Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

Una demostración del Teorema de Rosenthal usando teoría de Ramsey

T E S I S

que para obtener el título de:

Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

presenta:

Luis Fernando Velasco García

Tutor:

Dr. Reynaldo Rojas Hernandez

Morelia, Michoacán, México.

Diciembre 2021

II

A mis padres.

II

Agradecimientos

Primero que nada, quiero agradecer a mis padres. Sin sus constantes sacrificios, apoyo y amor este trabajo no sería posible. Es a ellos a quienes dedico esta tesis ya que es gracias a sus esfuerzos que puede acceder a una educación universitaria y terminar con este trabajo.

Le agradezco de todo corazón a mi asesor el Dr. Reynaldo Rojas, tanto por su paciencia como por sus conocimientos y su entusiasmo durante el periodo en que trabajamos juntos. Gracias maestro por la guía y conocimientos que aportó a este trabajo y a mi formación como matemático.

A mis maestros de la facultad, pero en especial al Dr. Fernando Hernandez y al Dr. Luis Valero por sus excelentes cursos y por su infinita paciencia dentro y fuera del salón de clases. Es gracias a ustedes que puedo decir que disfruté de la carrera y encontré pasión por el estudio y las matemáticas.

Gracias a mis compañeros y amigos que en algún momento estuvieron para ayudarme a avanzar durante la carrera y me hicieron crecer como persona. A Ramón Villanueva, Edgar Macedonio y Enrique Vega les agradezco las maravillosas pláticas fuera de clases, hicieron de mi paso por la facultad una experiencia divertida.

Por último, quiero agradecer a todos aquellos que fueron de ayuda para la elaboración de este trabajo. Gracias a todos.

Índice general

Resumen vii

Abstract ix

Introducción xi

1. Preliminares 1

1.1. Topología de Espacios Métricos 2

1.2. Compacidad y Análisis Funcional 8

2. Teoría Descriptiva 17

2.1. Espacios polacos 17

2.2. Conjuntos de Borel 23

2.3. Conjuntos Analíticos 27

3. Teoría de Ramsey 31

3.1. Teorema de Ramsey para sucesiones finitas 32

3.2. Juegos Infinitos 36

3.3. Teorema de Ramsey para sucesiones infinitas 40

4. Una aplicación de la Teoría de Ramsey **51**

4.1. Recordado la Topología Débil y Débil* 52

4.2. Teorema de Rosenthal 58

Resumen

En pocas palabras se puede decir que esta tesis está enfocada en presentar, pasa a paso, un camino inteligible y claro hacia la demostración del teorema de Rosenthal utilizando la teoría de Ramsey; primero pasando por resultados que necesitaremos del análisis funcional y la topología de espacios métricos, para seguir con los conceptos de la teoría descriptiva y culminar con el desarrollo de la teoría de Ramsey. En la exposición de dicha teoría mostraremos lo que es un conjunto de Ramsey y uno hereditariamente Ramsey. Además demostraremos el teorema de Ramsey finito, desarrollaremos una breve introducción a la teoría de juegos y culminaremos con la demostración del teorema de Ramsey infinito, uno de los teorema estrella de la tesis. Posteriormente presentaremos una sección dedicada a las topologías débiles, esto con la finalidad de que dicho tema asiente la demostración del teorema de Rosenthal que nosotros expondremos usando los resultados de la teoría de Ramsey.

Palabras clave: Combinatoria infinita, espacios de Banach, topologías débiles, análisis funcional, espacios polacos.

Abstract

In a nutshell, we can say this thesis focus in presenting, step by step, an understandable way to a proof of Rosenthal's theorem using Ramsey theory; first we show basic results of functional analysis and metric spaces topology, and then move to concepts of descriptive theory so we can culminate with the development of Ramsey theory. In the exposition of this theory we will show what is a Ramsey set and a hereditary Ramsey set. We will prove the finite Ramsey theorem, develop a brief introduction to game theory and finish with the proof of Ramsey's infinite theorem, one of the star theorems of the thesis. Later we will present a section dedicated to weak topologies, in order to form a base for the proof of Rosenthal's theorem that we will present using the results of Ramsey's theory.

Introducción

El objetivo de esta tesis es presentar un camino, lo más desarrollado y autocontenido posible, en el que podamos transitar sin problemas hacia la teoría de Ramsey y, una vez presentada la base de la teoría, poder llegar a presentar una aplicación de dicha teoría en espacios de Banach.

En el Capítulo 1 veremos teoremas y conceptos clave sobre topología de espacios métricos, topología general y análisis funcional, los cuales nos servirán para erigir toda la tesis. Principalmente aquí nos enfocamos en desarrollar brevemente temas de licenciatura bien conocidos como topología producto, topología discreta, espacios de Banach, espacio dual, conjuntos G_δ, encaje de Cantor, etc.

Para el Capítulo 2 pasamos a desarrollar, básicamente una aproximación o presentación de la teoría descriptiva, no se puede considerar tal cual una introducción a esta ya que desarrollamos únicamente lo que nos será útil de la materia; desde espacios polacos y alguna de sus propiedades, hasta conjuntos de Borel y su relación con los conjuntos analíticos.

En el Capítulo 3 ya nos adentramos por fin en la teoría de Ramsey. Este está dividido en tres secciones; la primera se enfoca en los resultados base de la teoría de Ramsey para sucesiones de tamaño finito, desarrollando rápidamente lo que es el lenguaje usual de la teoría (el lenguaje de grafos), y cómo nosotros partimos de ahí para darle un enfoque conjuntista a dicho lenguaje para proceder a demostrar el teorema de Ramsey finito; luego pasaremos a lo que se debe considerar una presentación breve de la teoría de juegos, esto partiendo de un juego en particular para desarrollar los conceptos de la teoría; concluimos así el capítulo con la sección más importante de la tesis, esto ya que aquí es donde todas las secciones anteriores se usan para poder

demostrar el teorema de Ramsey infinito.

Por último tenemos el Capítulo 4, tiene dos secciones. La primera sección es un desarrollo de las topologías débil y débil*, en donde presentaremos desde propiedades bien coincidas de estas topologías, hasta una demostración del teorema de Banach-Alaoglú. Esta sección es la base conceptual en la que descansa la segunda parte del capítulo. Dicha segunda parte es la segunda sección, la cual esta enfocada en presentar una demostración del teorema de Rosenthal usando las nociones anteriormente presentadas en la teoría de Ramsey, la cual se torna más simple una vez conociendo lo presentado en el Capítulo 3.

El teorema de Rosenthal nació bajo el estudio de los espacios de Banach, en particular surge en la búsqueda por descomponer dichos espacios en "piezas básicas"; es decir, que el espacio de Banach en cuestión tuviera un subespacio isomorfo a espacios cuyas propiedades son bien conocidas, por ejemplo c_0 o el espacio ℓ_1. La hipótesis de que cualquier espacio de Banach pudiera descomponerse en estas piezas básicas fue demostrado falso por el matemático Timothy Gowers, el ganador de la medalla Fields de 1998 por conectar el análisis funcional y la combinatoria infinita. Como mencionamos antes, la demostración que presentaremos del teorema de Rosenthal se apoya justamente en los conceptos que aporta la combinatoria infinita (en particular la teoría de Ramsey), dicha demostración fue presentada originalmente por W. T. Gowers en su estudio de los espacios de Banach (y el análisis funcional en general) con las herramientas de la combinatoria.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo, como su nombre lo dice, se presentan teoremas y definiciones necesarios para poder adentrarse en los temas que se exponen más adelante. Empezaremos con nociones básicas de topología; qué es la topología discreta, un recordatorio de la topología producto y lo que significa que un espacio sea Hausdorff. Pero principalmente nos interesa, en este capítulo, hablar de la topología de espacios métricos, donde los conceptos como G_δ, completamente metrizable, punto aislado y punto de acumulación, son los protagonistas de la primera sección del capítulo, el cual culmina con dos teoremas que serán muy importantes en otras secciones de la tesis; el primero nos dice que todo subespacio completamente metrizable de un espacio completamente metrizable es un conjunto G_δ en el espacio, el segundo es el famoso teorema de encaje de Cantor, el cual nos será muy útil principalmente en el siguiente capítulo.

Posteriormente se presentará una sección dedicada principalmente a definir y recordar nociones básicas del análisis funcional; cómo se definen los espacios de Banach, el espacio dual continuo y desarrollaremos algunos resultados que serán clave para poder adentrarnos en las dos secciones del cuarto capítulo. En esta misma sección tocaremos también a el concepto de compacidad, donde describiremos dos formas de ver dicho concepto; como el teorema de Bolzano-Weierstrass lo define, es decir la compacidad secuencial; y la definición moderna que requiere de la noción de cubierta abierta y subcubierta.

1.1. Topología de Espacios Métricos

Convengamos en que un espacio métrico es la pareja (X, d), donde X es un conjunto y d es una métrica sobre X. Dado un $\epsilon > 0$ y $x \in X$ denotaremos como $B_\epsilon(x)$ a la bola abierta de radio ϵ. Cabe destacar que se obviarán muchos resultados y conceptos como métrica, vecindad, conjuntos abiertos y cerrados, el interior y clausura de un conjunto, etc. Para ver dicho material omitido recomendamos que vaya a [1]. Si $A \subset X$ denotaremos como $\overline{A}$ a la cerradura de A. Sabemos que (X, d) se dice un espacio métrico separable si contiene un conjunto denso numerable, donde $A \subset X$ es un conjunto denso si $\overline{A} = X$.

Recordemos que un espacio topológico es el par ordenado (X, τ), donde X es un conjunto y τ es una colección de subconjuntos de X tal que $\emptyset, X \in \tau$ y tal que τ es cerrada bajo intersecciones finitas y uniones arbitrarias. Por último, recordemos también que (X, τ) se dice metrizable si existe una métrica d que induzca la topología. Igual que antes, se obviarán conceptos como topología de subespacio, función continua, homeomorfismo, y sólo se definirán los conceptos vitales para el desarrollo del trabajo.

Definición 1.1. La *topología discreta*, τ_d, de un conjunto X es la topología dada por la potencia de X.

Así todo subconjunto de X es un básico abierto en la topología discreta. Cualquier conjunto con la topología discreta es metrizable si definimos

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y, \end{cases}$$

la cual llamaremos la métrica discreta en X.

Ahora sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos e I una familia de índices. El producto cartesiano de los conjuntos X_i lo escribimos cómo $\prod_{i \in I} X_i$, el cual es el conjunto de todas las funciones de I en la unión de los X_i cuya evaluación en i es un elemento de X_i para cada $i \in I$.

Definición 1.2. Definimos a la *topología producto*, τ_p, sobre un producto $\prod_{i\in I} X_i$, como la topología que tiene por base a la colección de todos los conjuntos que son de la forma $\prod_{i\in I} U_i$, donde $U_i \subset X_i$ es abierto para cada $i \in I$, y $U_i = X_i$ para todo $i \in I \setminus F$, donde $F \subset I$ es un conjunto finito.

Recordemos que, a su vez, esta topología producto también es metrizable si cada X_i es metrizable y además I es numerable.

Definición 1.3. Sea (X, τ) un espacio topológico, decimos que X es un *espacio de Hausdorff* si para cualesquiera $x, y \in X$ distintos, existen vecindades U_x y U_y, de x e y respectivamente, tales que $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Ejemplo 1.4. Los siguientes espacios son de Hausdorff.

i) Todo espacio métrico es de Hausdorff. Esto es trivial ya que, tomando $x, y \in X$ distintos en un espacio métrico, sabemos que $d(x, y) > 0$, sea dicha distancia igual a ϵ. Entonces tome $U_x = B_{\frac{\epsilon}{3}}(x)$ y $U_y = B_{\frac{\epsilon}{3}}(y)$, así $U_x \cap U_y = \emptyset$.

ii) El par $(\mathbb{R}, \tau)$, donde τ es la topología usual, es claramente de Hausdorff por que es metrizable.

iii) El par (X, τ_d), donde τ_d es la topología discreta, es de Hausdorff ya que, al igual que antes, es metrizable.

Proposición 1.5. *Sean $f : X \to Y$ una función continua y Y un espacio de Hausdorff, entonces el conjunto $G = \{(x, f(x)) : x \in X\}$, al que llamamos gráfica de f, es un conjunto cerrado en $X \times Y$.*

Demostración. Veamos que $(X \times Y) \setminus G$ es abierto. Sean $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G$. Entonces $y \neq f(x)$ y como Y es de Hausdorff, existen entornos U_Y, V_Y de y y $f(x)$ respectivamente tales que $U_Y \cap V_Y = \emptyset$. Note que, gracias a la continuidad de f, existe un entornos V_X, tal que $f[V_X] \subset V_Y$, ya que U_Y es entorno de y, así $V_X \times U_Y \subset X \times Y$ es un entorno abierto de (x, y) tal que $(V_X \times U_Y) \cap G = \emptyset$. Así $(X \times Y) \setminus G$ es abierto y por lo tanto G es cerrado en $X \times Y$. ■

A parir de aquí esta sección se enfocará únicamente en conceptos de la topología de espacios métricos.

Definición 1.6. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$.

- Decimos que $\{x_n\}$ *converge a* y si para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ pasa que $d(x_n, y) < \epsilon$.
- Decimos que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy*, si para todo $\epsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n_0 \leq n, m$ pasa que $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Definición 1.7. Sea (X, d) un espacio métrico, se dice que X es un *espacio métrico completo* si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

Decimos que un espacio topológico, (X, τ), se dice *completamente metrizable* si para X existe una métrica d_X tal que (X, d_X) es un espacio métrico completo, donde d_X induce la topología τ.

Definición 1.8. Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$.

- Se dice que $x \in X$ es *punto de acumulación* o punto límite de A si, para todo entorno V de x, se cumple que $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.
- Decimos que $x \in A$ es *punto aislado* de A si, existe un entorno V de x, tal que $V \cap A = \{x\}$.

Ejemplo 1.9. A continuación daremos ejemplos de puntos aislados y de puntos acumulación.

i) En el conjunto $\{-1\} \cup [0, 1] \subset \mathbb{R}$, el -1 es punto aislado.

ii) En $\mathbb{R}$, la sucesión $\{\frac{1}{2^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ cada elemento es un punto aislado y 0 es punto de acumulación de dicha sucesión.

iii) $[-1, 1]$ es el conjunto de todos los puntos de acumulación de $(-1, 1)$.

iv) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ es un conjunto discreto donde cada elemento es un punto aislado.

Lema 1.10. *Sea X un espacio completamente metrizable y Y un subespacio cerrado de X, entonces Y es completamente metrizable.*

Demostración. Sea d_X la métrica que induce la topología τ de X, veamos entonces que Y es completo con d_X. Tomemos una sucesión de Cauchy $\{y_n\}_{n\in\omega}$ en Y, la cuál seguirá siendo de Cauchy en X. Entonces, como (X, d_X) es un espacio completo, pasa que $\{y_n\}_{n\in\omega}$ converge a algún $x \in X$. Pero eso quiere decir que x es punto límite de Y, por lo tanto $x \in Y$, ya que Y es subespacio cerrado. Así Y es completo con la métrica d_X. ■

Ejemplo 1.11. Los siguientes espacios métricos son completos.

i) Los números reales, $\mathbb{R}$, son un espacio métrico completo.

ii) Todo intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ es completo. En general, todo conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$, para $n \in \mathbb{N}$ finito, es completo.

iii) Todo espacio métrico discreto es completo.

Lema 1.12. *Sea (X, d) un espacio métrico separable no numerable, entonces existe $Y \subset X$ cerrado tal que no tiene puntos aislados.*

Demostración. Sea A un subconjunto denso numerable de X. Definamos el conjunto $D = \{x \in X : B_{\frac{1}{n}}(a)$ es vecindad numerable de x y $a \in A\}$. Observemos que $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{B_{\frac{1}{n}}(a) : a \in A \wedge\ x \in B_{\frac{1}{n}}(a) \wedge\ B_{\frac{1}{n}}(a)$ es numerable$\}$. Así $Y = X \setminus D$ es un conjunto cerrado no numerable puesto que D es abierto y numerable. Por demostrar que Y no tiene puntos aislados.

Sea $y \in Y$ tal que $y \in V_y$, con V_y una vecindad de y. Sea $a \in A$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $y \in B_{\frac{1}{n}}(a) \subset V_y$. Como $y \notin D$ entonces $B_{\frac{1}{n}}(a)$ es no numerable. Entonces $(V_y \setminus \{y\}) \cap Y \supset (B_{\frac{1}{n}}(a) \setminus \{y\}) \cap Y = (B_{\frac{1}{n}}(a) \setminus \{y\}) \setminus D \neq \emptyset$. Así existe $y' \in V_y$ tal que $y' \neq y$. ■

Lema 1.13. *Si un espacio métrico (X, d) no tiene puntos asilados, entonces contiene una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $x_n \in U_n$ abierto y que, a su vez, $\overline{U_n} \cap \overline{U_m} = \emptyset$ para cada n, m.*

Demostración. Tomemos $x \in X$, por inducción construiremos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que converja a x y sus respectivos entornos abiertos U_n. Primero tomemos un $x_0 \in X \setminus \{x\}$. Suponga construido $\{x_0, \ldots, x_n\}$ y sus respectivos entornos abiertos $U_i = B_{\frac{r_i}{2}}(x_i)$ para $r_i = \frac{d(x,x_i)}{2}$ donde $i \leq n$. Sea $x_{n+1} \in B_{r_n}(x) \setminus \{x\}$ y tomemos $r_{n+1} = \frac{d(x,x_{n+1})}{2}$, así definamos que $U_{n+1} = B_{\frac{r_{n+1}}{2}}(x_{n+1})$. Una vez

terminada la construcción, note que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en efecto converge a x y que además $d(x, x_{n+1}) < \frac{d(x,x_n)}{2}$ para toda n.

Procediendo por contradicción probaremos que $\overline{U_n} \cap \overline{U_m} = \emptyset$ para cualquier $n, m \in \mathbb{N}$ distintos. Sin perdida de generalidad suponga que $n < m$ y sea $y \in \overline{U_n} \cap \overline{U_m}$. Por desigualdad del triángulo y por definición de U_n y U_m, tendremos que $d(x, x_n) \leq d(x, x_m)+d(x_m, y)+d(y, x_n) < d(x, x_m)+\frac{r_m}{2}+\frac{r_n}{2} < r_{m-1}+\frac{r_m}{2}+\frac{r_n}{2} < r_n+\frac{r_n}{2}+\frac{r_n}{2} = 2r_n$. Así se obtuvo que $d(x, x_n) = 2r_n < 2r_n$, una contradicción. ■

Definición 1.14. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Decimos entonces que A es un *subconjunto* G_δ de X si es intersección numerable de conjuntos abiertos. A su vez, decimos que A es un *subconjunto* F_σ de X si es unión numerable de conjuntos cerrados.

Ejemplo 1.15. A continuación daremos algunos ejemplos de conjuntos G_δ y conjuntos F_σ.

i) El complemento de un G_δ es un F_σ, y viceversa.

ii) Cualquier conjunto abierto es trivialmente un conjunto G_δ. De igual manera cualquier conjunto cerrado es F_σ.

iii) Los racionales, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, son un conjunto F_σ, así por el primer inciso tendremos que los irracionales, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, son un conjunto G_δ.

Teorema 1.16. *Sea (X, d) un espacio métrico y $Y \subset X$ un subespacio cerrado, entonces Y es un subconjunto G_δ de X.*

Demostración. Definamos $B_n := \bigcup_{x\in Y} B_{\frac{1}{2^n}}(x)$ para cada $n \in \omega$. Sabemos que para cada n, B_n es abierto y que además $Y \subset B_n$. Entonces tendremos que $Y \subset \bigcap_{n\in\omega} B_n$, por demostrar la otra contención.

Tomemos un $z \in \bigcap_{n\in\omega} B_n$ y $\epsilon > 0$. Fijemos $n \in \omega$ tal que $1/2^n < \epsilon$. Como $z \in B_n$ podemos encontrar un $y \in Y$ y $z \in B_{\frac{1}{2^n}}(y)$ tales que $0 \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$. Pero como $d(y, z) < \frac{1}{2^n} \leq \epsilon$, entonces $y \in B_\epsilon(z) \cap Y$. Por definición tendremos que z es punto límite de Y y como Y es subespacio cerrado de X y ϵ es arbitrario, entonces $z \in Y$, esto prueba que $\bigcap_{n\in\omega} B_n \subset Y$. Por lo tanto $Y = \bigcap_{n\in\omega} B_n$; así Y es un subconjunto G_δ de X. ■

Definición 1.17. Sea (X, d) un espacio métrico y $C \subset X$, entonces definimos el *diámetro de* C como sigue

$$\operatorname{diam}(C) = \sup\{d(x, y) : x, y \in C\},$$

donde $\sup(A) = +\infty$ si $A \subset \mathbb{R}$ no es acotado.

