UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS, UMSNH
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM

DOMINACIÓN EN GRÁFICAS

TESINA

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ERIC PAULÍ PÉREZ CONTRERAS

DIRECTOR DE TESINA:

DRA. MARÍA LUISA PÉREZ SEGUÍ, UMSNH

MORELIA, MICHOACÁN, DICIEMBRE DE 2015.

Contenidos.

Resumen.

Dada cualquier gráfica finita $G = (V, A)$, un conjunto dominador de G es un subconjunto $D \subseteq V$ tal que todo vétrice $v \in V$ que no esté en D es adyacente a algún vértice en D. El número de dominación $\gamma(G)$ de una gráfica G es la menor cardinalidad de un conjunto dominador de G. Dada una gráfica G y un entero positivo k, el problema de decidir si G tiene un conjunto dominador de tamaño $\leq k$ es NP-completo. En este trabajo vamos a establecer algunas cotas para el número de dominación $\gamma(G)$ en términos del orden, tamaño, grado y otros parámetros y daremos varios ejemplos y problemas interesantes que motivan el estudio de este problema.

Palabras clave: Dominación, número de dominación, conjunto dominador, gráficas, grafos.

Abstract

Given any finite graph $G = (V, A)$, a dominating set of G is a subset $D \subseteq V$ such as every vertex $v \in V$ not in D is adjacent to some vertex in D. The domination number $\gamma(G)$ of a graph G is the minimum cardinality of a dominating set of G. Given a graph G and a positive integer k, the problem about deciding if G has a dominating set of size $\leq k$ is NP-complete. In this paper we will establish some bounds for the domination number $\gamma(G)$ in terms of order, size, degree and other parameters and we will give some examples and interesting problems that motivate the study of this problem.

Introducción.

Las gráficas han sido objeto de mucho estudio en los últimos años debido a que arrojan información muy útil desde el punto de vista combinatorio. El reciente desarrollo de las ciencias computacionales, la ingeniería eléctrica y en sistemas, la investigación de operaciones, entre otros, ha hecho crecer el interes por las aplicaciones de la teoría de gráficas.

Quizás el área de la teoría de gráficas de más rápido crecimiento es la teoría de dominación debido a que la gran mayoría de los resultados ahí se han obtenido muy recientemente y a la gran variedad de aplicaciones en diversas áreas como álgebra lineal y optimización, diseño y análisis de redes de comunicación, ciencias sociales, complejidad computacional y diseño de algoritmos.

La teoría de dominación fué motivada por los algunos problemas de tableros de ajedrez, que han sido estudiados desde hace mucho tiempo. Un problema que ha motivado el estudio de la dominación en gráficas consiste en encontrar el menor número de cierto tipo de piezas de ajedrez que pueden colocarse en el tablero de modo que todo cuadrado del tablero pueda ser atacado por alguna de las piezas en a lo más un movimiento, esto es, que todo cuadrado sea accesible por alguna de las piezas colocadas en a lo más un movimiento. A veces pueden pedirse algunas condiciones adicionales como por ejemplo que no se ataquen unas piezas con otras. Un caso muy estudiado es el siguiente problema planteado por C. F. de Jaenisch (1862): ¿Cuál es el mínimo número de reinas que pueden colocarse en un tablero de $n \times n$ de manera que todo cuadrado del tablero sea atacado por al menos una reina? Este número se llama *número de dominación* $\gamma(n)$ del tablero.

De este problema puede abstraerse la información combinatoria para simplificar su estudio. La manera de hacerlo es representando los movimientos de las piezas de ajedrez mediante una *gráfica*. En general una gráfica es una pareja ordenada $G = (V(G), A(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito no vacío y $A(G)$ es un conjunto formado por algunas parejas no ordenadas de distintos elementos de $V(G)$. Los elementos de $V(G)$ se llaman *vértices* y los de $A(G)$ se llaman *aristas*. Para el problema podemos pensar en una gráfica $G = (V(G), A(G))$ cuyo conjunto de vértices es el conjunto de celdas del tablero de ajedrez y considerando una arista entre dos celdas siempre que una pieza colocada en una de las celdas pueda llegar en un movimiento a la otra celda. De este modo, el problema se traduce en encontrar el menor subconjunto D de $V(G)$ tal que cualquier vértice de G que no esté en D esté conectado por medio de una arista con algún elemento de D. Un conjunto D con esta propiedad se llama *conjunto dominador*. Una gráfica puede tener varios conjuntos dominadores. El menor tamaño de uno de estos conjuntos se conoce como *número de* *dominación* de la gráfica G.

En general, el problema de dominación de una gráfica puede llegar a ser muy difícil en el sentido de que no existe un algoritmo que permita encontrar un conjunto dominador en un número razonable de pasos. En términos de la teoría de complejidad computacional se dice que es un problema NP-completo. Sin embargo, se ha hecho mucho trabajo en las décadas recientes para establecer resultados útiles en cierto tipo de gráficas. Estos esfuerzos han permitido establecer varias cotas superiores e inferiores para el número de dominación en gráficas que cumplen ciertas propiedaddes, estudiar la relación entre la dominación de una gráfica y otros parámetros como su *número de independencia*, siendo este el mayor tamaño de un subconjunto de V cuyos elementos no están conectados por ninguna arista; entre otros hallazgos que han resultado de interés. En las primeras secciones de este trabajo establecemos algunos resultados generales, ejemplos que ilustran lo complejo que puede llegar a ser el problema, daremos algunas cotas para el número de dominación en términos del número de vértices de G, su número de aristas, su grado, diámetro, empaque, etc. que son números que iremos definiendo. En las secciones 7 y 8 ilustramos la relación del número de dominación con el número de independencia de una gráfica, algunas condiciones adicionales que pueden pedirse a los conjuntos dominadores y en la sección 9 hablamos de una conjetura no resuelta de la teoría de dominación.

1 Preliminares.

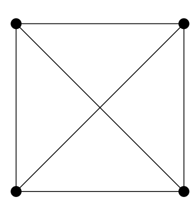
En este trabajo G es una gráfica simple y finita con n vértices. Denotamos por $V = V(G)$ al conjunto de vértices y por $A = A(G)$ al conjunto de aristas de G, las cuales son parejas no ordenadas de elementos distintos de V. En este caso escribimos $G = (V, A)$. Si $a = \{u, v\} \in A$, escribimos simplemente $a = uv$ y decimos que u y v son *extremos* de a, ó que a *incide* en u y en v. También decimos que u y v son *vecinos*, o que son *adyacentes*.

El *orden* de G es $|V| = n$. El *tamaño* de G es $|A| = m$. Para cada $v \in V$, $\delta(v)$ es el *grado* de v; en otras palabras $\delta(v)$ es el número de aristas que inciden en v. El *grado mínimo* de G, $\delta(G)$, es el menor grado de un vértice de G y, de manera análoga, $\Delta(G)$ es el *grado máximo* de G. La *subgráfica inducida* por un subconjunto de vértices $V' \subseteq V$ se denota por $G[V']$ o por $\langle V' \rangle$, y es la gráfica que tiene a V' como conjunto de vértices y a $A' = \{uv : u, v \in V'\} \cap A$ como conjunto de aristas. Una *subgráfica generadora* de G es aquella que tiene todos los vértices G. Para $v \in V$, la *vecindad abierta* $N(v)$ de v es el conjunto $N(v) = \{u \in V : uv \in A\}$, y la *vecindad cerrada* de v, $N[v]$ es $N(v) \cup \{v\}$. Para $S \subseteq V$, $N(S) = \bigcup_{s \in S} N(s)$, $N[S] = \bigcup_{s \in S} N[s]$ y $V \backslash S = \{v \in V : v \notin S\}$. Si $v \in V$, la subgráfica de G que tiene por conjunto de vértices a $V \backslash \{v\}$ y por conjunto de aristas a $A \backslash \{a \in A : v \in a\}$ se denota por $G - v$. Si G y H son gráficas, $G + H$ es la gráfica cuyo conjunto de vértices es la unión ajena $V(G) \dot{\cup} V(H)$ y aristas $A(G) \cup A(H) \cup \{gh : g \in V(G), h \in V(H)\}$.

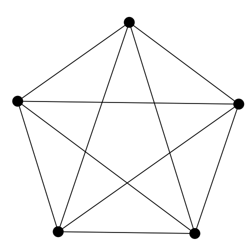
Dados $u, v \in V$, un *camino* C de *longitud* k entre u y v (o *uv-camino*) es una sucesión de vértices alternados con aristas $C = (u = u_0, a_1, u_1, a_2, \ldots, u_{k-1}, a_k, u_k = v)$ con $a_i = u_{i-1}u_i$. También se puede escribir $C = (u_0, u_1, \ldots, u_k)$. El camino es *cerrado* si $u_0 = u_k$, y si no, es *abierto*. El camino es *trayectoria* si no repite vértices; es *paseo* si no repite aristas y es *ciclo* si no se repiten aristas y los únicos vértices que repite son el primero y el último. Para cada $u, v \in V$, $d(u, v) = \min\{l(T) : T \text{ es } uv\text{−trayectoria}\}$. El *diámetro* de G es $diam(G) = \max\{d(u, v) : u, v \in V\}$.

Decimos que una gráfica G es *conexa* si dados $u, v \in V(G)$, existe una uv−trayectoria. De otro modo, G es *disconexa*.

Denotamos por K_n a la *gráfica completa* con n vértices.



K_4



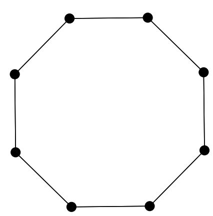
K_5

Dada una gráfica G, definimos la gráfica *complemento* de G como la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(\bar{G}) = V(G) = V$ y $uv \in A(\bar{G})$ si, y sólo si $uv \notin A(G)$. El complemento de G se denota $\bar{G}$.

La *trayectoria* de longitud n la denotamos por T_n. Tiene $n+1$ vértices y n aristas.

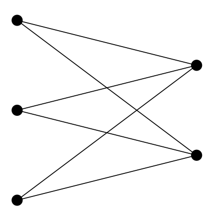
T_6

El *ciclo* con n vértices es C_n.



C_8

Una gráfica G es *bipartita* si V se puede partir en dos subconjuntos ajenos y no vacíos X y Y, de modo que toda arista de G tenga un extremo en X y otro en Y. En este caso escribimos $G = (X, Y)$. Para m y n naturales, $K_{m,n}$ es la *gráfica bipartita completa* en la que los subconjuntos X y Y que forman la partición tienen tamaño m y n, respectivamente, y todo vértice en X es adyacente a todos los vértices en Y.



$K_{3,2}$

1.1 Proposición. Una gráfica es bipartita si, y sólo si, no tiene ciclos de longitud impar.

Demostración. Si G es gráfica bipartita, digamos $G = (X, Y)$, podemos pensar que los vértices de X están coloreados de rojo y los de Y de azul. Entonces toda arista en G tiene sus extremos de distinto color. El que hubiera un ciclo de longitud impar implicaría que hay arista con los extremos de un mismo color, lo cual no es posible. Recíprocamente, si G no tiene ciclos de longitud impar, podemos suponer sin pérdida de generalidad que es conexa (si no lo es, trabajamos con cada componente). Tomemos un vértice $v \in V$ y pintémoslo de azul. Pintemos los vecinos de v de rojo. A los vecinos de cada vértice rojo los pintamos de azul y así sucesivamente. El que no haya ciclos de longitud impar nos dice que si un vértice ya está pintado de un color no trataremos de pintarlo con el otro color. La coloración de los vértices nos da la partición deseada. ■

Un *árbol* es una gráfica conexa y sin ciclos. Notemos que todo árbol no trivial es gráfica bipartita.

