



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE  
HIDALGO

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS “MAT. LUIS  
MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

**Sincronización entre dos cadenas de  
circuitos de Chua: un enfoque  
entrópico**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas**

PRESENTA:

**Daniel Corona Marín**

ASESOR:

**MC. Gabriel Arroyo Correa**



Morelia, Michoacán, México.  
Noviembre 2021

*A mi madre y a mi hermano, al ser el centro principal  
de apoyo e inspiración en la carrera y en la vida.  
A mi maestra de preparatoria, la Dra. Maribel Ríos  
Cruz (Q.E.P.D) al haber compartido y contagiado el  
amor a la física y a la ciencia.*

# Agradecimientos

A mi mamá, María Guadalupe Marín Calzada, y a mi hermano, Diego Corona Marín, siendo la primeras y mayores figuras de admiración y trabajo duro, no habrá palabras suficientes para mostrarles mi agradecimiento infinito hacia su apoyo incondicional en toda mi vida, todo este proceso, los logros que tengo y tendré serán en gran medida en consecuencia al soporte y cariño que tengo de ustedes y hacia ustedes. Siento una enorme vendición ser tu hijo y tu hermano. Muchas Gracias.

A mi tía Martha por ser un gran soporte a lo largo de toda mi vida, por siempre estar al pendiente de mi, ayudándome en todo momento, en buenos y malos momentos. Por todo lo que implica ser una gran figura de admiración y respeto, estaré siempre agradecido.

A mi sobrina, Astrid Huante, y su familia por su apoyo mostrado hacia mis trabajos y mis decisiones, la pequeña admiración que siento por parte de mi sobrina me ha ayudado en la construcción de esta tesis. Les agradezco y hago presente mi afecto y mi apoyo incondicional hacia ustedes.

A mi familia en general, a mis tios, primos y sobrinos que siempre me apoyan en las desiciones, les agradezco y hago presente mi afecto hacia ustedes.

A mis amigos, Alex Romero, Luis García y Guillermo Tinoco, al regalarme su amistad, apoyo y estar siempre a mi lado a lo largo de estos cinco años en la universidad y en la vida. Estaré profundamente agradecido con ustedes por poderlos considerar mis amigos.

A la familia de mi amigo Alex, la familia Romero, por prestarnos enumerables veces su hogar en apoyo a nuestro estudio. Considero una fortuna poderlos considerar una segunda familia.

A mi maestra de preparatoria, la Dra. Maribel Rios Cruz (QEPD), por haber sido, no solo una gran maestra teniendo una gran pasión a la ciencia y a su enseñanza, sino una gran persona.

A mi asesor de tesis, el M.C. Gabriel Arroyo Correa, por su dedicación a la enseñanza siendo un gran profesor y asesor, por todo el apoyo brindado a lo largo de este proceso, con este trabajo y con el proceso de titulación.

# Resumen

El circuito de Chua es el sistema dinámico autónomo más simple que puede ser utilizado para estudiar la dinámica no lineal en circuitos eléctricos, debido a que manifiesta una amplia variedad de las características comunes a otros sistemas no lineales, tales como bifurcaciones, caos y sincronización. Un problema relevante en la dinámica no lineal de sistemas caóticos es la sincronización de caos entre sistemas caóticos. En la literatura se ha reportado un amplio estudio de la sincronización de caos entre sistemas caóticos. En esta tesis estaremos interesados en estudiar numéricamente el efecto de una doble perturbación magnética en la dinámica de la interacción entre dos cadenas idénticas formadas por un tercer elemento del tipo de Chua. Se usa un enfoque gráfico y un enfoque basado en entropía de imagen. Los resultados obtenidos muestran la existencia de tres escenarios posibles en la evolución del sistema. En el primer escenario, se mantiene la sincronización individual de una de las cadenas. En el segundo escenario, se mantiene una sincronización individual de las dos cadenas, pero no entre ellas. En el tercer caso no hay sincronización en las cadenas, ni entre ellas. A partir de los resultados alcanzados es posible identificar conexiones específicas para mantener el sistema en un estado de sincronización que puede ser aplicado en esquemas de encriptación de información. El trabajo presentado en esta tesis, hasta donde sabemos, no ha sido reportado en la literatura.

**Palabras clave:** Sistemas dinámicos, sincronización de caos, sistema de Chua, perturbación magnética, entropía de imagen.

# Abstract

The Chua's circuit is the simplest autonomous dynamical system that can be used to study non-linear dynamics in electric circuits, because it manifests a wide variety of features common to other non-linear systems, such as bifurcations, chaos and synchronization. A relevant problem in the non-linear dynamics of chaotic systems is the synchronization of chaos between identical and non-identical systems. In the literature, an extensive study of the synchronization of chaos between identical systems has been reported. In this work we will be interested in numerically studying the effect of a double magnetic perturbation in the dynamics of the interaction between two chains formed by three elements of the Chua type, each one, coupled by a Chua element. A graphical approach and an entropy-image based approach are used. The results obtained show the existence of three possible scenarios in the evolution of the system. In the first scenario, the individual synchronization of one chain is maintained. In the second scenario, the individual synchronization of each chain is maintained but not between them. In the third scenario, there's no synchronization in in any chain and between them neither. From the results achieved it is possible to identify specific connections to keep the system in a state of synchronization that can be applied in information encryption schemes. The work presented in this thesis, as far as we know, has not been reported in the literature.

**Key words:** Dynamical systems, chaos synchronization, Chua's circuit, magnetic perturbation, image entropy.

# CONTENIDO

---

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. El sistema de Chua . . . . .	2
1.2. Perturbación magnética en el circuito de Chua . . . . .	9
1.3. Panoramas e ideas generales de control y la sincronización del caos . . .	11
<b>2. Sincronización del Caos</b>	<b>14</b>
2.1. Conceptos de sincronización de caos . . . . .	14
2.2. Sincronización de sistemas idénticos . . . . .	16
2.2.1. Método de Pecora Carroll . . . . .	16
2.2.2. Método de descomposición activa-pasiva (APD) . . . . .	17
2.2.3. Sincronización completa mediante acoplamiento bidireccional . .	18
2.2.4. La estabilidad del movimiento sincronizado . . . . .	18
2.3. Sincronización del caos entre dos circuitos de Chua . . . . .	20
<b>3. Entropía de Shannon y Entropía de Imagen</b>	<b>23</b>
3.1. Elementos básicos de la teoría de Shannon . . . . .	23
3.2. Entropía de Shannon en el espacio de configuración . . . . .	27

---

3.2.1. Caracterización entrópica del sistema de Chua . . . . .	28
3.3. Entropía de imagen . . . . .	29
3.3.1. Compresión de imágenes . . . . .	29
3.3.2. Cálculo de la entropía de imagen . . . . .	31
<b>4. El Sistema Analizado</b>	<b>33</b>
4.1. Doble cadena de circuitos de Chua . . . . .	33
4.2. Sistema de ecuaciones para el sistema analizado . . . . .	34
<b>5. Resultados</b>	<b>38</b>
5.1. Análisis gráfico . . . . .	39
5.1.1. Resultados para la perturbación magnética en un circuito . . . . .	39
5.1.2. Resultados para la doble perturbación magnética . . . . .	44
5.2. Análisis entrópico . . . . .	56
5.2.1. Doble perturbación en los circuitos S1 y S2 . . . . .	56
5.2.2. Doble perturbación en los circuitos S1 y S3 . . . . .	57
5.2.3. Doble perturbación en los circuitos S2 y S3 . . . . .	62
<b>6. Conclusiones y Comentarios Finales</b>	<b>66</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>68</b>
A.1. Ecuaciones de Chua . . . . .	68
A.2. Método de Runge-Kutta de cuarto orden . . . . .	72
<b>REFERENCIAS</b>	<b>87</b>

---

# Capítulo 1

## Introducción

---

El estudio de las propiedades de los sistemas dinámicos caóticos es de particular importancia por sus aplicaciones en diversas áreas del conocimiento básico y tecnológico; en el caso particular de circuitos eléctricos caóticos por su importancia en la transmisión y encriptación de información. Un ejemplo clásico es el sistema de Chua que debido a su robustez, bajo costo en su construcción y gran variedad de regímenes dinámicos que presenta. Este sistema es de los pocos en el que el comportamiento caótico tiene comprobación teórica, experimental y numérica; por ser simple de construir, lo que permite manipular fácilmente algunos de sus parámetros y mostrar una amplia gama de fenómenos relacionados con el comportamiento caótico. A medida que ha aumentado el interés científico hacia el estudio de los fenómenos caóticos, el circuito de Chua ha ido obteniendo una gran importancia como objeto experimental, para analizar los más variados fenómenos, tales como: control y sincronización de caos, análisis de bifurcaciones y atractores, en aplicaciones como las comunicaciones seguras, biología, química, sonido, música, etc.

En este capítulo se presentan las características del circuito de Chua así como una descripción de las ideas generales de la sincronización entre sistemas caóticos.

## SECCIÓN 1.1

## El sistema de Chua

El circuito de Chua es el sistema autónomo no lineal más sencillo que se puede construir con elementos pasivos [Fortuna 2009]. Este circuito, Fig. 1.1(a), se caracteriza principalmente por dos aspectos: primero, es autónomo, es decir, no está alimentado por fuentes de corriente alterna, y segundo, está compuesto por dos partes: una parte que presenta un comportamiento típico de un oscilador amortiguado (dos condensadores, una resistencia y una bobina) y otra parte que constituye el único elemento no lineal denominado diodo de Chua. Este elemento, causante de la no linealidad actúa como la fuente de energía de todo el circuito, se ocupa de retroalimentarlo y lo mantiene oscilando. Como puede apreciarse en la Fig. 1.1(a), la parte lineal de este circuito se muestra en la parte azul, que consta de la inductancia  $L$ , los condensadores  $C_1$  y  $C_2$ , y la resistencias  $R$ . La parte no lineal (diodo de Chua) se muestra en la parte roja; está compuesto por dos amplificadores operacionales y seis resistencias  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$  y  $R_6$  [Kennedy 1992]. Para fines prácticos es una resistencia negativa, cuya gráfica característica tensión-corriente está dada por la función de tres tramos lineales de la Fig. 1.1(b)

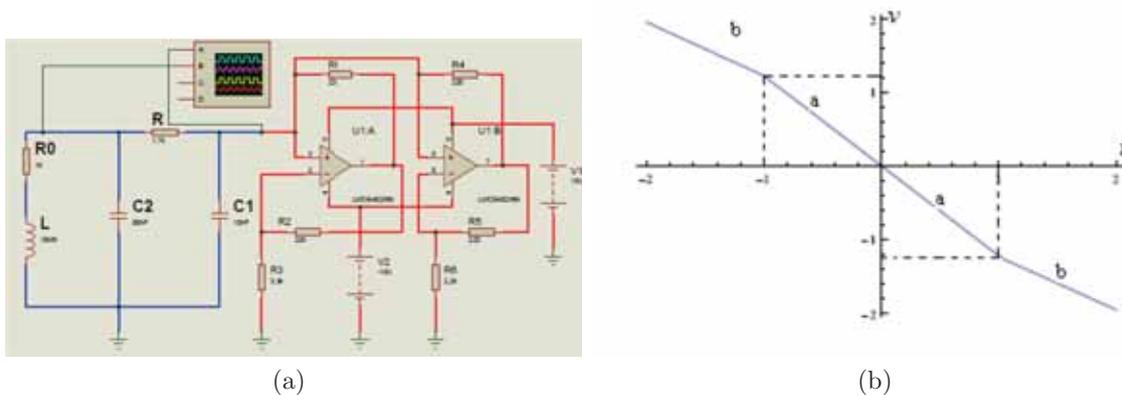


Figura 1.1: a) Circuito de Chua, la parte azul representa la parte lineal y el circuito rojo es la resistencia no lineal (diodo de Chua), b) Señal tensión( $v$ )-corriente( $i$ ) producida por el diodo de Chua.

El sistema de ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del circuito de Chua son:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha(y - h(x)), \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z, \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y + cz,\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde  $h(x)$  está dada por la ecuación:

$$h(x) = x + bx + \frac{1}{2}(a - b)(|x + 1| - |x - 1|).\tag{1.2}$$

Además de que cada variable esta dada por  $x = \frac{V_1}{B}$ ,  $y = \frac{V_2}{B}$ ,  $z = I\frac{R}{B}$  (ver Apéndice A.1).

Teniendo el sistema de ecuaciones (1.1) buscamos los puntos estables para el circuito, esto es encontrar los puntos ( $p_e \equiv (x_e, y_e, z_e)$ ) tales que:

$$\begin{pmatrix} f_1(p_e) \\ f_2(p_e) \\ f_3(p_e) \end{pmatrix} = 0.\tag{1.3}$$

Para esto es necesario resolver el sistema (1.1) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\alpha(y_e - h(x_e)) &= 0, \\ x_e - y_e + z_e &= 0, \\ -\beta y_e - cz_e &= 0.\end{aligned}\tag{1.4}$$

El sistema de ecuaciones (1.1) presenta tres puntos de equilibrio que verifican:

$$\begin{cases} x_e = k(\beta + c), & y_e = kc, & z = -k\beta & x_e \geq 1, \\ x_e = 0, & y_e = 0, & z_e = 0 & |x_e| \leq 1, \\ x_e = -k(\beta + c), & y_e = -kc, & z = k\beta & x_e \leq -1. \end{cases}\tag{1.5}$$

donde  $k = \frac{a-b}{\beta+b(\beta+c)}$ .

Con esto tenemos que para este circuito hay tres puntos de equilibrio que son los

siguientes:

$$\begin{aligned} P_+ &= [k(\beta + c), kc, -k\beta], \\ P_0 &= [0, 0, 0], \\ P_- &= [-k(\beta + c), -kc, k\beta]. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Para investigar la estabilidad de los puntos de equilibrio tenemos que calcular los valores característicos. La evolución dinámica se expresa (linealizada) como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x - x_e \\ y - y_e \\ z - z_e \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

donde  $M$  es la matriz Jacobiana para las funciones  $f_1, f_2$  y  $f_3$  (evaluada en los puntos estables  $p_e$ ), dada por:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \frac{df_1}{dx_3} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \frac{df_2}{dx_3} \\ \frac{df_3}{dx_1} & \frac{df_3}{dx_2} & \frac{df_3}{dx_3} \end{pmatrix}_{p_e} = \begin{pmatrix} -\alpha s & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -c \end{pmatrix}_{p_e} = M, \tag{1.8}$$

donde  $s$  está dado por:

$$s = \begin{cases} (a + 1) & \text{para } -1 \leq x \leq 1, \\ (b + 1) & \text{para } x \geq 1, \\ (b + 1) & \text{para } x \leq -1. \end{cases} \tag{1.9}$$

Si hacemos el siguiente cambio:

$$\varphi = \begin{pmatrix} x - x_e \\ y - y_e \\ z - z_e \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

La Ec. (1.7) nos queda como:

$$\dot{\varphi} = M \cdot \varphi, \quad (1.11)$$

cuya solución es:

$$\varphi = e^{At}, \quad (1.12)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

y los  $\lambda$ 's son los valores característicos de  $M$ . Para obtener los valores propios, se requiere resolver la ecuación  $|M - \lambda I| = 0$ , donde  $I$  es la matriz unitaria de  $3 \times 3$ . El cálculo se realizó en Fortran y se fijaron condiciones iniciales<sup>1</sup> obteniéndose los siguientes valores para  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 3.98651, \\ \lambda_2 &= -1.06468 + 3.14929i, \\ \lambda_3 &= -1.06468 - 3.14929i. \end{aligned} \quad (1.14)$$

De acuerdo a la clasificación para las  $\lambda$  tenemos que:

- $\lambda_1$  es un punto inestable (repulsor)
- $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  son puntos de equilibrio estables (atractor espiral)

En la Fig. 1.2 podemos ver como el circuito de Chua tiende a la región caótica para los valores particulares de  $\alpha, \beta, c$ .

---

<sup>1</sup>Debemos tener claro que el sistema no lineal de Chua presenta cambios según se varíe el conjunto de parámetros  $(\alpha, \beta, c)$  y las condiciones iniciales. Esta vez los valores iniciales fueron  $c = 0, a = -\frac{8}{7}, b = -\frac{5}{7}, x_0 = -0.65, y_0 = 0$  y  $z_0 = 0$

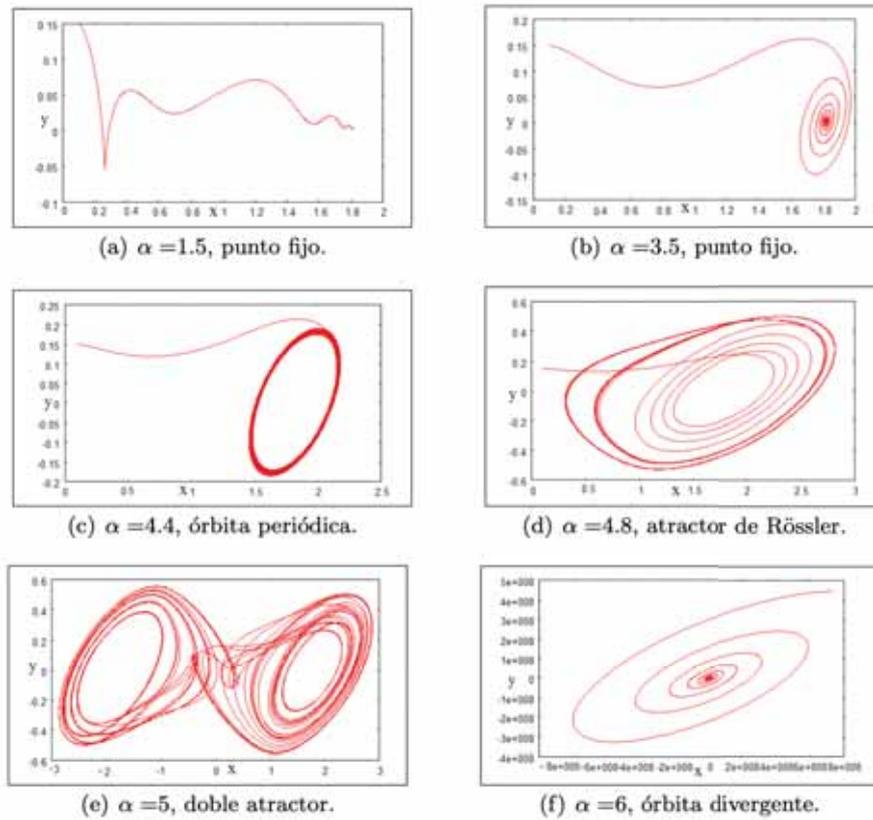


Figura 1.2: Evolución de la dinámica en el circuito de Chua, variando únicamente  $\alpha \in [1.5, 6]$ . En todas las gráficas se supone que  $\beta = 7, c = 0.01$  y condiciones iniciales  $(0.1, 0.15, 0.01)$ .

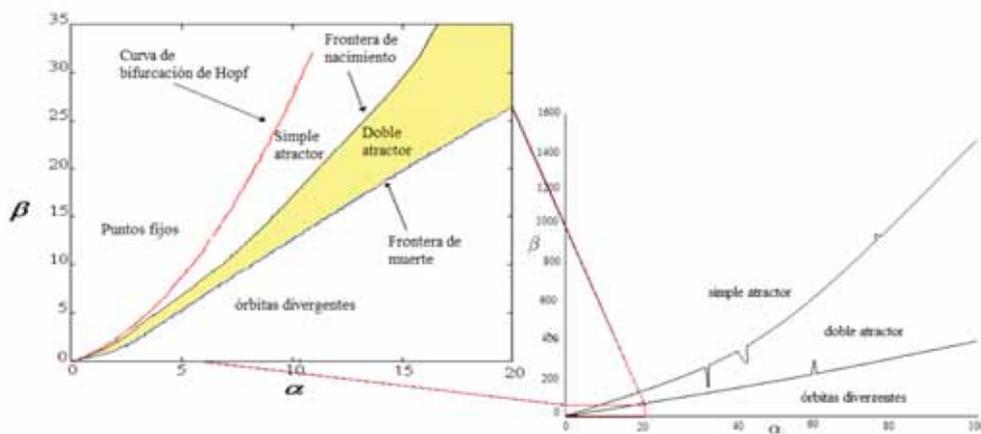


Figura 1.3: Diagrama de bifurcaciones globales en el plano  $\alpha, \beta$ .

En el circuito de Chua presenta una rica secuencia de bifurcaciones como se ve en la Fig. 1.3 [Anishchenko 1994]. En esta figura se ilustran los diferentes comportamientos dinámicos que pueden detectarse en el circuito de Chua, es decir, las regiones del simple y doble atractor,  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros que dependen de los valores de los componentes del circuito de Chua (ver Apéndice A.1). También el circuito presenta varias rutas de caos.

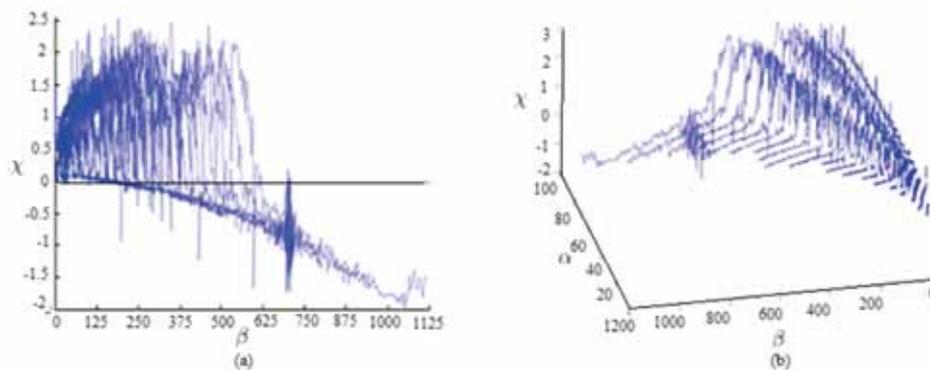


Figura 1.4: Espectros de Lyapunov para  $c$  mínimo, la región caótica es amplia. (a) Exponente de Lyapunov vs  $\beta$ . (b) Exponente de Lyapunov vs  $\beta$  y  $\alpha$ . El caos se encuentra cuando  $\chi > 0$ , tomada de la ref. [Conde & Ramirez 2007] al igual que la Fig. 1.5.

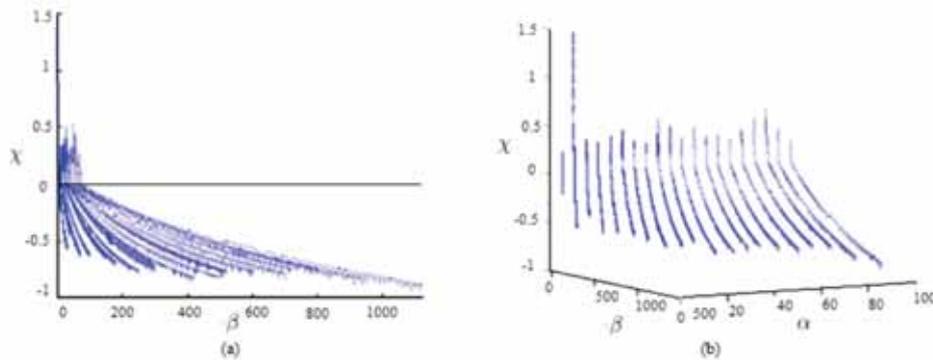


Figura 1.5: Espectros de Lyapunov para  $c$  máximo. (a) Exponente de Lyapunov vs  $\beta$ . (b) Exponente de Lyapunov vs  $\beta$  y  $\alpha$ . La región caótica es angosta.

En las Figs. 1.4 y 1.5 se muestran los espectros de los exponentes de Lyapunov para los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  con  $c$ 's mínimas y máximas y para determinarlos primero se fija un valor de  $\alpha$  y luego se busca el rango de  $\beta$  para un  $c$  mínimo y lo mismo se hace para un  $c$  máximo, con la única condición de permanecer en la región del doble atractor

(ver tabla 1.1). Por ejemplo, para  $\alpha = 5$ , la  $c$  mínima es 0.01 y  $\beta = (5.8, 7)$  y la  $c$  máxima es 0.3 con  $\beta = (4.4, 4.8)$ . En este caso, para  $c$  mínima se toma un valor de  $\beta$  por debajo de 5.8, y para  $c$  máxima un valor por debajo de su respectivo  $\beta$  hace que se entre en la región de órbitas divergentes. Valores arriba del intervalo de  $\beta$  con sus respectivas  $c$ 's mínima y máxima, la dinámica estará en la región de órbitas periódicas (simple atractor, órbitas de periodo bajo y ciclo límite con tendencia a un punto fijo).

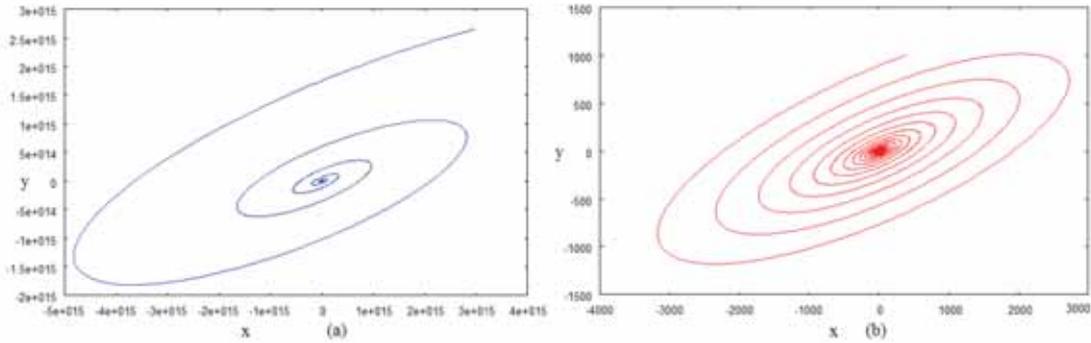


Figura 1.6: (a) Plano fase para  $c$  mínima con  $\beta = 5.7$  (b) con  $c$  máxima y  $\beta = 4.3$ . Ambas con  $\alpha = 5$  y condiciones iniciales de  $(0.1, 0.14, 0.01)$ .

En las Figs. 1.6 y 1.7 se muestra el comportamiento en el plano fase para  $c$  mínimo, el espectro informa que existan regiones caóticas para todo valor de  $\alpha$  y una amplia región de  $\beta$ . Para este  $c$ , se tiene el espectro de Lyapunov con respecto a  $\beta$  (ver Fig. 1.4 (a)), en él se observa una región caótica para  $\beta \in [0, 725]$ , con ventanas periódicas en varios puntos, y el paso a la periodicidad<sup>2</sup> a partir de  $\beta = 727$ . Luego en la Fig. 1.4 (b) vemos que tiene una región caótica a partir de  $\alpha = 0$ , y lo mismo para  $\beta = 0$ .

$\alpha$	$c$	$\beta$
5	0.01	5.8-7
	0.3	4.4-4.8
10	0.01	13.7-18.6
	0.86	6.2-6.6
15	0.01	22.8-33.9
	1	10.1-12.1
20	0.01	33.4-52.3
	1.3	11.4-12.9

Tabla 1.1: Valores útiles para analizar el espectro de Lyapunov

<sup>2</sup>Si los exponentes de Lyapunov son positivos, las órbitas se separan y el sistema es caótico; si son negativos, las órbitas se juntan y el sistema no es caótico, es regular.