Proposición 1.18. *Si un subespacio Y de un espacio completamente metrizable X es completamente metrizable, entonces es G_δ en X.*

Demostración. Sabemos que, como $\overline{Y}$ es cerrado en X, entonces es G_δ en X. Demostremos entonces que Y es G_δ en $\overline{Y}$, así por "transitividad" será G_δ en X. Definamos

$$U_n = \{x \in \overline{Y} : \exists V \subset X \text{ abierto con } x \in V, \operatorname{diam}^Y(V \cap Y) \leq \frac{1}{2^n}\}.$$

Veamos que U_n es abierto en $\overline{Y}$. Para cada $x \in U_n$ fijemos una vecindad de x que cumpla con las condiciones de U_n y llamémosla V_x. Es claro que $U_n \subset \bigcup_{x \in U_n} V_x$, veamos que la contención contraria sucede. Tomemos un $z \in V_x$, entonces V_x es vecindad de z y es tal que $\operatorname{diam}^Y(V_x \cap Y) \leq 1/2^n$, así $z \in U_n$. Por lo tanto $\bigcup_{x \in U_n} V_x = U_n$; de este modo U_n es unión de abiertos, es decir es un abierto en $\overline{Y}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por demostrar que $Y = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Sean $y \in Y$ y $n \in \mathbb{N}$ arbitrarios. Tenemos que $y \in B^Y_{1/2^n}(y)$, pero todo abierto en Y se puede expresar como la intersección de un abierto en X con Y, es decir $B^Y_{1/2^n}(y) = V \cap Y$ donde $V \subset X$ es abierto. Así $y \in V$ abierto en X, entonces tendremos que $\operatorname{diam}^Y(V \cap Y) = \operatorname{diam}(B^Y_{1/2^n}(y)) \leq 1/2^n$, es decir $y \in U_n$; pero como n se eligió arbitrario, entonces $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Esto prueba que $Y \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

Ahora tomemos $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Dado $n \in \mathbb{N}$ entonces $x \in U_n$. Así tendremos que existe $V_n \subset X$ tal que $x \in V_n$ y $\operatorname{diam}^Y(V_n \cap Y) \leq 1/2^n$. Tomemos $W_n = \bigcap_{i \leq n} V_n$, note que W_n es en sí una vecindad abierta de x y como $x \in \overline{Y}$, entonces $W_n \cap Y \neq \emptyset$. Así si tomamos un $y_n \in W_n \cap Y$ arbitrario para cada $n \in \mathbb{N}$. Es claro que para cada $N \in \mathbb{N}$ si $n, m > N$ tendremos que $y_n, y_m \in W_N$, por lo tanto $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y. Como Y es completamente metrizable entonces tendremos que $\{y_n\}$ converge a algún $y \in Y$. Supongamos que $y \neq x$. Entonces existe $\epsilon > 0$

tal que $B_\epsilon^X(x), B_\epsilon^X(y)$ son vecindades con cerraduras ajenas de x e y respectivamente. Como $B_\epsilon^X(y) \cap Y$ es vecindad de y en Y existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in B_{\epsilon/2}^X(y) \cap Y$ para cada $n \geq N'$. Note a su vez que, como $\{\text{diam}^Y(V_n \cap Y)\} \to 0$, entonces existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que $\text{diam}^Y(V_n \cap Y) \leq \epsilon/2$ para cada $n \geq N''$, luego $V_n \cap Y \subset B_\epsilon^X(y) \cap Y$ para $n \geq N = \text{máx}\{N', N''\}$. Así $x \in \overline{V_m} = \overline{V_m \cap Y} \subset \overline{B_\epsilon^X(y) \cap Y} = \overline{B_\epsilon^X(y)}$, una contradicción. Por lo cual $x = y$, lo que a su vez quiere decir que $Y \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Concluimos entonces que Y se puede escribir como una intersección numerable de abiertos de $\overline{Y}$, es decir, es un G_δ en $\overline{Y}$. ■

Nota. El teorema anterior es en realidad una doble implicación, pero nosotros necesitaremos únicamente de la implicación ya demostrada, si desea ver la demostración completa vaya a [2].

Teorema 1.19. *(Encaje de Cantor). Si (X, d) es un espacio métrico completo y $\{C_n\}$ una sucesión decreciente de cerrados de X tales que* $\text{diam}(C_n) \to 0$. *Entonces si $x_n \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{x_n\}$ converge al único punto en $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.*

Demostración. Como $\{\text{diam}(C_n)\} \to 0$ entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ tenemos que $\text{diam}(C_n) < \epsilon$. Veamos que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy; en efecto, tomemos $n, m \geq n_0$ y tales que $m > n$, entonces para x_n y x_m tendremos que $d(x_n, x_m) \leq \text{diam}(C_n) < \epsilon$, esto ya que la sucesión $\{C_n\}$ es decreciente. Como X es completo, tendremos que $\{x_n\}$ converge a algún $x \in X$.

Por demostrar que $x \in C$ y además que x es único. Si fijamos $m \in n$, entonces $x_{m+n} \to x$. Así $x \in \overline{\{x_{m+n}\}}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_m$. Por lo tanto $x \in C$. Ahora suponga que existe $x' \in C$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ sucede que $d(x, x') \geq \text{diam}(C_n) < \epsilon$ para cada $\epsilon > 0$ y n suficientemente grande. Por lo tanto $d(x, x') = 0$, es decir $x = x'$. ■

1.2. Compacidad y Análisis Funcional

Lo primero que exponemos en esta sección es el concepto de compacidad. Presentaremos las propiedades básicas de la compacidad de espacios métricos,

definiremos lo que es la compacidad débil y la propiedad de Lindelöf. Dichos conceptos serán retomados en el último capítulo de la tesis, esto ya que la compacidad es parte del contexto en el que surge el teorema de Rosenthal.

Nos enfocaremos además en desarrollar, al menos de una forma muy básica, conceptos del análisis funcional que se requerirán para poder cimentar adecuadamente la primera sección del ya mencionado último capítulo, la cual trata sobre la topologías débiles. Al igual que en la sección anterior obviaremos conceptos elementales como norma, espacio vectorial, dependencia lineal, etc.

Definición 1.20. Sea (X, d) un espacio métrico, decimos que una *cubierta abierta* de un subconjunto $Y \subset X$, es una familia de conjuntos abiertos $\mathcal{A}$ de X, tales que $Y \subset \bigcup \mathcal{A}$.

Así, decimos que X es un *espacio compacto* si dada una cubierta abierta de X cualquiera, existe un subcubierta finita del mismo.

Ejemplo 1.21. Mostraremos a continuación, algunos ejemplos comunes de espacios métricos compactos, además uno de ellos nos servirá para mencionar un teorema importante.

i) Cualquier intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es compacto, esto por el Teorema de Heine-Borel, el cual nos dice que un espacio métrico es compacto si y sólo si es completo y totalmente acotado (Para subconjuntos del espacio euclídeo, basta con que este sea cerrado y acotado).

ii) $\mathbb{R}$ no es compacto ya que le falta ser acotado.

iii) Cualquier sucesión convergente con su punto límite es un conjunto compacto.

Cabe mencionar la noción de *espacio de Lindelöf*; la definición es la siguiente; un espacio topológico se le denomina Lindelöf, si satisface la propiedad de que cada cubierta abierta contiene un subcubierta numerable.

Esa definición es de hecho una generalización del concepto de compacidad ya que, gracias a la definición, cualquier espacio compacto es de Lindelöf. Sabemos además que un espacio métrico es Lindelöf si y sólo si es separable y esto sí solo si además posee una base numerable.

Proposición 1.22. *Sea X es un espacio métrico compacto. Entonces toda sucesión de puntos de X tiene una subsucesión convergente con límite en X.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X. Sabemos que para todo $\epsilon > 0$ tendremos que $\bigcup_{x\in X} B_\epsilon(x) \supset X$, pero por compacidad podemos tomar una subcubierta finita la cual llamaremos $\mathcal{C}_\epsilon$.

Por inducción sobre m construyamos los conjuntos infinitos I_m y los naturales n_m como sigue;

- **Paso** 1. Tomemos $r_1 = 1$, entonces por principio de casillas debe existir $B_1 \in \mathcal{C}_{r_1}$ tal que contiene infinitos elementos de $\{x_n\}$. Así definamos $I_1 = \{k > 1 : x_k \in B_{r_1}\}$ y $n_1 = \min I_1$. Note que x_{n_1} es un elemento de la sucesión $\{x_n\}$.
- **Paso** m. Suponga construidos los conjuntos decrecientes infinitos $\{I_i\}_{i=1}^m$ y los naturales crecientes $\{n_i\}_{i=1}^m$, donde $x_k \in B_i \in \mathcal{C}_{r_i}$ para todo $k \in I_i$, donde $r_i = \frac{1}{i}$.
- **Paso** $m+1$. Sea $r_{m+1} = \frac{1}{m+1}$, y $B_{m+1} \in \mathcal{C}_{r_{m+1}}$ tal que contiene infinitos elementos de $\{x_n\}$. Así definamos $I_{m+1} = \{k > n_m : x_k \in B_{r_{m+1}}\}$ y $n_{m+1} = \min I_{m+1}$.

Así obtenemos la subsucesión $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\}$ de elementos de $\{x_n\}$. Veamos que dicha sucesión es convergente. Note que $\{\overline{B_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de cerrados tal que $\operatorname{diam}(\overline{B_n}) \to 0$. Entonces, por el Teorema 1.19, $\{x_{n_k}\} \to x$ el único punto de $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \overline{B_i}$. ∎

Observación 1.23. Note que, por la proposición anterior, si X es un espacio compacto y tenemos $\{x_n\} \subset X$ una sucesión divergente, entonces $\{x_n\}$ contiene al menos dos subsucesiones convergentes a puntos límites diferentes.

Posteriormente quedará esclarecida la cuestión que estamos por plantear, pero cabe destacar que existen tres tipos de compacidad, las cuales son equivalentes en un espacio con la topología débil.
Decimos que un conjunto C es compacto de acuerdo a; la compacidad moderna o de Heinen-Borel, la cual nos dice que todo cubrimiento abierto de C admite un subcubrimiento abierto finito; la compacidad secuencial o de

Bolzano-Weierstrass, la cual nos dice que toda sucesión en C tiene una subsucesión convergente cuyo límite está en C; y por último la compacidad de punto límite, la cual nos dice que todo subconjunto infinito de C tiene un punto límite en C.

Existe un teorema llamado el teorema de Eberlein-Šmulian, el cual nos dice que los tres tipos de compacidad son equivalentes un un espacio de Banach con la topología débil y a pesar de que esta equivalencia es cierta en general para un espacio métrico, la topología débil no es metrizable en espacios vectoriales infinito-dimensionales, y por lo tanto se necesitará del teorema de Eberlein-Šmulian.

Dicho teorema lo enunciaremos de la siguiente manera y se entenderá completamente hasta el Capítulo 4;

Teorema 1.24. *(Eberlein-Šmulian) Si X es un espacio de Banach y $A \subset X$, entonces LSASE:*

a) Toda sucesión de elementos de A tiene una subsucesión débil convergente (w-convergente) en X.

b) Toda sucesión de elementos de A tiene un punto límite débil (w-punto límite) en X.

c) La cerradura débil de A ($\overline{A}^w$) es débilmente compacta (w-compacta).

Citaremos otro teorema que será vital en la primera sección del último capítulo, el cual tiene que ver con compacidad.

Teorema 1.25. *(Tychonoff) Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una colección cualquiera de espacios topológicos compactos, entonces $\prod_{i\in I} C_i$ es compacto con respecto τ_p.*

A partir de aquí nos centraremos brevemente en los conceptos básicos del análisis funcional, conceptos que serán útiles en el último capítulo. Recordemos que un espacio de Banach es un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ tal que es completo con respecto a la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$. Por convención denotamos $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ a la bola unitaria de X y $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ a la esfera unitaria de X.

De igual forma recordemos que, dado un espacio vectorial V de dimensión n y un subconjunto ordenado $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vectores de este espacio,

decimos que B es una base de V si se cumple que $V = span(B) = \langle B \rangle$ y además los vectores que forman a B son linealmente independientes entre sí.

Ejemplo 1.26. A continuación daremos ejemplo de algunos de los espacios de Banach que serán de importancia más adelante. Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ consideramos los siguientes espacios.

I) $\ell_\infty = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|\} < +\infty\}$.

II) $\ell_1 = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \|x\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n| < +\infty\}$.

III) Para $1 \leq p < \infty$, $\ell_p = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \|x\|_p = (\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < +\infty\}$

IV) $c = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente$\}$, es subespacio cerrado de ℓ_∞.

V) $c_0 = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$, el cual es subespacio cerrado de c.

Definición 1.27. Sea X un espacio vectorial, decimos que dos normas sobre X son *normas equivalentes*, cuando inducen la misma topología sobre X.

Sean $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ dos normas sobre X. Recordemos que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes si y sólo si existen reales $m_1, m_2 > 0$ tales que $m_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq m_2\|x\|_2$ para todo $x \in X$.

Ejemplo 1.28. En $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes.

En efecto; tomemos la norma euclidiana $\|\cdot\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ y una norma arbitraria $\|\cdot\|_a$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, así tendremos que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, entonces $\|x\|_a = \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\|_a \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\|_a$. Sabemos de la desigualdad de Cauchy Schwarz en $\mathbb{R}^n$, que $(\sum_{k=1}^n a_k b_k)^2 \leq (\sum_{k=1}^n a_k^2)(\sum_{k=1}^n b_k^2)$ para cuales quiera a_k y b_k números reales, entonces tendremos que $\sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\|_a \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^n \|e_i\|_a)^{\frac{1}{2}}$ pero, como $\sum_{i=1}^n \|e_i\|_a$ es una constante positiva, entonces tenemos que $\|x\|_a \leq c\|x\|_2$ donde $c \in \mathbb{R}^+$.

Para la otra desigualdad note que $\|\cdot\|_a : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_a) \to \mathbb{R}$ es una función continua, usando el conjunto compacto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ y el teorema del máximo-mínimo, $\|\cdot\|_a$ debe tener un mínimo en S. Así existe $m > 0$ tal que $m \leq \|\frac{x}{\|x\|_2}\|_a$, así $\|x\|_a \geq m\|x\|_a$, es decir $\|x\|_2 \leq \frac{1}{m}\|x\|_a$.

Observación 1.29. Sean $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(Y, \|\cdot\|_2)$ dos espacios normados, tomemos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, $x \in X$ y $y \in Y$ tales que $x_n \to x$, $y_n \to y$ cuando $n \to \infty$. Si, para $c \in \mathbb{R}$, tenemos $\|x_n\|_1 \leq c\|y_n\|_2$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\|x\|_1 \leq c\|y\|_2$.

En efecto; tenemos que $\|x\|_1 \leq \|x_n\|_1 + \|x - x_n\|_1 \leq c\|y_n\|_2 + \|x - x_n\|_1 \leq c(\|y_n - y\|_2 + \|y\|_2) + \|x - x_n\|_1$. Así cuando $n \to \infty$ tendremos $\|x\|_1 \leq c\|y\|_2$.

Teorema 1.30. *El espacio $(X, \|\cdot\|)$ es de Banach si y sólo si B_X es completo con la métrica inducida.*

Demostración. Ida. Como B_X es un subconjunto cerrado con respecto a la norma $\|\cdot\|$, entonces es subespacio completo de X con la métrica inducida.

Regreso. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sucesión de Cauchy en X. Sabemos que toda sucesión de Cauchy es acotada, es decir $\|x_n\| \leq M$ para un $M \in \mathbb{R}$. Entonces tendremos que $\frac{\|x_n\|}{M} \leq 1$, así $\{\frac{x_n}{M}\} \subset B_X$. Entonces, como B_X es completo, tendremos que $\{\frac{x_n}{M}\} \to y$ tal que $y \in B_X$ ya que las sucesión sigue siendo de Cauchy. Así $\{x_n\} \to My$, es decir, la sucesión de Cauchy converge, por lo tanto X es de Banach. ■

Definición 1.31. Al espacio de todas los operadores lineales acotados (funcionales lineales) $T : X \to Y$, lo denominamos como $\mathcal{L}(X, Y)$. Si $Y = \mathbb{K}$, el campo base, entonces denominamos a dicho espacio como el *espacio dual (algebraico)* de X, al cual escribimos como X'.

Al tratar con los funcionales lineales continuos $\psi : X \to \mathbb{K}$, sabemos que estos forman un espacio vectorial normado X^* al cual llamaremos el *espacio dual continuo* o dual topológico de X.

Recuerde que la norma de un funcional lineal continuo en X está definido por $\|\psi\| = \sup\{|\psi(x)| : \|x\| \leq 1\}$, donde $x \in X$. En el caso de espacios de dimensión finita el dual topológico coincide con el dual algebraico y el concepto de dual topológico es trivial. A partir de aquí cuando mencionemos al espacio dual nos estamos refiriendo de hecho al espacio dual continuo/topológico.

Ejemplo 1.32. A continuación daremos ejemplos (sin demostración) de la relación existente entre un un espacio de Banach y su espacio dual. Esto ya que la norma que definimos anteriormente para el espacio dual nos dice que X^* no solamente es un espacio normado, es de hecho, un espacio de Banach.

I) El espacio dual de c es igual a ℓ_1, es decir $c^* = \ell_1$.

II) $(c_0)^* = \ell_1$.

III) $(\ell_1)^* = \ell_\infty$.

IV) Todo espacio de dimensión finita es isomorfo a su dual.

Para ver más ejemplos como estos y entender a mayor profundidad la relación que tienen estos espacios con su dual topológico, vaya a [3].

Definición 1.33. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. A una sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset X$ le llamamos *base de Schauder* si para cada $x \in X$ existe una única sucesión $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i - x\| = 0.$$

Decimos que $\{x_n\} \subset X$ es una *sucesión básica* si es una base de Schauder para la cerradura del espacio lineal generado por dicha sucesión, es decir $\overline{\langle\{x_n\}\rangle}$.

Observación 1.34. Note que si $(X, \|\cdot\|)$ admite una base de Schauder entonces X es separable. En efecto, sea $\beta = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de Schauder de X, entonces para $\mathbb{K}$ el campo donde se define el espacio, y $\mathcal{D} \subset \mathbb{K}$ un denso en el campo, tendremos que $D = \{\Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i e_i : \lambda_i \in \mathcal{D}, n \in \omega\}$ es un conjunto denso numerable en X.

Además nótese que la base $\{e_i : i \in \omega\}$ es una base de Schauder de ℓ_1, que consiste en vectores unitarios.

Un resultado importante del análisis funcional, el cual se necesitará en un par de ocasiones más adelante, es el Teorema de Hahn-Banach, el cual surgió de los intentos de resolver sistemas infinitos de ecuaciones lineales. El teorema se enuncia de la siguiente forma;

Teorema 1.35. *(Hahn-Banach) Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, V un subespacio cerrado de X y $f : V \to \mathbb{R}$ un funcional acotado. Entonces existe una extensión $F : X \to \mathbb{R}$ de f tal que $\|F\| = \|f\|$.*

Cabe destacar que este teorema de hecho resulta ser equivalente al axioma de elección. Nosotros nos saltaremos la demostración ya que de lo contrario esta sección se extendería bastante más; si desea ver la demostración vaya a [8, pág 13].

Capítulo 2

Teoría Descriptiva

En este capítulo daremos una muy breve introducción a los temas base de la teoría descriptiva, la cual tiene como conceptos fundamentales a los espacios polacos, las σ-álgebra, los conjuntos de Borel y los conjuntos Analíticos; la división de este capítulo se basa justamente en estos conceptos antes mencionados.

La primera sección tiene como objetivo definir a los espacios polacos, mostrar algunas de sus propiedades principales y concluir con un teorema que nos dice que todo espacio polaco no numerable contienen una copia G_δ del espacio de Baire. Posteriormente se abren las dos siguientes secciones; una dedicada a definir a los conjuntos de Borel y mostrar cómo estos provienen de la proyección de un conjunto cerrado contenido en el producto de un polaco y el espacio de Baire; luego la tercera y última sección del capítulo dedicada a los conjuntos analíticos, en la que hablaremos únicamente de su definición y jerarquía, y su relación con los conjuntos de Borel y espacios polacos.

2.1. Espacios polacos

Esta sección empieza con la definición de espacio polaco, inmediatamente después demostraremos sus dos propiedades más relevantes, al menos para nosotros; la primera es que siempre existe una función del espacio de Baire a un polaco la cual será continua y sobreyectiva, la segunda será que el producto

de polacos es un espacio polaco con respecto a la topología producto.

Terminaremos la sección con un teorema muy importante, el cual dice que todo espacio polaco no numerable contienen una copia G_δ del espacio de Baire

Definición 2.1. Llamamos *espacio polaco* al espacio topológico (X, τ) tal que es separable y completamente metrizable.

Ejemplo 2.2. Ahora daremos ejemplos conocidos de espacios polacos.

i) Los reales $\mathbb{R}$ son un espacio polaco.

ii) El espacio de Baire, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, es un espacio polaco.

iii) El conjunto de Cantor, 2^ω también es un espacio polaco.

iv) $\mathbb{R}^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, es un espacio polaco.