1.2 Proposición. Toda gráfica conexa tiene árbol generador.

Demostración. Hacemos inducción sobre el número de ciclos de la gráfica. ■

2 Conjuntos dominadores y número de dominación.

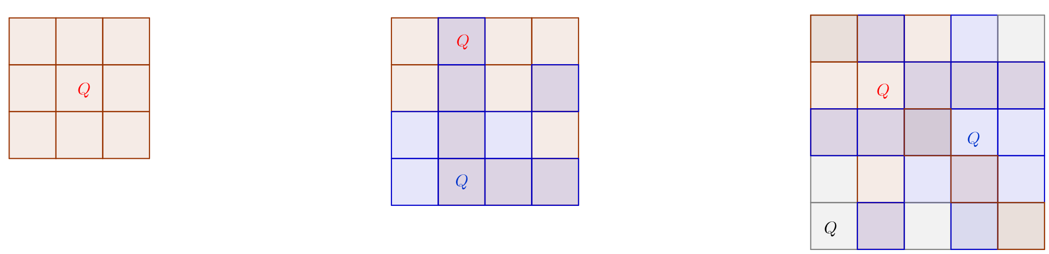
Retomaremos el problema del tablero de ajedrez que planteamos en la introducción para entrar en la teoría de dominación. Queremos colocar algunas reinas en un tablero de ajedrez de modo que todo cuadrado del tablero sea *atacado* por una de éstas reinas, es decir, que todo cuadrado del tablero sea accesible, en a lo más un movimiento, por una de las reinas previamente colocadas. El problema de las reinas es:

¿Cuál es el mínimo número de reinas que pueden colocarse en un tablero de $n \times n$ de manera que todo cuadrado del tablero sea atacado por al menos una reina?

La respuesta a la pregunta anterior es el *número de dominación* del tablero y se denota $\gamma(n)$. Actualmente se conoce $\gamma(n)$ para un número finito de enteros n y se han establecido varias cotas superiores e inferiores.

Un tablero de $n \times n$ es una cuadrícula de n^2 celdas cuadradas acomodadas en n renglones y n columnas. Una reina es una pieza que se coloca en una de las celdas y puede avanzar cualquier número de cuadrados en dirección horizontal, vertical o diagonal. Un cuadrado al que una reina puede moverse se dice que es *atacado* o *cubierto* por esa reina.

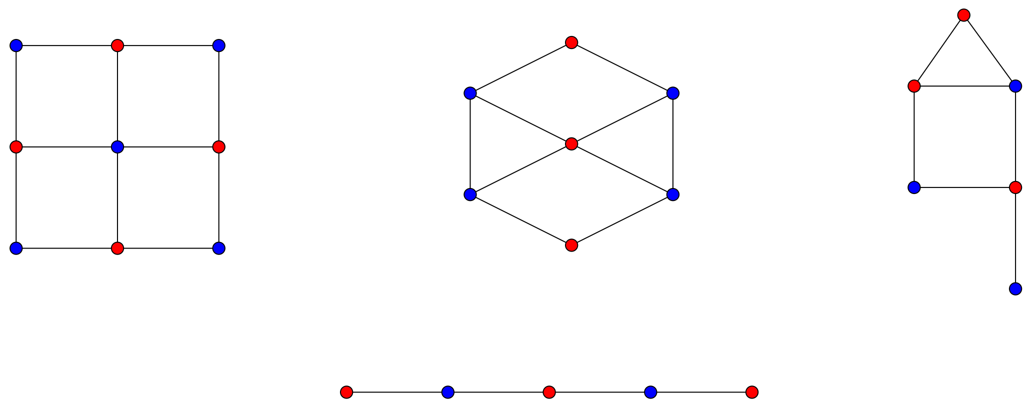
Se sabe que $\gamma(1) = \gamma(2) = \gamma(3) = 1$, $\gamma(4) = 2$, $\gamma(5) = \gamma(6) = 3$, $\gamma(7) = 4$ y $\gamma(Q_8) = ... = \gamma(Q_{11}) = 5$. Aquí mostramos un acomodo de $\gamma(n)$ reinas, para $n = 3, 4$ y 5.



Podemos interpretar esto como un problema de dominación en gráficas si definimos la gráfica de reinas Q_n de un tablero de $n \times n$ como sigue: Consideramos n^2 vértices que corresponden a cada una de las celdas del tablero y ponemos arista entre dos vértices si, y sólo si, la celda correspondiente a uno de ellos es atacada en un movimiento por una reina colocada en la celda correspondiente al otro vértice. También se pueden definir gráficas análogas para otro tipo de piezas como caballos, torres, etc.

El problema se traduce a encontrar la menor cardinalidad de un subconjunto D de vértices de Q_n tal que para todo vértice $v \in V(Q_n)$, se tiene que $v \in D$ o v es adyacente a algún vértice en D. Un conjunto así se llama *conjunto dominador* de Q_n, y el número buscado se llama *número de dominación* de Q_n.

En general, dada una gráfica G, decimos que un conjunto $D \subseteq V$ *domina* a G, o que es *conjunto dominador* de G, si todo vértice v de $V - D$ es adyacente a algún vértice d en D. También podemos decir que v es *dominado por* d. Por ejemplo, en cada una de las siguientes gráficas, el conjunto de vértices rojos es dominador.



Equivalentemente podemos decir que $D \subseteq V$ es dominador si, y sólo si, $N[D] = V$.

2.1 Observación. Si G es bipartita con $\delta(G) \geq 1$, entonces cualquiera de los dos conjuntos de vértices de la partición es dominador.

Un conjunto dominador D es *dominador minimal* si es dominador y ningún subconjunto propio de D es dominador. En las primeras dos gráficas de los ejemplos anteriores, los vértices rojos forman un conjunto dominador minimal.

Si $S \subseteq V$ es un conjunto de vértices de G, se dice que $v \in S$ es un vértice *aislado* de S si $N(v) \subseteq V - S$. En particular, si $S = V$, un vértice $v \in V$ se dice *aislado*, si no tiene vecinos.

2.2 Proposición. Un conjunto dominador $D \subseteq V$ es un conjunto dominador minimal si, y sólo si, para todo vértice $u \in D$ se cumple una de las siguientes condiciones:

(i) u es un vértice aislado de D.

(ii) Existe un vértice $v \in V \backslash D$ tal que $N(v) \cap D = \{u\}$. (Es decir, u es el único vértice de D que domina a v).

Demostración. Supongamos que S es un conjunto dominador minimal. Entonces para todo $u \in V$, $D \backslash \{u\}$ no es dominador. Por tanto existe $v \in (V - D) \cup \{u\}$ no dominado. Si $v = u$, entonces se tiene la condición (i). Si $v \neq u$ entonces se tiene la condición (ii).

Ahora supongamos que D es un conjunto dominador que satisface las condiciones (i) y (ii). Si D no es dominador minimal, entonces existe $u \in D$ tal que $D \backslash \{u\}$ es dominador, por lo que u debe ser adyacente a algún otro vértice en D y por tanto no es aislado en D. También cualquier $v \in V \backslash D$ es adyacente a algún vértice en $D \backslash \{u\}$. Entonces para u no vale ninguna de las condiciones (i) y (ii). ■

2.3 Proposición. Toda gráfica conexa G de orden $n \geq 2$ tiene un conjunto dominador D cuyo complemento $V \backslash D$ también es un conjunto dominador.

Demostración. Consideremos un árbol generador T de G. Hemos visto que T es bipartita, y por 2.1, podemos definir D como cualquier subconjunto de la partición. ■

2.4 Proposición. Si G es gráfica sin vértices aislados y D es un conjunto dominador minimal, entonces el complemento $V \backslash D$ es también un conjunto dominador.

Demostración. Sea D un conjunto dominador minimal y supongamos que $V \backslash D$ no es dominador. Entonces sea $u \in D$ no dominado por $V \backslash D$. Como u no es aislado, debe ser adyacente a algún otro vértice en D. Entonces $D - \{u\}$ es dominador, una contradicción. ■

El *número de dominación* $\gamma(G)$ de una gráfica G es la menor cardinalidad de algún conjunto dominador, es decir, $\gamma(G) = \min\{|D| : D \subseteq V \text{ es dominador}\}$.

Un $\gamma-$*conjunto* de G es un conjunto dominador de G de cardinalidad $\gamma(G)$. Observemos que un $\gamma-$ conjunto es siempre dominador minimal, pero un conjunto dominador minimal puede no ser $\gamma-$conjunto. Por ejemplo en T_2, los vértices que tienen grado 1 forman un conjunto dominador minimal, pero $\gamma(T_2) = 1$.

Ejemplos.

1. $\gamma(K_n) = 1$. Cualquier vértice forma un $\gamma-$conjunto.

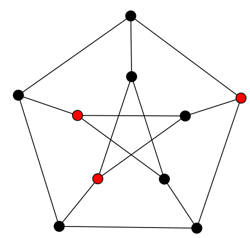
2. $\gamma(T_n) = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$. Si $T_n = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n+1})$ entonces un $\gamma-$conjunto es $\{v_1, v_4, \ldots\}$.

3. $\gamma(K_{m,n}) = 2$, si $m, n \geq 2$. Un $\gamma-$conjunto se obtiene tomando un vértice de cada conjunto de la partición.

4. $\gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Como en el caso de la trayectoria, un $\gamma-$conjunto se obtiene tomando un vértice sí y dos no.

5. Si es $\mathcal{P}$ la gráfica de Pettersen, $\gamma(\mathcal{P}) = 3$. Para ver esto, primero observamos que se necesitan al menos 3 vértices para dominar a $\mathcal{P}$, puesto que con dos vértices dominamos a lo más ocho

vértices. Ahora bien, sea v cualquier vértice. Como $diam(\mathcal{P}) = 2$, para cualquier otro vértice u, $d(u,v) \leq 2$. Esto significa que u es adyacente a v o bien u es adyacente a algún vecino de v, por tanto $N(v)$ es un conjunto dominador.



Encontrar conjuntos dominadores en una gráfica es relativamente fácil. Hallar el número de dominación no lo es. De hecho, dado $k \leq n$, decidir si $\gamma(G) \leq k$ es un problema NP - completo. En las siguientes secciones estudiaremos algunos resultados y cotas para el número de dominación de ciertas gráficas, pero antes analizaremos el problema para un caso muy especial de gráficas: los árboles.

En un árbol G llamamos *hoja* a un vértice de grado 1 y *tallo* a cualquier vértice adyacente a una hoja. Un *bosque* es una gráfica cuyas componentes conexas son árboles.

A un bosque G se le aplica el siguiente algoritmo que regresa un γ-conjunto D.

Se empieza con un bosque G en el que todos los vértices son negros y con un conjunto vacío D. La gráfica G y el conjunto D se van modificando según el algoritmo siguiente:

Se ordenan los vértices.

Mientras el conjunto de vértices negros no sea vacío se aplican las siguientes operaciones:

1. Se toma el primer vértice v de la lista que cumpla $\delta(v) \leq 1$ y se quita de G.

2. Si v es aislado negro, se quita de la gráfica y se agrega a D.

3. Si v es hoja negra, su tallo t_v se quita de G y se agrega a D. Todos los vértices adyacentes a t_v en G se pintan de azul.

2.5 Proposición. El conjunto D obtenido al final del algoritmo es un γ-conjunto.

Demostración. Procederemos por inducción sobre el número de vértices de G.

Si G tiene sólo un vértice entonces no hay nada que probar.

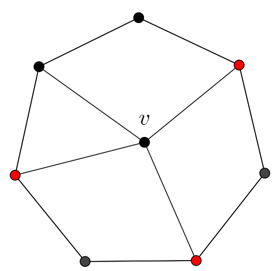
Sea G un bosque con $n \geq 2$ vértices y supongamos que para todo bosque con menos de n vértices, el algoritmo efectivamente regresa un conjunto dominador de mínima cardinalidad de los vértices negros

Sea v el vértice de grado 0 o 1 escogido por el algoritmo.

Caso 1: Si v es azul, entonces el mínimo tamaño de un conjunto dominador de los vértices negros de G es igual al mínimo tamaño de un conjunto dominador de los vértices negros de $G - v$.

