



Universidad Michoacana de San Nicolás de  
Hidalgo

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

”MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

GENERACIÓN DINÁMICA DE  
MASA EN QCD Y GRUPO DE  
RENORMALIZACIÓN

*TESIS*

PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO  
MATEMÁTICAS

PRESENTA:

Cristian Guillén Almanza

ASESORES:

DR. Axel Weber

DR. Pietro Dall’Olio

Morelia, Mich. Febrero de 2022

Primero que nada quiero agradecer a mis maestros que hicieron posible este trabajo, Axel Weber y Pietro Dall'olio. Por darme todo lo que fue necesario para empezar mi carrera como físico.

Le agradezco a mis padres por su esfuerzo y atención, a mi madre por siempre creer en mi, a mi padre y a mi hermano Iván, quien en todos mis años en la facultad me apoyó directa ó indirectamente y siempre estuvo conmigo en los mejores y más divertidos momentos.

A los amigos que jamás podré olvidar y con los que espero llegar a envejecer; Paola, Marco, Gabo, Sofi, Marisol, Paris, Yashar, Felipe y Meche. A todos los profesores que tuve la fortuna de conocer, me llevo sus enseñanzas y conocimiento, para algún día poder darle a otros lo que ellos me dieron a mi. Le agradezco a la persona con la que pasé los momentos mas desafiantes, emocionantes y divertidos, a la que siempre admiré y seguiré admirando, a mi especial mejor amiga, Salma.

Por último, pero no menos importante, le agradezco a la persona que en los últimos años en la facultad me apoyo de manera única, personal y sentimental, a quien amo con todo mi corazón y se que estará siempre a mi lado apoyándome y motivándome, a mi querida novia, Michelle.

gracias!

## RESUMEN

La QCD es una teoría de gauge no abeliana y su grupo de simetría asociado es el grupo de matrices  $3 \times 3$  unitarias con determinante uno,  $SU(3)$  para abreviar. Esta teoría asume las interacciones fuertes como el intercambio de 8 tipos de bosones, no masivos, eléctricamente neutros llamados gluones quienes son los portadores de la carga de color y son análogos a los fotones en la electrodinámica

cuántica (QED); con la diferencia que los gluones interactúan entre sí, lo que no pasa con los fotones ya que estos no están provistos de una carga eléctrica. Por supuesto, esto implica consecuencias importantes en la teoría. Una de los principales propósitos de este trabajo es el de dar una predicción aproximada a la generación de la masa constituyente de los quarks (por causa de interacciones fuertes) que tienen al ((constituir)) a los hadrones.

Este trabajo es una primera exploración a analizar que parte de la generación dinámica de masas de los quarks se puede describir simplemente con las ecuaciones del grupo de renormalización para las masas deslizantes sin tomar en cuenta el llamado ((condensado quiral)).

**Palabras clave:** Diagrama, propagador, libertad asintótica, renormalización, grupo de renormalización, generación de masa.

## ABSTRACT:

QCD is a non-abelian gauge theory and its associated symmetry group is the group of unitary  $3 \times 3$  matrices with determinant one,  $SU(3)$  for short. This theory assumes strong interactions as the exchange of 8 types of non-massive, electrically neutral bosons called gluons which are the color charge carriers and are analogous to photons in electrodynamics.

quantum (QED); with the difference that the gluons interact with each other, which does not happen with the photons since they are not provided with an electric charge. Of course, this implies important consequences in theory. One of the main purposes of this work is to give a prediction

approximate to the generation of the constituent mass of the quarks (because of strong interactions) that have ((constituting)) the hadrons.

This work is a first exploration to analyze that part of the dynamic generation of quark masses can be described simply with the renormalization group equations for sliding masses without taking into account the so-called ((chiral condensate)).

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Cromodinámica cuántica . . . . .	5
1.1.1. Libertad asintótica . . . . .	5
<b>2. Transformaciones de norma no abelianas</b>	<b>7</b>
2.1. Algunas propiedades de la libertad de norma . . . . .	8
2.2. El grupo $SU(N)$ . . . . .	10
2.3. Cálculo del factor $(T^a T^a)_{AB}$ . . . . .	11
2.4. Propagador para la ecuación de Dirac . . . . .	14
2.4.1. Propagador para una partícula de Dirac en un campo cromo-electromagnético externo . . . . .	15
<b>3. Diagrama de auto-interacción en QCD</b>	<b>17</b>
<b>4. Evaluación del diagrama</b>	<b>20</b>
4.1. $D = 4 - \epsilon$ . . . . .	27
<b>5. Renormalización</b>	<b>31</b>
<b>6. Grupo de Renormalización</b>	<b>34</b>
6.1. Generación Dinámica de la Masa . . . . .	37
<b>7. Conclusiones</b>	<b>42</b>
<b>A. Apéndice A</b>	<b>44</b>
A.1. Cálculo de las derivadas de las funciones desnudas A y B: . . . . .	44

# 1. Introducción

## 1.1. Cromodinámica cuántica

En 1965, Moo-Young Han, Yoichiro Nambu y Oscar W. Greenberg propusieron la existencia de un número cuántico adicional para los quarks con el fin de solucionar el problema del barión  $\Delta^{++}$ . A principios de los años sesenta Gell-Mann y Zweig predijeron que este barión estaba conformado por tres quarks tipo «up» con espines paralelos, lo que contradecía el principio de exclusión de Pauli.

Este número adicional fue llamado posteriormente *color* y permite resolver el problema del barión  $\Delta^{++}$ ; ya que ahora los quarks se encuentran en estados diferentes, distinguibles por su carga de color. El desarrollo de estas ideas marco el inicio de lo que ahora se conoce como cromodinámica cuántica, QCD por sus siglas en inglés y es una de las cuatro fuerzas fundamentales que plantea el modelo estándar.

La QCD es una teoría de gauge no abeliana y su grupo de simetría asociado es el grupo de matrices 3x3 unitarias con determinante uno, SU(3) para abreviar. Esta teoría asume las interacciones fuertes como el intercambio de 8 tipos de bosones, no masivos, eléctricamente neutros llamados gluones quienes son los portadores de la carga de color y son análogos a los fotones en la electrodinámica cuántica (QED); con la diferencia que los gluones interactúan entre si, lo que no pasa con los fotones ya que estos no están provistos de una carga eléctrica. Por supuesto, esto implica consecuencias importantes en la teoría.

Una de los principales propósitos de este trabajo es el de dar una predicción aproximada a la generación de la masa constituyente de los quarks (por causa de interacciones fuertes) que tienen al «constituir» a los hadrones.

### 1.1.1. Libertad asintótica

En 2004 se galardonó a tres científicos norteamericanos con el premio nobel de física, quienes descubrieron de manera analítica y usando teoría de perturbaciones que la interacción fuerte disminuye cuando la distancia entre los quarks tiende a cero; dicho de otro modo, cuando los quarks se encuentran muy cerca unos de otros estos tienden a comportarse cada vez mas como partículas libres, como si entre ellos hubiese ausencia de potencial, a este fenómeno se le conoce como *libertad asintótica*. Este es un fenómeno bastante peculiar, ya que es algo que contrasta con otras fuerzas en la naturaleza, como la interacción eléctrica ó la fuerza gravitacional, la cual, tiende a aumentar conforme la distancia entre los cuerpos disminuye.

Los quarks, sin embargo, nunca se han observado como partículas libres, sino que se encuentran siempre formando estados ligados (nucleones, piones, etc.). Al aumentar la separación entre dos partículas con carga de color opuesta la intensidad de la interacción fuerte aumenta a tal grado que la energía llega a

ser suficiente para formar un estado quark-antiquark.

Por otro lado, trabajos hechos en mallas (lattice) y Como consecuencia de la existencia de dicho término de masa es que en las ecuaciones del grupo de renormalización de Callan-Symanzik[4], en particular, la de la constante de acoplamiento fuerte se integra al profundo infrarrojo, lo cual, resulta imposible con un propagador gluónico si término de masa.

Este trabajo es una primera exploración a analizar que parte de la generación dinámica de masas de los quarks se puede describir simplemente con las ecuaciones del grupo de renormalización para las masas deslizantes sin tomar en cuenta el llamado «condensado quiral».

**Palabras clave:** Diagrama, propagador, libertad asintótica, renormalización, grupo de renormalización, generación de masa.

## 2. Transformaciones de norma no abelianas

Consideremos una partícula de Dirac en un campo cromo-electromagnético externo, dicha ecuación tiene la forma:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m - g\gamma^\mu A_\mu)\Psi(x) = 0 \quad , \quad (1)$$

Sabemos que bajo una transformación de norma dicha ecuación debe de mantener su forma, es decir, si hacemos el cambio

$$\Psi(x) \mapsto \Psi'(x) = U(x)\Psi(x) \quad (2)$$

$$A(x) \mapsto A'(x) \quad , \quad (3)$$

con  $U(x)$  elemento del grupo  $SU(3)^1$ , la ecuación debe satisfacer

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m - g\gamma^\mu A'_\mu)U(x)\Psi(x) \stackrel{!}{=} U(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m - g\gamma^\mu A_\mu)\Psi(x) \quad . \quad (4)$$

Partiendo del lado izquierdo de (4) podemos conocer la relación entre  $A'(x)$  en función de  $U(x)$  y  $A(x)$  desarrollando é igualando con la parte derecha

$$\begin{aligned} & i\gamma^\mu \partial_\mu(U(x)\Psi(x)) - [m + g\gamma^\mu A'_\mu]U(x)\Psi(x) = \\ & i\gamma^\mu(U(x)\partial_\mu\Psi(x) + \partial_\mu U(x)\Psi(x)) - [m + g\gamma^\mu A'_\mu]U(x)\Psi(x) = \\ & U(x)[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\Psi(x) + [i\gamma^\mu \partial_\mu U(x) - g\gamma^\mu A'_\mu U(x)]\Psi(x) \\ & \stackrel{!}{=} U(x)[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\Psi(x) - g\gamma^\mu U(x)A_\mu\Psi(x) \quad , \end{aligned}$$

así, notamos que el primer miembro de la parte izquierda se cancela con el primero de la parte derecha, con lo cual dado que la ecuación anterior es valida para todo campo espinorial y para toda matriz  $\gamma^\mu$  tenemos la relación buscada para  $A'(x)$  ;

$$A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x) \quad . \quad (5)$$

Cabe destacar que en el anterior cálculo se ha usado que las matrices  $U(x)$  son unitarias<sup>2</sup> y que el mismo argumento vale para elementos de  $SU(N)$ .

---

<sup>1</sup>Grupo de matrices unitarias 3x3, con entradas complejas y de determinante uno.

<sup>2</sup>esto es:  $U^\dagger(x)U(x) = \mathbb{1}$ , con lo cual  $U^{-1} = U^\dagger$ .

## 2.1. Algunas propiedades de la libertad de norma

A continuación vamos a probar algunas de las propiedades mas relevantes de la ecuación (5) también llamada *libertad de norma*. En concreto, demostraremos que  $A_\mu(x)$  puede elegirse hermitiana y con traza nula, ya que estas propiedades se conservan ante la transformación de norma (5).

Primero observe que

$$[U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x)]^\dagger = U(x)[U(x)A_\mu(x)]^\dagger = U(x)A_\mu^\dagger(x)U^\dagger(x) \quad ,$$

entonces  $U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x)$  es hermitiano si y solo si  $A_\mu(x)$  es hermitiano. El siguiente paso es probar que tienen traza nula, esto es fácil si tenemos en cuenta que la traza es cíclica<sup>3</sup>, entonces

$$\text{Tr}\{U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x)\} = \text{Tr}\{A_\mu(x)U^\dagger(x)U(x)\} = \text{Tr}\{A_\mu(x)\} \stackrel{!}{=} 0 \quad ,$$

lo cual se cumple si y solo si  $A_\mu(x)$  tiene traza nula.

Ahora vamos a demostrar que el segundo miembro de la parte derecha de (5) cumple con tener traza nula ser Hermitiana. Tómese primero que  $U(x)U^\dagger(x) = \mathbb{1}$  y aplique la parcial por ambos lados de la ecuación, es decir, tenemos que:

$$\begin{aligned} U(x)\partial_\mu(U^\dagger(x)) + \partial_\mu(U(x))U^\dagger(x) &= 0 \\ \implies -U(x)\partial_\mu U^\dagger(x) &= (\partial_\mu U(x))U^\dagger(x) \quad , \end{aligned}$$

con lo cual vemos que

$$[i\partial_\mu(U(x))U^\dagger(x)]^\dagger = i(-U(x)\partial_\mu U^\dagger(x)) = i(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x) \quad , \quad (6)$$

por lo tanto  $i(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x)$  es hermitiano. Vamos a probar que este término tiene traza nula; usaremos la propiedad del determinante de  $U(x)$  en este caso y vamos a escribirlo como elemento de matriz omitiendo el argumento « $x$ », así, la expresión para el determinante de  $U(x)$  queda:

$$\epsilon_{ijk} \det U = \epsilon_{qrs} U_{iq} U_{jr} U_{ks} \quad (7)$$

, donde  $\epsilon_{ijk}$  es el tensor de Levi-Civita,<sup>4</sup>  $U_{ij}$  denota las componentes de la matriz  $U(x)$ , entonces queremos probar que

$$\text{Tr}[(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x)] = (\partial_\mu U_{as})U_{sa}^{-1} = 0 \quad , \quad (8)$$

donde hemos supuesto suma sobre índices repetidos con  $(a, s) = 1, 2, 3$ .

El siguiente paso es expresar el elemento de matriz  $U_{sl}^{-1}$  en términos del determinante usando (2.1) y teniendo en cuenta que  $\det U(x) = 1$ .