Notación. A partir de aquí al espacio de Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, lo denotaremos como $\mathcal{N}$. Consideraremos a este espacio con la métrica definida de la siguiente manera, sea $d(a, b) = 1/2^n$, donde $n = \text{mín}\{m \in \omega : a(m) \neq b(m)\}$ y esto para $a \neq b$.

A continuación enunciaremos y demostraremos una proposición que nos será útil a la hora de demostrar los demás teoremas de la sección, especialmente nos servirá para demostrar la existencia de una función sobreyectiva y continua del espacio de Baire a cualquier espacio polaco.

Proposición 2.3. *Sean X un espacio polaco, $U \subset X$ un conjunto abierto y $\epsilon > 0$, entonces existe $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos de X, tales que* $\text{diam}(U_n) < \epsilon$ *para cada $n \in \mathbb{N}$ y $U = \bigcup U_n = \bigcup \overline{U_n}$.*

Demostración. Sea D un conjunto denso numerable contenido en X, entonces todo abierto contenido en X intersecta a D. Definamos

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(d) : \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2},\ d \in D \text{ y } \overline{B_{\frac{1}{n}}(d)} \subset U\},$$

sabemos que dicho conjunto es numerable, ya que D es numerable y $\mathbb{N}$ lo es también; entonces enumeremos a $\mathcal{B}$ como $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y note que $\text{diam}(U_m) < \epsilon$

para cada $m \in \mathbb{N}$. A su vez, observe que si $x \in U_m$, entonces $x \in \overline{U_m} \subset U$, por lo tanto $x \in U$, es decir $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \subset U$.

Por demostrar que $U \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Sea $x \in U$, entonces existe $n > 0$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$ y $B_{\frac{1}{n}}(x) \subset U$. Tenemos que, como D es denso, existe $d \in D \cap B_{\frac{1}{3n}}(x)$, así $x \in B_{\frac{1}{3n}}(d)$ y a su vez $\overline{B_{\frac{1}{3n}}(d)} \subset U$, es decir $x \in U_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $x \in \bigcup U_n$.

Note que $U = \bigcup U_n \subset \bigcup \overline{U_n} \subset U$, así $U = \bigcup U_n = \bigcup \overline{U_n}$. ■

Resulta interesante que el enunciado de esta proposición se pudo escribir de la siguiente manera; Todo espacio polaco es un espacio de Lindelöf.

Teorema 2.4. *Sea X un espacio polaco. Entonces existe una función sobreyectiva continua $f : \mathcal{N} \to X$.*

Demostración. Sea X como en la hipótesis. Para cada $s \in \omega^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} \omega^n$ construiremos un cerrado $C_s \subset X$. Realizaremos la construcción de forma recursiva sobre n, el dominio de s:

- **Paso 0:** Sea $C_\emptyset = X$,
- **Paso n:** Supongamos definido $C_s \subset X$ cerrado para $s \in \omega^i$ e $i < n$.
- **Paso n+1:** Sea $s \in \omega^n$. Como $C_s \subset X$ y X es polaco por la Proposición 2.3, existe una cubierta numerable $\mathcal{C}$ de C_s por conjuntos abiertos de diámetro menor que $1/2^{n+1}$. Sea $\{C_{s,m}\}_{m\in\omega}$ una enumeración de $\mathcal{C}$. Para cada $m \in \omega$ sea $C_{s^\frown m} = \overline{C_{s,m}} \subset C_s$.

Construiremos una función $f : \mathcal{N} \to X$ como sigue. Para $a \in \mathcal{N}$ definimos el conjunto cerrado

$$C_a = \bigcap_{n\in\omega} C_{a\restriction_n}.$$

Notemos que como X es completo, entonces $C_a \neq \emptyset$ y como $\operatorname{diam}(C_a) \leq \operatorname{diam}(C_{a\restriction_n}) \leq 1/2^n$ para cada $n > 0$, así, por el Teorema 1.19, C_a consta de un único punto. Sea $f(a)$ dicho punto en C_a. Probaremos entonces que f que es continua y sobreyectiva.

Para ver que f es sobreyectiva suponga que $x \in X$ y construyamos por recursión $s_n \in \omega^n$ tal que $x \in C_{s_n}$ para toda $n \in \omega$. Sea $s_0 = \emptyset$, así $x \in C_\emptyset = X$. Suponga que $x \in C_{s_n}$ para alguna $s_n \in \omega^n$. Veamos para $n+1$. Como $C_{s_n} = \bigcup_{j\in\omega} \overline{C_{s_n^\frown j}}$ existe $j \in \omega$ tal que $x \in \overline{C_{s_n^\frown j}}$ y definamos $s_{n+1} = s_n^\frown j$, y así se cumple para s_{n+1}. Como $\{s_n\}_{n\in\omega}$ es una familia compatible de funciones podemos definir $a = \bigcup_{n=0}^{\infty} s_n$. Observe que $a \in \mathcal{N}$, así $x \in C_a = \bigcap_{n\in\omega} C_{s_n}$, por lo tanto $f(a) = x$.

Ahora para verificar la continuidad tomemos $\epsilon = 1/2^n$ para $n > 0$. Sea $\delta = 1/2^n$ y $a, b \in \mathcal{N}$ tales que $d(a,b) < \delta = 1/2^n$. Se sigue que $s = a \restriction_{n+1} = b \restriction_{n+1} \in \omega^{n+1}$. Así $f(a), f(b) \in C_s$ y como $\operatorname{diam}(C_s) < 1/2^{(n+1)}$ concluimos que $d_X(f(a), f(b)) \leq \operatorname{diam}(C_s) \leq 1/2^{(n+1)} < 1/2^n = \epsilon$. ■

Teorema 2.5. *Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de espacios polacos, entonces $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es un espacio polaco.*

Demostración. Suponga que d_m es una métrica completa en X_m tal que $d_m < 1$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Definamos entonces la métrica d en X como sigue

$$d(x,y) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m(x(m), y(m))}{2^{m+1}},$$

veamos que d es completa en X. Suponga que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X, entonces $\{x_n(m)\}$ es sucesión de Cauchy en X_m para cada $m \in \mathbb{N}$. Sea $y(m) = \lim_{i\to\infty} x_i(m)$, así y es límite de $\{x_n\}$, es decir converge.

Ahora veamos que X es separable. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea D_n un conjunto denso numerable de X_n y sea x_n un punto fijo de D_n. Para $m \in \mathbb{N}$ definamos

$$\mathcal{E}_m = D_1 \times \cdots \times D_m \times \{(x_n)_{n>m}\} \subset X,$$

entonces tendremos que $\mathcal{E}_m$ es numerable, así

$$\mathcal{E} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_m$$

es un conjunto numerable en $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Por demostrar que $\mathcal{E}$ es denso en $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Sea $z = (z_n) \in X$ y $\epsilon > 0$. Tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^m < \epsilon$. Definimos $y = (y_n) \in \mathcal{E}$ como $y_n = z_n$ para $n \leq m$ y $y_n = x_n$ para $n > m$. Entonces $d(y,z) = \sum_{n>m} d_m(y_n, x_n)/2^n \leq 1/2^m < \epsilon$. ■

Ejemplo 2.6. Gracias al teorema anterior tendremos que;

i) $\mathbb{R}^\omega = \prod_{n\in\omega} \mathbb{R}$ es un espacio polaco.

ii) De igual forma $\mathcal{N}^\omega = \prod_{n\in\omega} \mathcal{N}$ será espacio polaco.

Lema 2.7. *Si X es un espacio polaco no numerable, entonces contiene una copia G_δ de $\mathcal{N}$.*

Demostración. Primero recordemos que, gracias al Lema 1.12, todo espacio no numerable y separable X contiene un $Y \subset X$ cerrado tal que no tiene puntos aislados; todo espacio completamente metrizable sin puntos asilados es no numerable, así Y no es numerable y, por el Lema 1.13, si un conjunto X no tiene puntos aislados, entonces existe $\{x_n\}_{n\in\omega} \subset X$ tal que $x_n \subset U_n$ y donde $\overline{U_n} \cap \overline{U_m} = \emptyset$ para todo $n, m \in \omega$ distintos.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que X no tiene puntos aislados. Para cada $s \in \omega^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} \omega^n$ construiremos una familia de abiertos $\mathcal{U}_n = \{U_s\}_{s\in\omega^n}$. Realizaremos la construcción de forma recursiva sobre n el dominio de s:

- **Paso 0:** Sea $U_\emptyset = X$, entonces tomamos $\mathcal{U}_0 = \{U_\emptyset\} = \{X\}$.
- **Paso n:** Supongamos definida la familia de abiertos $\mathcal{U}_i = \{U_s\}_{s\in\omega^i}$ para $i \leq n$.
- **Paso n+1:** Sea $s \in \omega^n$. Como $U_s \subset X$ y X no tiene puntos aislados, entonces U_s no tiene puntos aislados, así por el Lema 1.13 existe $\{U_{s,m}\}_{m\in\omega} \subset U_s$ tal que $\overline{U_{s,m}} \cap \overline{U_{s,k}} = \emptyset$ para cada $k, m \in \omega$ distintos. Podemos suponer que cada $\overline{U_{s,m}} \subset U_s$ y $\overline{U_{s,m}}$ tiene diámetro menor que $1/2^{m+1}$. Tomemos $U_{s^\frown m} = U_{s,m}$. Note que hemos construido $\mathcal{U}_{n+1} = \{U_{s^\frown m} : s \in \omega^{n+1}, m \in \omega\}$.

Construyamos una función $f : \mathcal{N} \to X$ como sigue. Para $a \in \mathcal{N}$ definimos el conjunto cerrado

$$C_a = \bigcap_{n\in\omega} \overline{U_{a\restriction_n}}.$$

Notemos que como X es completo entonces $C_a \neq \emptyset$ y como $\operatorname{diam}(\overline{U_{a\restriction_n}}) \leq 1/2^n$ para cada $n > 0$, así por el Teorema 1.19 existe un único punto en C_a, al cual llamaremos $f(a)$. Por ver que f es un homeomorfismo sobre su imagen, es decir un encaje.

Para ver que f es inyectiva suponga que $a, b \in \mathcal{N}$ tales que $a \neq b$. entonces existe $m \in \omega$ tal que $a(m) \neq b(m)$, sea n el mínimo natural con esta propiedad. Entonces $s = a \restriction_n = b \restriction_n$. Por la construcción en el paso n-ésimo los conjuntos $\overline{U_{a\restriction_{n+1}}} = \overline{U_{s^\frown a(n)}}$ y $\overline{U_{b\restriction_{n+1}}} = \overline{U_{s^\frown b(n)}}$ son ajenos. Sabemos que $f(a) \in \overline{U_{a\restriction_{n+1}}}$ y $f(b) \in \overline{U_{b\restriction_{n+1}}}$, lo cual implica que $f(a) \neq f(b)$.

Ahora para verificar la continuidad tomemos $\epsilon = 1/2^n$. Sea $\delta = 1/2^n$ y $a, b \in \mathcal{N}$ tales que $d(a, b) < \delta = 1/2^n$. Se sigue que $s = a \restriction_n = b \restriction_n \in \omega^n$. Así $f(a), f(b) \in \overline{U_s}$ y como $\operatorname{diam}(\overline{U_s}) < 1/2^n$ concluimos que $d_X(f(a), f(b)) \leq \operatorname{diam}(\overline{U_s}) < 1/2^n = \epsilon$.

Ahora para verificar la continuidad de f^{-1} en un punto $x \in f(\mathcal{N})$, tomemos $a = f^{-1}(x)$ y $\epsilon = 1/2^n$. Como $x = f(a) \in \overline{U_{a\restriction_{n+2}}} \subset U_{a\restriction_{n+1}}$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset U_{a\restriction_{n+1}}$. Probaremos, para $y \in f(\mathcal{N})$ con $y = f(b)$, que si $d(y, x) < \delta$ entonces $d(a, b) < \epsilon$. Procediendo por contradicción, supongamos que $d(a, b) = 1/2^k \geq 1/2^n$. Se sigue que $s = a \restriction_k = b \restriction_k \in \omega^k$. Como $s^\frown a(k) \neq s^\frown b(k)$. Por la construcción en el paso $k+1$-ésimo los conjuntos $\overline{U_{a\restriction_{k+1}}} = \overline{U_{s^\frown a(k)}}$ y $\overline{U_{b\restriction_{k+1}}} = \overline{U_{s^\frown b(k)}}$ son ajenos. Como $k \leq n$ entonces $x, y \in B_\delta(x) \subset U_{a\restriction_{n+1}} \subset U_{a\restriction_{k+1}}$. Por otra parte $y = f(b) \in \overline{U_{b\restriction_{k+1}}}$, una contradicción. Por lo tanto $d(a, b) < \epsilon$.

Para terminar recordemos del Teorema 1.16, que todo subespacio completamente metrizable es un G_δ en el espacio, así la copia de $\mathcal{N}$ contenida en X es un conjunto G_δ. ■

Para los propósitos de este trabajo necesitaremos únicamente lo ya presentado hasta ahora de espacios polacos, a partir de aquí hay un cambio de sección en el que nos adentraremos en los conjuntos de Borel. Si desea ver una base más amplia o una presentación alternativa del tema, vaya a [5].

2.2. Conjuntos de Borel

Como mencionamos anteriormente empezaremos esta sección definiendo lo que es una σ-álgebra, ya que es la base conceptual de la sección, inmediatamente después mostraremos la jerarquía que forman los conjuntos de Borel y su definición. Después de mostrar algunos ejemplos básicos de conjuntos de Borel, demostraremos el resultado principal de la sección, el cual nos dice que todo conjunto de Borel en un polaco proviene de la proyección de un conjunto cerrado en el producto cruz entre dicho espacio polaco y el espacio de Baire.

Definición 2.8. Llamamos *σ-álgebra*, representado por Σ, a una familia de subconjuntos de un conjunto X tal que cumple con lo siguiente:

- $\emptyset \in \Sigma$,
- Si $E \in \Sigma$, entonces $X \setminus E \in \Sigma$,
- Si tenemos $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $E_n \in \Sigma$, para cada n, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$.

Ejemplo 2.9. Veamos algunos ejemplos clásicos de σ-álgebras.

i) La pareja $\{\emptyset, X\}$ forma una σ-álgebra sobre X, a la cual llamamos σ-álgebra trivial.

ii) La potencia de un conjunto, $\mathcal{P}(X)$, forma una σ-álgebra sobre el conjunto X, a la cual llamamos σ-álgebra discreta.

iii) Sea $A \subset X$, el conjunto $\mathcal{F} = \{\emptyset, X, A, X \setminus A\}$ forma una σ-álgebra sobre X.

iv) Sea $\mathcal{N}$ el conjunto de todos los subconjuntos de X que son a lo más numerable, entonces $\mathcal{F} = \{Y \subset X : Y \in \mathcal{N} \vee (X \setminus Y) \in \mathcal{N}\}$ forma una σ-álgebra sobre X.

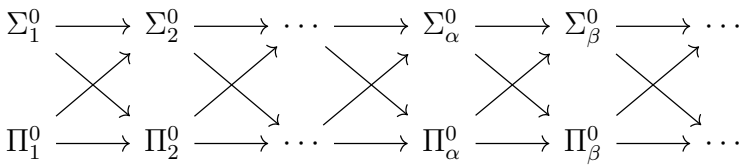
Definición 2.10. Sea X espacio polaco. $A \subset X$ es *conjunto de Borel* si pertenece a la σ-álgebra más pequeña contenida en $\mathcal{P}(X)$ tal que contiene a todo conjunto cerrado.

Demos una descripción más desarrollada de un conjunto de Borel. Sea $\alpha < \omega_1$, definamos las familias Σ^0_α y Π^0_α de subconjuntos de X, tal que:

- $\Sigma^0_1 :=$ la familia de todos los conjuntos abiertos,
- $\Pi^0_1 :=$ la familia de todos los conjuntos cerrados,
- $\Sigma^0_\alpha :=$ la familia de todos los conjuntos $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, donde $A_n \in \Pi^0_\beta$ para algún $\beta < \alpha$,
- $\Pi^0_\alpha :=$ la familia de todos los conjuntos $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, donde $A_n \in \Sigma^0_\beta$ para algún $\beta < \alpha$.

Por definición tenemos que $\Sigma^0_\alpha \subset \Pi^0_\beta$ y $\Pi^0_\alpha \subset \Sigma^0_\beta$ para $\alpha < \beta < \omega_1$. Como un abierto es la unión numerable de conjuntos cerrados y como todo cerrado es intersección numerable de conjuntos abiertos entonces $\Sigma^0_1 \subset \Sigma^0_2$ y $\Pi^0_1 \subset \Pi^0_2$, así es fácil verificar por inducción que, para $\alpha < \beta$, se da $\Sigma^0_\alpha \subset \Sigma^0_\beta$ y $\Pi^0_\alpha \subset \Pi^0_\beta$. Además para cada $\alpha < \omega_1$ tendremos que $\Pi^0_\alpha = X \setminus \Sigma^0_\alpha$, lo cual también es fácil verificar por inducción.

Entonces tenemos el siguiente diagrama, donde las flechas indican contención,



En consecuencia tendremos que

$$\bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Pi^0_\alpha.$$

Observación 2.11. Es sencillo ver que dicha unión es σ-álgebra y además es la σ-álgebra más pequeña que contiene a todos los conjuntos cerrados, por lo tanto es la σ-álgebra de Borel. Entonces todo conjunto de Borel está en algún Σ^0_α donde $\alpha < \omega_1$. Adoptaremos la notación $\mathcal{B}(X) = \{B \subset X : B \text{ es Borel}\}$.

Ejemplo 2.12. Presentaremos a continuación varios ejemplos de conjuntos de Borel en un espacio polaco X.

I. Todo conjunto cerrado pertenece a la colección Π^0_1 y todo conjunto abierto pertenece a Σ^0_1.

II. Los conjuntos G_δ son de la forma Π^0_2.

III. Los conjuntos F_σ son de la forma Σ^0_2.

IV. Si X es un espacio polaco numerable, es claro que todo $A \in X$ es un conjunto de Borel, de hecho son conjuntos F_σ.

Teorema 2.13. *Todo conjunto B de Borel en X, es la proyección de un conjunto cerrado $C \subset X \times \mathcal{N}$, donde X es un espacio polaco.*

Demostración. Sea $\pi_X : X \times \mathcal{N} \to X$ la proyección cartesiana en X, y sea

$$\mathcal{B} = \{B \subset X : \text{existe un cerrado } C \subset X \times \mathcal{N} \text{ tal que } \pi_X(C) = B\}.$$

Por demostrar que $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}$, así basta demostrar que $\mathcal{B}$ contiene a todo $\Sigma^0_\alpha, \Pi^0_\alpha \subset \mathcal{B}$ para todo $\alpha < \omega_1$. Para ello primero mostraremos que es cerrado bajo uniones e intersecciones numerables.

- **Uniones Numerables**:

  Sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de conjuntos en $\mathcal{B}$. Sabemos que $\mathcal{N} \cong \bigoplus_{n\in\omega} \mathcal{N}_n$, donde $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}$ para cada n. Definamos por elección los siguientes conjuntos cerrados; como $A_n \in \mathcal{B}$, tendremos que por definición existe un cerrado $C_n \subset X \times \mathcal{N}_n$ tal que $\pi_X(C_n) = A_n$, esto para cada $n \in \omega$. Llamemos $C = \bigcup_{n\in\omega} C_n$ y $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, entonces es claro que $\bigcup_{n\in\omega} \pi_X(C_n) = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, entonces $\pi_X(C) = A$. Por lo tanto $A \in \mathcal{B}$.

- **Intersecciones Numerables**:

  Sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de conjuntos en $\mathcal{B}$. Sabemos que $\mathcal{N} \cong \prod_{n\in\omega}\mathcal{N}_n = \mathcal{N}^\omega$, donde $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}$ para cada n. Por hipótesis $A_n \in \mathcal{B}$ y así existe $C_n \subset X \times \mathcal{N}_n$ tal que $\pi_X(C_n) = A_n$. Sea

  $$C = \{(x, a) : (x \in X)(\forall n \in \omega)((x, a_n) \in C_n)\} \subset X \times \mathcal{N}^\omega.$$

  Nótese que si $A = \bigcap_{n\in\omega} A_n$, entonces $\pi_X(C) = A$. En efecto $x \in A$ sii $x \in A_n$ para cada $n \in \omega$ sii $x \in \pi_X(C_n)$ para cada $n \in \omega$ sii para cada $n \in \omega$ existe $a_n \in \mathcal{N}_n$ tal que $(x, a_n) \in C_n$ sii existe $a \in \mathcal{N}^\omega$ tal que $(x, a) \in C$ sii $x \in \pi_X(C)$.

