $(s_j^{[\sigma]})_{j=0}^{2m+1}$ y sea $H_{1,m}^{[\sigma]}$ (respectivamente, $H_{2,m}^{[\sigma]}$) la primera (respectivamente, la segunda) matriz de bloques de Hankel asociada a el intervalo $[a,b]$ y la secuencia $(s_j^{[\sigma]})_{j=0}^{2m+1}$, es decir, las matrices $\tilde{H}_{1,m}^{[\sigma]}$, $\tilde{H}_{2,m}^{[\sigma]}$, $H_{1,m}^{[\sigma]}$ y $H_{2,m}^{[\sigma]}$ están dadas por

$$\tilde{H}_{1,m}^{[\sigma]} := \begin{bmatrix} s_0^{[\sigma]} & s_1^{[\sigma]} & \dots & s_m^{[\sigma]} \\ s_1^{[\sigma]} & s_2^{[\sigma]} & \dots & s_{m+1}^{[\sigma]} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_m^{[\sigma]} & s_{m+1}^{[\sigma]} & \dots & s_{2m}^{[\sigma]} \end{bmatrix}, \tag{1.3.2}$$

$$\tilde{H}_{2,m}^{[\sigma]} := \begin{bmatrix} s_1^{[\sigma]} & s_2^{[\sigma]} & \dots & s_{m+1}^{[\sigma]} \\ s_2^{[\sigma]} & s_3^{[\sigma]} & \dots & s_{m+2}^{[\sigma]} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{m+1}^{[\sigma]} & s_{m+2}^{[\sigma]} & \dots & s_{2m+1}^{[\sigma]} \end{bmatrix}. \tag{1.3.3}$$

$$H_{1,m}^{[\sigma]} := -a\tilde{H}_{1,m}^{[\sigma]} + \tilde{H}_{2,m}^{[\sigma]} \tag{1.3.4}$$

y

$$H_{2,m}^{[\sigma]} := b\tilde{H}_{1,m}^{[\sigma]} - \tilde{H}_{2,m}^{[\sigma]}. \tag{1.3.5}$$

Definición 1.19. *Sea $q \in \mathbb{N}$. Para cada $m \in \mathbb{N}_0$, sea E_m la matriz polinomial de dimensión $(m+1)q \times q$ definida por*

$$E_m(z) := \begin{bmatrix} I_q \\ zI_q \\ z^2 I_q \\ \vdots \\ z^m I_q \end{bmatrix}. \tag{1.3.6}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}_0$ de acuerdo a la Definición 1.13 tenemos que v_m y R_m están definidos. Obviamente, $E_m(0) = v_m$ para cada $m \in \mathbb{N}_0$. Además, para cada $m \in \mathbb{N}_0$ y cada $z \in \mathbb{C}$, de las Ecuaciones (1.1.20) y (1.1.21) se sigue inmediatamente

$$E_m(z) = R_{T_m}(z) v_m. \tag{1.3.7}$$

Ahora establecemos las representaciones integrales importantes para las matrices de bloque de Hankel introducidas en (1.3.2)-(1.3.5).

Lema 1.8. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$ y $\mathcal{M}_{\geq}^{q}[a,b]$ definido como en la Definición 1.8. Sea $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^{q}[a,b]$ y $m \in \mathbb{N}_0$. Sean $\tilde{H}_{1,m}^{[\sigma]}$, $\tilde{H}_{2,m}^{[\sigma]}$, $H_{1,m}^{[\sigma]}$, $H_{2,m}^{[\sigma]}$ y E_m definidos como en las Definiciones 1.18* *y 1.19 Entonces para cada $m \in \mathbb{N}_0$, se cumplen las siguientes igualdades:*

$$\int_a^b E_m(t)d\sigma(t)E_m^*(t) = \tilde{H}_{1,m}^{[\sigma]},$$

$$\int_a^b tE_m(t)d\sigma(t)E_m^*(t) = \tilde{H}_{2,m}^{[\sigma]},$$

$$\int_a^b E_m(t)(t-a)d\sigma(t)E_m^*(t) = H_{1,m}^{[\sigma]}$$

y

$$\int_a^b E_m(t)(b-t)d\sigma(t)E_m^*(t) = H_{2,m}^{[\sigma]}.$$

En particular, para cada $m \in \mathbb{N}_0$, las matrices $\tilde{H}_{1,m}^{[\sigma]}$, $H_{1,m}^{[\sigma]}$ y $H_{2,m}^{[\sigma]}$ son Hermitianas no negativas, y la matriz $\tilde{H}_{2,m}^{[\sigma]}$ es Hermitiana.

Demostración. En vista de (1.3.2),

$$\tilde{H}_{1,m}^{[\sigma]} = \begin{bmatrix} s_0^{[\sigma]} & s_1^{[\sigma]} & \dots & s_m^{[\sigma]} \\ s_1^{[\sigma]} & s_2^{[\sigma]} & \dots & s_{m+1}^{[\sigma]} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_m^{[\sigma]} & s_{m+1}^{[\sigma]} & \dots & s_{2m}^{[\sigma]} \end{bmatrix}.$$

De acuerdo a (1.3.1), tenemos que

$$\tilde{H}_{1,m}^{[\sigma]} = \begin{bmatrix} \int_a^b t^0 d\sigma(t) & \int_a^b t^1 d\sigma(t) & \dots & \int_a^b t^m d\sigma(t) \\ \int_a^b t^1 d\sigma(t) & \int_a^b t^2 d\sigma(t) & \dots & \int_a^b t^{m+1} d\sigma(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b t^m d\sigma(t) & \int_a^b t^{m+1} d\sigma(t) & \dots & \int_a^b t^{2m} d\sigma(t) \end{bmatrix}.$$

Esta igualdad se puede reescribir mediante el uso de la notación de la integral de la forma

$$\tilde{H}_{1,m}^{[\sigma]} = \int_a^b \begin{bmatrix} t^0 d\sigma(t) & t^1 d\sigma(t) & \dots & t^m d\sigma(t) \\ t^1 d\sigma(t) & t^2 d\sigma(t) & \dots & t^{m+1} d\sigma(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t^m d\sigma(t) & t^{m+1} d\sigma(t) & \dots & t^{2m} d\sigma(t) \end{bmatrix}.$$

Claramente la matriz $\tilde{H}_{1,m}^{[\sigma]}$ se puede expresar como:

$$\tilde{H}_{1,m}^{[\sigma]} = \int_a^b \begin{bmatrix} I_q \\ tI_q \\ \vdots \\ t^m I_q \end{bmatrix} d\sigma(t) \begin{bmatrix} I_q & tI_q & \dots & t^m I_q \end{bmatrix},$$

que es lo mismo que

$$\tilde{H}_{1,m}^{[\sigma]} = \int_a^b R_{T_m}(t) v_m d\sigma(t) v_m^* R_{T_m}^*(t).$$

De (1.3.7) se sigue que

$$\tilde{H}_{1,m}^{[\sigma]} = \int_a^b E_m(t)d\sigma(t)E_m^*(t).$$

Ya que $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$, se sigue claramente que $\tilde{H}_{1,m}^{[\sigma]}$ es Hermitiana no negativa. Análogamente, siguiendo los mismos pasos obtenemos

$$\tilde{H}_{2,m}^{[\sigma]} = \int_a^b E_m(t) t d\sigma(t) E_m^*(t).$$

Claramente $\tilde{H}_{2,m}^{[\sigma]}$ es Hermitiana. De (1.3.4), tenemos

$$\begin{aligned} H_{1,m}^{[\sigma]} &= -a\tilde{H}_{1,m}^{[\sigma]} + \tilde{H}_{2,m}^{[\sigma]} \\ &= -a\int_a^b E_m(t) d\sigma(t) E_m^*(t) + \int_a^b E_m(t) t d\sigma(t) E_m^*(t) \\ &= \int_a^b E_m(t)(t-a) d\sigma(t) E_m^*(t). \end{aligned}$$

Entonces,

$$H_{1,m}^{[\sigma]} = \int_a^b E_m(t)(t-a) d\sigma(t) E_m^*(t).$$

y ya que $a < t$ y $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$, se sigue que $H_{1,m}^{[\sigma]}$ es Hermitiana no negativa. Similarmente, se obtiene

$$H_{2,m}^{[\sigma]} = \int_a^b E_m(t)(b-t) d\sigma(t) E_m^*(t)$$

y como $t < b$ y $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$, se sigue que $H_{2,m}^{[\sigma]}$ es Hermitiana no negativa. ∎

Lema 1.9. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $\mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$ definido como en la Definición 1.8 y $\mathcal{R}_q[a,b]$ definido como la Definición 1.11. Sea $S \in \mathcal{R}_q[a,b]$, y sea $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$ la función distribución Stieltjes de S. Sean $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ dados como la Definición 1.15. Entonces:*

(a) Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$\frac{\tilde{S}_1(z) - \tilde{S}_1^*(z)}{z - \bar{z}} = \int_a^b \left(\frac{1}{t-z}\right)(t-a) d\sigma(t) \left(\frac{1}{t-\bar{z}}\right) \tag{1.3.8}$$

y

$$\frac{\tilde{S}_2(z) - \tilde{S}_2^*(z)}{z - \bar{z}} = \int_a^b \left(\frac{1}{t-z}\right)(b-t) d\sigma(t) \left(\frac{1}{t-\bar{z}}\right). \tag{1.3.9}$$

(b) Las funciones matriciales $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ y, si Π_+ está denotado como en la Notación 7, entonces para cada $\omega \in \Pi_+$, las matrices $\mathfrak{Im}\,\tilde{S}_1(\omega)$ y $\mathfrak{Im}\,\tilde{S}_2(\omega)$ son Hermitianas no negativas.

Demostración. (a). Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. En vista de (1.1.4) y (1.1.29) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{S}_1(z) - \tilde{S}_1^*(z)}{z - \bar{z}} &= \frac{1}{z-\bar{z}}\left[(z-a)\int_a^b (t-z)^{-1} d\sigma(t) - (\bar{z}-a)\int_a^b (t-\bar{z})^{-1} d\sigma(t)\right] \\ &= \frac{1}{z-\bar{z}}\int_a^b \left(\frac{z-a}{t-z} - \frac{\bar{z}-a}{t-\bar{z}}\right) d\sigma(t). \end{aligned}$$

Ya que

$$\frac{z-a}{t-z} - \frac{\bar{z}-a}{t-\bar{z}} = \frac{(t-a)(z-\bar{z})}{(t-z)(t-\bar{z})}$$

se sigue (1.3.8). Análogamente se puede probar (1.3.9).

(b) Las funciones $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ definidas en (1.1.29) y (1.1.30) respectivamente, son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ ya que $S \in \mathcal{R}_q[a,b]$. Claramente, los lados derechos de (1.3.8) y (1.3.9) son Hermitianos no negativos para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Para cada $r \in \{1,2\}$ y cada $z \in \Pi_+$, tenemos

$$\frac{\tilde{S}_r(z) - \tilde{S}_r^*(z)}{z - \bar{z}} = \frac{\mathfrak{Im}\, \tilde{S}_r(z)}{\mathfrak{Im}\, z}$$

o bien

$$\mathfrak{Im}\, \tilde{S}_r(z) = \frac{\tilde{S}_r(z) - \tilde{S}_r^*(z)}{z - \bar{z}} \cdot \mathfrak{Im}\, z \tag{1.3.10}$$

Por tanto, la afirmación enunciada en la parte (b) se sigue inmediatamente. ■

Si $S : \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$ está dado, entonces, como hemos mencionado en [KN, pág. 394] para el caso $q = 1$, la primera función matricial $\tilde{S}_1$ y la segunda función matricial $\tilde{S}_2$ asociadas canónicamente a S pueden ser usadas para caracterizar el caso de que S pertenece a la clase $\mathcal{R}_q[a,b]$.

Lema 1.10. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$ y $\mathcal{R}_q[a,b]$ definido como la Definición 1.11. Sea S una función matricial compleja de $q \times q$ definida en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ y sean $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ definidas como la Definición 1.15. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) S pertenece a $\mathcal{R}_q[a,b]$.

(ii) Las funciones matriciales $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ ambas son holomorfas en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ y las desigualdades $\mathfrak{Im}\, \tilde{S}_1(\omega) \geq 0$ y $\mathfrak{Im}\, \tilde{S}_2(\omega) \geq 0$ se satisfacen para todo $\omega \in \Pi_+$ donde Π_+ está denotado como en la Notación 7.

Demostración. El Lema 1.9 demuestra que el enunciado (ii) es una condición necesaria para el enunciado (i). Ahora suponemos que el enunciado (ii) es verdadero. Tenemos por hipótesis que $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ y ya que

$$S(z) = \frac{1}{b-a}\left(\tilde{S}_1(z) + \tilde{S}_2(z)\right)$$

se satisface para toda $\mathbb{C} \setminus [a,b]$, entonces la función S es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ y satisface $\mathfrak{Im}\, S(\omega) \geq 0$ para toda $\omega \in \Pi_+$. Ahora, sea $t \in (-\infty, a)$. Entonces, tenemos

$$\mathfrak{Im}\, S(t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathfrak{Im}\, S(t + i\varepsilon) \geq 0 \tag{1.3.11}$$

y

$$(t-a)\mathfrak{Im}\, S(t) = \mathfrak{Im}\, \tilde{S}_1(t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathfrak{Im}\, \tilde{S}_1(t + i\varepsilon) \geq 0. \tag{1.3.12}$$

Ya que $t - a < 0$ se satisface, de (1.3.11) y (1.3.12) obtenemos $\mathfrak{Im}\, S(t) = 0$ para cada $t \in (-\infty, a)$. Además, para cada $\varepsilon \in (0, +\infty)$ tenemos entonces

$$0 \leq \mathfrak{Im}\, \tilde{S}_1(t + i\varepsilon) = (t-a)\mathfrak{Im}\, S(t+i\varepsilon) + \varepsilon \mathfrak{Re}\, S(t+i\varepsilon) \leq \varepsilon \mathfrak{Re}\, S(t+i\varepsilon)$$

y consecuentemente

$$S(t) = \mathfrak{Re}\, S(t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathfrak{Re}\, S(t+i\varepsilon) \geq 0.$$

para cada $t \in (-\infty, a)$. Similarmente, se sigue $-S(x) \geq 0$ para toda $x \in (b, +\infty)$. Por lo tanto, el enunciado (i) queda demostrado.■

Sea $S : \mathbb{C} \setminus [a,b] :\to \mathbb{C}^{q\times q}$ holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$. Entonces el Lema 1.10 y (1.3.10) demuestran que si los bloques [2,2] de las matrices $K_{1,n}^{[S]}$ y $K_{2,n}^{[S]}$ que están dados por (1.1.31) y (1.1.32), son Hermitianos no negativos para cada $z \in \Pi_+$, entonces la función S necesariamente pertenece a $\mathcal{R}_q[a,b]$. Así, si las desigualdades $K_{1,n}^{[S]}(z) \geq 0$ y $K_{2,n}^{[S]}(z) \geq 0$ se satisfacen para cada $z \in \Pi_+$ entonces podemos asegurar que S pertenece a $\mathcal{R}_q[a,b]$.

En la demostración del siguiente lema veremos qué ocurre en parte con los bloques [1,2] y [2,1] de las matrices $K_{1,n}^{[S]}(z)$ y $K_{2,n}^{[S]}(z)$. Antes de hacer esto observemos que, en vista de (1.1.19) y (1.1.20) para cada $n \in \mathbb{N}_0$ la función $R_{T_n} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{(n+1)q\times(n+1)q}$ puede ser respresentada por

$$R_{T_n}(z) = \sum_{j=0}^{n} z^j T_n^j \tag{1.3.13}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ y que las identidades

$$R_{T_n}(\omega)R_{T_n}(z) = R_{T_n}(z)R_{T_n}(\omega),$$

$$(I - \omega T_n)R_{T_n}(z) = R_{T_n}(z)(I - \omega T_n)$$

y

$$\begin{aligned} R_{T_n}(\omega) - R_{T_n}(z) &= R_{T_n}(z)((I - zT_n) - (I - \omega T_n))R_{T_n}(\omega) \\ &= R_{T_n}(z)(\omega T_n - zT_n)R_{T_n}(\omega) \\ &= (\omega - z)R_{T_n}(z)T_n R_{T_n}(\omega) \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

se satisfacen para toda ω y z en $\mathbb{C}$.

Lema 1.11. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q\times q$ tales que el conjunto $\mathcal{M}_{\geq}^q[[a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido en la Definición 1.10 es no vacío. Además, sea E_n definido como en la Definición 1.19. Si $\mathcal{R}_q[[a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ está definido como en la Definición 1.12, sea $S \in \mathcal{R}_q[[a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ y sea σ la función distribución Stieltjes de S. Entonces para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,*

$$K_{1,n}^{[S]}(z) = \int_a^b \begin{pmatrix} E_n(t) \\ \dfrac{1}{t - \bar{z}} I_q \end{pmatrix} (t - a)d\sigma(t) \begin{pmatrix} E_n^*(t) & \dfrac{1}{t - z} I_q \end{pmatrix} \tag{1.3.15}$$

y

$$K_{2,n}^{[S]}(z) = \int_a^b \begin{pmatrix} E_n(t) \\ \dfrac{1}{t - \bar{z}} I_q \end{pmatrix} (b - t)d\sigma(t) \begin{pmatrix} E_n^*(t) & \dfrac{1}{t - z} I_q \end{pmatrix}. \tag{1.3.16}$$

Demostración. De $S \in \mathcal{R}_q[[a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ obtenemos $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q[[a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$. En vista del Lema 1.8 y Lema 1.9 es suficiente verificar que

$$R_{T_n}(z)[v_n\tilde{S}_1(z) - u_{1,n}] = \int_a^b \left(\frac{t - a}{t - z}\right) E_n(t)d\sigma(t) \tag{1.3.17}$$

y

$$R_{T_n}(z)[v_n\tilde{S}_2(z) - u_{2,n}] = \int_a^b \left(\frac{b - t}{t - z}\right) E_n(t)d\sigma(t) \tag{1.3.18}$$

se satisfacen para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Usando (1.1.27) y (1.1.29) podemos concluir que

$$R_{T_n}(z)[v_n\tilde{S}_1(z) - u_{1,n}] = (z - a)R_{T_n}(z)v_n S(z) - R_{T_n}(z)(I - aT_n)\tilde{u}_n. \tag{1.3.19}$$

En vista de (1.1.4), tenemos

$$S(z) = \int_a^b \left(\frac{1}{t - z}\right) d\sigma(t). \tag{1.3.20}$$

Del Lema 1.8, (1.1.20), (1.1.21) y (1.3.7) vemos inmediatamente que

$$\tilde{u}_n = -\tilde{H}_{1,n}v_n = -\int_a^b E_n(t)d\sigma(t)I_q^* = -\int_a^b R_{T_n}(t)v_n d\sigma(t) \tag{1.3.21}$$

se cumple. Debido a (1.3.19), (1.3.20) y (1.3.21) inferimos entonces que

$$R_{T_n}(z)[v_n\tilde{S}_1(z) - u_{1,n}] = \int_a^b \frac{z - a}{t - z} R_{T_n}(z)v_n d\sigma(t) + \int_a^b R_{T_n}(z)(I - aT_n)R_{T_n}(t)v_n d\sigma(t). \tag{1.3.22}$$

Para cada número real t, de (1.3.14) obtenemos

$$R_{T_n}(z)(I - aT_n)R_{T_n}(t) = R_{T_n}(z)R_{T_n}(t) - \frac{a}{t-z}(R_{T_n}(t) - R_{T_n}(z)). \tag{1.3.23}$$

Consecuentemente, (1.3.22) y (1.3.23) nos proporcionan

$$R_{T_n}(z)[v_n\tilde{S}_1(z) - u_{1,n}] = \int_a^b \left(\frac{1}{t-z}[zR_{T_n}(z) + (t-z)R_{T_n}(z)R_{T_n}(t) - aR_{T_n}(t)]v_n\right) d\sigma(t). \tag{1.3.24}$$

Usando (1.1.20), para todo t arbitrario en $\mathbb{R}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
zR_{T_n}(z) + (t-z)R_{T_n}(z)R_{T_n}(t) &= zR_{T_n}(z) + tR_{T_n}(z)R_{T_n}(t) - zR_{T_n}(z)R_{T_n}(t)\\
&= zR_{T_n}(z)R_{T_n}^{-1}(t)R_{T_n}(t) + tR_{T_n}(z)R_{T_n}(t) - zR_{T_n}(z)R_{T_n}(t)\\
&= R_{T_n}(z)[zR_{T_n}^{-1}(t) + tI - zI]R_{T_n}(t)\\
&= R_{T_n}(z)[z(I - tT_n) + tI - zI]R_{T_n}(t)\\
&= R_{T_n}(z)t[I - zT_n]R_{T_n}(t)\\
&= R_{T_n}(z)tR_{T_n}^{-1}(z)R_{T_n}(t)\\
&= tR_{T_n}(t).
\end{aligned} \tag{1.3.25}$$

De (1.3.24) y (1.3.25) se sigue

$$R_{T_n}(z)[v_n\tilde{S}_1(z) - u_{1,n}] = \int_a^b \left(\frac{t-a}{t-z}\right) R_{T_n}(t)v_n d\sigma(t). \tag{1.3.26}$$

Además

$$\begin{aligned}
[\tilde{S}_1^*(z)v_n^* - u_{1,n}^*]R_{T_n}^*(z) &= \Big(R_{T_n}(z)[v_n\tilde{S}_1(z) - u_{1,n}]\Big)^*\\
&= \left(\int_a^b \frac{R_{T_n}(t)}{t-z}v_n(t-a)d\sigma(t)\right)^*.
\end{aligned}$$

Luego, debido a que $\sigma(t)$ es Hermitiana, se cumple

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b \frac{R_{T_n}(t)}{t-z}v_n(t-a)d\sigma(t)\right)^* &= \begin{pmatrix} \int_a^b \frac{(t-a)}{(t-z)}d\sigma(t)\\ \int_a^b t\frac{(t-a)}{(t-z)}d\sigma(t)\\ \vdots\\ \int_a^b t^n\frac{(t-a)}{(t-z)}d\sigma(t)\end{pmatrix}^*\\
&= \begin{pmatrix} \int_a^b \frac{(t-a)}{(t-\bar{z})}d\sigma(t) & \int_a^b t\frac{(t-a)}{(t-\bar{z})}d\sigma(t) & \cdots & \int_a^b t^n\frac{(t-a)}{(t-\bar{z})}d\sigma(t)\end{pmatrix}\\
&= \int_a^b \frac{(t-a)}{t-\bar{z}}d\sigma(t)v_n^*R_{T_n}^*(t),
\end{aligned}$$

donde hemos usado el Lema A.6 del Apéndice A. Entonces

$$[\tilde{S}_1^*(z)v_n^* - u_{1,n}^*]R_{T_n}^*(z) = \int_a^b \frac{(t-a)}{t-\bar{z}}d\sigma(t)v_n^*R_{T_n}^*(t). \tag{1.3.27}$$

El Lema 1.8, (1.3.8), (1.3.26), (1.3.27) y $R_{T_n}v_n = E_n$ implican

$$\begin{aligned}
K_{1,n}^{[S]}(z) &= \begin{pmatrix} \int_a^b E_n(t)(t-a)d\sigma(t)E_n^*(t) & \int_a^b \left(\frac{t-a}{t-z}\right)E_n(t)d\sigma(t)\\ \int_a^b \frac{(t-a)}{(t-\bar{z})}d\sigma(t)E_n^*(t) & \int_a^b \left(\frac{1}{t-z}\right)(t-a)d\sigma(t)\left(\frac{1}{t-\bar{z}}\right)\end{pmatrix}\\
&= \int_a^b \begin{bmatrix} E_n(t)\\ (t-\bar{z})^{-1}I_q\end{bmatrix}(t-a)d\sigma(t)\left[E_n^*(t)\ \ (t-z)^{-1}I_q\right].
\end{aligned}$$

Análogamente, como se verificó (1.3.17), se verifica (1.3.18) y entonces se tiene

$$K_{2,n}^{[S]}(z) = \int_a^b \begin{bmatrix} E_n(t) \\ (t-\bar{z})^{-1} I_q \end{bmatrix} (b-t) d\sigma(t) \left[E_n^*(t) \ (t-z)^{-1} I_q \right].$$

Así, el Lema 1.11 queda demostrado. ■

Proposición 1.12. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Si $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ está definido como en la Definición 1.12 y $\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ está definido como en la Definición 1.17, entonces se satisface la siguiente inclusión*

$$\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}] \subset \mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}].$$

Demostración. Sea $S \in \mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$. Por la Definición 1.12, S está definida de $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ en $\mathbb{C}^{q \times q}$ y es de la forma $S(z) = \int_a^b (t-z)^{-1} d\sigma(t)$ donde $\sigma \in \mathcal{M}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$. Además, $S \in \mathcal{R}_q[a,b]$ y por la Definición 1.11, se tiene que S es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$. En vista del Lema 1.11 tenemos que $K_{1,n}^{[S]}(z)$ y $K_{2,n}^{[S]}(z)$ dadas por (1.1.31) y (1.1.32), respectivamente, se pueden escribir como en (1.3.15) y (1.3.16), respectivamente, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Ya que $t \in [a,b]$ el integrando es no negativo, se sigue que $K_{1,n}^{[S]}(z) \geq 0$ y $K_{2,n}^{[S]}(z) \geq 0$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Usando esas representaciones integrales se puede ver que ambas matrices son Hermitianas en $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. También se puede verificar que $K_{1,n}^{[S]}(z)$ y $K_{2,n}^{[S]}(z)$ son Hermitianas directamente de (1.1.31) y (1.1.32). ■

Así finalizamos esta sección teniendo en cuenta que

$$\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}] \subset \mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}].$$

1.4. Condición de existencia de la solución de la versión matricial del problema de momentos

En esta sección reproducimos el criterio de existencia de la solución al problema de momentos de Huadorff en la versión matricial.

Lema 1.13. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que el conjunto $\mathcal{M}_{\geq}^q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido en la Definición 1.10 es no vacío. Entonces las matrices definidas en la Definición 1.14 $\tilde{H}_{1,n}$, $H_{1,n}$ y $H_{2,n}$ son Hermitianas no negativas y la matriz $\tilde{H}_{2,n}$ es Hermitiana. En particular, $s_j^* = s_j$ para todo $j \in \mathbb{N}_{0,2n+1}$ donde $\mathbb{N}_{0,2n+1}$ está determinado por la Notación 2.*

Demostración. Con las hipótesis del Lema 1.13, obtenemos las matrices definidas en la Definición 1.14. Sea $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$, claramente $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$. Entonces se puede ver que la afirmación del Lema 1.13 se sigue de aplicar el Lema 1.8 con las matrices introducidas en (1.1.22)-(1.1.25) ■

El Teorema 1.14 es importante ya que nos habla sobre la condición necesaria y suficiente para la existencia de la solución de la versión matricial del problema de momentos.

Teorema 1.14. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Entonces el conjunto $\mathcal{M}_{\geq}^q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido en la Definición 1.10 es no vacío si y solo si las matrices de bloque de Hankel introducidas en la Definición 1.14 $H_{1,n}$ y $H_{2,n}$, ambas son Hermitianas no negativas.*

Demostración. Probaremos la condición necesaria. Supongamos que $\mathcal{M}_{\geq}^q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}] \neq \emptyset$. De acuerdo al Lema 1.13, tenemos que en particular, las matrices de bloque de Hankel $H_{1,n}$ y $H_{2,n}$

ambas son Hermitianas no negativas. La demostración de la condición suficiente se puede encontrar en [CDFK, pág. 160-161]. ■

Observación 1.4. *Notemos que el Lema 1.8 a parte de ser importante por proporcionarnos las representaciones integrales de las matrices de bloque de Hankel introducidas en (1.3.2)-(1.3.5), también es importante porque es la base para obtener una condición necesaria para la existencia de la solución de la versión matricial del problema de momentos de Hausdorff.*

1.5. De las desigualdades matriciales de Potapov al problema de momentos

En esta sección vamos a concluir que toda función matricial que satisface el sistema de desigualdades matriciales fundamental del tipo V.P. Potapov asociado a el intervalo acotado $[a, b]$ y la secuencia $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$, también es una función que pertenece al conjunto $\mathcal{R}_q[[a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido en la Definición 1.12.

Al aplicar el Lema 1.13 para la demostración del Teorema 1.14 obtuvimos una condición necesaria para la existencia de la solución del problema de momentos en versión matricial de Hausdorff. De manera similar al Lema 1.13, agregamos la siguiente observación que nos permite obtener una condición necesaria para la existencia de la solución del sistema de desigualdades matriciales fundamental de tipo V.P. Potapov asociado a $[a, b]$ y $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$, es decir, una condición necesaria para que $\mathcal{P}_q[[a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}] \neq \emptyset$.

Observación 1.5. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ y $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Además, sea $\mathcal{P}_q[[a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido como en la Definición 1.17. Si $\mathcal{P}_q[[a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ es no vacío, entonces para las matrices introducidas en la Definición 1.14 se cumple: $H_{1,n} \geq 0$, $H_{2,n} \geq 0$, $\tilde{H}_{1,n} \geq 0$, $\tilde{H}_{2,n}^* = \tilde{H}_{2,n}$ y en particular $s_j^* = s_j$ para cada $j \in \mathbb{N}_{0,2n+1}$ donde $\mathbb{N}_{0,2n+1}$ está denotado de acuerdo a la Notación 2.*

Demostración. Sea $S \in \mathcal{P}_q[[a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$. Por la Definición 1.17, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, se cumple que $K_{1,n}^{[S]}(z) \geq 0$ y $K_{2,n}^{[S]}(z) \geq 0$. Multiplicando las desigualdades $K_{1,n}^{[S]}(z) \geq 0$ y $K_{2,n}^{[S]}(z) \geq 0$ por izquierda y por derecha por las matrices

$$(I_{(n+1)q} \; 0_{q \times q}), \quad \begin{pmatrix} I_{(n+1)q} \\ 0_{q \times q} \end{pmatrix},$$

respectivamente, se tiene que

$$H_{1,n} \geq 0 \quad \text{y} \quad H_{2,n} \geq 0. \tag{1.5.1}$$

De (1.5.1) y la identidad (1.2.1), se sigue que $\tilde{H}_{1,n} \geq 0$. Además, de la Definición 1.16 tenemos que $K_{1,n}^{[S]}(z)$ y $K_{2,n}^{[S]}(z)$ son Hermitianas, entonces $\tilde{H}_{2,n}$ es Hermitiana y en particular $s_j^* = s_j$ para cada $j \in \mathbb{N}_{0,2n+1}$. ■

Observación 1.6. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ y $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices complejas de $q \times q$. Además, sea $\mathcal{P}_q[[a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido como en la Definición 1.17. Supongamos que $\mathcal{P}_q[[a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}] \neq \emptyset$. Sea $S \in \mathcal{P}_q[[a, b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$. Entonces las funciones $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ canónicamente asociadas a S las cuales están definidas en (1.1.29) y (1.1.30) ambas son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$. Más aún, para cada $r \in \{1, 2\}$ y cada $\omega \in \Pi_+$, si consideramos $K_{r,n}^{[S]}(\omega) \geq 0$ y (1.3.10) se sigue inmediatamente que $\mathfrak{Im}\, \tilde{S}_r(\omega) \geq 0$. Aquí Π_+ y $K_{r,n}^{[S]}$ están definidos mediante la Notación 7 y la Definición 1.16, respectivamente.*

Lema 1.15. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q\times q$. Si $\mathcal{R}_q[a,b]$ está definido como en la Definición 1.11 y $\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ está definido como en la Definición 1.17. Entonces se cumple la siguiente inclusión:*

$$\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}] \subseteq \mathcal{R}_q[a,b].$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}] \neq \emptyset$ y sea $S \in \mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$, entonces de la Observación 1.6 se sigue el enunciado (ii) del Lema 1.10, que es equivalente al enunciado (i) del mismo Lema 1.10. Por lo tanto $S \in \mathcal{R}_q[a,b]$. ■

Lema 1.16. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q\times q$. Además, sean T_n, $R_{T_n}(z)$, v_n, $H_{1,n}$, $H_{2,n}$, $u_{1,n}$, y $u_{2,n}$ definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14. Supongamos que $s_j^* = s_j$ se satisface para cada $j \in \mathbb{N}_{0,2n+1}$ donde $\mathbb{N}_{0,2n+1}$ está denotado como en la Notación 2. Sea $S : \mathbb{C}\setminus[a,b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$ una función matricial y sean $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ dadas por la Definición 1.15. Para cada $r \in \{1,2\}$, sea $F_{r,n} : \mathbb{C}\setminus[a,b] \to \mathbb{C}^{(n+1)q\times(n+1)q}$ definida por*

$$F_{r,n}(\omega) := H_{r,n}T_n^* R_{T_n}^*(\bar{\omega}) + R_{T_n}(\omega)[v_n\tilde{S}_r(\omega) - u_{r,n}]v_n^* R_{T_n}^*(\bar{\omega}). \tag{1.5.2}$$

Para cada $r \in \{1,2\}$ y para todo $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, entonces

$$\Delta_n(z)K_{r,n}^{[S]}(z)\Delta_n^*(z) = Q_{r,n}^{[S]}(z), \tag{1.5.3}$$

$$\Gamma_n(z)Q_{r,n}^{[S]}(z)\Gamma_n^*(z) = K_{r,n}^{[S]}(z), \tag{1.5.4}$$

donde $K_{r,n}^{[S]}(z)$, $Q_{r,n}^{[S]}(z)$, $\Delta_n(z)$ y $\Gamma_n(z)$ están dadas por (1.1.31), (1.1.32),

$$Q_{r,n}^{[S]}(z) := \begin{pmatrix} H_{r,n} & F_{r,n}(z) \\ F_{r,n}^*(z) & \{F_{r,n}(z) - F_{r,n}^*(z)\}/\{z-\bar{z}\} \end{pmatrix}, \tag{1.5.5}$$

$$\Delta_n(z) := \begin{pmatrix} I_{(n+1)q} & 0 \\ R_{T_n}(\bar{z})T_n & R_{T_n}(\bar{z})v_n \end{pmatrix} \tag{1.5.6}$$

$$\Gamma_n(z) := \begin{pmatrix} I_{(n+1)q} & 0 \\ -v_n^* R_{T_n}(\bar{z})T_n & v_n^* \end{pmatrix}. \tag{1.5.7}$$

Demostración. Sea $r \in \{1,2\}$ y sea $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. En principio, demostraremos (1.5.3). Sea $\tilde{Q}_{r,n}^{[S]}(z) := \Delta_n(z)K_{r,n}^{[S]}\Delta_n^*(z)$ y dividimos a $\tilde{Q}_{r,n}^{[S]}(z)$ en bloques de $(n+1)q \times (n+1)q$ como sigue

$$\tilde{Q}_{r,n}^{[S]}(z) = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix}.$$

Claramente, tenemos que $A(z) = H_{r,n}$, $B(z) = F_{r,n}(z)$ y $C(z) = F_{r,n}^*(z)$. Además, de (1.1.31), (1.1.32) y (1.5.6) vemos fácilmente que

$$\begin{aligned} D(z) &= \begin{pmatrix} R_{T_n}(\bar{z})T_n & R_{T_n}(\bar{z})v_n \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} H_{r,n} & R_{T_n}(z)\,[\,v_n\tilde{S}_r(z) - u_{r,n}\,] \\ [\tilde{S}_r^*(z)v_n^* - u_{r,n}^*]R_{T_n}^*(z) & \{\tilde{S}_r(z) - \tilde{S}_r^*(z)\}/\{z-\bar{z}\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}) \\ v_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}) \end{pmatrix} \\ &= R_{T_n}(\bar{z})T_n H_{r,n}T_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}) + R_{T_n}(\bar{z})v_n[\tilde{S}_r^*(z)v_n^* - u_{r,n}^*]R_{T_n}^*(z)T_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}) \\ &+ R_{T_n}(\bar{z})T_n R_{T_n}(z)[v_n\tilde{S}_r(z) - u_{r,n}]v_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}) \\ &+ R_{T_n}(\bar{z})v_n\{\tilde{S}_r(z) - \tilde{S}_r^*(z)\}/\{z-\bar{z}\}v_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}). \end{aligned}$$

Usando (1.3.14) podemos concluir

$$\begin{aligned} R_{T_n}(\bar{z})T_n R_{T_n}(z)[v_n\tilde{S}_r(z) - u_{r,n}]v_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}) &= \frac{R_{T_n}(z) - R_{T_n}(\bar{z})}{z-\bar{z}}[v_n\tilde{S}_r(z) - u_{r,n}]v_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}) \\ &= \frac{1}{z-\bar{z}}(R_{T_n}(z)[v_n\tilde{S}_r(z) - u_{r,n}]v_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}) \\ &- R_{T_n}(\bar{z})v_n\tilde{S}_r(z)v_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}) + R_{T_n}(\bar{z})u_{r,n}v_n^* R_{T_n}^*(\bar{z})), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}D(z) = & \frac{1}{z-\bar{z}}[(z-\bar{z})R_{T_n}(\bar{z})T_nH_{r,n}T_n^*R_{T_n}^*(\bar{z})R_{T_n}(z)[v_n\tilde{S}_r(z)-u_{r,n}]v_n^*R_{T_n}^*(\bar{z}) \\ & + R_{T_n}(\bar{z})u_{r,n}v_n^*R_{T_n}^*(\bar{z}) - R_{T_n}(\bar{z})v_n[\tilde{S}_r^*(z)v_n^* - u_{r,n}^*]R_{T_n}^*(z) \\ & - R_{T_n}(\bar{z})v_nu_{r,n}^*R_{T_n}^*(\bar{z})].\end{aligned} \tag{1.5.8}$$

La Proposición 1.7 nos proporciona las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}R_{T_n}(\bar{z})u_{r,n}v_n^*R_{T_n}^*(\bar{z}) - R_{T_n}(\bar{z})v_nu_{r,n}^*R_{T_n}^*(\bar{z}) &= R_{T_n}(\bar{z})(u_{r,n}v_n^* - v_nu_{r,n}^*)R_{T_n}^*(\bar{z}) \\ &= R_{T_n}(\bar{z})(H_{r,n}T_n^* - T_nH_{r,n}^*)R_{T_n}^*(\bar{z}).\end{aligned} \tag{1.5.9}$$

Por lo tanto de (1.5.8) y (1.5.9) inferimos que

$$\begin{aligned}D(z) = & \frac{1}{z-\bar{z}}[R_{T_n}(\bar{z})(I-\bar{z}T_n)H_{r,n}T_n^*R_{T_n}^*(\bar{z}) \\ & - R_{T_n}(\bar{z})T_nH_{r,n}(I-zT_n^*)R_{T_n}^*(\bar{z}) + R_{T_n}(z)[v_n\tilde{S}_r(z)-u_{r,n}]v_n^*R_{T_n}^*(\bar{z}) \\ & - R_{T_n}(\bar{z})v_n[\tilde{S}_r^*(z)v_n^* - u_{r,n}^*]R_{T_n}^*(z)].\end{aligned}$$

En vista de $R_{T_n}(z)(I-zT_n) = I$ y $(I-\bar{z}T_n^*)R_{T_n}^*(\bar{z}) = I$, tenemos

$$\begin{aligned}D(z) = & \frac{1}{z-\bar{z}}[H_{r,n}T_n^*R_{T_n}^*(\bar{z}) - R_{T_n}(\bar{z})T_nH_{r,n} \\ & + R_{T_n}(z)[v_n\tilde{S}_r(z)-u_{r,n}]v_n^*R_{T_n}^*(\bar{z}) - R_{T_n}(\bar{z})v_n[\tilde{S}_r^*(z)v_n^* - u_{r,n}^*]R_{T_n}^*(z)] \\ = & \frac{F_{r,n}(z) - F_{r,n}^*(z)}{z-\bar{z}}.\end{aligned}$$

Consecuentemente, (1.5.3) queda demostrado. En vista de (1.1.20) y (1.1.21), tenemos $v_n^*R_{T_n}(z)v_n = I_q$ y por lo tanto $\Gamma_n(z)\Delta_n(z) = I$. Así de (1.5.3) se sigue finalmente (1.5.4) ■

Proposición 1.17. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$ y $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Sea $S : \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$ una función matricial holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$. Para $r \in \{1,2\}$, sea $F_{r,n} : \mathbb{C}\setminus[a,b] \to \mathbb{C}^{(n+1)q\times(n+1)q}$ para cada $\omega \in \mathbb{C}\setminus[a,b]$ definida por (1.5.2). Entonces, S es una solución de el sistema de desigualdades matriciales fundamental de tipo V.P. Potapov asociado a $[a,b]$ y $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ si y solo si para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ la matriz $Q_{r,n}^{[S]}(z)$ dada por (1.5.5) es Hermitiana no negativa.*

Demostración. Sean $y \in \mathbb{C}^{2q(n+1)\times 2q(n+1)}$. Consideremos $r \in \{1,2\}$ y las matrices $K_{r,n}^{[S]}(z)$ definidas mediante (1.1.31) y (1.1.32). Usando el Lema 1.16 tenemos que para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$y^*Q_{r,n}^{[S]}(z)y = y^*\Delta_n(z)K_{r,n}^{[S]}(z)\Delta_n^*(z)y = x^*K_{r,n}^{[S]}(z)x$$

donde $x = \Delta_n^*(z)y$. Claramente, $Q_{r,n}^{[S]}(z) \geq 0$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, si y solo si $K_{r,n}^{[S]}(z) \geq 0$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. ■

Cabe mencionar que en está sección en gran parte se utilizan los resultados sobre las clases de funciones $\mathcal{R}_q$, $\mathcal{R}_{0,q}$ y además se utilizan las definiciones sobre expresiones asintóticas. Para más detalle ver el Apéndice B.