---

<sup>3</sup> $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

<sup>4</sup>3-tensor totalmente antisimétrico en tres dimensiones



Multiplicando  $\epsilon_{ijl}$  por la izquierda (2.1)

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijl}\epsilon_{ijk} &= \epsilon_{ijl}\epsilon_{qrs}U_{iq}U_{jr}U_{ks} \\
2\delta_{lk} &= \epsilon_{ijl}\epsilon_{qrs}U_{iq}U_{jr}U_{ks} \\
2U_{ka}^{-1}\delta_{lk} &= \epsilon_{ijl}\epsilon_{qrs}U_{iq}U_{jr}\delta_{sa} \\
2U_{la}^{-1} &= \epsilon_{ijl}\epsilon_{qra}U_{iq}U_{jr} \\
\implies U_{la}^{-1} &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijl}\epsilon_{qra}U_{iq}U_{jr} \quad ,
\end{aligned}$$

donde en lo anterior de la primera a la segunda linea se ha usado que  $\epsilon_{ijl}\epsilon_{ijk} = 2\delta_{lk}$  y de la segunda linea a la tercera se multiplico por  $U_{ak}^{-1}$  y  $U_{ak}^{-1}U_{ks} = \delta_{as}$ . De esta forma podemos sustituir el resultado anterior en (8):

$$\text{Tr}[(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x)] = (\partial_\mu U_{as})U_{sa}^{-1} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijs}\epsilon_{qra}\partial_\mu(U_{as})U_{iq}U_{jr} \quad , \quad (9)$$

veamos ahora la última igualdad de (9), notamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijs}\epsilon_{qra}(\partial_\mu U_{as})U_{iq}U_{jr} &\xrightarrow{s \leftrightarrow q} \epsilon_{ijq}\epsilon_{sra}(\partial_\mu U_{aq})U_{is}U_{jr} \\
\epsilon_{ijq}\epsilon_{sra}(\partial_\mu U_{aq})U_{is}U_{jr} &\xrightarrow{a \leftrightarrow i} \epsilon_{ajq}\epsilon_{sri}(\partial_\mu U_{iq})U_{as}U_{jr} \quad ,
\end{aligned}$$

se puede hacer lo mismo intercambiando  $a \leftrightarrow j$  y  $s \leftrightarrow r$ ; es decir, podemos intercambiar índices mudos de tal manera que podamos reconocer la última igualdad de (9) como la derivada de un triple producto. Entonces podemos escribir que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\epsilon_{ija}\epsilon_{qrs}(\partial_\mu U_{as})U_{iq}U_{jr} &= \frac{1}{2}\epsilon_{ija}\epsilon_{qrs}\partial_\mu(U_{as}U_{iq}U_{jr})\frac{1}{3} = \\
\frac{1}{6}\epsilon_{ija}\partial_\mu(\epsilon_{qrs}U_{as}U_{iq}U_{jr}) &= \frac{1}{6}\epsilon_{ija}\partial_\mu(\epsilon_{ija}\det U) = 0 \quad ,
\end{aligned}$$

pues como  $U(x)$  es unitaria,  $\det(U(x)) = 1$ ; entonces,  $\epsilon_{ija}\det(U) \equiv \text{constante}$ . Entonces  $A'_\mu$  de la ec. (5) es hermitiana y tiene traza nula<sup>5</sup> si  $A_\mu$  tiene esas mismas propiedades. Por lo tanto es combinación lineal de los generadores  $A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a(x)$ . El argumento anterior se presentó para dimensión = 3; en general, para el caso de N dimensiones basta considerar la expresión del tensor de Levi-Civita como:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} \det U = \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_N} U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2} \dots U_{i_N j_N}$$

para demostrar que  $A'_\mu(x)$  tiene traza nula en N dimensiones.

---

<sup>5</sup>Estas son propiedades de los generadores. No de los elementos de  $SU(N)$ .

## 2.2. El grupo $SU(N)$

Vamos a hablar ahora del grupo de matrices unitarias  $N \times N$  con entradas complejas y de determinante uno ó como se conoce comúnmente,  $SU(N)$ .

$SU(N)$  es lo que se conoce como un *grupo de Lie* ó *grupo continuo*, por continuo entendemos que los parámetros que identifican un elemento del grupo toman valores continuos. Por ejemplo, el ángulo de rotación en un círculo puede tomar diferentes valores como:  $0,1^\circ$ ,  $0,11^\circ$ ,  $0,11991^\circ$ ,... . En contraste con las reflexiones, por ejemplo, donde no hay una transformación continua dada por algún parámetro.

Una observación importante de la teoría de Lie es que pueden haber elementos del grupo que sean «parecidas» a la identidad; cosa que no pasa con los grupos discretos, como por ejemplo, las reflexiones, donde, en ausencia de transformaciones continuas no hay elemento del grupo parecido a la identidad. Consideremos las simetrías del cuadrado<sup>6</sup>. Si hacemos una rotación de  $0,0000001^\circ$  alrededor del origen, prácticamente no hemos rotado el cuadrado, pues este se verá igual que como estaba al principio, entonces esta rotación es similar a la identidad (=rotación por  $0^\circ$ ); pero no entra en el conjunto de simetrías del cuadrado. En contraste, una rotación de  $0,0000001^\circ$  si resulta ser una simetría del círculo. El grupo de simetría del círculo es continuo por el parámetro que escogemos (el ángulo de rotación). matemáticamente, sea  $I$  la identidad y sea  $g$  un elemento «parecido» a la identidad que escribimos como

$$g(\epsilon) = I - i\epsilon X \quad ,$$

donde siempre entendemos que  $\epsilon$  es muy, muy pequeño y  $X$  un objeto al que llamaremos *generador*. Una transformación infinitesimal como la anterior al aplicarse a un objeto apenas cambia algo; sin embargo, si repetimos una transformación infinitesimal muchas veces podemos obtener una transformación finita. En una rotación, por ejemplo, muchas rotaciones pequeñas producen una rotación completa, esto se escribe de la siguiente manera:

$$(I - i\epsilon X)(I - i\epsilon X)\dots = (I - i\epsilon X)^k \quad ,$$

donde  $k$  es la cantidad de «mini» rotaciones. Sea  $\theta$  el ángulo completo de rotación de nuestro objeto; vamos a dividir este ángulo en  $N$  partes iguales tales que  $\epsilon = \theta/N \ll 1$ , entonces, para tener una rotación completa nos vemos motivados a considerar el límite cuando  $N \rightarrow \infty$  de las pequeñas rotaciones, es decir

$$h(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} (I - i\frac{\theta}{N}X)^N = e^{-i\theta X} \quad .$$

En cierto sentido el objeto  $X$  genera la transformación finita  $h$ , esta es la razón de llamarlo *generador*, la ecuación anterior se llama *mapeo exponencial* el cual es de especial interés para  $SU(N)$ .

<sup>6</sup>Son aquellas que dejan el cuadrado invariante, es decir, rotaciones al rededor del origen por  $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ , ó  $0^\circ$ .

Dado el grupo de Lie, uno puede definir su álgebra de Lie  $su(N)$  formado por aquellos elementos  $X$  tales que  $e^{-i\alpha X} \in G$  con  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , formalmente los elementos  $X$  forman un espacio vectorial real. Para el caso especial de  $SU(N)$  definimos los generadores como  $T$ , entonces todo elemento  $U \in SU(N)$  puede escribirse como  $U = e^{-i\alpha T}$  donde  $\alpha T = \alpha_1 T^1 + \alpha_2 T^2 + \dots + \alpha_m T^m$  y los elementos  $T^a, a = 1, 2, \dots, m$  son la base del espacio vectorial real. Ahora queda la pregunta: ¿Hasta donde llega  $m$ ?, es decir, ¿Cuál es la dimensión de  $su(N)$ ? Antes de contestar esta pregunta debemos conocer las propiedades de los generadores, estas propiedades las vamos a deducir a partir del mapeo exponencial y de las propiedades del grupo  $SU(N)$ .

1.- la condición de que  $\det U = 1$  implica que

$$\begin{aligned} \det U &= \det(e^{-i\alpha T}) = e^{-i\alpha \text{Tr}(T)} \stackrel{!}{=} 1 \\ &\implies \text{Tr}(T) = 0 \quad , \end{aligned}$$

donde se ha usado la fórmula  $\det(e^A) = e^{\text{Tr} A}$ , con  $A$  una matriz. es decir, las matrices  $T$  tienen traza nula.

2.- que las matrices  $U$  sean unitarias, es decir;  $UU^\dagger = \mathbb{1}$ , implica

$$\begin{aligned} UU^\dagger &= e^{-i\alpha T} (e^{-i\alpha T})^\dagger = e^{-i\alpha T} e^{i\alpha T^\dagger} = e^{i\alpha(-T+T^\dagger)} \stackrel{!}{=} \mathbb{1} \\ &\implies T = T^\dagger \quad , \end{aligned}$$

donde se usó que  $(e^A)^\dagger = e^{A^\dagger}$ , con  $A$  una matriz. Esto es, las matrices  $T$  son Hermitianas.

En concreto tenemos que los generadores son matrices Hermitianas de traza nula. Ahora podemos conocer la dimensión del álgebra de Lie.

La dimensión es igual al número de parámetros libres independientes que se necesitan para parametrizar los elementos del grupo de Lie correspondiente. Una de las formas de contar estos parámetros es como sigue: Las entradas de la diagonal son reales (por ser matrices Hermitianas) éstas son  $N$ , más, la cantidad de elementos en un bloque triangular multiplicado por 2 (pues éstas son entradas complejas). Por último, la condición de la traza nos quita un grado de libertad; por lo tanto, la dimensión de  $su(N)$  es:

$$\dim(su(N)) = N + 2 \frac{N(N-1)}{2} - 1 = N^2 - 1 \quad . \quad (10)$$

### 2.3. Cálculo del factor $(T^a T^a)_{AB}$

Un importante resultado es el de demostrar que

$$(T^a T^a)_{AB} = \frac{N^2 - 1}{2N} \delta_{AB} \quad , \quad (11)$$

es decir; la matriz  $N \times N$  obtenida al multiplicar un generador del grupo consigo mismo y sumando sobre todos los generadores es proporcional a la matriz identidad. Antes de demostrar este resultado vamos a definir algunas propiedades de

los elementos  $T^a$ . El grupo  $SU(N)$  en general es no-abeliano, esto quiere decir que los  $T^a$  no conmutan; además pedimos que la base sea ortonormal. Entonces definimos.

$$tr(T^a T^b) := \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (\text{ortonormalidad}) \quad (12)$$

$$[T^a, T^b] := i f_{abc} T^c \quad (\text{grupo no-abeliano}), \quad (13)$$

Donde  $f_{abc}$  son constantes reales llamadas *constantes de estructura de grupo* y es evidente que  $f_{abc} = -f_{bac}$ . El primer paso para demostrar (11) será probar que  $f_{abc}$  es totalmente antisimétrico; es decir, vamos a probar que  $f_{abc} = -f_{acb}$ . Considere  $tr([T^a, T^b]T^c)$  y aplique la definición (12), luego

$$\begin{aligned} tr([T^a, T^b]T^c) &= tr(i f_{abd} T^d T^c) = i f_{abd} tr(T^d T^c) = i f_{abd} \frac{1}{2} \delta_{dc} = \frac{i}{2} f_{abc} \\ &\implies \frac{i}{2} f_{abc} = tr([T^a, T^b]T^c) \quad , \end{aligned} \quad (14)$$

de esta forma logramos escribir  $f_{abc}$  en términos de la traza. Entonces considere

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} f_{abc} + \frac{i}{2} f_{acb} &= tr([T^a, T^b]T^c) + tr([T^a, T^c]T^b) = \\ &tr(T^a T^b T^c - T^b T^a T^c) + tr(T^a T^c T^b - T^c T^a T^b) = \\ &tr(T^a T^b T^c) - tr(T^b T^a T^c) + tr(T^a T^c T^b) - tr(T^c T^a T^b) = \\ &tr(T^a T^b T^c) - tr(T^b T^a T^c) + tr(T^b T^a T^c) - tr(T^a T^b T^c) = 0, \end{aligned}$$

donde se ha usado que la traza de una matriz es cíclica<sup>7</sup>, con lo cual se concluye que  $f_{abc} = -f_{acb}$ . El siguiente paso es demostrar que  $[T^a T^a, T^b] = 0$

$$\begin{aligned} [T^a T^a, T^b] &= T^a T^a T^b - T^b T^a T^a + T^a T^b T^a - T^a T^b T^a = \\ &T^a [T^a, T^b] + [T^a, T^b] T^a = i f_{abc} T^a T^c + i f_{abc} T^c T^a = \\ &i f_{abc} T^a T^c - i f_{cba} T^c T^a = 0 \quad , \end{aligned}$$

para toda  $T^b$  elemento de la base de  $su(N)$ ; esto es, el operador  $T^a T^a$  conmuta con todos los generadores. Donde se ha usado de la segunda a la tercera línea que  $f_{abc}$  es totalmente antisimétrico. De este último resultado se deduce que:

$$(T^a T^a)_{AB} = \alpha \delta_{AB} \quad . \quad (15)$$

El siguiente y último paso será calcular  $\alpha$  con lo cual llegaremos al resultado de (11).

---

<sup>7</sup> $tr(AB) = tr(BA)$

De (15) tenemos que;

$$\text{tr}[T^a T^a] = \alpha \delta_{AA} = \alpha \sum_{A=1}^N 1. = \alpha N \quad , \quad (16)$$

por otro lado de la definición (12)

$$\text{tr}[T^a T^a] = \frac{1}{2} \delta_{aa} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N^2-1} 1. = \frac{1}{2} (N^2 - 1) \quad , \quad (17)$$

entonces, igualando (16) y (17)

$$\alpha N = \frac{1}{2} (N^2 - 1) \implies \alpha = \frac{N^2 - 1}{2N} \quad (18)$$

que es lo que se quería.

## 2.4. Propagador para la ecuación de Dirac

Se busca una solución a la ecuación de Dirac como función de Green, es decir:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\tilde{\mathcal{G}}(\bar{x}, t; \bar{x}_0, t_0) = i\delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}_0)\delta(t - t_0) \quad , \quad (19)$$

donde usaremos la expresión de la función delta como transformada de Fourier[5] definida como

$$i\delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}_0)\delta(t - t_0) = i\delta^{(4)}(x - x_0) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x-x_0)^\mu} \quad , \quad (20)$$

entonces, proponemos la solución para  $\tilde{\mathcal{G}}$  de la forma

$$\tilde{\mathcal{G}}(x, t; x_0, t_0) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathcal{G}(p) e^{-ip_\mu(x-x_0)^\mu} \quad , \quad (21)$$

lo que sigue es encontrar  $\mathcal{G}$ . Entonces, sustituyendo en (19) tenemos

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathcal{G}(p) e^{-ip_\mu(x-x_0)^\mu} \\ = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathcal{G}(p) (i\gamma^\mu (-ip_\mu) - m) e^{-ip_\mu(x-x_0)^\mu} \\ = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathcal{G}(p) (\not{p} - m) e^{-ip_\mu(x-x_0)^\mu} \stackrel{!}{=} i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x-x_0)^\mu} \quad , \quad (22) \end{aligned}$$

entonces podemos escribir  $\mathcal{G}$  como:

$$\mathcal{G}(p) = \frac{i}{\not{p} - m} = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \quad , \quad (23)$$

insertando en  $\tilde{\mathcal{G}}(x, t; x_0, t_0)$  tenemos la solución que buscábamos

$$\tilde{\mathcal{G}}(x, t; x_0, t_0) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left( i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \right) e^{-ip_\mu(x-x_0)^\mu} \quad . \quad (24)$$

### 2.4.1. Propagador para una partícula de Dirac en un campo cromoelectromagnético externo

En un campo cromoelectromagnético externo  $A_\mu$  la ecuación de Dirac toma la forma:

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu(x)) - m)\Psi(x) = 0 \quad , \quad (25)$$

donde  $g$  es la constante de acoplamiento de la interacción fuerte<sup>8</sup>.