  Probaremos que C es cerrado en $X \times \mathcal{N}^\omega$, o de manera equivalente que $U = (X \times \mathcal{N}^\omega) \setminus C$ es abierto. Sea $(x, a) \in U$. Entonces existe $n \in \omega$ tal que $(x, a_n) \notin C_n$. Así existe $U \times V_n$ vecindad abierta de (x, a_n) tal que $(U \times V_n) \cap C_n = \emptyset$. Consideremos la vecindad abierta $B = U \times (\prod_{m\in\omega} V_m)$, donde $V_m = \mathcal{N}_m$ para $n \neq m$, de (x, a) en $X \times \mathbb{N}^\omega$. Afirmamos que $B \subset U$. Sea $(y, b_n) \in B$. Entonces $(y, b_n) \in U \times V_n$ y así $(y, b_n) \notin C_n$, lo que implica que $(y, b) \notin C$, es decir $(y, b) \in U$. Por lo tanto $(x, a) \in B \subset U$, así como (x, a) fue un punto arbitrario, entonces U es abierto. Por lo tanto $A = \bigcap_{n\in\omega} A_n \in \mathcal{B}$.

- **Contiene a todos los Σ^0_α y Π^0_α**:

  Recordemos que esta demostración es para todo $\alpha < \omega_1$. Por inducción transfinita sobre α:

  - **Paso $\alpha = 1$.** Sea $A \subset X$ es un conjunto cerrado. Definamos $C = A \times \mathcal{N}$ un cerrado en $X \times \mathcal{N}$, y además $A = \pi_X(C)$, entonces $A \in \mathcal{B}$, esto prueba que $\Pi^0_1 \subset \mathcal{B}$. Recordemos además que todo conjunto abierto es unión numerable de cerrados, y ya demostramos que $\mathcal{B}$ es cerrado bajo uniones numerables, entonces $\Sigma^0_1 \subset \mathcal{B}$.
  - **Paso α.** Supongamos que la contención es válida para $\beta < \alpha$. Sea $A \in \Sigma^0_\alpha$, entonces $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ donde para cada $n \in \omega$ se tiene que $A_n \in \Pi^0_\beta \subset \mathcal{B}$ para alguna $\beta < \alpha$, esto por hipótesis de inducción y definición de Σ^0_α, entonces es claro que $\bigcup_{n\in\omega} A_n \in \mathcal{B}$, es decir $\Sigma^0_\alpha \subset \mathcal{B}$.

    Sea $A \in \Pi^0_\alpha$, entonces $A = \bigcap_{n\in\omega} A_n$ donde para cada $n \in \omega$ se tiene que $A_n \in \Sigma^0_\beta \subset \mathcal{B}$ para alguna $\beta < \alpha$, esto por hipótesis de

inducción y definición de Π^0_α, entonces es claro que $\bigcap_{n\in\omega} A_n \in \mathcal{B}$, es decir $\Pi^0_\alpha \subset \mathcal{B}$.

■

Si esta demostración parece extensa es porque hemos esquivado el concepto de conjuntos universales, si desea ver una prueba mucho más directa que hace uso justamente de los conjuntos universales, entonces vaya a [4], el cual es el texto base para este capítulo en general.

Lema 2.14. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, entonces $f^{-1}[\Sigma^0_\alpha(Y)] \subset \Sigma^0_\alpha(X)$ y $f^{-1}[\Pi^0_\alpha(Y)] \subset \Pi^0_\alpha(X)$; en particular $f^{-1}[\mathcal{B}(Y)] \subset \mathcal{B}(X)$.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ como en la hipótesis. Procederemos por inducción transfinita.

- **Paso $\alpha = 1$.** Sea $A \in \Sigma^0_1(Y)$, entonces $f^{-1}[A] \in \Sigma^0_1(X)$ ya que f es continua, es decir $f^{-1}[V]$ es un abierto de X para cualquiera que sea el abierto V de Y. Sabemos además que $f^{-1}[A] = f^{-1}[X \setminus B]$ si y sólo si $B \in \Pi^0_1(Y)$ ya que $\Pi^0_1(Y) = Y \setminus \Sigma^0_1(Y)$. Así $f^{-1}[X \setminus B] = X \setminus f^{-1}[B] \in \Sigma^0_1(X)$ ya que los conjuntos de Borel son cerrados bajo complementos, por lo tanto $f^{-1}[B] \in \Pi^0_1(X)$.
- **Paso α.** Suponga que la contención es válida para $\beta < \alpha$. Sea $A \in \Sigma^0_\alpha(Y)$, entonces $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, donde para cada $n \in \omega$ se tiene que $A_n \in \Pi^0_\beta(Y)$ para $\beta < \alpha$. Así $f^{-1}[A_n] \in \Pi^0_\beta(X)$ por hipótesis de inducción, entonces $\bigcup_{n\in\omega} f^{-1}[A_n] = f^{-1}[\bigcup_{n\in\omega} A_n] \in \Sigma^0_\alpha(X)$ por definición de $\Sigma^0_\alpha(X)$. Por lo tanto $f^{-1}[A] \in \Sigma^0_\alpha(X)$. Igual que antes tenemos que $f^{-1}[A] = f^{-1}[X \setminus B]$, donde $B \in \Pi^0_\alpha(Y)$. Así $f^{-1}[X \setminus B] = X \setminus f^{-1}[B] \in \Sigma^0_\alpha(X)$ ya que los conjuntos de Borel son cerrados bajo complementos, por lo tanto $f^{-1}[B] \in \Pi^0_\alpha(X)$. ■

2.3. Conjuntos Analíticos

Esta sección es análoga a la anterior, ya que se divide en dos partes; la definición y jerarquía de los conjuntos Analíticos y el teorema de la sección. Este

teorema presenta una serie de equivalencias con respecto a ser un conjunto Analítico, relacionándolo así con los conjuntos de Borel y los espacios polacos.

Definición 2.15. Sea $A \subset X$, donde X es espacio polaco, entonces A es un *conjunto analítico* si existe una función continua $f : \mathcal{N} \to X$ tal que $f(\mathcal{N}) = A$. Al complemento de un conjunto analítico le llamamos *co-analítico*. A continuación mostraremos la jerarquía que se forma con los conjuntos analíticos.

Para cada $n \geq 1$, definamos las colecciones Σ^1_n, Π^1_n y $\triangle^1_n$ de subconjuntos de X espacio polaco, como sigue:

- $\Sigma^1_1 :=$ la familia de todos los conjuntos analíticos,
- $\Pi^1_1 :=$ la familia de todos los conjuntos co-analíticos,
- $\Sigma^1_{n+1} :=$ la familia de proyecciones sobre X de todos los conjuntos Π^1_n en $X \times \mathcal{N}$,
- $\Pi^1_n :=$ el complemento de todos los conjuntos Σ^1_n
- $\triangle^1_n := \Sigma^1_n \cap \Pi^1_n$.

A los conjuntos pertenecientes a una de las familias Σ^1_n o Π^1_n les llamamos conjuntos proyectivos.

Observación 2.16. Si X es un espacio polaco, entonces todo $A \subset X$ cerrado, es analítico.

En efecto, ya que un cerrado en un espacio completamente metrizable es a su vez completamente metrizable; de igual forma es separable. Por lo tanto todo cerrado A en un polaco es un polaco también, y por por Teorema 2.4 la imagen continua de $\mathcal{N}$, así es analítico.

Teorema 2.17. *Sea X un espacio polaco, para $A \subset X$, entonces LSASE:*

a) A es analítico,

b) Existe un conjunto de Borel $B \subset X \times X$ tal que $A = \pi_X(B)$,

c) Existe Y un espacio polaco y existe un conjunto de Borel $B \subset X \times Y$, tal que $A = \pi_X(B)$,

d) Existe un conjunto de Borel $B \subset X \times \mathcal{N}$ tal que $A = \pi_X(B)$,

e) Para todo espacio polaco no numerable Y, existe $C \subset X \times Y$ un conjunto G_δ tal que $A = \pi_X(C)$.

Demostración.

- $a) \Rightarrow b)$. Por definición de analítico, existe $f : \mathcal{N} \to X$ continua tal que $f(\mathcal{N}) = A$. Suponga que X es numerable, entonces $A \subset X$ es un analítico numerable. Así, tomando $B = A \times X$ es unión numerable de cerrados, es decir un conjunto de Borel en $X \times X$, tal que $A = \pi_X(B)$. Ahora suponga que X es no numerable, por Teorema 2.7 tenemos que contiene una copia G_δ de $\mathcal{N}$, así $X \times \mathcal{N}$ es G_δ en $X \times X$. Tomando $B = \{(f(a), a) : a \in \mathcal{N}\}$ tendremos que, como $X \times \mathcal{N}$ es Hausdorff gracias a la topología discreta, entonces es un conjunto cerrado en $X \times \mathcal{N}$ gracias a la Proposición 1.5, entonces B es G_δ en $X \times \mathcal{N}$ y por extensión también lo será en $X \times X$. Concluimos mencionando que B, al ser G_δ, es un conjunto de Borel y además $\pi_1(B) = A$.

- $b) \Rightarrow c)$. Basta tomar $Y = X$.

- $c) \Rightarrow d)$. Sabemos que existe $f : \mathcal{N} \to Y$ continua y sobreyectiva. Sea $D = (id_X \times f)^{-1}[B] \subset X \times \mathcal{N}$ es un conjunto de Borel gracias al Lema 2.14. Veamos que $\pi'_X(D) = A$. Nótese que $id_X \circ \pi'_X = \pi_X \circ (id_X \times f)$ así $\pi'_X(D) = \pi_X(([id_X \times f](D)) = \pi_X(B) = A$ esto gracias al inciso $c)$ y a que la función $id_X \times f$ es sobreyectiva.

- $d) \Rightarrow e)$. Por el Teorema 2.7, el espacio Y contiene una copia G_δ de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, sea $Z = X \times \mathcal{N}$, por hipótesis existe un Borel $B \subset Z$ tal que $\pi_X(B) = A$. Entonces, por el Teorema 2.13, existe $C \subset Z \times \mathcal{N}$ tal que $\pi_Z(C) = B$; recordemos que todo cerrado en un espacio metrizable es un G_δ. Note que $C \subset Z \times \mathcal{N} = (X \times \mathcal{N}) \times \mathcal{N} = X \times (\mathcal{N} \times \mathcal{N}) = X \times Y$, y además que $\pi_X(C) = \pi_X(\pi_Z(C)) = \pi_X(B) = A$. Como C es G_δ en $Z \times \mathcal{N}$ y $Z \times N = X \times (\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ en G_δ en $X \times Y$, entonces C es G_δ en $X \times Y$.

- $e) \Rightarrow a)$. Tomemos el polaco $(X \times \mathcal{N}) \times \mathcal{N}$, sea $C \subset X \times \mathcal{N}$ como en la hipótesis. Sabemos que como C es G_δ por el Teorema 2.13 existe $B \subset (X \times \mathcal{N}) \times \mathcal{N}$ cerrado tal que $A = \pi_X(C) = \pi_X(\pi_{X\times Y}(B))$. Se sigue que B es analítico y por lo tanto existe $f : \mathcal{N} \to B$ una función continua. Por lo tanto $A = \pi_X(B) = \pi_X(f(\mathcal{N}))$. Como f y π_X son funciones continuas y sobreyectivas, entonces A es analítico.

■

Capítulo 3

Teoría de Ramsey

Este capítulo está dividido en tres secciones; El teorema de Ramsey para sucesiones finitas, teoría de juegos y el teorema de Ramsey para sucesiones infinitas.

La primera sección empieza con la motivación de los conceptos y con la demostración del teorema que le da su nombre, posteriormente avanzaremos con algunas implicaciones y corolarios de este. En la segunda sección nos dedicamos a mostrar conceptos básicos de la teoría de juegos, sin embargo dicha sección no debe considerarse una introducción a esta ya que su propósito es definir un juego en específico y a partir de este construir las nociones básicas de la ya mencionada teoría de juegos; desde estrategia ganadora, hasta juegos determinados. Por último, en la tercera sección daremos algunos lemas y proposiciones que harán uso tanto del juego presentado en la segunda sección, como de los conceptos presentados en los dos capítulos anteriores, y con esto poder demostrar concretamente el teorema de Ramsey para sucesiones infinitas y definir los conjuntos que llamaremos Ramsey y hereditariamente Ramsey.

3.1. Teorema de Ramsey para sucesiones finitas

El lenguaje usual con el que se describe la teoría de Ramsey es el de los grafos, donde un grafo $G = (V, A)$ esta formado por un conjunto de vértices V y un conjunto de aristas A extraídas de la colección de los subconjuntos de V que tienen dos elementos, lo que llamaremos más adelante como los 2-subconjuntos de V. Nosotros prescindiremos casi por completo del ya mencionado lenguaje de grafos; sin embargo, consideramos importante mostrar cómo es que Ramsey enunció su teorema originalmente y definir exactamente que son los números de Ramsey a través de dicha notación de grafos.

Definición 3.1. Dado $r \in \mathbb{N}$, definimos *r-coloración* de un conjunto A a una partición $(A_i)_{i=1}^r$ de A en r subconjuntos. Decimos que $B \subset A$ es monocromático si para algún $i \leq r$, $B \subset A_i$.

Para la teoría de Ramsey lo que nos interesará será "colorear" aristas en una familia especial de grafos llamados los grafos completos K_n. Dichos grafos tienen n vértices y todas las $\binom{n}{2}$ posibles aristas. Podemos dibujar el grafo K_n como el polígono de n vértices con todos sus lados y todas sus diagonales.

Uno de los problemas de los que se encargó Ramsey fue el de, dados dos enteros p y q, encontrar el mínimo entero $r = R(p, q)$ para el que cualquier 2-coloración de las aristas del grafo K_r contenga un subgrafo K_p cuyas aristas estén todas de un color, o bien el subgrafo K_q con todas sus aristas del otro color de la partición. Dicho entero $R(p, q) = R(q, p)$ es un número de Ramsey. En general se puede plantear el mismo problema para un numero mayor de colores, $t \geq 2$, y encontrar dicho numero de Ramsey dados los números enteros $p_1, \ldots, p_t$.

La manera en la que Ramsey enunció su teorema fue la siguiente; dados los enteros $p_1, \ldots, p_t$, existe un entero N tal que si un conjunto V tiene al menos ese numero de elementos y hacemos una t-coloración de los 2-subconjuntos A de ese conjunto, entonces existe un i y un subconjunto V_i de V de tamaño p_i tal que todos sus 2-subconjuntos A_i tienen color i, es decir $G_i(V_i, A_i)$ es un subgrafo de $G = (A, V)$ monocromático. Llamaremos $R(p_1, \ldots, p_t) = R(p_1, \ldots, p_t; 2)$ al mínimo entero N tal que cumpla con lo

anteriormente enunciado. El teorema de Ramsey para sucesiones finitas que demostraremos es la versión general, es decir para subconjuntos de tamaño r, lo que implica encontrar el numero de Ramsey $R(p_1, \ldots, p_t; r)$.

Es natural querer calcular, o encontrar cotas, para dichos números de Ramsey. En ambos casos son pocos los resultados obtenidos, de entrada los números $R(p, q)$ no triviales son aquellos para los que $p, q \geq 3$, ya que es fácil ver que $R(1, q) = 1$ y $R(2, q) = q$, para $q \geq 2$. Algunos de los resultados obtenidos para enteros dados p, q son los siguientes.

p \ q	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	6	9	14	18	23	28-29	36	40-43	46-51
4		18	25	35-41	49-61	53-84	69-115	80-149	96-191
5			43-49	58-87	80-143	95-216	114-316	118-442	
6				102-165					

A partir de aquí usaremos la notación usado comúnmente en teoría de conjuntos, donde α es un ordinal. Por el momento sólo usaremos $\alpha = n \in \mathbb{N}$ o $\alpha = \omega$, el ordinal que denota al infinito numerable. Sin embargo más adelante en el capítulo usaremos $\alpha = \omega_1$, como el ordinal no numerable más pequeño, y $\alpha = \mathfrak{c}$, el ordinal del continuo. Denotaremos $[X]^{\alpha}$ como el conjunto de todos los subconjuntos de X de cardinalidad α, de igual forma denotamos $[X]^{<\alpha}$ y $[X]^{\leq\alpha}$ como el conjunto de todos los subconjuntos de X de cardinalidad menor o a lo más α, respectivamente.

Teorema 3.2. *(Ramsey Finito) Sea $k \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]^k$, entonces existe $M \subset [\mathbb{N}]^{\omega}$ tal que $[M]^k \subset \mathcal{A}$ o $[M]^k \cap \mathcal{A} = \emptyset$.*

Demostración. Procedamos por inducción:

- **Paso $k = 1$.** Si $\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]^1$, entonces existe $M \subset [\mathbb{N}]^{\omega}$ tal que o $[M]^1 \subset \mathcal{A}$ o $[M]^1 \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Reescribimos $[\mathbb{N}]^1 = \mathcal{A} \cup ([\mathbb{N}]^1 \setminus \mathcal{A})$, por el principio de casillas tenemos que o $\bigcup \mathcal{A}$ es infinito o $\bigcup([\mathbb{N}]^1 \setminus \mathcal{A})$ lo es. Si el primero es infinito, entonces definamos $M = \bigcup \mathcal{A}$, así es claro que $[M]^1 \subset \mathcal{A}$; de lo contrario hagamos $M = \bigcup([\mathbb{N}]^1 \setminus \mathcal{A})$, así $[M]^1 \subset ([\mathbb{N}]^1 \setminus \mathcal{A})$, por lo tanto $[M]^1 \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

- **Paso $k+1$.** Supongamos que es válido para k, entonces para $M_i \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $n_i \in M_i$ sea $\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]^{k+1}$; defina

$$A_{n_i,M_i} = \left\{\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} \in [M_i]^k : \{n_i, m_1, m_2, \ldots, m_k\} \in \mathcal{A}\right\}$$

$$B_{n_i,M_i} = \left\{\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} \in [M_i]^k : \{n_i, m_1, m_2, \ldots, m_k\} \notin \mathcal{A}\right\}.$$

  Por recursión sobre i construiremos dichos naturales n_i y los conjuntos M_i: Sea $i = 1$; $M_1 = \mathbb{N}$ y $n_1 = 1$. Observe que $[M_1 \setminus \{n_1\}]^k = A_{n_1,M_1} \cup B_{n_1,M_1}$, pero por hipótesis de inducción existe $M_2 \in [M_1 \setminus \{n_1\}]^\omega$ tal que $[M_2]^k \subset A_{n_1,M_1}$ o $[M_2]^k \subset B_{n_1,M_1}$. Ahora sea $i = 2$; $M_2 \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $n_2 = \min M_2$. Note que $[M_2 \setminus \{n_2\}]^k = A_{n_2,M_2} \cup B_{n_2,M_2}$ y de nuevo por hipótesis de inducción existe $M_3 \in [M_2 \setminus \{n_2\}]^\omega$ tal que $[M_3]^k \subset A_{n_2,M_2}$ o $[M_3]^k \subset B_{n_2,M_2}$. Supongamos construido $M_i \in [\mathbb{N}]^\omega$, entonces tomemos $n_i = \min M_i$. Igual que antes, $[M_i \setminus \{n_i\}]^k = A_{n_i,M_i} \cup B_{n_i,M_i}$ y así por hipótesis de inducción existe $M_{i+1} \in [M_i \setminus \{n_i\}]^\omega$ tal que $[M_{i+1}]^k \subset A_{n_i,M_i}$ o $[M_{i+1}]^k \subset B_{n_i,M_i}$.

  Concluyamos la construcción tomando $M = \left\{n_i : [M_i]^k \subset A_{n_i,M_i}\right\}$ si este conjunto es infinito, así $[M]^{k+1} \subset \mathcal{A}$. En efecto, si $F \in [M]^{k+1}$ sea $F = \{n_i, m_1, \ldots, m_k\}$, con $n_i \in M$ el mínimo elemento de F. Entonces $\{m_1, \ldots, m_k\} \in [M_i]^k \subset A_{n_i,M_i}$ y en consecuencia $F = \{n_i, m_1, \ldots, m_k\} \in \mathcal{A}$. En caso de no ser infinito entonces haga $M = \left\{n_i : [M_i]^k \subset B_{n_i,M_i}\right\}$ es infinito, de manera similar que antes se puede verificar que $[M]^{k+1} \subset ([\mathbb{N}]^{k+1} \setminus \mathcal{A})$ y por lo tanto $[M]^{k+1} \cap \mathcal{A} = \emptyset$, ya que podemos definir $[\mathbb{N}]^{k+1} = \mathcal{A} \cup ([\mathbb{N}]^{k+1} \setminus \mathcal{A})$. ■

A continuación enunciaremos dos corolarios del teorema de Ramsey para sucesiones finitas; uno de ellos tiene una demostración sencilla, pero posee una implicación bastante importante; el segundo corolario es bastante más elaborado tanto enunciando como en demostración, y además está relacionado con los números de Ramsey del tipo $R(p; 2)$.

Corolario 3.3. *Para cualquier $r \in \mathbb{N}$ y cualquier r-coloración de $[\mathbb{N}]^k$ con $k \in \mathbb{N}$, existe $M \subset [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $[M]^k$ es monocromático.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre r.