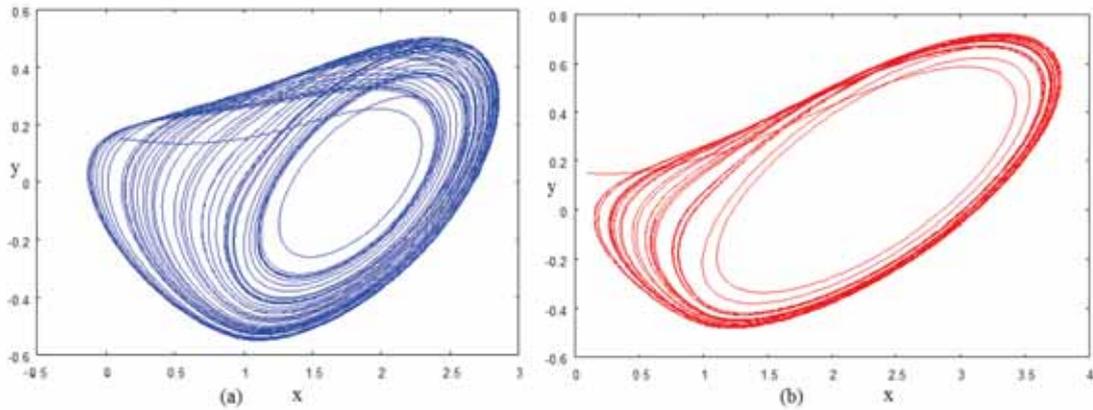


Figura 1.7: (a) Plano fase  $xy$  para  $c$  mínima con  $\beta = 7.1$  (b) con  $c$  máxima y  $\beta = 4.9$ . Ambas con  $\alpha = 5$  y condiciones iniciales de  $(0.1, 0.14, 0.01)$ .

Posteriormente, cuando  $\alpha = 30$ , comienzan a aparecer ventanas periódicas y a partir de  $\beta = 200$ , sucede lo mismo. En cambio, para  $c$  máximo, el espectro indica que las regiones caóticas se tienen para todo valor de  $\alpha$  pero con regiones muy angostas para  $\beta$  (Fig. 1.5 (a) y Tabla 1.1). Esto implica que cuando  $c$  va llegando a su valor máximo,  $\beta$  toma valores grandes, entonces la tendencia del sistema es hacia la periodicidad. Una vista global se observa en la Fig. 1.5 (b).

## SECCIÓN 1.2

### Perturbación magnética en el circuito de Chua

Una perturbación magnética se define como un ruido electromagnético, una señal no deseada o una modificación del propio medio de propagación [Telemecanique 1996].

Para el caso de las ecuaciones que describen la dinámica de circuito de Chua, Ecs. (1.1), se agrega el término de la perturbación magnética, dada por  $\gamma \cos(\omega t)$ , la ecuación de la variable  $z$ , quedando las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha(y - h(x)), \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z, \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y + cz + \gamma \cos(\omega t), \end{aligned} \tag{1.15}$$

donde  $h(x)$  esta dada por la Ec. (1.2). Esta perturbación se puede producir acercando un imán permanente o una bobina al elemento inductivo del circuito de Chua.

En la Ec. (1.15) los siguientes valores de  $\alpha, \beta, c, a$  y  $b$  permanecerán fijos en el resto de esta tesis:  $\alpha = 7, \beta = 10, c = 0, a = -0.28, b = 0.56$ .

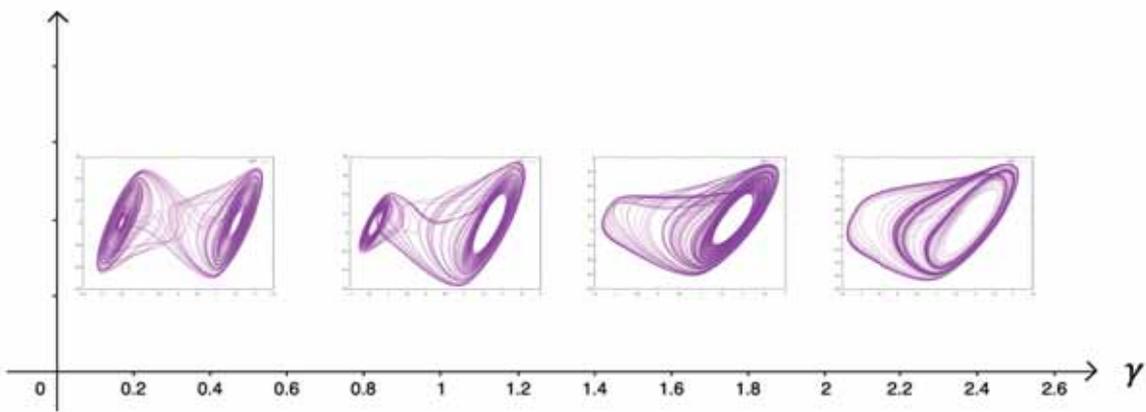


Figura 1.8: Diagrama de bifurcación en el circuito de Chua con perturbación magnética estática.

El efecto de la perturbación magnética en la Ec. (1.15) se muestra gráficamente en la Fig. 1.8, para un campo estático, y en la Fig. 1.9 para un campo dinámico.

Los gráficos en la Fig. 1.8 corresponden a los valores de amplitud 0.1, 1, 1.6 y 2.3. Como se puede apreciar cuanto más crece la amplitud, el doble atractor se va colapsando hacia un sólo atractor y hasta quedar en un estado cuasi-periódico, similar a los de la Fig. 1.7.

En la Fig. 1.9 se presentan los efectos de la perturbación magnética dinámica, a diferentes órdenes de magnitud en la frecuencia. En el eje vertical se señalan los diferentes valores considerados en la amplitud del campo.

Como podemos ver en la Fig. 1.9, la mayoría de los casos se presentan un doble atractor. Para cuando  $\omega = 0.01, \gamma = 1$ , se presenta una dinámica perturbada, conservando el

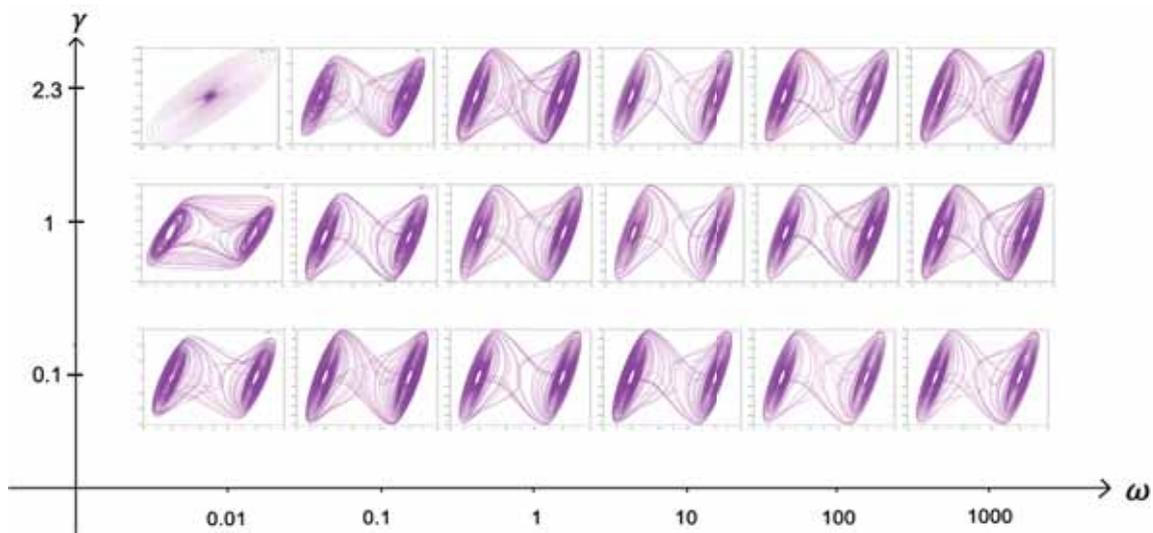


Figura 1.9: Diagrama de bifurcación en el circuito de Chua para una perturbación magnética dinámica.

doble atractor. El único caso en que cambia la dinámica totalmente es cuando  $\omega = 0.01$ ,  $\gamma = 2.3$  cuando el doble atractor en la dinámica pasa a ser una órbita divergente.

### SECCIÓN 1.3

## Panoramas e ideas generales de control y la sincronización del caos

En los últimos años, el problema del control y la sincronización de sistemas caóticos ha recibido gran atención entre los científicos en muchos campos. Como es bien sabido, el estudio del problema de la sincronización de sistemas no lineales ha sido muy importante desde el punto de vista de sus aplicaciones. En particular en aplicaciones a la biología, medicina, criptografía, transmisión segura de información, vía circuitos electrónicos, tal como el circuito de Chua [Fortuna 2009].

El control del caos se refiere a la manipulación del comportamiento de la dinámica caótica de algún sistema no lineal. En 1990, Ott, Grebogi y Yorke (OGY) [Ott 1990] publicaron un artículo de mucha importancia para esta discusión, que sirvió como base de estudio para eliminar el paradigma de que el caos es indeseable. Los autores mostraron que alguna órbita periódica inestable del sistema puede ser estabilizada con una pe-

queña energía de control de retroalimentación. Pyragas también propuso dos esquemas de control: control por una perturbación externa y el control de retardo [Pyragas 1992].

La frase “*controlar el caos*” puede sonar contradictoria por el hecho de que los sistemas caóticos son imposible de predecir para un tiempo grande, esto de todas formas surge en un sistema determinista, que es por lo tanto predecible en un corto plazo. En resumen el término evolución es determinista, predecible y controlable. El estudio de la sincronización entre sistemas acoplados es conocido desde el trabajo de Huygens en 1673 que trataba sobre péndulos interconectados. Posteriormente estos conceptos fueron aplicados a diversos sistemas, y fue a principios del siglo XX cuando se descubrió que también pueden observarse en sistemas eléctricos y electromecánicos [Blekhman, Landa & Rozenblum 1995]. Recientemente, a partir de los estudios de oscilaciones caóticas, se ha verificado la posibilidad de sincronización de sistemas que exhiben tal comportamiento. Han sido Pecora y Carroll [Pecorra & Carroll 1990] los que han mostrado experimentalmente que comportamientos caóticos aparentemente aleatorios e imprevisibles pueden fundirse en una única trayectoria; con estos resultados surgieron nuevas expectativas en torno a la teoría del caos.

Lo sorprendente del fenómeno de la sincronización entre dos sistemas caóticos aparece cuando se considera la dependencia de la dinámica caótica en las condiciones iniciales del sistema. Esta cualidad hace que la más mínima diferencia en la descripción del estado del sistema provoque cambios que hace distintos a sistemas complejos que originalmente eran tan parecidos. Pero, bajo el peso de una suficiente intensidad de acoplamiento, inicialmente los sistemas podrían evolucionar siguiendo una trayectoria común, dando lugar al fenómeno de sincronización. En el pasado el estudio de la sincronización se limitaba al análisis de sistemas con comportamiento periódico. A partir del estudio de comportamientos complejos (cuasi periódicos, caos) se han observado nuevos métodos de sincronización que pueden tomar diversas formas, lo que implica una diversidad de esquemas de sincronización [Boccaletti 2002]. Una vez definido el tipo de sincronización deseada, el problema central consiste en establecer la existencia y la estabilidad de las soluciones que corresponden a un movimiento sincronizado. Cabe destacar que la conexión escogida entre ambos sistemas es fundamental para que el fenómeno tenga lugar. El acoplamiento podía ser fundamentalmente de dos tipos: difusivo y conductivo.

Por regla general, los acoplamientos difusivos aparecen cuando los sistemas son conectados a través de un término de difusión que regula con su valor el estado de sincronización de ambos sistemas. El segundo tipo de acoplamiento, el conductivo, se lleva a cabo mediante el control de la dinámica de uno de los sistemas por alguna de sus variables que actúa como controlador. Este control puede ser global o local según que la introducción de la variable controladora reemplace en parte o totalmente a su variable análoga en el sistema receptor. Dentro de estos dos grupos existen diversas modalidades; así el acoplamiento podría ser unidireccional o bidireccional, global o parcial, simple o complejo. Pero hay que tener en cuenta que continuamente aparecen en la literatura científi-

ca nuevas modalidades de sincronización. Existen diferentes nociones o definiciones de sincronización, algunas de ellas son: sincronización idéntica, de fase, de retardo y generalizada [Boccaletti 2002]. Pero todas siguen los mismos requisitos básicos: separación del sistema global en subsistemas, un método de medición de propiedades específicas de las trayectorias de los subsistemas, y un método de comparación de estas propiedades, un criterio que permita evaluar la existencia de conformidad temporal. Esto se describe en más detalle en siguiente capítulo.

---

# Capítulo 2

## Sincronización del Caos

---

En este capítulo nos enfocaremos al problema de la sincronización entre sistemas caóticos idénticos, es decir, en donde se tienen dos o más circuitos caóticos que siguen la misma trayectoria caótica. En la primera sección presentaremos una idea general de la sincronización del caos e introduciremos una definición formal de sincronización. En la segunda sección describimos algunos métodos generales para la sincronización de sistemas caóticos idénticos. En la tercera y última sección presentamos el problema de sincronización, particularizado a dos circuitos de Chua.

### SECCIÓN 2.1

#### Conceptos de sincronización de caos

Uno de los rasgos más sobresalientes de los sistemas caóticos es su dependencia con las condiciones iniciales del sistema, es decir, que dos trayectorias que emergen de dos diferentes, pero muy cercanas, condiciones iniciales se separan exponencialmente en el transcurso del tiempo. Como resultado, los sistemas caóticos violan intrínsecamente la sincronización, porque siempre que dos sistemas idénticos comienzan de condiciones iniciales ligeramente distintas evolucionaría en el tiempo en una manera desincronizada (la diferencia en los estados del sistema crecería exponencialmente).

La idea que subyace en el problema de sincronización es que dos sistemas caóticos, que inicialmente evolucionan sobre atractores diferentes, al acoplarse de algún modo, finalmente siguen una trayectoria común [Boccaletti 2002]. De este modo, la sincronización entre dos sistemas se consigue cuando uno de los dos sistemas cambia su trayectoria a la seguida por el otro sistema o bien a una nueva trayectoria común a ambos sistemas.

La primera cosa a destacar es que hay una gran diferencia en los procesos a la consecución de estados sincronizados, dependiendo del tipo de acoplamiento. Sin embargo, en términos generales consideraremos los siguientes esquemas de sincronización [Fortuna 2009]:

- **Acoplamiento unidireccional:** En este método el sistema se subdivide en dos subsistemas, uno de ellos (maestro) evoluciona libremente y controla la evolución del otro (esclavo). Dicho de otro modo, cuando la evolución de uno de los dos sistemas no es alterada por el acoplamiento, la configuración resultante es un acoplamiento unidireccional. Este tipo de configuración es conocida como maestro-esclavo.
- **Acoplamiento bidireccional:** Aquí ambos subsistemas, tanto el maestro como esclavo están acoplados entre sí, o cuando los dos subsistemas son conectados de tal forma que sus trayectorias están mutuamente influenciadas por el comportamiento del otro.

Se dice que dos o más sistemas caóticos están sincronizados entre sí, transcurrido el tiempo, las oscilaciones coinciden en todo tiempo, a pesar de condiciones iniciales distintas o incluso de condiciones iniciales iguales. De manera general la sincronización caótica puede ser definida como una conformidad en el tiempo de dos o más procesos caóticos, caracterizada por una métrica entre algunas variables de estos procesos.

El fenómeno de sincronización puede ser visto como una manifestación de la tendencia a la auto-organización en sistemas complejos. A continuación una definición más formal:

**Definición:** Considere un sistema dado por  $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$  y otro por  $\dot{\vec{y}} = \vec{g}(\vec{y})$  donde  $\vec{f}$  y  $\vec{g}$  son campos vectoriales definidos en  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ , se dice que ambos sistemas se sincronizan si se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{x}(t) - \vec{y}(t)\| = 0, \vec{x}(0) \neq \vec{y}(0), \quad (2.1)$$

donde  $\vec{x}(t), \vec{y}(t)$  representan los estados de los sistemas y  $\vec{x}(0), \vec{y}(0)$  representan sus condiciones iniciales.

## SECCIÓN 2.2

## Sincronización de sistemas idénticos

En esta sección se discute acerca de la sincronización completa (CS); que fue el primer tipo de sincronización descubierto. Consiste en una perfecta unión de las trayectorias caóticas de dos sistemas conseguidos por medio de una señal de acoplamiento. Con el mecanismo CS se demuestra que dos sistemas caóticos son acoplados unidireccionalmente sólo si todos los exponentes de Lyapunov del subsistema a sincronizar son negativos.

## 2.2.1 Método de Pecora Carroll

En este método, del tipo unidireccional, visto en la sección 2.1, propuesto por Pecora y Carroll [Pecorra & Carroll 1990] la idea principal radica en usar una señal caótica para acoplar un sistema no lineal con otro, de modo que el comportamiento del sistema esclavo dependa del comportamiento del sistema maestro, mientras que el primero no se vea influenciado por el del segundo.

Consideremos un sistema caótico en el cual su evolución temporal está dada por la siguiente ecuación:

$$\dot{\vec{z}} = \vec{F}(\vec{z}). \quad (2.2)$$

Aquí  $\vec{z} \equiv z_1, z_2, \dots, z_n$  es un vector  $n$ -dimensional, con  $\vec{F}$  definido como campo vectorial  $\vec{F} = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . El esquema PC consiste en suponer que el sistema dinámico de la Ec. (2.2) puede ser dividido en tres subsistemas

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{u}} &= \vec{f}(\vec{u}, \vec{v}) \\ \dot{\vec{v}} &= \vec{g}(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned} \right\} \text{maestro}, \quad (2.3)$$

$$\dot{\vec{w}} = \vec{h}(\vec{u}, \vec{w}) \text{ } \left. \vphantom{\dot{\vec{w}} = \vec{h}(\vec{u}, \vec{w})}} \right\} \text{esclavo}.$$

donde  $\vec{u} \equiv \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ,  $\vec{v} \equiv \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ,  $\vec{w} \equiv \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$  y  $n = m + k + l$ . El primer subsistema de las Ecs. (2.3) define el sistema maestro, mientras que el segundo subsistema representa el sistema esclavo, en el cual la evolución es guiada por

la trayectoria del maestro por medio de una señal de control  $\vec{u}$ . En este escenario, la sincronización completa es definida como la igualdad entre las trayectorias del sistema esclavo  $\vec{w}$  y una réplica  $\vec{w}'$  de este  $\dot{\vec{w}}' = \vec{h}(\vec{u}, \vec{w}')$  para la misma señal caótica maestra ( $\vec{u}(t)$ ). La existencia de CS implica que el sistema esclavo es asintóticamente estable ( $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{e}(t) = 0$  siendo  $\vec{e}(t)$  el *error de sincronización* definido por  $\vec{e}(t) \equiv \|\vec{w} - \vec{w}'\|$ ). En otras palabras, el sistema esclavo olvida sus condiciones iniciales, aunque evolucione en un atractor caótico. Nótese que el requerimiento de estabilidad en el esquema PC sigue la definición dada por la Ec. (2.1).

### 2.2.2 Método de descomposición activa-pasiva (APD)

Este método nos proporciona un esquema maestro-esclavo mucho más general que el PC para la sincronización de sistemas caóticos idénticos. El método APD trata un sistema caótico autónomo y lo reescribe como uno no autónomo de la siguiente forma [Boccaletti 2002]:

$$\dot{x} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{s}(t)), \quad (2.4)$$

donde  $\vec{s}(t)$  es alguna señal de control  $\vec{s} = \vec{h}(\vec{x})$  ó  $\dot{\vec{s}} = \vec{h}(\vec{x})$  y  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Otra vez los estados de sincronización completa se refieren a la identidad entre el sistema de la Ec. (2.4) y una réplica (el sistema esclavo) que es controlada por la misma señal  $s(t)$ . Note que esta última afirmación no excluye un comportamiento caótico de  $\vec{x}(t)$ , si bien esto es controlado por una señal caótica  $s(t)$ .

Mientras el esquema PC permite para un sistema caótico dado sólo un número finito de posibles descomposiciones para producir la sincronización, aquí la libertad para elegir la señal de control  $s(t)$ , hace el esquema APC muy poderoso y general. Esta cualidad puede ser útil en la aplicación a comunicaciones. Por ejemplo, sean dos sistemas, uno emisor y el otro receptor, los cuales tienen un comportamiento caótico, pero sincronizados entre ellos a través de una señal de control. El emisor puede añadir un mensaje a la señal de control, esto enmascara la información a una posible tercera persona que quisiera interceptar el mensaje. El receptor puede extraer el mensaje usando el error de sincronización entre la señal de control y la nueva señal enviada (señal de control + mensaje).

### 2.2.3 Sincronización completa mediante acoplamiento bidireccional

Un esquema de acoplamiento bidireccional entre sistemas caóticos idénticos es equivalente a introducir una disipación adicional en la dinámica del sistema [Boccaletti 2002]. En términos formales este esquema se plantea como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= \vec{f}(\vec{x}) + \widehat{C} \cdot (\vec{y} - \vec{x})^T, \\ \dot{\vec{y}} &= \vec{f}(\vec{y}) + \widehat{C} \cdot (\vec{x} - \vec{y})^T.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Aquí  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$  representan vectores  $N$ -dimensionales del sistema caótico, y  $\vec{f}$  es un campo vectorial  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Finalmente,  $\widehat{C}$  es una matriz  $n \times n$  cuyos coeficientes rigen el acoplamiento disipativo.  $T$  representa la matriz transpuesta. Cuando se incrementa la intensidad de acoplamiento (los coeficientes de  $\widehat{C}$ ), el sistema (2.5) presenta una transición<sup>1</sup> a un estado de sincronización completa en un valor crítico del acoplamiento que depende de la estructura particular de la matriz de acoplamiento. En particular, cuando  $\widehat{C} = c\widehat{I}$ , ambos sistemas se sincronizan completamente para  $c > \frac{1}{2}\lambda_L$  (siendo  $\lambda_L$  el exponente de Lyapunov más grande de los sistemas desacoplados). El esquema de sincronización es efectivo sincronizando completamente variables de sistemas caóticos, debido a la disipación adicional introducida, siempre que no sigan las mismas trayectorias.

### 2.2.4 La estabilidad del movimiento sincronizado

La estabilidad del movimiento sincronizado es un aspecto muy relevante, y muchos criterios han sido reportados en la literatura para tratar esto [Boccaletti 2002]. Uno de los criterios más populares y frecuentemente usados es el uso de los exponentes de Lyapunov como medida promedio de expansión o contracción de pequeños desplazamientos por la trayectoria sincronizada. Explicaremos éste y otro criterio designado para caracterizar la estabilidad de estados completamente sincronizados de sistemas caóticos idénticos acoplados y describiremos la transición entre un estado no sincronizado a otro estado sincronizado.

---

<sup>1</sup>La razón de esta transición es que el comportamiento a largo plazo de los sistemas acoplados está determinado por dos fuerzas de contrapeso, es decir, la acción de la inestabilidad de la variedad de sincronización y el de la difusión. Como resultado, cuando la difusión supera la inestabilidad, los sistemas se sincronizan.

El problema de estabilidad de sistemas acoplados idénticos pueden ser formulados en un modo muy general dirigiendo la pregunta de la estabilidad de la variedad  $\vec{x} \equiv \vec{y}$  de sincronización CS, o equivalentemente estudiando la evolución temporal del error de sincronización  $\vec{e} \equiv \vec{x} - \vec{y}$  (siendo  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$  los vectores de estado del sistema acoplado). La evolución de  $\vec{e}$  está dada por

$$\dot{\vec{e}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{s}(t)) - \vec{f}(\vec{y}, \vec{s}(t)), \quad (2.6)$$

donde  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$  representan vectores de estado del sistema esclavo y su réplica. La Ec. (2.6) puede ser escrita en los dos esquemas PC<sup>2</sup> y APD, puesto que esto incluye explícitamente la señal maestra  $\vec{s}(t)$ .

Un régimen CS existe cuando la variedad de sincronización es asintóticamente estable para todas las posibles trayectorias  $\vec{s}(t)$  del sistema maestro dentro del atractor caótico. Esta propiedad puede ser probada usando análisis de estabilidad del sistema linealizado para  $\vec{e}$  pequeña

$$\dot{\vec{e}} = \vec{D}_X(\vec{s}(t))\vec{e}, \quad (2.7)$$

donde  $\vec{D}_X$  es el Jacobiano del campo vectorial  $\vec{f}$  evaluado en la trayectoria esclava  $\vec{s}(t)$ . Normalmente cuando la trayectoria maestra  $\vec{s}(t)$  es constante (punto fijo) o periódica (ciclo límite), el estudio del problema de estabilidad puede ser hecho por medio de la evaluación de los valores característicos de  $\vec{D}_X$  o los multiplicadores de Floquet [Yu 1990]. Sin embargo, si el sistema esclavo es conducido por una señal caótica, este método se podría emplear. Una solución posible es calculando los exponentes de Lyapunov del sistema esclavo de la Ec. (2.7). En el contexto del esquema de acoplamiento esclavomaestro, esos exponentes son usualmente llamados exponentes condicionales de Lyapunov porque ellos son los exponentes de Lyapunov del sistema esclavo bajo la restricción explícita de que ellos deben ser calculados en la trayectoria  $\vec{s}(t)$ . Alternativamente, son llamados exponentes transversales de Lyapunov porque ellos corresponden a direcciones las cuales son transversales a la variedad de sincronización  $\vec{x} \equiv \vec{y}$ . Estos exponentes serían definidos por una condición inicial para la señal maestra  $\vec{s}_0$  y una orientación inicial del desplazamiento infinitesimal  $\vec{u}_0 = \vec{e}(0)/|\vec{e}(0)|$  como [Boccaletti 2002]:

---

<sup>2</sup>La Ec. (2.6) es equivalente a la definición dada en el esquema PC y por lo tanto a la Ec. (2.1), sólo que en este caso lo describimos de manera más general, en variedades, y no en un espacio particular que esté normado.

$$\begin{aligned}
h(\vec{s}_0, \vec{u}_0) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{|\vec{e}(t)|}{|\vec{e}(0)|} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \vec{Z}(\vec{s}_0, t) \cdot \vec{u}_0 \right|
\end{aligned} \tag{2.8}$$

donde  $\vec{Z}(\vec{s}_0, t)$  es la matriz solución de la ecuación linealizada

$$\frac{d\vec{Z}}{dt} = \vec{D}_X(\vec{s}(t))\vec{Z}, \tag{2.9}$$

sujeta a la condición inicial  $\vec{Z}(0)$ . El error de sincronización  $\vec{e}$  evoluciona de acuerdo a  $\vec{e}(t) = \vec{Z}(\vec{s}_0, t)\vec{e}_0$  y entonces la matriz  $\vec{Z}$  determina si este error disminuye o crece en una dirección particular. En muchos casos, sin embargo, el cálculo no puede ser hecho analíticamente, y por lo tanto son usados algoritmos numéricos. Es importante enfatizar que el negativo de la condicional de los exponentes de Lyapunov es necesario sólo para la estabilización de estados sincronizados. Los exponentes condicionales de Lyapunov son obtenidos de un promedio temporal, y por tanto ellos caracterizan una estabilidad global sobre todo el atractor caótico. Existen casos relevantes donde estos exponentes son negativos y sin embargo el sistema no es perfectamente sincronizado, de esta manera indicando que la condición adicional sería llevada para garantizar la sincronización de una manera necesaria y suficiente. Aunque este criterio fue usado satisfactoriamente para predecir y estudiar la estabilidad del movimiento sincronizado, es en general difícil de tener aproximaciones exactas de los exponentes de Lyapunov, de manera que la aplicación de criterios alternativos puede utilizarse en casos prácticos.