Lema 1.18. *Sean H una matriz constante y $S(z)$ una función matricial holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, tales que satisfacen la desigualdad matricial*

$$\left[\begin{array}{c|c} H & S(z) \\ \hline S^*(z) & \{S(z)-S^*(z)\}/\{z-\bar{z}\} \end{array}\right] \geq 0 \tag{1.5.10}$$

entonces

1. *Existe una función matricial Hermitiana no decreciente $\Sigma(t)$ tal que satisface las siguientes*

representaciones integrales

$$S(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\Sigma(t)}{t-z},\qquad H^{\Sigma}=\int_{-\infty}^{+\infty}d\Sigma(t)\leq H \tag{1.5.11}$$

se cumplen.

2. *Para dos vectores cualesquiera fijos e y g de respectivas dimensiones, se cumple la expresión asintótica*

$$|e^*S(iy)g|=o(1),\ y>0,\ y\to+\infty. \tag{1.5.12}$$

Aquí el símbolo $o(1)$ que aparece en (1.5.12), está definido en la Definición A.10 del Apéndice A.

Demostración. 1. Por hipótesis, la función matricial $S(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ y

$$\mathbb{C}\setminus[a,b]\subset\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$$

de acuerdo a (1.1.5), $S(z)$ también es holomorfa en Π_+ donde Π_+ está denotado mediante la Notación 7. De (1.5.10) tenemos

$$\frac{S(z)-S^*(z)}{z-\bar{z}}\geq 0,$$

entonces

$$\frac{2\mathfrak{Im}\,S(z)}{2i\mathfrak{Im}\,z}\geq 0.$$

De donde, $\mathfrak{Im}\,S(z)\geq 0$ para $\mathfrak{Im}\,z>0$. Por lo que $S(z)\in\mathcal{R}_q$.

Veamos que $S(z)\in\mathcal{R}_{0,q}$. En (1.5.10) suponemos que $z=iy$, con $y>0$ y luego multiplicamos (1.5.10) por el lado derecho y por el lado izquierdo por las matrices

$$\left[\begin{array}{c|c} e^* & 0\\ \hline 0 & g^*\end{array}\right],\qquad \left[\begin{array}{c|c} e & 0\\ \hline 0 & g\end{array}\right],$$

donde e y g son vectores columnas de dimensión respectiva y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\|e\|\leq 1,\ \|g\|\leq 1$. Obtenemos

$$\left[\begin{array}{c|c} e^*He & e^*S(iy)g\\ \hline g^*S^*(iy)e & g^*\{S(iy)-S^*(iy)\}/\{2iy\}g\end{array}\right]\ \geq\ 0.$$

Observamos que

$$e^*He\leq|e^*He|\leq|e^*He|^2\leq\|e^*\|\|He\|\leq\|He\|\leq\|H\|$$

y

$$\begin{aligned} g^*\frac{S(iy)-S^*(iy)}{2iy}g &\leq\left|g^*\frac{S(iy)-S^*(iy)}{2iy}g\right|^2\leq\|g^*\|\left\|\frac{S(iy)-S^*(iy)}{2iy}g\right\|\\ &\leq\left\|\frac{S(iy)-S^*(iy)}{2iy}g\right\|\leq\left\|\frac{S(iy)-S^*(iy)}{2iy}\right\|\leq\left|\frac{1}{2iy}\right|(\|S(iy)\|+\|S^*(iy)\|)\\ &=\frac{\|S(iy)\|}{y}.\end{aligned}$$

De las estimaciones

$$e^*He\leq\|H\|,\qquad g^*\frac{S(iy)-S^*(iy)}{2iy}g\leq\frac{\|S(iy)\|}{y},$$

se sigue que

$$\left[\begin{array}{c|c} \|H\| & e^*S(iy)g\\ \hline g^*S^*(iy)e & \|S(iy)\|/y\end{array}\right]\ \geq\ 0,$$

de donde,

$$|e^*S(iy)g|^2 \leq \|H\| \cdot \|S(iy)\|/y.$$

Suponiendo que $e = S(iy)g/\|S(iy)\|$, tenemos

$$|g^*S^*(iy)/||S(iy)||(S(iy)g)|^2 \leq \|H\| \cdot \|S(iy)\|/y.$$

Por lo tanto,

$$y\|S(iy)\| \leq \|H\|. \tag{1.5.13}$$

Las últimas desigualdades demuestran que $S(z) \in \mathcal{R}_{0,q}$. Consecuentemente,

$$S(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Sigma(t)}{t-z}, \qquad H^\Sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Sigma(t) < +\infty. \tag{1.5.14}$$

Queda por demostrar que $H^\Sigma \leq H$. Por el Teorema B.7 del Apéndice B, tenemos:

$$-\lim_{y\to+\infty} iyS(iy) = \lim_{y\to+\infty} iyS^*(iy) = \lim_{y\to+\infty} y\mathfrak{Im}\, S(iy) = H^\Sigma. \tag{1.5.15}$$

Multiplicando (1.5.10) del lado izquierdo y derecho por las matrices

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & iyI \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -iyI \end{array}\right], \quad y > 0,$$

y después pasamos al limite $y \to +\infty$. De (1.5.15), obtenemos la desigualdad

$$\left[\begin{array}{c|c} H & H^\Sigma \\ \hline H^\Sigma & H^\Sigma \end{array}\right] \geq 0.$$

Multiplicando esta desigualdad de lado izquierdo y derecho por las matrices

$$\left[\begin{array}{c|c} I & -I \\ \hline 0 & I \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -I & I \end{array}\right],$$

tenemos

$$\left[\begin{array}{c|c} H - H^\Sigma & 0 \\ \hline 0 & H^\Sigma \end{array}\right] \geq 0.$$

De lo último, se sigue que $H^\Sigma \leq H$.

2. De (1.5.13), tenemos

$$\|S(iy)\| \leq \frac{\|H\|}{y}$$

pasando al límite cuando $y \to +\infty$ se tiene

$$\lim_{y\to+\infty} \|S(iy)\| = 0.$$

Así, obtenemos la expresión asintótica

$$\|S(iy)\| = o(1),\ y > 0,\ y \to +\infty.$$

De acuerdo a la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$|e^*S(iy)g| \leq |e^*S(iy)g|^2 \leq \|e^*\|\|S(iy)g\| \leq \|S(iy)g\| \leq \|S(iy)\|$$

tomando el límite cuando $y \to +\infty$ se tiene

$$\lim_{y\to+\infty} |e^*S(iy)g| = 0.$$

Por lo tanto,

$$|e^*S(iy)g| = o(1), \quad y > 0, \quad y \to +\infty.$$

■

Lema 1.19. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Sea $\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido como en la Definición 1.17. Sea*

$S(z) \in \mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$. Además, sean T_n, $R_{T_n}(z)$, v_n, $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ definidos como en las Definiciones 1.13, 1.14 y 1.15. Entonces para dos vectores fijos cualesquiera $e \in \mathbb{C}^{(n+1)q}$ y $g \in \mathbb{C}^q$ se satisface la expresión asintótica

$$|e^* R_{T_n}(iy)[v_n\tilde{S}_r(iy) - u_{r,n}]g| = o(1),\ y > 0,\ y \to +\infty, \tag{1.5.16}$$

para $r \in \{1,2\}$. Aquí el símbolo $o(1)$ que aparece en (1.5.16), está definido en la Definición A.10 del Apéndice A.

Demostración. Sea $r = 1$. Sin pérdida de generalidad, consideramos los vectores columna fijos $e \in \mathbb{C}^{(n+1)q}$ y $g \in \mathbb{C}^q$ tales que $\|e\| \leq 1$, $\|g\| \leq 1$. Consideremos $K_{1,n}^{[S]}(z)$ definido mediante (1.1.31). Supongamos que $z = iy$, con $y > 0$ en la desigualdad $K_{1,n}^{[S]}(z) \geq 0$ y multiplicando de lado izquierdo y de lado derecho respectivamente por

$$\left[\begin{array}{c|c} e^* & 0 \\ \hline 0 & g^* \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c|c} e & 0 \\ \hline 0 & g \end{array}\right],$$

tenemos

$$\begin{bmatrix} e^* H_{1,n} e & e^* R_{T_n}(iy)[v_n\tilde{S}_1(iy) - u_{1,n}]g \\ g^*[\tilde{S}_1^*(iy)v_n^* - u_{1,n}^*]R_{T_n}^*(iy)e & g^*\{\tilde{S}_1(iy) - \tilde{S}_1^*(iy)\}/\{2iy\}g \end{bmatrix} \geq 0.$$

De aquí, como en la demostración del Lema 1.18 obtenemos

$$|e^* R_{T_n}(iy)[v_n\tilde{S}_1(iy) - u_{1,n}]g|^2 \leq \|H_{1,n}\| \cdot \|\tilde{S}_1(iy)\|/y.$$

Del Lema 1.15 se tiene que $S(z) \in \mathcal{R}_q[a,b]$ y de la Observación B.2 del Apéndice B tenemos que

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\tilde{S}_1(iy)}{y} = 0.$$

Ya que $||\cdot||$ es continua, entonces tenemos

$$\lim_{y \to +\infty} |e^* R_{T_n}(iy)[v_n\tilde{S}_1(iy) - u_{1,n}]g| = 0.$$

Por lo tanto,

$$|e^* R_{T_n}(iy)[v_n\tilde{S}_1(iy) - u_{1,n}]g| = o(1),\ y > 0,\ y \to +\infty.$$

Así la relación (1.5.16) queda demostrada bajo la condición adicional $\|e\| \leq 1$ y $\|g\| \leq 1$. De aquí, de manera obvia se sigue que (1.5.16) se cumple para algunos vectores fijos e y g. De forma análoga esta afirmación es válida para $r = 2$. ■

Lema 1.20. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Además sean T_n, R_{T_n}, v_n, $H_{1,n}$, $H_{2,n}$, $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14, $\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido como en la Definición 1.17 y $\mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$ definido como en la Definición 1.8. Supongamos que $\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}] \neq \emptyset$. Sea $S(z) \in \mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$. De acuerdo al Lema 1.15 y Teorema 1.2 podemos suponer que $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$ es la función matricial de la representación $S(z) = \int_a^b (t-z)^{-1} d\sigma(t)$, entonces se cumplen las siguientes desigualdades*

$$H_{1,n}^{[\sigma]} \leq H_{1,n}, \quad H_{2,n}^{[\sigma]} \leq H_{2,n}. \tag{1.5.17}$$

Aquí

$$H_{1,n}^{[\sigma]} := \int_a^b R_{T_n}(t) v_n (t-a) d\sigma(t) v_n^* R_{T_n}^*(t), \tag{1.5.18}$$

$$H_{2,n}^{[\sigma]} := \int_a^b R_{T_n}(t) v_n (b-t) d\sigma(t) v_n^* R_{T_n}^*(t). \tag{1.5.19}$$

Demostración. Con la función matricial $S(z)$, construimos las funciones $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ canónicamente asociadas a S definidas en la Definición 1.15. También, construimos las funciones matriciales $F_{1,n}(z)$ y $F_{2,n}(z)$ definidas en (1.5.2) y finalmente obtenemos las funciones matriciales $Q_{1,n}^{[S]}(z)$ y $Q_{2,n}^{[S]}(z)$ definidas en (1.5.5). Por la Proposición 1.17, se satisfacen las desigualdades $Q^{[S]}_{1,n}(z) \geq 0$ y $Q^{[S]}_{2,n}(z) \geq 0$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, es decir,

$$Q^{[S]}_{1,n}(z) = \begin{pmatrix} H_{1,n} & F_{1,n}(z) \\ F^*_{1,n}(z) & \{F_{1,n}(z) - F^*_{1,n}(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{pmatrix} \geq 0,$$

$$Q^{[S]}_{2,n}(z) = \begin{pmatrix} H_{2,n} & F_{2,n}(z) \\ F^*_{2,n}(z) & \{F_{2,n}(z) - F^*_{2,n}(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{pmatrix} \geq 0,$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. De acuerdo a el Lema 1.18, existen dos funciones matriciales Hermitianas no decrecientes $\Sigma_1(t)$, $\Sigma_2(t)$ tales que

$$F_{1,n}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Sigma_1(t)}{t - z}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} d\Sigma_1(t) \leq H_{1,n}, \tag{1.5.20}$$

$$F_{2,n}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Sigma_2(t)}{t - z} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\Sigma_2(t) \leq H_{2,n}. \tag{1.5.21}$$

Sea $r \in \{1, 2\}$. En vista de (1.3.7), las funciones $F_{r,n} : \mathbb{C} \setminus [a, b] \to \mathbb{C}^{(n+1)q\times(n+1)q}$ dadas por (1.5.2) admiten la representación

$$F_{r,n}(z) = \Psi_{r,n}(z) + E_n(z)\tilde{S}_r(z)E^*_n(\bar{z}) \tag{1.5.22}$$

donde $E_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{(n+1)q\times q}$ está dada por (1.3.6) y $\Psi_{r,n} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{(n+1)q\times(n+1)q}$ se define como sigue

$$\Psi_{r,n}(z) := H_{r,n}T^*_n R^*_{T_n}(\bar{z}) - R_{T_n}(z)u_{r,n}v^*_n R^*_{T_n}(\bar{z}). \tag{1.5.23}$$

La Proposición 1.7 nos proporciona que

$$\begin{aligned} &\Psi_{r,n}(x) - \Psi^*_{r,n}(x) \\ &= R_{T_n}(x)((I - xT_n)H_{r,n}T^*_n - u_{r,n}v^*_n - T_n H_{r,n}(I - xT^*_n) + v_n u^*_{r,n})R^*_{T_n}(x) \\ &= R_{T_n}(x)(H_{r,n}T^*_n - T_n H_{r,n} - (u_{r,n}v^*_n - v_n u^*_{r,n}))R^*_{T_n}(x) = 0 \end{aligned}$$

Así,

$$\Psi_{r,n}(x) = \Psi^*_{r,n}(x) \tag{1.5.24}$$

Ahora, observemos que

$$\tilde{S}_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_1(t)}{t - z} \quad \text{donde} \quad d\mu_1(t) = (z - a)d\sigma(t), \tag{1.5.25}$$

$$\tilde{S}_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_2(t)}{t - z} \quad \text{donde} \quad d\mu_2(t) = (b - z)d\sigma(t). \tag{1.5.26}$$

Hacemos en el lado derecho de (1.5.22) $\varphi_1(z) = E_n(z)$ y $\varphi_2(z) = E_n(z)$. Tomando en cuenta (1.5.24), (1.5.25) y (1.5.26) aplicamos la fórmula generalizada de la transformada inversa de Stieltjes Teorema B.11 del Apéndice B, a el lado derecho de (1.5.22) y también aplicamos la fórmula de la transformada inversa de Stieltjes Teorema B.10 del Apéndice B, a el lado izquierdo de (1.5.22) y entonces tenemos

$$\Sigma_1(t_1) - \Sigma_1(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} E_n(x)d\mu_1(x)E^*_n(x) = \int_{t_0}^{t_1} E_n(x)(x - a)d\sigma(x)E^*_n(x),$$

$$\Sigma_2(t_3) - \Sigma_2(t_2) = \int_{t_2}^{t_3} E_n(x)d\mu_2(x)E^*_n(x) = \int_{t_2}^{t_3} E_n(x)(b - x)d\sigma(x)E^*_n(x).$$

Por la Observación A.7 del Apéndice A, existen sucesiones $(\alpha_m)^\infty_{m=1}$ y $(\beta_m)^\infty_{m=1}$ tales que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Sigma_1(t) &= \lim_{m\to\infty} [\Sigma_1(\beta_m) - \Sigma_1(\alpha_m)] = \lim_{m\to\infty} \int_{\alpha_m}^{\beta_m} E_n(x)(x - a)d\sigma(x)E^*_n(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E_n(x)(x - a)d\sigma(x)E^*_n(x) = \int_a^b E_n(x)(x - a)d\sigma(x)E^*_n(x) = H^{[\sigma]}_{1,n} \end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad hemos extendido a $\sigma(x)$ en $(-\infty, a)$ y en $(b, +\infty)$ como constante. En la cuarta igualdad se sigue de la propiedad de σ. Como σ es constante en $(-\infty, a)$ y $(b, +\infty)$, entonces se cumple que

$$\int_{-\infty}^{a} E_n(x)(x-a)d\sigma(x)E_n^*(x) = 0 \quad \text{y} \quad \int_{b}^{+\infty} E_n(x)(x-a)d\sigma(x)E_n^*(x) = 0.$$

Similarmente, tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\Sigma_2(t) = \lim_{m\to\infty}[\Sigma_2(t_2^{(m)}) - \Sigma_2(t_1^{(m)})] = \lim_{m\to\infty}\int_{t_1^{(m)}}^{t_2^{(m)}} E_n(x)(b-x)d\sigma(x)E_n^*(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} E_n(x)(b-x)d\sigma(x)E_n^*(x) = \int_{a}^{b} E_n(x)(b-x)d\sigma(x)E_n^*(x) = H_{2,n}^{[\sigma]}.$$

En vista de (1.5.20) y (1.5.21) se tiene que

$$H_{1,n}^{[\sigma]} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Sigma_1(t) \leq H_{1,n}, \qquad H_{2,n}^{[\sigma]} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Sigma_2(t) \leq H_{2,n}.$$

■

Definición 1.20. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$ y $\mathcal{M}_{\geq}^{q}[a,b]$ definido en la Definición 1.8. Para cada $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^{q}[a,b]$ y cada $m \in \mathbb{N}_0$, sean*

$$\tilde{u}_m := -\begin{bmatrix} s_0^{[\sigma]} \\ s_1^{[\sigma]} \\ \vdots \\ s_m^{[\sigma]} \end{bmatrix}, \tag{1.5.27}$$

$$u_{1,m}^{[\sigma]} := \tilde{u}_m^{[\sigma]} - aT_m\tilde{u}_m^{[\sigma]}, \tag{1.5.28}$$

$$u_{2,m}^{[\sigma]} := -\tilde{u}_m^{[\sigma]} + bT_m\tilde{u}_m^{[\sigma]}. \tag{1.5.29}$$

donde $s_j^{[\sigma]}$, $j \in \mathbb{N}_0$, están dados en (1.3.1) y además, T_m y $\tilde{u}_m$ están dados por (1.1.19) y (1.1.26), respectivamente.

Lema 1.21. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Además sean T_n, R_{T_n}, v_n, $H_{1,n}$, $H_{2,n}$, $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14, $\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido como en la Definición 1.17 y $\mathcal{M}_{\geq}^{q}[a,b]$ definido como en la Definición 1.8. Supongamos que $\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}] \neq \emptyset$. Sea la función matricial $S(z) \in \mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$. Sean $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ definidas como en la Definición 1.15, $\sigma(t)$, $H_{1,n}^{[\sigma]}$, $H_{2,n}^{[\sigma]}$ son los mismos como en el Lema 1.20. Entonces la función matricial $S(z)$ satisface el sistema de desigualdades matriciales*

$$\left[\begin{array}{c|c} H_{1,n}^{[\sigma]} & R_{T_n}(z)\,[\,v_n\tilde{S}_1(z) - u_{1,n}^{[\sigma]}\,] \\ \hline [\tilde{S}_1^*(z)v_n^* - u_{1,n}^{*[\sigma]}\,]R_{T_n}^*(z) & \{\tilde{S}_1(z) - \tilde{S}_1^*(z)\}/\{z-\bar{z}\} \end{array}\right] \;\geq\; 0, \tag{1.5.30}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} H_{2,n}^{[\sigma]} & R_{T_n}(z)\,[\,v_n\tilde{S}_2(z) - u_{2,n}^{[\sigma]}\,] \\ \hline [\tilde{S}_2^*(z)v_n^* - u_{2,n}^{*[\sigma]}\,]R_{T_n}^*(z) & \{\tilde{S}_2(z) - \tilde{S}_2^*(z)\}/\{z-\bar{z}\} \end{array}\right] \;\geq\; 0\,. \tag{1.5.31}$$

para cada $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Aquí,

$$u_{1,n}^{[\sigma]} := (I-aT_n)\int_a^b R_{T_n}(t)v_n d\sigma(t), \quad u_{2,n}^{[\sigma]} := -(I-bT_n)\int_a^b R_{T_n}(t)v_n d\sigma(t). \tag{1.5.32}$$

Demostración. Dadas las representaciones integrales para $H_{1,n}^{[\sigma]}$, $H_{2,n}^{[\sigma]}$ en el Lema 1.20 y para $u_{1,n}^{[\sigma]}$, $u_{2,n}^{[\sigma]}$ en (1.5.32), se puede formar una representación integral para el lado izquierdo de las desigualdades (1.5.30) y (1.5.31) similares a $K_{1,n}^{[S]}(z)$ y $K_{2,n}^{[S]}(z)$ como se hizo en la demostración del Lema 1.11. Ya que $S(z) \in \mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ se sigue que (1.5.30) y (1.5.31) se satisfacen para cada $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. ■

Lema 1.22. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Además sean T_n, R_{T_n}, v_n, $H_{1,n}$, $H_{2,n}$, $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14, $\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido como en la Definición 1.17 y $\mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$ definido como en la Definición 1.8. Supongamos que $\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}] \neq \emptyset$. Sea la función matricial $S(z) \in \mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ con las funciones canónicamente asociadas $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ definidas en la Definición 1.15. Además, sean $H_{1,n}^{[\sigma]}$, $u_{1,n}^{[\sigma]}$, $H_{2,n}^{[\sigma]}$, $u_{2,n}^{[\sigma]}$ son los mismos como en el Lema 1.20 y 1.21 respectivamente. Entonces las funciones matriciales*

$$S_1^{[\sigma]}(z) := H_{1,n}^{[\sigma]} T_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}) + R_{T_n}(z)[v_n \tilde{S}_1(z) - u_{1,n}^{[\sigma]}] v_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}), \tag{1.5.33}$$

$$S_2^{[\sigma]}(z) := H_{2,n}^{[\sigma]} T_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}) + R_{T_n}(z)[v_n \tilde{S}_2(z) - u_{2,n}^{[\sigma]}] v_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}), \tag{1.5.34}$$

satisfacen las desigualdades matriciales

$$\left[\begin{array}{c|c} H_{1,n}^{[\sigma]} & S_1^{[\sigma]}(z) \\ \hline S_1^{[\sigma]^*}(z) & \{S_1^{[\sigma]}(z) - S_1^{[\sigma]^*}(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array}\right] \geq 0, \tag{1.5.35}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} H_{2,n}^{[\sigma]} & S_2^{[\sigma]}(z) \\ \hline S_2^{[\sigma]^*}(z) & \{S_2^{[\sigma]}(z) - S_2^{[\sigma]^*}(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array}\right] \geq 0. \tag{1.5.36}$$

Demostración. Usando las representaciones integrales dadas, (1.5.33) y (1.5.34) tienen la misma forma que (1.5.2), entonces podemos construir matrices similares a $Q_{1,n}^{[\sigma]}(z)$ y $Q_{2,n}^{[\sigma]}(z)$ dadas por (1.5.5). Ya que $S(z) \in \mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$, de la Proposición 1.17 se sigue que (1.5.33) y (1.5.34) se cumplen. ■

Lema 1.23. *Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Sean T_n, R_{T_n} definidos como en la Definición 1.13. Si para algún vector fijo g y algún vector e tal que $\|e\| \leq 1$, la relación asintótica*

$$|e^* R_{T_n}(iy) g| = o(1), \quad y > 0, \quad y \to +\infty, \tag{1.5.37}$$

se satisface, entonces $g = 0$. Esta afirmación sigue siendo válida si requerimos que la relación asintótica (1.5.37) se cumpla para $y \to -\infty$. Aquí el símbolo $o(1)$ en (1.5.37), está definido en la Definición A.10 del Apéndice A.

Demostración. De acuerdo a (1.3.13), tenemos

$$R_{T_n}(z) = I + zT_n + ... + z^n T_n^n$$

para cada $z \in \mathbb{C}$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que en (1.5.37) $\|g\| \leq 1$. Sea $e = g$. Obtenemos

$$|e^* R_{T_n}(z) g| = |g^* g + z g^* T_n g + ... + z^n g^* T_n^n g|$$

para cada $z \in \mathbb{C}$. En particular, evaluamos en $z = iy$ y se tiene

$$|e^* R_{T_n}(iy) g| = |g^* g + (iy) g^* T_n g + ... + (iy)^n g^* T_n^n g|$$

para cada $y \in \mathbb{R}$. Entonces por hipótesis

$$|g^* g + (iy) g^* T_n g + ... + (iy)^n g^* T_n^n g| = o(1), \quad y \to +\infty,$$

es decir,

$$\lim_{y \to +\infty} |g^* g + (iy) g^* T_n g + ... + (iy)^n g^* T_n^n g| = 0$$

eso implica que $g^* g = 0$. Por lo tanto, $g = 0$. De forma similar, se estudia el caso cuando $y \to -\infty$. ■

Lema 1.24. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Además sean T_n, R_{T_n}, v_n, $H_{1,n}$, $H_{2,n}$, $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14, $\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido como en la Definición 1.17 y $\mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$ definido como en la Definición 1.8. Sea $S(z) \in \mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ solución del sistema de desigualdades matriciales fundamental. Sean $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ definidas como en la Definición 1.15, $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$ la función* *matricial de la representación* $S(z) = \int_a^b (t-z)^{-1} d\sigma(t)$ *y* $u_{1,n}^{[\sigma]}$, $u_{2,n}^{[\sigma]}$, *definidas por la fórmula (1.5.32). Entonces se cumplen las siguientes ecuaciones:*

$$u_{1,n} = u_{1,n}^{[\sigma]}, \quad u_{2,n} = u_{2,n}^{[\sigma]}. \tag{1.5.38}$$

Demostración. En vista de la Definición 1.16, tenemos que la siguiente desigualdad se satisface

$$\begin{pmatrix} H_{1,n} & R_{T_n}(z)\,[\,v_n\tilde{S}_1(z) - u_{1,n}\,] \\ R_{T_n}^*(z)\,[\,\tilde{S}_1^*(z)v_n^* - u_{1,n}^*\,] & \{\tilde{S}_1(z) - \tilde{S}_1^*(z)\}/\{z-\bar{z}\} \end{pmatrix} \geq 0,$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Por el Lema 1.21 la función matricial $S(z)$ satisface la desigualdad

$$\begin{pmatrix} H_{1,n}^{[\sigma]} & R_{T_n}(z)\,[\,v_n\tilde{S}_1(z) - u_{1,n}^{[\sigma]}\,] \\ R_{T_n}^*(z)\,[\,\tilde{S}_1^*(z)v_n^* - (u_{1,n}^{[\sigma]})^*\,] & \{\tilde{S}_1(z) - \tilde{S}_1^*(z)\}/\{z-\bar{z}\} \end{pmatrix} \geq 0,$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. De esas desigualdades y por el Lema 1.19, se sigue que para algunos vectores fijos $e \in \mathbb{C}^{(n+1)q}$, $g \in \mathbb{C}^q$ ($y > 0$, $y \to +\infty$),

$$|e^* R_{T_n}(iy)\,[\,v_n\tilde{S}_1(iy) - u_{1,n}\,]g| = o(1),$$

$$|e^* R_{T_n}(iy)\,[\,v_n\tilde{S}_1(iy) - u_{1,n}^{[\sigma]}\,]g| = o(1).$$

Por lo tanto,

$$|e^* R_{T_n}(iy)\,[\,u_{1,n} - u_{1,n}^{[\sigma]}\,]g| = o(1), \;\; y > 0, \quad y \to +\infty.$$

Para el caso general, en la relación asintótica uno puede suponer que g es un vector abritrario fijo y e es un vector arbitrario fijo tal que $\|e\| \leq 1$. Por el Lema 1.23 $[\,u_{1,n} - u_{1,n}^{[\sigma]}\,]g = 0$, $\forall g \in \mathbb{C}^q$. Por lo tanto, $u_{1,n} = u_{1,n}^{[\sigma]}$. En forma análoga vemos que $u_{2,n} = u_{2,n}^{[\sigma]}$. ■

Lema 1.25. *Sean* $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ *y sea* $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ *una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión* $q \times q$. *Además sean* T_n, R_{T_n}, v_n, $H_{1,n}$, $H_{2,n}$, $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, *definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14,* $\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ *definido como en la Definición 1.17 y* $\mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$ *definido como en la Definición 1.8. Sea* $S(z) \in \mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$. *Sean* $\tilde{S}_1$ *y* $\tilde{S}_2$ *definidas como en la Definición 1.15,* $\sigma(t)$, $u_{1,n}^{[\sigma]}$ *y* $u_{2,n}^{[\sigma]}$, $H_{1,n}^{[\sigma]}$, $H_{2,n}^{[\sigma]}$, *los mismos como en el Lema 1.20 y Lema 1.21. entonces las siguientes igualdades se satisfacen:*

$$T_n(H_{1,n} - H_{1,n}^{[\sigma]}) = 0, \quad T_n(H_{2,n} - H_{2,n}^{[\sigma]}) = 0. \tag{1.5.39}$$

Demostración. Dado $S(z)$, de acuerdo a (1.1.29) construimos dos funciones

$$F_1(z) = H_{1,n}T_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}) + R_{T_n}(z)[v_n\tilde{S}_1(z) - u_{1,n}]v_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}),$$

$$F_1^{[\sigma]}(z) = H_{1,n}^{[\sigma]}T_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}) + R_{T_n}(z)[v_n\tilde{S}_1(z) - u_{1,n}^{[\sigma]}]v_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}).$$

Por el Lema 1.24, $u_{1,n} = u_{1,n}^{[\sigma]}$, entonces

$$F_1(z) - F_1^{[\sigma]}(z) = (H_{1,n} - H_{1,n}^{[\sigma]})T_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}). \tag{1.5.40}$$

Por un lado, observemos que $F_1(z)$ es de la forma (1.5.2), luego, por el Lema 1.16 y por la Proposición 1.17, tenemos

$$\left[\begin{array}{c|c} H_{1,n} & F_1(z) \\ \hline F_1^*(z) & \{F_1(z) - F_1^*(z)\}/\{z-\bar{z}\} \end{array}\right] \geq 0.$$

Por otro lado, el Lema 1.21 nos dice que

$$\left[\begin{array}{c|c} H_{1,n}^{[\sigma]} & F_1^{[\sigma]}(z) \\ \hline {F_1^{[\sigma]}}^*(z) & \{F_1^{[\sigma]}(z) - {F_1^{[\sigma]}}^*(z)\}/\{z-\bar{z}\} \end{array}\right] \geq 0.$$

De esas desigualdades y usando el Lema 1.18 junto con (1.5.12) para algunos vectores fijos e y g

obtenemos las estimaciones

$$|e^* F_1(iy)g| = o(1),\ |e^* F_1^{[\sigma]}(iy)g| = o(1),\ y > 0,\ y \to +\infty.$$

De aquí,

$$|e^* \{F_1(iy) - F_1^{[\sigma]}(iy)\} g| = o(1),\ y > 0,\ y \to +\infty.$$

Tomando en cuenta (1.5.40) tenemos

$$|e^* (H_{1,n} - H_{1,n}^{[\sigma]}) T_n^* R_{T_n}^*(-iy) g| = o(1),\ y > 0,\ y \to +\infty.$$

O, que es lo mismo

$$|g^* R_{T_n}^*(-iy) T_n (H_{1,n} - H_{1,n}^{[\sigma]}) e| = o(1),\ y > 0,\ y \to +\infty.$$

En general, en la relación asintótica podemos suponer que los vectores arbitrarios fijos e y g son vectores arbitrarios tales que $\|g\| \leq 1$. Entonces por el Lema 1.23, $T_n(H_{1,n} - H_{1,n}^{[\sigma]})e = 0,\ \|e\| \leq 1$. Por lo tanto, tenemos $T_n(H_{1,n} - H_{1,n}^{[\sigma]}) = 0$. La primera desigualdad de (1.5.39) queda demostrada. La segunda desigualdad puede ser demostrada en forma similar. ■

Proposición 1.26. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Además, sean T_n, R_{T_n}, v_n, $H_{1,n}$, $H_{2,n}$, $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14, $\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido como en la Definición 1.17 y $\mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$ definido como en la Definición 1.8. Sea $S(z) \in \mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$. Sean $H_{1,n}^{[\sigma]}$, $H_{2,n}^{[\sigma]}$, los mismos como en el Lema 1.20, y $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$ la única que satisface $S(z) = \int_a^b (t-z)^{-1} d\sigma(t)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$. Entonces*

$$s_j = \int_a^b t^j d\sigma(t),$$

para cada $j \in \mathbb{N}_{0,2n+1}$ donde $\mathbb{N}_{0,2n+1}$ se denota mediante la Notación 2.

Demostración. De (1.5.18), (1.5.19) y (1.5.39) se sigue que

$$-as_j + s_{j+1} = -a \int_a^b t^j d\sigma(t) + \int_a^b t^{j+1} d\sigma(t), \tag{1.5.41}$$

$$bs_j - s_{j+1} = b \int_a^b t^j d\sigma(t) - \int_a^b t^{j+1} d\sigma(t)$$

para cada $j \in \mathbb{N}_{0,2n-1}$. Sumando estas igualdades tenemos

$$s_j = \int_a^b t^j d\sigma(t), \tag{1.5.42}$$

para cada $j \in \mathbb{N}_{0,2n-1}$. Sustituyendo $j = 2n-1$ en (1.5.41). Entonces

$$-a \int_a^b t^{2n-1} d\sigma(t) + s_{2n} = -a \int_a^b t^{2n-1} d\sigma(t) + \int_a^b t^{2n} d\sigma(t),$$

por lo que,

$$s_{2n} = \int_a^b t^{2n} d\sigma(t). \tag{1.5.43}$$

De (1.5.17) tenemos

$$-as_{2n} + s_{2n+1} - \left(-a \int_a^b t^{2n} d\sigma(t) + \int_a^b t^{2n+1} d\sigma(t)\right) \geq 0,$$

$$bs_{2n} - s_{2n+1} - \left(b \int_a^b t^{2n} d\sigma(t) - \int_a^b t^{2n+1} d\sigma(t)\right) \geq 0.$$

Por lo tanto, de (1.5.43) se sigue

$$s_{2n+1} \geq \int_a^b t^{2n+1} d\sigma(t), \quad s_{2n+1} \leq \int_a^b t^{2n+1} d\sigma(t).$$

Así,

$$s_{2n+1} = \int_a^b t^{2n+1} d\sigma(t), \tag{1.5.44}$$

De (1.5.42), (1.5.43) y (1.5.44) se sigue la validez de la Proposición 1.26. ■

Ahora presentamos y demostramos el Teorema principal de esta sección.

Teorema 1.27. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Si $\mathcal{R}_q[[a,b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ está definido como en la Definición 1.12 y $\mathcal{P}_q[[a,b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ está definido como en la Definición 1.17. Entonces se satisface la siguiente inclusión:*

$$\mathcal{P}_q[[a,b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}] \subset \mathcal{R}_q[[a,b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}].$$

Demostración. Sea $S \in \mathcal{P}_q[[a,b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$. En vista del Lema 1.15, $S \in \mathcal{R}_q[a,b]$ y por la parte (b) del Teorema 1.2, existe una única $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q[a,b]$ tal que

$$S(z) = \int_a^b \frac{1}{t-z} d\sigma(t)$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$ y, además por la Proposición 1.26, σ es tal que

$$s_j = \int_a^b t^j d\sigma(t),$$

se satisface para cada $j \in \mathbb{N}_{0,2n+1}$. Aquí $\mathbb{N}_{0,2n+1}$ se denota mediante la Notación 2. Entonces $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q[[a,b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$. Por lo tanto, $S \in \mathcal{R}_q[[a,b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$. ■

De esta manera, se tiene el primer resultado importante de este trabajo. Usando la Proposición 1.12 y el Teorema 1.27 claramente queda demostrado el Teorema 1.5. Entonces, de aquí en adelante sabemos que $\mathcal{R}_q[[a,b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ y $\mathcal{P}_q[[a,b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ coinciden. Así, las funciones matriciales $S^{[\sigma]} : \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$ definidas como en (1.1.3), para cada $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q[[a,b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$, son las soluciones del sistema de desigualdades matriciales fundamental del tipo de V.P. Potapov asociado a la versión matricial del problema de momento de Hausdorff. Recíprocamente, las funciones $S(z)$ que son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ y que satisfacen las desigualdades $K_{1,n}^{[S]}(z) \geq 0$ y $K_{2,n}^{[S]}(z) \geq 0$, donde $K_{1,n}^{[S]}$ y $K_{2,n}^{[S]}$ están dadas en (1.1.31) y (1.1.32), respectivamente, son funciones que tienen la forma como en (1.1.3), para cada $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q[[a,b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$.

1.6. Ejemplos

Ejemplo 1.1. *Sea $q = 2$. Consideremos la función matricial definida en $[0,1]$ y dada por*

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} + t & 2t^2 - 2t \\ 2t^2 - 2t & 3t^3 - \frac{11}{2}t^2 + 4t \end{pmatrix}.$$

Verificar que $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^2[0,1]$, donde $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^2[0,1]$ se define mediante la Definición 1.8.

Solución. Es obvio que

$$\sigma(t) \quad \text{es Hermitiana para todo} \quad t \in [0,1] \tag{1.6.1}$$

y también es faćil ver que

$$\sigma(0) = 0. \tag{1.6.2}$$

Sea $t \in (0, 1]$, tenemos

$$\begin{aligned}
\det \sigma(t) &= \left(\frac{t^2}{2} + t\right)\left(3t^3 - \frac{11}{2}t^2 + 4t\right) - \left(2t^2 - 2t\right)^2 \\
&= t^2\left(\frac{t}{2} + 1\right)\left(3t^2 - \frac{11}{2}t + 4\right) - t^2(2t-2)^2 \\
&= t^2\left(\left(\frac{t}{2} + 1\right)\left(3t^2 - \frac{11}{2}t + 4\right) - (2t-2)^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t^2\left(\left(\frac{3}{2}t^3 - \frac{11}{4}t^2 + 2t + 3t^2 - \frac{11}{2}t + 4\right) - (4t^2 - 8t + 4)\right) \\
&= t^2\left(\frac{3}{2}t^3 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{9}{2}t\right) = \frac{3}{2}t^3\left(t^2 - \frac{5}{2}t + 9\right).
\end{aligned}$$

El discriminante de $\left(t^2 - \frac{5}{2}t + 9\right)$ es $\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4(1)(9) < 0$ por lo que $\left(t^2 - \frac{5}{2}t + 9\right) > 0$ para todo $t \in (0, 1]$. Ya que $\frac{3}{2}t^3 > 0$ para todo $t \in (0, 1]$ se sigue que $\det \sigma(t) > 0$ para todo $t \in (0, 1]$. Además, $\frac{t^2}{2} + t > 0$ para cada $t \in (0, 1]$. Usando el criterio de Sylvester, Teorema A.13 del Apéndice A, tenemos que

$$\sigma(t) > 0 \quad \text{para todo} \quad t \in (0, 1]. \tag{1.6.3}$$

De (1.6.2) y (1.6.3) concluimos que

$$\sigma(t) \geq 0 \quad \text{para todo} \quad t \in [0, 1]. \tag{1.6.4}$$

Claramente

$$\sigma(t_1) - \sigma(t_0) = 0 \quad \text{para todo} \quad t_0, t_1 \in [0, 1] \quad \text{tales que} \quad t_0 = t_1. \tag{1.6.5}$$

Sean $t_0, t_1 \in [0, 1]$ tales que $t_0 < t_1$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\det\left(\sigma(t_1) - \sigma(t_0)\right) &= \det\begin{pmatrix} (\frac{t_1^2}{2} + t_1) - (\frac{t_0^2}{2} + t_0) & (2t_1^2 - 2t_1) - (2t_0^2 - 2t_0) \\ (2t_1^2 - 2t_1) - (2t_0^2 - 2t_0) & (3t_1^3 - \frac{11}{2}t_1^2 + 4t_1) - (3t_0^3 - \frac{11}{2}t_0^2 + 4t_0) \end{pmatrix} \\
&= (t_1 - t_0)\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t_1 + t_0) + 1 & 2(t_1 + t_0) - 2 \\ 2(t_1 + t_0) - 2 & 3(t_1^2 + t_1t_0 + t_0^2) - \frac{11}{2}(t_1 + t_0) + 4 \end{pmatrix} \\
&= (t_1 - t_0)[\frac{1}{2}(t_1 + t_0 + 2)(3(t_1^2 + t_1t_0 + t_0^2) - \frac{11}{2}(t_1 + t_0) + 4) \\
&\quad - 4(t_1 + t_0 - 1)^2]
\end{aligned} \tag{1.6.6}$$

Sea $h : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$h(t_0, t_1) := \frac{1}{2}(t_1 + t_0 + 2)(3(t_1^2 + t_1t_0 + t_0^2) - \frac{11}{2}(t_1 + t_0) + 4) - 4(t_1 + t_0 - 1)^2. \tag{1.6.7}$$

Calculamos el gradiente de la función h:

$$\nabla h = \frac{3}{2}(3 + 2t_1^2 - 5t_0 + 3t_0^2 - 7t_1 + 4t_0t_1, 3 + 3t_1^2 - 7t_0 + 2t_0^2 - 5t_1 + 4t_0t_1).$$

Igualando ∇h a cero tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
3 + 2t_1^2 - 5t_0 + 3t_0^2 - 7t_1 + 4t_0t_1 &= 0 \\
3 + 3t_1^2 - 7t_0 + 2t_0^2 - 5t_1 + 4t_0t_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Resolviendo para t_0 y t_1, encontramos dos puntos críticos de h que se encuentran en $[0, 1] \times [0, 1]$ los cuales son: $(1, 1)$ y $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Ya que $[0, 1] \times [0, 1]$ es cerrado y acotado, buscamos los puntos críticos en la frontera del dominio de $[0,1]\times[0,1]$. Primeramente en $t_0=0$, $0\le t_1\le 1$

$$\begin{aligned} h(0,t_1) &= \frac{1}{2}(t_1+2)(3t_1^2-\frac{11}{2}t_1+4)-4(t_1-1)^2 \\ &= \frac{3}{2}t_1^3-\frac{15}{4}t_1^2+\frac{9}{2}t_1 \end{aligned}$$

$$h'(0,t_1)=\frac{9}{2}t_1^2-\frac{15}{2}t_1+\frac{9}{2}.$$

Igualando a cero $h'(0,t_1)$ tenemos que no hay soluciones reales para t_1. Así, solo tenemos los puntos críticos: $(0,0)$, $(0,1)$. Similarmente para $t_1=0$, $0\le t_0\le 1$, tenemos

$$\begin{aligned} h(t_0,0) &= \frac{1}{2}(t_0+2)(3t_0^2-\frac{11}{2}t_0+4)-4(t_0-1)^2 \\ &= \frac{3}{2}t_0^3-\frac{15}{4}t_0^2+\frac{9}{2}t_0 \end{aligned}$$

y

$$h'(t_0,0)=\frac{9}{2}t_0^2-\frac{15}{2}t_0+\frac{9}{2}$$

los puntos críticos son: $(0,0)$, $(1,0)$. En $t_0=1$, $0\le t_1\le 1$, tenemos

$$\begin{aligned} h(1,t_1) &= \frac{1}{2}(t_1+3)(3(t_1^2+t_1+1)-\frac{11}{2}(t_1+1)+4)-4t_1^2 \\ &= \frac{3}{2}t_1^3-\frac{3}{4}t_1^2-3t_1+\frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$h'(1,t_1)=\frac{9}{2}t_1^2-\frac{3}{2}t_1-3.$$

Igualando a cero $h'(1,t_1)$ y resolviendo para t_1 encontramos que $t_1=-\frac{2}{3}$ y $t_1=1$. Por lo que los puntos críticos para este caso son: $(1,0)$, $(1,1)$. Similarmente, para $t_1=1$, $0\le t_0\le 1$, tenemos

$$\begin{aligned} h(t_0,1) &= \frac{1}{2}(t_0+3)(3(1+t_0+t_0^2)-\frac{11}{2}(1+t_0)+4)-4t_0^2 \\ &= \frac{3}{2}t_0^3-\frac{3}{4}t_0^2-3t_0+\frac{9}{4} \end{aligned}$$

y

$$h'(t_0,1)=\frac{9}{2}t_0^2-\frac{3}{2}t_0-3$$

los puntos críticos son: $(0,1)$, $(1,1)$. Juntando los puntos críticos que se encontraron mediante el uso del gradiente de h con los puntos críticos en la frontera de $[0,1]\times[0,1]$ podemos hacer lo siguiente. Para encontrar el máximo y el mínimo absoluto, simplemente evaluamos $h(t_0,t_1)$ en cada punto crítico.