- **Paso** 2**:** Es el Teorema de Ramsey finito.
- **Paso** r**:** Supongamos que el resultado es cierto para una r-coloración de $[\mathbb{N}]^k$ de la forma $([\mathbb{N}]^k_i)^r_{i=1}$.
- **Paso** $r+1$**:** Sea $([\mathbb{N}]^k_i)^{r+1}_{i=1}$ una $r+1$-coloración de $[\mathbb{N}]^k$. Definamos una r-coloración en $[\mathbb{N}]^k$ como sigue; sea $A_i = [\mathbb{N}]^k_i$ para $i < r$ y $A_r = [\mathbb{N}]^k_r \cup [\mathbb{N}]^k_{r+1}$. Por hipótesis de inducción, existe $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $[M]^k \subset A_i$ para alguna $i \leq r$. Note que si $i < r$ y $M' = M$ entonces $[M']^k \subset A_i = [\mathbb{N}]^k_i$. Si $i = r$ entonces $[M]^k \subset A_r = [\mathbb{N}]^k_r \cup [\mathbb{N}]^k_{r+1}$, lo cual gracias al Paso 2, implica que existe $M' \in [M]^\omega$ tal que $[M']^k \subset [\mathbb{N}]^k_r$ o $[M']^k \subset [\mathbb{N}]^k_{r+1}$. Por lo tanto existe $M' \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $[M']^k \subset A_i$ ■

Corolario 3.4. *Dados $k, m \in \mathbb{N}$, existe $n \geq m$ tal que lo siguiente se cumple. Suponga que $\mathcal{A} \subset [\{1, 2, 3, \ldots, n\}]^k$, entonces existe $M \subset [\{1, 2, 3, \ldots, n\}]^m$ tal que o $[M]^k \subset \mathcal{A}$ o $[M]^k \cap \mathcal{A} = \emptyset$.*

Demostración. Procediendo por contradicción: Suponga que existen $k, m \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq m$, existe un $\mathcal{A}_n \subset [\{1, 2, 3, \ldots, n\}]^k$ tal que para todo $M \in [\{1, 2, 3, \ldots, n\}]^m$ pasa que $[M]^k \not\subset \mathcal{A}_n$ y $[M]^k \cap \mathcal{A}_n \neq \emptyset$.

Empezaremos una recursión sobre j, para construir un subconjunto $L \in [\mathbb{N}]^\omega$ para el cual, aplicando el Teorema de Ramsey finito, obtendremos una contradicción:

- **Paso** 1**:** Sean $L_0 = \mathbb{N}$ y $n_1 = \min L_0$.
- **Paso** $j+1$**:** Supongamos construidos conjuntos infinitos $L_0 \supset \cdots \supset L_{j-1}$ y un conjunto $N_j = \{n_1, \ldots, n_j\}$ satisfaciendo que $n_i = \min L_{i-1}$ para cada $i < j$ y tal que $n_1 < \cdots < n_j$. Considérese la familia $\{\mathcal{A}_n \cap [N_j]^k : n \in L_{j-1}\}$. Notemos que, como esta familia es finita, por el principio de casillas existe $L_j \in [L_{j-1} \setminus N_j]^\omega$, tal que si $n, m \in L_j$ entonces
$$\mathcal{A}_n \cap [N_j]^k = \mathcal{A}_m \cap [N_j]^k.$$
Por último, tomemos $n_{j+1} = \min L_j$ y $N_{j+1} = N_j \cup \{n_{j+1}\}$.

Una vez terminada la construcción consideremos los conjuntos

$$N = \{n_j : j \in \mathbb{N}\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{A} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (\mathcal{A}_{n_{j+1}} \cap [N_j]^k).$$

Afirmación. *Si $j \in \mathbb{N}$ se tiene $\mathcal{A} \cap [N_j]^k = \mathcal{A}_{n_{j+1}} \cap [N_j]^k$.*

Esto sucede porque $\mathcal{A}$ es una unión creciente de coloraciones compatibles. En efecto, tomando $i < j$, se tiene $n_{i+1}, n_{j+1} \in N_i$, de donde

$$\mathcal{A}_{n_{i+1}} \cap [N_i]^k = \mathcal{A}_{n_{j+1}} \cap [N_i]^k \subset \mathcal{A}_{n_{j+1}} \cap [N_j]^k.$$

Además para $j < i$ se tiene $n_{i+1}, n_{j+1} \in N_j$, de donde

$$\mathcal{A}_{n_{j+1}} \cap [N_j]^k = \mathcal{A}_{n_{i+1}} \cap [N_j]^k = (\mathcal{A}_{n_{i+1}} \cap [N_i]^k) \cap [N_j]^k.$$

Ambas observaciones implican la afirmación.

Continuando con la prueba, por el Teorema de Ramsey finito, existe $N' \subset [N]^\omega$ tal que o $[N']^k \subset \mathcal{A}$ o $[N']^k \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Observe que, como $N' \subset \{n_1, n_2, \ldots\}$, podemos escribir a N' como una subsucesión creciente de N, es decir, $N' = \{n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots\}$. Así, tomando $M = \{n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots, n_{j_m}\} \in [N']^m$, notemos que $[M]^k \subset \mathcal{A}$ o $[M]^k \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Para $j = j_m$ tenemos que $[M]^k \subset [N_j]^k$, y así por la afirmación se tiene

$$[M]^k \subset \mathcal{A} \cap [N_j]^k = \mathcal{A}_{n_{j+1}} \cap [N_j]^k \subset \mathcal{A}_{n_{j+1}},$$

o

$$[M]^k \cap \mathcal{A}_{n_{j+1}} = ([M]^k \cap [N_j]^k) \cap \mathcal{A}_{n_{j+1}} = [M]^k \cap \mathcal{A} \cap [N_j]^k = \emptyset.$$

Por lo tanto, M es testigo de que $\mathcal{A}_{n_{j+1}}$ cumple la condición del corolario y dado que por elección no debe cumplir con el corolario, se tiene una contradicción. Así, el teorema queda probado. ■

Para $m \in \mathbb{N}$, sea $R(m; k)$ el mínimo natural n tal que la conclusión del corolario anterior se mantiene, es decir tal que para todo $\mathcal{A} \subset [\{1, 2, 3, \ldots, n\}]^k$ existe $M \subset [\{1, 2, 3, \ldots, n\}]^m$ tal que o $[M]^k \subset \mathcal{A}$ o $[M]^k \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

3.2. Juegos Infinitos

Esta sección, como ya mencionamos, tiene el propósito de mostrar conceptos base de la teoría de juegos a partir de un juego en específico. Empezaremos

con la definición del juego ya mencionado para posteriormente definir lo que significa una estrategia ganadora en dicho juego y concluir la sección con la demostración de que dicho juego está determinado bajo ciertas condiciones.

Esta sección parece estar fuera de nuestros propósitos de desarrollar la teoría de Ramsey, sin embargo en la siguiente sección se hará uso de un juego equivalente al que definimos aquí, el cual mantendrá las mismas propiedades, y nos servirá específicamente para demostrar uno de los teoremas principales del texto; el teorema de Ramsey infinito.

Definición 3.5. Sea X un espacio discreto no vacío y $\mathcal{A} \subset X^\omega$; consideramos *el juego* $G(\mathcal{A}, X)$ llevado a cabo por el Jugador 1 y el Jugador 2, a los cuales nos referiremos como P_1 y P_2 respectivamente, como sigue; en el movimiento 1 el jugador P_1 escoge $x_1 \in X$, en el movimiento 2 el jugador P_2 escoge $y_1 \in X$, en el movimiento 3 P_1 escoge $x_2 \in X$ y así sucesivamente.

J \ M	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
P_1	$x_1 \in X$		$x_2 \in X$		$x_3 \in X$		$\cdots$
P_2		$y_1 \in X$		$y_2 \in X$		$y_3 \in X$	$\ldots$

Entonces el P_1 gana si la sucesión resultante $x = (x_1, y_1, x_2, \ldots) \in \mathcal{A}$, de lo contrario P_2 gana.

Definición 3.6. Llamamos *estrategia ganadora de* P_1 *para* $G(\mathcal{A}, X)$, denotada por $W_1(\mathcal{A}, X)$, si existe una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\omega}$ donde $f_n : X^{2n} \to X$, tal que si $x = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots)$ es la sucesión de elecciones del juego, donde

$$x_{n+1} = f_n(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n),$$

entonces $x \in \mathcal{A}$. De manera análoga, llamamos *estrategia ganadora de* P_2 *para* $G(\mathcal{A}, X)$, denotada por $W_2(\mathcal{A}, X)$, si existe una sucesión de funciones $\{g_n\}_{n\geq 1}$ donde $g_n : X^{2n+1} \to X$, tal que si $x = (x_1, y_1, \ldots, y_n, x_{n+1}, \ldots)$ es la sucesión de elecciones del juego, donde

$$y_{n+1} = g_n(x_1, y_1, \ldots, y_n, x_{n+1}),$$

entonces $x \notin \mathcal{A}$.

Notación. Cuando el espacio discreto X en el que se está jugando es igual a $\mathbb{N}$, entonces denominamos al juego $G(\mathcal{A}, \mathbb{N})$ como $G(\mathcal{A})$. Lo mismo para las estrategias ganadoras de P_1 y P_2, es decir, las denotaremos como $W_1(\mathcal{A})$ y $W_2(\mathcal{A})$.

Proposición 3.7. *$W_1(\mathcal{A}, X)$ y $W_2(\mathcal{A}, X)$ no pueden existir al mismo tiempo.*

Demostración. Procediendo por contradicción suponga que existen las funciones $f_n : X^{2n} \to X$ y $g_n : X^{2n+1} \to X$ que satisfacen $W_1(\mathcal{A}, X)$ y $W_2(\mathcal{A}, X)$ respectivamente. Entonces, por recursión, construyamos la sucesión $x = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots)$ como sigue:

- **Paso 1.** Tome $x_1 = f_0(\emptyset)$ y $y_1 = g_0(x_1)$.
- **Paso n + 1.** Procedamos tomando

$$x_{n+1} = f_n(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \quad \text{y} \quad y_{n+1} = g_n(x_1, y_1, \ldots, y_n, x_{n+1}).$$

Así, por construcción, la sucesión $x = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots) \in \mathcal{A}$ y a su vez $x = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots) \notin \mathcal{A}$, una contradicción. ■

Notación. Para $\mathcal{A} \subset X^\omega$ y $s = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^{<\omega}$, escribimos

$$\mathcal{A}(s) = \{z \in X^\omega : s^\frown z \in \mathcal{A}\}.$$

Observación 3.8. Sea $\mathcal{A} \subset X^\omega$, donde X tiene la topología discreta, y donde X^ω tiene la topología producto, entonces note que;

- $\mathcal{A}$ es abierto si es unión de básicos, es decir que existe $\mathcal{R} \subset X^{<\omega} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$ tal que

$$\mathcal{A} = \bigcup \{s^\frown X^\omega : s \in \mathcal{R} \text{ y } s \in X^n\}.$$

- $\mathcal{A}$ es cerrado si contiene a todos sus puntos de acumulación; es decir, dado $x = (x_n) \in X^\omega$ entonces $x \in \mathcal{A}$ siempre que para cada $m \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \neq \emptyset.$$

Proposición 3.9. *(Gale-Stewart) Si $\mathcal{A} \subset X^\omega$ es un conjunto cerrado o abierto, entonces el juego $G(\mathcal{A}, X)$ está determinado, es decir uno de los jugadores tiene estrategia ganadora.*

Demostración. Note que el juego $G(\mathcal{A}, X)$ esté determinado quiere decir que $W_1(\mathcal{A}, X)$ implica $\neg W_2(\mathcal{A}, X)$ o al revés.

- **$\mathcal{A}$ cerrado.**

  Sin perdida de generalidad suponga que $\neg W_2(\mathcal{A}, X)$. Por inducción construyamos las funciones $f_n : X^{2n} \to X$ tales que si $s \in X^{2n}$, $s = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ y $x_{i+1} = f_i(x_1, y_1, \ldots, x_i, y_i)$ para $i \leq n-1$, entonces $\neg W_2(\mathcal{A}(s), X)$ se mantiene.

  - **Paso** 0**.** Note que f_0 existe sólo por asumir $\neg W_2(\mathcal{A}, X)$, ya que negar una estrategia ganadora para P_2 implica que existe un $x_1 \in X$ tal que para todo $y \in X$ se cumple que $\neg W_2(\mathcal{A}(x_1, y), X)$ y en particular $\mathcal{A}(x_1, y) \neq \emptyset$. Así defina $f_0 : X^0 \to X$ como $f_0(\emptyset) = x_1$.
  - **Paso** n**.** Supongamos que es válido para $n-1$; es decir, estamos suponiendo que se han definido $f_i : X^{2i} \to X$ para $i < n$ tales que si $s = (x_1, y_1, \ldots, x_{i+1}, y_{i+1})$, donde $x_{j+1} = f_j(x_1, y_1, \ldots, x_j, y_j)$ para $j \leq i$, entonces $\neg W_2(\mathcal{A}(s), X)$, y en particular $\mathcal{A}(s) \neq \emptyset$.

    Sea $s = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$. Si se ha jugado de tal forma que $x_{i+1} = f_i(x_1, y_1, \ldots, x_i, y_i)$ para $i \leq n-1$. Por hipótesis $\neg W_2(\mathcal{A}(s), X)$. Entonces existe $x_{n+1} \in X$ tal que para todo $y \in X$ se tiene que $\neg W_2(\mathcal{A}(s^\frown(x_{n+1}, y), X)$ y en particular $\mathcal{A}(s^\frown(x_{n+1}, y)) \neq \emptyset$. Defina entonces $f_n(s) = x_{n+1}$. Si s no es como antes defínase $f_n(s) \in X$ de forma arbitraria.

  Sólo queda demostrar que $\{f_n\}$ genera $W_1(\mathcal{A}, X)$. En efecto, sea $x = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots)$, donde se ha jugado de tal forma que $x_{n+1} = f_n(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Notemos que la construcción garantiza que $\mathcal{A}(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$; así, como $\mathcal{A}$ es cerrado, tendremos que $x = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots) \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $W_1(\mathcal{A}, X)$ se da.

- **$\mathcal{A}$ abierto.** Sea $\mathcal{B} = X^\omega \setminus \mathcal{A}$ el cual es cerrado. Sin perdida de generalidad suponga que $\neg W_1(\mathcal{A}, X)$. Por inducción construyamos las

funciones $g_n : X^{2n+1} \to X$ tales que para todo $s \in X^{2n+1}$, donde $s = (x_1, y_1, \ldots, x_n)$ con $y_{i+1} = g_i(x_1, y_1, \ldots, x_{i+1})$ para $i \leq n-2$, entonces $\neg W_1(\mathcal{A}(s), X)$ se mantiene.

- **Paso** 0**.** Note que, como antes, g_0 existe sólo por asumir $\neg W_1(\mathcal{A}, X)$, ya que negar una estrategia ganadora para P_1 implica que para todo $x_1 \in X$ existe $y_1 \in X$ tal que $\neg W_1(\mathcal{A}(x_1, y_1), X)$ y en particular $\mathcal{B}(x_1, y_1) \neq \emptyset$. Entonces defina $g_0 : X^1 \to X$ como $g_0(x_1) = y_1$ para cada $x_1 \in X$.
- **Paso** n**.** Suponga que es válido para $n-1$; es decirse, suponemos que se han definido $g_i : X^{2i+1} \to X$ para $i \leq n-1$ tales que si $s = (x_1, y_1, \ldots, x_{i+1}, y_{i+1})$, donde $y_{j+1} = g_j(x_1, y_1, \ldots, x_{j+1})$ para $j \leq i$, entonces $\neg W_1(\mathcal{A}(s), X)$ se mantiene, y en particular $\mathcal{B}(s) \neq \emptyset$.

  Sea $s = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$, donde se ha jugado $s^\frown x_{n+1}$ de tal forma que $y_{i+1} = g_i(x_1, y_1, \ldots, x_{i+1})$ para $i \leq n-1$. Por hipótesis $\neg W_1(\mathcal{A}(s), X)$ lo cual implica que para toda $x \in X$ existe un $y \in X$ tal que $\neg W_1(\mathcal{A}(s^\frown(x, y)), X)$. En particular para x_{n+1} existe $y_{n+1} \in X$ tal que $\neg W_1(\mathcal{A}(s^\frown(x_{n+1}, y_{n+1})), X)$; se sigue que $\mathcal{B}(s^\frown(x_{n+1}, y_{n+1})) \neq \emptyset$. Defina entonces $g_n(s^\frown x_{n+1}) = y_{n+1}$. Si s no es como antes defínase $g_n(s^\frown x_{n+1}) \in X$ de forma arbitraria.

Queda demostrar que $\{g_n\}$ genera $W_2(\mathcal{A}, X)$. En efecto, considérese $x = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots)$, donde se ha jugado de tal manera que $y_{n+1} = g_n(x_1, y_1, \ldots, y_n, x_{n+1})$ para $n \in \mathbb{N}$. De la construcción tenemos que $\mathcal{B}(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$; así, como $\mathcal{B}$ es cerrado, tendremos que $x = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots) \in \mathcal{B}$, es decir $x \notin \mathcal{A}$. Por lo tanto $W_2(\mathcal{A}, X)$ se da. ■

3.3. Teorema de Ramsey para sucesiones infinitas

Esta sección es la más importante del capítulo y una de las principales del texto en sí, ya que es aquí donde usaremos, ya sea de manera directa

o indirecta, todos los conceptos y teoremas antes enunciados para poder demostrar uno de los resultados mas importantes de la teoría de Ramsey, el antes nombrado teorema de Ramsey infinito. Antes de pasar a dicho teorema requeriremos de un un par de lemas y la definición de un juego infinito, el cual demostraremos que es equivalente al juego de la sección anterior y por ende posee todas sus propiedades. Inmediatamente después de la demostración definiremos lo que es un conjunto de Ramsey y un conjunto hereditariamente Ramsey, demostrando que dichos conjuntos forman una σ-álgebra en $[\mathbb{N}]^\omega$.

A partir de ahora identificaremos a cada conjunto en $[\mathbb{N}]^\omega$ con su función característica 2^ω, es decir supondremos que $[\mathbb{N}]^\omega$ es un subespacio del producto topológico 2^ω.

Notación. Si $\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]^\omega$ y si $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$, entonces definimos

$$\mathcal{A}(F) = \{N \in [\mathbb{N}]^\omega : \text{máx}\, F < \text{mín}\, N \wedge F \cup N \in \mathcal{A}\}.$$

Obsérvese que $[\mathbb{N}]^\omega(F)$ es un abierto básico en $[\mathbb{N}]^\omega$.

Observación 3.10. Sea $\mathcal{A} \in [\mathbb{N}]^\omega$, entonces tendremos que

- $\mathcal{A}$ es abierto si es unión de básicos, es decir que existe $\mathcal{F} \subset [\mathbb{N}]^{<\omega} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\mathbb{N}]^n$ tal que

$$\mathcal{A} = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} \{F \cup M : M \in [\mathbb{N}]^\omega(F)\}.$$

- $\mathcal{A}$ es cerrado si contiene a todos sus puntos de acumulación, es decir dado $A = \{n_1, n_2, \ldots\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ entonces $A \in \mathcal{A}$ si y sólo si para cada $m \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\mathcal{A}(n_1, n_2, \ldots, n_m) \neq \emptyset.$$

Lema 3.11. *Sea $\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]^\omega$ y $N \in [\mathbb{N}]^\omega$, suponga que para toda $M \in [N]^\omega$ pasa que $\mathcal{A} \cap [M]^\omega \neq \emptyset$. Entonces $\forall N' \in [N]^\omega$, $\exists\ L \in [N']^\omega\ \forall\ l \in L\ \forall\ M \in [L]^\omega$ $\mathcal{A}(\{l\}) \cap [M]^\omega \neq \emptyset$.*

Demostración. Por contradicción suponga que existe $N' \in [N]^\omega$ que no cumple con el enunciado, es decir que existe $N' \in [N]^\omega$ tal que para todo $L \in [N']^\omega$

existe $l \in L$ y una $M \in [L]^\omega$ tales que $\mathcal{A}(\{l\}) \cap [M]^\omega = \emptyset$. Sin perdida de generalidad, se puede suponer que $l < \min M$.

Haciendo recursión sobre j construyamos los números naturales l_j y conjuntos L_j como sigue.

- **Paso** 1. Sea $L_0 = N'$, entonces por hipótesis de contradicción tenemos que para L_0 existen $l_1 \in L_0$ y $L_1 \in [L_0]^\omega$ tales que $\mathcal{A}(\{l_1\}) \cap [L_1]^\omega = \emptyset$, donde $l_1 < \min L_1$.

- **Paso** $j+1$. Supongamos que es valido para j; es decir, suponga construido los conjuntos $\{l_i\}_{i\leq j}$ y $\{L_i\}_{i\leq j}$ tales que para cada $i < j$ se cumple que $l_{i+1} \in L_i$, $L_{i+1} \in [L_i]^\omega$, $\mathcal{A}(\{l_{i+1}\}) \cap [L_{i+1}]^\omega = \emptyset$ y tal que $l_{i+1} < \min L_{i+1}$. Y además que $L_i \supset L_{i+1}$ y $l_i < l_{i+1}$ para cada $i < j$.