### SECCIÓN 2.3

## Sincronización del caos entre dos circuitos de Chua

En esta sección mostraremos algunos análisis matemáticos de acoplamiento electrónico para dos circuitos de Chua, para posteriormente ver y comparar con los resultados numéricos. Como ya sabemos las ecuaciones para el circuito de Chua se pueden escribir en su forma adimensional como

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \alpha(y - h(x)), \\
\dot{y} &= x - y + z, \\
\dot{z} &= -\beta y - cz,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

donde  $h(x) = x + f(x) = x + bx + \frac{1}{2}(a - b)(|x + 1| - |x - 1|)$ . El otro sistema está representado por  $x', y', z'$  con ecuaciones del mismo estado que la Ec. (2.10). De esta forma es posible definir un sistema diferencia [Chua 1993]:

$$\begin{aligned}
p(\tau) &= x(\tau) - x'(\tau), \\
q(\tau) &= y(\tau) - y'(\tau), \\
r(\tau) &= z(\tau) - z'(\tau).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Para el caso de acoplamiento bidireccional el sistema de ecuaciones está dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \alpha(y - h(x)) + k_x(x' - x), \\
\dot{y} &= x - y + z + k_y(y' - y), \\
\dot{z} &= -\beta y - cz + k_z(z' - z), \\
\dot{x}' &= \alpha(y' - h(x')) + k_x(x - x'), \\
\dot{y}' &= x' - y' + z' + k_y(y - y'), \\
\dot{z}' &= -\beta y' - cz' + k_z(z - z'),
\end{aligned} \tag{2.12}$$

donde las  $k$ 's son variables de acoplamiento. Por lo tanto, para  $k_x, k_y, k_z = 0$  el sistema no está acoplado.

**Proposición:** Se supone que existen valores para  $(k_1, k_2)$  que obedecen  $k_1 < k < k_2$ , donde  $k$  denota  $k_x, k_y$  o  $k_z$  y la parte real de todos los valores característicos de las matrices (2.13) y (2.14) son negativos, entonces los subsistemas  $(x, y, z, x', y', z' : x = x', y = y', z = z')$  en el espacio fase  $\mathbb{R}^6$  de la Ec. (2.12) son estables para todo  $k_1 < k < k_2$ . En este caso todas las trayectorias de ambos sistemas se aproximan asintóticamente,

$$\begin{pmatrix} -\alpha - a\alpha - 2k_x & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - 2k_y & 1 \\ 0 & -\beta & -(c + 2k_z) \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha - b\alpha - 2k_x & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - 2k_y & 1 \\ 0 & -\beta & -(c + 2k_z) \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

**Demostración:** De las ecuaciones (2.11) y (2.13) tenemos que:

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \alpha q - \alpha p - \alpha[f(x) - f(x')] - 2k_x p, \\ \dot{q} &= p - r - 2k_y p, \\ \dot{r} &= -\beta q - (c + 2k)r,\end{aligned}\tag{2.15}$$

así  $f(x) - f(x') = f(\eta)(x - x')$  y  $f(\eta)$  toma valores  $a$  y  $b$ . Así la Ec. (2.15) se reduce a

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix},\tag{2.16}$$

donde la matrix  $A$  es dada a través de cualquiera de las matrices de la proposición. Si la parte real de los valores característicos de esa matriz son negativos, consecuentemente el equilibrio de la Ec. (2.15) es estable.

Para el acoplamiento unidireccional, Pecora y Carroll demostraron que los subsistemas se sincronizan si los exponentes condicionales de Lyapunov son negativos. Un método simple para saber si los exponentes condicionales de Lyapunov son negativos es sólo aplicable para el caso de que el subsistema sea lineal (en nuestro caso cuando tenemos una configuración donde el acoplamiento se da en la variable  $x$ ). Haciendo  $\xi(t) = w(t) - w'(t)$  y siendo  $\xi$  el sistema diferencia, entonces se obtiene:

$$\dot{\xi} = \dot{w}(t) - \dot{w}'(t) = h(v, w) + h(v, w'),\tag{2.17}$$

si el subsistema es lineal, se tiene que:

$$\dot{\xi} = A\xi,\tag{2.18}$$

donde  $A$  es una matriz constante  $(n - m) \times (n - m)$ . Se supone que los valores característicos de  $A$  son  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-m}$ . La parte real de estos valores característicos son por definición los valores característicos condicionales de Lyapunov que se busca. Si todos los exponentes condicionales de Lyapunov son negativos, entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$ , y en consecuencia los subsistemas se sincronizan; si existen exponentes condicionales de Lyapunov positivos, los subsistemas evolucionarán separados cuando  $t \rightarrow \infty$ , y nunca se sincronizarán. Un caso intermedio ocurre si uno o más de los exponentes condicionales de Lyapunov son iguales a cero; conforme  $t \rightarrow \infty$  los sistemas se separarán por una distancia  $B$  fija, dependiente de las condiciones iniciales.

---

# Capítulo 3

## Entropía de Shannon y Entropía de Imagen

---

En este capítulo se discute el concepto de entropía de Shannon y de entropía de imagen que se utilizarán en esta tesis. En la primera sección se presentan los elementos básicos de la teoría de la información de Shannon. En la segunda sección se describe la forma en que se aplica la entropía de Shannon para caracterizar la sincronización entre dos sistemas caóticos. En la tercera sección se trata el concepto de entropía de imagen.

### SECCIÓN 3.1

#### Elementos básicos de la teoría de Shannon

La publicación de la teoría de la información escrita por Shannon en 1948, estableció un modelo matemático de la información definido en términos estrictamente estadístico [Shannon 1948]. Uno de los postulados básicos de la teoría de Shannon es que la información se puede tratar como una cantidad física medible, tal como la masa o la densidad. La importancia del trabajo de Shannon radica en ser la base de la teoría actual de la codificación y comunicación. Su fin es establecer los límites de cuánto se puede llegar a comprimir la información y definir la mayor velocidad en la que se puede transmitir dicha información. Esencialmente se trata de un método matemático que permite asignar valores cuantitativos a la información. Para ello, se define la información como la disminución en la incertidumbre que tenemos sobre algunas cosas. En la

Fig. 3.1 muestra de forma esquemática la idea esencial en la teoría de la información de Shannon. La fuente de información envía los mensajes codificados a través de un canal, los cuales al llegar al decodificador son recibidos por la unidad receptora. La información se transmite por medio de mensajes. Un mensaje es una sucesión particular de símbolos discretos (dígitos, letras, notas musicales, colores, etc.) escogidos de un repertorio (el conjunto de los dígitos, el alfabeto, la escala musical, los colores, etc.). En la información no interesa que cantidad de información transporta el mensaje, ya que eso no nos dice nada sobre lo que el mensaje transmite.

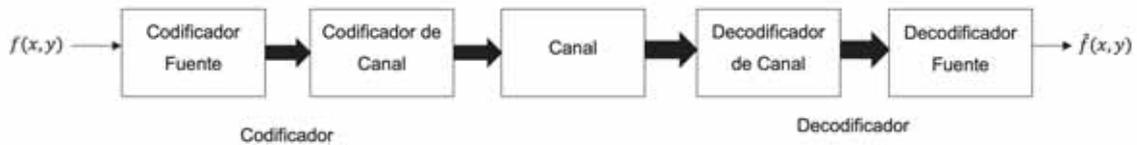


Figura 3.1: Transmisión de la información de acuerdo a la teoría de Shannon.

Consideremos un ejemplo concreto, en donde los mensajes elementales (las letras) forman parte de un repertorio (alfabeto). Si el alfabeto tiene sólo una letra, entonces la cantidad de información que transporta esa letra es cero, puesto que sabemos de antemano que la letra será recibida. De esta manera, el alfabeto mínimo capaz de transportar información es uno con dos letras (un ejemplo, es la clave Morse; sus dos letras son el punto y la raya).

La cantidad de información que transporta cada símbolo de alfabeto dado es función del número de letras de ese alfabeto; es decir que entre mayor sea el número de letras de un alfabeto, mayor es la incertidumbre acerca de cual de ellas nos va a llegar y, por lo tanto, cada una de ellas transporta más información. La idea de Shannon es la siguiente. Supongamos que el repertorio del que podemos escoger los mensajes tiene  $n$  símbolos. La información contenida en cada símbolo será una cierta función de  $n$ , la cual denotamos por  $I(n)$ , será la información contenida en cada una de las  $n$  letras del alfabeto (nótese que  $I(1) = 0$ ).

Supongamos que el mensaje elemental  $a$  está tomado de un alfabeto  $A$ , de  $n$  mensajes elementales, y que el mensaje elemental  $b$  está tomado de un alfabeto  $B$ , de  $m$  mensajes elementales, entonces la información contenida de  $a$  es  $I(n)$  y la información contenida en  $b$  es  $I(m)$ . De esta manera, el mensaje compuesto  $ab$  puede considerarse como un mensaje elemental de un alfabeto  $AB$  formado por los  $n \times m$  mensajes compuestos por dos letras, la primera de  $A$  y la segunda de  $B$ . Así la información contenida en este mensaje compuesto será  $I(n \times m)$ , y la condición de aditividad de la información se expresará, matemáticamente como [Herrera 2001]:

$$I(n \times m) = I(n) + I(m). \quad (3.1)$$

Para que la relación se cumpla, usamos la función logaritmo, ya que  $\log(n \times m) = \log(n) + \log(m)$  y definimos la cantidad de información que transporta un mensaje como:

$$I(n) = \log(n). \quad (3.2)$$

Observe que esta definición cumple automáticamente con la condición  $I(1) = 0$ . Dado en un repertorio con un sólo mensaje ( $n = 1$ ) no sirve para transmitir información, el número mínimo de mensajes que debe de tener un repertorio es de dos, para ser capaz de transmitir información. En este sentido, si se requiere tener  $I(2) = 1$ , de la Ec. (3.2) se interfiere que el tipo de logaritmos que conviene usar son los logaritmos en base dos. En conclusión definimos la cantidad de información que transporta un mensaje tomado de un conjunto de  $n$  mensajes como:

$$I(n) = \log_2(n). \quad (3.3)$$

La unidad de información se llama *bit*, nombre que resulta al contraer las palabras “*binary digit*”. Así la información que transmitiría cada letra del alfabeto castellano de 27 letras (27 mensajes elementales) será  $\log_2(27) = 4.75$  *bits*.

De acuerdo con Shannon, el uso de la función logarítmica como una medida de información está respaldado por las siguientes razones:

- Los parámetros usados en la ingeniería tal como el tiempo, ancho de banda, número de réplicas, etc., tienden a variar linealmente con el logaritmo.
- Se acerca más a la sensación intuitiva de la medición que se maneja en la información. Esto está aproximadamente relacionado con el punto anterior desde que mide entidades por comparaciones lineales con estándares comunes.
- Muchas de las operaciones limitadas son simples, en términos del logaritmo. La base logarítmica corresponde a la opción de una unidad para la medida e información.

En la Ec. (3.3) se supone que todos los mensajes son igualmente probables y, en general, este no es el caso. En el ejemplo del alfabeto castellano, si decimos que palabra de cuatro letras empieza con “a”, se está dando cierta cantidad de información, pero si decimos que la palabra empieza con “k” estamos dando más información, pues la palabra en cuestión queda más restringida en el segundo caso (sólo puede ser kepi, kilo o alguna otra

de entre muy pocas posibilidades). Está claro que la información de “k” es mayor que la información “a”, la razón es que “a” es mucho más probable que “k”. De esta manera, la cantidad de información que transporta el mensaje es menor cuanto más probable sea el mensaje en cuestión (si un mensaje tuviera probabilidad 1, la información que transportaría sería 0). Como  $1/n$  es la probabilidad  $p$  de un mensaje entre  $n$  posibles, si todos son igualmente probables, entonces notamos que la definición de información dada en la Ec. (3.2) puede expresarse en términos de probabilidades como:

$$I(p) = -\log_2(p), \quad (3.4)$$

que se reduce a la Ec. (3.3) cuando todos los mensajes son igualmente probables. Si los mensajes tienen diferentes probabilidades, no es posible saber con anticipación cuanta información transporta un mensaje dado; pero si es posible calcular la información promedio que transporta un mensaje elemental. En general, la información promedio por mensaje es [Herrera 2001]:

$$\bar{I} = -\sum P_i \log_2 P_i, \quad (3.5)$$

en donde  $P_i$  es la probabilidad de ocurrencia del  $i$  –ésimo mensaje. Un ejemplo claro, si en la clave Morse hubiera 9 puntos por cada raya,  $P_1 = 0.9$  y  $P_2 = 0.1$ , de modo que  $\bar{I} = 0.469$  bits, contra un bit, que sería la información que transportaría cada punto o cada raya si ambos tuviera la misma probabilidad ( $P_1 = P_2 = 0.5$ ). En la Ec. (3.5) se supone naturalmente que:

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1. \quad (3.6)$$

La Ec. (3.5) da una medida de incertidumbre promedio, la cual se calcula a partir de la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los eventos. Esto es lo que identificó Shannon como la entropía asociada a una información determinada que se desea transmitir. El término de entropía (del griego tropos=cambio, transformación) lo utilizó originalmente Rodolf Clausius en 1851, como una medida de la pérdida de calor irreversible de un sistema y quién formuló la Segunda Ley de la Termodinámica como la noción de que “*la entropía termodinámica de un sistema cerrado se incrementa a un máximo*” [Schiff 2008].

## SECCIÓN 3.2

**Entropía de Shannon en el espacio de configuración**

En el esquema por Shannon, Ec. (3.5), resulta interesante aplicar este concepto de la entropía de Shannon a una señal. La idea básica se puede describir en los siguientes términos. Supóngase que se tiene un conjunto de puntos definidos en un plano (por ejemplo, el mapa de Poincaré o el plano de fase en un sistema dinámico) como se muestra en la Fig. 3.2. Se define una malla (cuadrícula) la cual se divide en  $N$  celdas rectangulares idénticas. El número de puntos contenidos en una celda dividido entre el número total de puntos de la malla da la probabilidad de ocupación  $P_i$  de la  $i$ -ésima celda. Entonces, basándonos en la Ec. (3.5), la entropía de Shannon  $E_s$  la podemos definir como:

$$E_s = - \sum_{i=1}^N P_i \ln(P_i), \quad (3.7)$$

en donde  $\ln$  denota el logaritmo natural. A pesar de que en la literatura existen otras definiciones para caracterizar entrópicamente a un sistema dinámico [Hilborn 2000], creemos que el uso de la entropía de Shannon se ha subestimado. Este enfoque se ha aplicado para analizar resultados experimentales de la sincronización entre varios circuitos de Chua [Arroyo 2009].

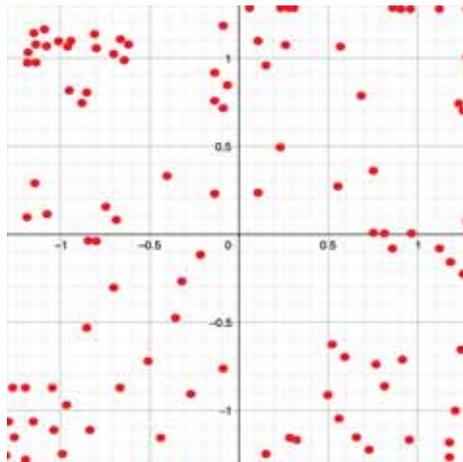


Figura 3.2: Mallado para construir la entropía de Shannon.

### 3.2.1 Caracterización entrópica del sistema de Chua

Como un ejemplo de la aplicación de la Ec. (3.7), en la Fig. 3.3 se presenta la evolución de la entropía de Shannon del sistema de Chua como función del parámetro  $\alpha$ . La entropía se calcula, según la Ec. (3.7), sobre la proyección de la dinámica del circuito de Chua en los planos  $XY$ ,  $XZ$  y  $YZ$ . El rango de variación de  $\alpha$  es de 6 a 11.3. Nótese que el comportamiento en los tres planos es similar. En la parte superior de la figura se muestran gráficos típicos del estado dinámico del sistema, en el plano  $XY$ , en las diferentes regiones definidas por las líneas punteadas.

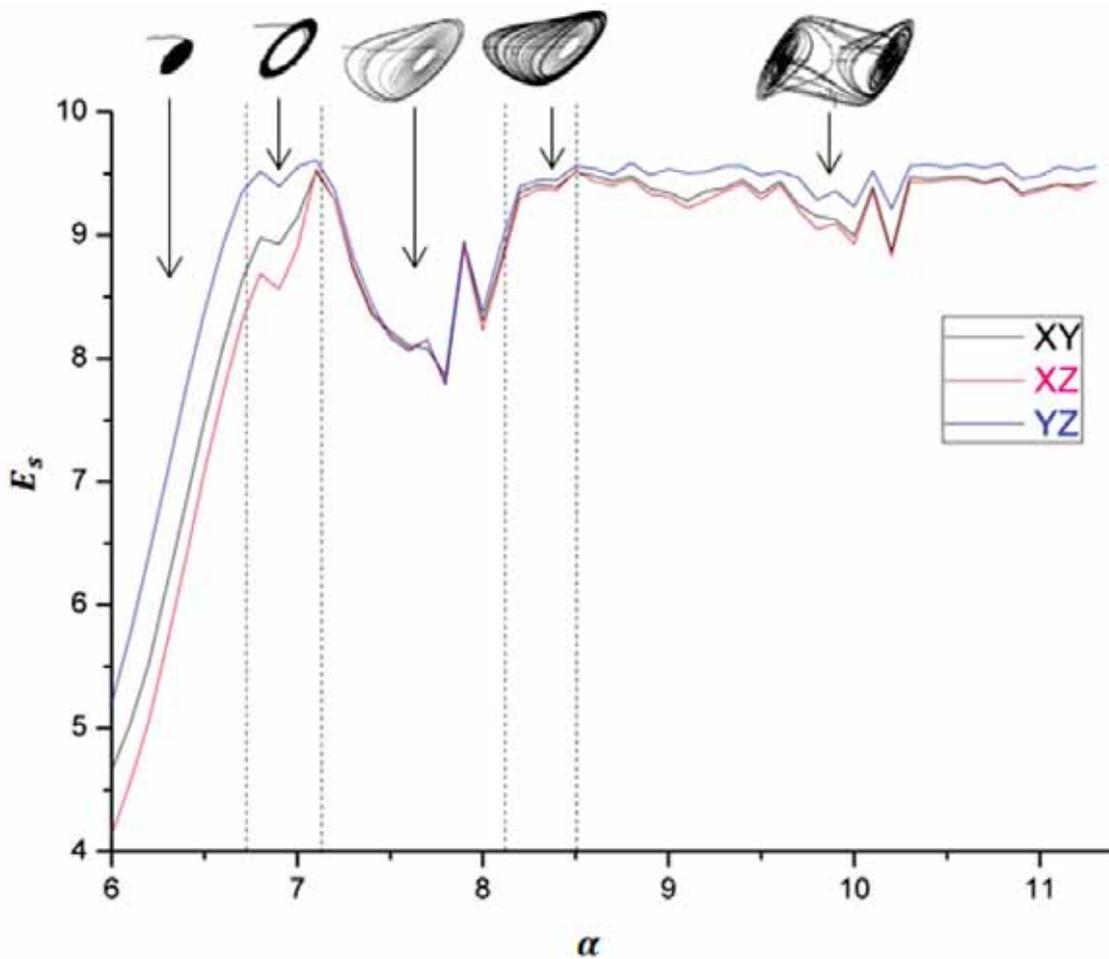


Figura 3.3: La entropía de Shannon del sistema de Chua en los planos  $XY$ ,  $XZ$  y  $YZ$ .

## SECCIÓN 3.3

**Entropía de imagen**

Al comparar imágenes es importante tener algún tipo de medida sobre la cantidad de información disponible en dichas imágenes. En esta sección se habla acerca de uno de los parámetros que permite medir cuantitativamente la cantidad de información presente en una imagen, como lo es la Entropía de Imagen.

**3.3.1 Compresión de imágenes**

Sean  $n_1$  y  $n_2$  el número de datos de dos conjuntos que representan la misma información. Si  $n_1 \neq n_2$  entonces existe redundancia de datos.

Entonces se define  $R_D$  como la “redundancia de datos” y  $C_R$  como la “razón de compresión” [Roncagliolo 2007]. Es decir:

$$R_D = 1 - \frac{1}{C_R}, \quad (3.8)$$

$$C_R = \frac{n_1}{n_2}. \quad (3.9)$$

Como ejemplo, si tenemos una relación  $n_1 = 10n_2$ , entonces tenemos que la razón de compresión es  $C_R = 10 = 10 : 1$ , y la redundancia de datos es  $R_D = 0.9$ , es decir, 90 % de datos en  $n_1$  son redundantes. Con esto tenemos dos afirmaciones:

- $n_2 = n_1 \rightarrow C_R = 1 \rightarrow R_D = 0$  No hay redundancia.
- $n_2 \ll n_1 \rightarrow C_R = \infty \rightarrow R_D = 1$  Alta redundancia.

Consideremos ahora una imagen  $M$  que posee resolución en frecuencia de sólo 8 niveles de gris;  $[r_0, r_1, \dots, r_7] = [0, 1/7, \dots, 7/7]$ , como se muestra en la Tabla 3.1. Luego de analizar el histograma de la imagen se determina la probabilidad de ocurrencia del nivel  $r_k$  como  $p_r(r_k) = n_k/n$ , donde  $n_k$  es el número de ocurrencia del valor  $r_k$  y  $n$  es el número total de píxeles.

$r_k$	$p_r(r_k)$	Code 1	$l_1(r_k)$	Code 2	$l_2(r_k)$
$r_0 = 0$	0.19	000	3	11	2
$r_1 = 1/7$	0.25	001	3	01	2
$r_2 = 2/7$	0.21	010	3	10	2
$r_3 = 3/7$	0.16	011	3	001	3
$r_4 = 4/7$	0.08	100	3	0001	4
$r_5 = 5/7$	0.06	101	3	00001	5
$r_6 = 6/7$	0.03	110	3	000006	6
$r_7 = 1$	0.02	111	3	000000	6

Tabla 3.1: Ejemplo de resolución de imagen.

La codificación sería “Code 1” y el número de bits requeridos para cada nivel se indica en  $l_r(r_k)$  de la Tabla 3.1.

El promedio ponderado de bits requerido para la codificación es:

$$L_{avg} = \sum_{k=0}^7 l(r_k) p_r(r_k). \quad (3.10)$$

Para “Code 1” el promedio de bits es  $L_{avg1} = 3$  y para “Code 2” es  $L_{avg2} = 2.7$ . Entonces la razón de compresión es  $C_R = 3/2.7 = 1.11$ . Por otro lado, la redundancia de datos es  $R_D = 1 - 1/1.11 = 0.099$  esto es el 9.9% de datos redundantes en “Code 1”. En esencia, en la compresión por código de largo de variable es que se asigna códigos “cortos” a niveles de gris con mayor ocurrencia (como el segmento *A* relacionado con los primeros puntos de  $p_r(r_k)$  visto en la Fig. 3.4) y códigos “largos” a niveles de gris con menor ocurrencia (como el segmento *B* relacionado con los últimos puntos de  $p_r(r_k)$  visto en la Fig. 3.4).

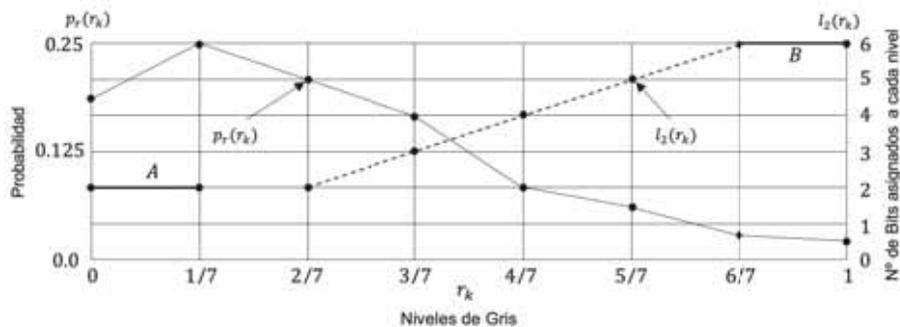


Figura 3.4: Representación gráfica de la base fundamental de compresión de información en una imagen.

### 3.3.2 Cálculo de la entropía de imagen

En la primera sección, se definió como se aplica la entropía de Shannon a la información, para después aplicarla al cálculo de la entropía en el plano de configuración del circuito de Chua, Ec. (3.7). Siguiendo esta definición en un plano, se puede definir la entropía asociada a una imagen. En este caso se utiliza la distribución de los valores de gris en la imagen de la probabilidad de ocurrencia de símbolos.

La distribución de probabilidad de los valores de gris se puede estimar contando el número de veces que aparece cada valor de gris en la imagen y dividiendo el conteo por la cantidad total de píxeles. De esta manera una imagen con gran cantidad de sus píxeles con la misma intensidad va a tener una baja entropía, mientras que con una distribución más uniforme de los valores de gris se obtiene una alta entropía [Salvatierra 2004]. Por lo que también puede verse la entropía de Shannon como una medida de la distribución de probabilidad de los valores de gris aplicando la Ec. (3.5). La entropía no tiene en cuenta información que proviene de la distribución espacial de los píxeles. De acuerdo con lo anterior, la entropía mínima se presenta cuando los píxeles de una imagen tiene el mismo valor, en tanto que la máxima entropía se presenta cuando la imagen presental el mismo número de píxeles para cada uno de los 256 niveles de gris. Si la imagen contiene  $m$  píxeles, cada uno con una probabilidad  $P_i$  (nivel de gris), entonces la entropía de la imagen se define como:

$$S = - \sum_{i=1}^m P_i \log(P_i). \quad (3.11)$$

Tomando la imagen cuyas característica aparecen en la Tabla 3.1, sabemos por la Ec. (3.10) que el número de píxeles es 8, por lo que resta aplicar la Ec. (3.11), obteniéndose lo siguiente:

$$\begin{aligned} S &= -P_1 \log(P_1) - P_2 \log(P_2) - \dots - P_7 \log(P_7) - P_8 \log(P_8), \\ &= -0.19 \log(0.19) - 0.25 \log(0.25) - \dots - 0.03 \log(0.03) - 0.02 \log(0.02), \\ &= 0.797956. \end{aligned} \quad (3.12)$$

siendo  $S = 0.797956$  la entropía de la imagen.

Para los resultados del análisis entrópico que se usarán en esta tesis se sigue el procedimiento de cuatro pasos mostrado en la Fig. 3.5. El primer paso es resolver numéricamente las ecuaciones de la dinámica numéricamente a través del método de Runge-Kutta de

cuarto orden escrito en Fortran 90 (véase el Apéndice A.2) dando como resultado una serie de números reales para los valores de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , siendo graficadas en Gnuplot, dando una imagen como se muestra en el segundo paso de la Fig. 3.5, que después es analizada en MATLAB con el código mostrado en el tercer paso, donde en la primera línea se lee la imagen 'a.jpeg' con el comando 'imread()' para después ser convertida a escala de grises en la segunda línea, con el comando 'rgb2gray()'. Finalmente, la entropía de la imagen se calcula con la función 'entropy()' dando como resultado un número real, mostrado en el cuarto y último paso.

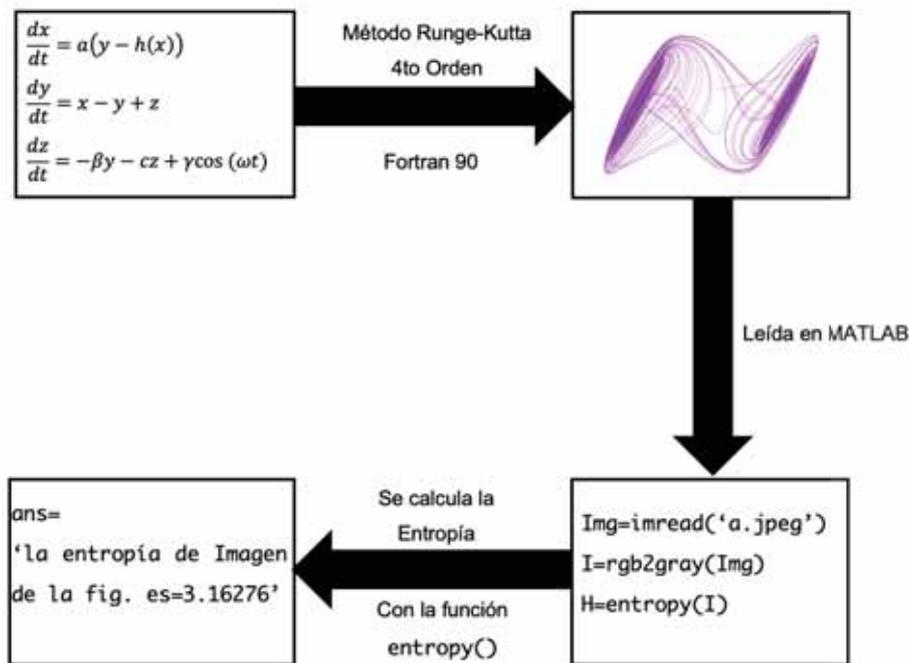


Figura 3.5: Metodología para el cálculo de la entropía de imagen.