Puntos críticos (t_0,t_1) de h	Los valores de h en el punto crítico (t_0,t_1)
$(0,0)$	0
$(1/3,1/3)$	4/3
$(0,1)$	9/4
$(1,0)$	9/4
$(1,1)$	0

El valor mayor en la segunda columna de la tabla anterior nos dice en donde tenemos el máximo y según la tabla anterior, hay dos máximos en $(0,1)$ y $(1,0)$. El valor más pequeño de la segunda columna de la tabla anterior nos dice en donde tenemos el mínimo y de acuerdo a la tabla anterior tenemos dos los cuales son en $(0,0)$ y $(1,1)$. A diferencia de los problemas de valor extremo sin restricción, no hay necesidad de hacer una segunda prueba de derivadas. Esto se debe a que no nos preocupa si un punto en particular es un mínimo local, un máximo. Lo que nos interesa es ver si un punto tiene el valor máximo o mínimo absoluto en nuestra región cerrada y acotada.

Ya que, $(1,1)$ es un mínimo de h en $[0,1]\times[0,1]$, es decir, se cumple que $h(1,1)\le h(t_0,t_1)$ para todo $(t_0,t_1)\in[0,1]\times[0,1]$ y además, $h(1,1)=0$, entonces $h(t_0,t_1)\ge 0$ para todo $(t_0,t_1)\in[0,1]\times[0,1]$. En vista de (1.6.6) y (1.6.7), tenemos que

$$\det(\sigma(t_1)-\sigma(t_0))=(t_1-t_0)h(t_0,t_1).$$

Ya que $t_0<t_1$ y $h(t_0,t_1)$ solo es cero cuando $(t_0,t_1)=(0,0)$ y $(t_0,t_1)=(1,1)$, entonces se sigue que

$$\det(\sigma(t_1)-\sigma(t_0))>0.$$

La función $\frac{t^2}{2}+t$ es creciente, entonces para $t_1>t_0$ se cumple que $(\frac{t_1^2}{2}+t_1)-(\frac{t_0^2}{2}+t_0)>0$. Usando el criterio de Sylvester, Teorema A.13 del Apéndice A, tenemos que

$$\sigma(t_1)-\sigma(t_0)>0 \quad \text{para todo} \quad t_0,t_1\in[0,1] \quad \text{tales que} \quad t_1>t_0. \tag{1.6.8}$$

De (1.6.5) y (1.6.8), tenemos que

$$\sigma(t_1)-\sigma(t_0)\ge 0 \quad \text{para todo} \quad t_0,t_1\in[0,1] \quad \text{tales que} \quad t_1\ge t_0. \tag{1.6.9}$$

En vista de (1.6.1), (1.6.4) y (1.6.9) concluimos que la función

$$\sigma(t)=\begin{pmatrix} \frac{t^2}{2}+t & 2t^2-2t \\ 2t^2-2t & 3t^3-\frac{11}{2}t^2+4t \end{pmatrix} \tag{1.6.10}$$

en pertenece al conjunto $\mathcal{M}^2_{\ge}[0,1]$ el cual se define mediante la Definición 1.8.

Ejemplo 1.2. *Sea $n=2$ y el intervalo $[0,1]$. Obtener los cinco primeros momentos de la función $\sigma(t)$ ubicada en (1.6.10).*

Solución. Utilizando (1.1.2), tenemos:

$$s_0=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad s_1=\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} \qquad s_2=\begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{23}{60} \end{pmatrix}$$

$$s_3=\begin{pmatrix} \frac{9}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \qquad s_4=\begin{pmatrix} \frac{11}{30} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & \frac{53}{210} \end{pmatrix} \qquad s_5=\begin{pmatrix} \frac{13}{42} & \frac{5}{21} \\ \frac{5}{21} & \frac{37}{168} \end{pmatrix}.$$

Capítulo 2

El problema de momento en el caso no degenerado

Como hemos mencionado en el Problema 1.1 del capítulo anterior, estamos interesados en describir el conjunto $\mathcal{M}^q_{\geq}[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$, pero según la versión matricial reformulada del problema de momentos, es decir, el Problema 1.4, basta con describir el conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ dado en la Definición 1.12 y por ahora también podemos referirnos a dicho conjunto como el conjunto de soluciones de la versión matricial del problema de momento de Hausdorff. Además, recordemos que

$$\mathcal{M}^q_{\geq}[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}] \neq \emptyset \quad \text{si y solo si} \quad \mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}] \neq \emptyset. \tag{2.1.1}$$

En este capítulo nos ocuparemos en reescribir el sistema de desigualdades matriciales fundamental del tipo de V.P. Potapov asociado a la versión matricial del problema de momentos de Hausdorff en un número par de momentos, para el caso no degenerado. También, introducimos la matriz resolvente. Cabe mencionar que en este capítulo continuaremos usando la notación introducida en las secciones anteriores.

Observación 2.1. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$. Sea $\mathcal{M}^q_{\geq}[a,b]$ el conjunto definido mediante la Definición 1.8. Para toda $\sigma \in \mathcal{M}^q_{\geq}[a,b]$ y todo entero no negativo j, sea $s_j^{[\sigma]}$ dado por (1.3.1). Del Lema 1.8 sabemos que, para cada $\sigma \in \mathcal{M}^q_{\geq}[a,b]$ y para todo entero no negativo m, las matrices $H_{1,m}^{[\sigma]}$ y $H_{2,m}^{[\sigma]}$ dadas por (1.3.4) y (1.3.5) son Hermitianas no negativas. Por lo tanto, en vista de (2.1.1), los Teoremas 1.5 y 1.14 del capítulo 1, si $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ es una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que el conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ dado en la Definición 1.12, es no vacío. Es decir, el conjunto de soluciones de la versión matricial reformulada del problema de momento de Hausdorff es no vacío. Entonces la primera matriz de bloques de Hankel $H_{1,n}$ y la segunda matriz de bloques de Hankel $H_{2,n}$ asociadas con el intervalo $[a,b]$ y la secuencia $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ dadas por (1.1.24) y (1.1.25) son Hermitianas no negativas.*

En la Sección 2.1, daremos una parametrización del conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ bajo la suposición de que las matrices de bloque de Hankel $H_{1,n}$ y $H_{2,n}$ son Hermitianas positivas. A este caso le llamaremos *caso no degenerado*, es decir,

$$H_{1,n} > 0, \quad H_{2,n} > 0. \tag{2.1.2}$$

De (1.2.1) y (2.1.2) se sigue $\tilde{H}_{1,n} > 0$. Supongamos además que $\det \tilde{H}_{2,n} \neq 0$. En consecuencia las matrices $H_{r,n}$ y $\tilde{H}_{r,n}$ son invertibles. Lo anterior nos permite hacer la siguiente observación.

Observación 2.2. $(\tilde{H}_{r,n}^{-1})^* = \tilde{H}_{r,n}^{-1^*} = (\tilde{H}_{r,n}^*)^{-1} = \tilde{H}_{r,n}^{-1}$, *debido a que las matrices $\tilde{H}_{r,n}$ son simétricas y sus entradas son matrices Hermitianas. Similarmente, por (2.1.2) tenemos que $(H_{r,n}^{-1})^* = H_{r,n}^{-1}$.*

Considerando el caso no degenerado, introduzcamos notación adicional para esta sección.

Definición 2.1. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $n \in \mathbb{N}_0$ y $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Además, sean T_n, R_{T_n}, v_n, $\tilde{H}_{1,n}$, $\tilde{H}_{2,n}$, $H_{1,n}$, $H_{2,n}$, $\tilde{u}_n$ definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14, entonces definimos*

$$M_{1,n} := -a\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} \tilde{u}_n, \qquad M_{2,n} := b\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} \tilde{u}_n, \tag{2.1.3}$$

$$N_{1,n} := -bv_n^* H_{1,n}^{-1} \tilde{H}_{2,n} H_{2,n}^{-1} v_n, \qquad N_{2,n} := av_n^* H_{1,n}^{-1} \tilde{H}_{2,n} H_{2,n}^{-1} v_n. \tag{2.1.4}$$

Estas matrices satisfacen las siguientes propiedades.

Lema 2.1. *Sean $M_{r,n}$ y $N_{r,n}$ definidos como en (2.1.3) y (2.1.4). Entonces se satsifacen las siguientes igualdades:*

$$M_{r,n} = M_{r,n}^* \quad y \quad N_{r,n} = N_{r,n}^*, \quad \textit{para } r = 1, 2. \tag{2.1.5}$$

Demostración. La primera igualdad se verifica fácilmente calculando la transpuesta conjugada para amabas ecuaciones en (2.1.3) y haciendo uso de la Observación 2.2. Para la segunda igualdad, sea $r = 1$. Análogamente, calculando la transpuesta conjugada de la primera ecuación de (2.1.4), hacemos uso de la Observación 2.2 y obtenemos

$$N_{1,n}^* = -bv_n^* H_{2,n}^{-1} \tilde{H}_{2,n} H_{1,n}^{-1} v_n.$$

Ahora bien, si usamos (1.2.2), tenemos

$$N_{1,n}^* = -bv_n^* H_{2,n}^{-1} \left(\frac{bH_{1,n} + aH_{2,n}}{b-a} \right) H_{1,n}^{-1} v_n,$$

es decir,

$$N_{1,n}^* = -bv_n^* \left(\frac{bH_{2,n}^{-1} + aH_{1,n}^{-1}}{b-a} \right) v_n.$$

Similarmente, usamos (1.2.2) para $N_{1,n}$

$$N_{1,n} = -bv_n^* H_{1,n}^{-1} \left(\frac{bH_{1,n} + aH_{2,n}}{b-a} \right) H_{2,n}^{-1} v_n,$$

que es equivalente a

$$N_{1,n} = -bv_n^* \left(\frac{bH_{2,n}^{-1} + aH_{1,n}^{-1}}{b-a} \right) v_n,$$

comparando, claramente $N_{1,n}^* = N_{1,n}$ y de manera análoga se puede probar para $r = 2$. ■

2.1. El sistema de desigualdades matriciales de V.P. Potapov en el caso no degenerado

Para nuestras consideraciones introducimos la siguiente matriz

$$J_q = \begin{pmatrix} 0 & -iI_q \\ iI_q & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.1}$$

donde $q \in \mathbb{N}$. Esta matriz posee propiedades importantes y en particular, nos permitirá más adelante, expresar la desigualdad (2.2.11), del Teorema 2.4, el cual es el resultado más importante de esta sección. Cabe mencionar que esta matriz es conocida como una de las matrices de Pauli [Gr, pág. 174].

La siguiente observación se demuestra directamente.

Observación 2.3. *Sea $q \in \mathbb{N}$ y J_q dado por (2.2.1). Para todo entero $n > 0$, se satisfacen las siguientes igualdades: $J_q^* = J_q$, $J_q^{2n} = I_{2q}$ y $J_q^{2n+1} = J_q$*

Proposición 2.2. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Además, sean J_q dado por (2.2.1), T_n, v_n, $H_{1,n}$, $H_{2,n}$, $u_{1,n}$ y $u_{2,n}$ definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14. Entonces se cumple la siguiente igualdad*

$$[v_n \quad u_{r,n}]J_q \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} = i(H_{r,n}T_n^* - T_nH_{r,n}) \quad \textit{para} \quad r = 1, 2. \tag{2.2.2}$$

Demostración. Tenemos

$$[v_n \quad u_{r,n}]J_q \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} = i[u_{r,n} \quad -v_n] \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} = i(u_{r,n}v_n^* - v_nu_{r,n}^*).$$

Entonces

$$[v_n \quad u_{r,n}]J_q \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} = i(u_{r,n}v_n^* - v_nu_{r,n}^*). \tag{2.2.3}$$

Usando la identidad (1.2.7), tenemos

$$[v_n \quad u_{r,n}]J_q \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} = i(H_{r,n}T_n^* - T_nH_{r,n}). \tag{2.2.4}$$

Por lo tanto, se sigue (2.2.2) ■

Teorema 2.3. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Además, sean J_q dado por (2.2.1), T_n, R_{T_n} v_n, $H_{1,n}$, $H_{2,n}$, $u_{1,n}$ $u_{2,n}$, $M_{1,n}$, $M_{2,n}$ $N_{1,n}$ y $N_{2,n}$ definidos como en las Definiciones 1.13, 1.14 y 2.1. Sea $r \in \{1, 2\}$. Supongamos que las matrices de bloques de Hankel $H_{r,n}$ son Hermitianas positivas. Definimos $U_{r,n} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{2q\times 2q}$ mediante*

$$U_{r,n}(z) := \left\{ I_{2q} - iz \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} R_{T_n^*}(z)H_{r,n}^{-1}[v_n \ u_{r,n}]J_q \right\} \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline M_{r,n} & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & N_{r,n} \\ \hline 0 & I \end{array} \right]. \tag{2.2.5}$$

Entonces

$$J_q - U_{r,n}(z)J_qU_{r,n}^*(z) = i(z - \bar{z}) \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} R_{T_n^*}(z)H_{r,n}^{-1}R_{T_n^*}^*(z)[v_n \ u_{r,n}]. \tag{2.2.6}$$

Demostración. Obtenemos la transpuesta conjugada de $U_{r,n}(z)$

$$U_{r,n}^*(z) = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline N_{r,n} & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & M_{r,n} \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left\{ I_{2q} + i\bar{z}J_q \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} H_{r,n}^{-1}R_{T_n^*}^*(z)[v_n \ u_{r,n}] \right\}$$

donde hemos usado las propiedades del operador adjunto conjugado, la Observación 2.2 y el Lema 2.1 Al hacer el producto $U_{r,n}(z)J_qU_{r,n}^*(z)$, se tiene que realizar la siguiente multiplicación de matrices:

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline M_{r,n} & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & N_{r,n} \\ \hline 0 & I \end{array} \right] J_q \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline N_{r,n}^* & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & M_{r,n}^* \\ \hline 0 & I \end{array} \right]. \tag{2.2.7}$$

En principio, realizamos los siguientes productos de matrices

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline M_{r,n} & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & N_{r,n} \\ \hline 0 & I \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I & N_{r,n} \\ \hline M_{r,n} & Mr,nN_{r,n} + I \end{array} \right] \tag{2.2.8}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline N_{r,n} & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & M_{r,n} \\ \hline 0 & I \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I & M_{r,n} \\ \hline N_{r,n} & N_{r,n}M_{r,n} + I \end{array} \right] \tag{2.2.9}$$

y posteriormente tenemos que multiplicar (2.2.8) por J_q y por (2.2.9)

$$\left[\begin{array}{c|c} I & N_{r,n} \\ \hline M_{r,n} & M_{r,n}N_{r,n} + I \end{array} \right] J_q \left[\begin{array}{c|c} I & M_{r,n} \\ \hline N_{r,n} & N_{r,n}M_{r,n} + I \end{array} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

donde $a_{11} = -iN_{r,n} + iN_{r,n}$, $a_{12} = -iN_{r,n}M_{r,n} - iI + iN_{r,n}M_{r,n}$, $a_{21} = -iM_{r,n}N_{r,n} + iM_{r,n}N_{r,n} + iI$ y $a_{22} = -iM_{r,n}N_{r,n}M_{r,n} - iM_{r,n} + iM_{r,n}N_{r,n}M_{r,n} + iM_{r,n}$. Claramente, todo el producto de matrices (2.2.7) se reduce a J_q

$$\left[\begin{array}{c|c} I & N_{r,n} \\ \hline M_{r,n} & M_{r,n}N_{r,n}+I \end{array}\right] J_q \left[\begin{array}{c|c} I & M_{r,n} \\ \hline N_{r,n} & N_{r,n}M_{r,n}+I \end{array}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix} = J_q.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&J_q - U_{r,n}(z)J_qU_{r,n}^*(z) \\
&= J_q - \left\{ I_{2q} - iz \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} R_{T_n^*}(z)H_{r,n}^{-1}[v_n \ u_{r,n}]J_q \right\} J_q \\
&\quad \cdot \left\{ I_{2q} + i\bar{z}J_q \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} H_{r,n}^{-1}R_{T_n^*}^*(z)[v_n \ u_{r,n}] \right\} \\
&= -i\bar{z} \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} H_{r,n}^{-1}R_{T_n^*}^*(z)[v_n \ u_{r,n}] + iz \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} R_{T_n^*}(z)H_{r,n}^{-1}[v_n \ u_{r,n}] \\
&\quad + iz \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} R_{T_n^*}(z)H_{r,n}^{-1}[v_n \ u_{r,n}]J_q i\bar{z} \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} H_{r,n}^{-1}R_{T_n^*}^*(z)[v_n \ u_{r,n}] \\
&= \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} R_{T_n^*}(z) \left(izH_{r,n}^{-1}(I - \bar{z}T_n) - i\bar{z}(I - zT_n^*)H_{r,n}^{-1} - z\bar{z}H_{r,n}^{-1}[v_n \ u_{r,n}]J_q \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} H_{r,n}^{-1} \right) \\
&\quad \cdot R_{T_n^*}^*(z)[v_n \ u_{r,n}] \\
&= \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} R_{T_n^*}(z) \left(izH_{r,n}^{-1}(I - \bar{z}T_n) - i\bar{z}(I - zT_n^*)H_{r,n}^{-1} - iz\bar{z}H_{r,n}^{-1}\{H_{r,n}T_n^* - T_nH_{r,n}\}H_{r,n}^{-1} \right) \\
&\quad \cdot R_{T_n^*}^*(z)[v_n \ u_{r,n}] \\
&= i \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} R_{T_n^*}(z) \left(zH_{r,n}^{-1} - z\bar{z}H_{r,n}^{-1}T_n - \bar{z}H_{r,n}^{-1} + z\bar{z}T_n^*H_{r,n}^{-1} - z\bar{z}T_n^*H_{r,n}^{-1} + z\bar{z}H_{r,n}^{-1}T_n \right) \\
&\quad \cdot R_{T_n^*}^*(z)[v_n \ u_{r,n}] \\
&= i \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} R_{T_n^*}(z) \left(zH_{r,n}^{-1} - \bar{z}H_{r,n}^{-1} \right) R_{T_n^*}^*(z)[v_n \ u_{r,n}] \\
&= i(z - \bar{z}) \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} R_{T_n^*}(z)H_{r,n}^{-1}R_{T_n^*}^*(z)[v_n \ u_{r,n}].
\end{aligned}$$

En la segunda igualdad hemos multiplicado y usamos las propiedades de J_q mencionadas en la Observación 2.3. En la tercera igualdad usamos las identidades $(R_{T^*}(z))^{-1} = (I - zT^*)$ y $(R_{T^*}^*(z))^{-1} = (I - \bar{z}T)$. En la cuarta igualdad usamos la Proposición 2.2 y partir de ahí solo se va simplificando. Por lo tanto, claramente se sigue (2.2.6). ■

Observación 2.4. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$. Supongamos que $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ es una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que $H_{1,n}$ y $H_{2,n}$ dadas por (1.1.24) y (1.1.25) son Hermitianas positivas. Sea $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{q \times q}$ una función matricial. Además, sean T_n, $R_{T_n}(z)$, v_n, $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ definidos como en las Definiciones 1.13, 1.14, 1.15. En vista de la Observación A.8 del Apéndice A, se puede ver fácilmente que las matrices $K_{1,n}^{[S]}(z)$ y $K_{2,n}^{[S]}(z)$ definidas por (1.1.31) y (1.1.32) son Hermitianas no negativas para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ si y solo si para cada $r \in \{1, 2\}$ y cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ la matriz*

$$\tilde{C}_{r,n}^{[S]}(z) := \frac{\tilde{S}_r(z) - \tilde{S}_r^*(z)}{z - \bar{z}} - \left(v_n\tilde{S}_r(z) - u_{r,n} \right)^* R_{T_n}^*(z)H_{r,n}^{-1}R_{T_n}(z) \left(v_n\tilde{S}_{r,n}(z) - u_{r,n} \right) \tag{2.2.10}$$

es Hermitiana no negativa.

Ahora estamos listos para reescribir el sistema de desigualdades matriciales fundamental del tipo de V.P. Potapov asociado a la versión matricial del problema de momento de Hausdorff para el caso no degenerado. Esto será de gran ayuda más adelante para la demostración del Teorema 3.5.

Teorema 2.4. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$. Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas* *de dimensión $q \times q$ tales que las matrices $H_{1,n}$ y $H_{2,n}$ dadas por (1.1.24) y (1.1.25) son Hermitianas positivas. Sea $S : \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$ una función matricial. Además, sean T_n, $R_{T_n}(z)$, v_n, $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ definidos como en las Definiciones 1.13, 1.14, 1.15, J_q dado por (2.2.1), $U_{1,n}$, $U_{2,n}$ dados por (2.2.5) y sea $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ el conjunto definido en la Definición 1.12. Entonces S pertenece a $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ si y solo si S es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ y la desigualdad matricial*

$$\begin{bmatrix} I_q & \tilde{S}_r^*(z) \end{bmatrix} \frac{U_{r,n}^{-1^*}(z) J_q U_{r,n}^{-1}(z)}{i(\bar{z}-z)} \begin{bmatrix} I_q \\ \tilde{S}_r(z) \end{bmatrix} \geq 0, \tag{2.2.11}$$

se satisface para cada $r \in \{1,2\}$ y cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Demostración. Por el Teorema 1.5, tenemos que S pertenece a $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ si y solo si S pertenece a $\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ dado en la Definición 1.17, entonces S es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ y además, $K_{1,n}^{[S]}(z)$ y $K_{2,n}^{[S]}(z)$ son Hermitianas no negativas.

De la Observación 2.4 tenemos que $K_{1,n}^{[S]}(z)$ y $K_{2,n}^{[S]}(z)$ son Hermitianas no negativas para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ si y solo si para cada $r \in \{1,2\}$ y cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, se satisface:

$$\frac{\tilde{S}_r(z) - \tilde{S}_r^*(z)}{z-\bar{z}} - \left(\tilde{S}_r^*(z) v_n^* - u_{r,n}^*\right) R_{T_n}^*(z) H_{r,n}^{-1} R_{T_n}(z) \left(v_n \tilde{S}_{r,n}(z) - u_{r,n}\right) \geq 0. \tag{2.2.12}$$

Vemos que la desigualdad (2.2.12) es equivalente a

$$\begin{aligned} &\frac{\begin{bmatrix} I_q \ \tilde{S}_r^*(z) \end{bmatrix} J_q \begin{bmatrix} I_q \\ \tilde{S}_r(z) \end{bmatrix}}{i(\bar{z}-z)} - (-i) \begin{bmatrix} I_q & \tilde{S}_r^*(z) \end{bmatrix} J_q \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} R_{T_n}^*(z) H_{r,n}^{-1} \\ &\qquad \cdot R_{T_n}(z) \begin{bmatrix} v_n & u_{r,n} \end{bmatrix} J_q \begin{bmatrix} I_q \\ \tilde{S}_r(z) \end{bmatrix} i \geq 0. \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Y la desigualdad (2.2.13) es equivalente a

$$\begin{bmatrix} I_q & \tilde{S}_r^*(z) \end{bmatrix} \frac{J_q - i(\bar{z}-z) J_q \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} R_{T_n}^*(z) H_{r,n}^{-1} R_{T_n}(z) \begin{bmatrix} v_n \ u_{r,n} \end{bmatrix} J_q}{i(\bar{z}-z)} \begin{bmatrix} I \\ \tilde{S}_r(z) \end{bmatrix} \geq 0. \tag{2.2.14}$$

Sean $V(z) := J_q - U_{r,n}(z) J_q U_{r,n}^*(\bar{z})$ y $V_1(z) := 0$. $V(z)$ es una función entera ya que es un polinomio matricial y obviamente $V_1(z)$ también lo es. Existe la secuencia $z_n = 1/n$ en $\mathbb{C}$ que claramente converge a 0. De (2.2.6), $V(x) = J_q - U_{r,n}(x) J_q U_{r,n}^*(\bar{x}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $V(z_n) = 0$ y $V_1(z_n) = 0$ para todo $n = 1,2,3,\ldots$. Por el Teorema A.9 del Apéndice A tenemos,

$$J_q - U_{r,n}(z) J_q U_{r,n}^*(\bar{z}) = 0 \tag{2.2.15}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. En consecuencia,

$$U_{r,n}^{-1}(z) = J_q U_{r,n}^*(\bar{z}) J_q. \tag{2.2.16}$$

Reemplazamos $\bar{z}$ por z en (2.2.6) para tener

$$J_q - U_{r,n}(\bar{z}) J_q U_{r,n}^*(\bar{z}) = i(\bar{z}-z) \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} R_{T_n^*}(\bar{z}) H_{r,n}^{-1} R_{T_n^*}^*(\bar{z}) \begin{bmatrix} v_n & u_{r,n} \end{bmatrix}. \tag{2.2.17}$$

Al multiplicar por izquierda y derecha la matriz J_q en ambos lados de la igualdad (2.2.17),

$$J_q J_q J_q - J_q U_{r,n}(\bar{z}) J_q U_{r,n}^*(\bar{z}) J_q = i(\bar{z}-z) J_q \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} R_{T_n^*}(\bar{z}) H_{r,n}^{-1} R_{T_n^*}^*(\bar{z}) \begin{bmatrix} v_n & u_{r,n} \end{bmatrix} J_q.$$

Observando que $R_{T_n^*}^*(\bar{z}) = R_{T_n}(z)$, $R_{T_n^*}(\bar{z}) = R_{T_n}^*(z)$ y usando la Observación 2.3 obtenemos,

$$J_q - J_q U_{r,n}(\bar{z}) J_q J_q J_q U_{r,n}^*(\bar{z}) J_q = i(\bar{z}-z) J_q \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} R_{T_n}^*(z) H_{r,n}^{-1} R_{T_n}(z) \begin{bmatrix} v_n \ u_{r,n} \end{bmatrix} J_q.$$

Usando (2.2.16), tenemos

$$J_q - U_{r,n}^{-1^*}(z) J_q U_{r,n}^{-1}(z) = i(\bar{z} - z) J_q \begin{bmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{bmatrix} R_{T_n}^*(z) H_{r,n}^{-1} R_{T_n}(z) \begin{bmatrix} v_n & u_{r,n} \end{bmatrix} J_q. \tag{2.2.18}$$

Por lo tanto, la desigualdad (2.2.14) es equivalente a

$$\begin{bmatrix} I_q & \tilde{S}_r^*(z) \end{bmatrix} \frac{U_{r,n}^{-1^*}(z) J_q U_{r,n}^{-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I_q \\ \tilde{S}_r(z) \end{bmatrix} \geq 0. \tag{2.2.19}$$

■

2.2. La Matriz Resolvente

En esta sección definimos la *matriz resolvente* y veremos las propiedades que serán utilizadas en el siguiente capítulo.

Teorema 2.5. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$. Además, sean T_n, $R_{T_n}(z)$, v_n, $\tilde{u}_n$ $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, definidos como en las Definiciones 1.13, 1.14, $U_{1,n}$, $U_{2,n}$ dados por (2.2.5). Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que las matrices $H_{1,n}$ y $H_{2,n}$ dadas por (1.1.24) y (1.1.25) son Hermitianas positivas. Sea $U_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{2q \times 2q}$ definida para todo $z \in \mathbb{C}$ por*

$$U_n(z) := \left[\begin{array}{c|c} \alpha_n(z) & \beta_n(z) \\ \hline \gamma_n(z) & \delta_n(z) \end{array} \right], \tag{2.3.1}$$

donde

$$\alpha_n(z) := I_q + z v_n^* R_{T_n^*}(z) \left(\frac{bH_{1,n} + aH_{2,n}}{b-a} \right)^{-1} \cdot \tilde{u}_n, \tag{2.3.2}$$

$$\gamma_n(z) := \tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z) \left(\frac{bH_{1,n} + aH_{2,n}}{b-a} \right)^{-1} \cdot \tilde{u}_n, \tag{2.3.3}$$

$$\beta_n(z) := (z-b)(z-a) v_n^* R_{T_n^*}(z) \frac{aH_{1,n}^{-1} + bH_{2,n}^{-1}}{b-a} v_n, \tag{2.3.4}$$

$$\delta_n(z) := I_q + \tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z) \frac{(z-b) R_{T_n^*}^{-1}(a) a H_{1,n}^{-1} + (z-a) R_{T_n^*}^{-1}(b) b H_{2,n}^{-1}}{b-a} v_n. \tag{2.3.5}$$

Entonces

(a) Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, la identidad

$$U_n(z) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & (z-a)^{-1} I_q \end{pmatrix} U_{1,n}(z) \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & (z-a) I_q \end{pmatrix}, \tag{2.3.6}$$

se satisface donde $U_{1,n}$ está dado por (2.2.5) con $r = 1$.

(b) Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{b\}$, la identidad

$$U_n(z) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & (b-z)^{-1} I_q \end{pmatrix} U_{2,n}(z) \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & (b-z) I_q \end{pmatrix}. \tag{2.3.7}$$

se satisface donde $U_{2,n}$ está dado por (2.2.5) con $r = 2$.

(c) Para todo $z \in \mathbb{C}$, la matriz $U_n(z)$ es invertible.

Demostración. (a) Sea $a \neq 0$. Para $r = 1$ reescribimos la matriz de (2.2.5) como sigue

$$\begin{aligned} U_{1,n}(z) = &\begin{pmatrix} I_q + zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} u_{1,n} & -zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n \\ zu_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} u_{1,n} & I_q - zu_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ M_{1,n} & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & N_{1,n} \\ 0 & I_q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Considerando la parte derecha de esta igualdad, si multiplicamos la primera matriz con la segunda, obtenemos

$$U_{1,n}(z) = \begin{pmatrix} b_{11} & -zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n \\ b_{21} & I_q - zu_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & N_{1,n} \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \tag{2.3.8}$$

donde

$$\begin{aligned} b_{11} &= I_q + zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} u_{1,n} - zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n M_{1,n}, \\ b_{21} &= zu_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} u_{1,n} + M_{1,n} - zu_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n M_{1,n}. \end{aligned}$$

Veamos que b_{11} es precisamente $\alpha_n(z)$.

$$\begin{aligned} b_{11} &= I_q + zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} u_{1,n} - zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n M_{1,n} \\ &= I_q + zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} u_{1,n} + zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n a \tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} \tilde{u}_n \\ &= I_q + zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} (I_q - aT_n) \tilde{u}_n + zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} a (T_n \tilde{H}_{2,n} - \tilde{H}_{1,n}) \tilde{H}_{2,n}^{-1} \tilde{u}_n \\ &= I_q + zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} (I_q - aT_n) \tilde{u}_n + zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} a T_n \tilde{u}_n \\ &\quad - zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} (\tilde{H}_{2,n} - H_{1,n}) \tilde{H}_{2,n}^{-1} \tilde{u}_n \\ &= I_q + zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} (I_q - aT_n) \tilde{u}_n + zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} a T_n \tilde{u}_n - zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} \tilde{u}_n \\ &\quad + zv_n^* R_{T_n^*}(z) \tilde{H}_{2,n}^{-1} \tilde{u}_n \\ &= I_q + zv_n^* R_{T_n^*}(z) \tilde{H}_{2,n}^{-1} \tilde{u}_n = I_q + zv_n^* R_{T_n^*}(z) \left(\frac{bH_{1,n} + aH_{2,n}}{b-a} \right)^{-1} \tilde{u}_n. \end{aligned}$$

En la segunda igualdad hemos sustituido $M_{1,n}$ definido en (2.1.3). La tercera igualdad se justifica usando las identidades $u_{1,n} = (I_q - aT_n)\tilde{u}_n$ y (1.2.6). La cuarta igualdad se sigue de distribuir las matrices del tercer término y sustituir la ecuación

$$\tilde{H}_{1,n} = \frac{(\tilde{H}_{2,n} - H_{1,n})}{a} \tag{2.3.9}$$

la cual se deduce fácilmente de (1.1.24). Distruibuimos las matrices del cuarto término y tenemos la quinta igualdad. Finalmente, las últimas dos igualdades se siguen de simplificar y usar la identidad (1.2.2). De acuerdo a (2.3.2), se cumple que

$$b_{11} = \alpha_n(z). \tag{2.3.10}$$

Ahora veamos que b_{21} es igual $(z-a)\gamma_n(z)$. Los pasos son similares a los utilizados para demostrar la igualdad (2.3.10), solo que ahora consideramos las identidades $u_{1,n}^* = \tilde{u}_n^*(I_q - aT_n^*)$ y $R_{T_n^*}^{-1}(z) = (I_q - zT_n^*)$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} b_{21} &= zu_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} u_{1,n} + M_{1,n} - zu_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n M_{1,n} \\ &= zu_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} u_{1,n} - a\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} \tilde{u}_n + zau_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n \tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} \tilde{u}_n \\ &= zu_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} u_{1,n} - a\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} \tilde{u}_n \\ &\quad + zau_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} (T_n \tilde{H}_{2,n} + \frac{H_{1,n} - \tilde{H}_{2,n}}{a}) \tilde{H}_{2,n}^{-1} \tilde{u}_n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= zu_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} u_{1,n} - a\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1}\tilde{u}_n + zau_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} T_n \tilde{u}_n \\
&\quad + zu_{1,n}^* R_{T_n^*}(z)\tilde{H}_{2,n}^{-1}\tilde{u}_n - zu_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1}\tilde{u}_n \\
&= zu_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1}(I_q - aT_n + aT_n - I_q)\tilde{u}_n \\
&\quad + \tilde{u}_n^*\{-a(I_q - zT_n^*) + z(I_q - aT_n^*)\} R_{T_n^*}(z)\tilde{H}_{2,n}^{-1}\tilde{u}_n \\
&= (z-a)\tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z)\tilde{H}_{2,n}^{-1}\tilde{u}_n = (z-a)\tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z)\left(\frac{bH_{1,n} + aH_{2,n}}{b-a}\right)^{-1}\tilde{u}_n.
\end{aligned}
$$

En vista de (2.3.3), se satisface la igualdad

$$
b_{21} = (z-a)\gamma_n(z). \tag{2.3.11}
$$

De acuerdo a (2.3.10) y (2.3.11) podemos reescribir (2.3.8) de la siguiente la forma

$$
U_{1,n}(z) = \begin{pmatrix} \alpha_n(z) & -zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n \\ (z-a)\gamma_n(z) & I_q - zu_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_q & N_{1,n} \\ 0 & I_q \end{pmatrix},
$$

es decir,

$$
U_{1,n}(z) = \begin{pmatrix} \alpha_n(z) & b_{12} \\ (z-a)\gamma_n(z) & b_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.3.12}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
b_{12} &= N_{1,n} + zv_n^* R_{T_n^*}(z)\tilde{H}_{2,n}^{-1}\tilde{u}_n N_{1,n} - zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n, \\
b_{22} &= (z-a)\tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z)\tilde{H}_{2,n}^{-1}\tilde{u}_n N_{1,n} + I_q - zu_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n.
\end{aligned}
$$

Afirmamos que b_{12} es igual a $(z-a)^{-1}\beta_n(z)$ y que además, b_{22} es igual a $\delta_n(z)$. Para b_{12}, tenemos

$$
\begin{aligned}
b_{12} &= N_{1,n} + zv_n^* R_{T_n^*}(z)\tilde{H}_{2,n}^{-1}\tilde{u}_n N_{1,n} - zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n \\
&= N_{1,n} - bzv_n^* R_{T_n^*}(z)\tilde{H}_{2,n}^{-1}\tilde{u}_n v_n^* H_{1,n}^{-1}\tilde{H}_{2,n} H_{2,n}^{-1} v_n - zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n \\
&= N_{1,n} - bzv_n^* R_{T_n^*}(z)\tilde{H}_{2,n}^{-1}(\tilde{H}_{2,n} T_n^* + \frac{H_{1,n} - \tilde{H}_{2,n}}{a}) H_{1,n}^{-1}\tilde{H}_{2,n} H_{2,n}^{-1} v_n \\
&\quad - zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n \\
&= -bv_n^* H_{1,n}^{-1}\tilde{H}_{2,n} H_{2,n}^{-1} v - bzv_n^* R_{T_n^*}(z)(T_n^* - \frac{I_q}{a}) H_{1,n}^{-1}\tilde{H}_{2,n} H_{2,n}^{-1} v_n \\
&\quad - \frac{b}{a} zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} v_n - zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n \\
&= -bv_n^* R_{T_n^*}(z)\left\{ I_q - zT_n^* + zT_n^* - \frac{z}{a} I_q \right\} H_{1,n}^{-1}\tilde{H}_{2,n} H_{2,n}^{-1} v_n \\
&\quad + zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1}(-\frac{b}{a} H_{1,n} - H_{2,n}) H_{2,n}^{-1} v_n \\
&= -bv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1}\tilde{H}_{2,n} H_{2,n}^{-1} v_n \\
&\quad + zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1}\{\frac{b}{a}\tilde{H}_{2,n} - \frac{b}{a} H_{1,n} - H_{2,n}\} H_{2,n}^{-1} v_n \\
&= -bv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1}\tilde{H}_{2,n} H_{2,n}^{-1} v_n + zv_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1}\tilde{H}_{2,n} H_{2,n}^{-1} v_n \\
&= (z-b) v_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1}\tilde{H}_{2,n} H_{2,n}^{-1} v_n. \\
&= (z-b) v_n^* R_{T_n^*}(z)\frac{aH_{1,n}^{-1} + bH_{2,n}^{-1}}{b-a} v_n.
\end{aligned}
$$

En la segunda igualdad solo hemos sustituido en el segundo término la matriz $N_{1,n}$ definida en (2.1.4). La terecera igualdad se justifica usando las identidades (1.2.5) y (2.3.9). Para obtener la cuarta igualdad, sustituimos en el primer término la matriz $N_{1,n}$ y reescribimos el segundo término. La quinta igualdad se sigue de factorizar adecuadamente y usar la identidad $R_{T_n^*}^{-1}(z) = (I_q - zT_n^*)$. La sexta igualdad se obtiene de simplificar y reescribir los dos términos. Para justificar las últimas tres igualdades hacemos lo siguiente: usamos (1.1.25) y la identidad $\frac{b}{a} H_{1,n} = -b\tilde{H}_{1,n} + \frac{b}{a}\tilde{H}_{2,n}$ la cual se obtiene de multiplicar por $\frac{1}{a}$ la Ecuación (1.1.24), posteriormente, se simplifica y se reescriben los dos términos restantes. Por último, reemplazamos $\tilde{H}_{2,n}$ usando (1.2.2). En vista de (2.3.4), tenemos que se satisface

$$b_{12} = (z-a)^{-1}\beta_n(z). \tag{2.3.13}$$

Finalmente, nos enfocamos en b_{22}. Tenemos,

$$\begin{aligned}
b_{22} &= (z-a)\tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z)\tilde{H}_{2,n}^{-1}\tilde{u}_n N_{1,n} + I_q - z u_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n \\
&= -b(z-a)\tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z)\tilde{H}_{2,n}^{-1}\tilde{u}_n v_n^* H_{1,n}^{-1}\tilde{H}_{2,n}K_{2,n}^{-1} v_n + I_q - z u_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} v_n \\
&= -b(z-a)\tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z)\tilde{H}_{2,n}^{-1}(\tilde{H}_{2,n}T_n^* - \frac{\tilde{H}_{2,n}}{a} + \frac{H_{1,n}}{a})H_{1,n}^{-1}\tilde{H}_{2,n}H_{2,n}^{-1} v_n \\
&\quad + I_q - z\tilde{u}_n^*(I_q - aT_n^*)R_{T_n^*}(z)H_{1,n}^{-1} v_n \\
&= -b(z-a)\tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z)(T_n^* - \frac{I_q}{a})H_{1,n}^{-1}\tilde{H}_{2,n}H_{2,n}^{-1} v_n - b(z-a)\tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z)\frac{H_{2,n}^{-1}}{a} v_n \\
&\quad + I_q - z\tilde{u}_n^*(I_q - aT_n^*)R_{T_n^*}(z)H_{1,n}^{-1} v_n \\
&= -b(z-a)\tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z)(T_n^* - \frac{I_q}{a})\frac{aH_{1,n}^{-1} + bH_{2,n}^{-1}}{b-a} v_n - b(z-a)\tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z)\frac{H_{2,n}^{-1}}{a} v_n \\
&\quad + I_q - z\tilde{u}_n^*(I_q - aT_n^*)R_{T_n^*}(z)H_{1,n}^{-1} v_n \\
&= \tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z)\{\frac{-b(z-a)(T_n^* - \frac{I_q}{a})a}{b-a} - z(I_q - aT_n^*)\}H_{1,n}^{-1} v_n \\
&\quad + \tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z)\{\frac{-b(z-a)(T_n^* - \frac{I_q}{a})b}{b-a} - \frac{b(z-a)}{a} I_q\}H_{2,n}^{-1} v_n + I_q \\
&= I_q + \tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z)\frac{(bz-ab)(I_q - T_n^* a) - (bz-az)(I_q - T_n^* a)}{b-a} H_{1,n}^{-1} v_n \\
&\quad + \tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z)\frac{(b^2 z - ab^2)(I_q - T_n^* a) - (bz-ab)(b-a)I_q}{a(b-a)} H_{2,n}^{-1} v_n \\
&= I_q + \tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z)\frac{(z-b)R_{T_n^*}^{-1}(a)aH_{1,n}^{-1} + (z-a)R_{T_n^*}^{-1}(b)bH_{2,n}^{-1}}{b-a} v_n,
\end{aligned}$$

En la segunda igualdad hemos sustituido $N_{1,n}$ dada por (2.1.4). Utilizamos las identidades $u_{1,n}^* = \tilde{u}_n^*(I_q - aT_n^*)$, (1.2.5) y (2.3.9) para obtener la tercera igualdad. La cuarta igualdad se sigue de distribuir las matrices del primer término. La quinta igualdad se justifica usando la identidad (1.2.2). Para obtener la sexta igualdad, se factoriza adecuadamente. Las dos últimas igualdades se siguen de realizar las operaciones de escalares y usar las identidades $R_{T_n^*}^{-1}(a) = (I_q - aT_n^*)$, $R_{T_n^*}^{-1}(b) = (I_q - bT_n^*)$. De acuerdo a (2.3.5), se cumple que

$$b_{22} = \delta_n(z). \tag{2.3.14}$$

Considerando (2.3.13) y (2.3.14) podemos escribir (2.3.12) como

$$U_{1,n}(z) = \begin{pmatrix} \alpha_n(z) & (z-a)^{-1}\beta_n(z) \\ (z-a)\gamma_n(z) & \delta_n(z) \end{pmatrix}. \tag{2.3.15}$$

Multiplicando en ambos lados de (2.3.15) por derecha y por izquierda por las matrices

$$\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & (z-a)^{-1} I_q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & (z-a) I_q \end{pmatrix},$$

respectivamente, se tiene

$$\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & (z-a)^{-1} I_q \end{pmatrix} U_{1,n}(z) \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & (z-a) I_q \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_n(z) & \beta_n(z) \\ \hline \gamma_n(z) & \delta_n(z) \end{array}\right].$$

De (2.3.1) claramente se sigue (2.3.6). (b) De manera análoga se puede probar (2.3.7). (c) De (2.2.16) tenemos que $U_{r,n}$ es invertible para todo $z \in \mathbb{C}$ y para $r \in \{1, 2\}$, pues

$$U_{r,n}^{-1}(z) = J_q U_{r,n}^*(\bar{z}) J_q.$$

En vista de (2.3.6) y de (2.3.7), la parte (c) queda demostrada. ■

Definición 2.2. *La matriz (2.3.1) es llamada la* matriz resolvente *que corresponde a el Problema 1.1 en el caso no degenerado.*

Nótese que la matriz resolvente es un polinomio matricial de $2q \times 2q$ de grado no mayor que $n+2$.