Caso 2: Si v es negro, entonces consideremos el conjunto $\{v, t_v\}$ y el bosque $G' = G - \{v, t_v\}$ en donde se han pintado todos los vecinos de t_v de azul. Por inducción, el algoritmo regresa un conjunto dominador de tamaño mínimo de G'. Como v debe ser dominado por alguien, se debe tener que $v \in D'$ o $t_v \in D'$. Si $v \in D'$, entonces $D' - v + t_v$ es un γ-conjunto del mismo tamaño en donde $t_v \in D'$. Así que podemos suponer eso. Pero entonces $D' - t_v$ es un γ-conjunto de G' y, por hipótesis de inducción, $|D' - t_v| = |D - t_v|$, así que $|D'| = |D|$, lo cual es una contradicción. ■

2.6 Observación. Es falso que si $v \in V$ es un vértice de grado $\Delta(G)$, entonces existe un $\gamma-$conjunto D con $v \in D$. Se puede ver sin mucho esfuerzo que los vértices rojos en la siguiente gráfica forman un $\gamma-$ conjunto D, y $v \notin D$.



Entonces aquí, $\gamma(G) = 3$. Si v está en un conjunto dominador, entonces domina a $N[v]$ y se puede verificar que se necesitan al menos otros tres vértices para dominar al resto de los vértices.

3 Cotas para $\gamma(G)$ en términos del orden n.

En esta sección vamos a establecer cotas para el número de dominación de ciertas gráficas. Para tener idea de qué tan útil es una cota, vamos a definir qué significa que una cota sea *buena*. Si $\mathcal{A}$ es un conjunto de gráficas y se tiene que para cada $G \in \mathcal{A}, \gamma(G) \leq k$ (o $\gamma(G) \geq k$), para un $k \in \mathbb{N}$, decimos que k es una *cota justa* o una *buena cota* si existe $G' \in \mathcal{A}$ tal que $\gamma(G') = k$. En otras palabras, una cota es justa si existe al menos una gráfica que la alcanza.

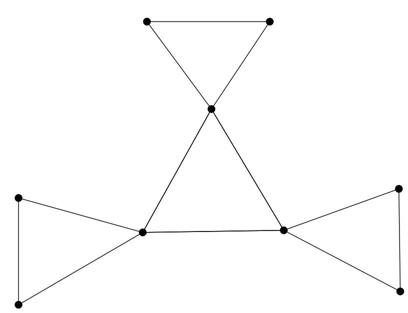
La primera cota que veremos es un corolario de uno de los resultados de la sección anterior.

3.1 Teorema (Ore, 1962)**.** Si $\delta(G) \geq 1$ (i.e., G no tiene vértices aislados), entonces $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$.

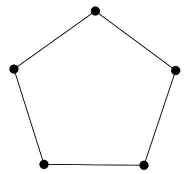
Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que G es conexa (si no, trabajamos con componentes). Al igual que en 2.3 consideremos un árbol generador T de G. Como T es bipartita, cualquiera de los dos subconjuntos de la partición es dominador. ∎

Vamos a ver para cuáles gráficas se tiene que $\gamma(G) = \frac{n}{2}$. Necesitamos algunas definiciones.

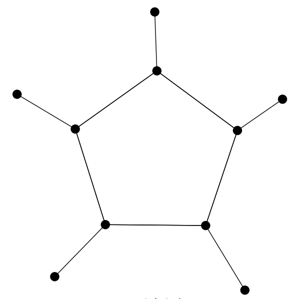
Sean G_1 y G_2 dos gráficas. Definimos la *corona* $G_1 \circ G_2$ de G_1 con G_2 como la gráfica que se obtiene de una copia de G_1 y $|V(G_1)|$ copias de G_2 donde cada vértice v_i de G_1 es adyacente a todos los vértices de la $i-$ésima copia de G_2. Por ejemplo, la siguiente gráfica es $K_3 \circ K_2$, la corona de K_3 con K_2.



En particular, si $G_2 = K_1$ y H es cualquier gráfica con vértices $v_1, \ldots, v_n$, la *corona* de H con K_1, la denotamos por $C(H)$ y es la gráfica obtenida a partir de H añadiendo nuevos vértices $u_1, \ldots, u_n$ y aristas u_iv_i, para $i = 1, \ldots, n$.



C_5



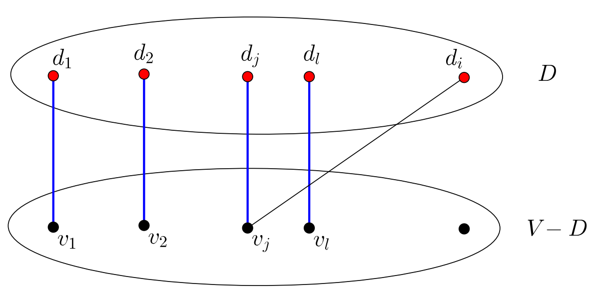
$C(C_5)$

Un *apareamiento* en una gráfica es un subconjunto del conjunto de aristas tal que cualesquiera dos aristas del subconjunto son ajenas. El apareamiento es *perfecto* si todo vértice de la gráfica pertenece a alguna arista del apareamiento, es *máximo* si ningún otro apareamianto tiene más aristas y es *maximal* si ningún otro apareamiento lo contiene propiamente. Observemos que en la corona de cualquier gráfica se tiene un apareamiento perfecto.

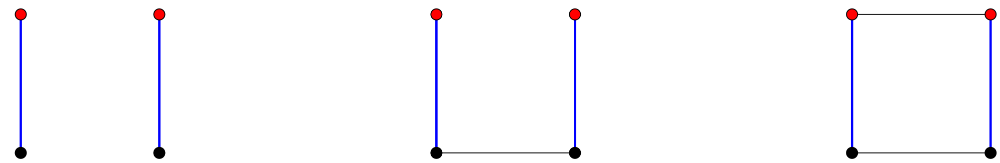
3.2 Teorema (Payan y Xuong, 1982)**.** Si $\delta(G) \geq 1$ entonces $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ si, y sólo si, las componentes conexas de G son C_4 o $C(H)$ para alguna gráfica conexa H.

Demostración. ($\Leftarrow$) Es clara.

($\Rightarrow$) Sea $D = \{d_1, ..., d_k\}$ un $\gamma-$conjunto de G. Afirmamos que existe un apareamiento perfecto entre los vértices de D y los de $V - D = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Para ver esto consideremos M un apareamiento entre D y $V - D$ con máximo número de aristas, digamos $M = \{v_1 d_1, \ldots v_l d_l\}$, y supongamos que $l < k$. Entonces existe $i > l$ tal que d_i no está apareado. Como $\delta(G) \geq 1$, d_i debe ser adyacente a un $v_j \in V - D$, pues si sólo fuera adyacente a elementos de D, $D - \{d_i\}$ sería conjunto dominador. Además $j \leq l$, por maximalidad de M. También, por maximalidad de M, se tiene que d_j no es adyacente a ningún v_r con $r > l$. Pero entonces $(D - \{d_i, d_j\}) \cup \{v_j\}$ es dominador con menos de k vértices, una contradicción.



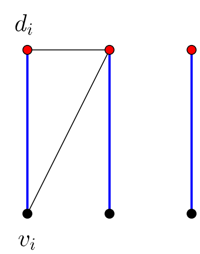
Sea $E = \{d_1v_1, \ldots, d_kv_k\}$ apareamiento perfecto entre V y $V - D$. Observemos que tanto D como $V - D$ son $\gamma-$conjuntos. Si $k = 1$, entonces $n = 2$ y $G = T_1 = C(K_1)$. Si $k = 2$, se tiene $n = 4$ y entonces G debe ser una de las siguientes gráficas: $C(K_1 \cup K_1)$, $T_3 = C(T_1)$ ó C_4.



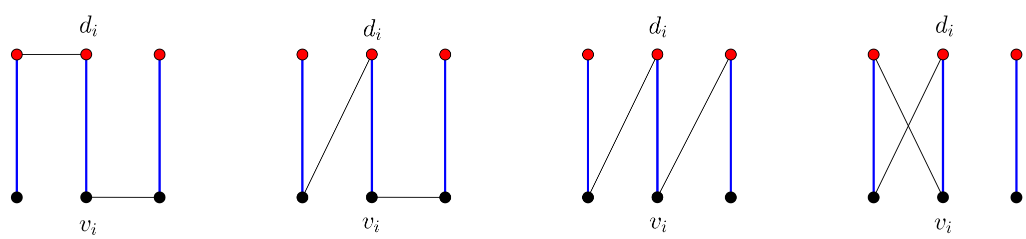
$G = C(K_1 \cup K_1)$ $\qquad$ $G = T_3 = C(T_1)$ $\qquad$ $G = C_4$

Supongamos que $k \geq 3$. Si sucede que para toda i, alguno de d_i ó v_i tiene grado 1, tenemos el resultado. Si no, sea i tal que d_i y v_i tienen grado al menos 2. Entonces de d_i y v_i salen aristas distintas a d_iv_i. Distingamos los casos para esas aristas.

Caso I. Si salen aristas a un mismo vértice, podemos reducir el número de dominación, lo cual es una contradicción.



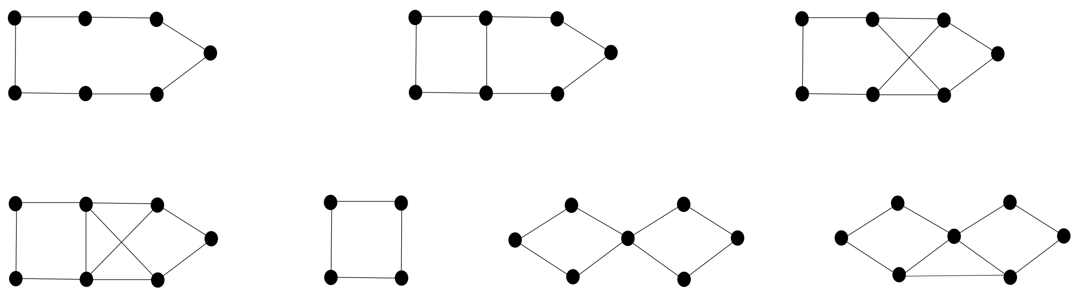
Caso II. Si salen aristas a vértices distintos, encontramos a T_5, lo cual permite nuevamente reducir el número de dominación, salvo en el último caso, en el que encontramos a C_4 y a T_1 como componentes conexas.



■

Si restringimos un poco más el grado mínimo de G, mejoramos la cota del número de dominación salvo para algunas gráficas "prohibidas". Enunciaremos el teorema sin demostración.

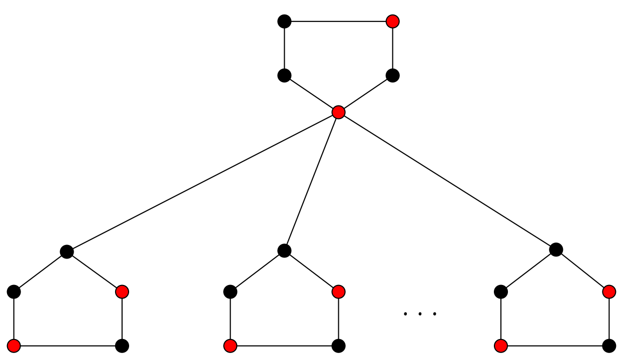
Sea $\mathcal{A}$ la colección formada por las siguientes gráficas.



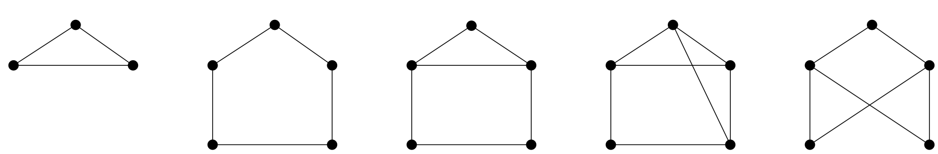
Se puede verificar fácilmente que las gráficas de $\mathcal{A}$ con 7 vértices tienen número de dominación $\gamma = 3$.

3.3 Teorema (Mc. Cuaig y Shepherd, 1989)**.** Si G es una gráfica conexa con $\delta(G) \geq 2$ y $G \notin \mathcal{A}$, entonces $\gamma(G) \leq \frac{2n}{5}$.