---

# Capítulo 4

## El Sistema Analizado

---

Hasta el momento, se han tomado los temas de dinámica de un circuito de Chua, sincronización del caos y el efecto de una perturbación magnética en el estado dinámico del circuito de Chua. En este capítulo se presenta el sistema analizado en esta tesis y se describen las ecuaciones de su dinámica.

### SECCIÓN 4.1

#### Doble cadena de circuitos de Chua

En la Fig. 4.1(a) se muestra gráficamente el sistema analizado que consiste de dos cadenas, formadas por tres circuitos de Chua idénticos cada una. Los circuitos señalados por S1, S2 y S3 forman la primera cadena, en tanto que los circuitos S5, S6 y S7 conforman la segunda cadena. Las dos cadenas son acopladas a través de su circuito central mediante el circuito de Chua S4. Cada elemento de la figura corresponde al circuito mostrado en la Fig. 4.1 (b). Los parámetros  $k$ 's corresponden a los factores de acoplamiento del sistema.

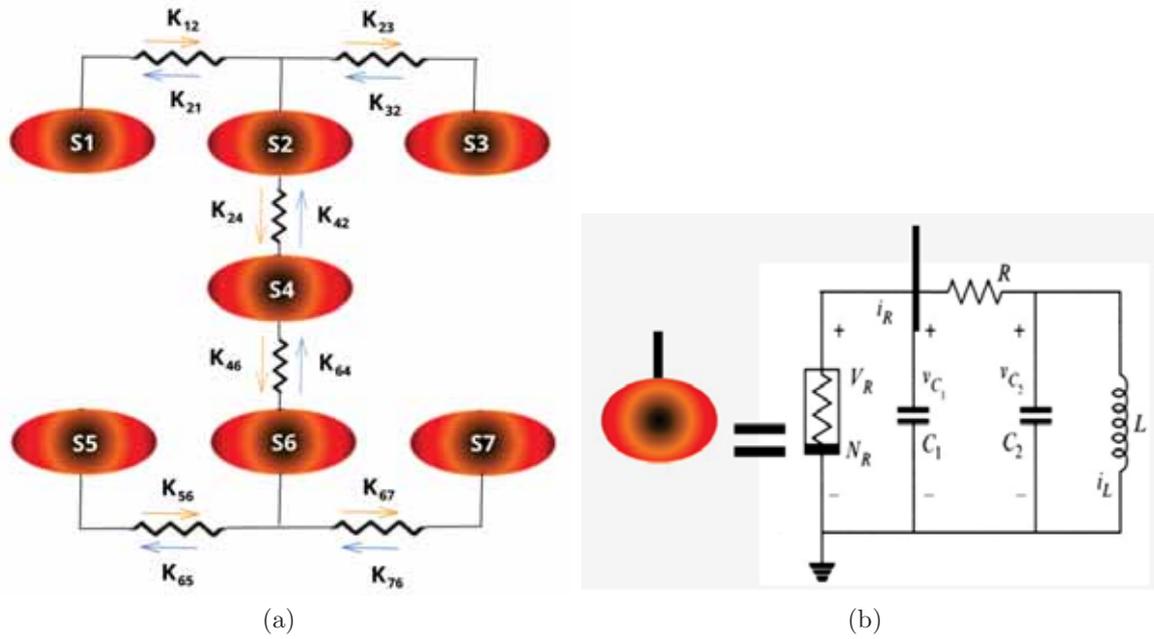


Figura 4.1: a) Estructura de la cadena de circuitos de Chua. b) Representación de cada circuito de Chua.

## SECCIÓN 4.2

### Sistema de ecuaciones para el sistema analizado

Haciendo el acoplamiento de varios circuitos de Chua, se agregan los índices de acoplamiento a las ecuaciones (1.15) de sus circuitos correspondientes, obteniendo un total de 21 ecuaciones diferenciales, las cuales se presentan a continuación.

Para el circuito S1 tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= \alpha(y_1 - bx_1 - \frac{1}{2}(a - b)(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|)) + k_{x12}(x_2 - x_1), \\
 \frac{dy_1}{dt} &= x_1 - y_1 + z_1, \\
 \frac{dz_1}{dt} &= -\beta y_1 - cz_1 + \gamma_1 \cos(\omega t).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Donde los  $k$ 's son los índices de acoplamiento entre circuitos.

Ahora, para el circuito S2 tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_2}{dt} &= \alpha(y_2 - bx_2 - \frac{1}{2}(a - b)(|x_2 + 1| - |x_2 - 1|)) \\
 &\quad + k_{x21}(x_1 - x_2) + k_{x23}(x_3 - x_2) + k_{x24}(x_4 - x_2), \\
 \frac{dy_2}{dt} &= x_2 - y_2 + z_2, \\
 \frac{dz_2}{dt} &= -\beta y_2 - cz_2 + \gamma_2 \cos(\omega t).
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Para el circuito S3:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_3}{dt} &= \alpha(y_3 - bx_3 - \frac{1}{2}(a - b)(|x_3 + 1| - |x_3 - 1|)) + k_{x32}(x_2 - x_3), \\
 \frac{dy_3}{dt} &= x_3 - y_3 + z_3, \\
 \frac{dz_3}{dt} &= -\beta y_3 - cz_3 + \gamma_3 \cos(\omega t).
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Para el circuito S4:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_4}{dt} &= \alpha(y_4 - bx_4 - \frac{1}{2}(a - b)(|x_4 + 1| - |x_4 - 1|)) \\
 &\quad + k_{x42}(x_2 - x_4) + k_{x46}(x_6 - x_4), \\
 \frac{dy_4}{dt} &= x_4 - y_4 + z_4, \\
 \frac{dz_4}{dt} &= -\beta y_4 - cz_4 + \gamma_4 \cos(\omega t).
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Para el circuito S5:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_5}{dt} &= \alpha(y_5 - bx_5 - \frac{1}{2}(a - b)(|x_5 + 1| - |x_5 - 1|)) + k_{x56}(x_6 - x_5), \\
 \frac{dy_5}{dt} &= x_5 - y_5 + z_5, \\
 \frac{dz_5}{dt} &= -\beta y_5 - cz_5 + \gamma_5 \cos(\omega t).
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Para el circuito S6:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_6}{dt} &= \alpha(y_6 - bx_6 - \frac{1}{2}(a - b)(|x_6 + 1| - |x_6 - 1|)) \\
&\quad + k_{x65}(x_5 - x_6) + k_{x67}(x_7 - x_6) + k_{x64}(x_4 - x_6), \\
\frac{dy_6}{dt} &= x_6 - y_6 + z_6, \\
\frac{dz_6}{dt} &= -\beta y_6 - cz_6 + \gamma_6 \cos(\omega t).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Para el circuito S7:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_7}{dt} &= \alpha(y_7 - bx_7 - \frac{1}{2}(a - b)(|x_7 + 1| - |x_7 - 1|)) + k_{x76}(x_6 - x_7), \\
\frac{dy_7}{dt} &= x_7 - y_7 + z_7, \\
\frac{dz_7}{dt} &= -\beta y_7 - cz_7 + \gamma_7 \cos(\omega t).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Para la solución de este sistema de ecuaciones se usó el método de Runge-Kutta de cuarto orden, escrito en Fortran 90, descrito en el apéndice A.2. Para poder estudiar los diferentes escenarios de estabilidad del sistema, se hizo el monitoreo de las siguientes señales:

- a)  $x_1$  vs  $x_3$  → Sincronización en la primera cadena entre el circuito S1 con el S3.
- b)  $x_4$  vs  $y_4$  → Dinámica del circuito de acoplamiento S4.
- c)  $x_5$  vs  $x_7$  → Sincronización en la segunda cadena entre el circuito S5 con el S7.
- d)  $x_1$  vs  $x_7$  → Sincronización entre las dos cadenas y el circuito S1 con el S7.

De las cuales, las condiciones iniciales para los siete circuitos de Chua se presentan en la Tabla 4.1

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
$x_0$	0.1	0.11	0.111	0.11	0.11111	0.111111	0.1111111
$y_0$	0.15	0.151	0.1511	0.151	0.15111	0.151111	0.1511111
$z_0$	0.1	0.11	0.111	0.11	0.11111	0.111111	0.1111111

Tabla 4.1: Condiciones iniciales para los siete circuitos de Chua.

Junto con los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c$ ,  $a$  y  $b$  vistas en la sección 1.2. Dichos valores son para mantener cada cadena, por separado, totalmente sincronizada. Con esto, podemos obtener seis diferentes resultados, con seis diferentes interpretaciones las cuales se describen en la Fig. 4.2.

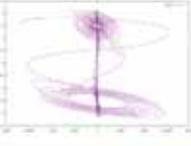
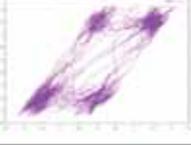
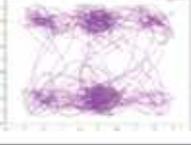
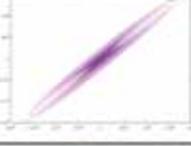
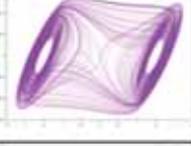
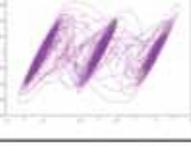
	<b>Sincronización</b>
	<b>No sincronización</b>
	<b>No sincronización con cuatro atractores</b>
	<b>No sincronización con seis atractores</b>
	<b>Órbita divergente</b>
	<b>Dinámica de Chua con dos atractores</b>
	<b>Dinámica de Chua con tres atractores</b>

Figura 4.2: Resultados posibles para las sincronizaciones y dinámicas en el sistema analizado.

---

# Capítulo 5

## Resultados

---

En trabajos anteriores se ha extendido el estudio del caos con circuitos de Chua al analizar numéricamente la interacción entre cadenas lineales formadas en diferentes configuraciones [Serrano, Rodríguez, Álvarez & Arroyo 2017], así como la caracterización de la estabilidad de las cadenas acopladas cuando están sujetas a una perturbación magnética local (estática o armónica) en alguno de los circuitos de Chua componentes de las cadenas inter-actuales [Arroyo 2020].

En este capítulo se presentan los resultados de la dinámica del sistema analizado, siendo para la perturbación en un circuito y para la doble perturbación en dos circuitos. En la primera sección se presentan los resultados del análisis gráfico y en la segunda sección se muestran los resultados del enfoque basado en el análisis entrópico descrito en la sección 3.3

## SECCIÓN 5.1

**Análisis gráfico**

Para el análisis gráfico se presentan las diferentes dinámicas resultantes de la perturbación magnética en los circuitos. Se muestran las evoluciones en las señales de monitoreo en los espacios de configuración, cuyas formas generales aparecen en la Fig. 4.2. En la primera sección se presentan los resultados para una sola perturbación, en tanto que en la segunda sección se muestran los resultados para la doble perturbación magnética.

### 5.1.1 Resultados para la perturbación magnética en un circuito

Para la perturbación en un circuito, se toman varios valores en los índices de acoplamiento en el circuito S4, teniendo cuatro casos:

$$\begin{aligned}
 \text{CASO A : } & k_{x24} = 100 = k_{x46}, \quad k_{x42} = 0 = k_{x64} \\
 \text{CASO B : } & k_{x42} = 0 = k_{x46}, \quad k_{x24} = 100 = k_{x64} \\
 \text{CASO C : } & k_{x42} = 100 = k_{x46}, \quad k_{x24} = 0 = k_{x64} \\
 \text{CASO D : } & k_{x24} = 0 = k_{x46}, \quad k_{x42} = 100 = k_{x64}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Para estos casos, se varían la intensidad del campo magnético agregado, es decir, se varía  $\omega$  con 0.01 y 1000, y  $\gamma$  con 2.3, 1 y 0.1 en las ecuaciones de  $dz_n/dt$  y de esta manera poder observar las consecuencias de la intensidad del campo en el acoplamiento entre circuitos. En la fase de resultados, únicamente se perturbó los circuitos S1, S2, S3 y S4, ya que, al ser una cadena de dos cadenas idénticas, conectadas a través del circuito S4, se obtendrían los mismos resultados si se perturba los demás circuitos. La forma de presentar los resultados gráficos sigue el orden mostrado en la Fig. 5.1.

### ▷ Perturbación en el circuito S1

Para la perturbación en el primer circuito tomaremos el orden de los diferentes escenarios vistos en la Sección 4.2. Con valores de  $\omega$  y  $\gamma$  fijos, se obtienen los resultados de la Fig. 5.1.

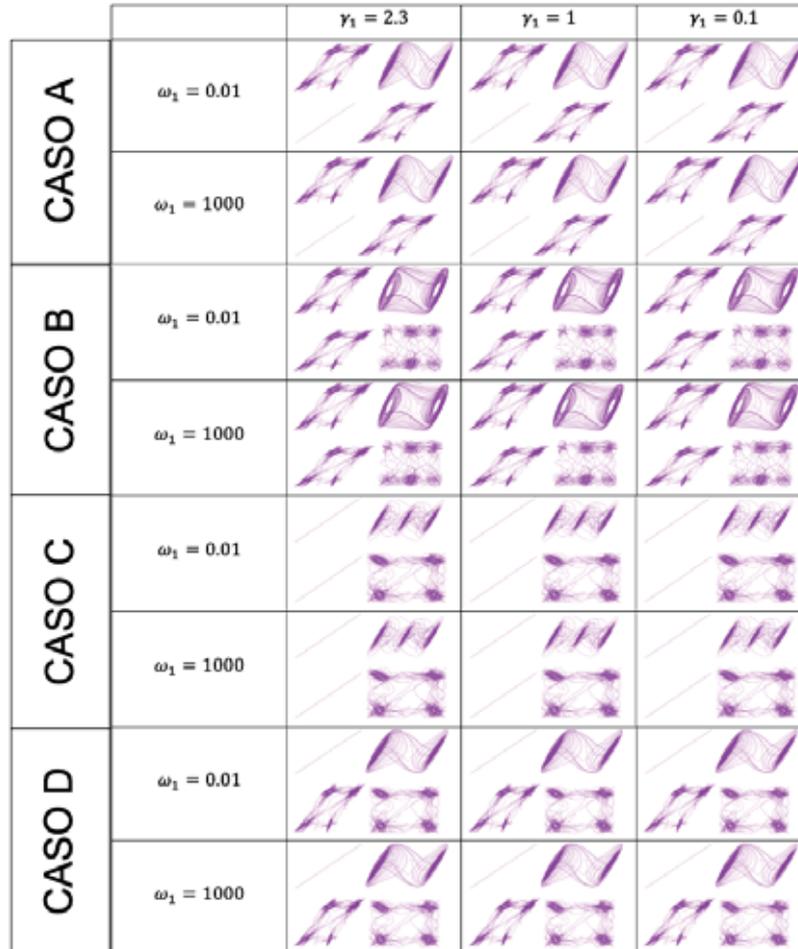


Figura 5.1: Resultados de la perturbación magnética en el circuito S1.

Podemos observar que en el Caso A hay sincronización en la segunda cadena, manteniendo la dinámica de Chua con dos atractores. Para el Caso B no se presenta sincronización en ninguna cadena ni entre ellas. Para el Caso C hay una doble sincronización, tanto en la primera y en la segunda cadena, pero no entre ellas, además de que la dinámica del circuito de Chua pasa de tener dos atractores a tener tres. Por último, en el Caso D hay sincronización en la primera cadena, manteniendo la dinámica de Chua con sus dos atractores.

### ▷ Perturbación en el circuito S2

En este caso se tienen los resultados de la Fig. 5.2.

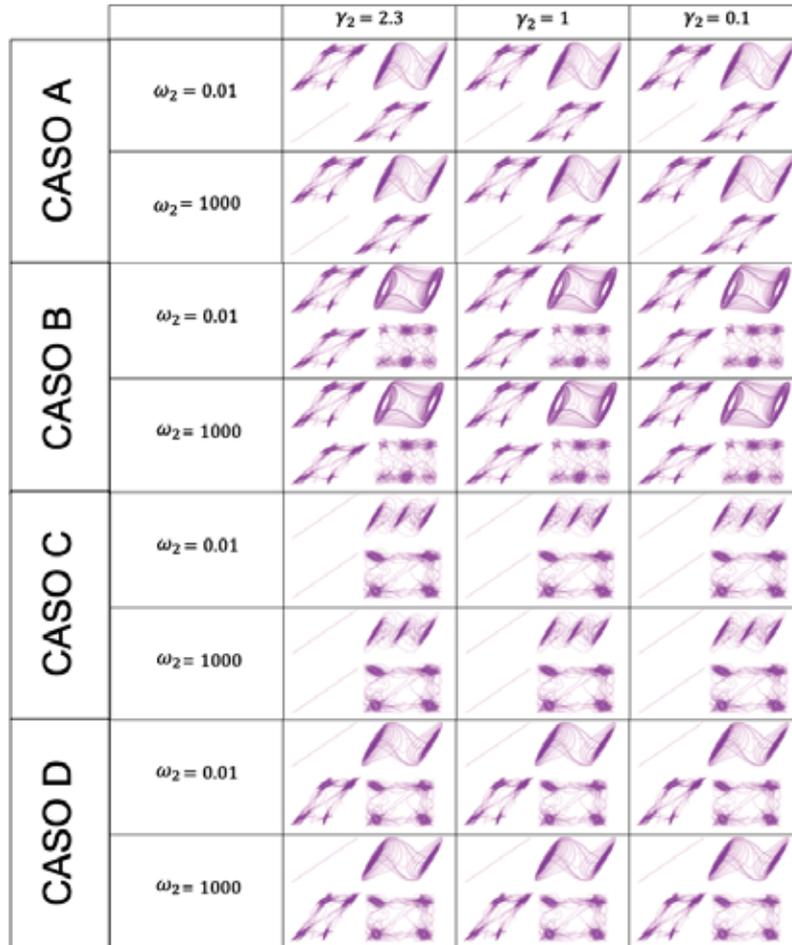


Figura 5.2: Resultados de la perturbación magnética en el circuito S2.

La cual es similar a la Fig. 5.1, llegando a las mismas conclusiones a las de la perturbación en el circuito S1.

### ▷ Perturbación en el circuito S3

Para este caso los resultados se muestran en la Fig. 5.3.

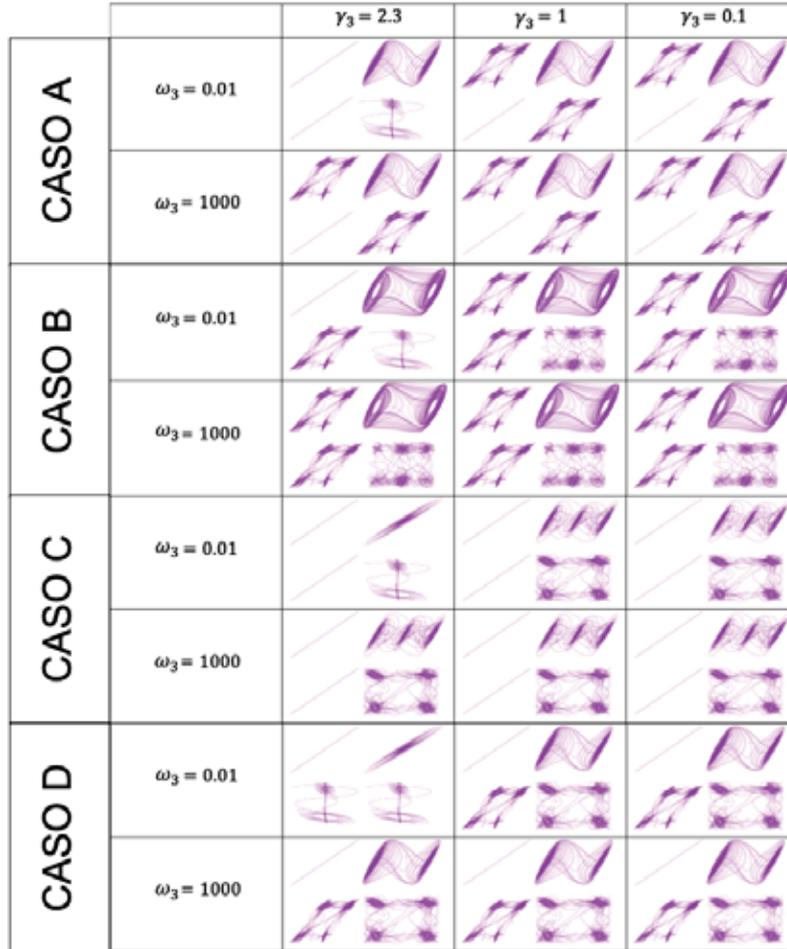


Figura 5.3: Resultados de la perturbación magnética en el circuito S3.

En la que podemos observar que en los casos cuando  $\gamma_3 = 2.3$  y  $\omega_3 = 0.01$  hay cambios considerables en la naturaleza. Para el Caso A, en los casos anteriores había sincronización únicamente en la segunda cadena, pero en este caso se presenta sincronización en las dos cadenas, pero no entre ellas. En el Caso B, no había sincronización en ninguna cadena, mientras que ahora se presenta sincronización en la primera cadena. En el Caso C se mantiene la doble sincronización independiente de las dos cadenas, pero en la dinámica del circuito de acoplamiento S4 pasa de tener 3 atractores a ser una órbita divergente. Por último, en el Caso D se mantiene todo el tiempo la sincronización en la primera cadena y, al igual que en el Caso C, la dinámica del circuito de acoplamiento se vuelve una órbita divergente. Podemos concluir que cuando hay una perturbación

en el circuito S3 con  $\gamma_3 = 2.3$  y  $\omega_3 = 0.01$  es ideal para tener una sincronización en la primera cadena, sin importar el caso en el que se trabaje.

### ▷ Perturbación en el circuito S4

Para el último caso de la perturbación el circuito S4, los resultados se presentan en la Fig. 5.4.

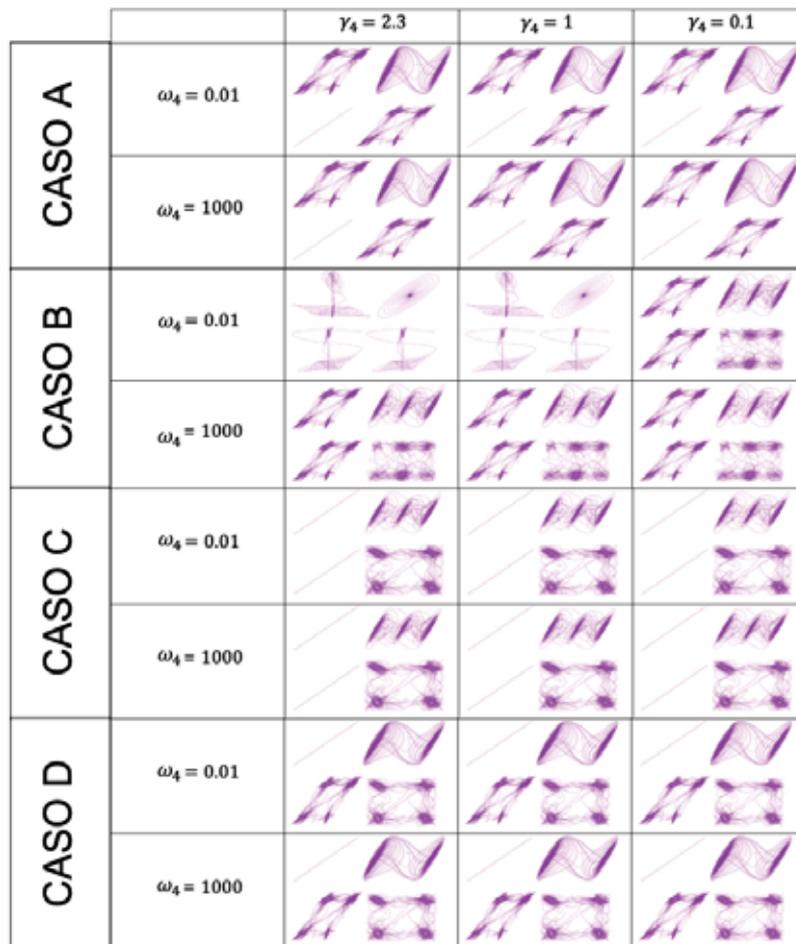


Figura 5.4: Resultados de la perturbación magnética en el circuito S4.

Donde se puede apreciar que en los casos A, C y D, la dinámica se mantiene como las dos subsecciones anteriores, sin embargo, para el Caso B, cuando  $\gamma_4 = 2.3, 1$  y  $\omega_4 = 0.01$  en la dinámica del circuito de acoplamiento colapsan sus tres atractores y pasa a ser una órbita divergente. En señales restantes, pierde su naturaleza para comportarse de manera distinta.

### 5.1.2 Resultados para la doble perturbación magnética

A diferencia de la subsección anterior, donde se hacía la perturbación magnética a un sólo circuito, en esta subsección se somete a dos circuitos a la vez al campo magnético variando los valores ya vistos, teniendo así los seis casos que se hacen variando los dos campos magnéticos independientemente,  $\gamma_{1,2}$  con 0.1, 2 y 2.3 y  $\omega_{1,2}$  con 0.01 y 1000 teniendo un total de 36 resultados por cada caso de la Ec. (5.1). Se hizo la doble perturbación en los circuitos S1 y S2, S1 y S3, y S2 y S3. Para el análisis se consideran los casos A, B, C, D definidos en la subsección anterior, Ec. (5.1). La forma de presentar los resultados gráficos dados sigue el orden mostrado en la Fig. 5.5.

#### ▷ Doble perturbación en los circuitos S1 y S2

En las Figs. 5.5-5.8 se presentan los resultados para el caso de la doble perturbación magnética en los circuitos S1 y S2, para los casos A, B, C y D respectivamente.

	$\omega_2 = 0.01, \gamma_2 = 2.3$	$\omega_2 = 0.01, \gamma_2 = 1$	$\omega_2 = 0.01, \gamma_2 = 0.1$	$\omega_2 = 1000, \gamma_2 = 2.3$	$\omega_2 = 1000, \gamma_2 = 1$	$\omega_2 = 1000, \gamma_2 = 0.1$
$\omega_1 = 0.01,$ $\gamma_1 = 2.3$						
$\omega_1 = 0.01,$ $\gamma_1 = 1$						
$\omega_1 = 0.01,$ $\gamma_1 = 0.1$						
$\omega_1 = 1000,$ $\gamma_1 = 2.3$						
$\omega_1 = 1000,$ $\gamma_1 = 1$						
$\omega_1 = 1000,$ $\gamma_1 = 0.1$						

Figura 5.5: Resultados para la doble perturbación magnética en los circuitos S1 y S2, caso A.

En este primer caso, con la Fig. 5.5 podemos ver que, como en los casos aislados de perturbación en los circuitos S1 y S2 se mantiene las relaciones características en este

acoplamiento, teniendo únicamente sincronización en la segunda cadena,  $x_5$  vs  $x_7$  en todos los casos.

Para el cambio de información entre circuitos, este caso sería útil para el intercambio en la cadena S5-S7 al ser la única que no distorsionaría la información.