Capítulo 3

Descripción del conjunto de soluciones del problema de momentos

En vista del problema planteado en la sección 1.1, es decir, el Problema 1.4, estamos interesados en describir el conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ de soluciones de la versión matricial del problema de momento de Hausdorff dado en la Definición 1.12. Cabe mencionar que continuaremos trabajando con la misma notación de los capítulos anteriores y en particular la misma notación para la matriz J_q y la matriz resolvente U_n del capítulo 2.

En la sección 3.1, vamos a introducir la definición de pares no negativos. Después veremos que el conjunto de pares satisface una relación de equivalencia. Posteriormente en la sección 3.2 demostramos que el conjunto de todas las clases de equivalencia y el conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ forman una biyección dada por una función $S(z)$ que es precisamente la descripción deseada.

3.1. Columna par de funciones no negativas

Definición 3.1. *Sean $q \in \mathbb{N}$ y $X \subseteq \mathbb{C}$ no vacío. Sea $F : X \to \mathbb{C}^{q\times q}$ una función matricial compleja de $q \times q$. Sea F_{mn} definida como en la Definición 1.1 y sea $\mathbb{N}_{1,q}$ de acuerdo a la Notación 2. Decimos que F es meromorfa en X si para cada $m, n \in \mathbb{N}_{1,q}$, F_{mn} es meromorfa en X.*

Definición 3.2. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$ y J_q definido por (2.2.1). Sean $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ funciones matriciales de $q\times q$ que son meromorfas en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$. Entonces decimos que el par columna $\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}$ es no negativo con respecto a J_q y $[a,b]$ si existe un subconjunto discreto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ tal que las siguientes cuatro condiciones se satisfacen:*

(i) Las funciones $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son holomorfas en $\mathbb{C}\setminus([a,b]\cup\mathcal{D})$.

(ii) Para todo $z \in \mathbb{C}\setminus([a,b]\cup\mathcal{D})$,

$$rank\begin{pmatrix}\mathbf{p}(z)\\ \mathbf{q}(z)\end{pmatrix} = q.$$

(iii) Para todo $z \in \mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\mathcal{D})$,

$$\frac{1}{2\Im\mathfrak{m}\, z}\begin{pmatrix}\mathbf{p}(z)\\ (z-a)\mathbf{q}(z)\end{pmatrix}^*(J_q)\begin{pmatrix}\mathbf{p}(z)\\ (z-a)\mathbf{q}(z)\end{pmatrix} \geq 0.$$

(iv) Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup \mathcal{D})$,

$$\frac{1}{2\mathfrak{Im}\, z} \begin{pmatrix} \mathbf{p}(z) \\ (b-z)\mathbf{q}(z) \end{pmatrix}^* (J_q) \begin{pmatrix} \mathbf{p}(z) \\ (b-z)\mathbf{q}(z) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Definición 3.3. *Sean* $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $q \in \mathbb{N}$ *y* J_q *definido como en (2.2.1). Denotamos mediante* $\mathcal{P}[J_q,[a,b]]$ *el conjunto de todos las columnas de pares* $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$ *no negativos correspondientes a* J_q *y* $[a,b]$.

Definición 3.4. *Sean* $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $q \in \mathbb{N}$, J_q *definido como en (2.2.1). y* $\mathcal{P}[J_q,[a,b]]$ *definido en la Definición 3.3. Sean* $\begin{pmatrix} \mathbf{p_1} \\ \mathbf{q_1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{p_2} \\ \mathbf{q_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{P}[J_q,[a,b]]$. *Se dice que* $\begin{pmatrix} \mathbf{p_1} \\ \mathbf{q_1} \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} \mathbf{p_2} \\ \mathbf{q_2} \end{pmatrix}$ *son equivalentes si existe una función matricial* Q *meromorfa en* $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ *con* $\det Q \neq 0$ *tal que*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p_2} \\ \mathbf{q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p_1} \\ \mathbf{q_1} \end{pmatrix} Q. \tag{3.1.1}$$

Denotemos la relación (3.1.1) mediante

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p_2} \\ \mathbf{q_2} \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} \mathbf{p_1} \\ \mathbf{q_1} \end{pmatrix}.$$

Ahora mostramos que la relación de la Definición 3.4 es una relación de equivalencia en $\mathcal{P}[J_q,[a,b]]$.

Observación 3.1. *Sean* $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $q \in \mathbb{N}$, J_q *definido como en (2.2.1) y* $\mathcal{P}[J_q,[a,b]]$ *definido en la Definición 3.3. La relación* $\sim_{\mathcal{P}}$ *de la Definición 3.4 es una relación de equivalencia en* $\mathcal{P}[J_q,[a,b]]$.

Demostración. Sea $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \in \mathcal{P}[J_q,[a,b]]$. Sea Q igual a la matriz identidad I_q. Entonces Q es meromorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ y para $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$, tenemos

$$\det Q(z) = \det I_q = 1 \neq 0.$$

De donde

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} Q.$$

Así

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}.$$

Es decir, la relación $\sim_{\mathcal{P}}$ es reflexiva.

Sean $\begin{pmatrix} \mathbf{p_1} \\ \mathbf{q_1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{p_2} \\ \mathbf{q_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{P}[J_q,[a,b]]$ tales que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p_2} \\ \mathbf{q_2} \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} \mathbf{p_1} \\ \mathbf{q_1} \end{pmatrix}. \tag{3.1.2}$$

Entonces existe una matriz meromorfa Q en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ con $\det Q \neq 0$ tal que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p_2} \\ \mathbf{q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p_1} \\ \mathbf{q_1} \end{pmatrix} Q.$$

La matriz Q^{-1} es meromorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$, y además $\det Q^{-1} \neq 0$. De donde

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p_1} \\ \mathbf{q_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p_2} \\ \mathbf{q_2} \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Es decir

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p_1} \\ \mathbf{q_1} \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} \mathbf{p_2} \\ \mathbf{q_2} \end{pmatrix}. \tag{3.1.3}$$

Así, de (3.1.2) y (3.1.3) tenemos que la relación $\sim_{\mathcal{P}}$ es simétrica.

Sean $\begin{pmatrix}\mathbf{p_1}\\ \mathbf{q_1}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mathbf{p_2}\\ \mathbf{q_2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mathbf{p_3}\\ \mathbf{q_3}\end{pmatrix} \in \mathcal{P}[J_q,[a,b]]$ tales que

$$\begin{pmatrix}\mathbf{p_1}\\ \mathbf{q_1}\end{pmatrix} \sim_{\mathcal{P}} \begin{pmatrix}\mathbf{p_2}\\ \mathbf{q_2}\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}\mathbf{p_2}\\ \mathbf{q_2}\end{pmatrix} \sim_{\mathcal{P}} \begin{pmatrix}\mathbf{p_3}\\ \mathbf{q_3}\end{pmatrix}.$$

Existen dos matrices Q_1, Q_2 meromorfas en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ con $\det Q_1 \neq 0$, $\det Q_2 \neq 0$ para las cuales

$$\begin{pmatrix}\mathbf{p_2}\\ \mathbf{q_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{p_1}\\ \mathbf{q_1}\end{pmatrix} Q_1 \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}\mathbf{p_3}\\ \mathbf{q_3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{p_2}\\ \mathbf{q_2}\end{pmatrix} Q_2.$$

La matriz producto Q_1Q_2 es meromorfa en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ con $\det Q_1Q_2 \neq 0$ y

$$\begin{pmatrix}\mathbf{p_3}\\ \mathbf{q_3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{p_2}\\ \mathbf{q_2}\end{pmatrix} Q_2 = \left(\begin{pmatrix}\mathbf{p_1}\\ \mathbf{q_1}\end{pmatrix} Q_1\right) Q_2 = \begin{pmatrix}\mathbf{p_1}\\ \mathbf{q_1}\end{pmatrix} Q_1Q_2.$$

De donde

$$\begin{pmatrix}\mathbf{p_1}\\ \mathbf{q_1}\end{pmatrix} \sim_{\mathcal{P}} \begin{pmatrix}\mathbf{p_3}\\ \mathbf{q_3}\end{pmatrix}.$$

Así la relación $\sim_{\mathcal{P}}$ es una relación transitiva. Consecuentemente $\sim_{\mathcal{P}}$ es una relación de equivalencia.

Definición 3.5. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $q \in \mathbb{N}$, J_q definido como en (2.1.1) y $\mathcal{P}[J_q,[a,b]]$ definido en la Definición 3.3. El conjunto de todas las clases de equivalencia en $\mathcal{P}[J_q,[a,b]]$ bajo la relación $\sim_{\mathcal{P}}$, se denota como*

$$\left\langle \begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix} \right\rangle_{\sim_{\mathcal{P}}}.$$

Definición 3.6. *Si f es una función matricial meromorfa en $X \subseteq \mathbb{C}$ no vacío, entonces sea $\mathbb{H}_f$ el conjunto de todos los puntos donde f es holomorfa en X.*

Los siguientes dos lemas se pueden demostrar de forma similar como la implicación "(ii)⇒(i)" en la demostración del Lema 1.10. Es por eso que omitimos los detalles de las demostraciones.

Lema 3.1. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, Π_+ denotado de acuerdo a la Notación 7 y $\mathbb{H}_f$ definido en la Definición 3.6. Sea φ una función matricial de $q\times q$ que es meromorfa en $\mathbb{C}\setminus[a,+\infty)$ y que satisface $\mathfrak{Im}\,\varphi(z) \geq 0$ para todo $z \in \Pi_+\cap\mathbb{H}_\varphi$. Supongamos que la función $\varphi_1 : \mathbb{H}_\varphi \to \mathbb{C}^{q\times q}$ definida por $\varphi_1(\omega) := (\omega-a)\varphi(\omega)$ satisface $\mathfrak{Im}\,\varphi_1(z) \geq 0$ para todo $z \in \Pi_+\cap\mathbb{H}_\varphi$. Entonces, para cada $x \in (-\infty,a)\cap\mathbb{H}_\varphi$, la matriz $\varphi(x)$ es Hermitiana no negativa.*

Lema 3.2. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}$, Π_+ denotado de acuerdo a la Notación 7 y $\mathbb{H}_f$ definido en la Definición 3.6. Sea φ una función matricial de $q\times q$ que es meromorfa en $\mathbb{C}\setminus(-\infty,b]$ y que satisface $\mathfrak{Im}\,\varphi(z) \geq 0$ para todo $z \in \Pi_+\cap\mathbb{H}_\varphi$. Supongamos que la función $\varphi_2 : \mathbb{H}_\varphi \to \mathbb{C}^{q\times q}$ definida por $\varphi_2(\omega) := (b-\omega)\varphi(\omega)$ satisface $\mathfrak{Im}\,\varphi_2(z) \geq 0$ para todo $z \in \Pi_+\cap\mathbb{H}_\varphi$. Entonces, para cada $x \in (b,+\infty)\cap\mathbb{H}_\varphi$, la matriz $-\varphi(x)$ es Hermitiana no negativa.*

Proposición 3.3. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $q \in \mathbb{N}$, J_q definido como en (2.2.1) y $\mathcal{R}_q[a,b]$ definido en la Definición 1.11. Sean $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ funciones matriciales que son meromorfas en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$. Supongamos que $\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}$ es un par columna no negativo con respecto a J_q y $[a,b]$ y que la función* $\det \mathbf{p}$ *no es idénticamente cero en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$. Entonces $S := \mathbf{q}\mathbf{p}^{-1}$ pertenece a $\mathcal{R}_q[a,b]$.*

Demostración. Observemos que $\begin{pmatrix}I_q\\ S\end{pmatrix}$ pertenece a $\mathcal{P}[J_q,[a,b]]$ definido en la Definición 3.3. Entonces existe un subconjunto discreto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ tal que S es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus([a,b]\cup\mathcal{D})$ y que

$$\frac{1}{2\mathfrak{Im}\,z}\begin{pmatrix}I\\ (z-a)S(z)\end{pmatrix}^*(J_q)\begin{pmatrix}I\\ (z-a)S(z)\end{pmatrix} \geq 0 \tag{3.1.4}$$

y

$$\frac{1}{2\mathfrak{Im}\, z}\begin{pmatrix} I \\ (b-z)S(z)\end{pmatrix}^{*}(J_q)\begin{pmatrix} I \\ (b-z)S(z)\end{pmatrix}\geq 0 \tag{3.1.5}$$

se satisfacen para todo $z\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\mathcal{D})$. Sean $\varphi_1:\mathbb{H}_S\to\mathbb{C}^{q\times q}$ y $\varphi_2:\mathbb{H}_S\to\mathbb{C}^{q\times q}$ dadas por $\varphi_1(z):=(z-a)S(z)$ y $\varphi_2(z):=(b-z)S(z)$ para todo $z\in\mathbb{H}_S$ donde $\mathbb{H}_S$ está definido como en la Definición 3.6. Recordemos que Π_+ está denotado como en la Notación 7. Para cada $z\in\Pi_+\setminus\mathcal{D}$, de (3.1.4) y (3.1.5) obtenemos

$$\frac{1}{\mathfrak{Im}\, z}\mathfrak{Im}\,\varphi_1(z)=\frac{1}{2\mathfrak{Im}\, z}\begin{pmatrix} I \\ (z-a)S(z)\end{pmatrix}^{*}(J_q)\begin{pmatrix} I \\ (z-a)S(z)\end{pmatrix}\geq 0$$

y

$$\frac{1}{\mathfrak{Im}\, z}\mathfrak{Im}\,\varphi_2(z)=\frac{1}{2\mathfrak{Im}\, z}\begin{pmatrix} I \\ (b-z)S(z)\end{pmatrix}^{*}(J_q)\begin{pmatrix} I \\ (b-z)S(z)\end{pmatrix}\geq 0.$$

Así tenemos,

$$\mathfrak{Im}\,\varphi_1(z)\geq 0 \quad \text{y} \quad \mathfrak{Im}\,\varphi_2(z)\geq 0 \tag{3.1.6}$$

para todo $z\in\Pi_+\setminus\mathcal{D}$. Entonces, en vista de $S=\frac{1}{b-a}(\varphi_1+\varphi_2)$, se sigue

$$\mathfrak{Im}\, S(z)\geq 0 \tag{3.1.7}$$

para todo $z\in\Pi_+\setminus\mathcal{D}$. Aplicando el Lema 3.1 y Lema 3.2, de (3.1.6) podemos concluir que

$$S(x) \text{ es Hermitiana no negativa para todo } \quad x\in(-\infty,a)\setminus\mathcal{D} \tag{3.1.8}$$

y

$$-S(x) \text{ es Hermitiana no negativa para todo } \quad x\in(b,+\infty)\setminus\mathcal{D}. \tag{3.1.9}$$

Ya que S es meromorfa en Π_+ y en vista de (3.1.7), por el Lema A.1 Apéndice A tenemos que S es holomorfa en Π_+. En otras palabras

$$S_{|\Pi_+}\in\mathcal{R}_q. \tag{3.1.10}$$

Sea $x_0\in(-\infty,a)\setminus\mathcal{D}$. Entonces existe un número real η tal que $(x_0-\eta,x_0+\eta)\subseteq(-\infty,a)\setminus\mathcal{D}$. En vista de (3.1.8) y el Teorema A.3 del Apéndice A, vemos que entonces S es holomorfa en Π_- y satisface $S(z)=S^*(\bar{z})$ para todo $z\in\Pi_-$. Queda por mostrar que S es holomorfa en cada punto que pertenece a $\mathbb{R}\setminus[a,b]$. Sea $x_0\in\mathbb{R}\setminus[a,b]$. Entonces existe un número real positivo η tal que $(x_0-\eta,x_0+\eta)\subseteq\mathbb{R}\setminus[a,b]$, $(x_0-\eta,x_0)\cap\mathcal{D}=\emptyset$ y $(x_0,x_0+\eta)\cap\mathcal{D}=\emptyset$. En vista de (3.1.10), sea (α,β,ν) la parametrización de Nevanlinna de $S_{|\Pi_+}$. Usando la Proposición B.5 del Apéndice B, obtenemos

$$S(z)=\alpha+\beta z+\int_{-\infty}^{x_0-\eta}\frac{1+tz}{t-z}d\nu(t)+\frac{1+x_0z}{x_0-z}(\nu(x_0)-\nu(x_0-0))+\int_{x_0+\eta}^{\infty}\frac{1+tz}{t-z}d\nu(t)$$

para todo $z\in\Pi_+\cup E\cup\Pi_-$ donde $E:=(x_0-\eta,x_0)\cup(x_0,x_0+\eta)$. La función matricial $\psi:\Pi_+\cup(x_0-\eta,x_0+\eta)\cup\Pi_-\to\mathbb{C}^{q\times q}$ definida por

$$\psi(z):=\alpha+\beta z+\int_{-\infty}^{x_0-\eta}\frac{1+tz}{t-z}d\nu(t)+\int_{x_0+\eta}^{\infty}\frac{1+tz}{t-z}d\nu(t)$$

es holomorfa en $\Pi_+\cup(x_0-\eta,x_0+\eta)\cup\Pi_-$. Entonces

$$S(z)=\psi(z)+\frac{1+x_0z}{x_0-z}(\nu(x_0)-\nu(x_0-0)) \tag{3.1.11}$$

para todo $z\in\Pi_+\cup E\cup\Pi_-$. Sea $u\in\mathbb{C}^q$. De (3.1.11) vemos que

$$u^*S(z)u=u^*\psi(z)u+\frac{1+x_0z}{x_0-z}u^*(\nu(x_0)-\nu(x_0-0))u \tag{3.1.12}$$

se cumple para cada $x\in E$. Si $u^*(\nu(x_0)-\nu(x_0-0))u>0$, entonces esto debería implicar

$$\lim_{x\to x_0^{+0}}u^*S(x)u=-\infty$$

y

$$\lim_{x\to x_0^{-0}} u^*(-S(x))u = -\infty$$

en contradicción a (3.1.8) y (3.1.9), respectivamente. Entonces, para $u \in \mathbb{C}^q$, tenemos $u^*(\nu(x_0) - \nu(x_0-0))u = 0$ y consecuentemente $(\nu(x_0) - \nu(x_0-0)) = 0$. Así $S(z) = \psi(z)$ se satisface para todo z arbitrario en $\Pi_+ \cup E \cup \Pi_-$. Ya que x_0 fue elegido arbitrariamente de $\mathbb{R} \setminus [a,b]$ vemos que S tampoco tiene polos en $\mathbb{R} \setminus [a,b]$. Así S es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ y además (3.1.7) se satisface para todo $z \in \Pi_+$, (3.1.8) para $x \in (-\infty, a)$, y (3.1.9) para $(b, +\infty)$. Por lo tanto, S pertenece a $\mathcal{R}_q[a,b]$ ■

3.2. Descripción del conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$

En esta sección daremos la parametrización de los elementos del conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$, es decir, el conjunto de soluciones de la versión matricial del problema de momento de Hausdorff dado en la Definición 1.12, teniendo como parámetro un par columna no negativo y además en términos de los bloques de la matriz resolvente U_n definida en (2.3.1).

Para que esto tenga sentido, debemos restringir la matriz resolvente y sus bloques ya que por la Definición 1.12, los elementos de $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ son funciones matriciales que están definidas en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$. Entonces definimos

$$\tilde{U}_n := U_n\,|_{\mathbb{C}\setminus[a,b]}, \tag{3.2.1}$$

y consecuentemente definimos,

$$\tilde{\alpha}_n := \alpha_n\,|_{\mathbb{C}\setminus[a,b]}, \quad \tilde{\beta}_n := \beta_n\,|_{\mathbb{C}\setminus[a,b]}, \quad \tilde{\gamma}_n := \gamma_n\,|_{\mathbb{C}\setminus[a,b]}, \quad \tilde{\delta}_n := \delta_n\,|_{\mathbb{C}\setminus[a,b]}. \tag{3.2.2}$$

Lema 3.4. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, J_q definido en (2.2.1), $\mathcal{P}[J_q,[a,b]]$ dado como en la Definición 3.3 $\tilde{\alpha}_n$, $\tilde{\beta}_n$, $\tilde{\gamma}_n$ y $\tilde{\delta}_n$ dados por (3.2.2). Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$ tal que las matrices $H_{1,n}$ y $H_{2,n}$ definidas por (1.1.24) y (1.1.25) son Hermitianas positivas. Sea $\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix} \in \mathcal{P}[J_q,[a,b]]$ definimos $\mathbf{p}_1 := \tilde{\alpha}_n\mathbf{p} + \tilde{\beta}_n\mathbf{q}$ y $\mathbf{q}_1 := \tilde{\gamma}_n\mathbf{p} + \tilde{\delta}_n\mathbf{q}$. Entonces* $\det \mathbf{p}_1$ *y* $\det \mathbf{q}_1$ *son funciones complejas que son meromorfas en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ y que no son idénticamente cero. Además, el par columna $\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1\\ \mathbf{q}_1\end{pmatrix}$ pertenece a $\mathcal{P}[J_q,[a,b]]$.*

Demostración. De acuerdo a las Definiciones 3.2 y 3.3, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son funciones matriciales complejas de $q \times q$ para las cuales existe un subconjunto discreto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ tal que las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv) en la Definición 3.2 se satisfacen. En principio, vamos a mostrar que $\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1\\ \mathbf{q}_1\end{pmatrix}$ también pertenece a $\mathcal{P}[J_q,[a,b]]$. En vista del Teorema 2.5 y la condición (i), $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{q}_1$ son meromorfas en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ y holomorfas en $\mathbb{C} \setminus ([a,b] \cup \mathcal{D})$. Del Teorema 2.5 parte (c), tenemos que la matriz resolvente U_n es invertible. De acuerdo a la Proposición A.11 del Apéndice A y por la condición (ii), entonces

$$rank\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1(z)\\ \mathbf{q}_1(z)\end{pmatrix} = rank\left[\tilde{U}_n(z)\begin{pmatrix}\mathbf{p}(z)\\ \mathbf{q}(z)\end{pmatrix}\right] = rank\begin{pmatrix}\mathbf{p}(z)\\ \mathbf{q}(z)\end{pmatrix} = q \tag{3.2.3}$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b] \cup \mathcal{D}$. Es fácil ver que de la Ecuación (2.2.6) del Teorema 2.3 se tiene

$$\frac{U_{r,n}(z)J_qU_{r,n}^*(z) - J_q}{i(\bar{z} - z)} \geq 0. \tag{3.2.4}$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. De (3.2.4) se tiene que la función $U_{r,n}^*$ es J_q-expansiva para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, por el Teorema A.17 del Apéndice A, $U_{r,n}$ también es J_q-expansiva para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Por lo que también se satisface

$$\frac{U^*_{r,n}(z)J_qU_{r,n}(z)-J_q}{i(\bar{z}-z)} \geq 0,$$

luego

$$\frac{U^*_{r,n}(z)J_qU_{r,n}(z)}{i(\bar{z}-z)} \geq \frac{J_q}{i(\bar{z}-z)}. \tag{3.2.5}$$

Para cada $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Usando el Teorema 2.5 podemos ver que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1(z)\\(z-a)\mathbf{q}_1(z)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}I_q & 0\\0 & (z-a)I_q\end{pmatrix}U_n(z)\begin{pmatrix}\mathbf{p}(z)\\\mathbf{q}(z)\end{pmatrix}\\ &= U_{1,n}(z)\begin{pmatrix}I_q & 0\\0 & (z-a)I_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{p}(z)\\\mathbf{q}(z)\end{pmatrix} = U_{1,n}(z)\begin{pmatrix}\mathbf{p}(z)\\(z-a)\mathbf{q}(z)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

y

$$\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1(z)\\(b-z)\mathbf{q}_1(z\end{pmatrix} = U_{2,n}(z)\begin{pmatrix}\mathbf{p}(z)\\(b-z)\mathbf{q}(z)\end{pmatrix} \tag{3.2.7}$$

se satisfacen para todo $z \in \mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\mathcal{D})$. De (3.2.5), (3.2.6) y la condición (iii) se sigue

$$\frac{1}{2\mathfrak{Im}\, z}\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1(z)\\(z-a)\mathbf{q}_1(z)\end{pmatrix}^*(J_q)\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1(z)\\(z-a)\mathbf{q}_1(z)\end{pmatrix} \geq 0$$

para todo $z \in \mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\mathcal{D})$. Similarmente, usando (3.2.5), (3.2.7) y la condición (iv) tenemos

$$\frac{1}{2\mathfrak{Im}\, z}\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1(z)\\(b-z)\mathbf{q}_1(z)\end{pmatrix}^*(J_q)\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1(z)\\(b-z)\mathbf{q}_1(z)\end{pmatrix} \geq 0$$

para todo $z \in \mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\mathcal{D})$. Por lo tanto $\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1\\\mathbf{q}_1\end{pmatrix}$ pertenece a $\mathcal{P}[J_q,[a,b]]$. Ahora, sea $z \in \mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\mathcal{D})$. De (2.2.16) sabemos que $\det U_{1,n}$ no es cero en $\mathbb{C}$. Por lo tanto, en vista de (3.2.6) tenemos

$$\begin{pmatrix}\mathbf{p}(z)\\(z-a)\mathbf{q}(z)\end{pmatrix} = [U_{1,n}(z)]^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1(z)\\(z-a)\mathbf{q}_1(z)\end{pmatrix}. \tag{3.2.8}$$

De la condición (iii) y (3.2.8) podemos concluir que

$$\frac{1}{2\mathfrak{Im}\, z}\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1(z)\\(z-a)\mathbf{q}_1(z)\end{pmatrix}^*[U_{1,n}(z)]^{-*}J_q[U_{1,n}(z)]^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1(z)\\(z-a)\mathbf{q}_1(z)\end{pmatrix} \geq 0.$$

Para cada $g \in \mathcal{N}[\mathbf{p}_1(z)] := \{h \in \mathbb{C}^q : \mathbf{p}_1(z)h = 0\}$, esto implica que

$$\frac{1}{2\mathfrak{Im}\, z}\begin{pmatrix}0\\(z-a)\mathbf{q}_1(z)g\end{pmatrix}^*[U_{1,n}(z)]^{-*}J_q[U_{1,n}(z)]^{-1}\begin{pmatrix}0\\(z-a)\mathbf{q}_1(z)g\end{pmatrix} \geq 0.$$

Ya que

$$\frac{1}{2\mathfrak{Im}\, z}\begin{pmatrix}0\\(z-a)\mathbf{q}_1(z)g\end{pmatrix}^*J_q\begin{pmatrix}0\\(z-a)\mathbf{q}_1(z)g\end{pmatrix} = 0,$$

se cumple para todo $g \in \mathbb{C}^q$, vemos entonces que

$$\begin{pmatrix}0\\(z-a)\mathbf{q}_1(z)g\end{pmatrix}^*\frac{J_q-[U_{1,n}(z)]^{-*}J_q[U_{1,n}(z)]^{-1}}{i(\bar{z}-z)}\begin{pmatrix}0\\(z-a)\mathbf{q}_1(z)g\end{pmatrix} \leq 0 \tag{3.2.9}$$

es verdadero para cada $g \in \mathcal{N}[\mathbf{p}_1(z)]$. Por otro lado, (2.2.18) nos proporciona

$$\frac{J_q-[U_{1,n}(z)]^{-*}J_q[U_{1,n}(z)]^{-1}}{i(\bar{z}-z)} = J_q(u_{1,n}\,v_n)^*[R_{T_n}(z)]^*H^{-1}_{1,n}R_{T_n}(z)(u_{1,n}\,v_n)J_q. \tag{3.2.10}$$

Ya que la matriz $H_{1,n}$ es Hermitiana positiva, el lado derecho de (3.2.10) es Hermitiano no negativo. Así, en vista de (3.2.9), para cada $g \in \mathcal{N}[\mathbf{p}_1(z)]$, tenemos

$$\begin{pmatrix}0\\(z-a)\mathbf{q}_1(z)g\end{pmatrix}^*J_q(u_{1,n}\,v_n)^*[R_{T_n}(z)]^*H^{-1}_{1,n}R_{T_n}(z)(u_{1,n}\,v_n)J_q\begin{pmatrix}0\\(z-a)\mathbf{q}_1(z)g\end{pmatrix} = 0$$

y, en vista de $\det R_{T_n}(z) \neq 0$, entonces

$$0 = (u_{1,n}\, v_n) J_q \begin{pmatrix} 0 \\ (z-a)\mathbf{q}_1(z)g \end{pmatrix} = -iu_{1,n}\mathbf{q}_1(z)g.$$

De acuerdo a (1.1.26), esto implica que $s_0\mathbf{q}_1(z)g = 0$ para todo $g \in \mathcal{N}[\mathbf{p}_1(z)]$. Ya que $H_{1,n}$ es Hermitiana positiva, la matriz s_0 es no singular. Entonces

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1(z) \\ \mathbf{q}_1(z) \end{pmatrix} g = 0$$

para todo $g \in \mathcal{N}[\mathbf{p}_1(z)]$. Así, (3.2.3) demuestra que $\mathcal{N}[\mathbf{p}_1(z)] = \{0\}$. Por lo tanto, la matriz $\mathbf{p}_1(z)$ es no singular. Análogamente, uno puede verificar que la matriz $\mathbf{q}_1(z)$ es no singular. ■

Ahora podemos demostrar el resultado principal de esta sección y de este capítulo.

Teorema 3.5. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, J_q definido en (2.2.1), $\mathcal{P}[J_q,[a,b]]$ dado como en la Definición 3.3 $\tilde{\alpha}_n$, $\tilde{\beta}_n$, $\tilde{\gamma}_n$ y $\tilde{\delta}_n$ dados por (3.2.2) y $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido en la Definición 1.12. Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ un secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que las matrices $H_{1,n}$ y $H_{2,n}$ dadas por (1.1.24) y (1.1.25), son Hermitianas positivas. Entonces*

(a) Para cada $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \in \mathcal{P}[J_q,[a,b]]$, la función matricial

$$S := \{\tilde{\gamma}_n(z)\mathbf{p}(z) + \tilde{\delta}_n(z)\mathbf{q}(z)\}\{\tilde{\alpha}_n(z)\mathbf{p}(z) + \tilde{\beta}_n(z)\mathbf{q}(z)\}^{-1} \tag{3.2.11}$$

pertenece a $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$.

(b) Para cada $S \in \mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$, existe un par columna $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \in \mathcal{P}[J_q,[a,b]]$ de funciones matriciales $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ que son meromorfas en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ tal que S admite la representación

$$S = \{\tilde{\gamma}_n(z)\mathbf{p}(z) + \tilde{\delta}_n(z)\mathbf{q}(z)\}\{\tilde{\alpha}_n(z)\mathbf{p}(z) + \tilde{\beta}_n(z)\mathbf{q}(z)\}^{-1}.$$

(c) Si $\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix}$ pertenecen a $\mathcal{P}[J_q,[a,b]]$, entonces

$$\begin{aligned} &\{\tilde{\gamma}_n(z)\mathbf{p}_1(z) + \tilde{\delta}_n(z)\mathbf{q}_1(z)\}\{\tilde{\alpha}_n(z)\mathbf{p}_1(z) + \tilde{\beta}_n(z)\mathbf{q}_1(z)\}^{-1} \\ &= \{\tilde{\gamma}_n(z)\mathbf{p}_2(z) + \tilde{\delta}_n(z)\mathbf{q}_2(z)\}\{\tilde{\alpha}_n(z)\mathbf{p}_2(z) + \tilde{\beta}_n(z)\mathbf{q}_2(z)\}^{-1} \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

si y solo si

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\sim_{\mathcal{P}}} = \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\sim_{\mathcal{P}}}. \tag{3.2.13}$$

donde $\langle\rangle_{\sim_{\mathcal{P}}}$ está definido mediante la Definición 3.5.

Demostración. (a) Sea $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \in \mathcal{P}[J_q,[a,b]]$. En virtud de Lema 3.4, tenemos entonces que $\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \end{pmatrix}$ definidos por $\mathbf{p}_1 = \tilde{\alpha}_n\mathbf{p} + \tilde{\beta}_n\mathbf{q}$ y $\mathbf{q}_1 := \tilde{\gamma}_n\mathbf{p} + \tilde{\delta}_n\mathbf{q}$, también pertenecen a $\mathcal{P}[J_q,[a,b]]$ y, además la función $\det \mathbf{p}_1$ no es idénticamente cero en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$. De la Proposición 3.3 se sigue que $S := \mathbf{q}_1\mathbf{p}_1^{-1}$ pertenece a $\mathcal{R}_q[a,b]$ definido por la Definición 1.11. Se puede ver fácilmente que el par columna $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$ dado por $\tilde{\mathbf{p}} := \mathbf{p}\mathbf{p}_1^{-1}$ y $\tilde{\mathbf{q}} := \mathbf{q}\mathbf{p}_1^{-1}$, también pertenece a $\mathcal{P}[J_q,[a,b]]$. Obviamente, se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{pmatrix} I_q \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \end{pmatrix} \mathbf{p}_1^{-1} = \tilde{U}_n \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \mathbf{p}_1^{-1} = \tilde{U}_n \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{pmatrix}.$$

Nuevamente, recordamos que del Teorema 2.5 parte (c), tenemos que la matriz resolvente U_n es invertible. Se sigue que

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \tilde{U}_n^{-1} \begin{pmatrix} I_q \\ S \end{pmatrix}. \tag{3.2.14}$$

Del Teorema 2.5 obtenemos que $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$. Ya que $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$ pertenece a $\mathcal{P}[J_q, [a,b]]$, tenemos entonces

$$\frac{1}{2\mathfrak{Im}\, z} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}(z) \\ (z-a)\tilde{\mathbf{q}}(z) \end{pmatrix}^* (J_q) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}(z) \\ (z-a)\tilde{\mathbf{q}}(z) \end{pmatrix} \geq 0 \tag{3.2.15}$$

y

$$\frac{1}{2\mathfrak{Im}\, z} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}(z) \\ (b-z)\tilde{\mathbf{q}}(z) \end{pmatrix}^* (J_q) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}(z) \\ (b-z)\tilde{\mathbf{q}}(z) \end{pmatrix} \geq 0 \tag{3.2.16}$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. De (3.2.14), (1.1.29), (1.1.30) y el Teorema 2.5 tenemos

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}(z) \\ (z-a)\tilde{\mathbf{q}}(z) \end{pmatrix} = [U_{1,n}(z)]^{-1} \begin{pmatrix} I_q \\ \tilde{S}_1(z) \end{pmatrix} \tag{3.2.17}$$

y

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}(z) \\ (b-z)\tilde{\mathbf{q}}(z) \end{pmatrix} = [U_{2,n}(z)]^{-1} \begin{pmatrix} I_q \\ \tilde{S}_2(z) \end{pmatrix} \tag{3.2.18}$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$. Así de (3.2.15), (3.2.16), (3.2.17), y (3.2.18) vemos que la desigualdad (2.2.11) se cumple para cada $r \in \{1,2\}$ y cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Aplicando el Teorema 2.4 se sigue que S pertenece a $\mathcal{R}_q[[a,b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$.