De manera similar a el subcapítulo anterior se buscará una solución como función de Green para esta ecuación, es decir;

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu(x)) - m)\tilde{\mathcal{G}}_q^{(A)}(x, x_0) &= i\delta^{(4)}(x - x_0) \\ \implies (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\tilde{\mathcal{G}}_q(x, x_0) &= i\delta^{(4)}(x - x_0) + g\gamma^\mu A_\mu(x)\tilde{\mathcal{G}}_q^{(A)}(x, x_0) \quad , \quad (26) \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la solución en forma integral de (24) podemos expresar  $D_q^{(A)}$  como

$$\tilde{\mathcal{G}}_q^{(A)}(x, x_0) = \tilde{\mathcal{G}}_q(x, x_0) + \int d^4z \tilde{\mathcal{G}}_q(x, z)(-ig\gamma^\mu A_\mu(z))\tilde{\mathcal{G}}_q^{(A)}(z, x_0). \quad (27)$$

Se buscan soluciones iterativas en potencias de  $g$  de la ecuación anterior tal que  $\tilde{\mathcal{G}}_q^{(A)}(x, x_0) = \tilde{\mathcal{G}}_q(x, x_0) + \mathcal{O}(g)$ . Para la primera iteración tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}_q^{(A)}(x, x_0) &= \tilde{\mathcal{G}}_q(x, x_0) + \int d^4z \tilde{\mathcal{G}}_q(x, z_1)(-ig\gamma^\mu A_\mu(z))\tilde{\mathcal{G}}_q(z_1, x_0) + \mathcal{O}(g^2), \quad (28) \end{aligned}$$

para la segunda sería

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}_q^{(A)}(x, x_0) &= \tilde{\mathcal{G}}_q(x, x_0) + \int d^4z \tilde{\mathcal{G}}_q(x, z_1)(-ig\gamma^\mu A_\mu(z))\tilde{\mathcal{G}}_q(z, x_0) \\ &+ \int d^4z_2 \int d^4z_1 \tilde{\mathcal{G}}_q(x, z_2)(-ig\gamma^\nu A_\nu(z_2))\tilde{\mathcal{G}}_q(z_2, z_1) \\ &\quad \times (-ig\gamma^\mu A_\mu(z_1))\tilde{\mathcal{G}}_q(z_1, x_0) + \mathcal{O}(g^3). \quad (29) \end{aligned}$$

Estas soluciones representan los propagadores de una partícula de Dirac que interactua con un campo cromoelectromagnético externo una o dos veces respectivamente. El punto donde ocurre esta interacción se llama «vértice».

---

<sup>8</sup>Esta interacción se entiende como la existente entre el campo gluónico y el campo fermiónico de los quarks, los cuales son los únicos que participan en las interacciones fuertes

La ecuación (29) representa el proceso dispersivo del quark pasando por dos vértices, tres y así sucesivamente desde un punto  $x_0$  hasta  $x$ , sin embargo, hasta el momento se sobrentiende que esto es para un quark, por lo que deberíamos escribir la ecuación anterior considerando las características del mismo. Empezando por el propagador tenemos que podemos escribir  $D_q(x - x_0)$  en términos de el propagador del electrón<sup>9</sup> de la siguiente forma

$$\tilde{\mathcal{G}}_q(x, x_0) \mapsto \tilde{\mathcal{G}}_q^{AB}(x, x_0) = \tilde{\mathcal{G}}_e(x, x_0)\delta^{AB} \quad , \quad (30)$$

donde  $A, B = 1, 2, 3$ . Son los índices del grupo  $SU(3)$ . El campo cromoelectromagnético  $A_\mu(x)$  se escribe en términos de los generadores de grupo como

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a \quad , \quad (31)$$

donde  $T^a$  son los generadores del grupo y  $a = 1, 2, \dots, 8$ . Con esta información la ecuación (29) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{G}}_q^{AB}(x, x_0) \\ &= \tilde{\mathcal{G}}_e(x, x_0)\delta^{AB} + \int d^4z \tilde{\mathcal{G}}_e(x, z_1)\delta^{AC}(\gamma^\mu(-ig(T^a)_{CD})A_\mu^a(z))\tilde{\mathcal{G}}_e(z, x_0)\delta^{DB} \\ & \quad + \int d^4z_2 \int d^4z_1 \tilde{\mathcal{G}}_e(x, z_2)\delta^{AC}(\gamma^\nu(-ig(T^a)_{CD})A_\nu^a(z_2))\tilde{\mathcal{G}}_e(z_2, z_1)\delta^{DE} \\ & \quad \quad \quad \times (\gamma^\mu(-ig(T^b)_{EF})A_\mu^b(z_1))\tilde{\mathcal{G}}_e(z_1, x_0)\delta^{FB} + \mathcal{O}(g^3). \end{aligned} \quad (32)$$

El término  $-ig(T^a)_{CD}\gamma^\mu$  lo identificamos como el vértice de la interacción entre el quark y el gluón.

---

<sup>9</sup>Una forma más explícita del propagador del quark en términos del propagador del electrón se dará en el siguiente capítulo



### 3. Diagrama de auto-interacción en QCD

Antes de empezar a calcular el diagrama correspondiente a la auto-interacción del quark **en D dimensiones**, establezcamos los correspondientes propagadores del quark y gluón. Para esto, es útil conocer los propagadores del electrón y fotón respectivamente. Para esto definamos las siguientes funciones:

$$\mathcal{G}_e(p) = i \frac{\not{p} + m_e}{p^2 - m_e^2} \quad (33)$$

$$\mathcal{G}_f(p) = (-i) \frac{p^2 \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu}{p^2(p^2 - m_f^2)} \quad , \quad (34)$$

donde,  $\eta_{00} = 1, \eta_{ij} = -\delta_{ij}; i, j = 1, 2, 3$  (cero en todas las otras entradas). Los propagadores del electrón y fotón que se propagan de  $0 \mapsto x$  se definen como la transformada de Fourier de las funciones (33) y (34) respectivamente, es decir:

$$\tilde{\mathcal{G}}_e(x, 0) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} i \frac{\not{p} + m_e}{p^2 - m_e^2} e^{-ip \cdot x} \quad , \quad (35)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_f(x, 0) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} (-i) \frac{p^2 \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu}{p^2(p^2 - m_f^2)} e^{-ip \cdot x} \quad . \quad (36)$$

Definimos los propagadores del quark y gluón masivo ( $m_g \neq 0$ ) como:

$$\tilde{\mathcal{G}}_q^{AB} = \tilde{\mathcal{G}}_e \delta^{AB} \quad (37)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_g^{ab} = \tilde{\mathcal{G}}_f \delta^{ab} \quad , \quad (38)$$

donde,  $A, B = 1, 2, 3$  y  $a, b = 1, 2, \dots, 8$  son los índices de color<sup>10</sup>. Además cambiaremos de aquí en adelante los subíndices  $e$  y  $f$  por  $q$  y  $g$  respectivamente.

El proceso de auto-interacción de un quark «libre»<sup>11</sup> consta de tres partes:

- 1.- La propagación del quark desde un punto fijo  $x_1$  hasta un punto arbitrario  $z_1$ .
- 2.- La emisión de un gluón en el punto  $z_1$  y la propagación de ambas partículas hasta otro punto arbitrario  $z_2$ .
- 3.- La absorción de un gluón por el quark en el punto  $z_2$  y la propagación de éste último hasta un punto fijo  $x_2$ .

Este proceso se puede representar con un diagrama de Feynman como el de la figura 1.

<sup>10</sup>Aquí  $A$  Y  $B$  representan los índices de grupo, mientras que  $a$  y  $b$  son los índices de los generadores

<sup>11</sup>Entiendase que los quarks no se encuentran libres como en el caso de los electrones, pero debido a la libertad asintótica podemos pensar que estos no están sometidos a ningún potencial dentro de los hadrones.

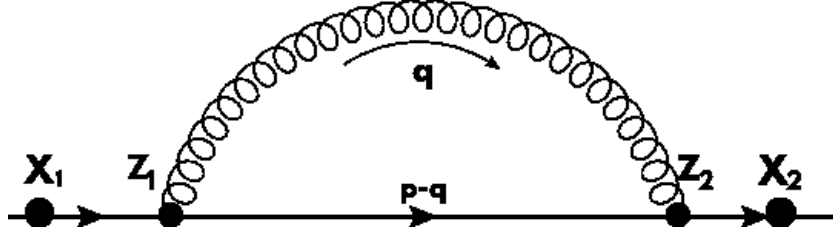


Figura1: Diagrama de auto-interacción

La amplitud de probabilidad de que este fenómeno ocurra esta dada por:

$$\int \int d^D z_2 d^D z_1 \left( \tilde{\mathcal{G}}_{q,\alpha\gamma}^{AC}(x_2, z_2) \right) \times \left( (-ig(T^a)_{CD})(\gamma^\mu)_{\gamma\delta} \tilde{\mathcal{G}}_{q,\delta\phi}^{DE}(z_2, z_1) \tilde{\mathcal{G}}_{g,\mu\nu}^{ab}(z_2, z_1) (-ig(T^b)_{EF})(\gamma^\nu)_{\phi\epsilon} \right) \times \left( \tilde{\mathcal{G}}_{q,\epsilon\beta}^{FB}(z_1, x_1) \right) \quad , \quad (39)$$

esta expresión se puede obtener reemplazando el último término de la ecuación (32) los factores  $A_\nu(z_2)$  y  $A_\mu(z_1)$  por el propagador del gluón. Claramente  $z_1$  y  $z_2$  son totalmente arbitrarios, por esto es que integramos sobre todos los posibles posiciones de los vértices en el espacio-tiempo. La meta principal es calcular la auto-interacción; es decir, el término entre paréntesis central de (39). Es por esto que hemos dividido el diagrama en tres partes, las cuales discutiremos a continuación.

Primero, los propagadores libres; es decir, el primer y último paréntesis de (39) tienen la siguiente forma:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{q,\alpha\gamma}^{AC}(x_2, z_2) = \int \frac{d^D p_f}{(2\pi)^D} i \frac{(\not{p}_f + m_q)_{\alpha\gamma}}{p_f^2 - m_q^2} e^{-ip_f \cdot (x_2 - z_2)} \delta^{AC} \quad , \quad (40)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{q,\epsilon\beta}^{FB}(z_1, x_1) = \int \frac{d^D p_i}{(2\pi)^D} i \frac{(\not{p}_i + m_q)_{\epsilon\beta}}{p_i^2 - m_q^2} e^{-ip_i \cdot (z_1 - x_1)} \delta^{FB} \quad . \quad (41)$$

Los subíndices en las integrales (40) y (41) están indicando momentos final é inicial. No confundir  $\gamma$  como subíndice con las matrices de Dirac.

Ahora escribimos el término central de (39) teniendo en cuenta que el momento del gluón y del quark que se propagan de  $z_1$  a  $z_2$  es  $q$  y  $k$  respectivamente, entonces;

$$\tilde{\mathcal{G}}_{q,\delta\phi}^{DE}(z_2, z_1) \tilde{\mathcal{G}}_{g,\mu\nu}^{ab}(z_2, z_1) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (-i^2) \frac{(\not{k} + m_q)_{\delta\phi} (q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)}{q^2 (k^2 - m_q^2) (q^2 - m_g^2)} \times \delta^{DE} \delta^{ab} e^{-iz_2 \cdot (q+k)} e^{-iz_1 \cdot (-q-k)} \quad , \quad (42)$$

por último, haciendo las contracciones de los índices de color obtenemos un

término multiplicativo global, el cual, para  $SU(N)$  es:

$$c_f = \delta^{AC}(-T^a)_{CD}\delta^{DE}\delta^{ab}(-T^b)_{EF}\delta^{FB} = (T^a)_{AD}(T^a)_{DB} = (T^a T^a)_{AB} \\ = \frac{N^2 - 1}{2N}\delta_{AB} \quad . \quad (43)$$

Multiplicando las ecuaciones (40),(41) y (42) se puede integrar sobre todas las posibles posiciones de los vértices juntando las exponenciales, es decir

$$\int \int d^D z_2 d^D z_1 e^{-iz_1 \cdot (-q-k+p_i)} e^{-iz_2 \cdot (q+k-p_f)} e^{-ip_f \cdot x_2} e^{ip_i \cdot x_1} = \\ (2\pi)^D \delta^{(D)}(-q-k+p_i) (2\pi)^D \delta^{(D)}(q+k-p_f) e^{-ip_f(x_2-x_1)} \quad , \quad (44)$$

esta ecuación es distinta de cero si y solo si  $p_i = q + k = p_f$ ; lo que se conoce como la *conservación de energía momento*. Entonces podemos reescribir (39) como

$$\int \frac{d^D p_f}{(2\pi)^D} i \frac{(\not{p}_f + m_q)_{\alpha\gamma}}{p_f^2 - m_q^2} \\ \times \int d^D q \int d^D k (\gamma^\mu)_{\gamma\delta} (-ig)^2 \frac{(\not{k} + m_q)_{\delta\phi} (q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)}{q^2 (k^2 - m_q^2) (q^2 - m_g^2)} (\gamma^\nu)_{\phi\epsilon} (-i^2 c_f) \\ \times \int \frac{d^D p_i}{(2\pi)^D} i \frac{(\not{p}_i + m_q)_{\epsilon\beta}}{p_i^2 - m_q^2} e^{-ip_f \cdot (x_2 - x_1)} \delta^{(D)}(-q-k+p_i) \delta^{(D)}(q+k-p_f) \quad , \\ (45)$$

gracias a las deltas podemos deshacernos de dos de las integrales, las integrales sobre  $p_i$  y sobre  $k$  desaparecen, entonces:

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} i \frac{(\not{p} + m_q)_{\alpha\gamma}}{p^2 - m_q^2} \\ \times \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} (\gamma^\mu)_{\gamma\delta} \frac{(\not{p} - \not{q} + m_q)_{\delta\phi} (q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)}{q^2 ((p-q)^2 - m_q^2) (q^2 - m_g^2)} (\gamma^\nu)_{\phi\epsilon} (-ig)^2 c_f \\ \times i \frac{(\not{p} + m_q)_{\epsilon\beta}}{p^2 - m_q^2} e^{-ip \cdot (x_2 - x_1)} \quad , \quad (46)$$

$$= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} i \frac{(\not{p} + m_q)_{\alpha\gamma}}{p^2 - m_q^2} e^{-ip(x_2-x_1)} [(-ig^2 c_f) \Sigma'] \frac{i(\not{p} + m_q)_{\epsilon\beta}}{p^2 - m_q^2} \quad (47)$$

donde se omitió el subíndice  $f$  de  $p$ . Denotaremos al término entre corchetes como  $-i\Sigma = -ig^2 c_f \Sigma'$ , donde  $\Sigma$  la definimos como la auto-energía.