  Ahora, por hipótesis de contradicción, tendremos que para L_j existen $l_{j+1} \in L_j$ y un $L_{j+1} \in [L_j]^\omega$ tales que $\mathcal{A}(\{l_{j+1}\}) \cap [L_{j+1}]^\omega = \emptyset$ y donde $l_{j+1} < \min L_{j+1}$.

Una vez terminada la construcción tomemos $M = \{l_1, l_2, \ldots\}$, el cual pertenece a $[N']^\omega$ y por lo tanto pertenece a $[N]^\omega$. Por hipótesis se cumple que $\mathcal{A} \cap [M]^\omega \neq \emptyset$, entonces tomemos $A \in \mathcal{A} \cap [M]^\omega$ y sea $l_k = \min A$. Entonces $A \subset \{l_k\} \cup \{l_j\}_{j>k} \subset \{l_k\} \cup \bigcup \{L_j\}_{j\geq k} \subset \{l_k\} \cup L_k$ así $A \in \mathcal{A}(\{l_k\}) \cap [L_k]^\omega = \emptyset$ por construcción, una contradicción.

■

Proposición 3.12. *Suponga que $\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]^\omega$ es cerrado, si existe $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que para toda $M \in [N]^\omega$ se sigue que $\mathcal{A} \cap [M]^\omega \neq \emptyset$, entonces existe $N' \in [N]^\omega$ tal que $[N']^\omega \subset \mathcal{A}$.*

Demostración. Por demostrar que existe $[N']^\omega \subset \mathcal{A}$ para $N' \in [N]^\omega$. Procediendo por inducción sobre j, construyamos los naturales n_j y los conjuntos $N_j \in [N]^\omega$ como sigue.

- **Paso** 1. Sea $N_0 = N$, entonces por hipótesis tenemos $\mathcal{A} \cap [M]^\omega \neq \emptyset$ para toda $M \in [N_0]^\omega$. A su vez, por Lema anterior, podemos tomar $N_1 \in [N_0]^\omega$ y en particular para $n_1 = \min N_1$ sucede que $\mathcal{A}(\{n_1\}) \cap [M]^\omega \neq \emptyset$, para todo $M \in [N_1]^\omega$. Nótese que por hipótesis $\mathcal{A}(\emptyset) \cap [M]^\omega \neq \emptyset$, para todo $M \in [N_1]^\omega$.

- **Paso** $j+1$**.** Supongamos que la propiedad es válida para j; es decir, suponga construidos los conjuntos $\{n_i\}_{i\leq j}$ y $\{N_i\}_{i\leq j}$ tales que $n_{i+1} \in N_{i+1}$, $n_i < n_{i+1}$ y $N_i \supset N_{i+1}$ para cada $i < j$. Además supondremos que se satisface que, para cada $F \subset \{n_1, \ldots, n_j\}$, sucede que $\mathcal{A}(F) \cap [M]^\omega \neq \emptyset$ para cada $M \in [N_j]^\omega$; entonces note que, para el Paso 1, se satisface esta condición.

  Ordenemos todos los subconjuntos de $\{n_1, \ldots, n_j\}$ de la siguiente forma $\{F_1, F_2 \ldots, F_{2^j}\}$; así, para cada $i \leq 2^j$, recordemos que

  $$\mathcal{A}(F_i) = \{N \in [\mathbb{N}]^\omega : \text{máx}\, F_i < \text{mín}\, N \wedge F_i \cup N \in \mathcal{A}\}.$$

  Aplicaremos el Lema anterior de forma recursiva a las familias $\mathcal{A}(F_i)$, para cada $i \leq 2^j$, y algún $L_i \in [N_j]^\omega$ como sigue.

  - **Paso** 1**.** Sea $L_0 = N_j \setminus \{n_j\}$, entonces por Lema existe $L_1 \in [L_0]^\omega$ tal que para todo $l \in L_1$ y todo $M \in [L_1]^\omega$ pasa que $\mathcal{A}(F_1)(\{l\}) \cap [M]^\omega = (\mathcal{A}(F_1 \cup \{l\})) \cap [M]^\omega \neq \emptyset$.
  - **Paso** $i < 2^j$**.** Supongamos construidos $L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_i$ tales que para cada $k \leq i$, todo $l \in L_k$ y todo $M \in [L_k]^\omega$ pasa que $\mathcal{A}(F_k)(\{l\}) \cap [M]^\omega = (\mathcal{A}(F_k \cup \{l\})) \cap [M]^\omega \neq \emptyset$.
  - **Paso** $i+1$**.** Para i tenemos L_i, existe $L_{i+1} \in [L_i]^\omega$ tal que para todo $l \in L_{i+1}$ y todo $M \in [L_{i+1}]^\omega$ sucede que $(\mathcal{A}(F_{i+1} \cup \{l\})) \cap [M]^\omega \neq \emptyset$.

  Una vez terminada la construcción, de aplicar el Lema sucesivamente obtendremos los conjuntos $L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_{2^j}$ tales que $(\mathcal{A}(F_i \cup \{l\})) \cap [M]^\omega \neq \emptyset$, para cada $i \leq 2^j$ y para cada $M \in [L_{2^j}]^\omega$.

  Sean $N_{j+1} = L_{2^j}$ y $n_{j+1} = \text{mín}\, L_{2^j}$. Notemos que, para cada $F \subset \{n_1, \ldots, n_j, n_{j+1}\}$, sucede que $\mathcal{A}(F) \cap [M]^\omega \neq \emptyset$ para cada $M \in [N_{j+1}]^\omega$, terminando así la la construcción.

Definamos $N' = \{n_1, n_2, \ldots\}$ el cual pertenece a $[N]^\omega$. Entonces para cada subconjunto finito $F \subset N'$ tendremos que, por construcción, $\mathcal{A}(F) \neq \emptyset$ y, como $\mathcal{A}$ es cerrado, se sigue de la Observación 3.8 que $M \in \mathcal{A}$ para cada $M \in [N']^\omega$, así $[N']^\omega \subset \mathcal{A}$.

■

Definición 3.13. Definamos el siguiente juego $G(\mathcal{A})$. Sea $\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]^\omega$ conjunto cerrado, tenemos el juego infinito $G(\mathcal{A})$ entre P_1 y P_2. En el primer movimiento P_1 escoge $N_1 \in [\mathbb{N}]^\omega$, en el segundo movimiento P_2 escoge $n_1 \in N_1$, en el tercer movimiento P_1 escoge $N_2 \in [\mathbb{N}]^\omega$, en el cuarto movimiento P_2 escoge $n_2 \in N_2$, y asi sucesivamente.

J \ M	1	2	3	4	5	$\cdots$
P_1	$N_1 \in [\mathbb{N}]^\omega$		$N_2 \in [\mathbb{N}]^\omega$		$N_3 \in [\mathbb{N}]^\omega$	$\cdots$
P_2		$n_1 \in N_1$		$n_2 \in N_2$		$\ldots$

Entonces P_1 gana si la sucesión $x = \{n_1, n_2, \ldots\}$ pertenece a $\mathcal{A}$, de lo contrario gana P_2.

Si $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ y le exigimos a P_1 tomar únicamente subconjuntos de N, a este juego lo denotaremos como $G(\mathcal{A}, N)$, entonces llamamos a $G(\mathcal{A}, N)$ el juego $G(\mathcal{A})$ restringido por N. A su vez, escribimos $W_1(\mathcal{A}, N)$ si P_1 tiene una estrategia ganadora para la restricción de $\mathcal{A}$ a N y de igual forma escribimos $W_2(\mathcal{A}, N)$ si P_2 la tiene. Note que si $N = \mathbb{N}$, entonces $W(\mathcal{A}, N) = W(\mathcal{A})$.

A su vez note que, por como se definió a al ganador, tendremos que este juego se puede traducir de la siguiente forma al juego de la Definición 3.5. Sea $x_i = N_i$ y $y_i = n_i$; redefinamos el espacio donde se tomó a $\mathcal{A}$ como $X = [\mathbb{N}]^\omega \oplus \mathbb{N}$ la suma topológica ajena, donde $\mathbb{N}$ y $[\mathbb{N}]^\omega$ son subespacios cerrados en X. Entonces $\mathcal{A}$ es cerrado en $[\mathbb{N}]^\omega$ y por lo tanto cerrado en X^ω.

Por lo anterior y por la Proposición 3.9 sabemos que el juego de la Definición 3.5 está determinado y así, a su vez, tendremos que el juego $G(\mathcal{A})$ está determinado, es decir $\neg W_1(\mathcal{A}, N)$ implica $W_2(\mathcal{A}, N)$ para cada $N \in [\mathbb{N}]^\omega$.

Teorema 3.14. *(Ramsey infinito) Suponga que $\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]^\omega$ es un conjunto cerrado, entonces existe $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $[N]^\omega \subset \mathcal{A}$, o pasa que $[N]^\omega \cap \mathcal{A} = \emptyset$.*

Demostración. Para proceder con la prueba vamos a interpretar el enunciado del teorema con el juego $G(\mathcal{A})$ definido anteriormente. Consideremos los siguientes dos casos.

- **Caso** 1. Procedamos suponiendo que existe $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que para toda $M \in [N]^\omega$ tendremos que $W_1(\mathcal{A}, M)$ se mantiene. Note que esto implica

que $\mathcal{A} \cap [M]^\omega \neq \emptyset$ para cada $M \in [N]^\omega$; ya que $x = \{n_1, n_2, \ldots\}$, la sucesión de tiradas, está en $\mathcal{A}$ por la estrategia ganadora de P_1 y a su vez $x \in [M]^\omega$ por la elección de las tiradas de P_1. Así aplique la Proposición 3.12, la cual nos da un $N' \in [N]^\omega$ tal que $[N']^\omega \subset \mathcal{A}$, en particular $N' \in [\mathbb{N}]^\omega$.

- **Caso** 2. Ahora supongamos lo contrario; suponga que para cada $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ existe $M \in [N]^\omega$ tal que $\neg W_1(\mathcal{A}, M)$ se mantiene. Como el juego $G(\mathcal{A}, M)$ está determinado tenemos que $\neg W_1(\mathcal{A}, M)$ implica $W_2(\mathcal{A}, M)$, así la estrategia ganadora de P_2 restringida a M implica que $([\mathbb{N}]^\omega \setminus \mathcal{A}) \cap [M]^\omega \neq \emptyset$. Por lo tanto tenemos que $\forall N \in [\mathbb{N}]^\omega$ existe $M \in [N]^\omega$ tal que $([\mathbb{N}]^\omega \setminus \mathcal{A}) \cap [M]^\omega \neq \emptyset$. Note que esto es equivalente a negar la existencia de un $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $[N]^\omega \subset \mathcal{A}$. Gracias a la ley del contrarrecíproco podemos aplicar la Proposición 3.12 a ésta implicación, así se obtiene la negación de la existencia de un $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que para todo $M \in [N]^\omega$ sucede que $[M]^\omega \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$, es decir, que para todo $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ existe $M \in [N]^\omega$ tal que $[M]^\omega \cap \mathcal{A} = \emptyset$, en particular $M \in [\mathbb{N}]^\omega$.

Así queda demostrado el teorema, ya que logramos mostrar que existe dicho $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $[N]^\omega \subset \mathcal{A}$ o $[N]^\omega \cap \mathcal{A} = \emptyset$. ■

Nota. Posteriormente, en éste capítulo, extenderemos la demostración únicamente para $\mathcal{A}$ conjunto de Borel, pero de hecho el teorema es válido para $\mathcal{A}$ conjunto Analítico, esto con respecto a la topología producto en $[\mathbb{N}]^\omega \subset \{0,1\}^\omega$.

Definición 3.15. Sea $\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]^\omega$, entonces decimos que $\mathcal{A}$ es un *conjunto de Ramsey* si existe $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que

$$[M]^\omega \cap \mathcal{A} = \emptyset \qquad \vee \qquad [M]^\omega \subset \mathcal{A}.$$

Y decimos que $\mathcal{A}$ es *hereditariamente Ramsey*, si para todo $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ y para todo $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$, existe $M \in [N]^\omega$ tal que

$$[M]^\omega \cap \mathcal{A}(F) = \emptyset \qquad \vee \qquad [M]^\omega \subset \mathcal{A}(F).$$

Llamemos R_h al conjunto de todos los subconjuntos de $[\mathbb{N}]^\omega$ que son Ramsey hereditarios.

Lema 3.16. *El conjunto R_h es cerrado bajo intersecciones finitas.*

Demostración. Basta probar el enunciado para dos elementos. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in R_h$. Tomando $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$, tendremos por definición que existe $M \in [N]^\omega$ tal que $[M]^\omega \cap \mathcal{A}(F) = \emptyset$ o $[M]^\omega \subset \mathcal{A}(F)$ y de igual forma para $\mathcal{B}$; así apliquemos la condición hereditaria de Ramsey de $\mathcal{B}$ en M en vez de en $\mathbb{N}$, así podemos afirmar entonces que existe $M' \in [M]^\omega$ tal que $[M']^\omega \cap \mathcal{B}(F) = \emptyset$ o $[M']^\omega \subset \mathcal{B}(F)$.

Si M' es tal que $[M']^\omega \subset \mathcal{A}(F)$ y $[M']^\omega \subset \mathcal{B}(F)$, entonces es claro que $[M']^\omega \subset (\mathcal{B}(F) \cap \mathcal{A}(F))$; en los otros tres casos posibles tendremos que $[M']^\omega \cap (\mathcal{B}(F) \cap \mathcal{A}(F)) = \emptyset$. Así $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in R_h$. ■

Observación 3.17. Si $\mathcal{A}$ es cerrado, y tenemos $N \in [\mathbb{N}]^\omega$, $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$, entonces se sigue que $\mathcal{A}(F) \cap [N]^\omega$ también es cerrado en $[\mathbb{N}]^{<\omega}$. Así por la Proposición 3.12 tendremos que $\mathcal{A}$ es hereditariamente Ramsey.

Teorema 3.18. *El conjunto R_h forma una σ-álgebra.*

Demostración. Por demostrar que dicho conjunto es cerrado bajo intersecciones numerables y complementos.

- **Cerrado bajo complementos**.

  Sea $\mathcal{A} \in R_h$, entonces tenemos para todo $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ y para todo $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$, existe $M \in [N]^\omega$ tal que $[M]^\omega \cap \mathcal{A}(F) = \emptyset$ o $[M]^\omega \subset \mathcal{A}(F)$. Sin pérdida de generalidad suponga que $\max F < \min M$, entonces lo anterior implica que $[M]^\omega \subset ([\mathbb{N}]^\omega \setminus \mathcal{A})(F)$ o $[M]^\omega \cap ([\mathbb{N}]^\omega \setminus \mathcal{A})(F) = \emptyset$. Por lo tanto $([\mathbb{N}]^\omega \setminus \mathcal{A}) \in R_h$.

- **Cerrado bajo intersecciones numerables**.

  Procederemos directamente con las intersecciones infinitas numerables ya que para intersecciones finitas se probó en el Lema 3.16. Suponga que tenemos $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\mathcal{A}_n \in R_h$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y tales que $\forall n, n' \in \mathbb{N}$ tenemos $\mathcal{A}_n \neq \mathcal{A}_{n'}$. Sean $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$, por

demostrar que existe $M \in [N]^\omega$ tal que $[M]^\omega \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n(F)$ o que $[M]^\omega \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n(F) = \emptyset$.

Suponga que la sucesión $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente; en el caso de que no lo fuera simplemente reemplace los $\mathcal{A}_i$ que no lo cumplen por $\bigcap_{j\leq i} \mathcal{A}_j$, lo cual se puede por Lema 3.16. Y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $F = \emptyset$, de lo contrario reemplace $\mathcal{A}_i$ por $\mathcal{A}_i(F)$, esto para simplificar notación; por lo tanto debemos mostrar que existe $M \in [N]^\omega$ tal que $[M]^\omega \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ o que $[M]^\omega \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n = \emptyset$.

Entonces por inducción sobre j construyamos los conjuntos L_n y los naturales k_n como sigue.

- **Paso** 1. Sea $N = L_0$, como $\mathcal{A}_1$ es hereditariamente Ramsey, podemos tomar $k_1 \in L_0$ y $L_1 \in [L_0]^\omega$ tal que $\mathcal{A}_1(\{k_1\}) \cap [L_1]^\omega = \emptyset$ o $[L_1]^\omega \subset \mathcal{A}_1(\{k_1\})$.
- **Paso** $j+1$. Suponga que es válido para j; es decir, suponga construidos los conjuntos $\{k_i\}_{i\leq j}$ y $\{L_i\}_{i\leq j}$ tales que $k_{i+1} \in L_i$, $k_i < k_{i+1}$ y $L_i \supset L_{i+1}$ para cada $i < j$. Y además suponga que para cada $F \subset \{k_1, k_2, \ldots, k_j\}$ se satisface que $\mathcal{A}_j(F) \cap [L_j]^\omega = \emptyset$ o $[L_j]^\omega \subset \mathcal{A}_j(F)$.

  Sea $k_{j+1} = \min L_j$, observe que, en efecto, $k_{j+1} \in L_j$. Ordenemos todos los subconjuntos de $\{k_1, \ldots, k_j, k_{j+1}\}$ de la siguiente forma $\{F_1, F_2 \ldots, F_{2^{j+1}}\}$. Usaremos que $\mathcal{A}_{j+1}$ es hereditariamente Ramsey, para construir $L_{j+1} \in [L_j]^\omega$ por recursión.

  Sea $M_0 = L_j$, existe $M_1 \in [M_0]^\omega$ tal que $\mathcal{A}_{j+1}(F_1) \cap [M_1]^\omega = \emptyset$ o $[M_1]^\omega \subset \mathcal{A}_{j+1}(F_1)$. Así sucesivamente para cada $k < 2^{j+1}$ tendremos que, para M_k, existe $M_{k+1} \in [M_k]^\omega$ tal que $\mathcal{A}_{j+1}(F_k) \cap [M_k]^\omega = \emptyset$ o $[M_k]^\omega \subset \mathcal{A}_{j+1}(F_k)$. Es decir que obtendremos los conjuntos $M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_{2^{j+1}} = L_{j+1}$ tales que $\mathcal{A}_{j+1}(F_i) \cap [L_{j+1}]^\omega = \emptyset$ o $[L_{j+1}]^\omega \subset \mathcal{A}_{j+1}(F_i)$ para cada $i \leq 2^{j+1}$; terminando así la inducción.

Definamos entonces $K = \{k_1, k_2, \ldots\}$. Así, como $\{\mathcal{A}_n\}$ es decreciente entonces, para cada $F \in [K]^{<\omega}$ y para $m \in \mathbb{N}$ tal que $k_m = \max F$, únicamente una de las siguientes opciones sucede; $\forall n \geq m$ $([L_n]^\omega \subset \mathcal{A}_n(F))$, para $L_n \in [L_{n-1}]^\omega$, o existe $n_F \geq m$ tal que $\mathcal{A}_{n_F}(F) \cap [L_{n_F}]^\omega = \emptyset$, así para toda $n \geq n_F$ pasa que $\mathcal{A}_n(F) \cap [L_n]^\omega = \emptyset$, para $L_n \in [L_{n-1}]^\omega$.

Sea $L = \{k_{l_1}, k_{l_2}, \ldots\}$ una subsucesión de K tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$l_{n+1} \geq 1 + \text{máx}\{n_F : \forall n \geq n_F, F \subset \{k_{l_1}, \ldots, k_{l_n}\} \wedge \mathcal{A}_n(F) \cap [L_n]^\omega = \emptyset, \ \}.$$

Y definamos $\mathcal{F} = \{F \in [L]^{<\omega} : \forall n \geq m, [L_n]^\omega \subset \mathcal{A}_n(F)\}$, así sea

$$\mathcal{B} = \bigcup_{F \in [L]^{<\omega} \setminus \mathcal{F}} \{F \cup M : M \in [\mathbb{N}]^\omega \wedge \min M > \max F\}.$$

Note que $\mathcal{B}$ es una unión de abiertos en $[\mathbb{N}]^\omega$, por lo tanto es abierto en $[\mathbb{N}]^\omega$, así por Teorema 3.14 tenemos que es un Ramsey, es decir que existe $M \in [L]^\omega$ tal que $[M]^\omega \subset \mathcal{B}$ o $[M]^\omega \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Para ambos casos, dado un $M' \in [M]^\omega$, supondremos que M' está numerado de la siguiente forma $M' = \{k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots\}$, donde $\{i_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y donde $i_j \in \{l_1, l_2, \ldots\}$ para cada $j \in \mathbb{N}$; note que esto únicamente para expresar M' como una subsucesión L.