(b) Ahora consideramos una función matricial arbitraria S que pertenece a $\mathcal{R}_q[[a,b]; (s_j)_{j=0}^{2n+1}]$. Sean

$$\tilde{\mathbf{p}} := \begin{pmatrix} I_q, & 0 \end{pmatrix} \tilde{U}_n^{-1} \begin{pmatrix} I_q \\ S \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{q}} := \begin{pmatrix} 0, & I_q \end{pmatrix} \tilde{U}_n^{-1} \begin{pmatrix} I_q \\ S \end{pmatrix}. \tag{3.2.19}$$

Del Teorema 2.5 vemos que la función matricial U_n^{-1} es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$. Entonces $\tilde{\mathbf{p}}$ y $\tilde{\mathbf{q}}$ también son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ y obtenemos

$$rank \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}(z) \\ \tilde{\mathbf{q}}(z) \end{pmatrix} = rank \begin{pmatrix} I_q \\ S(z) \end{pmatrix} = q \tag{3.2.20}$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$. Usando el Teorema 2.5 es fácil comprobar que las identidades (3.2.17) y (3.2.18) se satisfacen para todo $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$. Ya que del Teorema 2.4 sabemos que la desigualdad (2.2.11) se cumple para cada $r \in \{1,2\}$ y cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ se sigue entonces que las desigualdades (3.2.15) y (3.2.16) se satisfacen para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Así, en vista de (3.2.20), vemos que $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$ pertenece a $\mathcal{P}[J_q, [a,b]]$. De (3.2.19) obtenemos

$$\begin{pmatrix} I_q \\ S \end{pmatrix} = \tilde{U}_n \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n \tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\beta}_n \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\gamma}_n \tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\delta}_n \tilde{\mathbf{q}} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} S = S \cdot I_q^{-1} &= (\tilde{\gamma}_n \tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\delta}_n \tilde{\mathbf{q}})(\tilde{\alpha}_n \tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\beta}_n \tilde{\mathbf{q}})^{-1} \\ &= ((\tilde{\gamma}_n \mathbf{p} + \tilde{\delta}_n \mathbf{q})\mathbf{p}_1^{-1})((\tilde{\alpha}_n \mathbf{p} + \tilde{\beta}_n \mathbf{q})\mathbf{p}_1^{-1})^{-1} \\ &= (\tilde{\gamma}_n \mathbf{p} + \tilde{\delta}_n \mathbf{q})(\tilde{\alpha}_n \mathbf{p} + \tilde{\beta}_n \mathbf{q})^{-1}. \end{aligned}$$

(c) Sean $\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix}$ que pertenecen a $\mathcal{P}[J_q, [a,b]]$. Obviamente se satisface

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n \mathbf{p}_r + \tilde{\beta}_n \mathbf{q}_r \\ \tilde{\gamma}_n \mathbf{p}_r + \tilde{\delta}_n \mathbf{q}_r \end{pmatrix} = \tilde{U}_n \begin{pmatrix} \mathbf{p}_r \\ \mathbf{q}_r \end{pmatrix}$$

para cada $r \in \{1,2\}$. En vista del Teorema 2.5 parte (c) y el Lema 3.4 lo anterior implica que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathbf{p}_r\\ \mathbf{q}_r\end{pmatrix} &= \tilde{U}_n^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_n\mathbf{p}_r+\tilde{\beta}_n\mathbf{q}_r\\ \tilde{\gamma}_n\mathbf{p}_r+\tilde{\delta}_n\mathbf{q}_r\end{pmatrix}\\ &= \tilde{U}_n^{-1}\begin{pmatrix} I\\ (\tilde{\gamma}_n\mathbf{p}_r+\tilde{\delta}_n\mathbf{q}_r)(\tilde{\alpha}_n\mathbf{p}_r+\tilde{\beta}_n\mathbf{q}_r)^{-1}\end{pmatrix}(\tilde{\alpha}_n\mathbf{p}_r+\tilde{\beta}_n\mathbf{q}_r) \qquad (3.2.21)\end{aligned}$$

para cada $r \in \{1,2\}$. Ahora suponemos que (3.2.12) se cumple. Entonces de (3.2.21) tenemos,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathbf{p}_2\\ \mathbf{q}_2\end{pmatrix} &= \tilde{U}_n^{-1}\begin{pmatrix} I\\ (\tilde{\gamma}_n\mathbf{p}_1+\tilde{\delta}_n\mathbf{q}_1)(\tilde{\alpha}_n\mathbf{p}_1+\tilde{\beta}_n\mathbf{q}_1)^{-1}\end{pmatrix}(\tilde{\alpha}_n\mathbf{p}_2+\tilde{\beta}_n\mathbf{q}_2)\\ &= \begin{pmatrix}\mathbf{p}_1\\ \mathbf{q}_1\end{pmatrix}(\tilde{\alpha}_n\mathbf{p}_1+\tilde{\beta}_n\mathbf{q}_1)^{-1}(\tilde{\alpha}_n\mathbf{p}_2+\tilde{\beta}_n\mathbf{q}_2) = \begin{pmatrix}\mathbf{p}_1F\\ \mathbf{q}_1F\end{pmatrix}\end{aligned}$$

donde $F := (\tilde{\alpha}_n\mathbf{p}_1+\tilde{\beta}_n\mathbf{q}_1)^{-1}(\tilde{\alpha}_n\mathbf{p}_2+\tilde{\beta}_n\mathbf{q}_2)$ es una función matricial que es meromorfa en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$. Además, del Lema 3.4 sabemos que $\det F$ no es idénticamente cero. Por lo tanto, (3.2.13) se cumple. En cambio, ahora suponemos que (3.2.13) se satisface. Entonces existe una función matricial F que es meromorfa en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ tal que $\det F$ no es idénticamente cero y que $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1F$ y $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1F$ se cumplen. Entonces se sigue inmediatamente (3.2.12). ■

Definición 3.7. *La función S descrita en (3.2.11) es la solución asociada a la versión matricial del problema de momentos de Hausdorff para el caso par de momentos dados.*

El Teorema 3.5 da una clara descripción de los elementos del conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ dado en la Definición 1.12. De esta manera, para resolver el Problema 1.4 utilizamos el Teorema 3.5. Consecuentemente, el Problema 1.1 queda solucionado.

3.3. Ejemplos

Ejemplo 3.1. *Dada la secuencia de matrices:*

$$s_0 = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12}\end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix}\frac{7}{12} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{23}{60}\end{pmatrix}$$

$$s_3 = \begin{pmatrix}\frac{9}{20} & \frac{3}{10}\\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix} \qquad s_4 = \begin{pmatrix}\frac{11}{30} & \frac{4}{15}\\ \frac{4}{15} & \frac{53}{210}\end{pmatrix} \qquad s_5 = \begin{pmatrix}\frac{13}{42} & \frac{5}{21}\\ \frac{5}{21} & \frac{37}{168}\end{pmatrix}.$$

Hallar al menos una función σ tal que $\sigma \in \mathcal{M}^2_{\geq}[[0,1];(s_j)_{j=0}^5]$.

Solución. Para un mejor entendimiento del lector, el procedimiento de la solución lo escribimos en pasos:

Paso 1. Claramente la secuencia $(s_j)_{j=0}^5$ es una secuencia de matrices Hermitianas de 2×2. Verificamos que la secuencia dada satisface las condiciones necesarias y suficientes de existencia de solución.

De acuerdo a (1.1.22) y (1.1.23) construimos las matrices de bloque de Hankel asociadas a la secuencia $(s_j)_{j=0}^5$

$$\tilde{H}_{1,2} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{23}{60}\\ \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10}\\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{11}{30} & \frac{4}{15}\\ \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{15} & \frac{53}{210}\end{pmatrix}, \quad \tilde{H}_{2,2} = \begin{pmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10}\\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{11}{30} & \frac{4}{15}\\ \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{15} & \frac{53}{210}\\ \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{11}{30} & \frac{4}{15} & \frac{13}{42} & \frac{5}{21}\\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{15} & \frac{53}{210} & \frac{5}{21} & \frac{37}{168}\end{pmatrix}$$

y también, de acuerdo a (1.1.24) y (1.1.25), construimos las matrices de bloque de Hankel asociadas a la secuencia $(s_j)_{j=0}^5$ y al intervalo acotado $[0,1]$

$$H_{1,2}=-0\tilde{H}_{1,2}+\tilde{H}_{2,2}=\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{11}{30} & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{15} & \frac{53}{210} \\ \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{11}{30} & \frac{4}{15} & \frac{13}{42} & \frac{5}{21} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{15} & \frac{53}{210} & \frac{5}{21} & \frac{37}{168} \end{pmatrix}$$

$$H_{2,2}=1\tilde{H}_{1,2}-\tilde{H}_{2,2}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{12} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{21} \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{2}{35} & \frac{1}{35} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{21} & \frac{1}{35} & \frac{9}{280} \end{pmatrix}$$

Verificamos que sean positivas definidas. Para $H_{1,2}$ se tiene

$$\det\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}=\frac{3}{8}>0, \qquad \det\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} \end{pmatrix}=\frac{7}{960}>0,$$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{23}{60} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}=\frac{1}{6400}>0, \qquad \det\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{11}{30} \\ \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{15} \\ \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{11}{30} & \frac{4}{15} & \frac{13}{42} \end{pmatrix}=\frac{3}{22400000}>0,$$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{11}{30} & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{15} & \frac{53}{210} \\ \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{11}{30} & \frac{4}{15} & \frac{13}{42} & \frac{5}{21} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{15} & \frac{53}{210} & \frac{5}{21} & \frac{37}{168} \end{pmatrix}=\frac{1}{6272000000}>0.$$

Para $H_{2,2}$ tenemos

$$\det\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{12} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}>0, \qquad \det\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{12} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{15} \end{pmatrix}=\frac{3}{320}>0,$$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{12} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}=\frac{9}{32000}>0, \qquad \det\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{15} \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{12} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{2}{35} \end{pmatrix}=\frac{1}{4200000}>0,$$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{12} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{21} \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{2}{35} & \frac{1}{35} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{21} & \frac{1}{35} & \frac{9}{280} \end{pmatrix}=\frac{1}{2744000000}>0$$

Usando el criterio de Sylvester, Teorema A.13 del Apéndice A, tenemos que $H_{1,n}$ y $H_{2,n}$ son positivas definidas. Por lo que, tenemos una secuencia $(s_j)_{j=0}^5$ de matrices Hermitianas de 2×2 tales que $H_{1,2}$ y $H_{2,2}$ son Hermitianas positivas. Si revisamos el Teorema 1.14, entonces aseguramos que el conjunto

$\mathcal{M}^2_{\geq}[[0,1];(s_j)_{j=0}^5]$ definido mediante la Definición 1.10 es no vacío.

Paso 2. Construimos la matriz resolvente $\tilde{U}_2$ dada en (3.2.1). Para eso, primero construimos los elementos $R_{T_2^*}$, v_2 y $\tilde{u}_2$ de acuerdo a (1.1.20), (1.1.21) y (1.1.26), respectivamente,

$$R_{T_2^*}(z)=\begin{pmatrix}1&0&z&0&z^2&0\\0&1&0&z&0&z^2\\0&0&1&0&z&0\\0&0&0&1&0&z\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad v_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad \tilde{u}_2=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&0\\0&-\frac{3}{2}\\-\frac{5}{6}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{7}{12}\\-\frac{7}{12}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{23}{60}\end{pmatrix}$$

Entonces, los bloques de $\tilde{U}_2$ son los siguientes:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_2(z)&=I_2+zv_2^*R_{T_2^*}(z)\tilde{H}_{2,2}^{-1}\cdot\tilde{u}_2,\\&=\begin{pmatrix}-25z^3+\frac{215z^2}{7}-\frac{75z}{7}+1 & 2z\left(14z^2-14z+3\right)\\ \frac{10}{7}z\left(14z^2-14z+3\right) & -42z^3+49z^2-15z+1\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_2(z)&=\tilde{u}_2^*R_{T_2^*}(z)\tilde{H}_{2,2}^{-1}\cdot\tilde{u}_2,\\&=\begin{pmatrix}\frac{5}{84}\left(630z^2-536z+85\right) & -42z^2+\frac{98z}{3}-\frac{13}{3}\\ \frac{1}{3}\left(-90z^2+80z-13\right) & 63z^2-\frac{175z}{3}+\frac{601}{60}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_2(z)&=(z-1)(z-0)v_2^*R_{T_2^*}(z)\frac{0H_{1,2}^{-1}+1H_{2,2}^{-1}}{1-0}v_2\\&=\begin{pmatrix}\frac{5}{12}(z-1)z\left(469z^2-488z+117\right) & \frac{5}{6}(z-1)z\left(91z^2-104z+27\right)\\ \frac{5}{6}(z-1)z\left(28z^2-77z+27\right) & \frac{5}{3}(z-1)z\left(28z^2-35z+9\right)\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{3.3.3}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_2(z)&=I_2+\tilde{u}_2^*R_{T_2^*}(z)\frac{(z-1)R_{T_2^*}^{-1}(0)0H_{1,2}^{-1}+(z-0)R_{T_2^*}^{-1}(1)1H_{2,2}^{-1}}{1-0}v_2\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{16}\left(-4690z^3+6840z^2-2215z+16\right) & -\frac{5}{8}z\left(182z^2-264z+85\right)\\ -\frac{7}{8}z\left(40z^2-60z+23\right) & -70z^3+105z^2-\frac{151z}{4}+1\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{3.3.4}$$

Paso 3. Escribimos la fórmula general de los elementos que pertenecen a el conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido como en la Definición 1.12,

$$S(z)=\{\tilde{\gamma}_n(z)\mathbf{p}(z)+\tilde{\delta}_n(z)\mathbf{q}(z)\}\{\tilde{\alpha}_n(z)\mathbf{p}(z)+\tilde{\beta}_n(z)\mathbf{q}(z)\}^{-1}.\tag{3.3.5}$$

donde $\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\\mathbf{q}\end{pmatrix}$ pertenece al conjunto $\mathcal{P}[J_q,[a,b]]$, definido como en la Definición 3.3 y J_q definido como en (2.2.1).

Paso 4. Ahora, consideramos dos casos:

(a) Sean $\mathbf{p}=I_2$ y $\mathbf{q}=0_{2\times2}$. Se verifica fácilmente que el par $\begin{pmatrix}I_2\\0_{2\times2}\end{pmatrix}$ pertenece al conjunto $\mathcal{P}[J_2,[0,1]]$. Si aplicamos la fórmula (3.3.5) para $n=2$ y con el par $\begin{pmatrix}I_2\\0_{2\times2}\end{pmatrix}$ obtenemos,

$$S(z)=\tilde{\gamma}_2(z)\{\tilde{\alpha}_2(z)\}^{-1}\tag{3.3.6}$$

Por otro lado, tenemos que

$$S(z)=\int_0^1\frac{1}{t-z}d\mu(t)$$

donde $\mu\in\mathcal{M}^2_{\geq}[[0,1];(s_j)_{j=0}^5]$. Ahora, estamos interesados en describir la función $\mu(t)$. De (3.3.1), (3.3.2) y (3.3.6) tenemos que

$$S(z) = \begin{pmatrix} S_{11}(z) & S_{12}(z) \\ S_{21}(z) & S_{22}(z) \end{pmatrix} \tag{3.3.7}$$

donde

$$\begin{aligned}
S_{11}(z) &= -\frac{5\left(12348z^5 - 28294z^4 + 23828z^3 - 9027z^2 + 1499z - 85\right)}{12\,(3430z^6 - 9765z^5 + 10710z^4 - 5689z^3 + 1503z^2 - 180z + 7)} \\
S_{12}(z) &= \frac{-6860z^4 + 12670z^3 - 8064z^2 + 2047z - 182}{6\,(3430z^6 - 9765z^5 + 10710z^4 - 5689z^3 + 1503z^2 - 180z + 7)} \\
S_{12}(z) &= \frac{-6860z^4 + 12670z^3 - 8064z^2 + 2047z - 182}{6\,(3430z^6 - 9765z^5 + 10710z^4 - 5689z^3 + 1503z^2 - 180z + 7)} \\
S_{22}(z) &= \frac{-308700z^5 + 758800z^4 - 701015z^3 + 300015z^2 - 58655z + 4207}{60\,(3430z^6 - 9765z^5 + 10710z^4 - 5689z^3 + 1503z^2 - 180z + 7)}
\end{aligned}$$

Notemos que $S_{12} = S_{21}$. Sea $P(z)$ el polinomio definido mediante

$$P(z) := 3430z^6 - 9765z^5 + 10710z^4 - 5689z^3 + 1503z^2 - 180z + 7$$

El polinomio $P(z)$ tiene las siguientes raíces:

$$z_1 = 0.0714 \qquad z_2 = 0.2182 \qquad z_3 = 0.3398 \qquad z_4 = 0.6045 \qquad z_5 = 0.6931 \qquad z_6 = 0.9197$$

donde hemos utilizado 4 dígitos después del punto decimal. Utilizando fracciones parciales tenemos que

$$\begin{aligned}
S_{11}(z) &= \frac{0.1756}{z_1 - z} + \frac{0.0955}{z_2 - z} + \frac{0.2966}{z_3 - z} + \frac{0.3664}{z_4 - z} + \frac{0.1882}{z_5 - z} + \frac{0.3773}{z_6 - z} \\
S_{12}(z) &= -\frac{0.3179}{z_1 - z} + \frac{0.0677}{z_2 - z} - \frac{0.3261}{z_3 - z} + \frac{0.2743}{z_4 - z} - \frac{0.0372}{z_5 - z} + \frac{0.3392}{z_6 - z} \\
S_{12}(z) &= -\frac{0.3179}{z_1 - z} + \frac{0.0677}{z_2 - z} - \frac{0.3261}{z_3 - z} + \frac{0.2743}{z_4 - z} - \frac{0.0372}{z_5 - z} + \frac{0.3392}{z_6 - z} \\
S_{22}(z) &= \frac{0.5754}{z_1 - z} + \frac{0.0480}{z_2 - z} + \frac{0.3586}{z_3 - z} + \frac{0.2054}{z_4 - z} + \frac{0.0073}{z_5 - z} + \frac{0.3050}{z_6 - z}
\end{aligned}$$

Reescribiendo (3.3.7), tenemos que

$$S(z) = \frac{A_1}{z_1 - z} + \frac{A_2}{z_2 - z} + \frac{A_3}{z_3 - z} + \frac{A_4}{z_4 - z} + \frac{A_5}{z_5 - z} + \frac{A_6}{z_6 - z}$$

donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.1756 & -0.3179 \\ -0.3179 & 0.5754 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0.0955 & 0.0677 \\ 0.0677 & 0.0480 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0.2966 & -0.3261 \\ -0.3261 & 0.3586 \end{pmatrix}$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} 0.3664 & 0.2743 \\ 0.2743 & 0.2054 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0.1882 & -0.0372 \\ -0.0372 & 0.0073 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0.3773 & 0.3392 \\ 0.3392 & 0.3050 \end{pmatrix}.$$

En vista de la Definición A.4 del Apéndice A, podemos concluir que

$$S(z) = \frac{A_1}{z_1 - z} + \frac{A_2}{z_2 - z} + \frac{A_3}{z_3 - z} + \frac{A_4}{z_4 - z} + \frac{A_5}{z_5 - z} + \frac{A_6}{z_6 - z} = \int_0^1 \frac{1}{t - z} d\mu(t)$$

donde

$$\mu(t) = \begin{cases} 0_{2\times 2} & 0 \le t < 0.0714 \\ A_1 & 0.0714 \le t < 0.2182 \\ A_1 + A_2 & 0.2182 \le t < 0.3398 \\ A_1 + A_2 + A_3 & 0.3398 \le t < 0.6045 \\ A_1 + A_2 + A_3 + A_4 & 0.6045 \le t < 0.6931 \\ \sum_{j=0}^{5} A_j & 0.6931 \le t < 0.9197 \\ \sum_{j=0}^{6} A_j & 0.9197 \le t < 1 \end{cases} \tag{3.3.8}$$

(b) Sean $\mathbf{p} = 0_{2\times 2}$ y $\mathbf{q} = I_2$. Similarmente como en el caso anterior (a). Se verifica fácilmente que el par $\begin{pmatrix} 0_{2\times 2} \\ I_2 \end{pmatrix}$ pertenece al conjunto $\mathcal{P}[J_2,[0,1]]$. Si aplicamos la fórmula (3.3.5) con $n=2$ y el par $\begin{pmatrix} 0_{2\times 2} \\ I_2 \end{pmatrix}$, obtenemos

$$S(z)=\tilde{\delta}_2(z)\{\tilde{\beta}_2(z)\}^{-1} \tag{3.3.9}$$

Por otro lado,

$$S(z)=\int_0^1 \frac{1}{t-z}d\nu(t)$$

donde $\nu\in\mathcal{M}^2_{\geq}[[0,1];(s_j)_{j=0}^5]$. Estamos interesados en describir la función $\nu(t)$. De (3.3.3), (3.3.4) y (3.3.9) tenemos que

$$S(z)=\begin{pmatrix} S_{11}(z) & S_{12}(z) \\ S_{21}(z) & S_{22}(z) \end{pmatrix} \tag{3.3.10}$$

donde

$$S_{11}(z)=\frac{-26460z^5+62160z^4-51380z^3+17792z^2-2255z+36}{60(z-1)z\,(294z^4-560z^3+371z^2-100z+9)}$$
$$S_{12}(z)=\frac{-2940z^4+5600z^3-3416z^2+734z-27}{30(z-1)z\,(294z^4-560z^3+371z^2-100z+9)}$$
$$S_{12}(z)=\frac{-2940z^4+5600z^3-3416z^2+734z-27}{30(z-1)z\,(294z^4-560z^3+371z^2-100z+9)}$$
$$S_{22}(z)=\frac{-26460z^5+66570z^4-60662z^3+24155z^2-3818z+117}{60(z-1)z\,(294z^4-560z^3+371z^2-100z+9)}$$

Notemos que $S_{12}=S_{21}$. Sea $Q(z)$ el polinomio definido mediante

$$Q(z):=(z-1)z\left(294z^4-560z^3+371z^2-100z+9\right)$$

El polinomio $Q(z)$ tiene las siguientes raíces:

$$z_1=0 \qquad z_2=0.1846 \qquad z_3=0.3867 \qquad z_4=0.5406 \qquad z_5=0.7926 \qquad z_6=1$$

donde hemos utilizado 4 dígitos después del punto decimal. Utilizando fracciones parciales tenemos que

$$S_{11}(z)=\frac{0.0666}{z_1-z}+\frac{0.2637}{z_2-z}+\frac{0.2769}{z_3-z}+\frac{0.2241}{z_4-z}+\frac{0.5411}{z_5-z}+\frac{0.1273}{z_6-z}$$
$$S_{12}(z)=-\frac{0.1000}{z_1-z}-\frac{0.4115}{z_2-z}+\frac{0.1552}{z_3-z}-\frac{0.1694}{z_4-z}+\frac{0.4090}{z_5-z}+\frac{0.1166}{z_6-z}$$
$$S_{12}(z)=-\frac{0.1000}{z_1-z}-\frac{0.4115}{z_2-z}+\frac{0.1552}{z_3-z}-\frac{0.1694}{z_4-z}+\frac{0.4090}{z_5-z}+\frac{0.1166}{z_6-z}$$
$$S_{22}(z)=\frac{0.2166}{z_1-z}+\frac{0.6422}{z_2-z}+\frac{0.0870}{z_3-z}+\frac{0.1280}{z_4-z}+\frac{0.3092}{z_5-z}+\frac{0.1166}{z_6-z}$$

Reescribiendo (3.3.10), tenemos que

$$S(z)=\frac{B_1}{z_1-z}+\frac{B_2}{z_2-z}+\frac{B_3}{z_3-z}+\frac{B_4}{z_4-z}+\frac{B_5}{z_5-z}+\frac{B_6}{z_6-z}$$

donde

$$B_1=\begin{pmatrix} 0.0666 & -0.1000 \\ -0.1000 & 0.2166 \end{pmatrix} \quad B_2=\begin{pmatrix} 0.2637 & -0.4115 \\ -0.4115 & 0.6422 \end{pmatrix} \quad B_3=\begin{pmatrix} 0.2769 & 0.1552 \\ 0.1552 & 0.0870 \end{pmatrix}$$
$$B_4=\begin{pmatrix} 0.2241 & -0.1694 \\ -0.1694 & 0.1280 \end{pmatrix} \quad B_5=\begin{pmatrix} 0.5411 & 0.4090 \\ 0.4090 & 0.3092 \end{pmatrix} \quad B_6=\begin{pmatrix} 0.1273 & 0.1166 \\ 0.1166 & 0.1166 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo a la Definición A.4 del Apéndice A.4, tenemos que

$$S(z)=\frac{B_1}{z_1-z}+\frac{B_2}{z_2-z}+\frac{B_3}{z_3-z}+\frac{B_4}{z_4-z}+\frac{B_5}{z_5-z}+\frac{B_6}{z_6-z}=\int_0^1 \frac{1}{t-z}d\nu(t)$$

donde

$$\nu(t)=\begin{cases}0_{2\times 2} & t=0\\ B_1 & 0<t<0.1846\\ B_1+B_2 & 0.1846\le t<0.3867\\ B_1+B_2+B_3 & 0.3867\le t<0.5406\\ B_1+B_2+B_3+B_4 & 0.5406\le t<0.7926\\ \sum_{j=0}^{5}B_j & 0.7926\le t<1\end{cases}\tag{3.3.11}$$

Respuesta al ejemplo: las funciones en (3.3.8) y (3.3.11) que pertenecen a $\mathcal{M}^2_{\geq}[[0,1];(s_j)_{j=0}^5]$.

Observación 3.2. [CRi, pág. 21] *Las soluciones asociadas dadas en (3.3.6) y (3.3.9) se llaman soluciones extremales.*

Observación 3.3. *También se puede verificar que la función σ dada por (1.6.10), es solución para este problema.*

En vista de la Observación 3.3, vemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2. *El problema de momentos de Hausdorff para los momentos*

$$s_0=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\qquad s_1=\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12}\end{pmatrix}\qquad s_2=\begin{pmatrix}\frac{7}{12} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{23}{60}\end{pmatrix}$$

$$s_3=\begin{pmatrix}\frac{9}{20} & \frac{3}{10}\\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}\qquad s_4=\begin{pmatrix}\frac{11}{30} & \frac{4}{15}\\ \frac{4}{15} & \frac{53}{210}\end{pmatrix}\qquad s_5=\begin{pmatrix}\frac{13}{42} & \frac{5}{21}\\ \frac{5}{21} & \frac{37}{168}\end{pmatrix},$$

tiene la siguiente solución asociada $S(z)$:

$$S(z)=\ln(1-z)\begin{pmatrix}1+z & 4z-2\\ 4z-2 & z(9z-11)+4\end{pmatrix}+\ln(-z)\begin{pmatrix}-z-1 & -4z+2\\ -4z+2 & z(11-9z)-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 9z-\frac{13}{2}\end{pmatrix}\tag{3.3.12}$$

Aquí, $\ln(z)$ *es el logaritmo principal, es decir, está definido en* $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0)$. *Nótese que $S(z)$ está bien definida ya que $z\in\mathbb{C}\setminus[0,1]$. La función (3.3.12) se obtiene de la igualdad (ver (3.2.11))*

$$S(z)=\{\tilde{\gamma}_2(z)\mathbf{p}(z)+\tilde{\delta}_2(z)\mathbf{q}(z)\}\{\tilde{\alpha}_2(z)\mathbf{p}(z)+\tilde{\beta}_2(z)\mathbf{q}(z)\}^{-1}$$

donde $\tilde{\alpha}_2(z)$, $\tilde{\gamma}_2(z)$, $\tilde{\beta}_2(z)$ y $\tilde{\delta}_2(z)$, están dados por (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3) y (3.3.4), respectivamente y el par $\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}$ dado por $\mathbf{p}(z)=I_2$. Aquí $\mathbf{q}(z)$ es:

$$\mathbf{q}(z)=\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}\mathbf{q}_{11} & \mathbf{q}_{12}\\ \mathbf{q}_{21} & \mathbf{q}_{22}\end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{11}&=-(P_1(z)+\ln(1-z)P_2(z)+\ln(-z)P_3(z))(\tilde{P}_1(z)+\ln(1-z)\tilde{P}_2(z)+\ln(-z)\tilde{P}_3(z)),\\
\mathbf{q}_{12}&=(Q_1(z)+\ln(1-z)Q_2(z)+\ln(-z)Q_3(z))(\tilde{Q}_1(z)+\ln(1-z)\tilde{Q}_2(z)+\ln(-z)\tilde{Q}_3(z)),\\
\mathbf{q}_{21}&=(W_1(z)+\ln(1-z)W_2(z)+\ln(-z)W_3(z))(\tilde{W}_1(z)+\ln(1-z)\tilde{W}_2(z)+\ln(-z)\tilde{W}_3(z)),\\
\mathbf{q}_{22}&=(R_1(z)+\ln(1-z)R_2(z)+\ln(-z)R_3(z))(\tilde{R}_1(z)+\ln(1-z)\tilde{R}_2(z)+\ln(-z)\tilde{R}_3(z))\\
\lambda&=D_2(z)\ln^2(1-z)+D_5(z)\ln(1-z)+D_6(z)\ln(-z)\ln(1-z)+D_4(z)\ln^2(-z)\\
&\quad+D_1(z)+D_3(z)\ln(-z).
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_1(z) &= 12\left(1680z^5 - 3780z^4 + 3050z^3 - 1120z^2 + 181z - 4\right)\\
\tilde{P}_2(z) &= 720z\left(28z^5 - 77z^4 + 80z^3 - 40z^2 + 10z - 1\right)\\
\tilde{P}_3(z) &= -720z\left(28z^5 - 77z^4 + 80z^3 - 40z^2 + 10z - 1\right)\\
\tilde{Q}_1(z) &= 30z\left(420z^3 - 750z^2 + 380z - 47\right)\\
\tilde{Q}_2(z) &= 360z\left(35z^4 - 80z^3 + 60z^2 - 16z + 1\right)\\
\tilde{Q}_3(z) &= -40z\left(133z^4 - 512z^3 + 668z^2 - 352z + 63\right)\\
\tilde{W}_1(z) &= 6z\left(1680z^4 - 1260z^3 - 1690z^2 + 1520z - 229\right)\\
\tilde{W}_2(z) &= 360z\left(28z^5 - 35z^4 - 20z^3 + 40z^2 - 14z + 1\right)\\
\tilde{W}_3(z) &= -360z\left(28z^5 - 35z^4 - 20z^3 + 40z^2 - 14z + 1\right)\\
\tilde{R}_1(z) &= 3\left(-4620z^4 + 7290z^3 - 2740z^2 + 5z + 16\right)\\
\tilde{R}_2(z) &= -180z\left(77z^4 - 160z^3 + 100z^2 - 16z - 1\right)\\
\tilde{R}_3(z) &= -20z\left(245z^4 + 464z^3 - 1604z^2 + 1120z - 225\right)\\
P_1(z) &= \frac{1}{84}\left(4620z^3 - 7290z^2 + 3220z - 341\right)\\
P_2(z) &= \frac{1}{7}\left(385z^4 - 800z^3 + 540z^2 - 128z + 7\right)\\
P_3(z) &= \frac{1}{7}\left(-735z^4 + 880z^3 - 260z^2 - 8z + 7\right)\\
Q_1(z) &= \frac{5}{3}\left(-84z^3 + 126z^2 - 52z + 5\right)\\
Q_2(z) &= -2\left(70z^4 - 140z^3 + 90z^2 - 20z + 1\right)\\
Q_3(z) &= 2\left(98z^4 - 140z^3 + 68z^2 - 14z + 1\right)\\
W_1(z) &= \frac{5}{21}(9z - 7)\left(84z^3 - 126z^2 + 52z - 5\right)\\
W_2(z) &= \frac{2}{7}(9z - 7)\left(70z^4 - 140z^3 + 90z^2 - 20z + 1\right)\\
W_3(z) &= -\frac{2}{7}(9z - 7)\left(70z^4 - 140z^3 + 90z^2 - 20z + 1\right)\\
R_1(z) &= -378z^4 + 826z^3 - \frac{1257z^2}{2} + \frac{1133z}{6} - \frac{991}{60}\\
R_2(z) &= -378z^5 + 1015z^4 - 1010z^3 + 450z^2 - 83z + 4\\
R_3(z) &= 378z^5 - 1015z^4 + 1010z^3 - 450z^2 + 83z - 4\\
D_1(z) &= 3(16 - 719z - 11940z^2 + 318550z^3 - 2126360z^4 + 6611460z^5 - 11128800z^6\\
&\quad + 10470600z^7 - 5191200z^8 + 1058400z^9)\\
D_2(z) &= 10800(z-1)^4 z^3\left(294z^4 - 560z^3 + 371z^2 - 100z + 9\right)\\
D_3(z) &= 20z(564480z^8 - 2486400z^7 + 4576320z^6 - 4565600z^5 + 2672096z^4 - 921888z^3\\
&\quad + 175891z^2 - 15088z + 189)\\
D_4(z) &= -1200(z-1)^2 z^2\left(2646z^7 - 924z^6 - 11263z^5 + 19526z^4 - 14332z^3 + 5394z^2 - 1007z + 72\right)\\
D_5(z) &= 180(z-1)z(35280z^8 - 155400z^7 + 277200z^6 - 255320z^5 + 127736z^4 - 33058z^3\\
&\quad + 3622z^2 - 53z - 5)\\
D_6(z) &= 9600(1-2z)^2(z-1)z^2\left(294z^5 - 854z^4 + 931z^3 - 471z^2 + 109z - 9\right).
\end{aligned}$$

Utilizando la transformada inversa de Stieltjes ubicada en el Teorema B.10 del Apéndice B, se puede *obtener la función* $\sigma(t)$*:*

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} + t & 2t^2 - 2t \\ 2t^2 - 2t & 3t^3 - \frac{11}{2}t^2 + 4t \end{pmatrix}.$$

Capítulo 4

Relación entre dos matrices resolventes

En este capítulo nos centraremos en escribir la matriz resolvente U_n definida en (2.3.1) en términos de la matriz V_n definida en [CDFK, pág. 152]. Cabe mencionar que la notación usada en [CDFK], es similar a la notación que hemos utilizado hasta ahora y seguiremos usando en este trabajo.

En la sección 4.1 agregamos la información necesaria de [CDFK]. En la sección 4.2 incluimos algunas identidades adicionales y finalmente en la sección 4.3 obtenemos la relación entre las matrices U_n y V_n.

4.1. Notación adicional

En vista de [CDFK, pág. 152], definimos

Definición 4.1. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$. Además, sean T_n, R_{T_n}, v_n, $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14. Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que las matrices $H_{1,n}$ y $H_{2,n}$ definidas por (1.1.24) y (1.1.25) son Hermitianas positivas. Sea $V_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{2q\times 2q}$ definida para todo $z \in \mathbb{C}$ por*

$$V_n(z) := \begin{pmatrix} V_{11;n} & V_{12;n} \\ V_{21;n} & V_{22;n} \end{pmatrix} \tag{4.1.1}$$

donde

$$V_{11;n} := I_q - (z-a)u_{2,n}^*[R_{T_n}(\bar{z})]^* H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a) v_n, \tag{4.1.2}$$

$$V_{12;n} := u_{1,n}^*[R_{T_n}(\bar{z})]^* H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n}, \tag{4.1.3}$$

$$V_{21;n} := -(b-z)(z-a)v_n^*[R_{T_n}(\bar{z})]^* H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a) v_n, \tag{4.1.4}$$

$$V_{22;n} := I_q + (z-a)v_n^*[R_{T_n}(\bar{z})]^* H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n}. \tag{4.1.5}$$

A la matriz V_n definida en (4.1.1), la llamaremos la matriz resolvente adicional.

De acuerdo a [CDFK, pág. 149] tenemos

Definición 4.2. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, J_q definida en (2.2.1). Además, sean T_n, R_{T_n}, v_n, $u_{1,n}$, definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14. Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que la matriz $H_{1,n}$ definida por (1.1.24) es Hermitiana positiva. Sea $\tilde{V}_{1,n} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{2q\times 2q}$ definida para todo $z \in \mathbb{C}$ por*

$$\tilde{V}_{1,n}(z) := I_{2q} + i(z-a)(u_{1,n} \;\; v_n)^*[R_{T_n}(\bar{z})]^* H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a)(u_{1,n} \;\; v_n) J_q \tag{4.1.6}$$

Observación 4.1. *De [CDFK, pág. 149] tenemos que $\tilde{V}_{1,n}$ es invertible ya que*

$$[\tilde{V}_{1,n}(z)]^{-1} = I_{2q} - i(z-a)(u_{1,n} \quad v_n)^*[R_{T_n}(a)]^* H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(z)(u_{1,n} \quad v_n)J_q. \tag{4.1.7}$$

Observación 4.2. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, J_q definido en (2.2.1) y $\tilde{V}_{1,n}$ definida como en la Definición 4.2, entonces*

$$[\tilde{V}_{1,n}(z)]^{-1} = J_q \tilde{V}_{1,n}^*(\bar{z}) J_q. \tag{4.1.8}$$

Demostración. *En vista de la Ecuación (4.1.7) tenemos*

$$\begin{aligned}[\tilde{V}_{1,n}(z)]^{-1} &= J_qJ_q - i(z-a)J_qJ_q(u_{1,n} \quad v_n)^*[R_{T_n}(a)]^* H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(z)(u_{1,n} \quad v_n)J_q \\ &= J_q[I_{2q} - i(z-a)J_q(u_{1,n} \quad v_n)^*[R_{T_n}(a)]^* H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(z)(u_{1,n} \quad v_n)]J_q. \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Por otro lado, de (4.1.6), tenemos

$$\tilde{V}_{1,n}(\bar{z}) = I_{2q} + i(\bar{z}-a)(u_{1,n} \quad v_n)^*[R_{T_n}(z)]^* H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a)(u_{1,n} \quad v_n)J_q$$

y

$$\tilde{V}_{1,n}^*(\bar{z}) = I_{2q} - i(z-a)J_q(u_{1,n} \quad v_n)^*[R_{T_n}(a)]^* H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(z)(u_{1,n} \quad v_n). \tag{4.1.10}$$

Combinando (4.1.9) y (4.1.10), claramente se sigue (4.1.8).

También del artículo [CDFK, pág 151] podemos introducir

Definición 4.3. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$. Además sean T_n, R_{T_n}, v_n, definidos como en la Definición 1.13, sea $\tilde{V}_{1,n}$ definido como en la Definición 4.2 y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que la matriz $H_{2,n}$ definida por (1.1.25) es Hermitiana positiva. Sea $V_{1,n} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{2q\times 2q}$ definida para todo $z \in \mathbb{C}$ por*

$$V_{1,n}(z) := \tilde{V}_{1,n}(z) A_{1,n} \tag{4.1.11}$$

donde

$$A_{1,n} := \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ \tilde{M}_{1,n} & I_q \end{pmatrix}$$

y

$$\tilde{M}_{1,n} := (a-b)v_n^*[R_{T_n}(a)]^* H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a) v_n.$$

Observación 4.3. *$A_{1,n}$ es invertible ya que*

$$A_{1,n}^{-1} = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ -\tilde{M}_{1,n} & I_q \end{pmatrix}$$

y, además claramente se cumple la igualdad

$$A_{1,n}^{-1} = J_q A_{1,n}^* J_q. \tag{4.1.12}$$

Observación 4.4. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, J_q dada por (2.2.1) y $V_{1,n}$ dada por la Definición 4.3. Entonces*

$$V_{1,n}^{-1}(z) = J_q V_{1,n}^*(\bar{z}) J_q. \tag{4.1.13}$$

Demostración. *De acuerdo a (4.1.8) y (4.1.12),*

$$\begin{aligned} V_{1,n}^{-1}(z) &= A_{1,n}^{-1} \tilde{V}_{1,n}^{-1}(z) \\ &= (J_q A_{1,n}^* J_q)(J_q \tilde{V}_{1,n}^*(\bar{z}) J_q) \\ &= J_q A_{1,n}^* \tilde{V}_{1,n}^*(\bar{z}) J_q. \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Por otro lado, de (4.1.11) tenemos que

$$V_{1,n}^*(\bar{z}) = A_{1,n}^* \tilde{V}_{1,n}^*(\bar{z}). \tag{4.1.15}$$

Combinando (4.1.14) y (4.1.15) se sigue claramente (4.1.13).

Similarmente al Teorema 2.5 se demuestra en [CDFK, pág. 153-155] que

$$V_n(z) = \begin{pmatrix} (z-a)I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} V_{1,n}(z) \begin{pmatrix} (z-a)^{-1}I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}. \tag{4.1.16}$$

4.2. Identidades adicionales.

En esta sección mostraremos las identidades que serán de vital importancia en la Sección 4.3.

Observación 4.5. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Además, sean T_n, R_{T_n}, v_n, $\tilde{H}_{1,n}$, $\tilde{H}_{2,n}$, definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14. Entonces las siguientes identidades se satisfacen:*

$$abT_n\tilde{H}_{2,n}T_n^* - abT_n\tilde{H}_{2,n}T_n^* + z\tilde{H}_{1,n} - z\tilde{H}_{1,n} = 0 \tag{4.2.1}$$

$$(b-a)I = bR_{T_n^*}^{-1}(a) - aR_{T_n^*}^{-1}(b) \tag{4.2.2}$$

para cada $z \in \mathbb{C}$ y para cada $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$.