## 4. Evaluación del diagrama

En este capítulo vamos a calcular  $i\Sigma'$ . Primero, trabajaremos el numerador de dicha expresión al hacer la reducción tensorial<sup>12</sup>, hasta tener una expresión mas manejable; el numerador es:

$$\begin{aligned} & (\gamma^\mu)_{\gamma\delta}(\not{k} + m_q)_{\delta\epsilon}(q^2\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)(\gamma^\nu)_{\epsilon\phi} \\ & = q^2(\gamma^\mu \not{k} \gamma_\mu)_{\gamma\phi} + m_q q^2(\gamma^\mu \gamma_\mu)_{\gamma\phi} - (\not{q} \not{k} \not{q})_{\gamma\phi} - m_q(\not{q} \not{q})_{\gamma\phi} \quad , \quad (48) \end{aligned}$$

vamos a usar las siguientes propiedades:

$$\gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu = 2\eta_{\mu\nu} \quad (49)$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = D \quad (50)$$

$$\not{q} \not{k} + \not{k} \not{q} = 2(q \cdot k) \quad (51)$$

$$\not{q} \not{q} = q^2 \quad . \quad (52)$$

En el primer término se usa (49) haciendo  $\not{k} = k^\nu \gamma_\nu$ ; para el segundo término se usa (50), para el tercero (51) y se usa (52) para el último. Con esto llegamos a que (48) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} & [(3 - D)q^2 \not{k} - 2(q \cdot k) \not{q} + (D - 1)m_q q^2]_{\gamma\phi} = \\ & [(D - 1)q^2 \not{q} - 2(q \cdot p) \not{q} + (3 - D)q^2 \not{p} + (D - 1)m_q q^2]_{\gamma\phi} \quad , \quad (53) \end{aligned}$$

donde se hizo el cambio  $k \mapsto p - q$ . el resultado en (53) era lo que se buscaba para el numerador de  $\Sigma'$ , el cual escribimos como

$$i\Sigma' = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left( \frac{(D - 1)q^2 \not{q} - 2(q \cdot p) \not{q} + (3 - D)q^2 \not{p} + (D - 1)m_q q^2}{q^2((p - q)^2 - m_q^2)(q^2 - m_g^2)} \right) \quad , \quad (54)$$

a partir de ahora vamos a trabajar con el denominador, sin embargo, por cuestiones de eficiencia no vamos a escribir el numerador en lo que sigue (ya que no afectará en los cálculos). Dicho denominador puede separarse por fracciones parciales de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2((p - q)^2 - m_q^2)(q^2 - m_g^2)} \\ & = \frac{1}{m_g^2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{((p - q)^2 - m_q^2)(q^2 - m_g^2)} - \frac{1}{m_g^2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2((p - q)^2 - m_q^2)} \quad , \quad (55) \end{aligned}$$

notar que el primer sumando esta indefinido para  $q^0 = \pm\sqrt{m_g^2 + \bar{q}^2}$  y  $q^0 = p^0 \pm \sqrt{(\bar{p} - \bar{q})^2 + m_q^2}$ .

<sup>12</sup>Esto significa pasar de tener una integral con subíndices y matrices gamma a una integrar escalar.

Analizando el primer factor de (55), a fin de calcular la integral en el plano complejo agregamos la prescripción  $i\epsilon$ ; es decir

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{((p-q)^2 - m_q^2 + i\epsilon)(q^2 - m_g^2 + i\epsilon)} . \quad (56)$$

Aplicando la sustitución  $q \mapsto q + \frac{p}{2}$  al denominador<sup>13</sup> factorizamos estos términos como:

$$\begin{aligned} & \left( \left( q - \frac{p}{2} \right)^2 - m_q^2 + i\epsilon \right) = \left( \left( q^0 - \frac{p^0}{2} \right)^2 - \left( \vec{q} - \frac{\vec{p}}{2} \right)^2 - m_q^2 + i\epsilon \right) \\ & = \left( q^0 - \frac{p^0}{2} - \sqrt{\left( \vec{q} - \frac{\vec{p}}{2} \right)^2 + m_q^2 + i\eta} \right) \left( q^0 - \frac{p^0}{2} + \sqrt{\left( \vec{q} - \frac{\vec{p}}{2} \right)^2 + m_q^2 - i\eta} \right) . \end{aligned} \quad (57)$$

Y el segundo término en el denominador de (56) se factoriza similarmente y queda

$$\begin{aligned} & \left( q + \frac{p}{2} \right)^2 - m_g^2 + i\epsilon \\ & = \left( q^0 + \frac{p^0}{2} - \sqrt{\left( \vec{q} + \frac{\vec{p}}{2} \right)^2 + m_g^2 + i\eta} \right) \left( q^0 + \frac{p^0}{2} + \sqrt{\left( \vec{q} + \frac{\vec{p}}{2} \right)^2 + m_g^2 - i\eta} \right) . \end{aligned} \quad (58)$$

De las ecuaciones anteriores se reconoce que los polos son

$$q^0 = \frac{p^0}{2} + \sqrt{\left( \vec{q} - \frac{\vec{p}}{2} \right)^2 + m_q^2 - i\eta} \quad (59a)$$

$$q^0 = \frac{p^0}{2} - \sqrt{\left( \vec{q} - \frac{\vec{p}}{2} \right)^2 + m_q^2 + i\eta} \quad (59b)$$

$$q^0 = -\frac{p^0}{2} + \sqrt{\left( \vec{q} + \frac{\vec{p}}{2} \right)^2 + m_g^2 - i\eta} \quad (59c)$$

$$q^0 = -\frac{p^0}{2} - \sqrt{\left( \vec{q} + \frac{\vec{p}}{2} \right)^2 + m_g^2 + i\eta} . \quad (59d)$$

---

<sup>13</sup>Se dejará de momento el numerador de la integral y de trabajará al final

La prescripción  $i\eta$  sitúa los polos en el plano complejo.

Lo que sigue ahora, con el motivo de calcular la integral es, tomar una rotación de Wick; la cual está motivada por el teorema integral de Cauchy-Goursat<sup>14</sup>. Para aplicar el teorema necesitamos «recorrer» los polos bajo ciertas condiciones de tal manera que podamos tomar la integral sobre la frontera de una región que no contenga polos; las condiciones para que esto se cumpla son:

$$\frac{p^0}{2} + \sqrt{\left(\bar{q} - \frac{\bar{p}}{2}\right)^2 + m_q^2} > 0 \implies \frac{p_0}{2} > -m_q \quad (60a)$$

$$\frac{p^0}{2} - \sqrt{\left(\bar{q} - \frac{\bar{p}}{2}\right)^2 + m_q^2} < 0 \implies \frac{p_0}{2} < m_q \quad (60b)$$

$$-\frac{p^0}{2} + \sqrt{\left(\bar{q} + \frac{\bar{p}}{2}\right)^2 + m_g^2} > 0 \implies \frac{p_0}{2} < m_g \quad (60c)$$

$$-\frac{p^0}{2} - \sqrt{\left(\bar{q} + \frac{\bar{p}}{2}\right)^2 + m_g^2} < 0 \implies \frac{p_0}{2} > -m_g \quad , \quad (60d)$$

entonces para  $-2m < p^0 < 2m$  con  $m = \min(m_q, m_g)$  tenemos los polos ubicados en el segundo y cuarto cuadrante, en específico, (59a) y (59c) quedan ubicados en el cuarto cuadrante, mientras que (59b) y (59d) quedan ubicados en el segundo cuadrante; con lo cual, nuestra curva cerrada es aquella que comprende el eje real, más el eje imaginario, más los dos cuartos de círculo en el primer y tercer cuadrante. Por el teorema de Cauchy-Goursat la integral (56) sobre esta región es cero; luego, la suma de las integrales sobre los cuartos de círculo al ser parametrizadas por  $Re^{i\theta}$  se anulan al tomar el límite  $R \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, solo nos queda que la integral sobre el eje real es igual a la integral sobre el eje imaginario haciendo  $q^0 \equiv -iq_E^0$ , esta última es la mencionada rotación de Wick. La componente cero de (56) pasa a ser, pues, imaginaria, es decir;

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq^0 = - \int_{i\infty}^{-i\infty} dq^0 = i \int_{-\infty}^{\infty} dq_E^0 \quad (61)$$

$$\implies \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \Omega((q^0, \bar{q}), p) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_E^0}{(2\pi)} \int \frac{d^{D-1} \bar{q}}{(2\pi)^{D-1}} \Omega((-iq_E^0, \bar{q}), p) \quad , \quad (62)$$

donde  $\Omega((q^0, \bar{q}), p)$  es el integrando de (54)<sup>15</sup>. Notemos que gracias a la rotación de Wick hemos pasado de la métrica de Minkowski a la métrica Euclidiana, pues los términos del denominador de (56) se convierten en

$$\begin{aligned} \left(-iq_E^0 \pm \frac{p^0}{2}\right)^2 - \left(\bar{q} \pm \frac{\bar{p}}{2}\right)^2 &= - \left(-q_E^0 \mp i\frac{p^0}{2}\right)^2 - \left(\bar{q} \pm \frac{\bar{p}}{2}\right)^2 \\ &= - \left(q_E^0 \pm \frac{p_E^0}{2}\right)^2 - \left(\bar{q} \pm \frac{\bar{p}}{2}\right)^2 = - \left(q_E \pm \frac{p_E}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

<sup>14</sup>Este dice que si se tiene una función compleja  $f(z)$  tal que es analítica sobre una curva cerrada  $\Gamma$  y que lo es también dentro de la región encerrada por esta curva, entonces  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$

<sup>15</sup>La rotación de Wick al numerador será analizada después.

donde se ha hecho la rotación de Wick definiendo  $p^0 \equiv -ip_E^0$ <sup>16</sup>. Los momentos  $q_E$  y  $p_E$  representan los momentos Euclidianos.

Haciendo la sustitución  $q_E \mapsto q_E - \frac{p_E}{2}$  podemos escribir

$$\begin{aligned} & i \int \frac{d^D q_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{((q_E - \frac{p_E}{2})^2 + m_q^2 - i\epsilon)((q_E + \frac{p_E}{2})^2 + m_q^2 - i\epsilon)} \\ &= i \int \frac{d^D q_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{((q_E - p_E)^2 + m_q^2 - i\epsilon)(q_E^2 + m_q^2 - i\epsilon)} \quad , \quad (63) \end{aligned}$$

hasta ahora se trabajó con el primer término de (55); para el segundo término, no es posible encontrar valores para  $p_0$  de tal manera que todos los polos se ubiquen en el segundo y cuarto cuadrante. Lo que se hace en este caso es agregar una masa artificial en el segundo factor del denominador en el segundo término de (39) a la que llamaremos  $m_g$ , de esta manera la integral se parece a la que ya hemos calculado aplicando la rotación de Wick; después, basta tomar el límite  $m_g \mapsto 0$  de (63), con lo cual queda como

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{((p - q)^2 - m_q^2)q^2} = i \int \frac{d^D q_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{((q_E - p_E)^2 + m_q^2 - i\epsilon)(q_E^2 - i\epsilon)} \quad , \quad (64)$$

de ahora en adelante ya no es necesario utilizar la prescripción  $i\epsilon$ .

Con el motivo de seguir simplificando las ecuaciones (63) y (64) vamos a introducir una fórmula muy útil, la cual, se la debemos a Feynman.

### Fórmula de Feynman

Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  funciones reales ó complejas. Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  números reales; entonces:

$$\frac{1}{A_1^{\alpha_1} \dots A_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\sum_i \alpha_i)}{\prod_i \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(x_1 + \dots + x_n - 1) \frac{\prod_i x_i^{\alpha_i - 1}}{(\sum_i x_i A_i)^{\sum_i \alpha_i}} \quad . \quad (65)$$

<sup>16</sup>A pesar que no se integra sobre  $p_E$  la rotación de Wick se toma, pues considerar valores reales de  $p_E^0$  equivale a una continuación analítica del resultado de la integral

Introduciendo la fórmula de Feynman en (63) con  $n = 2$  haciendo  $A_1 = (q_E - p_E)^2 + m_q^2$  y  $A_2 = q_E^2 + m_g^2$ ; esta se puede escribir como

$$\begin{aligned} & i \int \frac{d^D q_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{((q_E - p_E)^2 + m_q^2)(q_E^2 + m_g^2)} \\ &= i \int_0^1 dx \int \frac{d^D q_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{[x((q_E - p_E)^2 + m_q^2) + (1-x)(q_E^2 + m_g^2)]^2} \\ &= i \int_0^1 dx \int \frac{d^D q_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q_E^2 + \Delta_1)^2} \quad , \quad (66) \end{aligned}$$

con  $\Delta_1 \equiv (x - x^2)p_E^2 + xm_q^2 + (1-x)m_g^2$ .