Además, la cota anterior es justa, como lo muestra el ejemplo siguiente en donde los vértices rojos forman un $\gamma-$conjunto:



Vamos ahora a terminar de clasificar las gráficas conexas G que cumplen $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Sea $\mathcal{B}$ la clase formada por las siguientes gráficas.



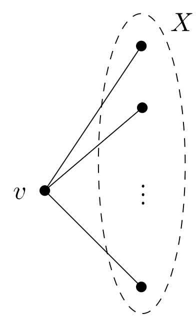
3.4 Lema. Si G es una gráfica conexa con $\delta(G) \geq 2$ y $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces $G \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Demostración. Sea G una gráfica conexa con $\delta(G) \geq 2$ y $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Si $G \notin \mathcal{A}$, entonces por 3.3 se tiene que $\gamma(G) \leq \frac{2n}{5}$. Si n es par, entonces $\gamma(G) = \frac{n}{2} \leq \frac{2n}{5}$, una contradicción. Si n es impar, entonces $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2} \leq \frac{2n}{5}$, lo cual implica que $n = 3$ ó $n = 5$. Si $n = 3$, la única gráfica que satisface lo dicho es el triángulo K_3. Si $n = 5$ podemos organizar las posibles gráficas que tienen $\delta(G) \geq 2, \gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2} = 2$ según el *cuello* de G, que es la menor longitud de un ciclo en G. Si el cuello es 5, entonces $G = C_5$. Si el cuello es 4, la única posibilidad es la última gráfica que se muestra en la familia $\mathcal{B}$. Si el cuello es 3, las posibles gráficas son la tercera y cuarta de la familia $\mathcal{B}$. ■

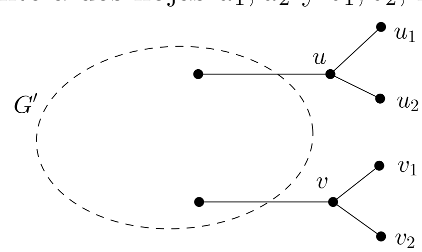
En cualquier gráfica llamaremos *hoja* a un vértice de grado 1, y *tallo* a cualquier vértice adyacente a una hoja. En vista del lema anterior, sólo necesitamos considerar gráficas con hojas.

3.5 Lema. Si G es una gráfica conexa y $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, entonces cada vértice $v \in V$ es adyacente a lo más a una hoja, excepto posiblemente para un solo vértice que puede ser adyacente a dos hojas cuando n es impar.

Demostración. Sean $v \in V$ y X el conjunto de hojas adyacentes a v, con $|X| = t$.



Observemos que la gráfica $H =< V - (X \cup \{v\}) >$ no tiene vértices aislados. Por 3.1 se tiene que $\gamma(H) \leq \left\lfloor \frac{n-t-1}{2} \right\rfloor$ y entonces $\gamma(G) \leq 1 + \left\lfloor \frac{n-t-1}{2} \right\rfloor$. Si n es par, digamos $n = 2k$, entonces $k = \gamma(G) \leq 1 + \left\lfloor \frac{2k-t-1}{2} \right\rfloor$, de donde $t \leq 1$. Si n es impar, digamos $n = 2k+1$, entonces $k = \gamma(G) \leq 1 + \left\lfloor \frac{2k-t}{2} \right\rfloor$, de donde $t \leq 2$. En este caso supongamos que hay dos vértices u, v, cada uno adyacente a dos hojas u_1, u_2 y v_1, v_2, respectivamente.



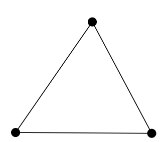
Entonces la gráfica $G' = G - \{u, v, u_1, u_2, v_1, v_2\}$ tiene $n - 6$ vértices y no tiene vértices aislados, por lo que $\gamma(G') \leq \left\lfloor \frac{n-6}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k-5}{2} \right\rfloor = k - 3$. Así $\gamma(G) \leq k - 3 + 2 = k - 1$, una contradicción. ■

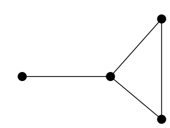
Vamos a definir ahora seis clases especiales de gráficas que alcanzan la cota $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, y vamos a ver que ésas son todas las que cumplen la igualdad. Este resultado se debe a Cockayne, Haynes y Hedetniemi.

Sea $\mathcal{G}_1 = \{C_4\} \cup \{G = C(H) : H \text{ conexa}\}$, la familia con la que trabajamos en el teorema 3.2.

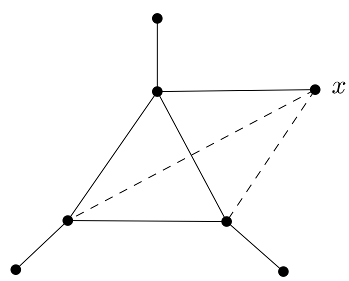
Sea $\mathcal{G}_2 = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} - \{C_4\}$.

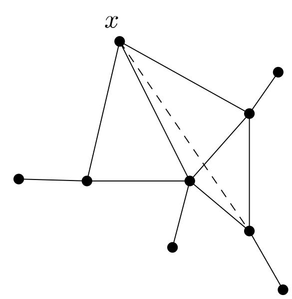
Para cada gráfica H, sea $\mathcal{S}(H)$ el conjunto de todas las gráficas conexas que se obtienen de $H \circ K_1$ añadiendo un nuevo vértice x y aristas que unen a x con uno o más vértices de H. Por ejemplo, si consideramos estas gráficas:





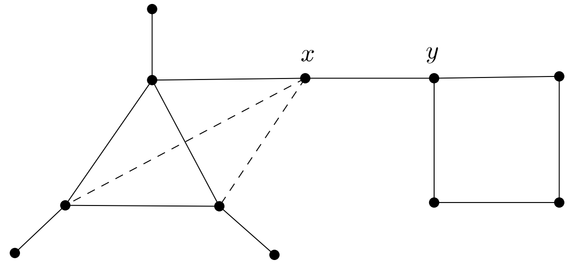
las siguientes dos gráficas corresponden a elementos de sus correspondientes familias $\mathcal{S}$.





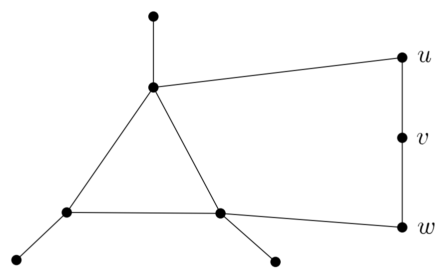
Definimos $\mathcal{G}_3 = \bigcup_H \mathcal{S}(H)$.

Sea y un vértice de una copia de C_4, y para cada $G \in \mathcal{G}_3$ sea $\theta(G)$ la gráfica obtenida uniendo G a C_4 con la única arista xy, donde x es el nuevo vértice añadido al formar G. Por ejemplo, la siguiente es $\theta(G)$, donde G es la primera gráfica del ejemplo anterior.



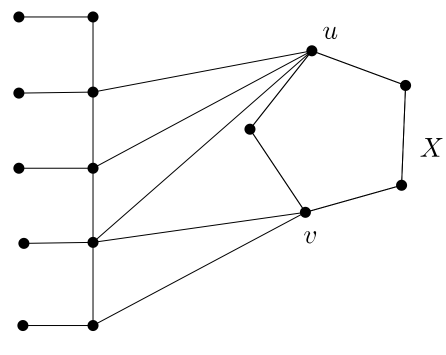
Definimos $\mathcal{G}_4 = \{\theta(G) : G \in \mathcal{G}_3\}$.

Ahora, sea u, v, w una sucesión de vértices de una trayectoria T_2. Para cualquier gráfica H, sea $\mathcal{P}(H)$ el conjunto de gráficas conexas que se pueden formar de $H \circ K_1$ uniendo cada uno de u y w a uno o más vértices de H. Por ejemplo, la siguiente gráfica es un elemento de $\mathcal{P}(K_3)$:



Definimos $\mathcal{G}_5 = \bigcup_H \mathcal{P}(H)$.

Sea H una gráfica y $X \in \mathcal{B}$. Sea $\mathcal{R}(H, X)$ el conjunto de gráficas conexas que se pueden obtener de $H \circ K_1$ uniendo cada vértice de $U \subseteq V(X)$ a uno o más vértices de H de modo que ningún subconjunto con menos de $\gamma(X)$ vértices domine a $V(X) - U$. Un ejemplo es la siguiente gráfica:



Definimos $\mathcal{G}_6 = \bigcup_{H,X} \mathcal{R}(H, X)$.

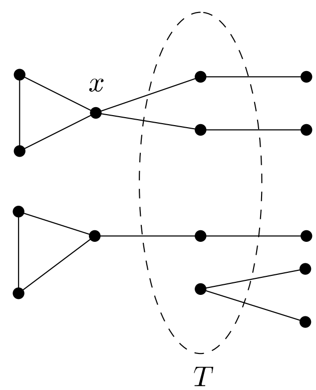
3.6 Teorema. Una gráfica conexa G satisface $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ si, y sólo si, $G \in \bigcup_{i=1}^{6} \mathcal{G}_i$.

Demostración. Se puede verificar fácilmente que si $G \in \bigcup_{i=1}^{6} \mathcal{G}_i$, entonces $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Vamos a probar que si G es conexa con n vértices y $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, entonces $G \in \bigcup_{i=1}^{6} \mathcal{G}_i$. Si n es par entonces, por 3.2, $G \in \mathcal{G}_1$. Si n es impar con $\delta(G) \geq 2$, por lema 3.4, $G \in \mathcal{G}_2$.

Supongamos que n es impar, digamos $n = 2k + 1$, y que existe un conjunto no vacío $H \subseteq V$ de hojas. Sea $T \subseteq V$ el conjunto de tallos, con $|T| = t$. Por el lema 3.5, $|H| = t$

ó $|H| = t+1$. Además sabemos que existe un $\gamma-$conjunto de G que contiene a T. Sea $G' = G - (H \cup T)$.

Caso 1. $|H| = t+1$. Entonces G' tiene $n-(2t+1)$ vértices. Supongamos que $G' \neq \emptyset$, entonces, por la conexidad de G, hay un vértice x de G' que es adyacente a un tallo en G.

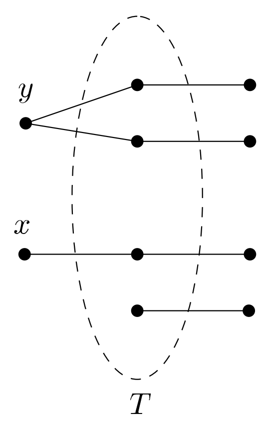


Sea Y el conjunto de los vértices no aislados en $G'-x$. Entonces $\langle Y \rangle$ tiene un $\gamma-$conjunto D' que, por el teorema 3.1, cumple que $|D'| \leq \left\lfloor \frac{|Y|}{2} \right\rfloor$. Ahora notemos que como $T \cup D'$ domina a G, tenemos que

$$k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \gamma(G) \leq t + \left\lfloor \frac{n-2t-2}{2} \right\rfloor = t + k - t - 1 = k - 1,$$

lo cual es una contradicción, por lo que $G' = \emptyset$ y $G \in \mathcal{G}_3$.

Caso 2. $|H| = t$ y G' tiene un vértice aislado y. Notemos que $N_G(y) \subseteq T$. Si $G' - y \neq \emptyset$, entonces $G' - y$ tiene un vértice x que es adyacente a un tallo en G.