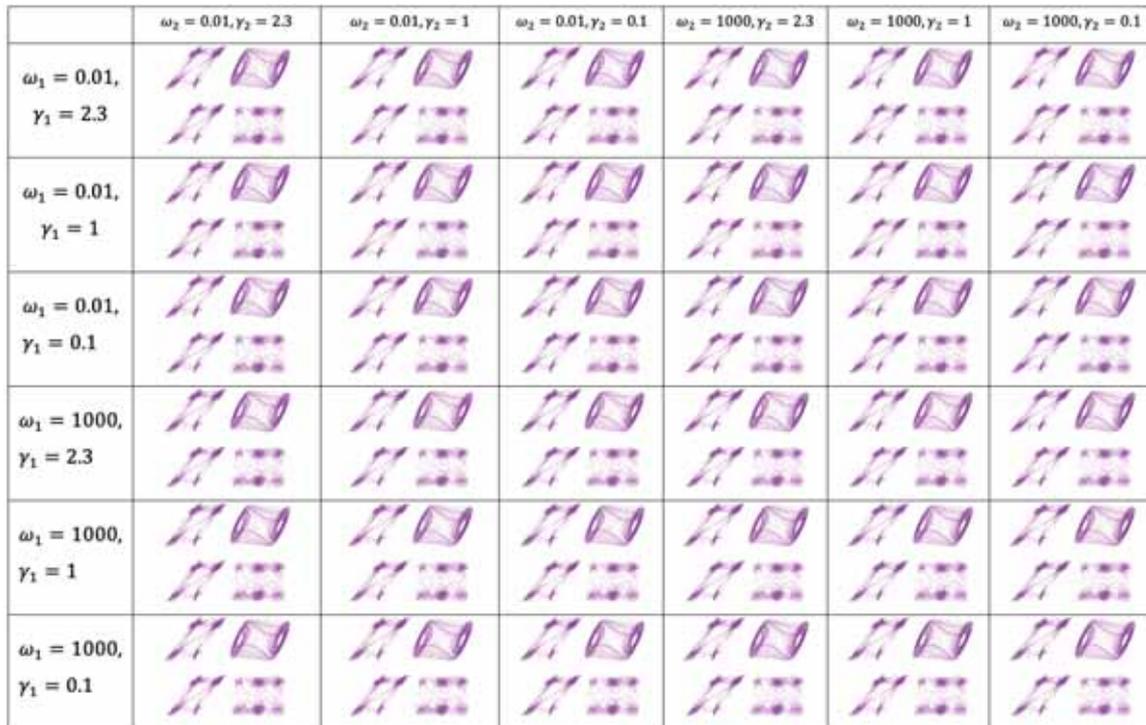


Figura 5.6: Resultados para la doble perturbación magnética en los circuitos S1 y S2, caso B.

En el caso B, con la Fig. 5.6 sigue cumpliendo, como en el primer caso, la conservación de la naturaleza de la dinámica en todos los casos, de tal manera que no hay sincronización en ningún circuito.

Para el cambio de información entre circuitos, este caso sería muy poco útil, pues, al no presentar sincronización alguna, todo mensaje sería distorsionado en su totalidad.

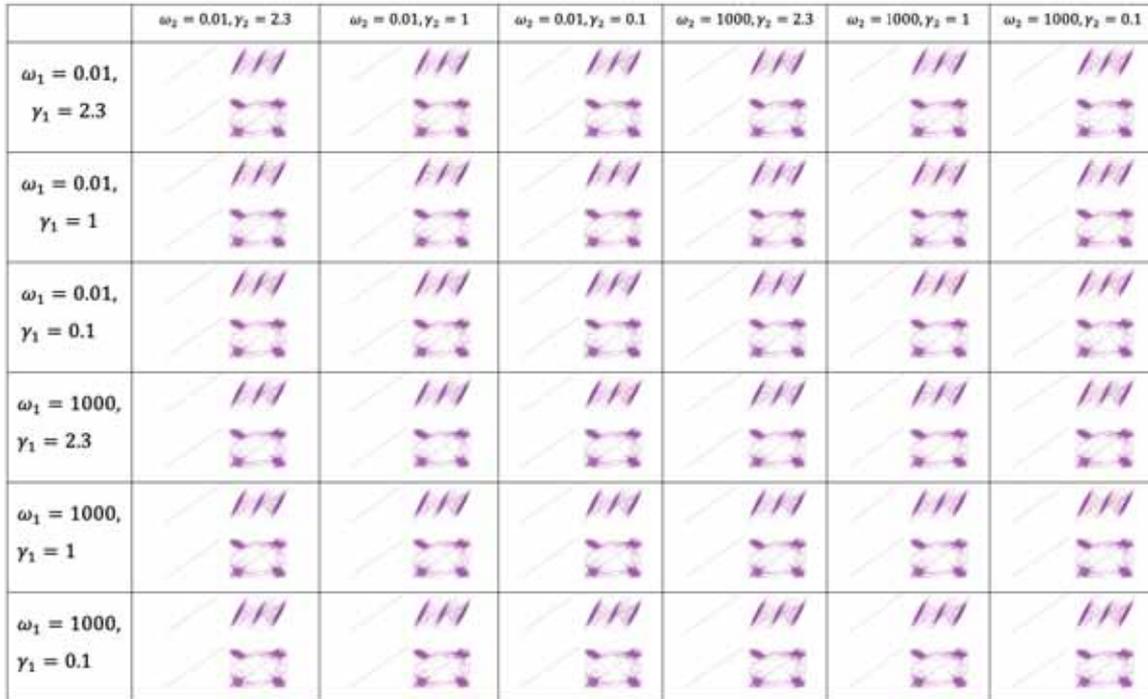


Figura 5.7: Resultados para la doble perturbación magnética en los circuitos S1 y S2, caso C.

En el tercer caso, Fig. 5.7 vemos que continua manteniendo la dinámica constante en todos los casos, teniendo sincronización en las cadenas S1-S3 y S5-S7, además de los tres atractores en el circuito de acoplamiento S4.

Para el cambio de información entre circuitos, este caso resulta ser el más eficiente o ideal, pues tanto en la primera cadena, S1-S3, como en la segunda, S5-S7, al tener sincronización independiente en todos los casos, puede haber un intercambio sin distorsión en las dos cadenas, pero no entre ellas.

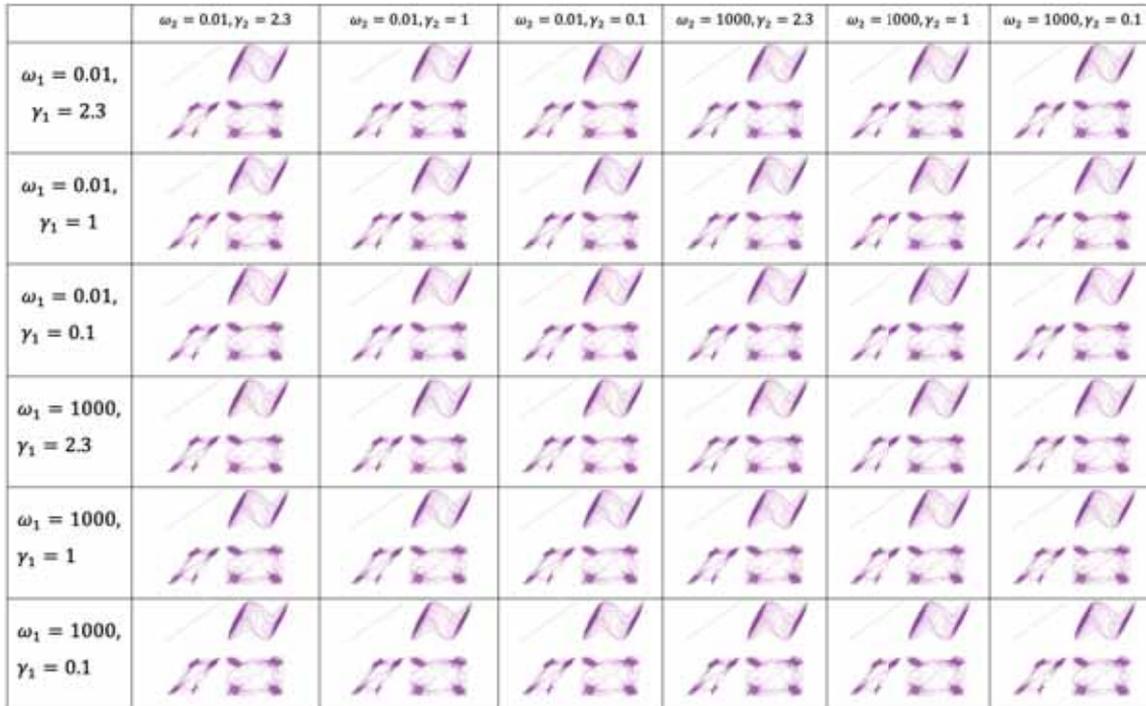


Figura 5.8: Resultados para la doble perturbación magnética en los circuitos S1 y S2, caso D.

En este último caso, tenemos únicamente sincronización en la cadena S1-S3, continuando con la naturaleza característica.

En cuanto al intercambio de información, este caso podría ser la contraparte del Caso A, pues en este último caso sólo podría haber intercambio de información en la cadena S1-S3, mientras que en el primero habría en la cadena S5-S7.

### ▷ Doble perturbación en los circuitos S1 y S3

Siguiendo el mismo orden de la sección de la doble perturbación en los circuitos S1-S2 en las Figs. 5.9-5.12 se presentan los resultados para el caso de la doble perturbación magnética en los circuitos S1 y S3, para los casos A, B, C y D respectivamente.

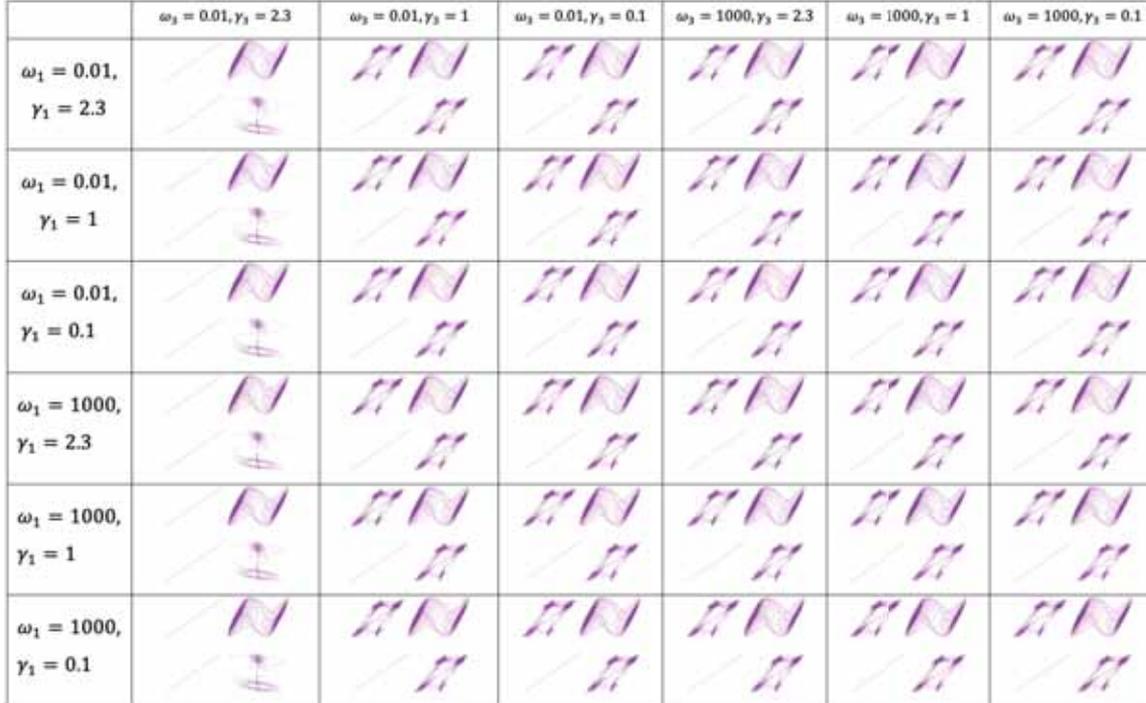


Figura 5.9: Resultados para la doble perturbación magnética en los circuitos S1 y S3, caso A.

Podemos observar que en la mayoría de los casos, se mantiene la naturaleza característica de este caso, como se vio entre los circuitos S1-S2. Pero, para el caso cuando  $\omega_3 = 0.01$  y  $\gamma_3 = 2.3$  ocurre el fenómeno visto en la sección de la perturbación S3, dando como resultado sincronización en la primera y segunda cadena.

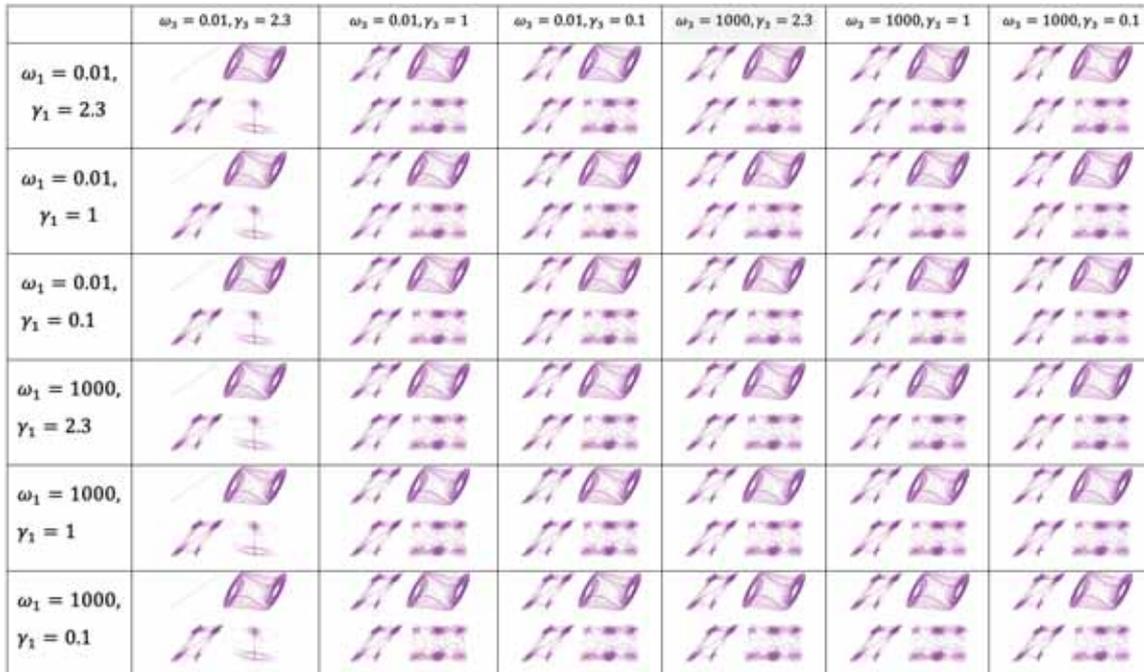


Figura 5.10: Resultados para la doble perturbación magnética en los circuitos S1 y S3, caso B.

Como en el primer caso, podemos notar que cuando  $\omega_3 = 0.01$ ,  $\gamma_3 = 2.3$  adopta la naturaleza vista en la perturbación S3, segundo caso, pasando de no tener sincronización en ninguna cadena, a tener sincronización en la primera cadena de circuitos S1-S3. Del otro lado, la dinámica del circuito de Chua S4 se sigue manteniendo con su doble atractor. Además de que en la señal  $x_1$  vs  $x_7$  sus seis atractores pasan a ser una dinámica diferente.

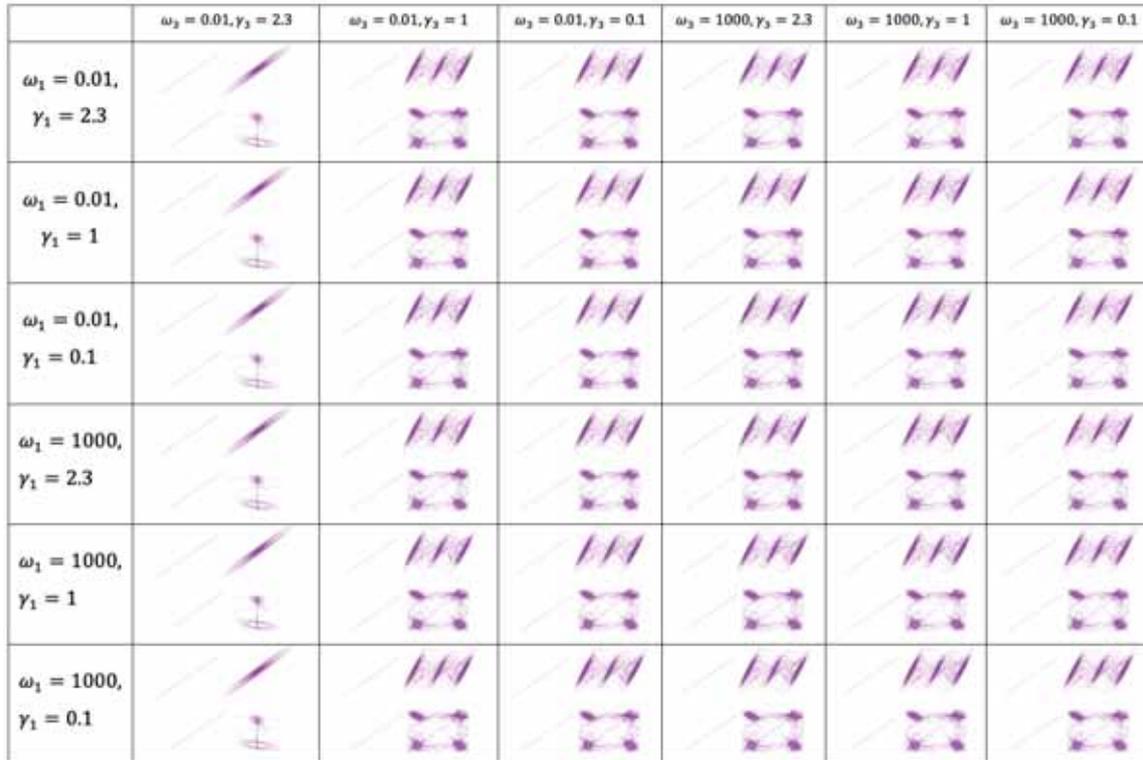


Figura 5.11: Resultados para la doble perturbación magnética en los circuitos S1 y S3, caso C.

En este caso podemos notar que la sincronización que hay en las dos cadenas de circuitos S1-S3 y S5-S7 se sigue manteniendo en todos los casos. Pero para la dinámica del circuito de acoplamiento S4 cuando  $\omega_3 = 0.01$ ,  $\gamma_3 = 2.3$  pasa de tener tres atractores a ser una órbita divergente.

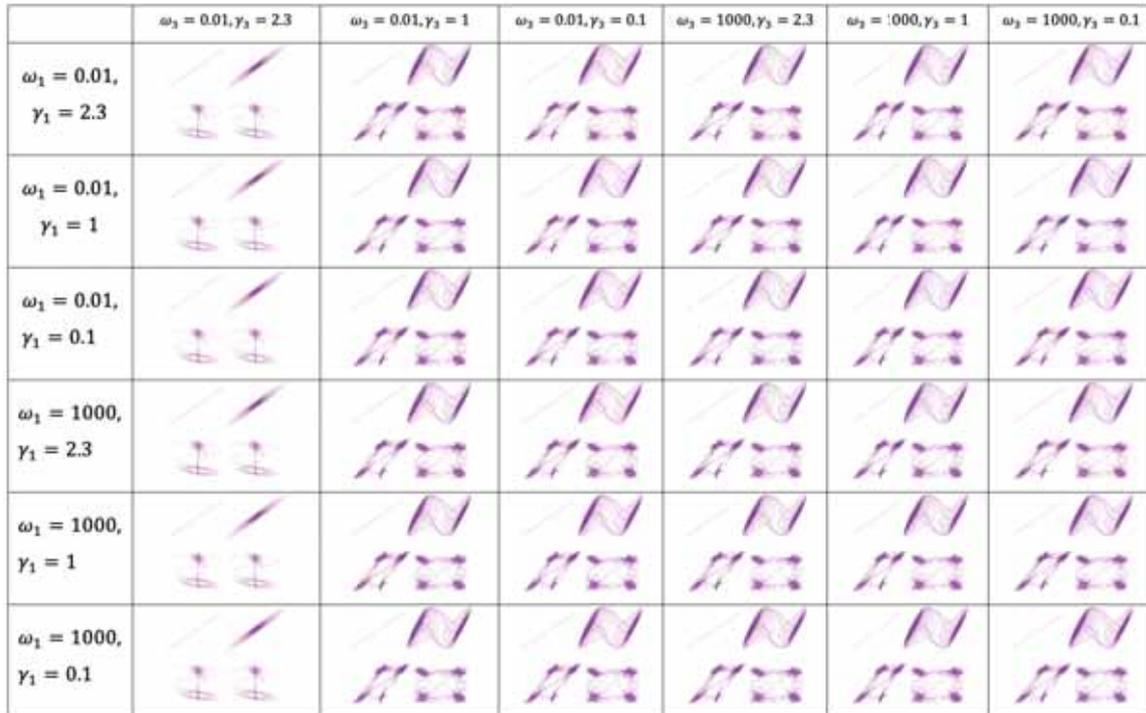


Figura 5.12: Resultados para la doble perturbación magnética en los circuitos S1 y S3, caso D.

En este caso, con la Fig. 5.12 podemos notar que en cuanto a sincronización en la primera cadena S1-S3 se sigue manteniendo, y, como en el tercer caso, cuando  $\omega_3 = 0.01$ ,  $\gamma_3 = 2.3$ , los dos atractores en el circuito de acoplamiento S4 se convierten únicamente en una órbita divergente. Además de que en la señal de la segunda cadena y en la de las dos cadenas  $x_1$  vs  $x_7$  pierden sus cuatro atractores y su dinámica pasa a comportarse de manera distinta.

### ▷ Doble perturbación en los circuitos S2 y S3

Siguiendo el mismo orden de la sección de la doble perturbación en los circuitos S1-S2 y S1-S3, en las Figs. 5.13-5.16 se presentan los resultados para el caso de la doble perturbación magnética en los circuitos S2 y S3, para los casos A, B, C y D, respectivamente.

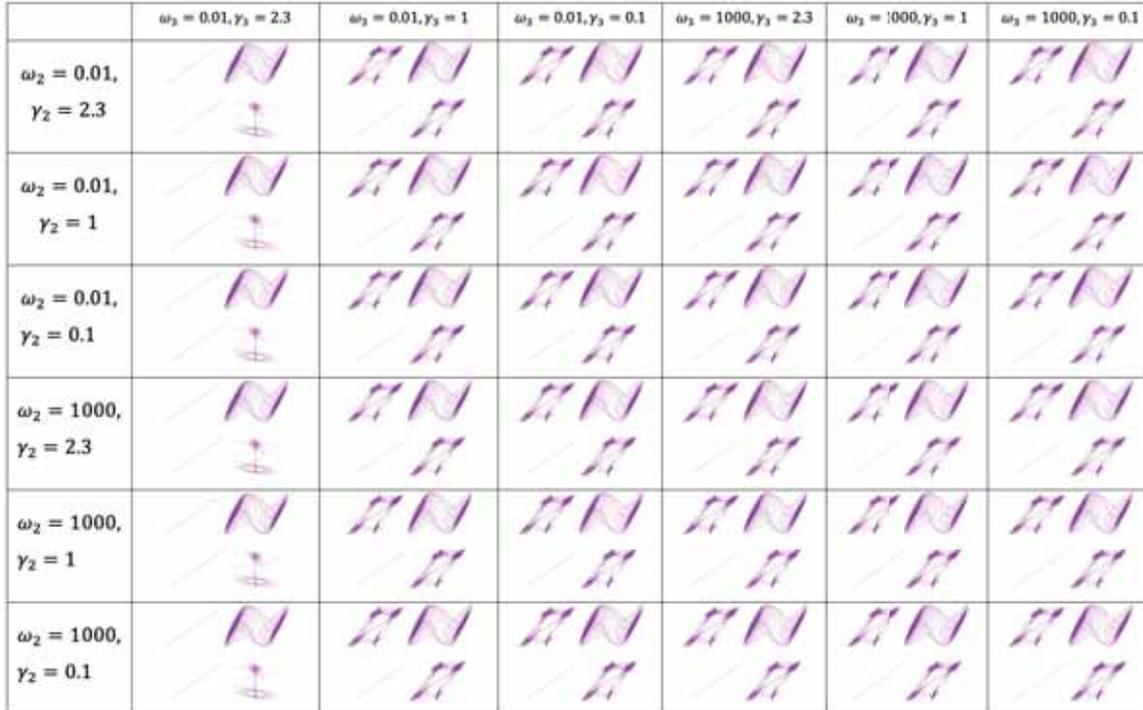


Figura 5.13: Resultados para la doble perturbación magnética en los circuitos S2 y S3, caso A.

Podemos en la Fig. 5.13 observar que en la mayoría de los casos, se mantiene la naturaleza característica de este caso, como se vió entre los circuitos S1-S2. Pero, para el caso cuando  $\omega_3 = 0.01$  y  $\gamma_3 = 2.3$  ocurre el fenómeno visto en la sección de la perturbación S3, dando como resultado una doble sincronización en la primera y segunda cadena.



Figura 5.14: Resultados para la doble perturbación magnética en los circuitos S2 y S3, caso B.

Como en el primer caso, podemos notar que cuando  $\omega_3 = 0.01$ ,  $\gamma_3 = 2.3$  adopta la naturaleza vista en la perturbación S3, segundo caso, pasando de no tener sincronización en ninguna cadena, a tener sincronización en la primera cadena de circuitos S1-S3. Del otro lado, la dinámica del circuito de Chua S4 se sigue manteniendo con su doble atractor.

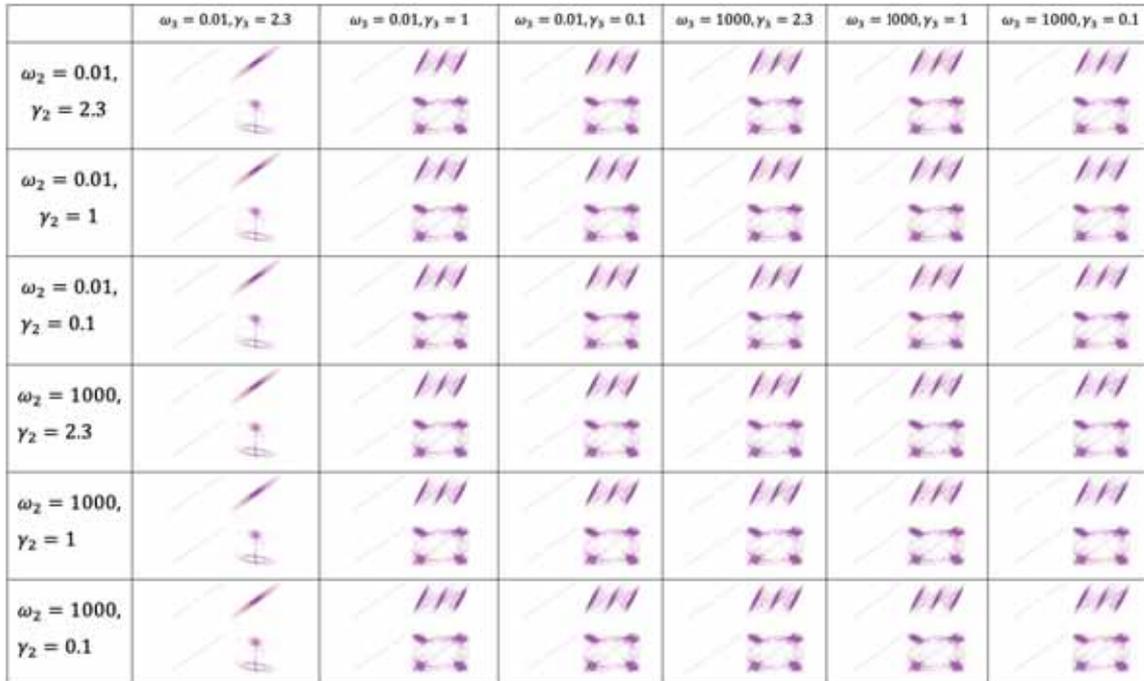


Figura 5.15: Resultados para la doble perturbación magnética en los circuitos S2 y S3, caso C.