Donde de la segunda a la tercera línea se expandieron los términos del denominador y se hizo la sustitución  $q_E \mapsto q_E + xp_E$ . Siguiendo los mismos pasos para (64) llegamos a

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{((p-q)^2 - m_q^2)q^2} = i \int_0^1 dx \int \frac{d^D q_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q_E^2 + \Delta_2)^2} \quad , \quad (67)$$

con  $\Delta_2 = (x - x^2)p_E^2 + xm_q^2$ . Podemos escribir (55) como

$$\frac{i}{m_g^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^D q_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q_E^2 + \Delta_1)^2} - \frac{i}{m_g^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^D q_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q_E^2 + \Delta_2)^2} \quad . \quad (68)$$

De (68) teniendo en cuenta solo las integrales sobre  $q$  cambiamos a coordenadas esféricas, esto es;

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D q_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q_E^2 + \Delta_i)^2} &= \frac{1}{(2\pi)^D} \int d\Omega_D \int_0^\infty \frac{d|q_E| \cdot |q_E|^{D-1}}{(q_E^2 + \Delta_i)^2} \\ &\sim \int_0^\infty d|q_E| \cdot |q_E|^{D-1} |q_E|^{-4} = \left. \frac{|q_E|^{D-4}}{D-4} \right|_0^\infty \quad . \quad (69) \end{aligned}$$

Para  $i = 1, 2$  y grandes valores de  $q_E$  vemos que la integral diverge para  $D \geq 4$ . Tomamos el numerador de (56) y aplicando la definición de los momentos euclidianos se tienen las siguientes relaciones

$$q^2 = (q^0)^2 - \vec{q}^2 = (-iq_E^0)^2 - \vec{q}^2 = -q_E^2 \quad (70)$$

$$p \cdot q = p^0 q^0 - \vec{p} \cdot \vec{p} = i^2 p_E^0 q_E^0 - \vec{p} \cdot \vec{p} = -p_E \cdot q_E \quad (71)$$

$$\not{p} = p_\mu \gamma^\mu = p^0 \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} = -ip_E^0 \gamma^0 - i\vec{p} \cdot \vec{\gamma}_E = -ip_E \gamma_E = -i\not{p}_E \quad . \quad (72)$$

Donde se ha definido  $\gamma_E^0 \equiv \gamma^0$  y  $\gamma_E^j = -i\gamma^j$ . Con lo que podemos escribir el numerador como

$$\begin{aligned} & (D-1)q^2 \not{q} - 2(q \cdot p)\not{q} + (3-D)q^2 \not{p} + (D-1)m_q q^2 \\ &= i(D-1)q_E^2 \not{q}_E - 2i(p_E \cdot q_E)\not{q}_E + i(3-D)q_E^2 \not{p}_E - (D-1)m_q q_E^2 \quad , \quad (73) \end{aligned}$$



donde es claro que las traslaciones  $q \mapsto q + \frac{p}{2}$  y  $q_E \mapsto q_E - \frac{p_E}{2}$  se cancelan. Solo queda sustituir  $q_E \mapsto q_E + xp_E$  y (73) se puede escribir

$$\begin{aligned}
& i(D-1)(q_E + xp_E)^2(\not{q}_E + xp\not{p}_E) - 2i(p_E \cdot (q_E + xp_E))(\not{q}_E + xp\not{p}_E) \\
& \quad + i(3-D)(q_E + xp_E)^2\not{p}_E - (D-1)m_q(q_E + xp_E)^2 \\
& = i(D-1)(q_E^2\not{q}_E + 2xq_E p_E\not{q}_E + x^2 p_E^2\not{q}_E + xq_E^2\not{p}_E + 2x^2 q_E p_E\not{p}_E + x^3 p_E^2\not{p}_E) \\
& \quad - 2i(p_E \cdot q_E + xp_E^2)(\not{q}_E + xp\not{p}_E) \\
& + i(3-D)(q_E^2 + 2xq_E p_E + x^2 p_E^2)\not{p}_E - (D-1)m_q(q_E^2 + 2xq_E p_E + x^2 p_E^2) \equiv \tau \quad , \\
\end{aligned} \tag{74}$$

entonces  $i\Sigma'$  puede escribirse como

$$\begin{aligned}
i\Sigma' & = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left( \frac{(D-1)q^2\not{q} - 2(q \cdot p)\not{q} + (3-D)q^2\not{p} + (D-1)m_q q^2}{q^2((p-q)^2 - m_q^2)(q^2 - m_g^2)} \right) \\
& = \frac{i}{m_g^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^D q_E}{(2\pi)^D} \frac{\tau}{(q_E^2 + \Delta_1)^2} - \frac{i}{m_g^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^D q_E}{(2\pi)^D} \frac{\tau}{(q_E^2 + \Delta_2)^2} \quad , \tag{75}
\end{aligned}$$

es muy importante que no se confunda esta última ecuación con la auto-energía, la cual, esta dada por  $\Sigma = g^2 c_f \Sigma'$ , que al mismo tiempo es consistente con la definición:  $-i\Sigma = -ig^2 c_f \Sigma'$ . Recordar que  $\Delta_i$  no dependen de  $q_E$  para  $i = 1, 2$  y que las integrales que tengan potencias impares de  $q_E$  en  $\tau$  al ser evaluadas en el intervalo  $(-\infty, \infty)$  se anulan por ser funciones impares<sup>17</sup>.

Pasamos a coordenadas esféricas usando el cambio de variable que se hizo en (69) y para simplificar la integral sobre los ángulos usaremos la fórmula

$$\int \frac{d\Omega_D}{(2\pi)^D} = \frac{2}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} \quad ,$$

y para la parte radial haciendo  $y = |q_E|$ ,

$$\int_0^\infty \frac{d|q_E| |q_E|^{D-1}}{(|q_E|^2 + \Delta_i)^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy y^{D/2-1}}{(y + \Delta_i)^2} \quad . \tag{76}$$

Multiplicando y dividiendo (76) por  $\Delta_i$  y  $\left(\frac{y+\Delta_i}{\Delta_i}\right)^{D/2-1}$  para luego tomar el cambio de variable  $x = \frac{\Delta_i}{y+\Delta_i}$  y usando la función beta de Euler[5]

$$\beta(a, b) = \int_0^1 dx (1-x)^{b-1} x^{a-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad ,$$

escribimos (76) como

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy y^{D/2-1}}{(y + \Delta_i)^2} = \Delta_i^{(D/2-1)} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2-D/2)\Gamma(D/2)}{\Gamma(2)} \quad . \tag{77}$$

<sup>17</sup>esto significa  $f(x) = f(-x)$

Haciendo los mismos cambios de variable y usando las mismas fórmulas los términos con potencias pares en el numerador pueden escribirse como:

$$\int_0^\infty \frac{d|q_E| |q_E|^{D-1} |q_E|^2}{(|q_E|^2 + \Delta_i)^2} = \frac{1}{2} \Delta_i^{(D/2-1)} \frac{\Gamma(1-D/2)\Gamma(D/2+1)}{\Gamma(2)} \quad , \quad (78)$$

Para el caso en el que en el numerador aparecen términos de la forma  $(q_E)_\mu (q_E)_\nu$  se espera que la integral de como resultado una función de  $\Delta_i$  si los índices  $\mu$  y  $\nu$  son iguales y cero si son distintos, dicha función es

$$\int \frac{d^D q_E}{(2\pi)^D} \frac{(q_E)_\mu (q_E)_\nu}{(|q_E|^2 + \Delta_i)^2} = \delta_{\mu\nu} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1-D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \Delta_i^{D/2-1} \quad . \quad (79)$$

Finalmente, escribiendo los términos cuadráticos restantes en el denominador, sustituyendo las ecuaciones (77),(78) y (79) y usando que la función gamma cumple que  $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$  logramos escribir la expresión  $\Sigma'$  como:

$$\begin{aligned} \Sigma'(p, m_g, m_q) = & \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^{j-1}}{m_g^2} \int_0^1 dx \left\{ (i(D-1)x^3 p_E^2 \not{p}_E - 2ix^2 p_E^2 \not{p}_E \right. \\ & + i(3-D)x^2 p_E^2 \not{p}_E - (D-1)m_q x^2 p_E^2) \left( \frac{\Gamma(2-D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \Delta_j^{D/2-2} \right) \\ & + (i(D-1)x \not{p}_E + i(3-D)\not{p}_E - (D-1)m_q) \left( \frac{D}{2} \frac{\Gamma(1-D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \Delta_j^{D/2-1} \right) \\ & \left. - 2i \not{p}_E ((1-D)x + 1) \left( \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1-D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \Delta_j^{D/2-1} \right) \right\} \quad . \quad (80) \end{aligned}$$

#### 4.1. $D = 4 - \epsilon$

Lo que corresponde ahora sería considerar el caso físico, es decir  $D = 4$ ; pero como vimos en la eq. (69) existe una divergencia. Lo que haremos será tomar  $D = 4 - \epsilon$  y hacer una expansión en serie para  $\epsilon \ll 1$ . Además, vamos a introducir la *unidad de masa* a la que llamaremos  $\kappa$ , esto a fin de absorber la dimensión de la constante de acoplamiento  $g$  de la eq.(47). Para  $D = 4 - \epsilon$  la sustitución correspondiente es:  $g \mapsto g\kappa^{\epsilon/2}$ .

A continuación escribiremos las expansiones en serie de los términos mas relevantes de (80). Para la función Gamma a segundos ordenes su expansión en serie puede escribirse usando la fórmula

$$\Gamma\left(-n + \frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_e + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \mathcal{O}(\epsilon) \right] , \quad (81)$$

siendo  $\gamma_e \approx 0,5772$  la constante de *Euler-Mascheroni*. Teniendo esto en cuenta escribimos

$$\begin{aligned} \Gamma(2 - D/2) &= \Gamma(\epsilon/2) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_e + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \Gamma(1 - D/2) &= \Gamma(-1 + \epsilon/2) = -\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_e + 1 + \mathcal{O}(\epsilon)\right) , \end{aligned}$$

para las funciones  $\Delta$  y para la constante de acoplamiento, que en este caso es, según (47) la constante elevada al cuadrado quedan como:

$$\begin{aligned} \Delta_j^{D/2-2} &= \Delta_j^{-\epsilon/2} = 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\Delta_j) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \Delta_j^{D/2-1} &= \Delta_j^{1-\epsilon/2} = \Delta_j \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\Delta_j) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \\ (4\pi)^{-D/2} &= (4\pi)^{\epsilon/2-2} = \frac{1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon^2)}{(4\pi)^2} \\ g^2 \kappa^\epsilon &= g^2(1 + \epsilon \ln(\kappa) + \mathcal{O}(\epsilon^2)) , \end{aligned}$$

recordar que

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (x - x^2)p_E^2 + xm_q^2 + (1 - x)m_g^2 \\ \Delta_2 &= (x - x^2)p_E^2 + xm_q^2 . \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta esto, podemos escribir la expresión (80) como:

$$\begin{aligned}
\Sigma'(p, m_g, m_q) \Big|_{D=4-\epsilon} &= \frac{1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi)}{(4\pi)^2} \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^{j-1}}{m_g^2} \int_0^1 dx \left\{ \right. \\
&\left( i(3-\epsilon)x^3 p_E^2 \not{p}_E - i2x^2 p_E^2 \not{p}_E + i(\epsilon-1)x^2 p_E^2 \not{p}_E - (3-\epsilon)m_q x^2 p_E^2 \right) \\
&\quad \times \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma_e \right) \left( 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\Delta_j) \right) \\
&\quad + \left( i(3-\epsilon)x \not{p}_E + i(\epsilon-1) \not{p}_E - (3-\epsilon)m_q \right) \\
&\quad \times \left( -\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \Delta_j \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma_e + 1 \right) \left( 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\Delta_j) \right) \right) \\
&\quad \left. - 2i \not{p}_E \left( (-3+\epsilon)x + 1 \right) \left( \frac{-\Delta_j}{2} \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma_e + 1 \right) \left( 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\Delta_j) \right) \right) \right\} . \quad (82)
\end{aligned}$$

De la ecuación anterior vemos que hay algunas integrales que son fáciles de calcular, en particular, las que solo tienen como integrando a potencias de  $x$  y factores  $\Delta_j$ , es decir:

$$\sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^{j-1}}{m_g^2} \int_0^1 dx \Delta_j = \frac{1}{m_g^2} \int_0^1 dx (\Delta_1 - \Delta_2) = \frac{1}{m_g^2} \int_0^1 dx (1-x) m_g^2 = \frac{1}{2} \quad (83a)$$

$$\sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^{j-1}}{m_g^2} \int_0^1 dx \Delta_j x = \frac{1}{m_g^2} \int_0^1 dx (\Delta_1 - \Delta_2) x = \frac{1}{m_g^2} \int_0^1 (x-x^2) m_g^2 = \frac{1}{6}, \quad (83b)$$

notar que en (82) la segunda línea solo tiene potencias de « $x$ » como factores, los cuales se anulan al tomar la suma sobre  $j$  siempre que no se multipliquen por  $\ln(\Delta_j)$ . Por otro lado, los términos proporcionales a  $\not{p}_E$  en la cuarta y quinta línea que sean multiplicados por  $\Delta_j$  y  $\frac{2}{\epsilon}$  se anula; para ver esto, considere el primer y segundo factor de la cuarta línea de (82) que multiplica a  $\frac{2}{\epsilon} \Delta_j$ , esto queda como

$$\begin{aligned}
&\frac{2i \not{p}_E}{\epsilon m_g^2} \left[ \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} (-2) \int_0^1 dx (3x \Delta_j - \Delta_j) \right] \\
&= \frac{-2i \not{p}_E}{\epsilon m_g^2} \left[ 6 \int_0^1 dx (\Delta_1 - \Delta_2) x - 2 \int_0^1 dx (\Delta_1 - \Delta_2) \right] = \frac{-2i \not{p}_E}{\epsilon m_g^2} \left( \frac{6m_g^2}{6} - \frac{2m_g^2}{2} \right) \\
&= \frac{-2i \not{p}_E}{\epsilon} (1-1) = 0 \quad , \quad (84)
\end{aligned}$$

donde se usó el resultado (68a) y (68b). Es por esta misma razón que los términos proporcionales a  $\not{p}_E$ ,  $\Delta_j$  y  $2/\epsilon$  se anulan en la sexta línea de (82).

Otra integral fácil de calcular es la que es proporcional a  $m_q$  y  $\frac{2}{\epsilon}$ , ya que el único factor que contribuye es el tercer término de la cuarta línea de (82), es decir:

$$\frac{2}{\epsilon} \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^{j-1}}{m_g^2} 3 \cdot 2m_q \int_0^1 dx \Delta_j = \frac{2}{\epsilon} \cdot \frac{6m_q}{m_g^2} \int_0^1 dx (\Delta_1 - \Delta_2) = \frac{2}{\epsilon} \cdot 3m_q \quad . \quad (85)$$

Lo que sigue es calcular las integrales restantes, aquellas que son proporcionales a  $\ln(\Delta_j)$ , sin embargo, aquí no se incluirá el cálculo explícito de dichas integrales, vease [1, pág 55-58]; al hacer uso de estos resultados é implementar *Mathematica* para reducir el álgebra se llega al resultado final de la auto-energía

$$\begin{aligned} & \Sigma(m_g^2, m_q^2, p^2) \\ &= \frac{-ig^2 c_f \not{p}}{32\pi^2 m_g^2 p^4} \left\{ m_g^2 p^2 (m_q^2 + p^2 - 2m_g^2) - [3m_g^4 (p^2 - m_q^2) + 2m_g^6 + (m_q^2 + p^2)^3] \ln(m_g/m_q) \right. \\ & \quad + (m_g^2 (p^2 - m_q^2) - (m_q^2 + p^2)^2 + 2m_g^4) r^2 \tanh^{-1} \left( \frac{r^2}{p^2 + m_g^2 + m_q^2} \right) \\ & \quad \left. + (m_q^2 + p^2)^3 \ln \left( \frac{p^2}{m_q^2} + 1 \right) \right\} \\ & \quad - \frac{3m_q g^2 c_f}{(4\pi)^2} \left\{ \gamma_e - \frac{2}{\epsilon} - \frac{4}{3} + \ln \left( \frac{m_g m_q}{4\pi \kappa^2} \right) - \frac{(m_g^2 - m_q^2)}{p^2} \ln(m_g/m_q) \right. \\ & \quad \left. + \frac{r^2}{p^2} \tanh^{-1} \left( \frac{r^2}{p^2 + m_g^2 + m_q^2} \right) \right\} \quad (86) \end{aligned}$$

$$\text{con } r^2 = \sqrt{(p^2 + m_g^2 + m_q^2)^2 - (2m_g m_q)^2}.$$

Sin embargo, introduciendo constantes adimensionales  $v \equiv m_q^2/m_g^2$  y  $t \equiv p^2/m_g^2$  se puede demostrar que

$$\tanh^{-1} \left( \frac{r^2}{p^2 + m_g^2 + m_q^2} \right) = \tanh^{-1} \left( \frac{s}{t + v + 1} \right) \quad , \quad (87)$$

donde  $s = \sqrt{(t + v + 1)^2 - 4v}$  y entonces el resultado para  $\Sigma$  puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\Sigma(v, t) = & \frac{-ig^2 c_f \not{p}}{32\pi^2 t^2} \left\{ t(v+t-2) + [3(t-v) + (v+t)^3 + 2] \ln(\sqrt{v}) \right. \\
& \left. + s((t-v) - (v+t)^2 + 2) \tanh^{-1} \left( \frac{s}{t+v+1} \right) + (v+t)^3 \ln \left( \frac{t}{v} + 1 \right) \right\} \\
- & \frac{3g^2 c_f m_q}{(4\pi)^2} \left\{ \gamma_e - \frac{2}{\epsilon} - \frac{4}{3} + \ln \left( \frac{m_q m_g}{4\pi\kappa^2} \right) + \left( \frac{1-v}{t} \right) \ln(\sqrt{v}) + \frac{s}{t} \tanh^{-1} \left( \frac{s}{t+v+1} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{88}$$