Sea Z el conjunto de vértices no aislados en $G' - \{x, y\}$. Otra vez, $\langle Z \rangle$ tiene un $\gamma-$conjunto D'' que, por 3.1, cumple que $|D''| \leq \left\lfloor \frac{|Y|}{2} \right\rfloor$. Igual que en el caso anterior, como $T \cup D''$ domina a G, tenemos que

$$k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \gamma(G) \leq t + \left\lfloor \frac{n-2t-2}{2} \right\rfloor = t + k - t - 1 = k - 1,$$

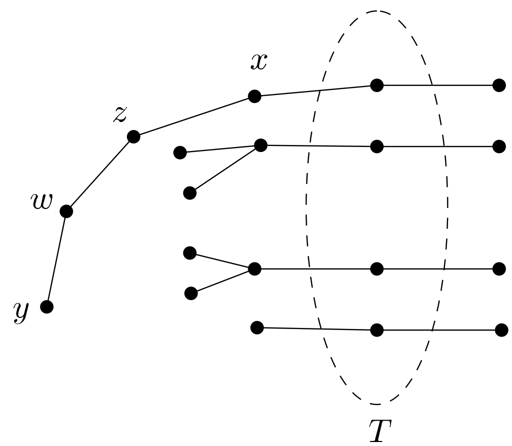
lo cual es una contradicción, por lo que $G' - y = \emptyset$ y $G \in \mathcal{G}_3$.

Caso 3. $|H| = t$ y $\delta(G') = 1$. Sea X el conjunto de vértices de grado 1 en G'. Observemos que T domina a X. Aquí tenemos dos casos:

(a) $G' - X$ no tiene vértices aislados. En este caso,

$$k = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \gamma(G) \leq t + \left\lfloor \frac{n-2t-|X|}{2} \right\rfloor,$$

de donde $|X| = 1$. Sea x el único elemento en X. Sea z adyacente a x en G'. Como $G' - x$ no tiene vértices aislados, $\delta(G' - x) = 1$ siendo z el único vértice de grado 1 en $G' - x$.



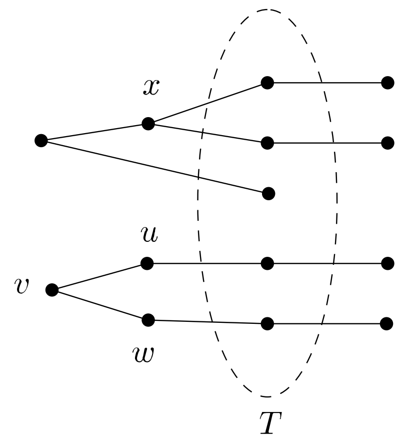
Sea w vecino de z en $G' - x$ y sea y vecino de w, distinto a z (existe pues w no es de grado 1 en $G' - x$). Si u es un vértice aislado en $G' - \{x, y, z, w\}$, entonces u no es adyacente a z y el grado de u en $G' - x$ es al menos 2, por lo que u debe ser adyacente a w y a y. Entonces $T \cup \{w\}$ domina a todos los vértices, excepto quizás al conjunto Y de los vértices no aislados de $G' - \{x, y, z, w\}$. Por el teorema 3.1, $\langle Y \rangle$ puede ser dominado por a lo más $\frac{|Y|}{2}$ vértices. Entonces

$$k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \gamma(G) \leq t + 1 + \frac{|Y|}{2} \leq t + 1 + \left\lfloor \frac{n-2t-4}{2} \right\rfloor = k - 1,$$

lo cual es una contradicción, por lo que $\delta(G' - x) \leq 2$.

Ahora bien, observemos que $G' - x$ tiene orden par. Como $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, se tiene que $\gamma(G' - x) = \frac{|V(G'-x)|}{2}$. Por el teorema 3.3, $G' - x$ es isomorfa a mC_4, para $m \geq 1$, esto es, unión de una o más copias de C_4. Si suponemos $m > 1$, se tiene que $\gamma(G) < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, contrario a nuestra hipótesis, por lo que $m = 1$ y $G' - x = C_4$, concluyendo que $G \in \mathcal{G}_4$.

(b) $G' - X$ tiene vértices aislados. Sea I conjunto de vértices aislados de $G' - X$, con $|I| = i \geq 1$. Observemos que ningún elemento $v \in I$ puede ser hoja en G', por lo que tiene al menos dos vecinos en X. Como para cada $x \in X$ se tiene que $\delta_{G'}(x) = 1$, tenemos que $|X| \geq 2i$.



El conjunto T domina a $H \cup T \cup X$, el conjunto I se domina a sí mismo y, por 3.1, se necesitan a lo más $\frac{|V(G')-(X \cup I)|}{2}$ vértices para dominar al conjunto de vértices no aislados de $G' - X$; por lo tanto,

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \gamma(G) \leq t + i + \left\lfloor \frac{n - 2t - 3i}{2} \right\rfloor,$$

de donde se obtiene $i = 1$, es decir, $G' - X$ tiene un vértice aislado v que tiene al menos dos vecinos u y w en X.

Ahora bien, $G' - (X \cup \{v\})$ no tiene vértices aislados y es dominado por a lo más

$$\left\lfloor \frac{|V(G' - (X \cup \{v\})|}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n - 2t - |N[v]|}{2} \right\rfloor$$

vértices. También tenemos que el conjunto $T \cup \{v\}$ domina a $X \cup \{v\}$; entonces

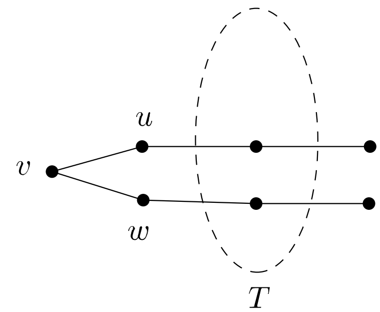
$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \gamma(G) \leq t + 1 + \left\lfloor \frac{n - 2t - |N[v]|}{2} \right\rfloor,$$

de donde se obtiene que $|N[v]| \leq 3$. Sea $N(v) = \{u, w\}$. Si v estuviera dominado por T, entonces podríamos reducir el número de dominación de G, una contradicción.

Observemos que, como v debe estar dominado, cualquier $\gamma-$conjunto de G debe tener como elemento a uno de los vértices en $\{u, v, w\}$.

La gráfica $G' - \{u, v, w\}$ tiene orden par. Si suponemos que esta gráfica es no vacía entonces, como $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, se tiene que para cada componente conexa C de $G' - \{u, v, w\}$

exactamente $\frac{|V(C)|}{2}$ de sus vértices deben estar en cada $\gamma-$conjunto de G. Entonces C tiene orden par y, por 3.3, $C = C_4$ ó $C = H \circ K_1$, para alguna H conexa. Esto implica que ningún vértice de C puede ser adyacente a T, una contradicción, por lo que no puede haber componentes de orden par ni impar. Así, la gráfica $G' - \{u, v, w\}$ debe ser vacía y $G \in \mathcal{G}_5$.



Caso 4. $|H| = |T| = t$ y $\delta(G') \geq 2$.

Como $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, un $\gamma-$conjunto de G debe incluir $\frac{|V(C)|}{2}$ vértices de cada componente C de G' de orden par, por lo que debería tenerse $C = C_4$, pero esto es imposible, así que no hay componentes de orden par. Si G' tiene más de una componente de orden impar, podríamos reducir el número de dominación de G, por lo que G' debe ser conexa y estar en $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} - \{C_4\}$. Es decir, $G' \in \mathcal{G}_6$. ■

Si pedimos $\delta(G) \geq 3$, mejoramos la cota del número de dominación. Enunciamos el resultado siguiente debido a Reed (1996).

3.7 Teorema. Si G es una gráfica conexa con $\delta(G) \geq 3$, entonces $\gamma(G) \leq \frac{3n}{8}$.

El resultado anterior sugiere la siguiente conjetura: Si $\delta(G) \geq k$ entonces $\gamma(G) \leq \frac{kn}{3k-1}$. En esta dirección, Caro y Roditty dieron la siguiente cota, que resulta ser mejor que la conjetura cuando $\delta(G) \geq 7$.

3.8 Teorema. Si G es cualquier gráfica G con grado mínimo $\delta(G) = \delta$, entonces

$$\gamma(G) \leq n \left[1 - \delta \left(\frac{1}{1+\delta} \right)^{1+\frac{1}{\delta}} \right]$$

.

4 Cotas en términos del orden, grado y empaque.

Recordemos que, en general, un conjunto $D \subseteq V$ es dominador de G si, y sólo si, $N[D] = V$. También observemos que D es conjunto dominador de G si, y sólo si $|N[D]| \geq n$.

4.1 Teorema. Para cualquier gráfica G se tiene que

$$\left\lceil \frac{n}{1+\Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G)$$

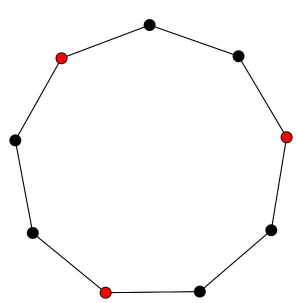
.

Demostración. Para la primera desigualdad consideremos un $\gamma-$conjunto $D \subseteq V$. Por ser D dominador, $|N[D]| \geq n$, pero $\gamma(G)+\gamma(G)\Delta(G) \geq |N[D]| \geq n$, por tanto $\gamma(G)(1+\Delta(G)) \geq n$, lo cual implica que $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{1+\Delta(G)} \right\rceil$. Para la segunda observemos que $\{v\} \cup (V - N[v])$ forma un conjunto dominador para todo v. Cuando v tiene grado $\Delta(G)$ ese conjunto tiene tamaño $n - \Delta(G)$. ■

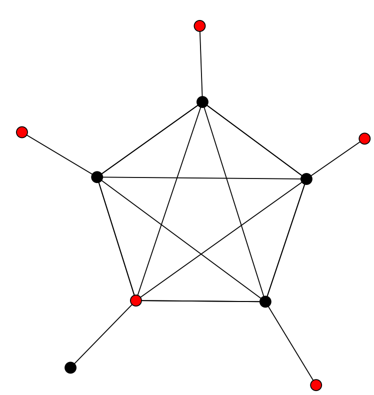
Veamos que las dos cotas de la desigualdad anterior se alcanzan:

- $\gamma(C_{3m}) = m = \left\lceil \frac{3m}{1+2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3m}{1+\Delta(C_{3m})} \right\rceil$.
- $\gamma(C(K_n)) = n = 2n - n = 2n - \Delta(C(K_n))$.

En las figuras los vértices rojos forman un $\gamma-$conjunto.



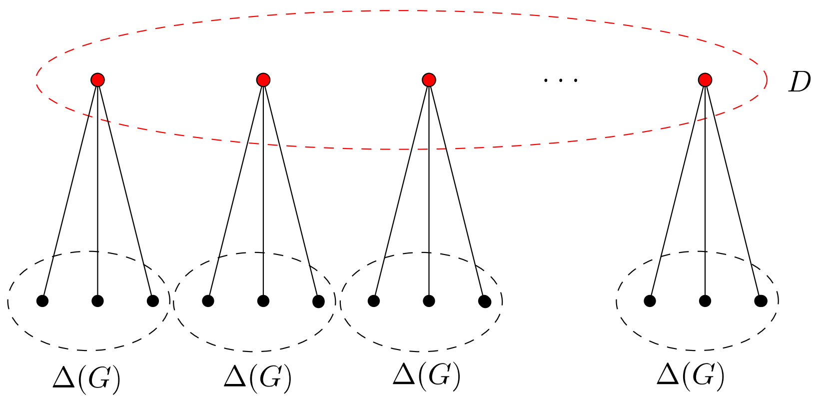
C_9



$C(K_5)$

Un conjunto $S \subseteq V$ de vértices de una gráfica $G = (V, A)$ es *independiente* si para cualesquiera dos vértices $u, v \in S$, se tiene que $uv \notin A$, es decir, no existe arista entre pares de vértices en S.

4.2 Observación. Si una gráfica G tiene un $\gamma-$conjunto independiente D tal que para todo $v \in D$ se tiene $\delta(v) = \Delta(G)$ y para $u \neq v$ en D, $N[u] \cap N[v] = \emptyset$, entonces $\gamma(G) = \frac{n}{1+\Delta(G)}$.



Demostración. Sea D un $\gamma-$conjunto que cumple las condiciones descritas y sea $\gamma = \gamma(G)$. Entonces

$$n = |N[D]| = \gamma + \delta(u_1) + \ldots + \delta(u_\gamma) = \gamma + \gamma\Delta = \gamma(1 + \Delta)$$

de donde $\gamma = \frac{n}{1+\Delta}$. ■

Ejemplos de gráficas así son C_{3m} y gráficas cuyas componentes conexas son copias de $K_{1,\Delta}$.