En este caso, podemos notar que la sincronización en las dos cadenas de circuitos S1-S3 y S5-S7 se sigue manteniendo en todos los casos. Pero para la dinámica del circuito de acoplamiento S4 cuando  $\omega_3 = 0.01$ ,  $\gamma_3 = 2.3$  pasa de tener tres atractores a ser una órbita divergente.

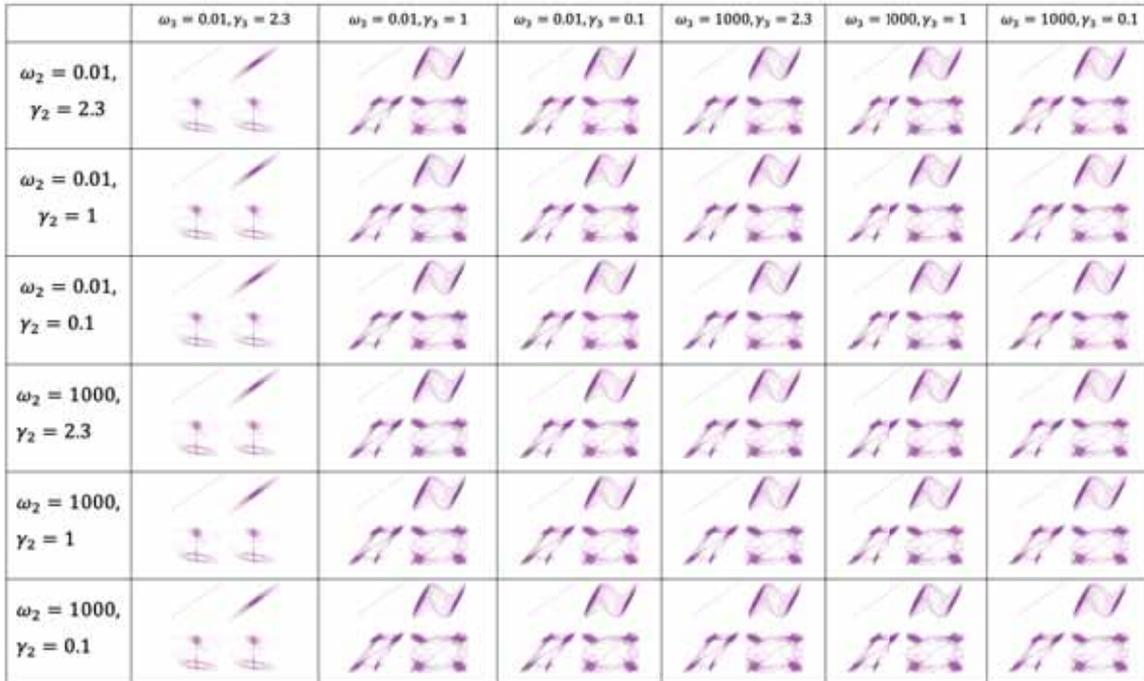


Figura 5.16: Resultados para la doble perturbación magnética en los circuitos S2 y S3, caso D.

En la Fig. 5.16 podemos notar que en cuanto a sincronización en la cadena S1-S3 se sigue manteniendo, y, como en el tercer caso, cuando  $\omega_3 = 0.01$ ,  $\gamma_3 = 2.3$ , los dos atractores en el circuito de acomplamiento S4 se convierten en una órbita divergente.

## SECCIÓN 5.2

## Análisis entrópico

En esta sección se presentan el análisis entrópico de los resultados gráficos presentados en la sección anterior.

### 5.2.1 Doble perturbación en los circuitos S1 y S2

Para la doble perturbación en los circuitos S1 y S2 la entropía de imagen  $S$ , Ec. (3.11) no varía significativamente a los cambios de  $\omega_{1,2}$  y  $\gamma_{1,2}$ .

La Fig. 5.17 presenta el cambio de la entropía  $S$  para los casos A, B, C y D, para las imágenes de las cuatro señales de monitoreo del sistema analizado indicados en el eje horizontal y de la figura. Los casos A, B, C y D fueron definidos en la Ec. (5.1).

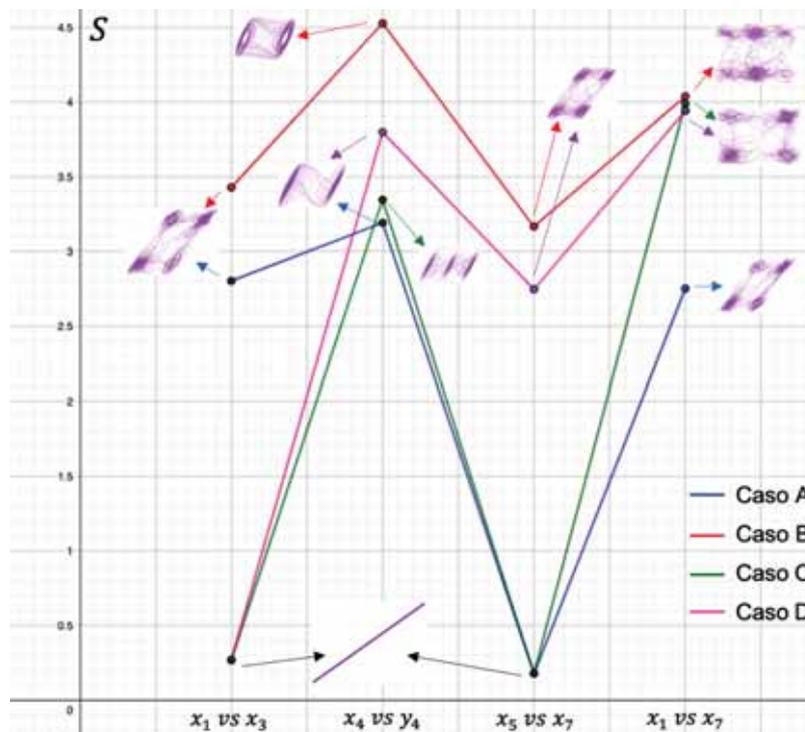


Figura 5.17: Variación de la entropía  $S$  en la doble perturbación S1-S2.

Como se puede observar en la Fig. 5.17, la dinámica de Chua en el circuito de acopla-

miento, cuando tiene dos atractores, puede tener diferente entropía, siendo la mayor en el Caso B (además de ser el caso de mayor entropía de todos los casos y todas las señales que se monitorearon) y el menor en el caso A. Mientras que cuando tiene cuatro atractores la entropía es mayor en el Caso B en la señal  $x_1$  vs  $x_7$  y menor en el Caso A en la señal  $x_1$  vs  $x_7$ .

También vemos que el Caso C es el único caso donde llega dos veces a la entropía mínima, esto debido a que es el caso donde se presenta sincronización en las dos cadenas, pero no entre ellas. Por otro lado el Caso B es el único caso donde no toca la entropía mínima, puesto que no presenta sincronización en ninguna señal. Además del hecho del que es el caso donde hay mas entropía en todas las señales.

Podemos ver que en todos los casos, las gráficas van en “ZigZag”, de la primera señal a la segunda las gráficas van hacia arriba, después, para la segunda señal a la tercera la entropía baja, y por último, de la tercera a la cuarta señal, la entropía vuelve a subir.

### 5.2.2 Doble perturbación en los circuitos S1 y S3

Para esta subsección se toman cuatro variables, que son  $\omega_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $\omega_3$  y  $\gamma_3$ , de las cuales  $\omega_1$  y  $\gamma_1$ , son los que se varían sus valores, mientras que  $\omega_3$  y  $\gamma_3$  se dejan fijos, teniendo los seis casos definidos en la Ec. (5.2).

- a)  $\gamma_3 = 0.1, \quad \omega_3 = 0.01.$
  - b)  $\gamma_3 = 0.1, \quad \omega_3 = 1000.$
  - c)  $\gamma_3 = 1, \quad \omega_3 = 0.01.$
  - d)  $\gamma_3 = 1, \quad \omega_3 = 1000.$
  - e)  $\gamma_3 = 2.3, \quad \omega_3 = 0.01.$
  - f)  $\gamma_3 = 2.3, \quad \omega_3 = 1000.$
- (5.2)

Se consideran los siguientes valores de  $\gamma_1$  y  $\omega_1$  para definir seis puntos;  $P_1 = (\gamma_1 = 0.1, \omega_1 = 0.01)$ ,  $P_2 = (\gamma_1 = 1, \omega_1 = 0.01)$ ,  $P_3 = (\gamma_1 = 2.3, \omega_1 = 0.01)$ ,  $P_4 = (\gamma_1 = 0.1, \omega_1 = 1000)$ ,  $P_5 = (\gamma_1 = 1, \omega_1 = 1000)$  y  $P_6 = (\gamma_1 = 2.3, \omega_1 = 1000)$ . Con los seis valores fijos, definidos en la Ec. (5.2) y los seis puntos, se analizaron los casos vistos en la Sección 5.1.2 obteniéndose los resultados mostrados en las Figs. 5.18-5.21, para los casos A, B, C y D, respectivamente.

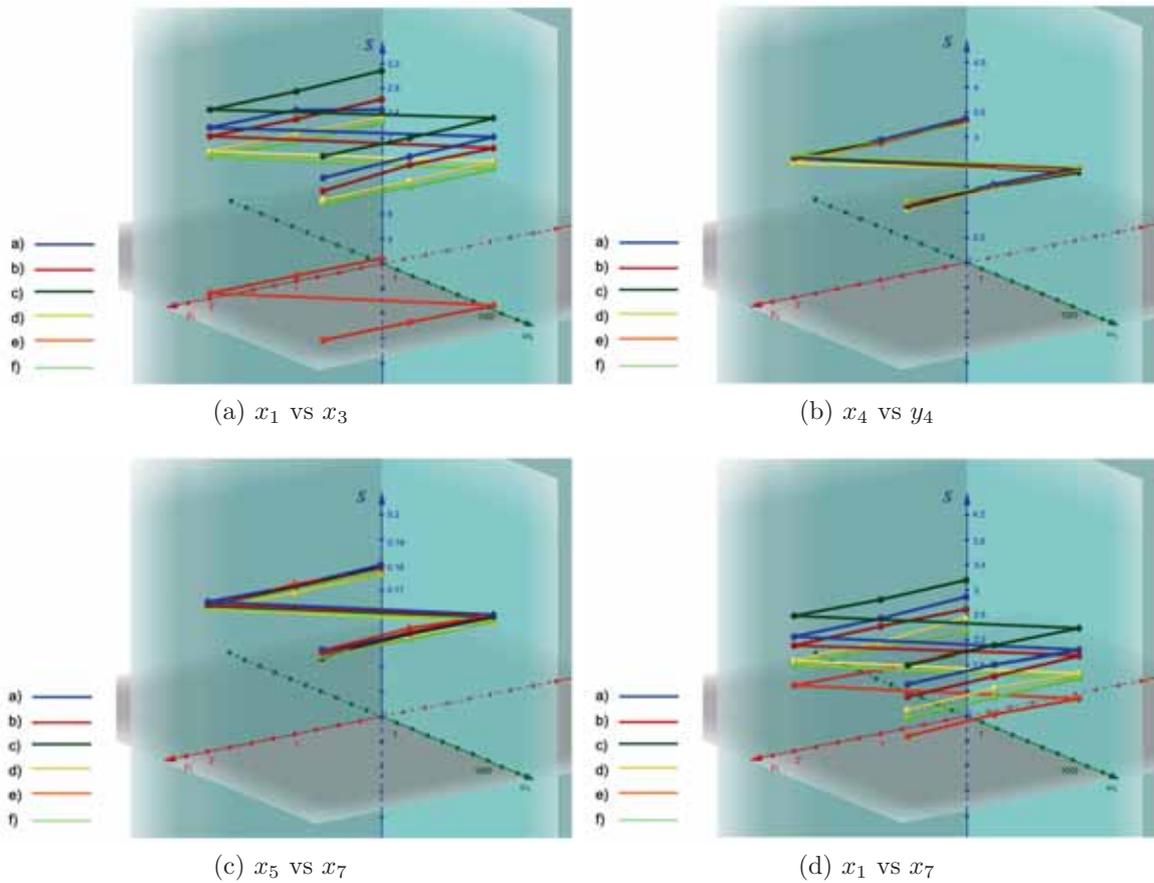


Figura 5.18: Variación de la entropía de la doble perturbación S1-S3, Caso A.

En la primera señal monitoreada, Fig. 5.18(a), podemos ver una cercanía de valores de la entropía en la mayoría de los incisos, excepto en el e) donde baja considerablemente el valor de la entropía, esto se debe a que hay sincronización en la primera cadena únicamente en ese inciso, mientras que en los demás no la hay, siendo esa la razón por la que en los demás hay un valor de entropía mayor.

En la segunda y tercera señales monitoreadas, Figs. 5.18(b) y 5.18(c), muestran una constancia de valor de la entropía, variando insignificativamente, siendo que en la segunda señal siempre se presenta el doble atractor de Chua, y en la tercera la sincronización en la segunda cadena.

Por último, en la señal de  $x_1$  vs  $x_7$ , Fig. 5.18(d), los valores de la entropía para los 4 atractores que presenta la no sincronización entre las cadenas, con excepción del e) donde no se presentan cuatro atractores, sino que se comporta de manera diferente (véase el segundo caso de la Fig. 4.2 y la Fig. 5.16).

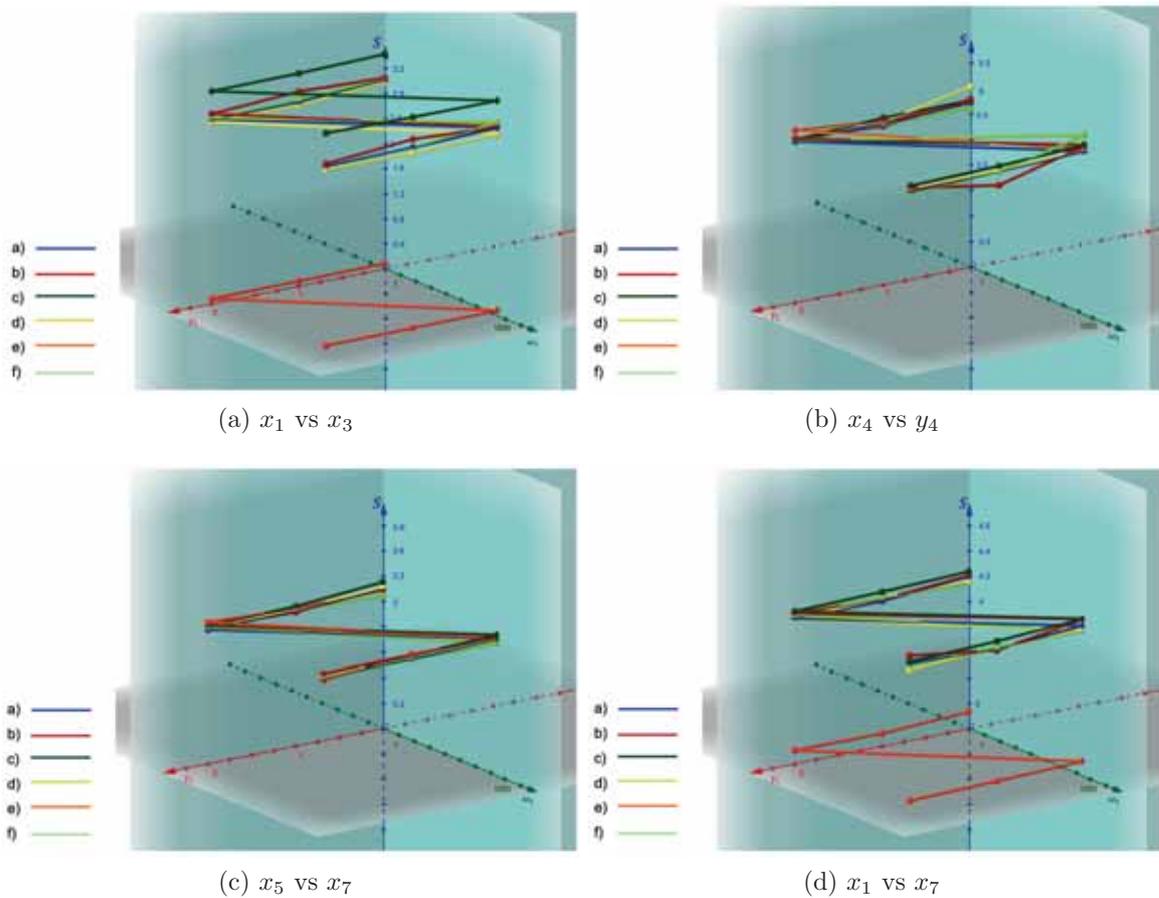


Figura 5.19: Variación de la entropía de la doble perturbación S1-S3, Caso B.

En la primera señal monitoreada, Fig. 5.19(a), al igual que en el Caso A en la mayoría de los casos no presenta sincronización en la primera cadena, lo que provoca una entropía alta, con excepción del e) donde presenta una sincronización en la primera cadena, que da como resultado una entropía baja.

En la segunda y tercera señales monitoreadas, Figs. 5.19(b) y 5.19(c), muestra una constancia de valor de la entropía, variando insignificativamente, siendo que en la segunda señal siempre se presenta el doble atractor de Chua, y en la tercera presenta una dinámica con cuatro atractores.

Por último, en la señal de  $x_1$  vs  $x_7$ , Fig. 5.19(d), los valores de la entropía para los 6 atractores que presenta la no sincronización entre las cadenas, con excepción del e) donde no se presentan cuatro atractores, sino que se comporta de manera diferente como en el Caso A, como consecuencia, la entropía baja drásticamente.

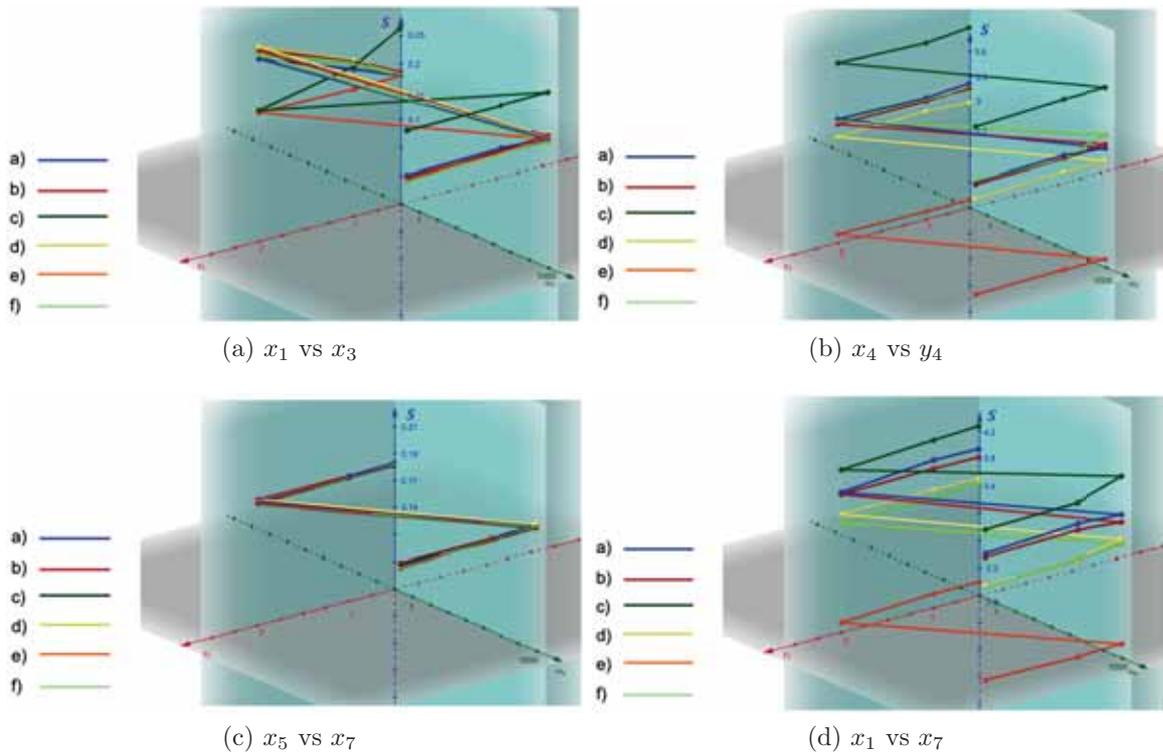


Figura 5.20: Variación de la entropía de la doble perturbación S1-S3, Caso C.

En la primera y tercera señales monitoreadas, Figs. 5.20(a) y 5.20(c), se presenta sincronización, mientras que en la segunda señal se presenta coexistencia en el valor de la entropía, en la primera no es así, el cambio de valor que se presenta se debe a que la línea de sincronización se hace más o menos ancha; para cuando se hace más ancha se obtienen más píxeles en color gris y de ese modo aumenta el valor de la entropía.

En la segunda señal monitoreada, Fig. 5.20(b), se presentan varios niveles de entropía para la señal del circuito de acoplamiento cuando tiene tres atractores en la mayoría de los casos, siendo una diferencia no despreciable entre ellas, puesto que en este caso, la dinámica se ve fácilmente perturbada por el campo magnético, siempre preservando los tres atractores. En el e) los tres atractores colapsan y se obtiene una órbita divergente, obteniendo como resultado una entropía de bajo valor.

En la última señal monitoreada, Fig. 5.20(d), pasa lo mismo que en el Caso A, la no sincronización presenta cuatro atractores en la mayor parte de los incisos, pero no con el e), siendo este pasando a comportarse de manera diferente, manteniendo la no sincronización.

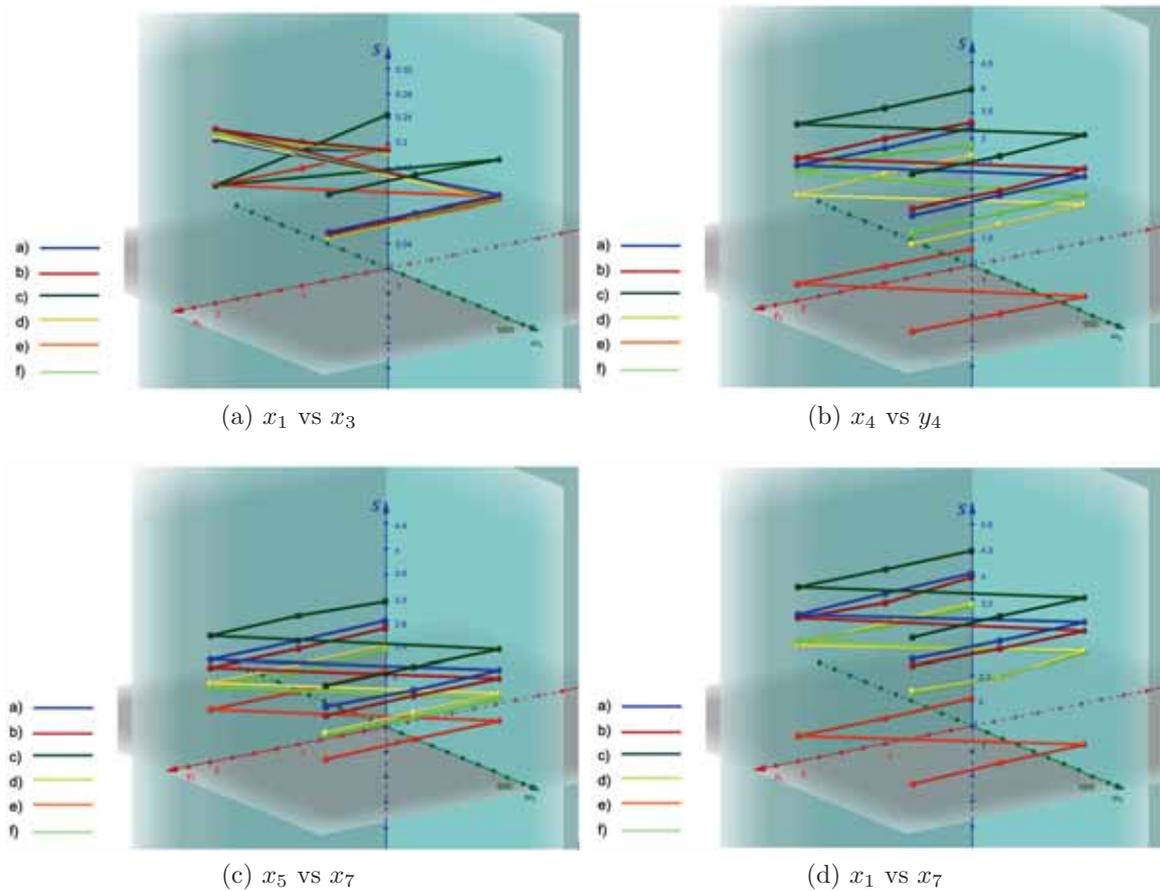


Figura 5.21: Variación de la entropía de la doble perturbación S1-S3, Caso D.

Como en el Caso C, en la primera señal monitoreada, Fig. 5.21(a), se presenta sincronización teniendo variación en la entropía debido a si la línea de sincronización se hace mas o menos ancha.

En la segunda señal monitoreada, Fig. 5.21(b), la entropía se mantiene cercano en la mayoría de los inciso, con excepción en el caso e), donde la entropía baja drásticamente, esto debido al cambio de naturaleza, mientras en los otros casos había una dinámica de Chua con dos atractores, en el caso e) pasa a ser una órbita divergente.

En la tercera señal monitoreada, Fig. 5.21(c), la entropía en cada caso va bajando, en la mayoría de los casos hay una dinámica de cuatro atractores, cada una siendo diferente a la otra, explicada por el valor de la entropía, sin embargo, en el caso e) no es así, deja de tener sus cuatro atractores y se comporta de manera diferente.

Por último, en la cuarta señal monitoreada, Fig. 5.21(d), pasa lo mismo que en el caso de  $x_5$  vs  $x_7$ , puesto que pasa de tener cuatro atractores pasa a comportarse de manera

distinta en el caso e), bajando drásticamente el valor de la entropía.

### 5.2.3 Doble perturbación en los circuitos S2 y S3

Siguiendo con la misma metodología de la Subsección 5.2.2 en donde se dejan fijos los valores de  $\gamma_3$  y  $\omega_3$  definidos en la Ec. (5.2) y con los valores de  $\gamma_2$  y  $\omega_2$  que definieron los seis puntos señalados en esta subsección, se obtuvieron los resultados presentados en las Figs. 5.22-5.25, para los casos A, B, C y D, respectivamente.