Lema 4.1. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Además, sean T_n, R_{T_n}, v_n, $\tilde{H}_{1,n}$, $\tilde{H}_{2,n}$, $H_{1,n}$, $H_{2,n}$, $\tilde{u}_n$ $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14. Entonces para cada $z \in \mathbb{C}$, las siguientes identidades se satisfacen:*

$$R_{T_n}^{-1}(z)\tilde{H}_{2,n}R_{T_n^*}^{-1}(a) + zv_nu_{1,n}^* - H_{1,n}R_{T_n^*}^{-1}(z) - (z-a)\tilde{u}_nv_n^* = 0, \tag{4.2.3}$$

$$(z-a)v_nu_{2,n}^* - (z-a)u_{2,n}v_n^* - (I-aT_n)H_{2,n}(I-zT_n^*) + (I-zT_n)H_{2,n}(I-aT_n^*) = 0, \tag{4.2.4}$$

$$(z-a)v_nu_{2,n}^* + (z-b)u_{1,n}v_n^* - (I-aT_n)H_{2,n}(I-zT_n^*) - (I-zT_n)H_{1,n}(I-bT_n^*) = 0. \tag{4.2.5}$$

Demostración. Demostramos la identidad (4.2.3). Esta identidad se sigue al usar las identidades principales (1.2.5), (1.2.6), dejar $H_{1,n}$ en términos de $\tilde{H}_{1,n}$ y $\tilde{H}_{2,n}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
&R_{T_n}^{-1}(z)\tilde{H}_{2,n}R_{T_n^*}^{-1}(a) + zv_nu_{1,n}^* - H_{1,n}R_{T_n^*}^{-1}(z) - (z-a)\tilde{u}_nv_n^* \\
&= (I-zT_n)\tilde{H}_{2,n}(I-aT_n^*) + zv_n\tilde{u}_n^*(I-aT_n^*) - (-a\tilde{H}_{1,n} + \tilde{H}_{2,n})(I-zT_n^*) \\
&\quad - (z-a)\tilde{u}_nv_n^* \\
&= (I-zT_n)\tilde{H}_{2,n}(I-aT_n^*) + z(T_n\tilde{H}_{2,n} - \tilde{H}_{1,n})(I-aT_n^*) \\
&\quad - (-a\tilde{H}_{1,n} + \tilde{H}_{2,n})(I-zT_n^*) - (z-a)(\tilde{H}_{2,n}T_n^* - \tilde{H}_{1,n}) \\
&= (I-zT_n)(\tilde{H}_{2,n} - a\tilde{H}_{2,n}T_n^*) + zT_n\tilde{H}_{2,n} - z\tilde{H}_{1,n} - azT_n\tilde{H}_{2,n}T_n^* + az\tilde{H}_{1,n}T_n^* \\
&\quad + a\tilde{H}_{1,n} - \tilde{H}_{2,n} - az\tilde{H}_{1,n}T_n^* + z\tilde{H}_{2,n}T_n^* - z\tilde{H}_{2,n}T_n^* + z\tilde{H}_{1,n} + a\tilde{H}_{2,n}T_n^* - a\tilde{H}_{1,n} \\
&= \tilde{H}_{2,n} - a\tilde{H}_{2,n}T_n^* - zT_n\tilde{H}_{2,n} + azT_n\tilde{H}_{2,n}T_n^* + zT_n\tilde{H}_{2,n} - z\tilde{H}_{1,n} - azT_n\tilde{H}_{2,n}T_n^* \\
&\quad + az\tilde{H}_{1,n}T_n^* + a\tilde{H}_{1,n} - \tilde{H}_{2,n} - az\tilde{H}_{1,n}T_n^* + z\tilde{H}_{2,n}T_n^* - z\tilde{H}_{2,n}T_n^* + z\tilde{H}_{1,n} \\
&\quad + a\tilde{H}_{2,n}T_n^* - a\tilde{H}_{1,n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora demostramos la identidad (4.2.4). Por un lado, tenemos la igualdad

$$(z-a)v_nu_{2,n}^* - (z-a)u_{2,n}v_n^* = -(z-a)[u_{2,n}v_n^* - v_nu_{2,n}^*].$$

En vista de (1.2.7), se satisface la igualdad

$$(z-a)v_nu_{2,n}^* - (z-a)u_{2,n}v_n^* = -(z-a)[H_{2,n}T_n^* - T_nH_{2,n}]. \tag{4.2.6}$$

Por otro lado, realizando operaciones algebraicas, tenemos

$$\begin{aligned}
&-(I-aT_n)H_{2,n}(I-zT_n^*)+(I-zT_n)H_{2,n}(I-aT_n^*)\\
&=-(I-aT_n)(H_{2,n}-zH_{2,n}T_n^*)+(I-zT_n)(H_{2,n}-aH_{2,n}T_n^*)\\
&=-(H_{2,n}-zH_{2,n}T_n^*-aT_nH_{2,n}+azT_nH_{2,n}T_n^*)\\
&\quad+(H_{2,n}-aH_{2,n}T_n^*-zT_nH_{2,n}+azT_nH_{2,n}T_n^*)\\
&=zH_{2,n}T_n^*+aT_nH_{2,n}-aH_{2,n}T_n^*-zT_nH_{2,n}\\
&=(z-a)[H_{2,n}T_n^*-T_nH_{2,n}],
\end{aligned}$$

es decir,

$$-(I-aT_n)H_{2,n}(I-zT_n^*)+(I-zT_n)H_{2,n}(I-aT_n^*)=(z-a)[H_{2,n}T_n^*-T_nH_{2,n}]. \tag{4.2.7}$$

Sumando (4.2.6) con (4.2.7) se sigue la segunda identidad (4.2.4) del Lema 4.1.

Finalmente, demostramos (4.2.5). Combinemos el tercer y cuarto término del lado izquierdo, es decir,

$$\begin{aligned}
&-(I-aT_n)H_{2,n}(I-zT_n^*)-(I-zT_n)H_{1,n}(I-bT_n^*)\\
&=-(I-aT_n)(b\tilde H_{1,n}-\tilde H_{2,n})(I-zT_n^*)-(I-zT_n)(-a\tilde H_{1,n}+\tilde H_{2,n})(I-bT_n^*)\\
&=-(I-aT_n)(b\tilde H_{1,n}-bz\tilde H_{1,n}T_n^*-\tilde H_{2,n}+z\tilde H_{2,n}T_n^*)\\
&\quad-(I-zT_n)(-a\tilde H_{1,n}+ab\tilde H_{1,n}T_n^*+\tilde H_{2,n}-b\tilde H_{2,n}T_n^*)\\
&=-b\tilde H_{1,n}+bz\tilde H_{1,n}T_n^*+\tilde H_{2,n}-z\tilde H_{2,n}T_n^*+abT_n\tilde H_{1,n}-abzT_n\tilde H_{1,n}T_n^*-aT_n\tilde H_{2,n}\\
&\quad+azT_n\tilde H_{2,n}T_n^*+a\tilde H_{1,n}-ab\tilde H_{1,n}T_n^*-\tilde H_{2,n}+b\tilde H_{2,n}T_n^*-azT_n\tilde H_{1,n}+abzT_n\tilde H_{1,n}T_n^*\\
&\quad+zT_n\tilde H_{2,n}-bzT_n\tilde H_{2,n}T_n^*\\
&=-b\tilde H_{1,n}+bz\tilde H_{1,n}T_n^*-z\tilde H_{2,n}T_n^*+abT_n\tilde H_{1,n}-aT_n\tilde H_{2,n}+azT_n\tilde H_{2,n}T_n^*\\
&\quad+a\tilde H_{1,n}-ab\tilde H_{1,n}T_n^*+b\tilde H_{2,n}T_n^*-azT_n\tilde H_{1,n}+zT_n\tilde H_{2,n}-bzT_n\tilde H_{2,n}T_n^*\\
&=-b\tilde H_{1,n}+bz\tilde H_{1,n}T_n^*-z\tilde H_{2,n}T_n^*+abT_n\tilde H_{1,n}-aT_n\tilde H_{2,n}+azT_n\tilde H_{2,n}T_n^*\\
&\quad+a\tilde H_{1,n}-ab\tilde H_{1,n}T_n^*+b\tilde H_{2,n}T_n^*-azT_n\tilde H_{1,n}+zT_n\tilde H_{2,n}-bzT_n\tilde H_{2,n}T_n^*\\
&\quad+abT_n\tilde H_{2,n}T_n^*-abT_n\tilde H_{2,n}T_n^*+z\tilde H_{1,n}-z\tilde H_{1,n}\\
&=-a(T_n\tilde H_{2,n}-\tilde H_{1,n})-bz(T_n\tilde H_{2,n}-\tilde H_{1,n})T_n^*+z(T_n\tilde H_{2,n}-\tilde H_{1,n})\\
&\quad+ab(T_n\tilde H_{2,n}-\tilde H_{1,n})T_n^*+b(\tilde H_{2,n}T_n^*-\tilde H_{1,n})-abT_n(\tilde H_{2,n}T_n^*-\tilde H_{1,n})\\
&\quad+azT_n(\tilde H_{2,n}T_n^*-\tilde H_{1,n})-z(\tilde H_{2,n}T_n^*-\tilde H_{1,n})\\
&=-a(v_n\tilde u_n^*)-bz(v_n\tilde u_n^*)T_n^*+z(v_n\tilde u_n^*)+ab(v_n\tilde u_n^*)T_n^*\\
&\quad+b(\tilde u_nv_n^*)-abT_n(\tilde u_nv_n^*)+azT_n(\tilde u_nv_n^*)-z(\tilde u_nv_n^*)\\
&=a(v_n\tilde u_n^*)(-I+bT_n^*)-z(v_n\tilde u_n^*)(-I+bT_n^*)\\
&\quad+b(I-aT_n)(\tilde u_nv_n^*)-z(I-aT_n)(\tilde u_nv_n^*)\\
&=(a-z)(v_n\tilde u_n^*)(-I+bT_n^*)+(b-z)(I-aT_n)(\tilde u_nv_n^*)\\
&=-(z-a)(v_n\tilde u_n^*)(-I+bT_n^*)-(z-b)(I-aT_n)(\tilde u_nv_n^*)\\
&=-(z-a)v_nu_{2,n}^*-(z-b)u_{1,n}v_n^*.
\end{aligned}$$

En la primera igualdad dejamos $H_{1,n}$ y $H_{2,n}$ en términos de $\tilde H_{1,n}$ y $\tilde H_{2,n}$. Después de la primera igualdad, en las siguientes tres igualdades multiplicamos y simplificamos. En la quinta igualdad, usamos (4.2.1). En la sexta igualdad factorizamos adecuadamente. Las últimas cinco igualdades se siguen de usar las identidades (1.2.5) y (1.2.6) y simplificar.

Entonces hemos llegado a que

$$-(I-aT_n)H_{2,n}(I-zT_n^*)-(I-zT_n)H_{1,n}(I-bT_n^*)=-(z-a)v_nu_{2,n}^*-(z-b)u_{1,n}v_n^*$$

y claramente se sigue la tercera identidad (4.2.5) del Lema 4.1. ■

Observación 4.6. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Además, sean T_n, v_n, $H_{1,n}$, $H_{2,n}$, $\tilde{u}_n$ $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14. Entonces*

$$-(z-a)u_{2,n}v_n^* - (z-b)v_n u_{1,n}^* + (I - zT_n)H_{2,n}(I - aT_n^*) + (I - bT_n)H_{1,n}(I - zT_n^*) = 0. \tag{4.2.8}$$

Demostración. *Del Lema 4.1 parte (4.2.5) tenemos*

$$(z-a)v_n u_{2,n}^* + (z-b)u_{1,n}v_n^* - (I - aT_n)H_{2,n}(I - zT_n^*) - (I - zT_n)H_{1,n}(I - bT_n^*) = 0$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$(\bar{z}-a)v_n u_{2,n}^* + (\bar{z}-b)u_{1,n}v_n^* - (I - aT_n)H_{2,n}(I - \bar{z}T_n^*) - (I - \bar{z}T_n)H_{1,n}(I - bT_n^*) = 0.$$

Aplicando el operador adjunto conjugado en ambos lados en la ecuación anterior

$$(z-a)u_{2,n}v_n^* + (z-b)v_n u_{1,n}^* - (I - zT_n)H_{2,n}(I - aT_n^*) - (I - bT_n)H_{1,n}(I - zT_n^*) = 0$$

multiplicando por -1 se obtiene (4.2.8).

Lema 4.2. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$. Además, sean T_n, R_{T_n}, v_n, $\tilde{H}_{1,n}$, $\tilde{H}_{2,n}$, $H_{1,n}$, $H_{2,n}$, $\tilde{u}_n$ $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14. Entonces para todo $z \in \mathbb{C}$, las siguientes identidades se cumplen:*

$$\begin{aligned}
&z(I - aT_n)H_{2,n}(I - zT_n^*) - z(z-a)v_n u_{2,n}^* + (b-z)(z-a)\tilde{u}_n v_n^* \\
&= (I - zT_n)((az + bz - ab)\tilde{H}_{2,n}T_n^* - z\tilde{H}_{2,n} + ab\tilde{H}_{1,n}(I - zT_n^*)),
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

$$\begin{aligned}
&(z-a)(z-b)H_{1,n}T_n^* - (z-a)(z-b)T_n H_{1,n} \\
&\quad + (z-b)R_{T_n}^{-1}(a)H_{1,n}R_{T_n^*}^{-1}(z) - (z-a)R_{T_n}^{-1}(z)H_{1,n}R_{T_n^*}^{-1}(b) \\
&= -(b-a)((I - zT_n)H_{1,n}(I - zT_n^*)).
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Demostración. Para demostrar (4.2.9) vamos a usar las identidades (1.2.5) y (1.2.6). Partiendo del lado izquierdo tenemos que

$$\begin{aligned}
&z(I - aT_n)H_{2,n}(I - zT_n^*) - z(z-a)v_n u_{2,n}^* + (b-z)(z-a)\tilde{u}_n v_n^* \\
&= z(I - aT_n)(H_{2,n} - zH_{2,n}T_n^*) + (az - z^2)(T_n\tilde{H}_{2,n} - \tilde{H}_{1,n})(-I + bT_n^*) \\
&\quad + (bz - ab - z^2 + az)(\tilde{H}_{2,n}T_n^* - \tilde{H}_{1,n}) \\
&= z(H_{2,n} - zH_{2,n}T_n^* - aT_nH_{2,n} + azT_nH_{2,n}T_n^*) \\
&\quad + (az - z^2)(-T_n\tilde{H}_{2,n} + \tilde{H}_{1,n} + bT_n\tilde{H}_{2,n}T_n^* - b\tilde{H}_{1,n}T_n^*) + bz\tilde{H}_{2,n}T_n^* - bz\tilde{H}_{1,n} \\
&\quad - ab\tilde{H}_{2,n}T_n^* + ab\tilde{H}_{1,n} - z^2\tilde{H}_{2,n}T_n^* + z^2\tilde{H}_{1,n} + az\tilde{H}_{2,n}T_n^* - az\tilde{H}_{1,n} \\
&= zH_{2,n} - z^2H_{2,n}T_n^* - azT_nH_{2,n} + az^2T_nH_{2,n}T_n^* - azT_n\tilde{H}_{2,n} + az\tilde{H}_{1,n} \\
&\quad + abzT_n\tilde{H}_{2,n}T_n^* - abz\tilde{H}_{1,n}T_n^* + z^2T_n\tilde{H}_{2,n} - z^2\tilde{H}_{1,n} - z^2bT_n\tilde{H}_{2,n}T_n^* + bz^2\tilde{H}_{1,n}T_n^* \\
&\quad + bz\tilde{H}_{2,n}T_n^* - bz\tilde{H}_{1,n} - ab\tilde{H}_{2,n}T_n^* + ab\tilde{H}_{1,n} - z^2\tilde{H}_{2,n}T_n^* + z^2\tilde{H}_{1,n} + az\tilde{H}_{2,n}T_n^* - az\tilde{H}_{1,n} \\
&= zH_{2,n} - z^2H_{2,n}T_n^* - azT_nH_{2,n} + az^2T_nH_{2,n}T_n^* - azT_n\tilde{H}_{2,n} \\
&\quad - ab(I - zT_n)\tilde{H}_{2,n}T_n^* - abz\tilde{H}_{1,n}T_n^* + z^2T_n\tilde{H}_{2,n} + bz^2\tilde{H}_{1,n}T_n^* \\
&\quad + bz(I - zT_n)\tilde{H}_{2,n}T_n^* - bz\tilde{H}_{1,n} + ab\tilde{H}_{1,n} - z^2\tilde{H}_{2,n}T_n^* + az\tilde{H}_{2,n}T_n^* \\
&= zb\tilde{H}_{1,n} - z\tilde{H}_{2,n} - bz^2\tilde{H}_{1,n}T_n^* + z^2\tilde{H}_{2,n}T_n^* - azbT_n\tilde{H}_{1,n} + azT_n\tilde{H}_{2,n} \\
&\quad + abz^2T_n\tilde{H}_{1,n}T_n^* - az^2T_n\tilde{H}_{2,n}T_n^* - azT_n\tilde{H}_{2,n} - ab(I - zT_n)\tilde{H}_{2,n}T_n^* \\
&\quad - abz\tilde{H}_{1,n}T_n^* + z^2T_n\tilde{H}_{2,n} + bz^2\tilde{H}_{1,n}T_n^* + bz(I - zT_n)\tilde{H}_{2,n}T_n^* - bz\tilde{H}_{1,n} + ab\tilde{H}_{1,n} \\
&\quad - z^2\tilde{H}_{2,n}T_n^* + az\tilde{H}_{2,n}T_n^* \\
&= ab(I - zT_n)\tilde{H}_{1,n} - abz(I - zT_n)\tilde{H}_{1,n}T_n^* - ab(I - zT_n)\tilde{H}_{2,n}T_n^* \\
&\quad + bz(I - zT_n)\tilde{H}_{2,n}T_n^* - z(I - zT_n)\tilde{H}_{2,n} + az(I - zT_n)\tilde{H}_{2,n}T_n^*
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (I - zT_n)(ab\tilde{H}_{1,n} - abz\tilde{H}_{1,n}T_n^* - ab\tilde{H}_{2,n}T_n^* + bz\tilde{H}_{2,n}T_n^* - z\tilde{H}_{2,n} + az\tilde{H}_{2,n}T_n^*) \\
&= (I - zT_n)((az + bz - ab)\tilde{H}_{2,n}T_n^* - z\tilde{H}_{2,n} + ab\tilde{H}_{1,n}(I - zT_n^*)).
\end{aligned}
$$

En la primera igualdad hemos usado (1.2.5) y (1.2.6). En la segunda igualdad y hasta la cuarta igualdad, se hicieron operaciones algebraicas. En la quinta igualdad dejamos $H_{2,n}$ en términos de $\tilde{H}_{1,n}$ y $\tilde{H}_{2,n}$ para seguidamente factorizar y obtener la identidad (4.2.9) del Lema 4.2.

Para demostrar la identidad (4.2.10) del Lema 4.2 solamente se desarrollan los productos que hay del lado izquierdo y luego se simplifica hasta llegar a la parte derecha y así obtener la identidad (4.2.10) del Lema 4.2, es decir,

$$
\begin{aligned}
&(z-a)(z-b)H_{1,n}T_n^* - (z-a)(z-b)T_nH_{1,n} + (z-b)R_{T_n}^{-1}(a)H_{1,n}R_{T_n^*}^{-1}(z) \\
&\quad - (z-a)R_{T_n}^{-1}(z)H_{1,n}R_{T_n^*}^{-1}(b) \\
&= z^2H_{1,n}T_n^* - bzH_{1,n}T_n^* - azH_{1,n}T_n^* + abH_{1,n}T_n^* - z^2T_nH_{1,n} + bzT_nH_{1,n} \\
&\quad + azT_nH_{1,n} - abT_nH_{1,n} + (z-b)(I - aT_n)H_{1,n}(I - zT_n^*) \\
&\quad - (z-a)(I - zT_n)H_{1,n}(I - bT_n^*) \\
&= z^2H_{1,n}T_n^* - bzH_{1,n}T_n^* - azH_{1,n}T_n^* + abH_{1,n}T_n^* - z^2T_nH_{1,n} + bzT_nH_{1,n} \\
&\quad + azT_nH_{1,n} - abT_nH_{1,n} + (z-b)(I - aT_n)(H_{1,n} - zH_{1,n}T_n^*) \\
&\quad - (z-a)(I - zT_n)(H_{1,n} - bH_{1,n}T_n^*) \\
&= z^2H_{1,n}T_n^* - bzH_{1,n}T_n^* - azH_{1,n}T_n^* + abH_{1,n}T_n^* - z^2T_nH_{1,n} + bzT_nH_{1,n} \\
&\quad + azT_nH_{1,n} - abT_nH_{1,n} + (z-b)(H_{1,n} - zH_{1,n}T_n^* - aT_nH_{1,n} + azT_nH_{1,n}T_n^*) \\
&\quad - (z-a)(H_{1,n} - bH_{1,n}T_n^* - zT_nH_{1,n} + bzT_nH_{1,n}T_n^*) \\
&= z^2H_{1,n}T_n^* - bzH_{1,n}T_n^* - azH_{1,n}T_n^* + abH_{1,n}T_n^* - z^2T_nH_{1,n} + bzT_nH_{1,n} \\
&\quad + azT_nH_{1,n} - abT_nH_{1,n} + zH_{1,n} - z^2H_{1,n}T_n^* - azT_nH_{1,n} + az^2T_nH_{1,n}T_n^* - bH_{1,n} \\
&\quad + bzH_{1,n}T_n^* + abT_nH_{1,n} - azbT_nH_{1,n}T_n^* - zH_{1,n} + bzH_{1,n}T_n^* + z^2T_nH_{1,n} \\
&\quad - bz^2T_nH_{1,n}T_n^* + aH_{1,n} - abH_{1,n}T_n^* - azT_nH_{1,n} + abzT_nH_{1,n}T_n^* \\
&= -azH_{1,n}T_n^* + bzT_nH_{1,n} + az^2T_nH_{1,n}T_n^* - bH_{1,n} + bzH_{1,n}T_n^* \\
&\quad - bz^2T_nH_{1,n}T_n^* + aH_{1,n} - azT_nH_{1,n} \\
&= (b-a)zT_nH_{1,n} + (b-a)zH_{1,n}T_n^* - (b-a)z^2T_nH_{1,n}T_n^* - (b-a)H_{1,n} \\
&= (b-a)(zT_nH_{1,n} + zH_{1,n}T_n^* - z^2T_nH_{1,n}T_n^* - H_{1,n}) \\
&= (b-a)(-(I - zT_n)H_{1,n} + z(I - zT_n)H_{1,n}T_n^*) \\
&= (b-a)(-(I - zT_n)H_{1,n}(I - zT_n^*)) \\
&= -(b-a)(I - zT_n)H_{1,n}(I - zT_n^*).
\end{aligned}
$$

En la primera igualdad usamos (1.1.20). En la segunda igualdad y hasta la cuarta igualdad, se desarrollaron las multiplicaciones de matrices. La quinta igualdad y hasta la décima igualdad, se siguen de operaciones algebraicas. Así, hemos obtenido la identidad (4.2.10) del Lema 4.2 ■

Lema 4.3. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Además, sean T_n, R_{T_n}, v_n, $\tilde{H}_{1,n}$, $\tilde{H}_{2,n}$, $\tilde{u}_n$ definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14. Además, supongamos que $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ es una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que las matrices $H_{1,n}$ y $H_{2,n}$ dadas por (1.1.24) y (1.1.25) son Hermitianas positivas. Entonces la siguiente identidad se satisface*

$$
R_{T_n^*}^{-1}(z) + \frac{(z-b)}{(b-a)}R_{T_n^*}^{-1}(a) + \frac{(z-a)}{(b-a)}R_{T_n^*}^{-1}(b)bH_{2,n}^{-1}v_n\tilde{u}_n^* = -\frac{(z-a)}{(b-a)}R_{T_n^*}^{-1}(b)H_{2,n}^{-1}R_{T_n}^{-1}(b)\tilde{H}_{2,n}. \qquad (4.2.11)
$$

para cada $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Partiendo del lado izquierdo de (4.2.11) se tiene

$$R_{T_n^*}^{-1}(z)+\frac{(z-b)}{(b-a)}R_{T_n^*}^{-1}(a)+\frac{(z-a)}{(b-a)}R_{T_n^*}^{-1}(b)bH_{2,n}^{-1}v_n\tilde{u}_n^*$$

$$\begin{aligned}
&=(I-zT_n^*)+\frac{(z-b)}{(b-a)}(I-aT_n^*)+\frac{(z-a)}{(b-a)}(I-bT_n^*)bH_{2,n}^{-1}v_n\tilde{u}_n^*\\
&=\frac{1}{b-a}[(b-a)(I-zT_n^*)+(z-b)(I-aT_n^*)+(z-a)(I-bT_n^*)bH_{2,n}^{-1}v_n\tilde{u}_n^*]\\
&=\frac{1}{b-a}[(z-a)I-b(z-a)T_n^*+(z-a)(I-bT_n^*)bH_{2,n}^{-1}v_n\tilde{u}_n^*]\\
&=\frac{(z-a)}{(b-a)}[I-bT_n^*+(I-bT_n^*)bH_{2,n}^{-1}v_n\tilde{u}_n^*]\\
&=\frac{(z-a)}{(b-a)}R_{T_n^*}^{-1}(b)H_{2,n}^{-1}[H_{2,n}+bv_n\tilde{u}_n^*]\\
&=\frac{(z-a)}{(b-a)}R_{T_n^*}^{-1}(b)H_{2,n}^{-1}[H_{2,n}+b(T_n\tilde{H}_{2,n}-\tilde{H}_{1,n})]\\
&=\frac{(z-a)}{(b-a)}R_{T_n^*}^{-1}(b)H_{2,n}^{-1}[b\tilde{H}_{1,n}-\tilde{H}_{2,n}+b(T_n\tilde{H}_{2,n}-\tilde{H}_{1,n})]\\
&=\frac{(z-a)}{(b-a)}R_{T_n^*}^{-1}(b)H_{2,n}^{-1}[-I+bT_n]\tilde{H}_{2,n}\\
&=-\frac{(z-a)}{(b-a)}R_{T_n^*}^{-1}(b)H_{2,n}^{-1}R_{T_n}^{-1}(b)\tilde{H}_{2,n}.
\end{aligned}$$

La primera igualdad se sigue de (1.1.20). En la segunda igualdad y hasta la quinta igualdad, se hicieron operacion algebraicas. En la sexta igualdad usamos la identidad principal (1.2.6). En la séptima igualdad usamos (1.1.25). En la penúltima iguladad hemos simplificado y en la última usamos (1.1.20). Claramente se sigue la Ecuación (4.2.11) del Lema 4.3. ■

4.3. Relación explícita entre las matrices resolventes.

En esta sección demostraremos que se satisface la siguiente igualdad

$$U_n(z)=AV_n(z)B \tag{4.3.1}$$

para cada $z\in\mathbb{C}$, donde A y B son matrices que no dependen de z.

Observación 4.7. *Al comparar los bloques de la matriz V_n dados por (4.1.2)-(4.1.5) con los bloques de la matriz U_n (2.3.2)-(2.3.5) vemos que hay cierta similitud entre $V_{11;n}$ y δ_n, $V_{12;n}$ y γ_n, $V_{21;n}$ y β_n y $V_{22;n}$ con α_n. Es conveniente introducir otra matriz de Pauli [Gr, pág. 174]*

$$\mathfrak{J}_q=\begin{pmatrix}0 & I_q\\ I_q & 0\end{pmatrix}. \tag{4.3.2}$$

Notemos que al hacer el producto de matrices $\mathfrak{J}_qU_n(z)\mathfrak{J}_q$ se intercambian los bloques de la matriz resolvente U_n de la siguiente manera

$$\mathfrak{J}_qU_n(z)\mathfrak{J}_q=\begin{pmatrix}\delta_n(z) & \gamma_n(z)\\ \beta_n(z) & \alpha_n(z)\end{pmatrix}. \tag{4.3.3}$$

Entonces podemos afirmar tentativamente que las matrices V_n y $\mathfrak{J}_qU_n(z)\mathfrak{J}_q$ son iguales salvo por un factor el cual es una matriz constante.

Ahora formaremos y demostraremos el Teorema más importante de este capítulo.

Teorema 4.4. *Sean $a\in\mathbb{R}$, $b\in(a,\infty)$, $q\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}_0$. Además sean T_n, R_{T_n}, v_n, $\tilde{u}_n$, $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14, J_q definido en (2.2.1). Supongamos que $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ es* *una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q\times q$ tales que las matrices $\tilde{H}_{1,n}$, $\tilde{H}_{2,n}$, $H_{1,n}$, $H_{2,n}$ definidas como en (1.1.22)-(1.1.25) son Hermitianas positivas. Sea $\mathfrak{J}_q$ definida en (4.3.2). Sea U_n la matriz resolvente definida en (2.3.1), sea V_n la matriz resolvente adicional definida en (4.1.1) , entonces se satisface la siguiente igualdad*

$$V_n(z)=\mathfrak{J}_qU_n(z)\mathfrak{J}_q\begin{pmatrix} I_q+a\tilde{u}_n^*\tilde{H}_{2,n}^{-1}R_{T_n}(a)v_n & 0_{q\times q}\\ 0_{q\times q} & I_q-av_n^*H_{1,n}^{-1}R_{T_n}(a)u_{1,n}\end{pmatrix}. \tag{4.3.4}$$

Demostración. De (2.3.6) tenemos que

$$U_{1,n}(z)=\begin{pmatrix} I_q & 0\\ 0 & (z-a)I_q\end{pmatrix}U_n(z)\begin{pmatrix} I_q & 0\\ 0 & (z-a)^{-1}I_q\end{pmatrix}.$$

y evaluando en $\bar{z}$ se tiene

$$U_{1,n}(\bar{z})=\begin{pmatrix} I_q & 0\\ 0 & (\bar{z}-a)I_q\end{pmatrix}U_n(\bar{z})\begin{pmatrix} I_q & 0\\ 0 & (\bar{z}-a)^{-1}I_q\end{pmatrix}. \tag{4.3.5}$$

Calculamos la inversa de $U_{1,n}(z)$,

$$\begin{aligned} U_{1,n}^{-1}(z)&=\left(\begin{pmatrix} I_q & 0\\ 0 & (z-a)I_q\end{pmatrix}U_n(z)\begin{pmatrix} I_q & 0\\ 0 & (z-a)^{-1}I_q\end{pmatrix}\right)^{-1}\\ &=\begin{pmatrix} I_q & 0\\ 0 & (z-a)I_q\end{pmatrix}U_n^{-1}(z)\begin{pmatrix} I_q & 0\\ 0 & (z-a)^{-1}I_q\end{pmatrix}. \end{aligned}\tag{4.3.6}$$

Por otro lado, de acuerdo a (2.2.16) tenemos

$$\begin{aligned} U_{1,n}^{-1}(z)&=J_qU_{1,n}^*(\bar{z})J_q\\ &=J_q\left(\begin{pmatrix} I_q & 0\\ 0 & (\bar{z}-a)I_q\end{pmatrix}U_n(\bar{z})\begin{pmatrix} I_q & 0\\ 0 & (\bar{z}-a)^{-1}I_q\end{pmatrix}\right)^*J_q\\ &=J_q\begin{pmatrix} I_q & 0\\ 0 & (z-a)^{-1}I_q\end{pmatrix}U_n^*(\bar{z})\begin{pmatrix} I_q & 0\\ 0 & (z-a)I_q\end{pmatrix}J_q\\ &=J_q\begin{pmatrix} I_q & 0\\ 0 & (z-a)^{-1}I_q\end{pmatrix}J_qJ_qU_n^*(\bar{z})J_qJ_q\begin{pmatrix} I_q & 0\\ 0 & (z-a)I_q\end{pmatrix}J_q\\ &=\begin{pmatrix} (z-a)^{-1}I_q & 0\\ 0 & I_q\end{pmatrix}J_qU_n^*(\bar{z})J_q\begin{pmatrix} (z-a)I_q & 0\\ 0 & I_q\end{pmatrix}. \end{aligned}\tag{4.3.7}$$

Donde en la segunda igualdad sustituimos $U_{1,n}(\bar{z})$ de la Ecuación (4.3.5). En la tercera igualdad calculamos la transpuesta conjugada que aparece en la segunda igualdad. En la cuarta igualdad hacemos uso de la propiedad de J_q, es decir, $J_qJ_q=I_{2q}$. En la quinta igualdad simplificamos. Entonces igualando (4.3.6) con (4.3.7)

$$\begin{pmatrix} I_q & 0\\ 0 & (z-a)I_q\end{pmatrix}U_n^{-1}(z)\begin{pmatrix} I_q & 0\\ 0 & (z-a)^{-1}I_q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (z-a)^{-1}I_q & 0\\ 0 & I_q\end{pmatrix}J_qU_n^*(\bar{z})J_q\begin{pmatrix} (z-a)I_q & 0\\ 0 & I_q\end{pmatrix}$$

se tiene que

$$U_n^{-1}(z)=\begin{pmatrix} (z-a)^{-1}I_q & 0\\ 0 & (z-a)^{-1}I_q\end{pmatrix}J_qU_n^*(\bar{z})J_q\begin{pmatrix} (z-a)I_q & 0\\ 0 & (z-a)I_q\end{pmatrix}$$

y simplificando, tenemos

$$U_n^{-1}(z)=J_qU_n^*(\bar{z})J_q. \tag{4.3.8}$$

Usando (4.3.8), tenemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_qU_n^{-1}(z)\mathfrak{J}_q&=\mathfrak{J}_qJ_qU_n^*(\bar{z})J_q\mathfrak{J}_q\\ &=\mathfrak{J}_qJ_q\begin{pmatrix} \alpha_n^*(\bar{z}) & \gamma_n^*(\bar{z})\\ \beta_n^*(\bar{z}) & \delta_n^*(\bar{z})\end{pmatrix}J_q\mathfrak{J}_q\\ &=\begin{pmatrix} \alpha_n^*(\bar{z}) & -\gamma_n^*(\bar{z})\\ -\beta_n^*(\bar{z}) & \delta_n^*(\bar{z})\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Multiplicando $(\mathfrak{J}_q U_n(z)\mathfrak{J}_q)^{-1}$ por $V_n(z)$, tenemos

$$(\mathfrak{J}_q U_n(z)\mathfrak{J}_q)^{-1} V_n(z) = \begin{pmatrix} W_{11;n} & W_{12;n} \\ W_{21;n} & W_{22;n} \end{pmatrix}. \tag{4.3.9}$$

donde

$$W_{11;n} := \alpha_n^*(\bar{z})V_{11;n}(z) - \gamma_n^*(\bar{z})V_{21;n}(z) \tag{4.3.10}$$
$$W_{12;n} := \alpha_n^*(\bar{z})V_{12;n}(z) - \gamma_n^*(\bar{z})V_{22;n}(z) \tag{4.3.11}$$
$$W_{21;n} := -\beta_n^*(\bar{z})V_{11;n}(z) + \delta_n^*(\bar{z})V_{21;n}(z) \tag{4.3.12}$$
$$W_{22;n} := -\beta_n^*(\bar{z})V_{12;n}(z) + \delta_n^*(\bar{z})V_{22;n}(z) \tag{4.3.13}$$

Del lado derecho de (4.3.10) tenemos,

$$\begin{aligned}
&\alpha_n^*(\bar{z})V_{11;n}(z) - \gamma_n^*(\bar{z})V_{21;n}(z)\\
&= (I_q + z\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} R_{T_n}(z)v_n)(I_q - (z-a)u_{2,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n)\\
&\quad - (\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} R_{T_n}(z)\tilde{u}_n)(-(b-z)(z-a)v_n^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n)\\
&= I_q - (z-a)u_{2,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n + z\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} R_{T_n}(z)v_n\\
&\quad - z(z-a)\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} R_{T_n}(z)v_n u_{2,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&\quad + (b-z)(z-a)\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} R_{T_n}(z)\tilde{u}_n v_n^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&= I_q - (z-a)u_{2,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&\quad + \tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} R_{T_n}(z)[z(I-aT_n)H_{2,n}(I-zT_n^*) - z(z-a)v_n u_{2,n}^* + (b-z)(z-a)\tilde{u}_n v_n^*]\\
&\quad \cdot R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&= I_q - z\tilde{u}_n^*(-I+bT_n^*)R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n + a\tilde{u}_n^*(-I+bT_n^*)R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&\quad + \tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} R_{T_n}(z)[(I-zT_n)((az+bz-ab)\tilde{H}_{2,n}T_n^* - z\tilde{H}_{2,n} + ab\tilde{H}_{1,n}(I-zT_n^*))]\\
&\quad \cdot R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&= I_q - z\tilde{u}_n^*(-I+bT_n^*)R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n + a\tilde{u}_n^*(-I+bT_n^*)R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&\quad + \tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1}[(az+bz-ab)\tilde{H}_{2,n}T_n^* - z\tilde{H}_{2,n} + ab\tilde{H}_{1,n}(I-zT_n^*)]\\
&\quad \cdot R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&= I_q - z\tilde{u}_n^*(-I+bT_n^*)R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n + a\tilde{u}_n^*(-I+bT_n^*)R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&\quad + (az+bz-ab)\tilde{u}_n^* T_n^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n - z\tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&\quad + ab\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} \tilde{H}_{1,n} H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&= I_q + z\tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n - bz\tilde{u}_n^* T_n^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&\quad - a\tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n + ab\tilde{u}_n^* T_n^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&\quad + az\tilde{u}_n^* T_n^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n + bz\tilde{u}_n^* T_n^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&\quad - ab\tilde{u}_n^* T_n^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n - z\tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&\quad + ab\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} \tilde{H}_{1,n} H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&= I_q - a\tilde{u}_n^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n + az\tilde{u}_n^* T_n^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&\quad + ab\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} \tilde{H}_{1,n} H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&= I_q - a\tilde{u}_n^*(I-zT_n^*)R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n + ab\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} \tilde{H}_{1,n} H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&= I_q - a\tilde{u}_n^* H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n + ab\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} \tilde{H}_{1,n} H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&= I_q + a\tilde{u}_n^*[-I + b\tilde{H}_{2,n}^{-1} \tilde{H}_{1,n}] H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&= I_q + a\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1}[-\tilde{H}_{2,n} + b\tilde{H}_{1,n}] H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n = I_q + a\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1}[H_{2,n}] H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n\\
&= I_q + a\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a)v_n.
\end{aligned}$$

En la primera igualdad, usamos las definiciones de α_n, γ_n, $V_{11;n}$ y $V_{21;n}$ definidas respectivamente por (2.3.2), (2.3.3), (4.1.2) y (4.1.4), usamos la identidad principal (1.2.2) y además usamos $\alpha_n^*(\bar{z})$ y $\gamma_n^*(\bar{z})$. Después de multiplicar lo que queda, se sigue la segunda igualdad. La tercera igualdad se sigue de factorizar algunos términos. Al utilizar (4.2.9) del Lema 4.2, se obtiene la cuarta igualdad. En la quinta igualdad y hasta la última igualdad, se usaron (1.1.20), (1.1.25) y operaciones algebraicas. Entonces

$$\alpha_n^*(\bar{z})V_{11;n}(z) - \gamma_n^*(\bar{z})V_{21;n}(z) = I_q + a\tilde{u}_n^*\tilde{H}_{2,n}^{-1}R_{T_n}(a)v_n$$

o bien,

$$W_{11;n} = I_q + a\tilde{u}_n^*\tilde{H}_{2,n}^{-1}R_{T_n}(a)v_n. \tag{4.3.14}$$

Del lado derecho de (4.3.11) tenemos,

$$\begin{aligned}
&\alpha_n^*(\bar{z})V_{12;n}(z) - \gamma_n^*(\bar{z})V_{22;n}(z)\\
&= (I_q + z\tilde{u}_n^*\tilde{H}_{2,n}^{-1}R_{T_n}(z)v_n)(u_{1,n}^*R_{T_n^*}(z)H_{1,n}^{-1}R_{T_n}(a)u_{1,n})\\
&\quad - (\tilde{u}_n^*\tilde{H}_{2,n}^{-1}R_{T_n}(z)\tilde{u}_n)(I_q + (z-a)v_n^*R_{T_n^*}(z)H_{1,n}^{-1}R_{T_n}(a)u_{1,n})\\
&= u_{1,n}^*R_{T_n^*}(z)H_{1,n}^{-1}R_{T_n}(a)u_{1,n} + z\tilde{u}_n^*\tilde{H}_{2,n}^{-1}R_{T_n}(z)v_nu_{1,n}^*R_{T_n^*}(z)H_{1,n}^{-1}R_{T_n}(a)u_{1,n}\\
&\quad - \tilde{u}_n^*\tilde{H}_{2,n}^{-1}R_{T_n}(z)\tilde{u}_n - (z-a)\tilde{u}_n^*\tilde{H}_{2,n}^{-1}R_{T_n}(z)\tilde{u}_nv_n^*R_{T_n^*}(z)H_{1,n}^{-1}R_{T_n}(a)u_{1,n}\\
&= \tilde{u}_n^*\tilde{H}_{2,n}^{-1}R_{T_n}(z)[R_{T_n}^{-1}(z)\tilde{H}_{2,n}R_{T_n^*}^{-1}(a) + zv_nu_{1,n}^* - H_{1,n}R_{T_n^*}^{-1}(z) - (z-a)\tilde{u}_nv_n^*]\\
&\quad \cdot R_{T_n^*}(z)H_{1,n}^{-1}\tilde{u}_n
\end{aligned}$$

En la primera igualdad usamos las definiciones α_n, γ_n, $V_{21;n}$ y $V_{22;n}$ definidas respectivamente por de (2.3.2), (2.3.3), (4.1.3) y (4.1.5), seguidamente usamos la identidad principal (1.2.2) y además hemos calculado $\alpha_n^*(\bar{z})$ y $\gamma_n^*(\bar{z})$. Después de multiplicar lo que queda, se sigue la segunda igualdad. La tercera igualdad se sigue de factorizar algunos términos. Entonces

$$\begin{aligned}
&\alpha_n^*(\bar{z})V_{12;n}(z) - \gamma_n^*(\bar{z})V_{22;n}(z)\\
&= \tilde{u}_n^*\tilde{H}_{2,n}^{-1}R_{T_n}(z)[R_{T_n}^{-1}(z)\tilde{H}_{2,n}R_{T_n^*}^{-1}(a) + zv_nu_{1,n}^* - H_{1,n}R_{T_n^*}^{-1}(z) - (z-a)\tilde{u}_nv_n^*]\\
&\quad \cdot R_{T_n^*}(z)H_{1,n}^{-1}\tilde{u}_n.
\end{aligned}$$