4.3 Teorema. Sea G una gráfica con conjunto de vértices $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ con $\delta(v_i) = g_i$ para cada i y $g_i \geq g_{i+1}$. Entonces $\gamma(G) \geq \min\{k : k + (g_1 + \ldots + g_k) \geq n\}$.

Demostración. Sea $\gamma = \gamma(G)$. Para cada k entre 1 y n, sea $S_k = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Observemos que

$$|N[S_k]| \leq k + g_1 + \ldots + g_k$$

por lo que si $k + g_1 + \ldots + g_k < n$, entonces S_k no es dominador y no hay un $\gamma-$conjunto de tamaño a lo más k pues si $D = \{u_1, \ldots, u_\gamma\}$ fuera tal conjunto, entonces $n = |N[D]| \leq \gamma + \delta(u_1) + \ldots + \delta(u_\gamma) \leq k + g_1 + \ldots + g_k < n$, una contradicción. Así $\gamma > k$. ■

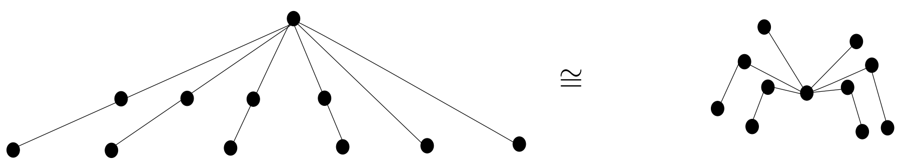
Un subconjunto de vértices $S \subseteq V$ se llama 2$-$*empaque* si para cada $u, v \in S$, se tiene $N[u] \cap N[v] = \emptyset$. En otras palabras, un 2$-$empaque es un subconjunto de vértices donde las vecindades cerradas son ajenas dos a dos.

El *número de empaque* $\rho(G)$ de una gráfica G es la mayor cardinalidad de un $2-$empaque.

4.4 Teorema. En cualquier gráfica G, se tiene que $\rho(G) \leq \gamma(G)$.

Demostración. Sea X un $2-$empaque de cardinalidad $\rho(G)$ y sea D un $\gamma-$conjunto. Como D domina a G tenemos, en particular, que cada $v \in X$ debe estar dominado ya sea siendo él mismo un elemento de D o bien siendo dominado por uno de sus vecinos. Esto nos dice que $|D| \geq |X|$, de donde $\gamma \geq \rho$. ■

Definimos la *araña coja* como un árbol obtenido de $K_{1,t}$, $t \geq 1$, al subdividir a lo más $t-1$ aristas agregando un vértice intermedio en cada una.



4.5 Proposición. Un árbol G satisface $\gamma(G) = n - \Delta(G)$ si, y sólo si, es una araña coja.

Demostración. Sea G un árbol y supongamos que $\gamma(G) = n - \Delta(G)$. Si v es un vértice de grado $\Delta(G)$, entonces el conjunto $\{v\} \cup (V - N[v])$ es un $\gamma-$conjunto y no puede haber arista entre dos vértices de $V - N[v]$, pues si $a = uw$ fuera arista con $u, w \in V - N[v]$, podríamos omitir a u o a w del conjunto dominador. Por lo tanto cada vértice en $V - N[v]$ debe ser adyacente a exactamente un vértice en $N(v)$ (no puede ser adyacente a dos porque se formaría un ciclo). Además observemos que el número de vértices en $V - N[v]$ debe ser estrictamente menor que $|N(v)|$, pues de haber igualdad, $N(v)$ sería un dominador menor. ■

5 Cotas en términos del orden y del tamaño.

En esta sección respondemos a la pregunta: ¿Cuál es el máximo número de aristas que puede tener una gráfica con número de dominación $\gamma(G)$?. Al respecto tenemos el siguiente resultado debido a Vizing:

5.1 Teorema. En cualquier gráfica G se tiene que

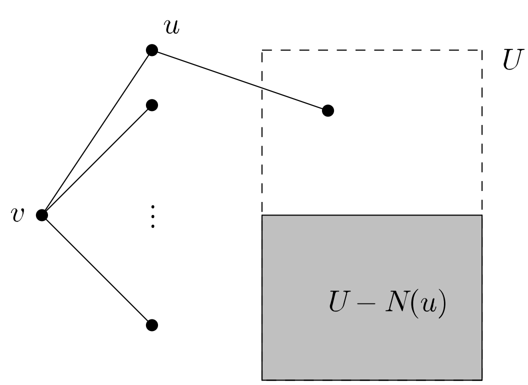
$$m \leq \left\lfloor \frac{1}{2}(n-\gamma(G))(n-\gamma(G)+2) \right\rfloor$$

Demostración. Si $\gamma(G) = 1$ existe un vértice v que domina a los $n-1$ vértices restantes, por lo que $m = n-1$ y se cumple que $m \leq \left\lfloor \frac{1}{2}(n-1)(n+1) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2}m(m+2) \right\rfloor$. Para las gráficas con $\gamma(G) \geq 2$ hacemos inducción sobre el número de vértices n. Si $n = 2$, entonces G sólo puede ser la gráfica que consta de dos vértices aislados, en la que claramente se da la igualdad. Supongamos ahora que cualquier gráfica con menos de n vértices y $\gamma(G) \geq 2$ cumple la desigualdad. Vamos a considerar primero aquellas gráficas con $\gamma(G) \geq 3$. Sea v un vértice de grado $\Delta(G)$. Por 4.1, tenemos que $|N(v)| = \Delta(G) \leq n - \gamma(G)$, es decir,

$$\Delta(G) = n - \gamma(G) - r, \tag{1}$$

para cierto entero r tal que $0 \leq r \leq n - \gamma(G)$. Sea $U = V - N[v]$. Entonces

$$|U| = \gamma(G) + r - 1. \tag{2}$$



Notemos que si $u \in N(v)$, entonces el conjunto $(U - N(u)) \cup \{u, v\}$ es dominador, por lo que $\gamma(G) \leq |U - N(u)| + 2$. Por (2), $|U| - r + 1 \leq |U - N(u)| + 2$, para cada $u \in N(v)$, por lo que $|U| - |U - N(u)| \leq r + 1$, para cada $u \in N(v)$. Si m_1 es el número de aristas entre $N(v)$ y U, entonces $m_1 \leq \Delta(G)(r+1)$.

Ahora observemos que si D es un $\gamma-$ conjunto de $\langle U \rangle$, entonces $D \cup \{v\}$ es conjunto dominador de G, por lo que $\gamma(G) \leq |D \cup \{v\}| = |D| + 1 = \gamma(\langle U \rangle) + 1$, y así:

$$\gamma(\langle U \rangle) \geq \gamma(G) - 1 \geq 2, \tag{3}$$

, por lo que podemos aplicar la hipótesis de inducción en $\langle U \rangle$. Si m_2 es el número de aristas en $\langle U \rangle$, entonces

$$m_2 \leq \left\lfloor \frac{1}{2}(|U| - \gamma(\langle U \rangle))(|U| - \gamma(\langle U \rangle) + 2) \right\rfloor,$$

y por (2) y (3) tenemos

$$m_2 \leq \left\lfloor \frac{1}{2}(\gamma(G) + r - 1 - (\gamma(G) - 1))(\gamma(G) + r - 1 - (\gamma(G) - 1) + 2) \right\rfloor = \frac{1}{2}r(r+2).$$

Sea m_3 el número de aristas en $\langle N[v] \rangle$. Como v tiene $\Delta(G)$ vecinos y en cada $u \in N(v)$ inciden $\delta(u) \leq \Delta(G) = r + 1 + \Delta(G) - (r+1)$ aristas de las cuales una es la que lo une con v y a lo más $r+1$ lo unen con vértices de U, entonces a lo más $\Delta(G) - (r+2)$ lo unen con otros vecinos de v, por lo tanto

$$m_3 \leq \Delta(G) + \frac{1}{2}\Delta(G)(\Delta(G) - r - 2).$$

El número total de aristas de G es

$$m = m_1 + m_2 + m_3 \leq \Delta(G)(r+1) + \frac{1}{2}r(r+2) + \Delta(G) + \frac{1}{2}\Delta(G)(\Delta(G) - r - 2),$$

Por (1), tenemos que

$$m \leq \Delta \cdot (n - \gamma - \Delta + 1) + \frac{1}{2}(n - \gamma - \Delta)(n - \gamma - \Delta + 2) + \Delta + \frac{1}{2}\Delta \cdot (\Delta - n + \gamma + \Delta - 2).$$

Desarrollando se obtiene

$$m \leq \frac{1}{2}(n - \gamma(G))(n - \gamma(G) + 2) - \frac{1}{2}\Delta(G)(n - \gamma(G) - \Delta(G)). \tag{4}$$

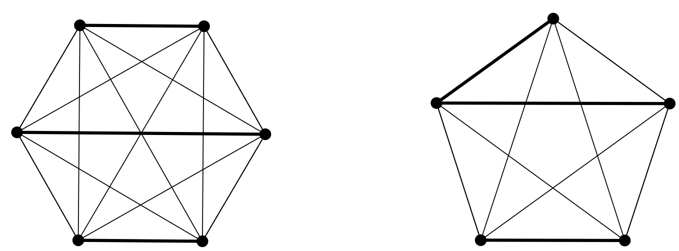
Por lo tanto, $m \leq \frac{1}{2}(n - \gamma(G))(n - \gamma(G) + 2)$.

Ahora bien, si G es una gráfica con $\gamma(G) \geq 2$, podemos agregar un vértice aislado y obtener una nueva gráfica G' con $\gamma(G') = \gamma(G) + 1 \geq 3$, $|V(G')| = n + 1$ y $|A(G')| = |A(G)| = m$. Por lo que acabamos de probar, G' cumple la desigualdad del teorema y entonces G también la cumple. ■

Vizing propuso también una familia de gráficas que alcanzan la cota del teorema anterior. Las describimos a continuación.

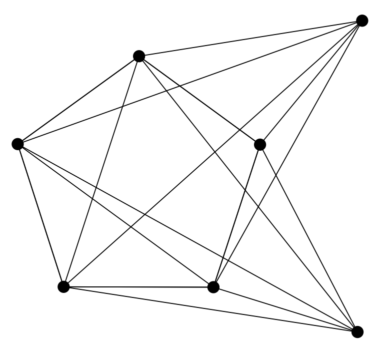
Una *cubierta por aristas* de G es un subconjunto $C \subseteq A(G)$ tal que para todo $v \in V(G)$ se tiene que v es extremo de alguna arista de C.

Sea H una gráfica formada a partir de una gráfica completa K_t, con $t \geq 1$, al quitar las aristas de una cubierta por aristas de tamaño menor. Se puede ver que el tamaño de una cubierta tal es $\lceil \frac{t}{2} \rceil$: Si t es par, entonces un apareamiento es una cubierta menor, y si t es impar, entonces un apareamiento de $t-1$ vértices junto con cualquier arista que contenga al vértice que falta forman una cubierta menor.



Caso 1. $\gamma(G) = 2$. Sea $G = H + \bar{K}_2$, esto es, G es la gráfica obtenida a partir de H añadiendo dos nuevos vértices aislados y aristas de cada uno de ellos a cada vértice de H. Claramente $\gamma(G) = 2$, $t = n - 2$ y

$$m = \frac{1}{2}(n-2)(n-3) - \left\lceil \frac{1}{2}(n-2) \right\rceil + 2(n-2) = \left\lfloor \frac{1}{2}(n-2)n \right\rfloor .$$



Caso 2. $\gamma(G) > 2$. Construimos G a partir de $H + \bar{K}_2$ añadiendo un conjunto de $\gamma(G) - 2$ vértices aislados. Observemos que G tiene número de dominación $\gamma(G)$, $t = n - \gamma(G)$ y

$$m = \left\lfloor \frac{1}{2}(n - \gamma(G) + 2 - 2)(n - \gamma(G) + 2) \right\rfloor$$

Estas gráficas de Vizing también cumplen la igualdad del teorema 4.1: $\Delta(G) = n-\gamma(G)$. En general, si se da la igualdad en 5.1, entonces se da la igualdad en el teorema 4.1. Lo anterior se puede observar en la desigualdad (4) de la prueba de 5.1. El recíproco es falso como lo muestra $C(K_n)$, pues vimos que esa gráfica alcanza la cota en 4.1 pero no cumple la igualdad en 5.1.