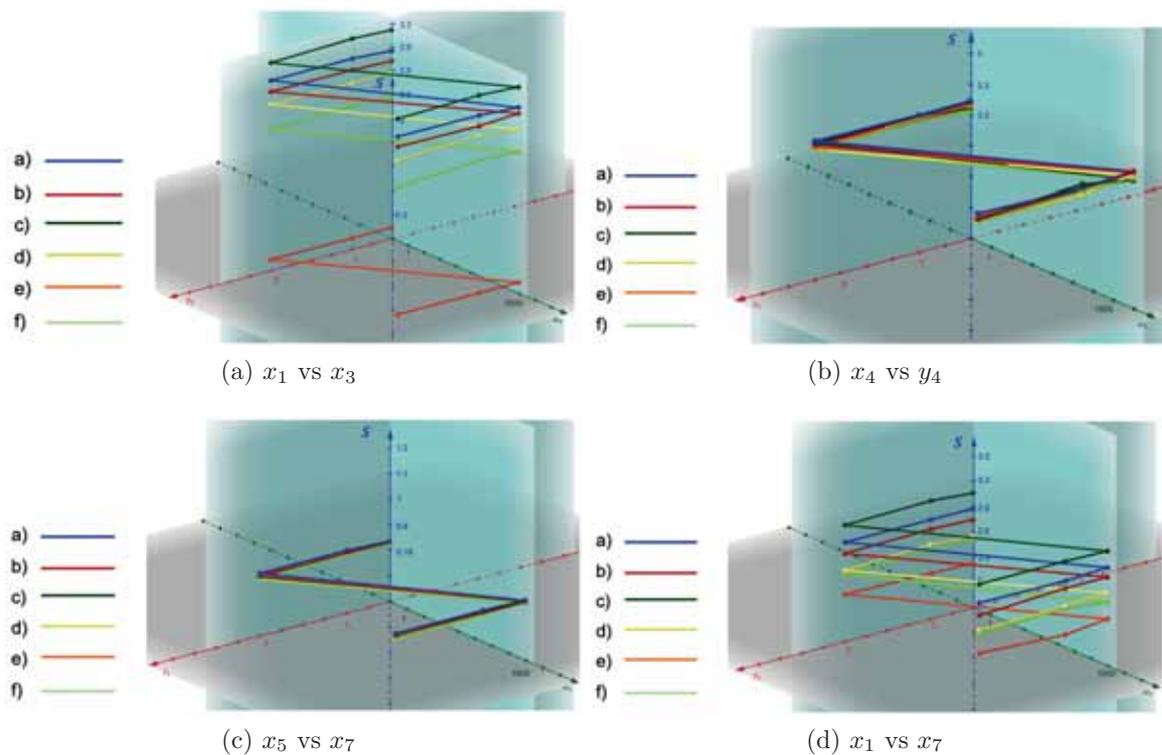


Figura 5.22: Variación de la entropía de la doble perturbación S2-S3, Caso A.

En este caso, las gráficas muestran un gran parecido a las de la doble perturbación en los circuitos S1 y S3 del Caso A, por lo que se llega a las mismas conclusiones.

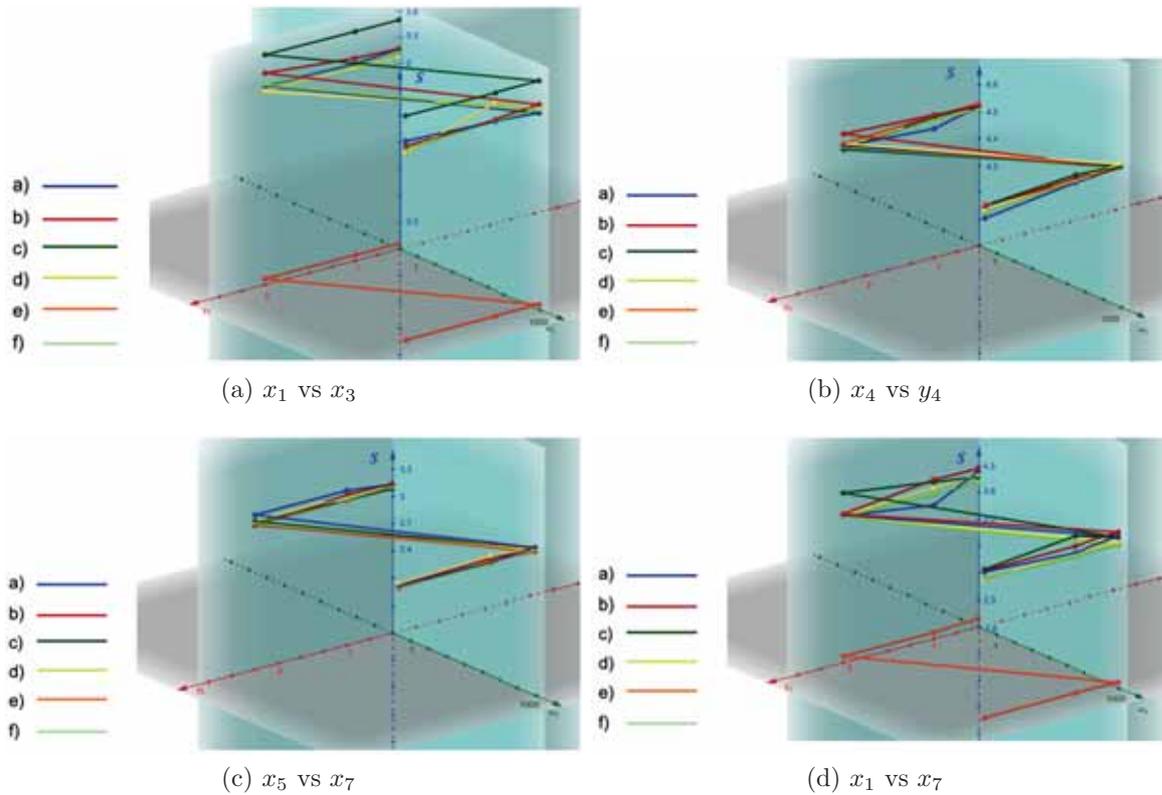


Figura 5.23: Variación de la entropía de la doble perturbación S2-S3, Caso B.

En este caso, al igual que en el anterior, las gráficas no muestran gran diferencia a las de la doble perturbación en los circuitos S1 y S3 del Caso B, por lo que se llega a las mismas explicaciones.

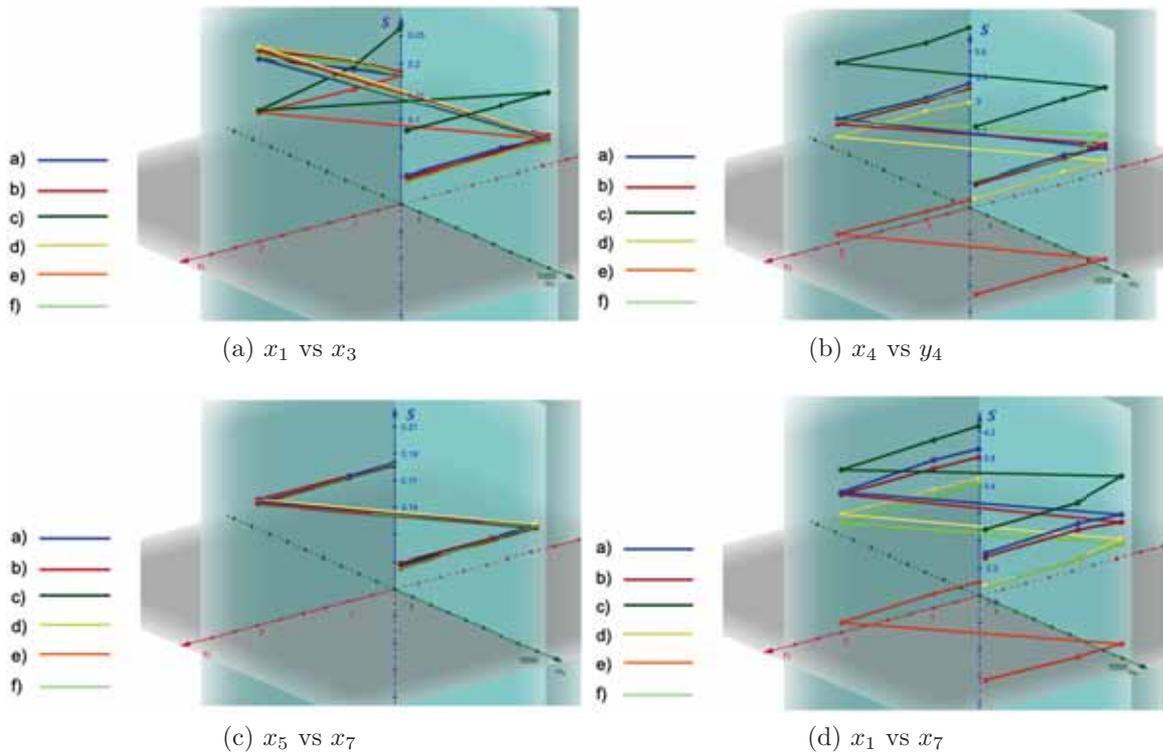


Figura 5.24: Variación de la entropía de la doble perturbación S2-S3, Caso C.

En este caso, las gráficas muestran un gran parecido a las de la doble perturbación en los circuitos S1 y S3 del Caso C, por lo que se llega a las mismas conclusiones.

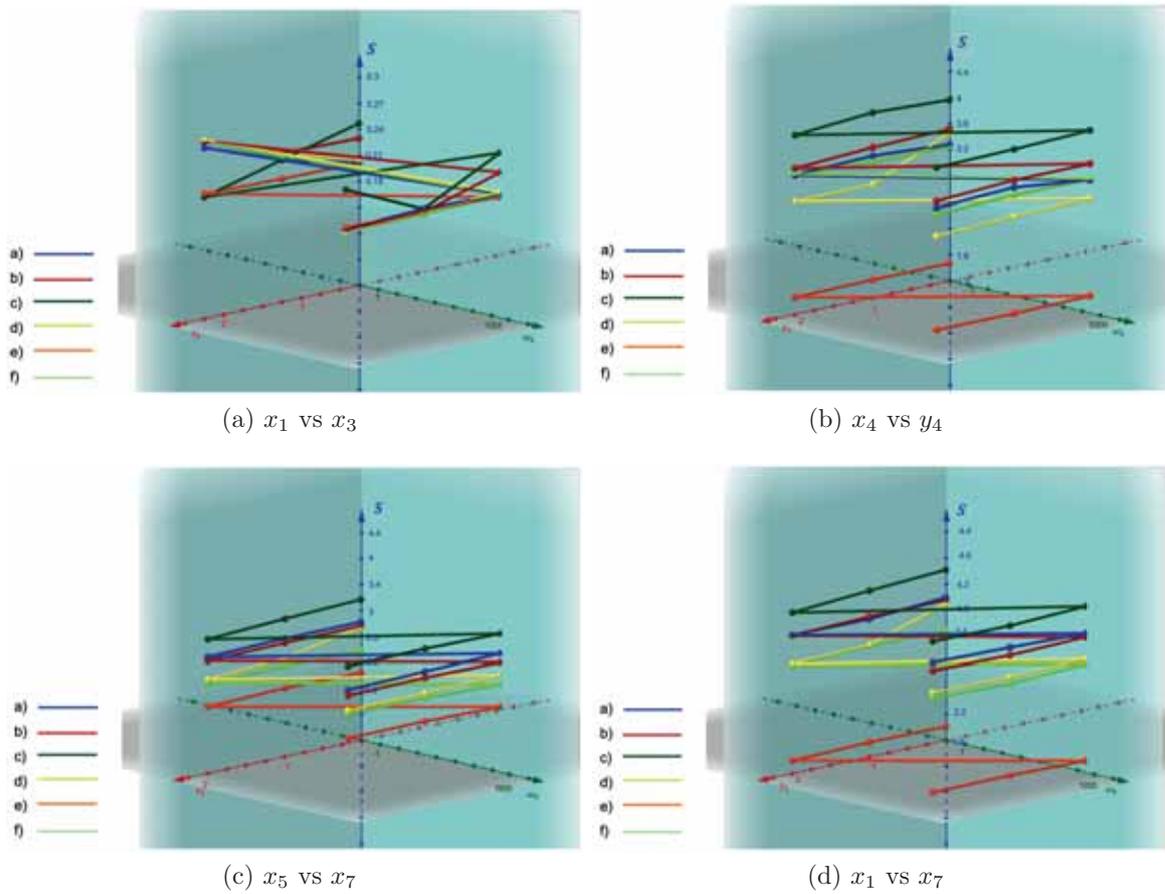


Figura 5.25: Variación de la entropía de la doble perturbación S2-S3, Caso D.

En este caso, al igual que en el anterior, las gráficas no muestran gran diferencia a las de la doble perturbación en los circuitos S1 y S3 del Caso D, por lo que se llega a las mismas explicaciones.

---

# Capítulo 6

---

## Conclusiones y Comentarios Finales

---

En esta tesis se presentó un estudio numérico de la dinámica de sincronización entre dos cadenas caóticas acopladas por un elemento caótico, y sujetas a perturbaciones magnéticas. Se hizo un análisis entrópico. Las conclusiones se pueden sintetizar en los siguientes apartados.

Cuando se presenta sincronización en alguna de las señales hace que sea ideal para intercambio de información entre circuitos.

Para los resultados de la perturbación magnética en un sólo circuito se llega a que la perturbación en el circuito S1 o el circuito S2 no tiene consecuencias en la dinámica de las señales. Para cuando hay perturbación en el circuito de acoplamiento, cuando  $\omega_4 = 0.01$  y  $\gamma_4 = 2.3$ , 1. Se concluyó que el caso de mayor interés para el intercambio de información es cuando hay perturbación en el circuito S3, cuando  $\omega_3 = 0.01$  y  $\gamma_3 = 2.3$ , puesto que da como consecuencia una sincronización para la señal  $x_1$  vs  $x_3$  en todos los casos, teniendo dos veces una sincronización en las dos cadenas pero no entre ellas. Además de que en el Caso B, en el cual no presentaba sincronización alguna, presenta una sincronización en la primera señal.

En la doble perturbación magnética, el análisis gráfico mostró que el comportamiento del circuito S3 vuelve a tener un interés, pues es el que genera sincronización en señales donde no había. En la doble sincronización en los circuitos S1 y S2 muestra una continuidad en la naturaleza de las señales, sin embargo, cuando hay una doble perturbación en donde uno de los circuitos es el circuito S3 la naturaleza cambia cuando  $\omega_3 = 0.01$ ,

---

$\gamma_3 = 2.3$ , y al igual que en la perturbación en un sólo circuito, da como resultado una sincronización para la señal  $x_1$  vs  $x_3$  en todos los casos, teniendo dos veces una sincronización en las dos cadenas pero no entre ellas, además de que en el Caso B, en el cual no presentaba sincronización alguna, presenta una sincronización en la primera señal.

El análisis entrópico mostró que, aunque en casos que muestran la misma naturaleza, no son exactamente las mismas, mostrando una diferencia entrópica. Es decir, el cálculo de la entropía de imagen es una herramienta cuantitativa para caracterizar el estado dinámico de las señales. Un ejemplo es cuando hay sincronización en el Caso C de la doble perturbación en los circuitos S1-S3, la primera señal  $x_1$  vs  $x_3$  mostró una gran diferencia entre señales, siendo consecuencia de si la línea de sincronización es más o menos ancha, mientras que la tercera señal presentó una constancia de la entropía, teniendo diferencias mínimas entre ellas.

---

# A

---

## Apéndice

---

### SECCIÓN A.1

#### Ecuaciones de Chua

Para resolver este circuito aplicamos las leyes de Kirchhoff para los voltajes (conservación de la energía) y las corrientes<sup>1</sup> (conservación de la carga) [Tipler 2000]:

$$\sum_i^n V_i = V_1 + V_2 + \dots + V_n = 0,$$

$$\sum_i^n I_i = I_1 + I_2 + \dots + I_n = 0. \tag{A.1}$$

El circuito de Chua, Fig. A.1, lo podemos ver como tres mallas, primero analizaremos las ecuaciones para los potenciales.

---

<sup>1</sup>Recordemos que la ley de Kirchhoff para los voltajes se aplica a una malla y la ley de Kirchhoff para las corrientes se aplica a un nodo.

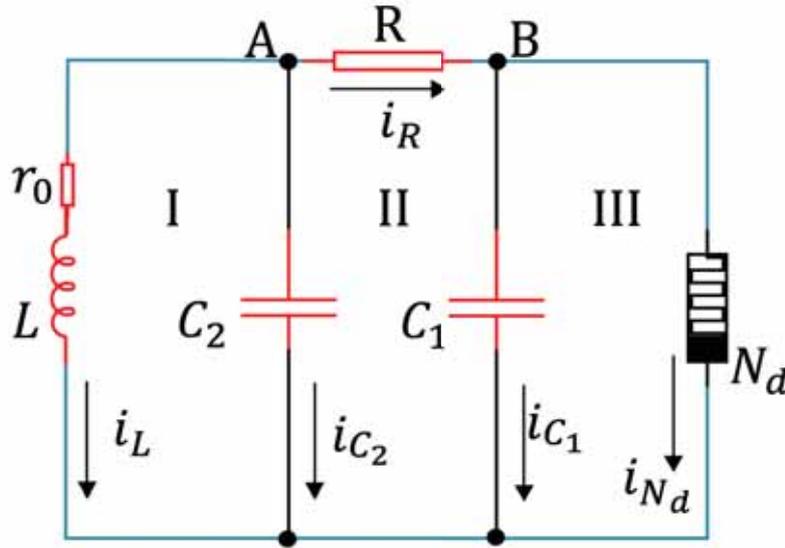


Figura A.1: Circuito de Chua en donde se muestran tres mallas (I, II y III) y dos nodos (A y B) que utilizaremos para obtener las ecuaciones dinámicas del circuito, también se indican de los sentidos que escogimos para las corrientes en los elementos  $L(i_L)$ ,  $R(i_R)$ ,  $N_d(i_{N_d})$ ,  $C_1(i_{C_1})$ , y  $C_2(i_{C_2})$ .

Para la malla I, formada por  $L$  y  $C_2$ , tenemos que:

$$V_L + V_{C_2} = 0 \Rightarrow V_L = -V_{C_2}. \quad (\text{A.2})$$

Para la malla II, formada por  $C_2$ ,  $C_1$  y  $R$ , tenemos que:

$$V_R + V_{C_1} - V_{C_2} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Para la malla III, formada por  $C_1$  y  $N_d$  tenemos que:

$$V_{C_1} - V_{N_d} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Ahora sustituimos en cada ecuación el valor del potencial de los elementos del circuito, teniendo así para la Ec. (A.2):

$$V_L = L \frac{di_L}{dt_{real}} \Rightarrow -V_{C_2} = L \frac{di_L}{dt_{real}}. \quad (\text{A.5})$$

La Ec. (A.5) es una de las ecuaciones del circuito de Chua. Para la Ec. (A.3) que corresponde a la segunda malla sabemos que  $V_R = i_R R$  (por la ley de Ohm), por lo que podemos escribirla como:

$$i_R R + V_{C_1} - V_{C_2} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Despejamos  $i_R$  y obtenemos:

$$i_R = \frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{R}. \quad (\text{A.7})$$

Ahora necesitamos hacer el análisis de las corrientes, teniendo en cuenta el nodo A y B de la Fig. A.1. En el nodo A confluyen las corrientes  $i_L$ ,  $i_{C_2}$  e  $i_R$ , las cuales de acuerdo con las leyes de Kirchhoff para las corrientes cumplen con la condición:

$$i_L = i_{C_2} + i_R. \quad (\text{A.8})$$

Así mismo, en el nodo B confluyen las corrientes  $i_R$ ,  $i_{C_1}$  e  $i_{N_d}$ , que satisfacen la condición:

$$i_R = i_{C_1} + i_{N_d}. \quad (\text{A.9})$$

Ya tenemos todas las expresiones necesarias para obtener las ecuaciones del circuito de Chua, solo falta realizar algunas sustituciones para simplificar términos. Igualando la Ec. (A.7) con la Ec. (A.9) se tendrá:

$$\frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{R} = i_{C_1} + i_{N_d}. \quad (\text{A.10})$$

Además sabemos que la corriente en un capacitor es  $i_{C_1} = C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt_{real}}$  y al sustituirla en la Ec. (A.10) nos queda:

$$\frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{R} = C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt_{real}} + i_{N_d}, \quad (\text{A.11})$$

que es la segunda ecuación del circuito de Chua. Para la tercera ecuación sustituimos la Ec. (A.7) en la Ec. (A.8) y nos queda:

$$i_L = i_{C_2} + \frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{R}, \quad (\text{A.12})$$

donde  $i_{C_2} = C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt_{real}}$  y  $i_L = \frac{V_L}{R}$  y sustituyendo tenemos que:

$$i_L = C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt_{real}} + \frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{R}. \quad (\text{A.13})$$

Finalmente se obtiene el sistema de ecuaciones que describen su comportamiento, las cuales son las Ecs. (A.5), (A.11) y (A.13) enunciadas en seguida:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt_{real}} &= \frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{R} - g(V_{C_1}), \\ C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt_{real}} &= i_L - \frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{R}, \\ L \frac{di_L}{dt_{real}} &= -V_{C_2}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Aquí  $V_i$  es el voltaje al que se encuentra el condensador  $C_i$ ,  $i_L$  es la corriente que circula por la inductancia y  $g(V_{C_1})$  es la relación no lineal que da la corriente en el diodo de Chua ( $i_{N_d}$ ) en función con su tensión (Fig. A.1) y que esta dada por la ecuación:

$$g(V_{C_1}) = i_{N_d} = m_b V_1 + \frac{1}{2}(m_a - m_b)(|V_{C_1} + B|) - (|V_{C_1} - B|), \quad (\text{A.15})$$

donde las cantidades  $m_b$ ,  $m_a$  y  $B$ , están en función de los componentes del circuito [Kennedy 1992]

$$m_a = -\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_6}, \quad m_b = -\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}, \quad B = \frac{R_5 E_{sat}}{R_5 + R_6}. \quad (\text{A.16})$$

Para facilitar los cálculos de las soluciones es necesario escribirlas en su forma adimensional, para lo cual hacemos las sustituciones siguientes:

$$x = \frac{V_1}{B}, \quad y = \frac{V_2}{B}, \quad z = I \frac{R}{B}, \quad a = m_a R,$$

$$b = m_b R, \quad \alpha = \frac{C_2}{C_1}, \quad \beta = C_2 \frac{R^2}{L}, \quad t = t_{real} 1/C_2 R, \quad (\text{A.17})$$

que al simplificar el sistema de ecuaciones nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha(y - h(x)), \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z, \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

donde  $h(x) = x + bx + \frac{1}{2}(a-b)(|x+1| - |x-1|)$ . Si consideramos la resistencia intrínseca  $r_0$  de la bobina Fig. A.1 se introduce un tercer parámetro  $c = \frac{r_0}{L} RC_2$  al sistema de ecuaciones, y así tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha(y - h(x)), \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z, \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y - cz. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

## SECCIÓN A.2

### Método de Runge-Kutta de cuarto orden

En este apéndice mosntraremos el método de Runge-Kutta (RK) de cuarto orden [Burden & Faires 1998] que fue el que se usó para resolver el sistema de ecuaciones (4.1)-(4.7) en particular aplicaremos el método para un acoplamiento unidireccional en el eje de las  $x$ . Sin embargo, este mismo código puede modificarse para obtener el acoplamiento deseado, tanto unidireccional como bidireccional, eligiendo apropiadamente las ecuaciones en donde colocar las constantes de acoplamiento K's.

El método de RK es un método genérico de resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Este conjunto de métodos fue inicialmente desarrollado alrededor del año 1900 por los matemáticos C. Runge y M. W. Kutta.

Los métodos de RK logran la exactitud del procedimiento de una serie de Taylor sin requerir el cálculo de derivadas superiores. Existen muchas variaciones, pero todas se pueden denotar en la forma generalizada de la ecuación:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h, \quad (\text{A.20})$$

donde  $\phi(x_i, y_i, h)$  es conocida como función de crecimiento, la cual puede interpretarse como la pendiente representativa sobre el intervalo, y  $h$  es el incremento.

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n, \quad (\text{A.21})$$

donde las  $a$  son constantes y las  $k$  son:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), \\ k_2 &= f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h), \\ k_3 &= f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Observe que las  $k$  son relaciones de recurrencia, esto es,  $k_1$  aparece en la ecuación para  $k_2$ , la cual en la recurrencia hace que los métodos RK sean eficientes para la programación. Existen varios tipos de métodos RK al emplear diferentes números de términos en la función incremento como la especificada por  $n$ :  $n = 1$ , es el método de Euler. Una vez sea elegido  $n$ , se evalúan las  $a$ 's,  $p$ 's y  $q$ 's al igualar la función incremento a los términos en la serie de Taylor.

**Método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4):** Un miembro de la familia de los métodos Runge-Kutta es usado tan comúnmente que a menudo es referenciado como "RK4" o como "el método Runge-Kutta". Definamos un problema de valor inicial como

$$\dot{y} = f(x, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (\text{A.23})$$

Entonces el método RK4 para este problema está dado por la siguiente ecuación:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h, \quad (\text{A.24})$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), \\ k_2 &= f(x_i + 1/2h, y_i + 1/2k_1h), \\ k_3 &= f(x_i + 1/2h, y_i + 1/2k_2h), \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3h). \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Así, el siguiente valor  $y_{i+1}$  es determinado por el presente valor  $y_i$  más el producto del tamaño del intervalo  $h$  por una pendiente estimada. La pendiente es un promedio ponderado de pendientes.  $k_1$  es la pendiente al principio del intervalo;  $k_2$  es la pendiente en el punto medio del intervalo, usando  $k_1$  para determinar el valor de  $y$  en el punto  $t_n + h/2$  usando el método de Euler;  $k_3$  es otra vez la pendiente del punto medio, pero ahora usando  $k_2$  para determinar el valor de  $y$ ;  $k_4$  es la pendiente al final del intervalo, con el valor de  $y$  determinado por  $k_3$ . Promediando las cuatro pendientes, se le asigna mayor peso a las pendientes en el punto medio:

$$\text{pendiente} = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}. \quad (\text{A.26})$$

Esta forma del método de RK, es un método de cuarto orden, lo cual significa que el error por paso es el orden de  $O(h^5)$ , mientras que el error total acumulado es del orden de  $O(h^4)$ .

A continuación se muestra el método de Runge Kutta aplicado en el sistema de ecuaciones (4.1)-(4.7).