## 5. Renormalización

La expresión del diagrama de auto-interacción se puede generalizar si tomamos en cuenta todos los posibles eventos; primero la figura 1 muestra una sola interacción de un quark «libre» con un gluón, luego, tomemos el mismo proceso repitiéndose varias veces y sumando cada auto-interacción tenemos, en el espacio de Minkowski:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(p) &= \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} (-ig^2 c_f \Sigma'(m^2, p^2)) \frac{i}{\not{p} - m} \\ &+ \frac{i}{\not{p} - m} (-ig^2 c_f \Sigma'(m^2, p^2)) \frac{i}{\not{p} - m} (-ig^2 c_f \Sigma'(m^2, p^2)) \frac{i}{\not{p} - m} + \dots \\ &= \frac{i}{\not{p} - m} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-ig^2 c_f) \Sigma'(m^2, p^2) \frac{i}{\not{p} - m} \right\}^n, \quad (89) \end{aligned}$$

es decir; para una auto-interacción hay dos vértices, para dos hay cuatro y así sucesivamente. A partir de ahora usaremos  $m$  para denotar la masa del quark ó fermión, mientras que la dependencia de  $m_g$  no será especificada por el momento. Usando la serie geométrica<sup>18</sup> se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{i}{\not{p} - m} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-ig^2 c_f) \Sigma'(m^2, p^2) \frac{i}{\not{p} - m} \right\}^n &= \frac{i}{\not{p} - m} \cdot \frac{1}{1 + ig^2 c_f \Sigma'(m^2, p^2) \frac{i}{\not{p} - m}} \\ &= \frac{i}{\not{p} - m - g^2 c_f \Sigma'(m^2, p^2)} \quad . \quad (90) \end{aligned}$$

Sin embargo, como ya vimos,  $\Sigma'(m^2, p^2) = A(p^2)\not{p} + B(p^2)m$ , entonces

$$\mathcal{G}(p) = \frac{i}{[1 - g^2 c_f A(p^2)]\not{p} - [1 + g^2 c_f B(p^2)]m} \quad . \quad (91)$$

De la ecuación de Dirac,  $(i\not{\partial} - m)\psi = (\not{p} - m)\psi = 0$ ; vemos que el operador, que en este caso es el inverso del propagador en el espacio de momentos tiene un eigenvalor cero, esto si y solo si la ecuación de Dirac correspondiente tiene una solución no trivial, lo cual ocurre cuando  $p^2 = m^2$ ; esto para el caso de una partícula libre<sup>19</sup>, para el caso del propagador con correcciones escribimos  $i(X(p^2)\not{p} - Y(p^2)m)^{-1}$  para algunas funciones del momento  $X$  é  $Y$ . La ecuación de Dirac con correcciones es:  $(X(p^2)\not{p} - Y(p^2)m)\psi = 0$ , la cual, tiene una solución no trivial siempre que  $[X(p^2)]^2 p^2 = [Y(p^2)]m^2$ ; nosotros queremos interpretar esta solución de manera conveniente a manera de escribir cantidades

<sup>18</sup> $\sum_n x^n = (1 - x)^{-1}$

<sup>19</sup>Cabe aclarar que en el caso de la QCD, los quarks no son partículas que se puedan encontrar "libres", como si sucede en la QED con los electrones. Esto es con el propósito de motivar la renormalización solamente.

desnudas<sup>20</sup> en términos de las cantidades físicas. Notar que:

$$\frac{i}{X(p^2)\not{p} - Y(p^2)m} \cdot \frac{X(p^2)\not{p} + Y(p^2)m}{X(p^2)\not{p} + Y(p^2)m} = i \frac{X(p^2)\not{p} + Y(p^2)m}{[X(p^2)]^2 p^2 - [Y(p^2)]^2 m^2} \quad , \quad (92)$$

vemos que el denominador de la expresión anterior nos permite identificar que para un valor específico de  $p^2$  existe una divergencia, dicho valor supondremos que será la masa física. De (92) veamos la analogía con (91), de aquí se sigue que la ecuación de Dirac,  $([1 - c_f g^2 A(p^2)]\not{p} - [1 + c_f g^2 B(p^2)]m)\psi = 0$  tiene una solución no trivial siempre que

$$[1 - c_f g^2 A(p^2)]^2 p^2 = [1 + c_f g^2 B(p^2)]^2 m^2 \quad , \quad (93)$$

interpretamos que el valor de  $p^2$  tal que se cumple esta ecuación es  $p^2 = M^2$ , la masa física.

La meta es expresar la masa desnuda en términos de la masa física, por lo que tomando el denominador de (91) y calculando el eigenvalor cero correspondiente obtenemos:

$$\begin{aligned} [1 - g^2 c_f A(M^2)]^2 M^2 &= [1 + g^2 c_f B(M^2)]^2 m^2 \\ \implies m &= M \left( \frac{1 - g^2 c_f A(M^2)}{1 + g^2 c_f B(M^2)} \right) \approx M(1 - g^2 c_f A(M^2))(1 - g^2 c_f B(M^2)) \\ &= M + \mathcal{O}(g^2) \quad . \quad (94) \end{aligned}$$

En resumen, la teoría predice la masa desnuda del quark en términos de la masa física mas correcciones de orden  $g^2$ .

Como ya se sabe, la expresión del diagrama es divergente para  $D = 4$ , a manera de disolver esta divergencia vamos a definir las cantidades renormalizadas, es decir, finitas. Para el propagador, introducimos la constante de renormalización  $Z_\psi$  tal que la cantidad

$$\mathcal{G}_R(p) = Z_\psi^{-1} \mathcal{G}(p) \quad , \quad (95)$$

es finita. Para fijar  $Z_\psi$  introducimos la condición de renormalización sobre  $\mathcal{G}_R$ , definida como:

$$\lim_{p^2 \rightarrow M^2} \mathcal{G}_R(p) = \frac{i}{\not{p} - M} \quad , \quad (96)$$

de manera poco formal esto quiere decir que cuando nos acercamos mucho al polo del propagador este se comporta como una partícula libre de masa  $M$ .

De esta última condición podemos encontrar el valor de  $Z_\psi$

$$\frac{i}{\not{p} - M} = \frac{i}{Z_\psi [1 - g^2 c_f A(M^2)]\not{p} - Z_\psi [1 + g^2 c_f B(M^2)]m} \quad (97)$$

$$\implies Z_\psi = \frac{1}{1 - g^2 c_f A(M^2)} \quad ; \quad M = Z_m^{-1} m \quad , \quad (98)$$

<sup>20</sup>Estas son aquellas que forman parte de los parámetros de la teoría tales como "mz "g"



donde  $Z_m^{-1}$  esta dada por

$$Z_m^{-1} = \frac{1 + g^2 c_f B(M^2)}{1 - g^2 c_f A(M^2)} \quad , \quad (99)$$

las definiciones anteriores para  $Z_\psi$  y  $Z_m$  juntas nos conducen nuevamente a (94), donde  $M$  cumple con (93). Por último, la constante de acoplamiento renormalizada se define como

$$Z_g g_R = g \quad . \quad (100)$$

El siguiente paso es expresar el propagador renormalizado en términos de la masa y la constante de acoplamiento renormalizados a segundo orden en  $g$  (sin entrar en discusión por ahora supondremos que  $Z_g = Z_\psi^{-1}$ ).

Procederemos a sustituir las constantes de renormalización  $Z_\psi$  y  $Z_m$  en  $\mathcal{G}_R$  asumiendo terminos de orden  $g^2$ ; lo que nos lleva a considerar las siguientes aproximaciones:

$$g^2 = g_R^2 (1 - c_f g^2 A(M^2))^2 \approx g_R^2 \quad (101)$$

$$\implies Z_\psi = \frac{1}{1 - g_R^2 c_f A(M^2)} \approx 1 + g_R^2 c_f A(M^2) \quad (102)$$

$$Z_m = \frac{1 - g_R^2 c_f A(M^2)}{1 + g_R^2 c_f B(M^2)} \approx (1 - g_R^2 c_f A(M^2))(1 - g_R^2 c_f B(M^2)) \quad . \quad (103)$$

Entonces, el propagador renormalizado puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_R(p) &= \\ & i \left\{ Z_\psi [1 - g_R^2 c_f A(p^2)] \not{p} - Z_\psi [1 + g_R^2 c_f B(p^2)] \times \frac{1 - g_R^2 c_f A(M^2)}{1 + g_R^2 c_f B(M^2)} M \right\}^{-1} \\ & = \frac{i}{[1 - g_R^2 c_f (A(p^2) - A(M^2))] \not{p} - [1 + g_R^2 c_f (B(p^2) - B(M^2))] M} \quad , \quad (104) \end{aligned}$$

de donde notamos que ahora el término proporcional a  $\epsilon^{-1}$  en  $B(p^2)$ , que antes era divergente para  $\epsilon \rightarrow 0$  se cancela con el correspondiente al restar  $B(M^2)$ , lo que indica que el propagador  $\mathcal{G}_R(p)$  es finito. Cabe mencionar que en la ecuación anterior del propagador  $A$  y  $B$  dependen tanto de  $p^2$  como de  $m^2$ , pero recordar que podemos sustituir  $m$  por  $M$  en sus argumentos ya que estas difieren por orden de  $g^2$ , la cual ya aparece en el propagador multiplicando a  $A$  y  $B$ .

## 6. Grupo de Renormalización

En el capítulo anterior, se hizo énfasis en expresar las cantidades «desnudas», llámese  $\mathcal{G}(p)$ ,  $g$  y  $m$  en términos de las cantidades renormalizadas, o sea,  $\mathcal{G}_R$ ,  $g_R$  y  $M$ ; sin embargo, estas formulas son validas para un momento arbitrario  $p$ . lo que haremos ahora es implementar las condiciones de renormalización a cualquier escala, para mejorar la descripción perturbativa de las funciones que dependen del momento. En específico, hablamos del siguiente grupo de funciones de  $p$ :

$$\begin{aligned} m &= M + \mathcal{O}(g^2) \\ g^2 &= g_R^2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_R(p) = i^2 \left\{ [1 - g_R^2 c_f(A(p^2) - A(M^2))](-i\not{p}) - [1 + g_R^2 c_f(B(p^2) - B(M^2))]M \right\}^{-1},$$

Notar que el propagador renormalizado se ha escrito en espacio euclideo (es decir,  $\not{p} \rightarrow -i\not{p}$  y multiplicamos por  $i$  al propagador), esto es porque una vez obtenidas las ecuaciones del grupo de renormalización, vamos a integrarlas numéricamente para obtener los resultados en cualquier rango de momentos. Nos vemos motivados, pues, a «generalizar» dichas ecuaciones para cualquier escala de momentos, desde el infrarrojo, cuando  $p \rightarrow 0$ ; hasta el ultravioleta, cuando  $p \rightarrow \infty$ .

Vamos a introducir una escala de renormalización arbitraria la cual vamos a usar para variar en todo el espectro, la llamaremos  $\mu^2$ . Ahora todas nuestras cantidades deben de depender de esta escala y de las cantidades desnudas, es decir:

$$g_R = g_R(\mu, m) \quad (105)$$

$$M = M(\mu, m, g) \quad (106)$$

$$\mathcal{G}_R = \mathcal{G}_R(\mu, p, g) \quad ; \quad (107)$$

entiéndase que  $\mathcal{G}_R$  representa el propagador renormalizado euclideo. Lo que vamos a hacer es tomar la derivada con respecto a  $\mu^2$  y multiplicar por  $\mu^2$ , esto para cada una de estas cantidades renormalizadas, y solo después de calcular la derivada vamos a sustituir por las cantidades renormalizadas. Esto último funciona para las escalas a las que estamos trabajando. Comenzando por la constante de acoplamiento, recordemos que  $Z_g g_R = g$  donde  $Z_g = Z_\psi^{-1} = (1 - g^2 c_f A(m, \mu^2))$ , entonces:

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} g_R &= \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \left( \frac{g}{Z_g} \right) \\ &= \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} (g Z_\psi) = \mu^2 g \frac{\partial}{\partial \mu^2} Z_\psi(m, g, \mu) \\ \implies \mu^2 \frac{dg_R}{d\mu^2} &= \beta_0(M, g_R, \mu) g_R^3 \quad , \end{aligned} \quad (108)$$

donde al tomar la derivada  $m$  y  $g$  se mantienen fijas. Para la masa, se probó en el capítulo anterior que podíamos llegar a la ecuación (98) que relacionaba la masa física con la masa desnuda a través de la función  $Z_m$ ; esto se hizo renormalizando a escala  $M$ , lo mismo se puede hacer pero ahora a escala  $\mu^2$ , y usando la aproximación (103) podemos escribir  $M$  como:

$$M(\mu, m) = m[1 + g^2 c_f (A(\mu^2, m^2) + B(\mu^2, m^2))] \quad , \quad (109)$$

notar que ahora  $M$  no representa la masa física sino que es una función de la escala al igual que  $g_R$ . De igual forma hay que tomar la derivada con respecto a  $\mu^2$  y multiplicar por la misma, dejando  $g$  y  $m$  fijas

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} M(\mu) &= m\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \left\{ g^2 c_f (A(\mu^2, m^2) + B(\mu^2, m^2)) \right\} \\ &= mg^2 c_f \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} (A(\mu^2, m^2) + B(\mu^2, m^2)) = \beta_m(M, \mu) g_R^2 \quad . \quad (110) \end{aligned}$$