Para las gráficas con $\Delta(G) < n - \gamma(G)$, Sanchis dio una mejor cota para el número máximo de aristas de una gráfica con $\gamma(G) > 2$.

5.2 Teorema. Si G es una gráfica con $\gamma(G) \geq 2$ y $\Delta(G) < n - \gamma(G)$, entonces

$$m \leq \frac{1}{2}(n - \gamma(G))(n - \gamma(G) + 1).$$

Demostración. Observemos que la desigualdad (4) de la prueba de 5.1 puede escribirse así:

$$m \leq \frac{1}{2}[(n - \gamma(G))(n - \gamma(G) + 1) + (n - \gamma(G)) + f(\Delta)],$$

donde $f(\Delta) = \Delta^2 - \Delta(n - \gamma)$ es una función cuadrática en Δ que alcanza su mínimo en $\Delta_c = \frac{n-\gamma}{2}$. El número Δ_c es el promedio de $\Delta_0 = 1$ y $\Delta_1 = n - \gamma - 1$. Por hipótesis, $\Delta - n - \gamma < 0$ y entonces $f(\Delta) = \Delta^2 - \Delta(n - \gamma) = \Delta(\Delta - n - \gamma) < 0$. Si evaluamos $f(\Delta)$ en $\Delta_0 = 1$ y $\Delta_1 = n - \gamma - 1$, obtenemos $f(\Delta_0) = f(\Delta_1) = 1 - n - \gamma$, por lo que

$$m \leq \frac{1}{2}[(n - \gamma(G))(n - \gamma(G) + 1) + 1].$$

■

Una *estrella* es una gráfica bipartita de la forma $K_{1,t}$, para algún $t \geq 1$. Una *galaxia* es una gráfica cuyas componentes conexas son estrellas.

5.3 Teorema. Para cualquier gráfica G se tiene que

$$n - m \leq \gamma(G) \leq n + 1 - \sqrt{1 + 2m}.$$

Además $\gamma(G) = n - m$ si, y sólo si, G es una galaxia.

Demostración. Del teorema 5.1 tenemos que

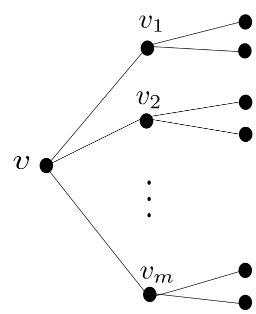
$$2m \leq (n - \gamma(G))(n - \gamma(G) + 2) = (n - \gamma(G))^2 + 2(n - \gamma(G)),$$

y entonces $2m + 1 \leq (n - \gamma(G))^2 + 2(n - \gamma(G)) + 1 = (n - \gamma(G) + 1)^2$. Como $n - \gamma(G) \geq 0$, podemos concluir que $n - \gamma(G) + 1 \geq \sqrt{2m + 1}$, y así tenemos la cota superior. Ahora, como $\gamma(G) \geq 1$, la cota inferior es clara para $m \geq n - 1$. Si $m < n - 1$, entonces G tiene al menos $n - m$ componentes conexas, por lo que $\gamma(G) \geq n - m$. Claramente la igualdad se da si, y sólo si, cada componente conexa tiene número de dominación igual a 1, lo cual ocurre si, y sólo si, G es galaxia. ■

6 Cotas en términos del diámetro.

6.1 Observación. Si $diam(G) = 2$, entonces $\gamma(G) \leq \delta(G)$.

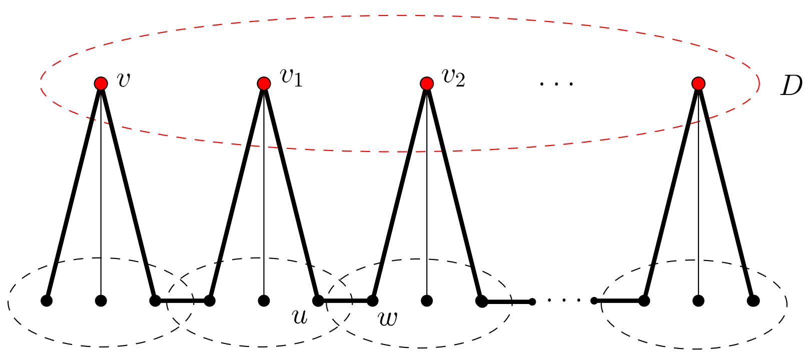
Demostración. Sea v un vértice de grado $\delta(G) = m$, y sean $v_1, \ldots, v_m$ todos los vecinos de v. Como $diam(G) = 2$, para todo $u \neq v$ se tiene que u es adyacente a v, o u es adyacente a uno de los vecinos de v, por tanto $\{v_1, ..., v_m\}$ es un conjunto dominador. ■



De hecho, para cada natural k es posible construir una gráfica conexa G_k con $diam(G_k) = 2$ y $\gamma(G_k) = k$: Ponemos un vértice v de grado k con vecinos $v_1, ..., v_k$, y a cada uno de ellos le ponemos $k - 1$ vecinos distintos a v y distintos entre sí.

6.2 Teorema. Para cualquier gráfica conexa G, $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{diam(G)+1}{3} \right\rceil$.

Demostración. Sean T una trayectoria de longitud $diam(G)$ y D un $\gamma-$conjunto de G. Observemos que para cada $v \in D$, T contiene a lo más dos aristas de la forma vu con $u \in N(v)$. También observemos que T contiene a lo más $\gamma(G) - 1$ aristas de la forma uw con $u \in N(v_1)$, $w \in N(v_2)$, para v_1, v_2 vértices distintos de D.



Por lo tanto $diam(G) \leq 3\gamma(G) - 1$, de donde se sigue el resultado. ■

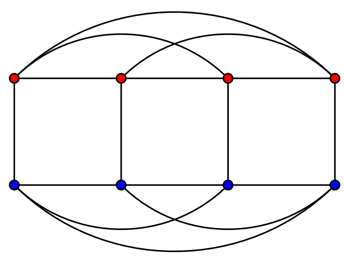
6.3 Observación. Si G es una gráfica tal que su complemento $\bar{G}$ tiene $\gamma(\bar{G}) \geq 3$, entonces $diam(G) \leq 2$.

Demostración. Como $\gamma(\bar{G}) \geq 3$, se tiene que para cualquier par de vértices $u, v \in V$, el conjunto $\{u, v\}$ no es dominador de $\bar{G}$, es decir, existe un vértice $w \in V \setminus \{u, v\}$ tal que w no es adyacente a u ni a v, en $\bar{G}$. Esto significa que para cualquier par de vértices $u, v \in V$, existe un tercer vértice w que es adyacente a ambos en G, lo cual nos da el resultado. ■

Cambiando G por $\bar{G}$ en la observación anterior, tenemos que si G no tiene vértices aislados y $diam(G) \geq 3$, entonces $\gamma(\bar{G}) = 2$.

7 Dominación e independencia

Definimos el *número de dominación superior* $\Gamma(G)$ como la mayor cardinalidad de un conjunto dominador minimal. La siguiente gráfica tiene $\Gamma(G) = 4$ y $\gamma(G) = 2$.



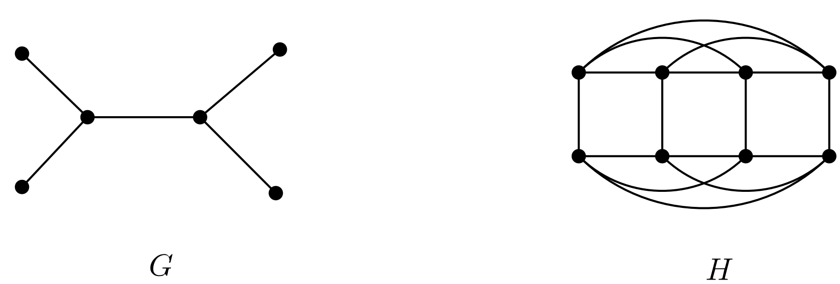
Un conjunto *independiente maximal* $S \subseteq V$ es un conjunto independiente tal que ningún $T \supsetneq S$ es independiente. El *número de independencia*, $\alpha(G)$, es la mayor cardinalidad de un conjunto independiente. El *número de dominación independiente*, $i(G)$, es la menor cardinalidad de un conjunto independiente maximal. Para T_4 se tiene $\alpha(T_4) = 3$ y $i(T_4) = 2$.

7.1 Observación. (1) Un conjunto independiente es maximal independiente si, y sólo si, es independiente y dominador.

(2) Todo conjunto independiente maximal es dominador minimal.

(3) Para toda gráfica G se cumple que $\gamma(G) \leq i(G) \leq \alpha(G) \leq \Gamma(G)$.

Observemos que cualquiera de las desigualdades anteriores puede ser estricta. En los siguientes ejemplos, G tiene $\gamma(G) = 2$, $i(G) = 3$, $\alpha(G) = 4 = \Gamma(G)$ y H tiene $\gamma(H) = i(H) = \alpha(H) = 2$ y $\Gamma(H) = 4$.



Vamos a establecer condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto dominador sea minimal.

Sean $X \subseteq V$ y $u \in X$. Entonces $v \in V$ es un *vecino exclusivo de* u *relativo a* X, o un *vecino* $X-$*exclusivo* de u, si v está en la vecindad cerrada de u pero no está en la vecindad cerrada de ningún otro elemento de X. Es decir, $v \in N[u]$ y $v \notin N[w]$ para todo $w \in X - \{u\}$.

7.2 Teorema. Un conjunto dominador D de una gráfica G es dominador minimal si, y sólo si D es dominador y todo $u \in D$ tiene un vecino $D-$exclusivo.

Demostración. Obsérvese la equivalencia de los siguientes enunciados: D es dominador minimal. D es dominador y para todo $u \in D$, $D - u$ no domina a G. D es dominador y para todo $u \in D$ existe $v \in V$ adyacente a u pero no adyacente a ningún otro vértice de D. D domina y todo $u \in D$ tiene un vecino $D-$exclusivo. ■

7.3 Observación. Toda gráfica sin vértices aislados tiene un menor conjunto dominador D tal que todo $u \in D$ tiene un vecino $D-$exclusivo en $V - D$.

Demostración. Sea D un $\gamma-$conjunto con máximo número de aristas. Si hubiera $u \in D$ tal que todo vecino x de u es dominado por otro $u' \in D$, debería tenerse que u es aislado dentro de D, pues de otro modo $D - \{u\}$ sería dominador. Pero entonces $(D - \{u\}) \cup \{x\}$ es dominador con más aristas. ■

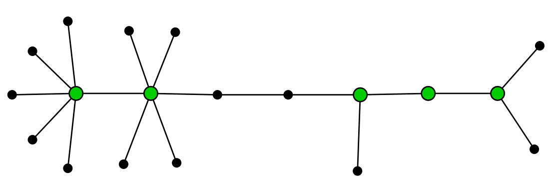
8 Condiciones sobre los conjuntos dominadores.

En esta sección vamos a pedir ciertas condiciones adicionales a los conjuntos dominadores para obtener variaciones del problema de dominación en gráficas.

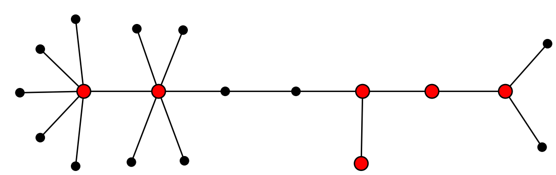
Un conjunto $D \subseteq V(G)$ dominador es:

- *Conjunto dominador independiente* si $G[D]$ no tiene aristas.
- *Conjunto dominador total* si $G[D]$ no tiene vértices aislados.
- *Conjunto dominador apareado* si $G[D]$ tiene apareamiento perfecto.
- *Conjunto dominador conexo* si $G[D]$ es conexa.