- **Para** $[M]^\omega \subset \mathcal{B}$. Supongamos que $M' \in [M]^\omega \subset \mathcal{B}$ de forma arbitraria, entonces existe un $F \in [L]^{<\omega} \setminus \mathcal{F}$ tal que $F \cup M''$ es uno de los uniendos de $\mathcal{B}$; así $F = \emptyset$ o $F = \{k_{i_1}, \ldots, k_{i_m}\}$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Así, como $F \notin \mathcal{F}$, entonces existe un $n_F > i_m$ tal que $\forall n \geq n_F$, $\mathcal{A}_n(F) \cap [L_n]^\omega = \emptyset$. Por construcción $i_{m+1} = l_{n+1} \geq 1 + n_F$, de este modo $i_{m+1} - 1 \geq n_F$ para algún $n \in \mathbb{N}$, así

  $$[L_{i_{m+1}-1}]^\omega \cap \mathcal{A}_{i_{m+1}-1}(F) = \emptyset.$$

  Por elección $M'' = M' \setminus F \in [L_{i_{m+1}-1}]^\omega$, y de este modo se tiene que $M' \notin \mathcal{A}_{i_{m+1}-1}$ esto por definición de $\mathcal{A}_{i_{m+1}-1}(F)$, y así $M' \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$. Por lo tanto, como M' es un elemento arbitrario de $[M]^\omega$, entonces

  $$[M]^\omega \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n = \emptyset.$$

- **Para** $[M]^\omega \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Tomemos $M' \in [M]^\omega$, así $M' \notin \mathcal{B}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ de forma arbitraria, debemos probar que $M' \in \mathcal{A}_n$. Entonces tomemos $j \in \mathbb{N}$ minimal tal que $i_j > n$, así $F = \{k_{i_1}, \ldots, k_{i_{j-1}}\}$ y note que puede suceder que $F = \emptyset$.

  Como $M' \notin \mathcal{B}$ entonces para cada F' segmento inicial de M' tenemos que $F' \in \mathcal{F}$, en particular $F \in \mathcal{F}$. Lo cual implica que

$M' \setminus F \in [L_n]^\omega \subset \mathcal{A}_n(F)$, así $M' \in \mathcal{A}_n$. Como $n \in \mathbb{N}$ es arbitraria, entonces $M' \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$. Como M' es un elemento arbitrario de $[M]^\omega$ tendremos que

$$[M]^\omega \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n.$$

- **Cerrado bajo uniones numerables y contiene al vacío**.

  Usando leyes de De Morgan tendremos las dos propiedades mencionadas. Entonces Tenemos que para $\mathcal{A}_n \in R_h$ y para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n = [\mathbb{N}]^\omega \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} ([\mathbb{N}]^\omega \setminus \mathcal{A}_n),$$

  es hereditariamente Ramsey debido a los casos anteriores.

  Por último, observe que gracias a la Observación 3.17 tendremos que $\emptyset \in R_h$ ya que es cerrado.

■

Notación. Nótese que gracias al teorema anterior y la observación previa, tendremos que R_h es una σ-álgebra sobre $[\mathbb{N}]^\omega$ que contiene a los cerrados y por lo tanto $\mathcal{B}([\mathbb{N}]^\omega) \subset R_h$.

Capítulo 4

Una aplicación de la Teoría de Ramsey

Este capítulo se divide en dos partes, empezando por una sección dedicada a dar un repaso de las topologías débiles, la cual se necesitará para la sección siguiente; dicha sección le da nombre a este capítulo, una aplicación de la teoría de Ramsey, específicamente es la demostración del teorema de Rosenthal usando los teoremas vistos en el capítulo anterior.

La primera sección dejaremos a un lado topología débil acotada. Se definirá con calma las mencionadas topologías débiles y el cómo se ven sus abiertos básicos. El teorema estrella de la sección es el teorema de Banach-Alaoglú , el cual nos dice que la bola unitaria del espacio dual de un espacio arbitrario X, es compacta de acuerdo a la topología débil*, para ello relacionaremos los básicos de la topología producto con los básicos de la topología débil*. Posteriormente nos dedicaremos a demostrar teoremas y lemas sencillos que serán mencionados en la segunda sección del capítulo.

En la segunda sección daremos contexto de dónde surge el teorema de Rosenthal y cimentaremos el teorema sobre la topología débil*. Como mencionamos anteriormente el teorema lo demostraremos usando variaros lemas que llevan dentro los conceptos de la teoría de Ramsey y hacen uso de los teoremas del capítulo 3, posteriormente entraremos de lleno al teorema de Rosenthal el cual, gracias a los lemas y el concepto de booleano Independiente, la demostración se torna sencilla.

4.1. Recordado la Topología Débil y Débil*

Recordemos que, dada dos topologías τ_1, τ_2 sobre un conjunto X, decimos que τ_1 es más fina que τ_2 si $\tau_2 \subset \tau_1$; también se puede decir que τ_2 es más gruesa o más débil que τ_1. Para indicar que dos topologías son equivalentes escribimos $\tau_1 = \tau_2$. Tenemos también que $\tau_2 \subset \tau_1$ es equivalente a que la función $id_X : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ sea continua. Así podemos decir que dos topologías son equivalentes si las funciones id_X, id_Y son ambas continuas, o ambas abiertas. Recordemos también que un conjunto X es convexo si para cada par de puntos de X, el segmento que los une está totalmente incluido en X.

De igual forma recordemos que con X^{**} nos referimos al dual del espacio dual de X, es decir $(X^*)^*$; al cual manejaremos con la norma $\|F\| = \sup_{f \in B_X^*} |F(f)|$, donde $F \in X^{**}$. Tomemos X un espacio normado, entonces para cada $x \in X$ definimos el funcional $\pi_x \in X^{**}$ dado por $\pi_x(f) = f(x)$. Tenemos que la proyección canónica $\pi : X \to X^{**}$, la cual se define como $\pi(x) = \pi_x$ para $x \in X$, es una isometría lineal. Tendremos además que, para $x \in X$, $\|\pi(x)\| = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x)| \leq \sup_{f \in B_{X^*}} \|f\| \|x\| \leq \|x\|$.

A continuación mostraremos que tanto la topología débil como la débil*, en sus respectivos espacios, forman espacios de Hausdorff; también daremos una breve muestra de la relación que existe con la topología producto y esto será usado para el Teorema de Banach-Alaoglú. Demostraremos también el teorema de Goldstein y una proposición que nos dice que un espacio de Banach es reflexivo si y sólo si la bola unitaria del espacio es compacta con respecto a la topología débil*.

Definición 4.1. Sea X un espacio normado. Entonces definimos la *topología débil* en X, (X, τ_w), como la topología generada por una base que consiste de conjuntos de la forma

$$\mathcal{O} = \{x \in X : |f_i(x - x_0)| < \epsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

para $x_0 \in X$, $f_i \in X^*$, para cada i, y $\epsilon > 0$. Otra manera de definir a τ_w es

como la topología menos fina (o más débil) de X tal que hace continuas a todas las funciones $f \in X^*$.

A su vez definimos la *topología débil** en X^*, (X^*, τ_{w^*}), como la topología generada por una base que consiste de conjuntos de la forma

$$\mathcal{O}^* = \{f \in X^* : |(f - f_0)x_i| < \epsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

para $f_0 \in X^*$, $x_i \in X$, para cada i, y $\epsilon > 0$. Igual que antes, otra manera de definir a τ_{w^*} es como la topología más débil sobre X^* tal que hace continuas a todas las funciones $(\pi_x)_{x \in X}$, donde $\pi_x : X^* \to \mathbb{R}$.

Observación 4.2. Note que los básicos de la topología débil* se pueden expresar, en base a la proyección canónica, de la siguiente forma; sea $f_0 \in X^*$, $x_i \in X$, donde $i = 1, 2, \ldots, n$, y $\epsilon > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^* &= \textstyle\bigcap_{i \leq n} \{f \in X^* : |(f - f_0)x_i| < \epsilon\} \\
&= \textstyle\bigcap_{i \leq n} \{f \in X^* : |\pi_{x_i}(f - f_0)| < \epsilon\} \\
&= \textstyle\bigcap_{i \leq n} \{f \in X^* : |\pi_{x_i}(f) - \pi_{x_i}(f_0)| < \epsilon\} \\
&= \textstyle\bigcap_{i \leq n} \pi_{x_i}^{-1}[B_\epsilon(\pi_{x_i}(f_0))] \\
&= \textstyle\bigcap_{i \leq n} \pi_{x_i}^{-1}[B_\epsilon(f_0(x_i))].
\end{aligned}$$

A continuación daremos un breve recordatorio de como se ven los básicos de la topología producto, esto con el propósito de que nos sea útil más adelante. Recordemos la función $p_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ definida por $p_j(x) = x(j) = x_j$ (donde $x_j \in X_j$ es la j-ésima coordenada de x, para cada $j \in I$), a la cual llamamos la proyección cartesiana de $\prod_{i \in I} X_i$ en X_j.

Sabemos también que la topología producto sobre $\prod_{i \in I} X_i$ es la que tiene por base a la familia de conjuntos que son de la forma $\mathcal{U} = \prod_{i \in F} \mathcal{U}_i \times \prod_{i \in I \setminus F} X_i$, donde F es un conjunto finito de elementos de I y $\mathcal{U}_i \subset X_i$ abierto para cada $i \in F$. Si usamos la proyección cartesiana entonces se puede representar a los básicos de la topología como sigue; $\mathcal{U} = \bigcap_{i \in F} p_i^{-1}[\mathcal{U}_i]$, así resulta que la topología producto tiene como subbase a $\{p_i^{-1}[\mathcal{U}_i] : i \in I,\ \mathcal{U}_i \subset X_i \text{ abierto}\}$. De manera similar tendremos que los básicos locales, es decir los básicos para algún un $x \in \prod_{i \in I} X_i$ en particular, se ven de la forma $\mathcal{U}_x = \bigcap_{i \in F} p_i^{-1}[V_i]$, donde V_i es un básico abierto de x_i.

Así obtuvimos a los básicos tanto de la topología producto como de la topología débil* representados con sus respectivas proyecciones. Esto será clave para poder demostrar el Teorema de Banach-Alaoglú.

Proposición 4.3. *Tanto (X, τ_w), como (X^*, τ_{w^*}), son espacios de Hausdorff.*

Demostración. Para (X^*, τ_{w^*}). Note que, dados $f, g \in X^*$ diferentes, existe un punto x donde difieren, así necesariamente existe un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que, sin pérdida de generalidad, $f(x) > \alpha > g(x)$. Así tome los w^*-abiertos $A = \{h \in X^* : h(x) > \alpha\} = \pi_x^{-1}[(\alpha, \infty)]$ y $B = \{h \in X^* : h(x) < \alpha\} = \pi_x^{-1}[(-\infty, \alpha)]$, los cuales contienen a f y g respectivamente, y están definidos de tal forma que $A \cap B = \emptyset$.

Para (X, τ_w). Sean $x, y \in X$ diferentes, así como $\|x - y\| > 0$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $y \notin B_\epsilon(x)$, así como $B_\epsilon(x)$ y $\{y\}$ cumplen con las hipótesis del Teorema de Hahn-Banach en su primera forma geométrica; vea [8, pág 16]. Entonces existe un hiperplano cerrado que los separa en sentido amplio, es decir, existe $f \in X^*$ y un $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que para todo $u \in B_\epsilon(x)$ sucede que $f(u) < \alpha \leq f(y)$. Entonces se siegue que existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < \beta < f(y)$, así tomemos los conjuntos $A = f^{-1}[(-\infty, \beta)]$ y $B = f^{-1}[(\beta, \infty)]$, los cuales no intersectan y son w-abiertos ya que son preimagen de un conjunto abierto de $\mathbb{R}$. ■

Observación 4.4. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $x \in X$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, decimos que $\{x_n\}$ converge débilmente, o w-converge, a x (denotado por $x_n \xrightarrow{w} x$), si para toda $f \in X^*$ sucede que $f(x_n) \to f(x)$.

Sean $f \in X^*$ y $\{f_n\} \subset X^*$, decimos que $f_n \xrightarrow{w*} f$, es decir f_n converge *débilmente, o w^*-converge a f, si para todo $x \in X$ sucede que $f_n(x) \to f(x)$.

Teorema 4.5. *(Banach-Alaoglú) B_{X^*}, la bola unitaria cerrada del espacio dual de X, es compacta con respecto a τ_{w^*}.*

Demostración. Sea $K = [-1, 1]^{B_X}$, que gracias al Teorema de Tychonoff, es un conjunto compacto. Sea $\Omega : B_{X^*} \to K$ la función definida para cada $f \in B_{X^*}$ por $\Omega(f) = (f(x))_{x\in B_X}$; note que Ω es una biyección sobre su imagen y recuerde que para cada $f \in B_{X^*}$ tendremos que $\|f\| = \sup_{x\in B_X}\{|f(x)|\}$. Observe que $\Omega : B_{X^*} \to \Omega[B_{X^*}]$ es la función de restricción, donde $\Omega[B_{X^*}] = B_{X^*} \restriction_{B_X} \subset K$ es el conjunto de todas las restricciones de $f \in B_{X^*}$ en B_X.

Por demostrar que Ω es un homeomorfismo. Note que estamos considerando a B_{X^*} con la topología débil*, mientras que a $\Omega[B_{X^*}]$, al ser un subconjunto de K, lo estamos considerando con la topología producto. Basta ver que los básicos de ambos conjuntos, con su respectivas topologías, son iguales módulo Ω.

Observe que los básicos de B_{X^*}, gracias a la Observación 4.2, son de la siguiente forma; $\mathcal{O}^* \cap B_{X^*} = \bigcap_{i\leq n} \pi_{x_i}^{-1}[B_\epsilon(f_0(x_i))] \cap B_{X^*}$, donde $f_0 \in B_{X^*}$, $x_i \in X$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, y $\epsilon > 0$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_i \in B_X$. Además, si aplicamos la función Ω al básico, tendremos que $\Omega[\mathcal{O}^* \cap B_{X^*}] = (\mathcal{O}^* \cap B_{X^*}) \restriction_{B_X}$.

Veremos entonces que las imágenes del los básicos de B_{X^*} son exactamente los abiertos básicos de $\Omega[B_{X^*}]$, para ello antes observemos que dada $x \in B_X$ se cumple que, por definición, que $\pi_x = p_x \circ \Omega$, entonces tendremos que $\pi_x^{-1} = \Omega^{-1} \circ p_x^{-1}$ así es claro que $\Omega \circ \pi_x^{-1} = p_x^{-1}$ ya que Ω es biyectiva. Tendremos así que

$$\begin{aligned}
\Omega[\mathcal{O}^* \cap B_{X^*}] &= \Omega[\mathcal{O}^*] \cap \Omega[B_{X^*}] \\
&= \textstyle\bigcap_{i\leq n} \Omega[\pi_{x_i}^{-1}[B_\epsilon(f_0(x_i))]] \cap \Omega[B_{X^*}] \\
&= \textstyle\bigcap_{i\leq n} p_{x_i}^{-1}[B_\epsilon(\Omega(f_0)(x_i))] \cap \Omega[B_{X^*}] \\
&= \textstyle\bigcap_{i\leq n} p_{x_i}^{-1}[B_\epsilon(f_0 \restriction_{B_X})(x_i))] \cap \Omega[B_{X^*}] \\
&= \textstyle\bigcap_{i\leq n} p_{x_i}^{-1}[B_\epsilon(f_0(x_i))] \cap \Omega[B_{X^*}] \\
&= \mathcal{U} \cap \Omega[B_{X^*}]
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{U} = \bigcap_{i\leq n} p_{x_i}^{-1}[B_\epsilon(f_0(x_i))]$. Por la Observación 4.2 sabemos que los abierto básicos de la topología producto en K son de la forma $\bigcap_{i\leq n} p_{x_i}^{-1}[U_i]$ donde $U_i \subset [-1, 1]$ abierto, así note que $\mathcal{U}$ es un abierto básico de K y por lo tanto $\mathcal{U} \cap \Omega[B_{X^*}]$ es un abierto básico de $\Omega[B_{X^*}]$. Como $\mathcal{U} \cap \Omega[B_{X^*}] = \Omega[\mathcal{O}^* \cap B_{X^*}]$ entonces $\Omega^{-1}[\mathcal{U} \cap \Omega[B_{X^*}]] = \mathcal{O}^* \cap B_{X^*}$. Además los abiertos de la forma $\mathcal{U} = \bigcap_{i\leq n} p_{x_i}^{-1}[B_\epsilon(f_0(x_i))]$ son una base de $\Omega[B_{X^*}]$, por lo tanto Ω es un homeomorfismo.

Ahora veamos que $\Omega[B_{X^*}]$ es un cerrado en K. Sean $F \in K$ punto de acumulación de $\Omega[B_{X^*}]$ y $f : X \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \|x\| F(\frac{x}{\|x\|}) & \text{para } \ x \in X \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}.$$

Por demostrar que $F \in \Omega[B_{X^*}]$.

Primero veamos por contradicción que F es "lineal" en B_X. Sean $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos suponer que $x, y, \alpha x, \alpha x + y \in B_X$ son tales que $F(\alpha x + y) \neq \alpha F(x) + F(y)$. Entonces existen vecindades ajenas U y V en $[-1, 1]$ tales que contienen a $F(\alpha x + y)$ y $\alpha F(x) + F(y)$, respectivamente. Sabemos que la función $\phi : [-1, 1]^2 \to [-1, 1]$ dada por $\phi(a, b) = \alpha a + b$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$, es una función continua, es decir que existe $V_x \times V_y \subset [-1, 1]^2$ abierto tal que $(F(x), F(y)) \in V_x \times V_y$ y $\phi(V_x \times V_y) \subset V$. Llamemos $x_1 = x$, $x_2 = y$ y $x_3 = \alpha x + y$, de igual forma sean $U_1 = V_x$, $U_2 = V_y$ y $U_3 = U$. Así tendremos que $F \in \bigcap_{i=1}^{3} p_{x_i}^{-1}(U_i)$. Y, como $F \in \overline{\Omega[B_{X^*}]}$ por elección, tendremos que existe $g \in B_{X^*}$ tal que $\Omega(g) \in \bigcap_{i=1}^{3} p_{x_i}^{-1}(U_i)$. Así como $g(x_i) = \pi_{x_i}(g) = p_{x_i} \circ \Omega(g) \in U_i$, entonces $g(\alpha x + y) \in U$, pero $\phi(g(x), g(y)) = \alpha g(x) + g(y) = g(\alpha x + y) \in V$ ya que g es lineal; lo cual es una contradicción ya que $U \cap V = \emptyset$.

Ahora note que para $x \in B_X \setminus \{0\}$, tendremos que $f(x) = \|x\| F(\frac{x}{\|x\|}) = \|x\| \frac{1}{\|x\|} F(x) = F(x)$, esto ya que F es "lineal" en B_X. Por lo tanto, tendremos que $F = f \restriction_{B_X}$.

Veamos que f es lineal. Sean $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces tenemos $f(\alpha x) = \|\alpha x\| F(\frac{\alpha x}{\|\alpha x\|}) = |\alpha| \|x\| F(\frac{\alpha x}{|\alpha| \|x\|}) = \alpha \|x\| F(\frac{x}{\|x\|}) = \alpha f(x)$. Ahora, dados $x, y \in X$ tomemos $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tales que $\alpha x, \alpha y, \alpha(x + y) \in B_X$, tendremos que $\alpha(f(x+y)) = f(\alpha x + \alpha y) = F(\alpha x + \alpha y) = F(\alpha x) + F(\alpha y) = f(\alpha x) + f(\alpha y) = \alpha f(x) + \alpha f(y) = \alpha(f(x) + f(y))$, así es fácil ver que $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Por último tenemos que, como $\|f\| = \sup_{x \in B_X} \{|F(x)|\} \leq 1$, entonces $f \in B_{X^*}$ y $F = f \restriction_{B_X} \in \Omega[B_{X^*}]$. Por lo tanto $\Omega[B_{X^*}]$ en efecto es cerrado en K con respecto a la topología τ_{w^*}. Como Ω es homeomorfismo, concluimos entonces que B_{X^*} es w^*-compacto. ■

Definición 4.6. Decimos que X es un *espacio reflexivo* si $X^{**} = X$.

Observación 4.7. Note que si X es un espacio de Banach reflexivo, entonces τ_w y τ_{w^*} coinciden en X^*.

Teorema 4.8. *(Goldstein) Sea X un espacio de Banach, entonces $\overline{B_X}^{w^*}$, en X^{**}, es igual a $B_{X^{**}}$.*

Demostración. Sabemos que $B_X \subset B_{X^{**}}$ y además $B_{X^{**}}$ es w^*-compacto

por el Teorema de Banach Alaoglú, así la w^*-cerradura de B_X en X^{**} está contenida en $B_{X^{**}}$.