Para el propagador es algo similar, ahora la condición de renormalización (95) cambia, y queda definida para un momento arbitrario  $\mu$

$$\frac{1}{Z_\psi(\mu)} \mathcal{G}(p) \Big|_{p^2=\mu^2} = \frac{i^2}{-i\cancel{p} - M(\mu)} = \frac{1}{i\cancel{p} + M(\mu)} \quad , \quad (111)$$

donde  $\mathcal{G}(p)$  es el propagador desnudo euclideo<sup>21</sup>. Similarmente, se procede como antes, teniendo en cuenta que la derivada con respecto de  $\mu$  no afecta al propagador desnudo  $\mathcal{G}(p)$ , ya que este quedó definido para cualquier momento  $p$ , entonces;

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \left( \frac{1}{Z_\psi(\mu)} \mathcal{G}(p) \right) &= - \left( \frac{\mu^2}{Z_\psi(\mu)^2} \frac{dZ_\psi(\mu)}{d\mu^2} \right) \mathcal{G}(p) = \frac{\mathcal{G}(p)}{Z_\psi(\mu)} \left( -\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \ln(Z_\psi) \right) \\ &= - \frac{\mathcal{G}(p)}{Z_\psi(\mu)} \gamma(g_R(\mu), M(\mu), \mu), \quad (112) \end{aligned}$$

donde  $\gamma$  es una función de que depende de las cantidades renormalizadas. Luego, podemos «despejar»  $Z_\psi$

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \ln(Z_\psi) &= \gamma(g_R(\mu), M(\mu), \mu) \quad , \\ d \ln(Z_\mu) &= \frac{\gamma(\mu)}{\mu^2} d\mu^2 \quad , \\ \ln \left( \frac{Z_\psi(\mu)}{Z_\psi(\mu_0)} \right) &= \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{\gamma(\mu')}{\mu'^2} d\mu'^2 \end{aligned}$$

<sup>21</sup>En la sección 4 tanto el propagador como la constante de renormalización  $Z_\psi$  fueron calculadas en espacio de Minkowski, sin embargo, haciendo los cambios correspondientes a la rotación de Wick al propagador, resulta que la constante no cambia siempre y cuando se definan A y B como funciones reales.

$$\implies \frac{Z_\psi(\mu)}{Z_\psi(\mu_0)} = e^{\int_{\mu_0}^{\mu^2} \frac{\gamma(\mu')}{\mu'^2} d\mu'^2} , \quad (113)$$

de donde podemos fijar  $Z_\psi(\mu_0)$  según la condición de renormalización, o sea, la ecuación (111) con  $\mu_0$  en lugar de  $\mu$ . El propagador renormalizado «generalizado» es entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_R(p, \mu) &= \frac{1}{Z_\psi(\mu)} \mathcal{G}(p) \\ &= \left( \frac{Z_\psi(p)}{Z_\psi(\mu)} \right) \left( \frac{\mathcal{G}(p)}{Z_\psi(p)} \right) = \frac{1}{i\not{p} + M(p)} e^{\int_{\mu^2}^{p^2} \frac{d\mu'^2}{\mu'^2} \gamma(g_R(\mu'), M(\mu'), \mu')} . \end{aligned} \quad (114)$$

Ahora, una explicación mas detallada de como se llega a la ecuación anterior utilizando el hecho de cambiar la escala de renormalización es como sigue: Las cantidades desnudas de la teoría no dependen de la escala  $\mu^2$ , es por esto que al tomar la derivada de la ecuación (112),  $\mathcal{G}(p)$  no depende de la escala, pero según la condición de renormalización que relaciona el propagador desnudo con el propagador renormalizado tenemos

$$\mathcal{G}(p) = Z_\psi(\mu) \mathcal{G}_R(p, \mu) = Z_\psi(\mu_0) \mathcal{G}_R(p, \mu_0) , \quad (115)$$

de donde podemos ver que existe una relación entre propagadores renormalizados a diferentes escalas. Tomemos por ejemplo las ecuaciones (108) y (110); ambas relacionan las funciones  $g_R$  y  $M$  respectivamente a través de funciones que dependen de la escala, estas son  $\beta_0$  y  $\beta_m$ . En otras palabras, al resolver las ecuaciones diferenciales para la constante de acoplamiento y la masa podemos encontrar  $g_R$  y  $M$ , que en realidad dependen de la escala de renormalización que hemos fijado (la cual llamamos  $\mu_0$  en (113) pero después renombramos a  $\mu$ ), entonces tenemos una forma de relacionar  $g_R$  y  $M$  a diferentes escalas de renormalización, es este cambio de escala al que se refiere el grupo de renormalización, de donde usando (113) llegamos a que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_R(p, \mu) &= \frac{Z_\psi(\mu_0)}{Z_\psi(\mu)} \mathcal{G}_R(p, \mu_0) \\ \implies \mathcal{G}_R(p, \mu) &= \mathcal{G}_R(p, \mu_0) e^{\int_{\mu^2}^{\mu_0^2} \frac{\gamma(\mu')}{\mu'^2} d\mu'^2} , \end{aligned} \quad (116)$$

luego, si hacemos  $\mu_0 \mapsto p$  al propagador renormalizado de la derecha en la ecuación anterior obtenemos que este cumple la condición de renormalización, entonces  $G_R(p, p) = (i\not{p} + M(p))^{-1}$  y de nuevo obtenemos la ecuación (114).

## 6.1. Generación Dinámica de la Masa

En el capítulo anterior se encontró que para cada una de las cantidades renormalizadas existe una correspondiente ecuación diferencial en donde variamos la escala de renormalización la que definimos como  $\mu^2$ . Estas ecuaciones están dadas por (108) para la constante de acoplamiento  $g_R$ , (110) para la masa  $M$  y por (114) para el propagador  $\mathcal{G}_R$ .

Para este trabajo solo se tomará en cuenta la ecuación (110) y procederemos a calcular los valores de  $M$ , notar, que  $M = M(m_g, g_R)$  por lo que vamos a fijar el valor de  $g_R$  y  $m_g$ . Después, para obtener una expresión válida en todo el rango de momentos de  $\mu$  tenemos que considerar la expansión en series de (95) tanto para momentos «pequeños» como para momentos «grandes»; entonces, queremos analizar el comportamiento de la función<sup>22</sup>:

$$t \frac{\partial}{\partial t} M(t, v) = mc_f g^2 t \frac{\partial}{\partial t} (A(t, v) + B(t, v)) = \beta_m(M, t) g_R^2 \quad , \quad (117)$$

donde se ha usado la expresión en términos de variables adimensionales.<sup>23</sup>

Tomando el primer factor de (117) y haciendo la expansión a primer orden para  $t \ll 1$ ; lo cual se conoce como el régimen infrarrojo, se tiene<sup>24</sup>:

$$A_{IR} = t \frac{\partial}{\partial t} A(t, v) \Big|_{t \ll 1} = \frac{t[(v-1)(7v-1) + \ln(v) - v(4+3v)\ln(v)]}{32\pi^2(v-1)^4} + \mathcal{O}(t^2) \quad , \quad (118)$$

de igual forma para B se tiene que

$$B_{IR} = t \frac{\partial}{\partial t} B(t, v) \Big|_{t \ll 1} = \frac{3t[1 + 2v \ln(v) - v^2]}{32\pi^2(v-1)^3} + \mathcal{O}(t^2) \quad ; \quad (119)$$

en resumen, cuando  $t \ll 1$  la función beta en (117) debe ser sustituida por

$$Mc_f g_R^2 (A_{IR}(t, v) + B_{IR}(t, v)) \quad . \quad (120)$$

<sup>22</sup>En las ecuaciones que siguen la dependencia de la masa  $m_g$  está presente en las funciones M, A y B; aunque esta no se indique explícitamente.

<sup>23</sup>Ver apéndice A

<sup>24</sup>Se usó Mathematica para obtener las expansiones.

La ecuación anterior representa el comportamiento de la derivada de la masa  $M(t, v)$  cuando el momento toma valores muy «pequeños» (que es lo mismo que decir que  $t \ll 1$ ), ahora, nos interesa saber el comportamiento cuando  $t \gg 1$ , esto se conoce como el régimen ultravioleta. Tomando el primer miembro de la parte derecha de (117) y haciendo la expansión a tercer orden en potencias de  $1/t$  se tiene:

$$\begin{aligned}
A_{UV} &= t \frac{\partial}{\partial t} A(t, v) \Big|_{t \gg 1} \\
&= \frac{1}{384\pi^2 t^3} \{ 54t^2 - 8t(5+9v) + 9(4v(4+5v) - 3) - 12(t(4+3t) - 6tv + 18v^2) \ln(t) + \\
&\quad 108v^2 \ln(v) \} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^4}\right), \quad (121)
\end{aligned}$$

de igual forma para B

$$\begin{aligned}
B_{UV} &= t \frac{\partial}{\partial t} B(t, v) \Big|_{t \gg 1} \\
&= \frac{-3}{32\pi^2 t^3} \{ 2t^3 - 2t(v-1)^2 + (1+v)(1+v(12+v)) - 2(t^2(1+v) - 4tv + 6v(1+v)) \ln(t) \\
&\quad + 2v(3 - 2t + t^2 + 3v) \ln(v) \} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^4}\right), \quad (122)
\end{aligned}$$

entonces, cuando  $t \gg 1$  la función beta de (117) se cambia por

$$M c_f g_R^2 (A_{UV}(t, v) + B_{UV}(t, v)) \quad . \quad (123)$$

El lado derecho de (117), y las ecuaciones (120) y (123) representan la derivada de la masa para todo valor de  $t$ , o sea, para cualquier momento. Lo que sigue es integrar numéricamente estas ecuaciones.

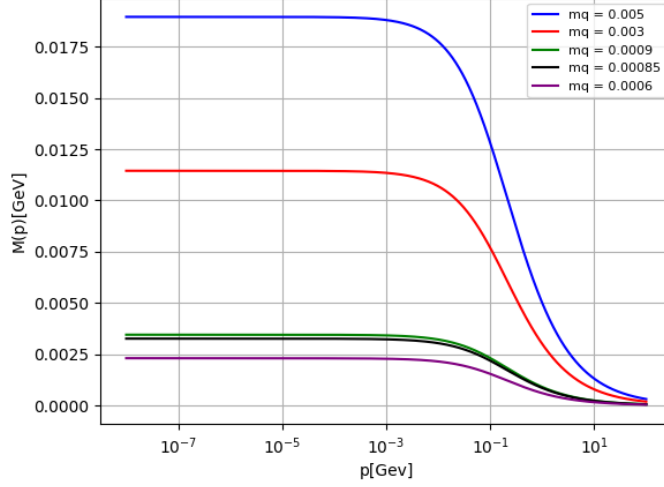


Figura 2: Función de masa con parámetros  $m_g = 0.3$  GeV,  $g = 5$  y diferentes valores iniciales de  $m_q$  medidos en GeV.

La figura 2 muestra la solución a la ecuación diferencial para la función de masa, para esto se hizo  $t = e^x/m_g^2$ , de esta forma;  $t \frac{d}{dt} = \frac{d}{dx}$  y con valores fijos de  $m_g$  y  $g$ . Notar que  $(A_{IF} + B_{IF}) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow 0$ , es por esto que cuando  $t \ll 1$  se tiene  $t \frac{d}{dt} M(t, v) = \frac{d}{dx} M(x, v) \approx 0$ , en consecuencia, para valores «pequeños» de  $t$  la masa se comporta como una función constante.

Por otro lado, en el régimen ultravioleta vemos que  $A_{UV} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , mientras que  $B_{UV} \rightarrow -3/(4\pi)^2$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , es decir

$$t \frac{\partial}{\partial t} M(t, v) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{-3Mc_f g^2}{16\pi^2} \quad , \quad (124)$$

para este caso vamos a analizar dos comportamientos diferentes, uno usando la constante de acoplamiento deslizante y otro con la constante  $g$  fija. La constante de acoplamiento «deslizante» está definida por

$$\frac{g^2}{16\pi^2} = \frac{\alpha}{\ln(\mu^2/\Lambda^2)} = \frac{\alpha}{\ln(tm_g^2/\Lambda^2)} \quad , \quad (125)$$

donde  $\alpha$  es una constante numérica. Integrando en este régimen por variables separables tenemos

$$\int_{M_0}^M \frac{dM'}{M'} = -3c_f \alpha \int_{t_0}^t \frac{dt'}{t' \ln(t'm_g^2/\Lambda^2)} \quad , \quad (126)$$

haciendo el cambio de variable  $r' = \ln(t'm_g^2/\Lambda^2)$  tenemos que  $dr' = dt'/t'$

$$\Rightarrow \int_{M_0}^M \frac{dM'}{M'} = -3c_f \alpha \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'} \quad , \quad (127)$$

$$\implies \ln\left(\frac{M}{M_0}\right) = -3c_f\alpha \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-3c_f\alpha}, \quad (128)$$

de aquí podemos despejar  $M$

$$M = M_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{3c_f\alpha}, \quad (129)$$

donde se observa que  $M \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , pero recordando que  $r = \ln(t) + \ln(m_g^2/\Lambda^2)$ , entonces la función de masa decae cuando  $t \rightarrow \infty$  como una potencia del logaritmo de  $t$ . De manera análoga a los cálculos hechos arriba para la constante de acoplamiento deslizante veamos el caso cuando  $g$  es constante, entonces, de la ecuación (124) llamemos  $a = 3c_f/16\pi^2$  y aplicando separación de variables nos queda

$$\begin{aligned} \int_{M_0}^M \frac{dM'}{M'} &= \int_{t_0}^t \frac{-ag^2 dt}{t}, \\ \implies \ln\left(\frac{M}{M_0}\right) &= -ag^2 \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) = \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-ag^2}, \\ \implies M &= M_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-ag^2} = M_0 \left(\frac{t_0}{t}\right)^{ag^2}, \end{aligned} \quad (130)$$

donde notamos que  $M \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow 0$  como una potencia de  $t$  a diferencia de (129) donde el comportamiento era logarítmico. La razón principal de que hayamos introducido (125) es porque se ha observado que el comportamiento de la función de masa para momentos grandes decae como una potencia del logaritmo de  $t$  (ecuación (129)) sin embargo, recordemos que en este trabajo se tomó como fijo el valor de  $g$ , lo que nos lleva a que en nuestros resultados la función de masa decrece como una potencia de  $t$ , o sea, nosotros obtenemos un comportamiento como en (130) cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Para diferentes valores de la masa del gluón tenemos las siguientes soluciones dejando  $g$  y  $m_q$  fijos; para las gráficas de este capítulo se escogió la escala de renormalización  $\mu_0 = 1$  GeV.