De acuerdo a (4.2.3) del Lema 4.1, se sigue que

$$\alpha_n^*(\bar{z})V_{12;n}(z) - \gamma_n^*(\bar{z})V_{22;n}(z) = 0$$

o bien,

$$W_{12;n} = 0. \tag{4.3.15}$$

Del lado derecho de (4.3.12) tenemos,

$$\begin{aligned}
&-\beta_n^*(\bar{z})V_{11;n}(z) + \delta_n^*(\bar{z})V_{21;n}(z)\\
&= -(z-b)(z-a)v_n^*\frac{aH_{1,n}^{-1} + bH_{2,n}^{-1}}{b-a}R_{T_n}(z)v_n\\
&\quad \cdot (I_q - (z-a)u_{2,n}^*R_{T_n^*}(z)H_{2,n}^{-1}R_{T_n}(a)v_n)\\
&\quad + (I_q + v_n^*\frac{a(z-b)H_{1,n}^{-1}R_{T_n}^{-1}(a) + b(z-a)H_{2,n}^{-1}R_{T_n}^{-1}(b)}{b-a}R_{T_n}(z)\tilde{u}_n)\\
&\quad \cdot ((z-b)(z-a)v_n^*R_{T_n^*}(z)H_{2,n}^{-1}R_{T_n}(a)v_n)\\
&= -(z-b)(z-a)v_n^*\frac{aH_{1,n}^{-1} + bH_{2,n}^{-1}}{b-a}R_{T_n}(z)v_n\\
&\quad + (z-b)(z-a)^2v_n^*\frac{aH_{1,n}^{-1} + bH_{2,n}^{-1}}{b-a}R_{T_n}(z)v_nu_{2,n}^*R_{T_n^*}(z)H_{2,n}^{-1}R_{T_n}(a)v_n\\
&\quad + (z-b)(z-a)v_n^*R_{T_n^*}(z)H_{2,n}^{-1}R_{T_n}(a)v_n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (z-b)(z-a)v_n^* \frac{a(z-b)H_{1,n}^{-1}R_{T_n}^{-1}(a) + b(z-a)H_{2,n}^{-1}R_{T_n}^{-1}(b)}{b-a} \\
&\cdot R_{T_n}(z)\tilde{u}_n v_n^* R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a) v_n \\
=& (z-b)\frac{(z-a)}{(b-a)} v_n^* [-(aH_{1,n}^{-1} + bH_{2,n}^{-1}) R_{T_n}(z) R_{T_n}^{-1}(a) H_{2,n} R_{T_n^*}^{-1}(z) \\
&+ (z-a)(aH_{1,n}^{-1} + bH_{2,n}^{-1}) R_{T_n}(z) v_n u_{2,n}^* + (b-a)I \\
&+ (a(z-b)H_{1,n}^{-1}R_{T_n}^{-1}(a) + b(z-a)H_{2,n}^{-1}R_{T_n}^{-1}(b)) R_{T_n}(z)\tilde{u}_n v_n^*] R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a) v_n \\
=& (z-b)\frac{(z-a)}{(b-a)} v_n^* \{aH_{1,n}^{-1}[-R_{T_n}(z)R_{T_n}^{-1}(a)H_{2,n}R_{T_n^*}^{-1}(z) + (z-a)R_{T_n}(z)v_n u_{2,n}^* \\
&+ (z-b)R_{T_n}^{-1}(a)R_{T_n}(z)\tilde{u}_n v_n^*] + bH_{2,n}^{-1}[-R_{T_n}(z)R_{T_n}^{-1}(a)H_{2,n}R_{T_n^*}^{-1}(z) \\
&+ (z-a)R_{T_n}(z)v_n u_{2,n}^* + (z-a)R_{T_n}^{-1}(b)R_{T_n}(z)\tilde{u}_n v_n^*] + (b-a)I\} R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a) v_n \\
=& (z-b)\frac{(z-a)}{(b-a)} v_n^* \{aH_{1,n}^{-1}R_{T_n}(z)[-R_{T_n}^{-1}(a)H_{2,n}R_{T_n^*}^{-1}(z) + (z-a)v_n u_{2,n}^* \\
&+ (z-b)R_{T_n}^{-1}(a)\tilde{u}_n v_n^*] + bH_{2,n}^{-1}R_{T_n}(z)[-R_{T_n}^{-1}(a)H_{2,n}R_{T_n^*}^{-1}(z) + (z-a)v_n u_{2,n}^* \\
&+ (z-a)R_{T_n}^{-1}(b)\tilde{u}_n v_n^*] + (b-a)I\} R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a) v_n \\
=& (z-b)\frac{(z-a)}{(b-a)} v_n^* \{aH_{1,n}^{-1}R_{T_n}(z)[-R_{T_n}^{-1}(a)H_{2,n}R_{T_n^*}^{-1}(z) + (z-a)v_n u_{2,n}^* \\
&+ (z-b)R_{T_n}^{-1}(a)\tilde{u}_n v_n^* - R_{T_n}^{-1}(z)H_{1,n}R_{T_n^*}^{-1}(b)] + bH_{2,n}^{-1}R_{T_n}(z)[-R_{T_n}^{-1}(a)H_{2,n}R_{T_n^*}^{-1}(z) \\
&+ (z-a)v_n u_{2,n}^* + (z-a)R_{T_n}^{-1}(b)\tilde{u}_n v_n^* + R_{T_n}^{-1}(z)H_{2,n}R_{T_n^*}^{-1}(a)]\} R_{T_n^*}(z) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a) v_n \\
=& 0.
\end{aligned}
$$

En la primera igualdad usamos las definiciones de β_n, δ_n, $V_{11;n}$ y $V_{21;n}$ definidas respectivamente por (2.3.4), (2.3.5), (4.1.2) y (4.1.4), y además hemos reescrito $\beta_n^*(\bar{z})$ y $\delta_n^*(\bar{z})$. Después de multiplicar lo que queda, se sigue la segunda igualdad. La tercera igualdad se sigue de factorizar algunos términos. Después la tercera igualdad, las siguientes dos igualdades se siguen de factorizar. La sexta igualdad se sigue de usar la identidad (4.2.2). Finalmente, en la última igualdad usamos (4.2.4) del Lema 4.1. Entonces

$$-\beta_n^*(\bar{z})V_{11;n}(z) + \delta_n^*(\bar{z})V_{21;n}(z) = 0,$$

es decir,

$$W_{21;n} = 0. \tag{4.3.16}$$

Del lado derecho de (4.3.13) tenemos,

$$
\begin{aligned}
&- \beta_n^*(\bar{z})V_{12;n}(z) + \delta_n^*(\bar{z})V_{22;n}(z) \\
=& -(z-b)(z-a)v_n^* \frac{aH_{1,n}^{-1} + bH_{2,n}^{-1}}{b-a} R_{T_n}(z) v_n u_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n} \\
&+ (I_q + v_n^* \frac{a(z-b)H_{1,n}^{-1}R_{T_n}^{-1}(a) + b(z-a)H_{2,n}^{-1}R_{T_n}^{-1}(b)}{b-a} R_{T_n}(z)\tilde{u}_n) \\
&\cdot (I_q + (z-a)v_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n}) \\
=& -(z-b)(z-a)v_n^* \frac{aH_{1,n}^{-1} + bH_{2,n}^{-1}}{b-a} R_{T_n}(z) v_n u_{1,n}^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n} \\
&+ I_q + (z-a)v_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n} \\
&+ v_n^* \frac{a(z-b)H_{1,n}^{-1}R_{T_n}^{-1}(a) + b(z-a)H_{2,n}^{-1}R_{T_n}^{-1}(b)}{b-a} R_{T_n}(z)\tilde{u}_n \\
&+ (z-a)v_n^* \frac{a(z-b)H_{1,n}^{-1}R_{T_n}^{-1}(a) + b(z-a)H_{2,n}^{-1}R_{T_n}^{-1}(b)}{b-a} R_{T_n}(z)\tilde{u}_n \\
&\cdot v_n^* R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= I_q + \frac{(z-a)}{(b-a)} v_n^* [-(z-b)(aH_{1,n}^{-1} + bH_{2,n}^{-1}) R_{T_n}(z) v_n u_{1,n}^* + (b-a)I \\
&\quad + (a\frac{(z-b)}{(z-a)} H_{1,n}^{-1} R_{T_n}^{-1}(a) + bH_{2,n}^{-1} R_{T_n}^{-1}(b)) R_{T_n}(z) H_{1,n} R_{T_n^*}^{-1}(z) \\
&\quad + (a(z-b) H_{1,n}^{-1} R_{T_n}^{-1}(a) + b(z-a) H_{2,n}^{-1} R_{T_n}^{-1}(b)) R_{T_n}(z) \tilde{u}_n v_n^*] R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n} \\
&= I_q + \frac{(z-a)}{(b-a)} v_n^* \{ aH_{1,n}^{-1} [-(z-b) R_{T_n}(z) v_n u_{1,n}^* \\
&\quad + \frac{(z-b)}{(z-a)} R_{T_n}^{-1}(a) R_{T_n}(z) H_{1,n} R_{T_n^*}^{-1}(z) + (z-b) R_{T_n}^{-1}(a) R_{T_n}(z) \tilde{u}_n v_n^*] \\
&\quad + bH_{2,n}^{-1} [-(z-b) R_{T_n}(z) v_n u_{1,n}^* + R_{T_n}^{-1}(b) R_{T_n}(z) H_{1,n} R_{T_n^*}^{-1}(z) \\
&\quad + (z-a) R_{T_n}^{-1}(b) R_{T_n}(z) \tilde{u}_n v_n^*] + (b-a)I \} R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n} \\
&= I_q + \frac{(z-a)}{(b-a)} v_n^* \{ a(z-b) H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(z) [-v_n u_{1,n}^* \\
&\quad + \frac{1}{(z-a)} R_{T_n}^{-1}(a) H_{1,n} R_{T_n^*}^{-1}(z) + R_{T_n}^{-1}(a) \tilde{u}_n v_n^*] \\
&\quad + bH_{2,n}^{-1} R_{T_n}(z) [-(z-b) v_n u_{1,n}^* + R_{T_n}^{-1}(b) H_{1,n} R_{T_n^*}^{-1}(z) + (z-a) R_{T_n}^{-1}(b) \tilde{u}_n v_n^*] \\
&\quad + (b-a)I \} R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n} \\
&= I_q + \frac{(z-a)}{(b-a)} v_n^* \{ a(z-b) H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(z) [H_{1,n} T_n^* - T_n H_{1,n} \\
&\quad + \frac{1}{(z-a)} R_{T_n}^{-1}(a) H_{1,n} R_{T_n^*}^{-1}(z) - \frac{1}{(z-b)} R_{T_n}^{-1}(z) H_{1,n} R_{T_n^*}^{-1}(b)] \\
&\quad + bH_{2,n}^{-1} R_{T_n}(z) [-(z-b) v_n u_{1,n}^* + R_{T_n}^{-1}(b) H_{1,n} R_{T_n^*}^{-1}(z) - (z-a) u_{2,n} v_n^* \\
&\quad + R_{T_n}^{-1}(z) H_{2,n} R_{T_n^*}^{-1}(a)] \} R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n} \\
&= I_q + \frac{(z-a)}{(b-a)} v_n^* \{ a(z-b) H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(z) [H_{1,n} T_n^* - T_n H_{1,n} \\
&\quad + \frac{1}{(z-a)} R_{T_n}^{-1}(a) H_{1,n} R_{T_n^*}^{-1}(z) - \frac{1}{(z-b)} R_{T_n}^{-1}(z) H_{1,n} R_{T_n^*}^{-1}(b)] \} R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n} \\
&= I_q + \frac{a}{(b-a)} v_n^* H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(z) [(z-a)(z-b) H_{1,n} T_n^* - (z-a)(z-b) T_n H_{1,n} \\
&\quad + (z-b) R_{T_n}^{-1}(a) H_{1,n} R_{T_n^*}^{-1}(z) - (z-a) R_{T_n}^{-1}(z) H_{1,n} R_{T_n^*}^{-1}(b)] R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n} \\
&= I_q + \frac{a}{(b-a)} v_n^* H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(z) [-(b-a)(I - zT_n) H_{1,n} (I - zT_n^*)] R_{T_n^*}(z) H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n} \\
&= I_q - a v_n^* H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n}
\end{aligned}
$$

En la primera igualdad usamos las definiciones de β_n, δ_n, $V_{12;n}$ y $V_{22;n}$ definidas respectivamente por (2.3.4), (2.3.5), (4.1.3) y (4.1.5), y además usamos $\beta_n^*(\bar{z})$ y $\delta_n^*(\bar{z})$. Después de multiplicar lo que queda, se sigue la segunda igualdad. La tercera igualdad se sigue de factorizar. Después de la tercera igualdad, en las siguientes dos igualdades se obtienen de seguir factorizando. En la sexta igualdad usamos (1.2.7) y la identidad (4.2.2). La séptima igualdad se sigue de usar (4.2.5) del Lema 4.1. La octava igualdad se obtiene al simplificar. Finalmente, la novena igualdad se sigue de usar (4.2.10) del Lema 4.2. Entonces

$$
-\beta_n^*(\bar{z}) V_{12;n}(z) + \delta_n^*(\bar{z}) V_{22;n}(z) = I_q - a v_n^* H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n},
$$

es decir,

$$
W_{22;n} = I_q - a v_n^* H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n}. \tag{4.3.17}
$$

En vista de (4.3.14)-(4.3.17), podemos reescribir (4.3.9) como sigue

$$
(\mathfrak{J}_q U_n(z) \mathfrak{J}_q)^{-1} V_n(z) = \begin{pmatrix} I + a\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a) v_n & 0 \\ 0 & I - a v_n^* H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n} \end{pmatrix}. \tag{4.3.18}
$$

Por lo tanto,

$$V_n(z) = \mathfrak{J}_q U_n(z) \mathfrak{J}_q \begin{pmatrix} I + a\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a) v_n & 0 \\ 0 & I - a v_n^* H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n} \end{pmatrix}.$$

■

Ahora, vamos a calcular la inversa de la cuarta matriz que aparece en la parte derecha de la última igualdad.

Corolario 4.5. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Además, sean T_n, R_{T_n}, v_n, $\tilde{u}_n$, $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14, J_q definido en (2.2.1). Supongamos que $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ es una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que las matrices $\tilde{H}_{1,n}$, $\tilde{H}_{2,n}$, $H_{1,n}$, $H_{2,n}$ definidas como en (1.1.22)-(1.1.25) son Hermitianas positivas. Entonces se satisface la siguiente igualdad*

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} I + a\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a) v_n & 0 \\ 0 & I - a v_n^* H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} I_q - a u_{1,n}^* R_{T_n^*}(a) H_{1,n}^{-1} v_n & 0 \\ 0 & I_q + a v_n^* R_{T_n^*}(a) \tilde{H}_{2,n}^{-1} \tilde{u}_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Demostración. De (4.1.16) tenemos que

$$V_{1,n}(z) = \begin{pmatrix} (z-a)I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} V_n(z) \begin{pmatrix} (z-a)^{-1}I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix},$$

donde V_n y $V_{1,n}$ están definidas en (4.1.1) y (4.1.11), respectivamente. Evaluando en $\bar{z}$,

$$V_{1,n}(\bar{z}) = \begin{pmatrix} (\bar{z}-a)I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} V_n(\bar{z}) \begin{pmatrix} (\bar{z}-a)^{-1}I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}. \tag{4.3.19}$$

Calculamos la inversa de $V_{1,n}$

$$\begin{aligned} V_{1,n}^{-1}(z) &= \left(\begin{pmatrix} (z-a)I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} V_n(z) \begin{pmatrix} (z-a)^{-1}I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (z-a)I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} V_n^{-1}(z) \begin{pmatrix} (z-a)^{-1}I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

Por otro lado, de acuerdo a (4.1.13) tenemos

$$\begin{aligned} V_{1,n}^{-1}(z) &= J_q V_{1,n}^*(\bar{z}) J_q \\ &= J_q \left(\begin{pmatrix} (\bar{z}-a)I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} V_n(\bar{z}) \begin{pmatrix} (\bar{z}-a)^{-1}I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \right)^* J_q \\ &= J_q \begin{pmatrix} (z-a)^{-1}I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} V_n^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} (z-a)I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} J_q \\ &= J_q \begin{pmatrix} (z-a)^{-1}I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} J_q J_q V_n^*(\bar{z}) J_q J_q \begin{pmatrix} (z-a)I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} J_q \\ &= \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & (z-a)^{-1}I_q \end{pmatrix} J_q V_n^*(\bar{z}) J_q \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & (z-a)I_q \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

Donde en la segunda igualdad sustituimos $V_{1,n}(\bar{z})$ de la Ecuación (4.3.19). En la tercera igualdad calculamos la transpuesta conjugada que aparece en la segunda igualdad. En la cuarta igualdad hacemos uso de la propiedad de J_q, es decir, $J_q J_q = I_{2q}$. En la quinta igualdad simplificamos. Entonces igualando (4.3.20) y (4.3.21), tenemos

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}(z-a)I_q & 0\\ 0 & I_q\end{pmatrix} V_n^{-1}(z)\begin{pmatrix}(z-a)^{-1}I_q & 0\\ 0 & I_q\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}I_q & 0\\ 0 & (z-a)^{-1}I_q\end{pmatrix} J_q V_n^*(\bar{z}) J_q \begin{pmatrix}I_q & 0\\ 0 & (z-a)I_q\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

De donde

$$V_n^{-1}(z) = \begin{pmatrix}(z-a)^{-1}I_q & 0\\ 0 & (z-a)^{-1}I_q\end{pmatrix} J_q V_n^*(\bar{z}) J_q \begin{pmatrix}(z-a)I_q & 0\\ 0 & (z-a)I_q\end{pmatrix}$$

y simplificando, tenemos

$$V_n^{-1}(z) = J_q V_n^*(\bar{z}) J_q \tag{4.3.22}$$

De las definiciones de U_n y $\mathfrak{J}_q$ en (2.3.1) y (4.3.2) respectivamente, y de (4.3.18) obtenemos que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}I + a\tilde{u}_n^* \tilde{H}_{2,n}^{-1} R_{T_n}(a) v_n & 0\\ 0 & I - a v_n^* H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n}\end{pmatrix}^{-1} &= V_n^{-1}(z)(\mathfrak{J}_q U_n(z) \mathfrak{J}_q) \qquad (4.3.23)\\ &= J_q V_n^*(\bar{z}) J_q \mathfrak{J}_q U_n(z) \mathfrak{J}_q\\ &= J_q \begin{pmatrix}V_{11;n}(\bar{z}) & V_{12;n}(\bar{z})\\ V_{21;n}(\bar{z}) & V_{22;n}(\bar{z})\end{pmatrix}^* J_q \begin{pmatrix}\delta_n(z) & \gamma_n(z)\\ \beta_n(z) & \alpha_n(z)\end{pmatrix}\\ &= J_q \begin{pmatrix}V_{11;n}^*(\bar{z}) & V_{21;n}^*(\bar{z})\\ V_{12;n}^*(\bar{z}) & V_{22;n}^*(\bar{z})\end{pmatrix} J_q \begin{pmatrix}\delta_n(z) & \gamma_n(z)\\ \beta_n(z) & \alpha_n(z)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}V_{22;n}^*(\bar{z}) & -V_{12;n}^*(\bar{z})\\ -V_{21;n}^*(\bar{z}) & V_{11;n}^*(\bar{z})\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\delta_n(z) & \gamma_n(z)\\ \beta_n(z) & \alpha_n(z)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\tilde{W}_{11;n} & \tilde{W}_{21;n}\\ \tilde{W}_{21;n} & \tilde{W}_{22;n}\end{pmatrix}. \qquad (4.3.24)\end{aligned}$$

Donde en la segunda igualdad utilizamos (4.3.22). En la tercera igualdad sustituimos los bloques de U_n y V_n. En la cuarta igualdad aplicamos la transpuesta conjugada que aparece en la igualdad anterior. Las últimas dos igualdades se obtienen de multiplicar. Además,

$$\tilde{W}_{11;n} := V_{22;n}^*(\bar{z})\delta_n(z) - V_{12;n}^*(\bar{z})\beta_n(z) \tag{4.3.25}$$

$$\tilde{W}_{12;n} := V_{22;n}^*(\bar{z})\gamma_n(z) - V_{12;n}^*(\bar{z})\alpha_n(z) \tag{4.3.26}$$

$$\tilde{W}_{21;n} := -V_{21;n}^*(\bar{z})\delta_n(z) + V_{11;n}^*(\bar{z})\beta_n(z) \tag{4.3.27}$$

$$\tilde{W}_{22;n} := -V_{21;n}^*(\bar{z})\gamma_n(z) + V_{11;n}^*(\bar{z})\alpha_n(z) \tag{4.3.28}$$

Observemos que en (4.3.25) tenemos

$$\tilde{W}_{11;n} = (\delta_n^*(\bar{z})V_{22;n}(z) - \beta_n^*(\bar{z})V_{12;n}(z))^* = (W_{22;n})^* = (I_q - a v_n^* H_{1,n}^{-1} R_{T_n}(a) u_{1,n})^*$$

Donde hemos usado (4.3.13) y (4.3.17). Entonces

$$\tilde{W}_{11;n} = I_q - a u_{1,n}^* R_{T_n}^*(a) H_{1,n}^{-1} v_n. \tag{4.3.29}$$

En (4.3.26) tenemos que

$$\tilde{W}_{12;n} = (-(-\gamma_n^*(\bar{z})V_{22;n}(z) + \alpha_n^*(\bar{z})V_{12;n}(z)))^* = (-W_{12;n})^* = 0.$$

Donde hemos usado (4.3.11) y (4.3.15). Entonces

$$\tilde{W}_{12;n} = 0. \tag{4.3.30}$$

Ahora analizamos (4.3.27),

$$\tilde{W}_{21;n} = (-(\delta_n^*(\bar{z})V_{21;n}(z) - \beta_n^*(\bar{z})V_{11;n}(z)))^* = (-W_{21;n})^* = 0.$$

Donde hemos usado (4.3.12) y (4.3.16). Entonces

$$\tilde{W}_{21;n} = 0. \tag{4.3.31}$$

Finalmente, para (4.3.28) tenemos,

$$\tilde{W}_{21;n} = (-\gamma_n^*(\bar{z})V_{21;n}(z) + \alpha_n^*(\bar{z})V_{11;n}(z))^* = (W_{11;n})^* = (I_q + a\tilde{u}_n^*\tilde{H}_{2,n}^{-1}R_{T_n}(a)v_n)^*.$$

Donde hemos usado (4.3.10) y (4.3.14). Entonces

$$\tilde{W}_{22;n} = I_q + av_n^*R_{T_n}^*(a)\tilde{H}_{2,n}^{-1}\tilde{u}_n. \tag{4.3.32}$$

Usando (4.3.29)-(4.3.32), reescribimos (4.3.23) y nos queda

$$\begin{pmatrix} I + a\tilde{u}_n^*\tilde{H}_{2,n}^{-1}R_{T_n}(a)v_n & 0 \\ 0 & I - av_n^*H_{1,n}^{-1}R_{T_n}(a)u_{1,n} \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} I_q - au_{1,n}^*R_{T_n^*}(a)H_{1,n}^{-1}v_n & 0 \\ 0 & I_q + av_n^*R_{T_n^*}(a)\tilde{H}_{2,n}^{-1}\tilde{u}_n \end{pmatrix}$$

y así queda demostrado el Corolario 4.5. ■

Ahora expresamos la matriz resolvente U_n a través de la matriz resolvente V_n.

Corolario 4.6. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Además, sean T_n, R_{T_n}, v_n, $\tilde{u}_n$, $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14, $\mathfrak{J}_q$ definido en (4.3.2). Supongamos que $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ es una secuencia de matrices Hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que las matrices $\tilde{H}_{1,n}$, $\tilde{H}_{2,n}$, $H_{1,n}$, $H_{2,n}$ definidas como en (1.1.22)-(1.1.25) son Hermitianas positivas. Sea U_n la matriz resolvente definida en (2.3.1), sea V_n definida en (4.1.1) la matriz resolvente adicional. Entonces*

$$U_n(z) = \mathfrak{J}_q V_n(z) \begin{pmatrix} I_q - au_{1,n}^*R_{T_n^*}(a)H_{1,n}^{-1}v_n & 0 \\ 0 & I_q + av_n^*R_{T_n^*}(a)\tilde{H}_{2,n}^{-1}\tilde{u}_n \end{pmatrix} \mathfrak{J}_q. \tag{4.3.33}$$

Demostración. De acuerdo al Teorema 4.4, la Ecuación (4.3.4) nos dice que

$$V_n(z) = \mathfrak{J}_q U_n(z) \mathfrak{J}_q \begin{pmatrix} I + a\tilde{u}_n^*\tilde{H}_{2,n}^{-1}R_{T_n}(a)v_n & 0 \\ 0 & I - av_n^*H_{1,n}^{-1}R_{T_n}(a)u_{1,n} \end{pmatrix}$$

la ecuación anterior es equivalente a

$$U_n(z) = \mathfrak{J}_q V_n(z) \begin{pmatrix} I + a\tilde{u}_n^*\tilde{H}_{2,n}^{-1}R_{T_n}(a)v_n & 0 \\ 0 & I - av_n^*H_{1,n}^{-1}R_{T_n}(a)u_{1,n} \end{pmatrix}^{-1} \mathfrak{J}_q$$

y en vista de Corolario 4.5

$$U_n(z) = \mathfrak{J}_q V_n(z) \begin{pmatrix} I_q - au_{1,n}^*R_{T_n^*}(a)H_{1,n}^{-1}v_n & 0 \\ 0 & I_q + av_n^*R_{T_n^*}(a)\tilde{H}_{2,n}^{-1}\tilde{u}_n \end{pmatrix} \mathfrak{J}_q.$$

■

Así, de (4.3.33) podemos concluir que

$$U_n(z) = AV_n(z)B \tag{4.3.34}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & I_q - au_{1,n}^*R_{T_n^*}(a)H_{1,n}^{-1}v_n \\ I_q + av_n^*R_{T_n^*}(a)\tilde{H}_{2,n}^{-1}\tilde{u}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Apéndice A

Definición A.1. [F, pág. 12] *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función no decreciente, entonces f tiene límites por la derecha y por la izquierda en cada punto:*

$$f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{x>a} f(x), \quad f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \sup_{x<a} f(x).$$

Además, los valores de los límites $f(\infty) = \sup_{a \in \mathbb{R}} f(x)$ y $f(-\infty) = \inf_{a \in \mathbb{R}} f(x)$ existen (posiblemente igual a $\pm\infty$). f es llamada continua por la derecha si $f(a) = f(a^+)$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y continua por la izquierda si $f(a) = f(a^-)$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Otra notación usual para $f(a^+)$ y $f(a^-)$ es $f(a+0)$ y $f(a-0)$, respectivamente.

Definición A.2. [MH, pág. 73] *Sea $f : A \to \mathbb{C}$ donde $A \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto. La función f se dice que es diferenciable (en el sentido complejo) en $z_0 \in A$ si*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Este límite es denotado por $f'(z_0)$, o a veces por $(df/dz)(z_0)$. Así, $f'(z_0)$ es un número complejo. La función f se dice que es holomorfa en A si f es complejo diferenciable para cada $z_0 \in A$. La frase "holomorfa en z_0" significa que f es holomorfa en una vecindad de z_0.

Definición A.3. [N, pág. 25] *Decimos que una función f escalar, es meromorfa en un dominio Ω si es holomorfa en Ω excepto para posibles polos.*

Lema A.1. [Dym, pág. 790] *Sean $q \in \mathbb{N}$ y Π_+ denotado como en la Notación 7. Sea S una función matricial de $q \times q$ meromorfa en Π_+ tal que*

$$\frac{S(z) - S^*(z)}{2i} \geq 0$$

para todo $z \in \mathbb{H}_S$, donde $\mathbb{H}_S$ está definido como en la Definición 3.6. Entonces S es holomorfa en todo Π_+.

Proposición A.2. [H]. *Si f es una función holomorfa en una región U entonces*

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

es holomorfa en U^*.

Teorema A.3. (Principio de simetría)[H]. *Sea U una región simétrica sobre el eje real y sea*

$$U^+ = \{z \in U | \mathfrak{Im}\, z > 0\}$$

la parte media de U sobre el plano superior $\mathbb{C}$. Si $f(z)$ es una función holomorfa en U^+ tal que

$$\lim_{\mathfrak{Im}\,(z) \to 0^+} \mathfrak{Im}\, f(z) = 0$$

como z se aproxima al eje real por arriba entonces $f(z)$ se extiende a una función holomorfa $f = f^e$ en U que satisface

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \text{ para todo } z \in U.$$

Definición A.4. *Sea $f(t)$ una función continua en $[0, \infty)$ y sean t_1, t_2, $\ldots$ t_n números tales que*

$$0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty.$$

Asumimos que $\sigma(t)$ es una función no decreciente constante a trozos con puntos de discontinuidad en t_k, $k = 1, \ldots, n$. Entonces la integral de Stieltjes de f respecto de σ tiene la forma:

$$\int_0^\infty f(t)d\sigma(t) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(\sigma(t_k + 0) - \sigma(t_k - 0)).$$

Generalmente, se entiende que σ es una función continua por la derecha.

Teorema A.4. [R, pág. 137-139] *Sean f_1, f_2 funciones que son integrables con respecto a σ, en el sentido de Riemann-Stieltjes en $[a, b]$, entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

(i) Para toda constante c, $cf_1 + f_2$ también es integrable en $[a, b]$ y, además, se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_a^b (cf_1 + f_2)d\sigma = c\int_a^b f_1 d\sigma + \int_a^b f_2 d\sigma.$$

(ii) Si $f_1(x) \leq f_2(x)$ en $[a, b]$,

$$\int_a^b f_1 d\sigma \leq \int_a^b f_2 d\sigma.$$

(iii) Si f es una función integrable en $[a, b]$ y $a < c < b$, entonces f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$ y

$$\int_a^b f d\sigma = \int_a^c f d\sigma + \int_c^b f d\sigma$$

.

(iv) Sea c una constante. Si f es una función integrable con respecto de $c\sigma_1$ e integrable con respecto de σ_2, entonces f es integrable con respecto de $c\sigma_1 + \sigma_2$ y

$$\int_a^b f d(c\sigma_1 + \sigma_2) = \int_a^b cf d\sigma_1 + \int_a^b f d\sigma_2.$$

Observación A.1. [Mah, pág. 51,54]. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, X no vacío. Sea $G : X \to \mathbb{C}^{q\times q}$ una función matricial de $q \times q$. La derivada de la función matricial $G(t)$ es la matriz de las derivadas en cada entrada*

$$\frac{dG(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dG_{11}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dG_{1q}(t)}{dt} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dG_{q1}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dG_{qq}(t)}{dt} \end{pmatrix}.$$

Observación A.2. [Mah, pág. 51,54]. *Sea G una función matricial definida como en la Observación A.1. La integral de la función matricial $G(t)$ es la matriz de las integrales en cada entrada*

$$\int_a^b G(t)dt = \begin{pmatrix} \int_a^b G_{11}(z)dz & \cdots & \int_a^b G_{1q}(z)dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b G_{q1}(z)dt & \cdots & \int_a^b G_{qq}(z)dt \end{pmatrix}.$$

Observación A.3. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ y $\mathcal{M}^q_{\geq}[a, b]$ definido como en la Definición* 1.8. *En* *el caso cuando existe la derivada $\sigma'(t)$ en $[a,b]$ entonces la igualdad (1.1.1) se escribe como*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(z,t)d\sigma(t) &= \int_a^b f(z,t)\sigma'(t)dt\\ &= \begin{pmatrix} \int_a^b f(z,t)\sigma'_{11}(t)dt & \cdots & \int_a^b f(z,t)\sigma'_{1q}(t)dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b f(z,t)\sigma'_{q1}(t)dt & \cdots & \int_a^b \sigma'_{qq}(t)dt \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Observación A.4. [KN, pág. 58]. *Sea $P(t)$ una función escalar tal que $P(t) \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$ y sea $\sigma \in \mathcal{M}^1_{\geq}[a,b]$. Entonces*

$$\int_a^b P(t)d\sigma(t) \geq 0$$

En vista de la Observación A.4, de forma similar para $\sigma \in \mathcal{M}^q_{\geq}[a,b]$ tenemos

Observación A.5. *Sea $P(t)$ una función escalar tal que $P(t) \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$ y sea $\sigma \in \mathcal{M}^q_{\geq}[a,b]$ donde $\mathcal{M}^q_{\geq}[a,b]$ está definido como en la Definición 1.8. Entonces*

$$\int_a^b P(t)d\sigma(t) \geq 0$$

Lema A.5. *Sea $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ no decreciente. Sea $f : \mathbb{C} \times\ [a,b] \to \mathbb{C}$ una función escalar continua en su dominio de definición, entonces se cumple la siguiente igualdad*

$$\left(\int_a^b f(z,t)dg(t)\right)^* = \int_a^b f^*(z,t)dg^*(t) \tag{A.2}$$

Demostración. Tengamos en cuenta que

$$dg(t) = d(\mathfrak{Re}g(t) + i\mathfrak{Im}\, g(t)) = \left(\frac{d\mathfrak{Re}g(t)}{dt} + i\frac{d\mathfrak{Im}\, g(t)}{dt}\right)dt = d\mathfrak{Re}g(t) + id\mathfrak{Im}\, g(t), \tag{A.3}$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_a^b f(z,t)dg(t) &= \int_a^b (\mathfrak{Re}f(z,t) + i\mathfrak{Im}\, f(z,t))dg(t)\\ &= \int_a^b (\mathfrak{Re}f(z,t) + i\mathfrak{Im}\, f(z,t))(d\mathfrak{Re}\, g(t) + id\mathfrak{Im}\, g(t))\\ &= \int_a^b \mathfrak{Re}\, f(z,t)d\mathfrak{Re}\, g(t) - \int_a^b \mathfrak{Im}\, f(z,t)d\mathfrak{Im}\, g(t)\\ &\quad + i\int_a^b \mathfrak{Im}\, f(z,t)d\mathfrak{Re}\, g(t) + i\int_a^b \mathfrak{Re}\, f(z,t)d\mathfrak{Im}\, g(t).\end{aligned}$$

Donde en la segunda igualdad hemos usado $(A.3)$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_a^b f(z,t)dg(t) &= \int_a^b \mathfrak{Re}\, f(z,t)d\mathfrak{Re}\, g(t) - \int_a^b \mathfrak{Im}\, f(z,t)d\mathfrak{Im}\, g(t)\\ &\quad +i\int_a^b \mathfrak{Im}\, f(z,t)d\mathfrak{Re}\, g(t) + i\int_a^b \mathfrak{Re}\, f(z,t)d\mathfrak{Im}\, g(t).\end{aligned} \tag{A.4}$$

Del lado izquierdo de $(A.2)$ tenemos,

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(z,t)dg(t)\right)^* &= \int_a^b \mathfrak{Re}\, f(z,t)d\mathfrak{Re}\, g(t) - \int_a^b \mathfrak{Im}\, f(z,t)d\mathfrak{Im}\, g(t)\\ &\quad - i\int_a^b \mathfrak{Im}\, f(z,t)d\mathfrak{Re}\, g(t) - i\int_a^b \mathfrak{Re}\, f(z,t)d\mathfrak{Im}\, g(t).\\ &= \int_a^b (\mathfrak{Re}\, f(z,t) - i\mathfrak{Im}\, f(z,t))d\mathfrak{Re}\, g(t) - \int_a^b (\mathfrak{Im}\, f(z,t) + i\mathfrak{Re}\, f(z,t))d\mathfrak{Im}\, g(t)\\ &= \int_a^b f^*(z,t)d\mathfrak{Re}\, g(t) - i\int_a^b (-i\mathfrak{Im}\, f(z,t) + \mathfrak{Re}\, f(z,t))d\mathfrak{Im}\, g(t)\\ &= \int_a^b f^*(z,t)d\mathfrak{Re}\, g(t) - i\int_a^b f^*(z,t)d\mathfrak{Im}\, g(t) = \int_a^b f^*(z,t)(d\mathfrak{Re}\, g(t) - id\mathfrak{Im}\, g(t))\\ &= \int_a^b f^*(z,t)dg^*(t)\end{aligned}$$

donde en la primera igualdad usamos $(A.4)$. ■

Lema A.6. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$ y $\mathcal{M}^q_{\geq}[a,b]$ definido como en la Definición 1.8 . Sean $\sigma \in \mathcal{M}^q_{\geq}[a,b]$ y $f : \mathbb{C}\times\ [a,b] \to \mathbb{C}$ una función escalar continua en su dominio de definición, entonces se satisface la siguiente igualdad*

$$\left(\int_a^b f(z,t)d\sigma(t)\right)^* = \int_a^b f^*(z,t)d\sigma(t) \tag{A.5}$$

Demostración. Iniciando por el lado derecho de $(A.5)$, tenemos

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(z,t)d\sigma(t)\right)^* &= \begin{pmatrix} \int_a^b f(z,t)d\sigma_{11}(t) & \cdots & \int_a^b f(z,t)d\sigma_{1q}(t)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \int_a^b f(z,t)d\sigma_{q1}(t) & \cdots & \int_a^b f(z,t)d\sigma_{qq}(t)\end{pmatrix}^*\\ &= \begin{pmatrix} \left(\int_a^b f(z,t)d\sigma_{11}(t)\right)^* & \cdots & \left(\int_a^b f(z,t)d\sigma_{q1}(t)\right)^*\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \left(\int_a^b f(z,t)d\sigma_{1q}(t)\right)^* & \cdots & \left(\int_a^b f(z,t)d\sigma_{qq}(t)\right)^*\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \int_a^b f^*(z,t)d\sigma^*_{11}(t) & \cdots & \int_a^b f^*(z,t)d\sigma^*_{q1}(t)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \int_a^b f^*(z,t)d\sigma^*_{1q}(t) & \cdots & \int_a^b f^*(z,t)d\sigma^*_{qq}(t)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \int_a^b f^*(z,t)d\sigma_{11}(t) & \cdots & \int_a^b f^*(z,t)d\sigma_{1q}(t)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \int_a^b f^*(z,t)d\sigma_{q1}(t) & \cdots & \int_a^b f^*(z,t)d\sigma_{qq}(t)\end{pmatrix} = \int_a^b f^*(z,t)d\sigma(t)\end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad hemos usado el Lema A.5 y que $\sigma(t)$ es Hermitiana. ■

Teorema A.7. (Criterio de Weierstrass) [R, pág. 158-159]. *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones definidas en E, y supongamos*

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad (x \in E,\quad n = 1,2,3,\dots)$$

En estas condiciones, Σf_n converge uniformemente en E si ΣM_n converge.

Teorema A.8. *Supongamos*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in E).$$

Hagamos

$$M_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

Entonces, $f \to f$ uniformemente en E si y solo si $M_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Teorema A.9. (Teorema de Identidad) [MH, pág. 365-366]. *Sean f y g funciones holomorfas en una región A. Supongamos que existe una secuencia $z_1, z_2, z_3, \ldots$ de puntos distintos en A que converge a $z_0 \in A$ tal que $f(z_n) = g(z_n)$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$. Entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in A$. La conclusión es válida en particular si $f = g$ en alguna vecindad de algún punto de A.*

Observación A.6. [F, pág. 33,39] *Supongamos que μ es una medida de Borel finita en $\mathbb{R}$, y sea $F(x) = \mu((-\infty, x])$. F es llamada la función distribución de μ. F es creciente y continua por la derecha. Y se cumplen las igualdades*

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$$
$$\mu(\{x\}) = F(x) - F(x^-) = F(x) - \lim_{x\to x_0^-} F(x).$$

Teorema A.10. [F, pág 101] *Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función distribución no decreciente. Entonces el conjunto de puntos en los cuales F es discontinua es contable.*

Si consideramos los puntos de continuidad de dos distribuciones como sucesiones, el Teorema A.10 nos permite hacer la siguiente observación.

Observación A.7. *De acuerdo al Teorema A.10 existen sucesiones $\{A_1^{(m)}\}_m^\infty$ y $\{A_2^{(m)}\}_m^\infty$ tales que*

1. $A_1^{(m+1)} < A_1^{(m)} < 0 < A_2^{(m)} < A_2^{(m+1)}$
2. $\lim_{m\to\infty} A_1^m = -\infty, \quad \lim_{m\to\infty} A_2^m = +\infty$
3. *Para cada* $m \in \mathbb{N}, \quad \tilde{\Sigma}_r(\{A_1^m\}) = \tilde{\Sigma}_r(\{A_2^m\}) = 0_{(n+1)q\times(n+1)q}$
4. *Para cada* $m \in \mathbb{N}, \quad \sigma_r(\{A_1^m\}) = \sigma_r(\{A_2^m\}) = 0_{q\times q}$

donde $\tilde{\Sigma}_r$ y σ_r son funciones no decrecientes.

Proposición A.11. [Mar] *Sean $p, q \in \mathbb{N}$, A una matriz de $q \times p$ y B una matriz cuadrada de $q \times q$. Si B es de rango máximo, entonces*

$$rank\,(BA) = rank\,(A).$$

Proposición A.12. *Sean $q \in \mathbb{N}$ y A una matriz de $q \times q$ con entradas en $\mathbb{C}$. Sea*

$$\mathcal{N}[A] = \{x \in \mathbb{C}^q : Ax = 0\}$$

el núcleo de A. Entonces $\mathcal{N}[A] = \{0\}$ si y solo si $\det A \neq 0$.

Para toda $A \in \mathbb{C}^{p\times q}$, usaremos A^+ para denotar la pseudoinversa de Moore-Penrose de A.

Observación A.8. *Sean $p, q \in \mathbb{N}$, A una matriz con entradas en $\mathbb{C}$ de $p \times p$, B una matriz con entradas en $\mathbb{C}$ de $p \times q$, D una matriz con entradas en $\mathbb{C}$ de $q \times q$ y*

$$E := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Albert [Al] demostró que la matriz de bloques E es Hermitiana no negativa si y solo si las siguientes cuatro condiciones se satisfacen:

1. $A \geq 0$.

2. $AA^+B = B$.

3. $C = B^*$.

4. $D - CA^+B \geq 0$.