#### PROGRAM cadenachua

```
!Definición de las variables
```

```
parameter(n=5000000)
```

```
real dx1, dy1, dz1, dx2, dy2, dz2, dx3, dy3, dz3
```

```
real dx4, dy4, dz4
```

```
real dx5, dy5, dz5, dx6, dy6, dz6, dx7, dy7, dz7
real xc1, yc1, zc1, xc2, yc2, zc2, xc3, yc3, zc3
real xc4, yc4, zc4
real xc5, yc5, zc5, xc6, yc6, zc6, xc7, yc7, zc7
real a, b, c, m0, m1, tf, dt, t(n+1), h
real x1(n+1), y1(n+1), z1(n+1)
real x2(n+1), y2(n+1), z2(n+1)
real x3(n+1), y3(n+1), z3(n+1)
real x4(n+1), y4(n+1), z4(n+1)
real x5(n+1), y5(n+1), z5(n+1)
real x6(n+1), y6(n+1), z6(n+1)
real x7(n+1), y7(n+1), z7(n+1)
real G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7
real w1, w2, w3, w4, w5, w6, w7
real kx12, kx21, kx23, kx32
real kx2u, kxu2, ky2v, kyv2
real kx24, kx42, kx64, kx46
real kx56, kx65, kx67, kx76
real kn1c1, kn2c1, kn3c1, kn4c1
real kn1c2, kn2c2, kn3c2, kn4c2
real kn1c3, kn2c3, kn3c3, kn4c3
real kn1c4, kn2c4, kn3c4, kn4c4
real kn1c5, kn2c5, kn3c5, kn4c5
real kn1c6, kn2c6, kn3c6, kn4c6
real kn1c7, kn2c7, kn3c7, kn4c7
real ln1c1, ln2c1, ln3c1, ln4c1
real ln1c2, ln2c2, ln3c2, ln4c2
real ln1c3, ln2c3, ln3c3, ln4c3
real ln1c4, ln2c4, ln3c4, ln4c4
real ln1c5, ln2c5, ln3c5, ln4c5
real ln1c6, ln2c6, ln3c6, ln4c6
real ln1c7, ln2c7, ln3c7, ln4c7
real pn1c1, pn2c1, pn3c1, pn4c1
real pn1c2, pn2c2, pn3c2, pn4c2
real pn1c3, pn2c3, pn3c3, pn4c3
real pn1c4, pn2c4, pn3c4, pn4c4
real pn1c5, pn2c5, pn3c5, pn4c5
real pn1c6, pn2c6, pn3c6, pn4c6
real pn1c7, pn2c7, pn3c7, pn4c7
integer i
```

!valor de las condiciones iniciales

w1=0  
w2=0.01  
w3=0.01  
w4=0  
w5=0  
w6=0  
w7=0

a=7  
b=10  
c=0  
m0=-0.28  
m1=0.56  
t(1)=0  
tf=15000  
dt=0.01  
h=0.01

G1=0  
G2=0.1  
G3=0.1  
G4=0  
G5=0  
G6=0  
G7=0

!condiciones de k

kx12=100  
kx21=0

kx23=100  
kx32=0

kx24=0  
kx42=100

kx46=0  
kx64=100

kx56=100  
kx65=0

```
kx67=100
```

```
kx76=0
```

```
!condiciones iniciales
```

```
x1(1)=0.1
```

```
y1(1)=0.15
```

```
z1(1)=0.1
```

```
x2(1)=0.11
```

```
y2(1)=0.151
```

```
z2(1)=0.11
```

```
x3(1)=0.111
```

```
y3(1)=0.1511
```

```
z3(1)=0.111
```

```
x4(1)=0.11
```

```
y4(1)=0.151
```

```
z4(1)=0.11
```

```
x5(1)=0.11111
```

```
y5(1)=0.15111
```

```
z5(1)=0.11111
```

```
x6(1)=0.111111
```

```
y6(1)=0.151111
```

```
z6(1)=0.111111
```

```
x7(1)=0.1111111
```

```
y7(1)=0.1511111
```

```
z7(1)=0.1111111
```

```
!metodo de RK4 para el sistema de ecuaciones
```

```
do i=1,n
```

```
t(i+1)=t(i)+h
```

```
xc1=x1(i)
```

```
yc1=y1(i)
```

```
zc1=z1(i)
```

```
xc2=x2(i)
yc2=y2(i)
zc2=z2(i)
```

```
xc3=x3(i)
yc3=y3(i)
zc3=z3(i)
```

```
xc4=x4(i)
yc4=y4(i)
zc4=z4(i)
```

```
xc5=x5(i)
yc5=y5(i)
zc5=z5(i)
```

```
xc6=x6(i)
yc6=y6(i)
zc6=z6(i)
```

```
xc7=x7(i)
yc7=y7(i)
zc7=z7(i)
```

!-----

```
kn1c1=dt*dx1(a, xc1, yc1, m0, m1, kx12, xc2)
ln1c1=dt*dy1(xc1, yc1, zc1)
pn1c1=dt*dz1(b, yc1, c, zc1, G1, w1, t(i))
```

```
kn1c2=dt*dx2(a, xc1, yc2, xc2, m0, m1, kx21, kx23, kx24, xc3, xc4)
ln1c2=dt*dy2(xc2, yc2, zc2, ky2v, yc6)
pn1c2=dt*dz2(b, yc2, c, zc2, G2, w2, t(i))
```

```
kn1c3=dt*dx3(a, xc3, yc3, m0, m1, kx32, xc2)
ln1c3=dt*dy3(xc3, yc3, zc3)
pn1c3=dt*dz3(b, yc3, c, zc3, G3, w3, t(i))
```

```
kn1c4=dt*dx4(a, xc4, yc4, m0, m1, kx42, kx46, xc2, xc6)
ln1c4=dt*dy4(xc4, yc4, zc4)
zn1c4=dt*dz4(b, yc4, c, zc4, G4, w4, t(i))
```

```
kn1c5=dt*dx5(a, xc5, yc5, m0, m1, kx56, xc6)
```

```
ln1c5=dt*dy5(xc5, yc5, zc5)
pn1c5=dt*dz5(b, yc5, c, zc5, G5, w5, t(i))
```

```
kn1c6=dt*dx6(a, xc6, yc6, xc4, m0, m1, kx65, kx67, kx64, xc5, xc7)
ln1c6=dt*dy6(xc6, yc6, zc6, kyv2, yc2)
pn1c6=dt*dz6(b, yc6, c, zc6, G6, w6, t(i))
```

```
kn1c7=dt*dx7(a, xc7, yc7, m0, m1, kx76, xc6)
ln1c7=dt*dy7(xc7, yc7, zc7)
pn1c7=dt*dz7(b, yc7, c, zc7, G7, w7, t(i))
```

!-----

```
kn2c1=dt*dx1(a, xc1+0.5*kn1c1, yc1+0.5*ln1c1, m0, m1, kx12, xc2+0.5*kn1c2)
ln2c1=dt*dy1(xc1+0.5*kn1c1, yc1+0.5*ln1c1, zc1+0.5*pn1c1)
pn2c1=dt*dz1(b, yc1+0.5*ln1c1, c, zc1+0.5*pn1c1, G1, w1, t(i)+0.5*h)
```

```
kn2c2=dt*dx2(a, xc1+0.5*kn1c1, yc2+0.5*ln1c2, xc2+0.5*kn1c2, m0, m1,
kx21, kx23, kx24, xc3+0.5*kn1c3, xc4+0.5*kn1c4)
ln2c2=dt*dy2(xc2+0.5*kn1c2, yc2+0.5*ln1c2, zc2+0.5*pn1c2, ky2v, yc6+0.5*ln1c6)
pn2c2=dt*dz2(b, yc2+0.5*ln1c2, c, zc2+0.5*pn1c2, G2, w2, t(i)+0.5*h)
```

```
kn2c3=dt*dx3(a, xc3+0.5*kn1c3, yc3+0.5*ln1c3, m0, m1, kx32, xc2+0.5*kn1c2)
ln2c3=dt*dy3(xc3+0.5*kn1c3, yc3+0.5*ln1c3, zc3+0.5*pn1c3)
pn2c3=dt*dz3(b, yc3+0.5*ln1c3, c, zc3+0.5*pn1c3, G3, w3, t(i)+0.5*h)
```

```
kn2c4=dt*dx4(a, xc4+0.5*kn1c4, yc4+0.5*ln1c4, m0, m1, kx42, kx46, xc2+0.5*kn1c2,
xc6+0.5*kn1c6)
ln2c4=dt*dy4(xc4+0.5*kn1c4, yc4+0.5*ln1c4, zc4+0.5*pn1c4)
pn2c4=dt*dz4(b, yc4+0.5*ln1c4, c, zc4+0.5*pn1c4, G4, w4, t(i)+0.5*h)
```

```
kn2c5=dt*dx5(a, xc5+0.5*kn1c5, yc5+0.5*ln1c5, m0, m1, kx56, xc6+0.5*kn1c6)
ln2c5=dt*dy5(xc5+0.5*kn1c5, yc5+0.5*ln1c5, zc5+0.5*pn1c5)
pn2c5=dt*dz5(b, yc5+0.5*ln1c5, c, zc5+0.5*pn1c5, G5, w5, t(i)+0.5*h)
```

```
kn2c6=dt*dx6(a, xc6+0.5*kn1c6, yc6+0.5*ln1c6, xc4+0.5*kn1c4, m0, m1,
kx65, kx67, kx64, xc5+0.5*kn1c5, xc7+0.5*kn1c7)
ln2c6=dt*dy6(xc6+0.5*kn1c6, yc6+0.5*ln1c6, zc6+0.5*pn1c6, kyv2, yc2+0.5*ln1c2)
pn2c6=dt*dz6(b, yc6+0.5*ln1c6, c, zc6+0.5*pn1c6, G6, w6, t(i)+0.5*h)
```

```
kn2c7=dt*dx7(a, xc7+0.5*kn1c7, yc7+0.5*ln1c7, m0, m1, kx76, xc6+0.5*kn1c6)
ln2c7=dt*dy7(xc7+0.5*kn1c7, yc7+0.5*ln1c7, zc7+0.5*pn1c7)
pn2c7=dt*dz7(b, yc7+0.5*ln1c7, c, zc7+0.5*pn1c7, G7, w7, t(i)+0.5*h)
```

!-----

```
kn3c1=dt*dx1(a, xc1+0.5*kn2c1, yc1+0.5*ln2c1, m0, m1, kx12, xc2+0.5*kn2c2)
ln3c1=dt*dy1(xc1+0.5*kn2c1, yc1+0.5*ln2c1, zc1+0.5*pn2c1)
pn3c1=dt*dz1(b, yc1+0.5*ln2c1, c, zc1+0.5*pn2c1, G1, w1, t(i)+0.5*h)
```

```
kn3c2=dt*dx2(a, xc1+0.5*kn2c1, yc2+0.5*ln2c2, xc2+0.5*kn2c2, m0, m1,
kx21, kx23, kx24, xc3+0.5*kn2c3, xc4+0.5*kn2c4)
ln3c2=dt*dy2(xc2+0.5*kn2c2, yc2+0.5*ln2c2, zc2+0.5*pn2c2, ky2v, yc6+0.5*ln2c6)
pn3c2=dt*dz2(b, yc2+0.5*ln2c2, c, zc2+0.5*pn2c2, G2, w2, t(i)+0.5*h)
```

```
kn3c3=dt*dx3(a, xc3+0.5*kn2c3, yc3+0.5*ln2c3, m0, m1, kx32, xc2+0.5*kn2c2)
ln3c3=dt*dy3(xc3+0.5*kn2c3, yc3+0.5*ln2c3, zc3+0.5*pn2c3)
pn3c3=dt*dz3(b, yc3+0.5*ln2c3, c, zc3+0.5*pn2c3, G3, w3, t(i)+0.5*h)
```

```
kn3c4=dt*dx4(a, xc4+0.5*kn2c4, yc4+0.5*ln2c4, m0, m1, kx42, kx46, xc2+0.5*kn2c2,
xc6+0.5*kn2c6)
ln3c4=dt*dy4(xc4+0.5*kn2c4, yc4+0.5*ln2c4, zc4+0.5*pn2c4)
pn3c4=dt*dz4(b, yc4+0.5*ln2c4, c, zc4+0.5*pn2c4, G4, w4, t(i)+0.5*h)
```

```
kn3c5=dt*dx5(a, xc5+0.5*kn2c5, yc5+0.5*ln2c5, m0, m1, kx56, xc6+0.5*kn2c6)
ln3c5=dt*dy5(xc5+0.5*kn2c5, yc5+0.5*ln2c5, zc5+0.5*pn2c5)
pn3c5=dt*dz5(b, yc5+0.5*ln2c5, c, zc5+0.5*pn2c5, G5, w5, t(i)+0.5*h)
```

```
kn3c6=dt*dx6(a, xc6+0.5*kn2c6, yc6+0.5*ln2c6, xc4+0.5*kn2c4, m0, m1,
kx65, kx67, kx64, xc5+0.5*kn2c5, xc7+0.5*kn2c7)
ln3c6=dt*dy6(xc6+0.5*kn2c6, yc6+0.5*ln2c6, zc6+0.5*pn2c6, kyv2, yc2+0.5*ln2c2)
pn3c6=dt*dz6(b, yc6+0.5*ln2c6, c, zc6+0.5*pn2c6, G6, w6, t(i)+0.5*h)
```

```
kn3c7=dt*dx7(a, xc7+0.5*kn2c7, yc7+0.5*ln2c7, m0, m1, kx76, xc6+0.5*kn2c6)
ln3c7=dt*dy7(xc7+0.5*kn2c7, yc7+0.5*ln2c7, zc7+0.5*pn2c7)
pn3c7=dt*dz7(b, yc7+0.5*ln2c7, c, zc7+0.5*pn2c7, G7, w7, t(i)+0.5*h)
```

!-----

```
kn4c1=dt*dx1(a, xc1+kn3c1, yc1+ln3c1, m0, m1, kx12, xc2+kn3c2)
ln4c1=dt*dy1(xc1+kn3c1, yc1+ln3c1, zc1+pn3c1)
pn4c1=dt*dz1(b, yc1+ln3c1, c, zc1+pn3c1, G1, w1, t(i)+h)
```

```
kn4c2=dt*dx2(a, xc1+kn3c1, yc2+ln3c2, xc2+kn3c2, m0, m1,
kx21, kx23, kx24, xc3+kn3c3, xc4+kn3c4)
ln4c2=dt*dy2(xc2+kn3c2, yc2+ln3c2, zc2+pn3c2, ky2v, yc6+ln3c6)
pn4c2=dt*dz2(b, yc2+ln3c2, c, zc2+pn3c2, G2, w2, t(i)+h)
```

```
kn4c3=dt*dx3(a, xc3+kn3c3, yc3+ln3c3, m0, m1, kx32, xc2+kn3c2)
ln4c3=dt*dy3(xc3+kn3c3, yc3+ln3c3, zc3+pn3c3)
pn4c3=dt*dz3(b, yc3+ln3c3, c, zc3+pn3c3, G3, w3, t(i)+h)
```

```
kn4c4=dt*dx4(a, xc4+kn3c4, yc4+ln3c4, m0, m1, kx42, kx46, xc2+kn3c2,
xc6+kn3c6)
ln4c4=dt*dy4(xc4+kn3c4, yc4+ln3c4, zc4+pn3c4)
pn4c4=dt*dz4(b, yc4+ln3c4, c, zc4+pn3c4, G4, w4, t(i)+h)
```

```
kn4c5=dt*dx5(a, xc5+kn3c5, yc5+ln3c5, m0, m1, kx56, xc6+kn3c6)
ln4c5=dt*dy5(xc5+kn3c5, yc5+ln3c5, zc5+pn3c5)
pn4c5=dt*dz5(b, yc5+ln3c5, c, zc5+pn3c5, G5, w5, t(i)+h)
```

```
kn4c6=dt*dx6(a, xc6+kn3c6, yc6+ln3c6, xc4+kn3c4, m0, m1,
kx65, kx67, kx64, xc5+kn3c5, xc7+kn3c7)
ln4c6=dt*dy6(xc6+kn3c6, yc6+ln3c6, zc6+pn3c6, kyv2, yc2+ln3c2)
pn4c6=dt*dz6(b, yc6+ln3c6, c, zc6+pn3c6, G6, w6, t(i)+h)
```

```
kn4c7=dt*dx7(a, xc7+kn3c7, yc7+ln3c7, m0, m1, kx76, xc6+kn3c6)
ln4c7=dt*dy7(xc7+kn3c7, yc7+ln3c7, zc7+pn3c7)
pn4c7=dt*dz7(b, yc7+ln3c7, c, zc7+pn3c7, G7, w7, t(i)+h)
```

!-----

```
x1(i+1)=x1(i)+h*(kn1c1+2*kn2c1+2*kn3c1+kn4c1)/6
y1(i+1)=y1(i)+h*(ln1c1+2*ln2c1+2*ln3c1+ln4c1)/6
z1(i+1)=z1(i)+h*(pn1c1+2*pn2c1+2*pn3c1+pn4c1)/6
```

```
x2(i+1)=x2(i)+h*(kn1c2+2*kn2c2+2*kn3c2+kn4c2)/6
y2(i+1)=y2(i)+h*(ln1c2+2*ln2c2+2*ln3c2+ln4c2)/6
z2(i+1)=z2(i)+h*(pn1c2+2*pn2c2+2*pn3c2+pn4c2)/6
```

```
x3(i+1)=x3(i)+h*(kn1c3+2*kn2c3+2*kn3c3+kn4c3)/6
y3(i+1)=y3(i)+h*(ln1c3+2*ln2c3+2*ln3c3+ln4c3)/6
z3(i+1)=z3(i)+h*(pn1c3+2*pn2c3+2*pn3c3+pn4c3)/6
```

```
x4(i+1)=x4(i)+h*(kn1c4+2*kn2c4+2*kn3c4+kn4c4)/6
y4(i+1)=y4(i)+h*(ln1c4+2*ln2c4+2*ln3c4+ln4c4)/6
z4(i+1)=z4(i)+h*(pn1c4+2*pn2c4+2*pn3c4+pn4c4)/6
```

```
x5(i+1)=x5(i)+h*(kn1c5+2*kn2c5+2*kn3c5+kn4c5)/6
y5(i+1)=y5(i)+h*(ln1c5+2*ln2c5+2*ln3c5+ln4c5)/6
z5(i+1)=z5(i)+h*(pn1c5+2*pn2c5+2*pn3c5+pn4c5)/6
```

```

x6(i+1)=x6(i)+h*(kn1c6+2*kn2c6+2*kn3c6+kn4c6)/6
y6(i+1)=y6(i)+h*(ln1c6+2*ln2c6+2*ln3c6+ln4c6)/6
z6(i+1)=z6(i)+h*(pn1c6+2*pn2c6+2*pn3c6+pn4c6)/6

x7(i+1)=x7(i)+h*(kn1c7+2*kn2c7+2*kn3c7+kn4c7)/6
y7(i+1)=y7(i)+h*(ln1c7+2*ln2c7+2*ln3c7+ln4c7)/6
z7(i+1)=z7(i)+h*(pn1c7+2*pn2c7+2*pn3c7+pn4c7)/6

end do

do i=1, n

write(1,*) x1(i), x3(i)
write(2,*) x4(i), y4(i)
write(3,*) x5(i), x7(i)
write(4,*) x1(i), x7(i)

end do

end program CadenaChua

```

En este apartado del programa se definen el sistema de ecuaciones 4.1-4.7

```

real function dx1(a, x1, y1, m0, m1, kx12, X2)
implicit none
real a, X1, Y1, m0, m1, kx12, X2
dx1=a*(y1-m1*x1-0.5*(m0-m1)*(abs(x1+1)-abs(x1-1))) + kx12*(x2-x1)
return
end function dx1

real function dy1(x1, y1, z1)
implicit none
real x1, y1, z1
dy1=x1-y1+z1
return
end function dy1

real function dz1(b, y1, c, z1, G1, w, t)
implicit none
real b, y1, c, z1, G1, w, t
dz1=-b*y1-c*z1+G1*cos(w*t)
return

```

```
end function dz1
```

```
!-----
```

```
real function dx2(a, x1, y2, x2, m0, m1, kx21, kx23, kx24, x3, x4)
implicit none
real a, x1, y2, x2, m0, m1, kx21, kx23, kx24, x3, x4
dx2=a*(y2-m1*x2-0.5*(m0-m1)*(abs(x2+1)-abs(x2-1)))
+kx21*(x1-x2)+kx23*(x3-x2)+kx24*(x4-x2)
return
end function dx2
```

```
real function dy2(x2, y2, z2, ky2v, y6)
implicit none
real x2, y2, z2, ky2v, y6
dy2=x2-y2+z2+ky2v*(y6-y2)
return
end function dy2
```

```
real function dz2(b, y2, c, z2, G2, w, t)
implicit none
real b, y2, c, z2, G2, w, t
dz2=-b*y2-c*z2+G2*cos(w*t)
return
end function dz2
```

```
!-----
```

```
real function dx3(a, x3, y3, m0, m1, kx32, x2)
implicit none
real a, x3, y3, m0, m1, kx32, X2
dx3=a*(y3-m1*x3-0.5*(m0-m1)*(abs(x3+1)-abs(x3-1)))+kx32*(x2-x3)
return
end function dx3
```

```
real function dy3(X3, Y3, Z3)
implicit none
real X3, Y3, Z3
dy3=X3-Y3+Z3
return
end function dy3
```

```
real function dz3(b, y3, c, z3, G3, w, t)
```

```
implicit none
real b, y3, c, z3, G3, w, t
dz3=-b*y3-c*z3+G3*cos(w*t)
return
end function dz3
```

!-----

```
real function dx4(a, x4, y4, m0, m1, kx42, kx46, x2, x6)
implicit none
real a, x4, y4, m0, m1, kx42, kx46, x2, x6
dx4=a*(y4-m1*x4-0.5*(m0-m1)*(abs(x4+1)-abs(x4-1)))+kx42*(x2-x4)+kx46*(x6-x4)
return
end function dx4
```

```
real function dy4(X4, Y4, Z4)
implicit none
real X4, Y4, Z4
dy4=X4-Y4+Z4
return
end function dy4
```

```
real function dz4(b, y4, c, z4, G4, w, t)
implicit none
real b, y4, c, z4, G4, w, t
dz4=-b*y4-c*z4+G4*cos(w*t)
return
end function dz4
```

!-----

```
real function dx5(a, x5, y5, m0, m1, kx56, x6)
implicit none
real a, x5, y5, m0, m1, kx56, X6
dx5=a*(y5-m1*x5-0.5*(m0-m1)*(abs(x5+1)-abs(x5-1)))+kx56*(x6-x5)
return
end function dx5
```

```
real function dy5(X5, Y5, Z5)
implicit none
real X5, Y5, Z5
dy5=X5-Y5+Z5
return
```

```
end function dy5
```

```
real function dz5(b, y5, c, z5, G5, w, t)
implicit none
real b, y5, c, z5, G5, w, t
dz5=-b*y5-c*z5+G5*cos(w*t)
return
end function dz5
```

```
!-----
```

```
real function dx6(a, x6, y6, x4, m0, m1, kx65, kx67, kx64, x5, x7)
implicit none
real a, x6, y6, x4, m0, m1, kx65, kx67, kx64, x5, x7
dx6=a*(y6-m1*x6-0.5*(m0-m1)*(abs(x6+1)-abs(x6-1)))
+kx65*(x5-x6)+kx67*(x7-x6)+kx64*(x4-x6)
return
end function dx6
```

```
real function dy6(x6, y6, z6, kyv2, y2)
implicit none
real x6, y6, z6, kyv2, y2
dy6=x6-y6+z6+kyv2*(y2-y6)
return
end function dy6
```

```
real function dz6(b, y6, c, z6, G6, w, t)
implicit none
real b, y6, c, z6, G6, w, t
dz6=-b*y6-c*z6+G6*cos(w*t)
return
end function dz6
```

```
!-----
```

```
real function dx7(a, x7, y7, m0, m1, kx76, x6)
implicit none
real a, x7, y7, m0, m1, kx76, X6
dx7=a*(y7-m1*x7-0.5*(m0-m1)*(abs(x7+1)-abs(x7-1)))+kx76*(x6-x7)
return
end function dx7
```

```
real function dy7(X7, Y7, Z7)
```

```
implicit none
real X7, Y7, Z7
dy7=X7-Y7+Z7
return
end function dy7

real function dz7(b, y7, c, z7, G7, w, t)
implicit none
real b, y7, c, z7, G7, w, t
dz7=-b*y7-c*z7+G7*cos(w*t)
return
end function dz7

!-----
```

## REFERENCIAS

---

- [Fortuna 2009] Fortuna, L., “*Chua’s Circuit Implementations: Yesterday, Today and Tomorrow*”, World Scientific, Singapore (2009), pp. 1-74.
- [Balbuna 2007] Balbuna, J., **6**(6), 67-76 .
- [Ott 1990] Ott. E., Phys. Rev. Lett. **64**, 1196 (1990).
- [Pyragas 1992] K. Pyragas, Phys. Lett. **A 170**, 421 (1992)
- [Blekhman, Landa & Rozenblum 1995] I.I. Blekhman, P.S. Landa, M.G. Rozenblum, Appl. Mech. Rev. 48 (11),733 (1995).
- [Boccaletti 2002] S. Boccaletti et al., Phys. Rep. 366, 1101 (2002).
- [Hilborn 2000] R. C. Hilborn, “*Chaos and Nolinear Dynamics*”, 2nd ed, Oxford University Press (2000). pp. 117-155.
- [Kahan 1998] S. Kahan. “*Bifurcaciones Homoclínicas en el circuito de Chua.*”, Tesis de Maestría Universidad de la República, Uruguay (1998).
- [Conde & Ramirez 2007] S. G. Conde y A. G. M. Ramirez Revista Boliviana de Física 13(13), 58 (2007).
- [Anishchenko 1994] V.S Anishchenko et al., Int. J. Bifurcation and Chaos 2, 441 (1994).
- [Kennedy 1992] M.P. Kennedy, Frequenz 46 66 (1992).
- [Boccaletti 2000] S. Boccaletti et al., Phys. Rep. 329 103 (2000).
- [Chua 1993] L. O. Chua et al., Jour. Circ. Sys. Comp. 3(1), 93 (1993).
- [Pecorra & Carroll 1990] L. M. Pecora and T. L. Carroll, Phys. Rev. Lett. 64, 821 (1990).
- [Yu 1990] L. Yu et al., Phys. Rev. Lett. 65, 2935 (1990).

- 
- [Sira-Ramírez & Cruz 2001] H. Sira-Ramírez, C. Cruz Int. “*J. Bifurc. Chaos*”11(5), 1381 (2001).
- [Arroyo 2010] G. Arroyo et al., CNF 2010.
- [Arroyo 2010] G. Arroyo et al., Memorias del VII Encuentro de participación de la Mujer en la Ciencia (2010). Artículo S1-FMCT13.
- [Kapitaniak 2000] P. Kapitaniak. “*Chaos for Engineers: Theory, Applications and Control*”, 2nd Edition, Springer (2000).
- [Tipler 2000] P. A. Tipler “*Física para la Ciencia y la Tecnología*”, 4ta. Ed., Vol. 2, Reverté, S. A. (2000). pp. 859-865.
- [Burden & Faires 1998] R. L. Burden y J. D. Faires. “*Análisis Numérico*”, 6a Ed., International Thomson Editores, S. A de CV, (1998). pp. 276-284.
- [Telemecanique 1996] Schneider Electric, “*Compatibilidad electromagnética «CEM»*” Manual didáctico 1996
- [Shannon 1948] Shannon, C. E., “*Mathematical theory of communication.*” The Bell System Technical Journal, Vol. 27: 379-423, 623-656 (1948).
- [Herrera 2001] Herrera, M. A., “*Biofísica, Geofísica, Astrofísica: Para qué sirve la física.*” UNAM, FCE (2001). pp. 103-109.
- [Schiff 2008] Schiff, J. L., “*Cellular Automata: A Discrete View of the World.*” Wiley-Interscience (2008). pp. 20-24.
- [Arroyo 2009] G. Arroyo, et al., “*Estudio de caos y sincronización con el Circuito de Chua*”. Ciencia Nicolaita (2009), 51: 195-205.
- [Salvatierra 2004] H. C. Hartley, “*Fundamentos de procesamiento digital de imágenes de satélite*”, (2004) pp. 11-12.
- [Roncagliolo 2007] P. Roncagliolo, “*Procesamiento Digital de Imágenes*”, (2007) pp. 4-10.
- [Serrano, Rodríguez, Álvarez & Arroyo 2017] K. I. Serrano, D. Rogríguez, I. Álvarez, G. Arroyo, “*Acoplamiento de una cadena abierta y de una cadena cerrada de osciladores caóticos mediante elementos no caóticos*”, LX Congreso Nacional de Física, Monterrey, Nvo. León, (octubre 2017).
- [Arroyo 2020] G. Arroyo, “*Radiografía temporal de la estabilidad de dos cadenas caóticas acopladas sujetas a perturbaciones magnéticas*”, XVII encuentro Participación de la Mujer en la Ciencia, León, Gto. (septiembre 2020).

- [Corona & Arroyo 2021] D. Corona, G. Arroyo, “*Estudio numérico de la estabilidad de dos cadenas caóticas sujetas a perturbaciones magnéticas*”, 9no Verano Nicolaita de Investigación, Morelia, Mich. (agosto 2021).
- [Corona & Arroyo 2021] D. Corona, G. Arroyo, “*Estudio numérico de la estabilidad de dos cadenas caóticas acopladas sujetas a una doble perturbación magnética*”, LXIV Congreso Nacional de Física. (octubre 2021).
- [Corona & Arroyo 2021] D. Corona, G. Arroyo, “*Efecto de una doble perturbación magnética en la estabilidad de dos cadenas caóticas acopladas*”, 16 Congreso Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación. (octubre 2021).