La figura 3 muestra la función de masa para diferentes valores de  $m_g$  los cuales permanecieron «congelados» en este trabajo, es decir, la correspondiente ecuación diferencial para la masa del gluón no se resolvió, pero es importante mencionar que su efecto es importante para la teoría y por tanto para el comportamiento de la masa.



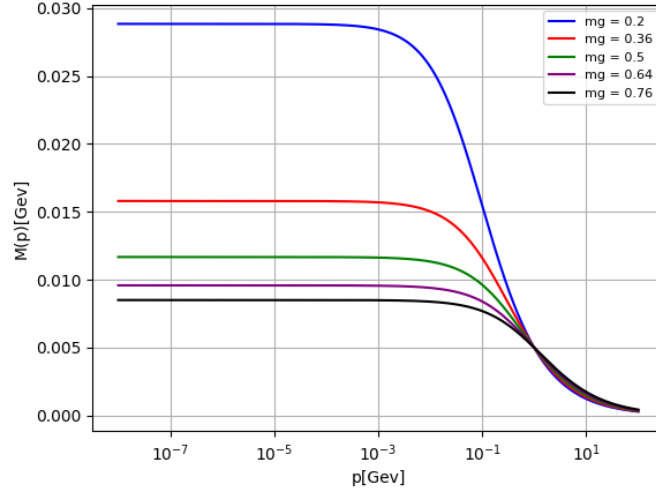


Figura 3: Función de masa con diferentes valores de  $m_g$  medidos en GeV.  
 $m_q = 0.005$  GeV y  $g = 5$

La figura 4 muestra el comportamiento cuando  $m_q$  y  $m_g$  son fijas y variamos la constante de acoplamiento  $g$ .

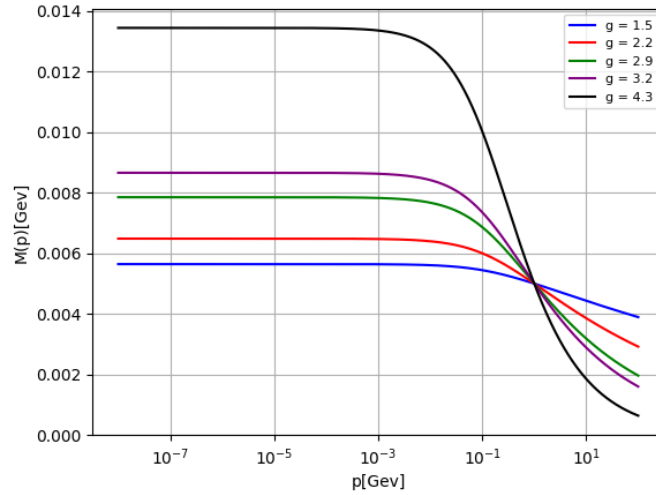


Figura 4: Función de masa con  $m_g = 0.3$  GeV y  $m_q = 0.005$  GeV.

## 7. Conclusiones

En este trabajo se analizó el proceso dispersivo mostrado en el diagrama de Feynman de la figura 1, el resultado de dicho diagrama quedó en términos de las cantidades desnudas  $m, g$  y  $m_g$ , luego, a fin de encontrar una solución para la masa que fuera válida en un amplio rango de momentos se generalizó este resultado, de donde obtuvimos las ecuaciones diferenciales para la constante de acoplamiento y la masa del fermión, dicho sea de pasó estas son dos de las ecuaciones de Callan-Symanzik aplicadas a una extensión masiva en QCD. En otras palabras, se resolvió el problema de Cauchy

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} M = \beta_m(M, \mu) g_R^2$$

$$M(\mu_0) = m \quad ,$$

para diferentes valores iniciales de  $m$  así como para valores aleatorios de la constante de acoplamiento  $g$  y de la masa del gluón  $m_g$ . La función beta, dada por (110) se le tuvo que calcular la expansión en serie ultravioleta ( $\mu \rightarrow \infty$ ) é infrarroja ( $\mu \rightarrow 0$ ), esto con el propósito de integrar la ecuación para un rango amplio de momentos, lo cual se hace en el capítulo 6.1.

Un caso de particular interés es el llamado límite quirral, aquel en el que la condición inicial se fija en valores muy pequeños (esto es tomar el límite  $m \rightarrow 0$ ). Resulta, que bajo esta condición inicial no hay generación de masa bajo ninguna escala de renormalización! La razón de esto es sencilla, pues como se vio al inicio del subcapítulo (6.1)  $\beta_m \propto m_q$ , por si no fuera poco,  $\beta$  depende de  $v$  la cual, también toma valor igual a cero cuando  $m_q = 0$ . Aunque en principio no se calculó la función  $g_R(\mu)$ , se podría pensar que esta provoca que de alguna manera tuviera un valor divergente en el límite quirral que resulte en una «generación» para la masa aún multiplicando por  $m_q$ . La realidad es que esto no pasa, aún si conociéramos la función para la constante de acoplamiento no habría generación de masa en este límite.

Cabe aclarar que esto no pasa en la naturaleza, pues si existe una generación de masa en este límite bajo otros formalismos.

La figura 5 muestra una gráfica de puntos donde el eje «y» representa valores de la masa  $M(\mu = 0)$  (medida en GeV) registrados para diferentes valores de  $m_q$  en «x», es decir, se toma el valor mínimo de  $M$  para alguna masa inicial. Así, vemos que a medida que  $m_q$  toma valores mas pequeños el valor de la masa generada se acerca a cero.

El cálculo de la ecuación de Callan-Symanzik para la masa del fermión bajo este formalismo no resulta ser del todo compatible con los resultados obtenidos en mallas (lattice), ver [6], esto se debe a que en este trabajo no se integro toda la teoría. Para tener una descripción que sea consistente con los resultados en mallas habría que resolver todas las ecuaciones diferenciales de las cantidades desnudas, es decir, no solo dejar «correr» la función de masa del fermión, también, incluir la constante de acoplamiento, la masa del gluón y el propagador

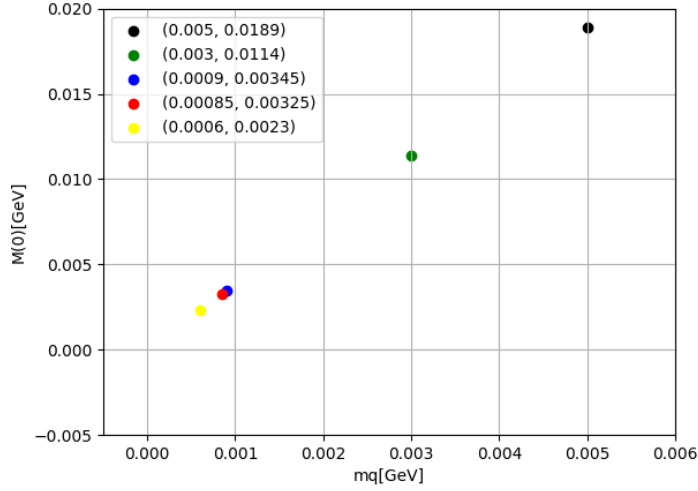


Figura 5: Dispersión de puntos de valores  $M(\mu = 0)$  vs  $m_q$ .

renormalizado; recordemos que, al final del capítulo del grupo de renormalización, la ecuación (114) representa el propagador en términos de las cantidades renormalizadas. En otras palabras, una vez obtenidos los resultados de la función de masa, la constante de acoplamiento y la masa del gluón estos se sustituyen en el propagador «generalizado» a manera de obtener una versión mejorada del propagador, lo que lleva a más resultados igualmente interesantes.

## A. Apéndice A

### A.1. Cálculo de las derivadas de las funciones desnudas A y B:

Cuando hablamos anteriormente del grupo de renormalización, quedó pendiente el calculo de las derivadas de las ecuaciones (108) y (110), en particular, será útil conocer las derivadas de las funciones desnudas  $A$  y  $B$ . Empezando por  $A = A(\mu^2, m_g, m_q)$ , nos interesa conocer

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} A(\mu^2, m_g^2, m_q^2) \quad (\text{A.1})$$

donde:

$$\begin{aligned} A(\mu^2, m_g, m_q) = & \\ \frac{1}{32\pi^2 m_g^2 \mu^4} \left\{ m_g^2 \mu^2 (m_q^2 + \mu^2 - 2m_g^2) - [3m_g^4 (\mu^2 - m_q^2) + 2m_g^6 + (m_q^2 + \mu^2)^3] \ln(m_g/m_q) \right. & \\ + (m_g^2 (\mu^2 - m_q^2) - (m_q^2 + \mu^2)^2 + 2m_g^4) r^2 \tanh^{-1} \left( \frac{r^2}{\mu^2 + m_g^2 + m_q^2} \right) & \\ \left. + (m_q^2 + \mu^2)^3 \ln \left( \frac{\mu^2}{m_q^2} + 1 \right) \right\}. & \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

En lugar de trabajar con las masas y la derivada de  $\mu^2$  vamos a trabajar con las variables adimensionales  $v$  y  $t$ , definidas como  $m_q^2/m_g^2$  y  $\mu^2/m_g^2$  respectivamente; según la ecuación (88) podemos expresar  $A$  como

$$\begin{aligned} A(t, v) = \frac{1}{32\pi^2 t^2} \left\{ t(v + t - 2) + [3(t - v) + (v + t)^3 + 2] \ln(\sqrt{v}) \right. & \\ + s((t - v) + (v + t)^2 + 2) \tanh^{-1} \left( \frac{s}{t + v + 1} \right) + (v + t)^3 \ln \left( \frac{t}{v} + 1 \right) \left. \right\}, & \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

donde  $s = \sqrt{(t + v + 1)^2 - 4v}$ . Luego, La derivada  $\mu^2 \frac{d}{d\mu^2}$  pasa a ser

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} = \mu^2 \frac{dt}{d\mu^2} \frac{d}{dt} = \frac{\mu^2}{m_g^2} \frac{d}{dt} = t \frac{d}{dt} \quad , \quad (\text{A.4})$$

de donde tenemos

$$t \frac{d}{dt} A(t, v) = \frac{1}{32\pi^2} \cdot t \frac{\partial \{\dots\}}{\partial t} \frac{1}{t^2} \quad , \quad (\text{A.5})$$

donde,  $\{\dots\}$  representa el factor entre llaves de (A.2) en terminos de  $t$  y  $v$ . Entonces, nos queda:

$$\frac{1}{32\pi^2} t \left\{ \frac{1}{t^2} \frac{\partial}{\partial t} \{\dots\} + \{\dots\} \frac{-2}{t^3} \right\} = \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \{\dots\} - \frac{2}{t^2} \{\dots\} \right\}, \quad (\text{A.6})$$

para conocer el primer factor de (A.6) será útil conocer algunas derivadas tales como:

$$\frac{d}{dx} \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad , \quad (\text{a.1})$$

$$\frac{d}{dt} s = \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{(t+v+1)^2 - 4v} = \frac{t+v+1}{s} \quad , \quad (\text{a.2})$$

$$\implies \frac{\partial}{\partial t} \tanh^{-1} \left( \frac{s}{t+v+1} \right) = \frac{1}{s} \quad . \quad (\text{a.3})$$

Usando las relaciones anteriores llegamos a

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \{ \dots \} \\ &= \left\{ 3t + 3[1 + (t+v)^2] \ln(\sqrt{v}) + (v+t)^2 [3 \ln((t/v) + 2)] \right. \\ & \left. + s[(1 + 2(v+t))s^2 + ((t-v) + (v+t)^2 + 2)(t+v+1)] \tanh^{-1} \left( \frac{s}{t+v+1} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

sustituyendo en (A.6) y haciendo las simplificaciones obtenemos el resultado:

$$\begin{aligned} & t \frac{d}{dt} A(t, v) \\ &= \frac{1}{32\pi^2 t^2 s} \left\{ [-t^4 - t^3(1+v) + 2(v-1)^3(2+v) + t(5v^3 + v^2 + v - 7) \right. \\ & \quad \left. + t^2(3 - v(2 + 3v))] \tanh^{-1} \left( \frac{s}{t+v+1} \right) \right. \\ & \left. + \frac{s}{2} [2t(4+t-2v) - (4+3t+t^3 - 6v - 3tv^2 - 2v^3) \ln(v) + 2(t-2v)(t+v)^2 \ln(t+v)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Se procederá de forma similar para  $B$ . En términos de  $t$  y  $v$  se escribe como

$$\begin{aligned} & B(t, v) \\ &= \frac{-3}{(4\pi)^2} \left\{ \gamma_e - \frac{2}{\epsilon} - \frac{4}{3} + \ln \left( \frac{m_q m_g}{4\pi\kappa^2} \right) + \left( \frac{1-v}{t} \right) \ln(\sqrt{v}) + \frac{s}{t} \tanh^{-1} \left( \frac{s}{t+v+1} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

usando las mismas formulas se puede llegar a que

$$t \frac{d}{dt} B(t, v) = \frac{3}{32\pi^2 st} \left\{ [2((v-1)^2 + t(1+v))] \tanh^{-1} \left( \frac{s}{t+v+1} \right) - s(2t + (v-1) \ln(v)) \right\}. \quad (\text{A.10})$$

## Referencias

- [1] Tesis. JUAN PABLO GUTIÉRREZ M. Y AXEL WEBER. *Generación Dinámica de masa y el grupo de renormalización*. (2017). FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS, UMSNH.
- [2] HALZEN F., ALAN D.M. , (1984). *Quarks and leptons; an introductory course in modern particle physics*. USA. JOHN WILEY AND SONS.
- [3] SAKURAI, J.J. (1994). *Modern Quantum Mechanics*. HAWAI. SAN FU TUAN.
- [4] PESKIN M, SHROOEDER D., (1995). *An Introduction to Quantum Field Theory*. USA. PERSEUS BOOKS.
- [5] ARFKEN B, WEBER H. (2005). *Mathematical Methods for Physicist*. USA. SERVIER ACADEMIC PRESS.
- [6] PATRICK O.B., URS M. HELLER, DEREK B. LEINWEBER., MARIA B. PARAPPILLY., ANTHONY G. WILLIAMS., JIANBO ZHANG. PHYS. REV.D71, 54507(2005).
- [7] FEYNMAN R., (2016). *Lectures on physics*. USA. PEARSONS.
- [8] COHEN C., DUI B., LALO F., (1997). *Quantum mechanics*. USA. JOHN WILEY AND SONS.
- [9] GONZÁLES VALDÉS J., (2009). *Tres metodos para obtener el propagador de Feynman en la mecánica cuántica (Tesis de pregrado)*. UNIVERSIDAD MICHOACÁNA DE SÁN NICOLÁS DE HIDALGO. MI-CHOACÁN MÉXICO.
- [10] V. STRUMINSKY, (2016). *Magnetic moments of barions in the quark model, JINR-Preprint P-1939, Dubna, Submitted on January 7, 1995*.