(Para una versión ligeramente diferente pero relacionada de una caracterización de matrices de bloques Hermitianas no negativas, nos referimos a un artículo de Efimov y Potapov [EP]). Es más, se comprueba fácilmente que si E es Hermitiana no negativa, entonces la desigualdad $||B||^2 \leq ||A|| \cdot ||D||$ se cumple.

Recordemos que el i, j *minor* del elemento a_{ij} de la matriz A de $q \times q$ es denotado como $M^{i,j}$, es el determinante de la matriz de $(q-1) \times (q-1)$ obtenida de quitar la i-ésima fila y la j-ésima columna de A. El i, j *cofactor* del elemento a_{ij} de A, es denotado por $C^{i,j}$, está definido mediante $(-1)^{i+j} M^{i,j}$. Denotamos por $A_{(k)}$ la k-ésima *submatriz principal* de $k \times k$, es decir, la submatriz cuadrada de $k \times k$ que se obtiene de las primeras k filas y de las primeras k columnas de A, $k = 1, \ldots, q$. El *minor principal* de orden k de A está definido como $\det(A_{(k)})$, y es denotado como Δ_k, $k = 1, \ldots, q$.

Teorema A.13. (Criterio de Sylvester) [Gi, pág. 55]. *Sean $q \in \mathbb{N}$ y A una matriz con entradas en $\mathbb{R}$ simétrica de $q \times q$. Entonces*

(a) A es positiva definda si y solo si

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_k > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_q > 0.$$

(b) A es no definida positiva si y solo si

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \quad \ldots, \quad (-1)^q \Delta_q > 0.$$

Definición A.5. *Sea $q \in \mathbb{N}$. El producto interno (o producto interior) sobre $\mathbb{C}^q$ es una función $(\cdot, \cdot) : \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q :\to \mathbb{C}$ tal que para cualesquiera v, u, w en $\mathbb{C}^q$ y cualquier escalar c en $\mathbb{C}$ se tiene:*

1. $(v + u, w) = (v, w) + (u, w)$.

2. $(cv, u) = c(v, u)$.

3. $(u, v) = \overline{(v, u)}$.

4. $(v, v) > 0$ *si v es no nulo.*

Observación A.9. *Sea A una matriz. Si $(\cdot, \cdot)$ es un producto interno en $\mathbb{C}^q$ entonces para $x, y \in \mathbb{C}^q$ definimos $(x, y) = x^* A y$. Además, si A es Hermitiana entonces $x^* A y$ es un producto interno.*

Proposición A.14. [BB, pág. 192] *Si en un espacio normado $(V, ||\cdot||)$ se satisface la ley del paralelogramo, entonces existe un producto interno en V tal que $||x||^2 = (x, x)$ para todo $x \in V$. Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, entonces el producto interno está definido por la identidad de polarización*

$$(x, y) = \frac{1}{4}(||x + y||^2 - ||x - y||^2) \quad \forall x, y \in V$$

Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, el producto interno está dado por la identidad de polarización

$$(x, y) = \frac{1}{4}(||x + y||^2 - ||x - y||^2 + i||x + iy||^2 - i||x - iy||^2) \quad \forall x, y \in V \tag{A.6}$$

La Ecuación $(A.6)$ también se escribe como

$$(x, y) = \frac{1}{4}((x + y, x + y) - (x - y, x - y) + i(x + iy, x + iy) - i(x - iy, x - iy)) \quad \forall x, y \in V$$

Observación A.10. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interno y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Consideremos la matriz A asociada a T. Entonces*

$$(x, Ay) = \frac{1}{4}((x+y, A(x+y)) - (x-y, A(x-y)) + i(x+iy, A(x+iy)) - i(x-iy, A(x-iy)))$$

para todo $x, y \in V$.

Definición A.6. [V]. *Un funcional $\phi(x, y)$ se llama una forma bilineal Hermitiana si para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{C}^q$ y cualquier número $\alpha \in \mathbb{C}$ se satisfacen:*

$$\phi(x+z, y) = \phi(x, y) + \phi(z, y), \quad \phi(\alpha x, y) = \alpha\phi(x, y),$$
$$\phi(x, y+z) = \phi(x, y) + \phi(x, z), \quad \phi(x, \alpha y) = \bar{\alpha}\phi(x, y).$$

Definición A.7. [V]. *Una forma bilineal Hermitiana ϕ se llama Hermitiana simétrica si para cualesquiera $x, y \in \mathbb{C}^q$ se cumple:*

$$\phi(x, y) = \overline{\phi(y, x)}.$$

Lema A.15. [V]. *De formas bilineales Hermitianas simétricas se generan formas Hermitianas cuadraticas.*

La demostración del Lema A.15 se puede encontrar en [V, pág. 286]. En [V, pág. 289] tenemos que existe la matriz A tal que

$$\phi(x, y) = (x, Ay) \tag{A.7}$$

La matriz A de la Ecuación $(A.7)$ es llamada como la matriz asociada a la forma bilineal y está únicamente definida.

Definición A.8. [B] *Sean f, g funciones que son reales o complejas definidas en un conjunto X. La expresión $f(x) = O(g(x))$, para $x \in X$ significa que existe $A > 0$ tal que $|f(x)| \leq A|g(x)|$ para todo $x \in X$.*

Definición A.9. [B] *La expresión $f(x) = O(g(x))$, $x \to +\infty$ significa que existen $C > 0$ y $N > 0$ tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ para $x > N$.*

Definición A.10. [B] *La expresión $f(x) = o(g(x))$, $x \to +\infty$ significa que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) > 0$ tal que $|f(x)| \leq \varepsilon \cdot |g(x)|$ para $x > N(\varepsilon)$.*

Equivalentemente, la expresión $f(x) = o(g(x))$, $x \to +\infty$ significa que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Lema A.16. *Sea $P(x)$ es un polinomio con coeficientes en un campo $\mathbb{F}$ entonces*

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = 0$$

si y solo si $P(x) = 0$.

Demostración. Supongamos que $P(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ con $a_i \in \mathbb{F}$ para $i \in \mathbb{N}_{0,n}$. Para $x \neq 0$ podemos definir

$$Q(x) = \frac{P(x)}{x^n} = a_n + a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_0 x^{-n}.$$

Cuando $x \to \infty$, x^{-1}, x^{-2}, $\ldots$, x^{-n} esos términos se tienden a cero, entonces $Q(x) \to a_n$. Si $P(x) \to 0$, también tenemos que $Q(x) \to 0$. Por lo tanto $a_n = 0$. Ahora tenemos $P(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, si repetimos el mismo procedimiento concluimos que $a_{n-1} = 0$. Haciendo lo mismo $n-1$ veces restantes se concluye que $P(x) = 0$. El regreso es obvio. ■

Definición A.11. [DFK] *Sean $q \in \mathbb{N}$ y A una matriz compleja de $q \times q$. Decimos que A es J_q-expansiva si $A^* J_q A - J_q \geq 0$.*

Teorema A.17. *Sea $q \in \mathbb{N}$. Si A es una matriz compleja de $q \times q$ entonces A es J-expansiva si y solo si A^* es J-expansiva.*

La demostración del Teorema A.17 se puede encontrar en [DFK, Teorema 1.3.3]. En otras palabras el Teorema A.17 dice que

$$A^* J_q A - J_q \geq 0 \text{ si y solo si } (A^*)^* J_q A^* - J_q \geq 0.$$

Apéndice B

Las clases de funciones $\mathcal{R}_q$ y $\mathcal{R}_{0,q}$

Definición B.1. [KN]. *Sea $X \subseteq \mathbb{C}$ y Π_+ como en la Notación 7. Una función escalar $F : X \to \mathbb{C}$ es de la clase $\mathcal{R}_1$ si*

1. *$F(z)$ es holomorfa en Π_+.*
2. *$\mathfrak{Im}\, F(z) \geq 0$ para cada $z \in \Pi_+$.*

Definición B.2. [CDFK]. *Sea Π_+ denotado como en la Notación 7. Sea $\mathcal{R}_q$ el conjunto de todas las funciones matriciales $F : \Pi_+ \to \mathbb{C}^{q \times q}$ que son holomorfas en Π_+ y que satisfacen $\mathfrak{Im}\, F(\omega) \geq 0$ para cada $\omega \in \Pi_+$. Y decimos que una función matricial f es de la clase $\mathcal{R}_q$ si f pertenece a $\mathcal{R}_q$.*

Lema B.1. *Sea $S(z)$ una función matricial, tal que $S \in \mathcal{R}_q$ y sea $f \in \mathbb{C}^q$ constante, entonces $(f, S(z)f)$ es una función escalar que pertenece a $\mathcal{R}_1$.*

Demostración. Ya que $S \in \mathcal{R}_q$, entonces $(f, S(z)f)$ es holomorfa en Π_+. Además

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Im}\,(f, S(z)f) &= \frac{(f, S(z)f) - (f, S(z)f)^*}{2i} \\
&= \frac{1}{2i}[f^* S(z) f - (f^* S(z) f)^*] \\
&= \frac{1}{2i}[f^* S(z) f - f^* S^*(z) f] \\
&= f^* \frac{S(z) - S^*(z)}{2i} f \\
&= f^* \mathfrak{Im}\, S(z) f.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathfrak{Im}\,(f, S(z)f) = f^* \mathfrak{Im}\, S(z) f \tag{B.1}$$

Ya que por hipótesis para cada $z \in \Pi_+$ tenemos que $\mathfrak{Im}\, S(z) \geq 0$, de $(B.1)$ se sigue que $\mathfrak{Im}\,(f, S(z)f) \geq 0$ para cada $z \in \Pi_+$. Por lo tanto, $(f, S(z)f) \in \mathcal{R}_1$. ■

Definición B.3. [KN]. *Una función $f(z)$ es de la clase $\mathcal{C}_q$ (clase de Carathéodory) si*

1. *$f(z)$ es holomorfa en $|z| < 1$*
2. *$\mathfrak{Re}\, f(z) \geq 0$ para $|z| < 1$.*

Teorema B.2. (F. Riesz y Herglotz)[KN]. *Una función $f(z)$ es de la clase $\mathcal{C}_q$ si y solo si admite una representación*

$$f(z) = i\mathfrak{Im}\, f(0) + \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\tau(\theta) \tag{B.2}$$

donde $\tau(\theta)$ es una función no decreciente.

Demostración. La condición suficiente se puede probar directamente. La prueba de la condición necesaria es simple cuando la función armónica $u(z) = \mathfrak{Re}\, f(z)$ es continua en el disco cerrado $|z| \leq 1$.

En ese caso, usando el kernel de Poisson ($z = re^{i\varphi}$),

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2} = \mathfrak{Re}\left(\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\right),$$

vemos que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{Re}\left(\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\right) u(e^{i\theta}),$$

de donde obtenemos (B.2) con $\tau(\theta) = (l/2\pi)\int_0^\theta u(e^{i\theta})d\theta$. En el caso general uno introduce funciones $f_r(z) = f(rz)$ $(0 < r < 1)$ que, como se acaba de demostrar, admiten representaciones de tipo (B.2). La demostración se completa haciendo $r \to 1$, $r \to 0$ y utilizando el teorema de Helly [ST].

Teorema B.3. (R. Nevanlinna)[KN]. *Una función $F(z)$ es de clase $\mathcal{R}_1$ si y solo si admite una representación*

$$F(z) = \alpha + \beta z + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{1 + t^2}\right) d\sigma(t) \qquad (B.3)$$

donde α es un número real, $\beta \geq 0$ y $\sigma(t)$ es una función no decreciente tal que la integral $\int_{-\infty}^{\infty}(1 + t^2)^{-1}d\sigma(t)$ es convergente.

La prueba se basa en la relación entre las clases $\mathcal{C}_q$ y $\mathcal{R}_q$: $F(z) \in \mathcal{R}_q$ si y solo si $f(\zeta) \in \mathcal{C}_q$, donde $\zeta = (z-i)/(z+i)$ y $f(\zeta) = -iF(z)$. La representación (B.3) se deriva de (B.2) mediante la sustitución $z \to (z - i)/(z + i)$, — $\cot(\theta/2) \to t$, usando la identidad

$$\frac{1 + tz}{t - z} = \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{1 + t^2}\right)(1 + t^2).$$

Mencionamos sin demostrar que la representación (B.3) es única si la función $\sigma(t)$ está normalizada de alguna manera, digamos,

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma(t) = \frac{1}{2}[\sigma(t + 0) + \sigma(t - 0)]$$

Así normalizado, $\sigma(t)$ se determina en términos de $F(z)$ por la fórmula de inversión de Stieltjes:

$$\sigma(t_2) - \sigma(t_1) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{Im}\, F(x + i\varepsilon)dx \qquad (B.4)$$

Se comprueba fácilmente que

$$\beta = \lim_{y\to+\infty} \mathfrak{Im}\, F(iy)/y.$$

También se puede demostrar que β es la suma de los saltos de la función τ en los puntos 0 y 2π; la función $\sigma(t)$ en (B.3) está relacionada con $\tau(\theta)$ en (B.2) por $(1 + t^2)^{-1}d\sigma(t) = d\tau(\theta)$, donde $t = -\cot(\theta/2)$ y, adecuadamente normalizado, se da por la fórmula de inversión de Stieltjes:

$$\tau(\theta_2) - \tau(\theta_1) = \frac{1}{\pi}\lim_{\rho\to 1}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathfrak{Re}\, f(\rho e^{i\varphi})d\varphi \qquad (0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi).$$

Teorema B.4. (R. Nevanlinna Versión Matricial)[CDFK]. *Sea Π_+ denotado como en la Notación 7. (a) Para toda función matricial F que pertenece a la clase $\mathcal{R}_q$, existe una única matriz α compleja de $q \times q$ Hermitiana, existe una única matriz β compleja de $q \times q$ Hermitiana no negativa y existe una única $\nu \in \mathcal{M}^q_{\geq}[a, b]$ tal que*

$$F(z) = \alpha + \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + tz}{t - z}d\nu(t) \qquad (B.5)$$

se satisface para cada $z \in \Pi_+$.
(b) Toda función matricial $F : \Pi_+ \to \mathbb{C}^{q\times q}$ para la cual existe una matriz α compleja de $q \times q$, existe una matriz β compleja de $q \times q$ Hermitiana no negativa y $\nu \in \mathcal{M}^q_{\geq}[a, b]$ tal que (B.5) se satisface para cada $z \in \Pi_+$ pertenece a la clase $\mathcal{R}_q$.

Esta versión matricial del conocido teorema de Nevanlinna se puede demostrar usando la versión clásica del teorema de Nevanlinna en el caso $q = 1$ y usando el hecho de que para cada $F \in \mathcal{R}_q$ y cada $u, v \in \mathbb{C}^q$, la función $f := u^* F v$ pertenece a $\mathcal{R}_1$. Para cada $F \in \mathcal{R}_q$ llamamos a (α, β, ν) definidos como en (B.5) La parametrización de Nevanlinna de F.

Proposición B.5. [CDFK]. *Sean Π_+ y Π_- denotados como en la Notación 7. Sea $M = (c, d)$ una unión finita de intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ y sea $\varphi : \Pi_+ \cup M \cup \Pi_- \to \mathbb{C}^{q\times q}$ una función matricial que satisface las siguientes condiciones*

(i) *φ es holomorfa en $\Pi_+ \cup M \cup \Pi_-$.*

(ii) *$\varphi_{|\Pi_+} \in \mathcal{R}_q$.*

(iii) *Para todo $x \in M$, la matriz $\varphi(x)$ es Hermitiana.*

Denotamos como (α, β, ν) la parametrización de $\varphi_{|\Pi_+}$. Entonces

$$\varphi(z) = \alpha + \beta z + \int_{-\infty}^{c} \frac{1 + tz}{t - z} d\nu(t) + \int_{d}^{\infty} \frac{1 + tz}{t - z} d\nu(t)$$

para todo $z \in \Pi_+ \cup M \cup \Pi_-$.

Lema B.6. *Si para cualquier función $F(z) \in \mathcal{R}_q$, tenemos que $\beta = 0$, entonces se cumplen las siguientes igualdades*

$$\lim_{\eta\to+\infty} \eta \mathfrak{Im}\, F(i\eta) = \sup_{\eta>0} \eta \mathfrak{Im}\, F(i\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(t),$$

partes de las cuales pueden ser infinitas.

Demostración. Del Teorema B.4 tenemos que

$$F(z) = \alpha + \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{1 + t^2} \right) d\sigma(t)$$

donde, como antes, la función $\sigma(t)$ es no decreciente, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + t^2} d\sigma(t) < \infty.$$

Ya que nos interesa el caso $\beta = 0$,

$$F(z) = \alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{1 + t^2} \right) d\sigma(t)$$

tomando la parte imaginaria,

$$\mathfrak{Im}\, F(z) = \frac{F - \bar{F}}{2i} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{1}{t - \bar{z}} \right) d\sigma(t)$$

considerando $z = i\eta$ y multiplicando por η

$$\begin{aligned} \eta \mathfrak{Im}\, F(i\eta) &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t - i\eta} - \frac{1}{t + i\eta} \right) \eta d\sigma(t) \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2i\eta}{t^2 + \eta^2} \right) \eta d\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\eta^2}{t^2 + \eta^2} \right) d\sigma(t) \end{aligned}$$

tomando el límite $\eta \to +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{\eta\to+\infty} \eta \mathfrak{Im}\, F(i\eta) &= \lim_{\eta\to+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\eta^2}{t^2 + \eta^2} \right) d\sigma(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{\eta\to+\infty} \frac{\eta^2}{t^2 + \eta^2} \right) d\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(t). \end{aligned}$$

■

Teorema B.7. [CR]. *Sea la función matricial $S(z) \in \mathcal{R}_{0,q}$ entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(t) = -\lim_{y\to+\infty} iyS(iy) = \lim_{y\to+\infty} iyS^*(iy) = \lim_{y\to+\infty} y\mathfrak{Im}S(iy). \qquad (B.6)$$

En [KN], [At] se demuestra la versión escalar del Teorema B.7. Para la versión matricial del Teorema B.7 se puede considerar el Lema B.6 y [Br].

Definición B.4. *Denotamos a $\mathcal{R}_{0,1}$ como la clase de funciones escalares $F(z) \in \mathcal{R}_1$, tales que*

$$y\|F(iy)\| = O(1), \quad y > 0.$$

Aquí el símbolo $O(1)$ está definido como en la Definición A.8.

Definición B.5. [CDFK]. *Denotamos a $\mathcal{R}_{0,q}$ como la clase de funciones matriciales $F(z) \in \mathcal{R}_q$, tales que*

$$y\|F(iy)\| = O(1), \quad y > 0.$$

Aquí el símbolo $O(1)$ está definido como en la Definición A.8.

Nótese que toda función matricial F que pertenece a $\mathcal{R}_{0,q}$ satisface claramente

$$\lim_{y\to+\infty} F(iy) = 0 \qquad (B.7)$$

y admite una particular representación integral como veremos en el Teorema B.9.

Lema B.8. *Sea $S(z)$ una función matricial, $S \in \mathcal{R}_{0,q}$ y $f \in \mathbb{C}^q$ constante, entonces $(f, S(z)f)$ es una función escalar que pertenece a $\mathcal{R}_{0,1}$.*

Demostración. Sea $\varphi(z) = (f, S(z)f)$. Ya que $\mathcal{R}_{0,q} \subset \mathcal{R}_q$, se tiene que $S \in \mathcal{R}_q$. Por el Lema B.1, tenemos que φ pertenece a $\mathcal{R}_1$. Luego

$$|y\varphi(iy)| = |(f, yS(iy)f)| = |y(f, S(iy)f)| \leq y||f||^2||S(iy)|| = O(1).$$

Por lo tanto,

$$\varphi(z) \in \mathcal{R}_{0,1}$$

■

B.1 Método de polarización

En la demostración de el siguiente Teorema utilizaremos el *método de polarización*. Hacemos énfasis ya que mediante este método se puede extender la demostración del caso escalar al caso matricial.

Teorema B.9. [CR]. *La función matricial $S(z) \in \mathcal{R}_{0,q}$ si y solo si $S(z)$ admite la representación integral*

$$S(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-z)^{-1} d\sigma(t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(t) = K, \ \|K\| < +\infty, \sigma(t) \nearrow . \qquad (B.8)$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $S \in \mathcal{R}_{0,q}$. De acuerdo al Lema B.8, $\forall h \in \mathbb{C}^q$ la función $\varphi(z) = (h, S(z)h) \in \mathcal{R}_{0,q}$

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(h\Sigma(t)h)}{t-z}$$

$$S(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Sigma(t)}{t-z}$$

$\Sigma(t)$ es de variación acotada.

$$(h, S(z)h) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(h\Sigma(t)h)}{t-z}, \quad \text{haciendo} \quad (h\Sigma(t)h) = \sigma(t,h)$$

$$(h, S(z)h) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t,h)}{t-z}, \tag{B.9}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(t,h) < +\infty$$

porque $\sigma(t)$ es de variación acotada. De acuerdo a la Observación A.10, tenemos

$$\begin{aligned} 4(g, S(z)f) &= ((f+g), S(z)(f+g)) - ((f-g), S(z)(f-g)) \\ &\quad + i((f+ig), S(z)(f+ig)) - i((f-ig), S(z)(f-ig)) \end{aligned}$$

usando (B.9),

$$\begin{aligned} 4(g, S(z)f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t, f+g)}{t-z} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t, f-g)}{t-z} \\ &\quad + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t, f+ig)}{t-z} - i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t, f-ig)}{t-z} \end{aligned}$$

y si hacemos

$$\sigma(t,f,g) = \frac{1}{4}[\sigma(t, f+g) - \sigma(t, f-g) + i\sigma(t, f+ig) - i\sigma(t, f-ig)]$$

entonces

$$(g, S(z)f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t,f,g)}{t-z} \tag{B.10}$$

Ahora mostramos que para todo t fijo, $\sigma(t,f,g)$ es Hermitiana. Para f y g arbitrarios tenemos

$$(g, S(z)f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t,f,g)}{t-z}.$$

Consideremos

$$(g, S(z)f) = (S^*(z)g, f) = \overline{(f, S^*(z)g)}.$$

Por el principio de simetría

$$\begin{aligned} \overline{(f, S^*(z)g)} &= \overline{(f, S(\bar{z})g)} \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t,g,f)}{t-\bar{z}}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t,g,f)}{t-z} \end{aligned}$$

Así, $\sigma(t,f,g) = \overline{\sigma(t,g,f)}$ y entonces para cada t fijo, $\sigma(t,f,g)$ es Hermitiana. Ahora demostraremos que para f, g fijos, $\sigma(t,f,g)$ es un funcional lineal respecto de f. Sea $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, tenemos

$$(g, S(z)f) = (g, S(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t, \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g)}{t-z} \tag{B.11}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} (g, S(z)f) &= (g, S(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)) \\ &= \alpha_1 (g, Sf_1) + \alpha_2 (Sf_2) \\ &= \alpha_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t, f_1, g)}{t-z} + \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t, f_2, g)}{t-z} \end{aligned}$$

usando (iv) del Teorema A.4

$$(g, S(z)f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\alpha_1\sigma(t, f_1, g) + \alpha_2\sigma(t, f_2, g))}{t-z} \tag{B.12}$$

de (B.11) y de (B.12)

$$\sigma(t, \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 \sigma(t, f_1, g) + \alpha_2 \sigma(t, f_2, g)$$

y así, σ es una transformación lineal respecto del segundo argumento. Ahora demostramos que respecto de g es antilineal

$$\sigma(t, f, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \overline{\sigma(t, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2, f)}$$
$$\overline{\sigma(t, \beta_1 g_1, f) + \sigma(t, \beta_2 g_2, f)} = \bar{\beta}_1 \sigma(t, f, g_1) + \bar{\beta}_2 \sigma(t, f, g_2).$$

Hemos demostrado que $\sigma(t, f, g)$ es una función Hermitiana para cada t fijo y es un funcional bilineal. En vista de (A.7), para cada t fijo

$$\sigma(t, f, g) = (g, \Sigma(t) f), \tag{B.13}$$

donde $\Sigma(t)$ es una matriz Hermitiana, es decir,

$$(g, \Sigma(t) f) = (\Sigma(t) g, f).$$

Entonces de (B.10) y (B.13), tenemos

$$(g, S(z) f) = (g, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Sigma(t)}{t - z} f). \tag{B.14}$$

Ya que (B.14) se satisface para todo f, g, se sigue que

$$S(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Sigma(t)}{t - z}$$

donde $\Sigma(t)$ es Hermitiana. Sabemos que $\sigma(t, h)$ es monótona no decreciente para todo h ademas sabemos que

$$\sigma(t, h) = (h, \Sigma(t) h)$$

es monótona no decreciente, entonces $\Sigma(t)$ es monótona no decreciente y resta demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Sigma(t) < \infty$$

notemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(t, h) < \infty$$

implica que

$$(h, \int_{-\infty}^{\infty} d\Sigma(t) h) < \infty$$

para todo $h \in \mathbb{C}^q$. Además, de

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(t) = s_0$$

para $f = e_1$ y $g = e_1$, tenemos

$$(g, \int_{-\infty}^{\infty} d\Sigma(t) f) = s_0 = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(t) < \infty.$$

■

Observación B.1. *Sea $S \in \mathcal{R}_q[a, b]$. Usando la parte (a) del Teorema 1.2 se puede verificar que $F := S_{|\Pi_+}$ pertenece a $\mathcal{R}_{0,q}$. En particular, de (B.7) se sigue inmediatamente*

$$\lim_{y \to \infty} S(iy) = 0.$$

Observación B.2. *Sea $S \in \mathcal{R}_q[a, b]$. De la Observación B.1 se puede ver fácilmente que*

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\tilde{S}_1(iy)}{y} = 0 \quad y \quad \lim_{y \to +\infty} \frac{\tilde{S}_2(iy)}{y} = 0$$

Teorema B.10. *Sea la función matricial* $S(z) \in \mathcal{R}_{0,q}$*, es decir,* $S(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z}$*. Supongamos que*
$$\frac{\sigma(x+0)+\sigma(x-0)}{2} = \sigma(x)$$
$\sigma(0) = 0$*. Entonces*
$$\sigma(b) - \sigma(a) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi}\int_a^b \mathfrak{Im}\, S(x+i\epsilon)dx \tag{B.15}$$

Demostración. Multiplicando el lado derecho de (B.15) por $(g, *f)$
$$(g, \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^b \mathfrak{Im}\, S(x+i\varepsilon)dxf) = (g, \Psi f).$$
Similarmente como en la demostración del Teorema B.9
$$\begin{aligned}(g,\Psi f) = \frac{1}{4}&((f+g),\Psi(f+g)) - ((f-g),\Psi(f-g))\\ &+ i((f+ig),\Psi(f+ig)) - i((f-ig),\Psi(f-ig)).\end{aligned}$$
Observemos que
$$\begin{aligned}((f+g),\Psi(f+g)) &= (h,\Psi h)\\ &= h^*\left(\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^b \mathfrak{Im}\, S(x+i\varepsilon)dx\right)h\\ &= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^b h^*\mathfrak{Im}\, S(x+i\varepsilon)hdx\\ &= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^b \mathfrak{Im}\, \omega(h, x+i\varepsilon)hdx\\ &= \hat{\sigma}(h,b) - \hat{\sigma}(h,a)\end{aligned}$$
donde hemos usado la transformada inversa de Stieltjes en forma escalar (B.4) y además destacamos que la notación es adecuada ya que
$$h^*(\mathfrak{Re}\, S + i\mathfrak{Im}\, S)h = h^*\mathfrak{Re}\, Sh + ih^*\mathfrak{Im}\, Sh$$
y si
$$\omega(h) = \mathfrak{Re}\,\omega(h) + i\mathfrak{Im}\,\omega(h)$$
entonces
$$h^*(\mathfrak{Re}\, S + i\mathfrak{Im}\, S)h = \omega(h)$$
En esta igualdad, vamos a pasar a el límite $\varepsilon \to 0^+$ entonces tenemos
$$\begin{aligned}(g, \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^b \mathfrak{Im}\, S(x+i\varepsilon)dxf) &= \frac{1}{4}[\hat{\sigma}(b,f+g) - \hat{\sigma}(a,f+g) - \hat{\sigma}(b,f-g) + \hat{\sigma}(a,f-g)\\ &\quad + i\hat{\sigma}(b,f+ig) - i\hat{\sigma}(a,f+ig) - i\hat{\sigma}(b,f-ig) + i\hat{\sigma}(a,f-ig)]\\ &= \frac{1}{4}[((f+g),\Sigma(b)(f+g)) - ((f+g),\Sigma(a)(f+g))\\ &\quad - ((f-g),\Sigma(b)(f-g)) + ((f-g),\Sigma(a)(f-g))\\ &\quad + i((f+ig),\Sigma(b)(f+ig)) - i((f+ig),\Sigma(a)(f+ig))\\ &\quad - i((f-ig),\Sigma(b)(f-ig)) + i((f-ig),\Sigma(a)(f-ig))]\\ &= (g,\Sigma(b)f) - (g,\Sigma(a)f) = (g(\Sigma(b)-\Sigma(a))f)\end{aligned}$$
donde hemos usado (A.7). Ya que por ser f y g arbitrarios de $\mathbb{C}^q$ entonces (B.15) se satisface. ■

Transformada inversa generalizada de Stieltjes

Teorema B.11. *Sea* $S(z) \in \mathcal{R}_{0,q}$*, es decir,* $S(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{t-z}$ *y sean* $\varphi(z)$*,* $\psi(z)$ *funciones matriciales holomorfas en* $\mathbb{C}$ *tal que* $\psi^*(x) = \psi(x)$*,* $x \in \mathbb{R}$*. Supongamos que las dimensiones de* φ *y* ψ *son tales* *que se define la función matricial*

$$F(z) = \psi(z) + \varphi(z)S(z)\varphi^*(z) \tag{B.16}$$

Sean t_0, t_1 *puntos de continuidad de* $\sigma(t)$ *Entonces*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{Im}\, F(x+i\varepsilon)dx = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x)d\sigma(x)\varphi^*(x) \tag{B.17}$$

Demostración. Consideremos el caso escalar. Sean A, B puntos de continuidad de $\sigma(t)$ $-\infty < A < B < \infty$ entonces

$$\begin{aligned} F(z) &= \psi(z) + \varphi\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z}\varphi^*(z) \\ &= \psi(z) + \varphi(z)\left(\int_{-\infty}^{A} + \int_{B}^{\infty}\right)\frac{d\sigma(t)}{t-z}\varphi^*(z) + \varphi(z)\int_A^B \frac{d\sigma(t)}{t-z}\varphi^*(z) \\ &= \chi(z) + \varphi(z)\int_A^B \frac{d\sigma(t)}{t-z}\varphi^*(z) \end{aligned}$$

donde

$$\chi(z) = \psi(z) + \varphi(z)\left(\int_{-\infty}^{A} + \int_{B}^{\infty}\right)\frac{d\sigma(t)}{t-z}\varphi^*(z)$$

entonces

$$\begin{aligned} F(z) = \chi(z) &+ \int_A^B \frac{\varphi(z)d\sigma(t)\varphi^*(z) - \varphi(t)d\sigma(t)\varphi^*(t)}{t-z} \\ &+ \int_A^B \frac{\varphi(t)d\sigma(t)\varphi^*(t)}{t-z} \\ = \theta(z) &+ \int_A^B \frac{\varphi(t)d\sigma(t)\varphi^*(t)}{t-z} \end{aligned}$$

donde

$$\theta(z) = \chi(z) + \int_A^B \frac{\varphi(z)d\sigma(t)\varphi^*(z) - \varphi(t)d\sigma(t)\varphi^*(t)}{t-z}$$

entonces

$$F(z) = \theta(z) + \int_A^B \frac{d\rho(t)}{t-z}$$

donde

$$\rho(t) = \int_A^{t-0} |\varphi(s)|^2 d\sigma(s)$$

$\theta(z)$ es continua en una vecindad de A, B además con $A < a < b < B$, en $[a,b]$ $\theta(z)$ es real. Entonces $\theta(z)$ es uniformemente continua en un rectángulo cerrado ubicado en $\mathbb{C}^+$ con base en a, b entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi}\int_a^b \mathfrak{Im}\, F(x+i\varepsilon)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi}\int_a^b \theta(x+i\varepsilon)dx + \frac{1}{\pi}\int_a^b \mathfrak{Im}\, Q(x+i\varepsilon)dx$$

donde $Q(z) = \int_A^B \frac{d\rho(t)}{t-z}$ luego

$$\rho(b) - \rho(a) = \int_a^b \varphi(t)d\sigma(t)\varphi^*(t)$$

para funciones escalares. Utilizando el método de la polarización se demuestra el caso matricial. ■

Bibliografía

[Ak] Akhiezer N.I.: *The Classical Moment Problem.* Oliver and Boyd, London, 1965.

[AKr] Akhiezer N.I., Krein M.G.: *Some Questions in the Theory of Moments.* Gos.Nauchn.-Tehn. Izd-vo. Ukr., Kharkov 1938; Englische Übersetzung : Translations of Mathematical Monographs, Vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1962.

[Al] Albert A.: *Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses.* SIAM J. App. Math. 17 (1969), 434–440.

[At] Atkinson F.V.: *Discrete and continuous boundary problems.* Academic Press, New York , London, 1964.

[B] de Bruijn N.G.: *Asymptotic methods in analysis.* North Holland Publishing, 1961.

[BB] Blanchard P., Brüning E.: *Mathematical Methods in Physics.* Distributions, Hilbert space operators, and variational methods. Birkhäuser Boston 2003.

[BCR] Berg C., Christensen J.P.R., Ressel P.: *Harmonic Analysis on Semigroups.* Springer-Verlag, New York 1984.

[Br] Brodsky M.C.: *Treugolnie i ghordanobi predstavlenya lineinih operatov.* Nayka , Moskva, 1969.

[BS] Bisgaard T.M., Sasvári Z.: *Characteristic Functions and Moment Sequences- Positive Definiteness in Probability.* Nova Science Publishers, Huntington, NY 2001.

[CB] Carter M., van Brunt B.: *The Lebesgue-Stieltjes Integral.* A Practical Introduction, 2000.

[CDFK] Choque Rivero A.E., Dyukarev Y.M., Fritzsche B. and Kirstein B.: *A Truncated Matricial Moment Problem on a Finite Interval.* Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland 2006.

[CR] Dyukarev, Yu. M., Choque Rivero, A. E.: *The power moment problem on a compact interval*, Mathematical Notes 69, no.1-2, (2001), 175-187.

[CRi] Choque Rivero A.E.: *From the Potapov to the Krein-Nudelman representation of the resolvent matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem.* Sociedad Matemática Mexicana 2015.

[D] Dyukarev Yu. M.: *Integral representations of a pair of nonnegative operators and interpolations problems on the Stieltjes class.* Operator Theory: Advances and Applications. Vol. **95** (1997), 165-184.

[DFK] Dubovoj V.K., Fritzsche B., Kirstein B.: *Matricial Version of the Classical Schur Problem.* Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 129, B.G. Teubner, Stuttgart-Leipzig 1992.

[DK] Dyukarev Yu. M. and V.E. Katsnelson: *Multiplicative and additive classes of Stiltjes analytic matrix-valued functions, and interpolation problems associated with them.1* (in Russian). Teor. Funkt., Funktsional. Anal. i Prilozhen. (Kharkov), Vyp. **36** (1981), 13-27.

[DS] Dunford N., Schwartz J.T.: *Linear Operators. Part II.*, Spectral Theory, Wiley, New York 1963.

[Du] Durán A.J.: *A survey on orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations.* Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla, P.O. Box 1160, E-41080 Sevilla, Spain. 2003-2004.

[Dym] Dym H.: *On Hermitian block Hankel matrices, matrix polynomials, the Hamburger moment problem, interpolation and maximum entropy.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1989.

[EP] Efimov A.V., Potapov V.P.: *J–expansive matrix-valued functions and their role in the analytic theory of electrical circuits* (Russian). Uspekhi Mat. Nauk 28 (1973), No. 1, 65–130; English translation: Russian Math. Surveys 28 (1973), No. 1, 69–140.

[F] Folland G.B.: *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications.* Second Edition Pure and applied mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts 1999.

[Fr] Freud G.: *Orthogonale Polynome.* Math. Reihe 33, Birkhäuser Verlag, Basel l969.

[G] Geronimus J.L.: *Orthogonal Polynomials* (en Ruso), Fizmatgiz, Moskau 1958. Englische Übersetzung: Consultants Bureau, New York 1961.

[Gi] Giorgio G.: *Various Proofs of the Sylvester Criterion for Quadratic Forms.* Vol. 9. Journal of Mathematics Research, 2017.

[Gm] Grünbaum F.A.: *Matrix valued Jacobi polynomials.* Department of Mathematics, University of California, Berkeley, CA 94720, USA, 2003

[Gr] Griffiths D.J.: *Introduction to Quantum Mechanics.* Pearson Prentice Hall. Pearson Education, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458, 2005.

[GS] Grenander U., Szegö G.: *Toeplitz Forms and their Applications.* Univ. of California Press, Berkeley, 1958.

[H] Hwang J.S.: *On the Schwarz Reflection Principle.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 272, no. 2, 1982, pp. 711–719.

[Ham] Hamburger H.: *Über eine Erweitung des Stieltjesschen Momentenproblems.* Math. Ann., Teil I: 81 (1920), 235-319; Teil II: 82 (1921), 120-164; Teil III: 82 (1921), 168-187.

[He] Hellinger E.: *Zur Stieltjesschen Kettenbruchtheorie.* Math. Ann. 86 (1922), 18-29.

[HJ] Horn R.A., Johnson C.R.: *Matrix Analysis.* Cambridge University Press 1990.

[IS] Ivanchenko T.S. and L.A. Sahnovich: *Operator-theoretic approach to the V.P. Potapov scheme of investigation of interpolation problem* (in Russian). Ukr., Math., Journal, 39:5 (1987), 573-578.

[K] Kovalishina I.V.: *Analytic theory of a class of interpolation problems* (in Russian). Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **47** (1983), 455-497. Engl. transl. in: Math. USSR Izv. **22**(1983) ,pp. 419-463.

[KKY] Katsnelson V.E., Kheifets A.Ya. and P.M. Yuditskii: *The abstract interpolation problem and extension theory of isometric operators* (in Russian). In: Operator in Spaces of Functions and Problems in Function Theory: Collected scientific papers, Kiev, Naukova Dumka, 1987, 83-96.

[KN] Krein M.G. and Nudelman A.A.: *The Markov moment problem and extremal problems* (in Russian). "Nauka", Moscow, 1973; Engl. transl.in: Translation Math. Monographs, Vol. 50. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1977.

[Koo] Koosis P.L.: *The Logarithmic Integral I.* Cambridge studies in advanced Mathematics, Vol. 12, Cambridge University Press, Cambridge 1988.

[KP] Kovalishina I.V. and V.P. Potapov: *An indefinite metric in the Nevanlinna-Pick problem* (in Russian). Akad. Nauk Armyan. SSR Dokl. **59** (1974), 17-22. Engl. transl. in: Collected Papers of V.P. Potapov. Sapporo. Japan: Private translation and edition by T. Ando 1982, pp. 67-99.

[KSh] Karlin S., Shapley L.S.: *Geometry of moment spaces.* Memoirs of the Amer. Math. Soc., Providence R.I. 1953.

[KSt] Karlin S., Studden W.J.: *Tchebycheff systems: with applications in analysis and statistics*, Interscience Publishers, New-London-Sydney 1966.

[Mah] Mahmoud M.S.: *Advanced Control Design with Application to Electromechanical Systems.* King Fahd University of Petroleum and Minerals, Systems Engineering Department, Dhahran, Saudi Arabia, 2018.

[Mar] Marco T.: *Matrix product and rank.* Lectures on matrix algebra 2017.

[MH] Marsden J.E., Hoffman M.J.: *Basic complex analysis.* W.H. Freeman 1999.

[N] Nevanlinna O.: *Meromorphic functions and linear algebra.* American Mathematical Society 2003.

[NS] Nikishin E.M., Sorokin V.N.: *Rational Approximation and Orthogonality.* (in Russisch). Moskva, Nauka, 1988.

[Nu] Nudelman A.A.: *On a generalization of classical interpolation problems* (in Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR, 256:4 (1981), 290-293. Engl. transl. in: Sov. Math. Dokl., 23 (1981), pp. 125-128.

[P] Perron O.: *Die Lehre von den Kettenbrüchen.* Erste Auflage, Teubner, Leipzig 1913.

[Pos] Possé K.A.: *Sur quelques applications des fractions continues algébriques*, St. Peterburg, 1886, 1-175.

[R] Rudin W.: *Principios de Análisis Matemático.* Traducción Talleres Estudiantiles, Ciencias UNAM. 3a Edición 1980.

[S] Stieltjes T.J.: *Recherches sur les fractions continues* Ann. Fac. Sci. Toulouse 8, 1894, 1-122; Ann. Fac. Sci. Toulouse 9, 1895, 5-47; Versión en inglés contenida en T.J. Stieltjes, Collected Papers, G. van Dijk (Ed.), Vol. II, Springer, Berlin, 1993.

[ST] Shohat J., Tamarkin J.D.: *The Problem of Moments.* Math. Surveys, New York: Amer. Math. Soc. 1943.

[V] Voyevodin V.V.: *Linear Algebra.* Mir Publishers 2 Pervy Rizhsky Pereulok 1-110, GSP, Moscow, 129820 USSR 1980.

[Wa] Wall H.: *Analytic Theory of Continued Fractions.* Chelsea, Bronx N.Y. 1946.

[Wi] Widder D.: *The Laplace Transform.* Princeton University Press, 1946.

[Win] Wintner A.: *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen.* S. Hirzel, Leipzig 1929.