Por contradicción suponga que $\overline{B_X}^{w^*} \neq B_{X^{**}}$, entonces existe $x_0 \in B_{X^{**}}$ tal que $x_0 \notin \overline{B_X}^{w^*}$ y así (vea el Teorema 3.18 de [3]) existe $f \in X^*$ tal que $x_0(f) > \sup\{y(f) : y \in \overline{B_X}^{w^*}\}$; podemos suponer que $\sup\{y(f) : y \in \overline{B_X}^{w^*}\} = 1$, de lo contrario reemplace a f por un múltiplo adecuado. Como $B_X \subset \overline{B_X}^{w^*}$ y en particular $\|f\| \leq 1$, además de que $\|x_0\| \leq 1$, lo cual es una contradicción ya que $x_0(f) > 1$. Así $\overline{B_X}^{w^*} = B_{X^{**}}$. ■

Teorema 4.9. *X es un espacio de Banach reflexivo si y sólo si B_X es compacta con respecto a w^*-convergencia.*

Demostración. Ida. Sea $X = X^{**}$, entonces $B_X = B_{X^{**}}$. Así $B_{X^{**}}$ es w^*-compacta, es decir compacta con respecto a la w^*-convergencia, en X^{**} por el Teorema de Banach Alaoglú, así B_X es w^*-compacta en X.

Regreso. Si B_X es w^*-compacta, entonces es w^*-cerrado en X^{**}; así, por el Teorema de Goldstein, tendremos que $B_{X^{**}} = \overline{B_X}^{w^*} = B_X$ y por lo tanto $X = X^{**}$. ■

Proposición 4.10. *X es un espacio de Banach reflexivo si y sólo si X^* también lo es.*

Demostración. Ida. Sea X reflexivo. Tendremos que, por Observación 4.7, τ_w y τ_{w^*} coinciden en X^*. Por lo tanto, por el Teorema de Banach Alaoglú, B_{X^*} es w^*-compacta en X^* y así, por Teorema 4.9, X^* es reflexivo.

Regreso. Sea X^* reflexivo, tomando como demostrada la ida, tendremos que X^{**} es reflexivo. Así $B_{X^{**}}$ es w-compacta, como B_X es subconjunto cerrado de $B_{X^{**}}$ entonces, por el Teorema de Mazur (el cual nos dice que todo conjunto convexo cerrado en un espacio de Banach es w-cerrado; para ver la demostración de dicho teorema vaya a [3, pág 70].), tendremos que B_X es además w-cerrado en $B_{X^{**}}$ y como X^* es reflexivo, entonces $B_{X^{**}}$ es w-compacto en X^{**} y por lo tanto B_X es w-compacto en X^{**}. Como τ_{w^*} es igual τ_w en X^{**}, entonces tendremos a su vez que B_X es w^*-compacto en X^{**}. Lo cual implica, de nuevo por Teorema 4.9, X es reflexivo. ■

4.2. Teorema de Rosenthal

Un teorema muy importante de la teoría de espacios de Banach es el Teorema de Rosenthal, el cual se puede probar usando teoría de Ramsey.

La búsqueda de subesapcios de Banach de dimensión infinita de un espacio X de Banach determinado, es el contexto en el que surge el teorema de Rosenthal. Una de las hipótesis que se tenia antes era que todo espacio de Banach X contiene un subsespacio Y que es reflexivo o un subespacio isomorfo a el espacio de Banach c_0 o al espacio ℓ_1, pero esta hipótesis se demostró falsa gracias al matemático W.T. Gowers.

Sabemos del Teorema 4.9 que si un espacio de Banach X no es reflexivo, entonces B_X no es w-compacta, así por el Teorema de Eberlein-Smulian existe $(x_n) \subset S_X$ tal que no tiene subsucesiones w-convergentes. Esto implica dos cosas; la primera es que (x_n) no tiene subsucesiones w-Cauchy, lo que a su vez quiere decir que para todo $(y_n) \subset (x_n)$ existe $x^* \in X^*$ tal que $(x^*(y_n))_n$ es divergente; la segunda posible implicación nos dice que (x_n) tiene una subsucesión w-Cauchy (y_n) pero no existe $y \in X$ tal que $x^*(y_n) \to x^*(y)$ sucede, para todo $x^* \in X^*$. El matemático H. Rosenthal demostró que si la primera implicación se da, entonces sucede que ℓ_1 será un subespacio lineal cerrado del espacio de Banach X.

Antes de pasar directamente con el teorema de Rosenthal en concreto, presentaremos tres lemas y un par de definiciones que harán sencillo el trabajo de demostrar dicho teorema. Estos lemas son los que de hecho llevan la teoría de Ramsey necesaria para poder demostrar, por esta vía, el Teorema de Rosenthal.

Definición 4.11. Una sucesión de pares de conjuntos (A_n, B_n) se llama *booleano independiente* si para cualquier $I_1, I_2 \subset \mathbb{N}$, subconjuntos disjuntos y finitos, sucede que

$$\bigcap_{n\in I_1} A_n \cap \bigcap_{n\in I_2} B_n \neq \emptyset.$$

Definición 4.12. Sea $\ell_\infty(X)$ el espacio que consiste en todas las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ acotadas con la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$.

Note que $\ell_\infty(\mathbb{N}) = \ell_\infty$.

Lema 4.13. *Sean S un conjunto, $f_n : S \to [-1,1]$, $r \in (-1,1)$, $0 < \delta < 1-r$, $A_n = f_n^{-1}[(r+\delta, 1]]$ y $B_n = f_n^{-1}[[-1, r)]$. Suponga que (A_n, B_n) es booleano independiente, entonces la sucesión $(f_n) \subset \ell_\infty(S)$ es equivalente a la base de Schauder unitaria de ℓ_1.*

Demostración. Sea $(a_i)_{i=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ y $(e_i)_{i=1}^\infty$ la base de Schauder unitaria de ℓ_1. Por demostrar que ambas normas son equivalentes, es decir que existen $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ tales que $m_1\|(a_i)_{i=1}^\infty\|_1 \leq \|\sum_{i=1}^\infty a_i f_i\|_\infty \leq m_2\|(a_i)_{i=1}^\infty\|_1$. Note que, por Observación 1.29 dado $k \in \mathbb{N}$, basta encontrar $m_1\|(a_i)_{i=1}^k\|_1 \leq \|\sum_{i=1}^k a_i f_i\|_\infty \leq m_2\|(a_i)_{i=1}^k\|_1$.

Una de las desigualdades es inmediata, esto debido a que $|f_n(s)| \leq 1$ para cualquier $s \in S$;

$$\|\sum_{i=1}^k a_i f_i\|_\infty \leq \sum_{i=1}^k |a_i| = \sum_{i=1}^k |a_i||e_i| = \|(a_i)_{i=1}^k\|_1.$$

Queda ver que $\|\sum_{i=1}^k a_i f_i\|_\infty \geq m_1\|(a_i)_{i=1}^k\|_1$, por lo que basta encontrar $m_1 \in \mathbb{R}$ tal que $|\sum_{i=1}^k a_i f_i(s)| \geq m_1 \sum_{i=1}^k |a_i|$.

Definamos $I_1 = \{i : a_i \geq 0\}$, $I_2 = \{i : a_i < 0\}$ y tomemos $s_1 \in \bigcap_{i\in I_1} A_i \cap \bigcap_{i\in I_2} B_i$ y $s_2 \in \bigcap_{i\in I_2} A_i \cap \bigcap_{i\in I_1} B_i$. Note que, por elección de s_1 y s_2, se deduce que $|f_i(s_1) - f_i(s_2)| > \delta$, así $|a_i||f_i(s_1) - f_i(s_2)| > \delta|a_i|$ y por lo tanto $a_i(f_i(s_1) - f_i(s_2)) > \delta|a_i|$.

De lo anterior se sigue que $\sum_{i=1}^k a_i(f_i(s_1) - f_i(s_2)) > \delta \sum_{i=1}^k |a_i|$ y, por último, tenemos que

$$\text{máx}\{|\sum_{i=1}^k a_i f_i(s_1)|, |\sum_{i=1}^k a_i f_i(s_2)|\} > \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^k |a_i|.$$

Tomando s igual a s_1 o s_2, tenemos la otra desigualdad. Así $(f_n(s))$ es equivalente a $(e_i)_{i=1}^\infty$, la base de Schauder unitaria de ℓ_1. ■

Corolario 4.14. *Sean S un conjunto, $f_n : S \to [-1,1]$, $A_n = f_n^{-1}[1]$ y $B_n = f_n^{-1}[-1]$, suponga que (A_n, B_n) es booleano independiente. Entonces $\|\Sigma_{i=1}^k a_i f_i\|_\infty = \Sigma_{i=1}^k |a_i|$ para todo k y $(a_i)_{i=1}^k \subset \mathbb{R}$, o lo que es lo mismo, la sucesión $(f_n) \subset \ell_\infty(S)$ es equivalente a la base de Schauder unitaria de ℓ_1.*

Definición 4.15. Una sucesión de pares de conjuntos disjuntos (A_n, B_n) de un conjunto S, se dice que *no tiene subsucesiones convergentes* si para todo $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ existe $s \in S$ tal que pertenece a una cantidad infinita de conjuntos A_n y a una cantidad infinita de conjuntos B_n, con $n \in M$.

Note entonces que (A_n, B_n) *tiene una subsucesión convergente* si existe $M \in [\mathbb{N}]^\omega$, tal que cualquier $s \in S$ pertenece a una cantidad finita de conjuntos A_n o conjuntos B_n con $n \in M$.

Lema 4.16. *Sea S un conjunto, $A_n \cap B_n = \emptyset$ donde $A_n, B_n \subset S$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y suponga que (A_n, B_n) no tiene subsucesiones convergentes. Entonces existe una subsucesión de (A_n, B_n) que es booleano independiente.*

Demostración. Dado $L \in [\mathbb{N}]^\omega$, supondremos que $L = (l_i)_{i=1}^\infty$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, definamos

$$\mathcal{A}_k = \{L \in [\mathbb{N}]^\omega : \bigcap_{i=1}^{k} A_{l_{2i-1}} \cap \bigcap_{i=1}^{k} B_{l_{2i}} \neq \emptyset\},$$

note que para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathcal{A}_k$ es cerrado en $[\mathbb{N}]^\omega$ ya que tomando $L = (l_i)_{i=1}^\infty \in [\mathbb{N}]^\omega \cap \overline{\mathcal{A}_k}$ y por la Observación 3.10, basta notar que, para cada $n \in \mathbb{N}$ tendremos que $\mathcal{A}_k(l_1, \ldots, l_n) \neq \emptyset$. En particular tenemos $\mathcal{A}_k(l_1, \ldots, l_{2k}) \neq \emptyset$, lo que implica que existe un $L' = (l_1, \ldots, l_{2k})^\frown z \in \mathcal{A}_k$ para algún $z \in \mathcal{A}_k(l_1, \ldots, l_{2k})$, entonces $\bigcap_{i=1}^k A_{l_{2i-1}} \cap \bigcap_{i=1}^k B_{l_{2i}} \neq \emptyset$. Como los primeros $2k$ elementos de L y L' son iguales, entonces $L \in \mathcal{A}_k$.

Así definamos

$$\mathcal{A} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_k,$$

el cual también es un conjunto cerrado en $[\mathbb{N}]^\omega$. Por lo tanto podemos aplicar el Teorema 3.14, es decir que existe $L \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $[L]^\omega \subset \mathcal{A}$ o $[L]^\omega \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Note que, como (A_n, B_n) no tiene subsucesiones convergentes, entonces para todo $L \in [\mathbb{N}]^\omega$ existe $s \in S$ y $L' = (l'_i)_{i=1}^\infty \in [L]^\omega$ tal que $s \in \bigcap_{i=1}^\infty A_{l'_{2i-1}} \cap \bigcap_{i=1}^\infty B_{l'_{2i}}$. Se sigue que $L' \in [L]^\omega \cap \mathcal{A}$. Así, como la segunda condición de Ramsey nunca se da, entonces sólo puede ocurrir que $[L]^\omega \subset \mathcal{A}$.

Por último, tomemos la subsucesión $M = (l_2, l_4, l_6, \ldots)$ de este $L = (l_i)_{i=1}^\infty$ tal que $[L]^\omega \subset \mathcal{A}$, note que esto implica que $M \in \mathcal{A}$. Veamos que $(A_n, B_n)_{n \in M}$

en efecto es booleano independiente. Tomemos cualesquiera $I_1, I_2 \subset M$ disjuntos y finitos. Note que es posible encontrar un conjunto finito de naturales $F \subset L$ tal que en $M \cup F$ los elementos de I_1 se encuentran en posición impar y los elementos de I_2 en la posición par. Así, como $M \cup F = (r_1, r_2, \ldots) \in [L]^\omega \subset \mathcal{A}$, entonces $\bigcap_{n\in I_1} A_n \cap \bigcap_{n\in I_2} B_n \supset \bigcap_{i=1}^k A_{r_{2i-1}} \cap \bigcap_{i=1}^k B_{r_{2i}} \neq \emptyset$, para $2k \geq \text{máx}\{I_1 \cup I_2\}$. ■

Teorema 4.17. *(Rosenthal). Sean X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión normalizada que no tiene subsucesiones débiles convergentes. Entonces existe $(y_n) \subset (x_n)$ que es equivalente a la base unitaria de Schauder de ℓ_1.*

Demostración. Sea $(x_n) \subset B_X$ una sucesión tal que no tiene subsucesiones débiles convergentes. Sea $S = B_{X^*}$ y considere a cada x_n como una función de $\ell_\infty(S)$. Entonces, para $r \in (-1, 1)$, $\delta > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, defina $A_n(r, \delta) = \{s \in S : x_n(s) > r + \delta\}$ y $B_n(r, \delta) = \{s \in S : x_n(s) < r\}$.

Probaremos que existe $M \in [\mathbb{N}]^\omega$, $r \in (-1, 1)$ y $\delta > 0$ los cuales satisfacen que $(A_m(r, \delta), B_m(r, \delta))_{m\in M}$ no tiene subsucesiones convergentes. Procediendo por contradicción, supongamos que para todo $M \in [\mathbb{N}]^\omega$, $r \in (-1, 1)$ y $\delta > 0$ sucede que $(A_m(r, \delta), B_m(r, \delta))_{m\in M}$ tiene subsucesiones convergentes. Sea $(r_i, \delta_i)_{i=1}^\infty$ un conjunto denso en $(-1, 1) \times (0, 1]$. Por recursión construyamos los conjuntos M_k como sigue:

- **Paso** 1. Sea $M_1 \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $(A_m(r_1, \delta_1), B_m(r_1, \delta_1))_{m\in M_1}$ es una sucesión convergente; lo que, según la Definición 4.15, significa que todo $s \in S$ pertenece al menos a una cantidad finita de conjuntos A_m o conjuntos B_m con $m \in M_1$.

- **Paso** $k + 1$. Suponga construidos los conjuntos $(M_i)_{i=1}^k$ tal que, para cada M_i, la sucesión $(A_m(r_i, \delta_i), B_m(r_i, \delta_i))_{m\in M_i}$ es una sucesión convergente. Así, por hipótesis, existe un conjunto infinito $M_{k+1} \in [M_k]^\omega$ tal que $(A_m(r_{k+1}, \delta_{k+1}), B_m(r_{k+1}, \delta_{k+1}))_{m\in M_{k+1}}$ es una sucesión convergente.

Supongamos que $M_k = (m_{k,1}, m_{k,2}, \ldots)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Así definamos $M = (m_1, m_2, \ldots)$, donde $m_k = m_{k,k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$; es decir M es la intersección diagonal de los M_k. Notemos que $(m_i)_{i>k} \subset M_k$ y como

$(A_m(r_k,\delta_k),B_m(r_k,\delta_k))_{m\in M_k}$ es una sucesión convergente, entonces la sucesión $(A_m(r_k,\delta_k),B_m(r_k,\delta_k))_{m\in M}$ converge para cada $k\in\mathbb{N}$ ya que esencialmente es una subsucesión de la anterior.

Entonces afirmamos que $(x_n(s))_{n\in M}$ converge en el intervalo $[-1,1]$ para cada $s\in S$; es decir, $(x_n)_{n\in M}$ converge débilmente en el intervalo $[-1,1]$, lo cual contradice la hipótesis.

De nuevo por contradicción, supongamos que $(x_n(s))_{n\in M}$ no converge en el intervalo $[-1,1]$ para algún $s\in S$. Como $(x_n(s))_{n\in M}$ está contenido en un subespacio compacto, entonces por Observación 1.23 existen $M',M''\in[M]^\omega$ y $l',l''\in[-1,1]$ con $l'<l''$, tales que $(x_n(s))_{n\in M'}\to l'$ y $(x_n(s))_{n\in M''}\to l''$. Como $(r_i,\delta_i)_{i=1}^\infty$ es un conjunto denso en $(-1,1)\times(0,1]$, entonces existe (r_i,δ_i) en particular tal que $l'<r_i<r_i+\delta_i<l''$. Así, como se observó anteriormente, $(A_m(r_i,\delta_i),B_m(r_i,\delta_i))_{m\in M}$ tiene subsucesiones convergentes, entonces existe un conjunto finito F tal que para cada $n\in M\setminus F$, sucede que $x_n(s)\notin A_m(r_i,\delta_i)$ o $x_n(s)\notin B_m(r_i,\delta_i)$, esto quiere decir que $x_n(s)\leq r_i+\delta_i$ o $x_n(s)\geq r_i$. Supongamos que se da el primer caso, entonces $(x_n(s))_{n\in M''\setminus F}\subset(-\infty,r_i+\delta_i]$, así

$$l''\in\overline{(x_n(s))_{n\in M''\setminus F}}\subset(-\infty,r_i+\delta_i].$$

Por lo tanto $l''\leq r_i+\delta_i$, una contradicción. De igual forma para el segundo caso podemos obtener fácilmente que

$$l'\in\overline{(x_n(s))_{n\in M'\setminus F}}\subset[r_i,\infty),$$

lo que significa que $l'\geq r_i$, un contradicción también. Por lo tanto la afirmación es cierta, es decir $(x_n(s))_{n\in M}$ converge en el intervalo $[-1,1]$ para cada $s\in S$.

La afirmación anterior nos lleva a una contradicción pues por elección (x_n) no admite subsucesiones débiles convergentes y así, la suposición inicial es falsa; entonces existen $M\in[\mathbb{N}]^\omega$, $r\in(-1,1)$ y $\delta>0$ tales que $(A_m(r,\delta),B_m(r,\delta))_{m\in M}$ no tiene subsucesiones convergentes. Entonces, por Lema 4.16, existe una subsucesión de $(A_m(r,\delta),B_m(r,\delta))_{m\in M}$ tal que es booleano independiente. Esto quiere decir que tenemos una subsucesión $(y_n)\subset(x_n)$ tal que, para $A_n=A_n(r,\delta)=\{s\in S:y_n(s)>r+\delta\}$ y $B_n=B_n(r,\delta)=\{s\in S:y_n(s)<r\}$, (A_n,B_n) es booleano independiente. Por último, aplicando el Lema 4.13, tendremos a su vez que $(y_n)\subset B_X$, una subsucesión de funciones de $\ell_\infty(S)$, es equivalente a la base unitaria de Schauder de ℓ_1. ■

Este es el último teorema de la tesis y, en particular, la única aplicación que nosotros dimos de la teoría de Ramsey, si le es de interés el tema vea [7] el cual es el texto principal con el que esta tesis se erige (un texto secundario, pero no menos importante en el desarrollo de este último capítulo, sobre aplicaciones de la teoría de Ramsey a espacios de Banach, es [6]).

Note cómo es que la teoría de Ramsey puede llegar a tocar temas que parecerían estar poco o nada relacionados con ella y ser de bastante utilidad, ya sea facilitando ciertas demostraciones o ampliando conceptos que antes eran imposibles. Los autores de los textos mencionados en el párrafo anterior se dedican justamente a ampliar conceptos del análisis funcional con las herramientas proporcionadas por la combinatoria infinita y, en particular, de la teoría de Ramsey. Esta es una rama de las matemáticas que, hasta la fecha en la que esta tesis fue escrita, sigue teniendo un amplio desarrollo e impacto en el conocimiento en general.

Bibliografía

[1] Jean Dieudonné. *Foundations of modern analysis*. Read Books Ltd, 2011.

[2] Ryszard Engelking. *General topology*. Heldermann Verlag, 1977.

[3] Marián Fabian, Petr Habala, Petr Hájek, Vicente Montesinos Santalucía, Jan Pelant, and Václav Zizler. *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*. Springer Science & Business Media, 2013.

[4] Thomas Jech. *Set theory*. Springer Science & Business Media, 2013.

[5] David Marker. Descriptive set theory. *Lecture Notes. On Marker's home page*, 2002.

[6] Carlos Augusto Di Prisco and Jordi López Abad. *Teoría de Ramsey y espacios de Banach*. Ediciones IVIC, 2008.

[7] Th. Schlumprecht. Infinite combinatorics and applications to banach space theory course notes: Math 663-601, 2015.

[8] Charbonnier Tramuja and Diego Antonio. *Algunos teoremas fundamentales de las topologías débiles*. Universidad Nacional de Educación a Distancia (España). Facultad de Ciencias, 2011.