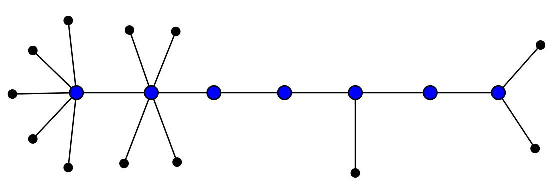
Ejemplos.



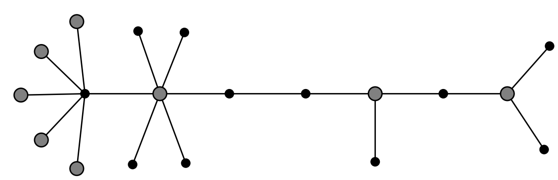
Conjunto dominador total.



Conjunto dominador apareado.



Conjunto dominador conexo.



Conjunto dominador independiente.

También definimos:

- El *número de dominación total* $\gamma_t(G)$ como la menor cardinalidad de un conjunto dominador total. (Sólo para gráficas sin vértices aislados.)
- El *número de dominación apareado* $\gamma_{pr}(G)$ como la menor cardinalidad de un conjunto dominador apareado. (Sólo para gráficas sin vértices aislados.)
- El *número de dominación conexa* $\gamma_c(G)$ como la menor cardinalidad de un conjunto dominador conexo. (Sólo para gráficas conexas.)

En la gráfica de los ejemplos anteriores, $\gamma(G) = 4$, $\gamma_t(G) = 5$, $\gamma_{pr}(G) = 6$, $\gamma_c(G) = 7$ e $i(G) = 8$.

Observemos que un conjunto D es dominador total si, y sólo si, todo vértice en V es adyacente a algún vértice en D (incluso los de D). Es decir,

$$\bigcup_{v \in D} N(v) = V$$

8.1 Observación. Para cualquier gráfica G sin vértices aislados,

$$\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq \gamma_{pr}(G) \leq 2\gamma(G) \leq |V(G)|$$

Demostración. La primera desigualdad se da porque todo conjunto dominador total es dominador. La segunda porque todo conjunto dominador apareado es dominador total. Para la tercera, sea D un conjunto dominador menor. Tomemos un apareamiento máximo en $G[D]$. Si es perfecto, se tiene $\gamma_{pr} = \gamma(G) < 2\gamma(G)$. Si no, sean $d_1, ..., d_k \in D$ vértices no apareados. Para cada d_i existe un $v_i \in V$ adyacente a él y además no se repiten, es decir, $d_i \neq d_j \Rightarrow v_i \neq v_j$. La última desigualdad se probó en el teorema 3.1. ■

8.2 Ejemplo. Vamos a determinar todas las gráficas G tales que $\gamma_t(G) = |V(G)|$. Si G es una gráfica sin vértices aislados tal que $\gamma_t(G) = |V(G)|$, entonces el menor conjunto dominador total es V, por lo que para todo $v \in V$, $V - v$ es dominador pero hay algún vértice x_v en D que es aislado en D, pero no en G. Por tanto x_v sólo es adyacente a v. De hecho, sólo hay un x_v con esa propiedad, pues si hubiera otro x'_v, $X - x_v$ no tendría vértices aislados. Entonces para cada $v \in V$ hay un único vértice adyacente a él. Concluimos que $G = K_2 + ... + K_2$.

8.3 Ejemplo. Para las trayectorias, podemos ver que:

1. $\gamma_t(T_n) = \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor$ para $n \equiv 0, 1, 2 \ (mod\ 4)$ y $\gamma_t(T_n) = \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor + 1$ para $n \equiv 3 \ (mod\ 4)$.

2. $\gamma_{pr}(T_n) = 2 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 2$.

3. $\gamma_c(T_n) = n - 2$ para toda $n > 1$.

La cota $\gamma_t(G) \leq \gamma_{pr}(G) \leq |V(G)|$ puede mejorarse para casi todas las gráficas. Se conocen los siguientes resultados de los que no daremos demostración.

Dominación total. Si G es conexa con $n \geq 3$ vértices, entonces $\gamma_t(G) \leq \frac{2n}{3}$. Además si $\delta(G) \geq 3$ entonces $\gamma_t(G) \leq \frac{n}{2}$.

Dominación apareada. Si G es conexa de orden $n \geq 6$ y $\delta(G) \geq 2$, entonces $\gamma_{pr}(G) \leq \frac{2n}{3}$.

9 La conjetura de Vizing sobre el número de dominación de productos cartesianos

Sean G y H gráficas. El *producto cuadro* $G\Box H$ es la gráfica con vértices $V(G)\times V(H)$ y aristas

$$A(G)\cup A(H)\cup\{gh : g\in V(G), h(H)\}$$

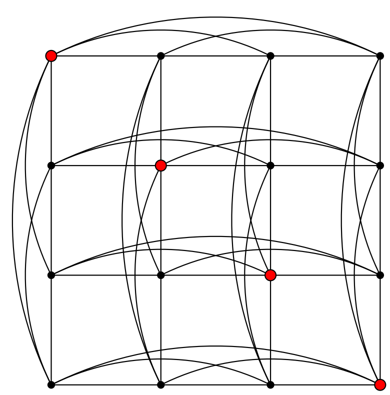
9.1 Observación. Para cualquier par de gráficas G, H, se tiene que $\gamma(G\Box H)\geq\gamma(G)$.

Demostración. Dado un $\gamma-$conjunto D para $G\Box H$, la proyección de D en G es un conjunto dominador para G. ■

La conjetura de V. G. Vizing (1968) dice lo siguiente:

9.2 Conjetura. Para todo par de gráficas finitas G y H, se cumple que $\gamma(G\Box H)\geq\gamma(G)\gamma(H)$.

Por ejemplo en $G = K_4\Box K_4$, puede verse que $4=\gamma(K_4\Box K_4)>\gamma(K_4)\gamma(K_4)=1$.



Decimos que una gráfica G *satisface la conjetura de Vizing*, si $\gamma(G\Box H)\geq\gamma(G)\gamma(H)$, para toda H. Por la observación que hicimos al principio, cualquier gráfica G con $\gamma(G)=1$ satisface la conjetura de Vizing. En particular $\gamma(K_n\Box H)\geq\gamma(H)$. Para el caso $n=2$, determinar las gráficas H que cumplen la igualdad $\gamma(K_2\Box H)=\gamma(H)$, es un caso particular de un problema de teoría de dominación que se resolvió apenas hace dos años.

En la sección 4 definimos 2-empaque como un subconjunto $S\subseteq V$ tal que para cada $u, v\in S$ se tiene $N[u]\cap N[v]=\emptyset$. Tenemos la siguiente observación.

9.3 Observación. Un subconjunto X es un 2-empaque si, y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, se tiene que $d(x, y) \geq 3$.

9.4 Proposición. Sean G una gráfica conexa y D un $\gamma-$conjunto de G. Supongamos que D se puede partir en dos subconjuntos U, W tales que cada vértice de $V - D$ es adyacente a un vértice en W y a un vértice en W. Entonces:

1. D es independiente.

2. U y W son 2-empaques.

3. $\delta(G) \geq 2$.

4. Para cada $u \in U$ existe $v \in W$ y $x, y \in V - D$ tales que $G[\{u, v, x, y\}] \cong C_4$.

5. $\gamma(G \square K_2) = \gamma(G)$.

Demostración. (1) Observemos que no hay aristas entre U y W, pues si $a = uv$ es arista con $u \in U$ y $v \in W$, los conjuntos $V - u$ y $V - v$ serían dominadores, una contradicción. Similarmente, tampoco hay aristas entre elementos de U o de W. Por tanto D es independiente.

(2) Si existe $z \in V - D$ tal que $|N_U(z)| \geq 2$, entonces $\tilde{D} = (D - N_U(z)) \cup \{z\}$ es dominador, una contradicción. Lo mismo ocurre al considerar W en vez de U.

(3) Para cada elemento $v \in V - D$ es claro que $\delta(v) \geq 2$, pues es dominado por algún vértice de U y otro de W. Ahora, sea $u \in U$. Si solo existiera un vecino x de u en $V - D$, ese vecino x es también vecino de algún $v \in W$, y tendríamos que $(D - \{u, v\}) \cup \{x\}$ es dominador, una contradicción. Lo mismo aplica para cualquier $v \in W$.

(4) Sea $u \in U$ y sean $x_1, ..., x_k \in V - D$ vecinos de u. Sabemos que $k \geq 2$. Veamos que no es posible que $x_1, \ldots, x_k$ formen una gráfica completa, pues si así fuera, x_1 sería adyacente a un $v \in W$ y podríamos intercambiar u, v por, x_1, digamos; obteniendo el conjunto dominador $(D - \{u, v\}) \cup \{x_1\}$, de nuevo una contradicción. Sin pérdida de generalidad, sean $x_2, \ldots, x_l \in V - D$ todos los vecinos de u tales que ninguno de ellos es adyacente a x_1. Sabemos que cada x_i es adyacente a un $v_i \in W$. Afirmamos que existe $i \neq j$ tal que $v_i = v_j$, pues de lo contrario, el conjunto dominador $(D - \{u, v_1, \ldots, v_l\}) \cup \{x_1, \ldots, x_l\}$ tendría menos elementos que V.

(5) La gráfica $G \square K_2$ consta de dos copias G' y G'' de G y aristas entre sus vértices correspondientes. Para $S \subseteq V$, vamos a denotar por S' y S'' a los subconjuntos de vértices correspondientes en G' y G'', respectivamente. Entonces basta observar que $U' \cup W''$ es

dominador de $G\Box K_2$ para ver que $\gamma(G\Box K_2) \leq \gamma(G)$. La otra desigualdad se tiene porque cualquier conjunto dominador de $G\Box K_2$ induce de manera natural un conjunto dominador en G, proyectando los vértices. ■

9.5 Proposición. Sea G una gráfica conexa. Si $\gamma(G\Box K_2) = \gamma(G)$, entonces existe un conjunto dominador $D \subseteq V$ con las condiciones del teorema 9.4.

Demostración. Como antes, para $S \subseteq V$ denotamos por S' y S'' a los subconjuntos de vértices correspondientes en G' y G'', respectivamente. Supongamos que $\gamma(G\Box K_2) = \gamma(G) = \gamma$. Sea X un $\gamma-$conjunto de $G\Box K_2$. Como G es conexa, $|X| = \gamma < n$, por lo que existe un vértice $v \in V(G) - X$. Si $X \cap V(G'') = \emptyset$, entonces v' no está dominado por X, por lo tanto para cualquier $\gamma-$conjunto X de $G\Box K_2$, se tiene que $X \cap V(G') \neq \emptyset$ y $X \cap V(G'') \neq \emptyset$.

Definamos $U' = X \cap V(G')$, $W_1' = V(G') - N_{G'}[U']$ y similarmente $W'' = X \cap V(G'')$, $U_1'' = V(G'') - N_{G''}[W'']$. Observemos que $W_1 \subseteq W$ y $U_1 \subseteq U$. Sea $D = U \cup W$ y observemos que es conjunto dominador de G, pues $v \notin U \cup W \Rightarrow v' \notin U'$ y $v'' \notin W'' \Rightarrow v'$ adyacente a U' ó v'' adyacente a W'', pues de lo contrario, $v' \in W_1' \subseteq W'$ y $v'' \in U_1'' \subseteq U$. Además $D = U \cup W$ es $\gamma-$conjunto, pues, en general, $|U \cup W| \leq |U| + |W| = \gamma$, pero al ser $U \cup W$ dominador de G, $|U \cup W| \geq \gamma$.

Finalmente observemos que cualquier $v \notin U \cup W$ es dominado por un vértice en U y por un vértice en W. ■

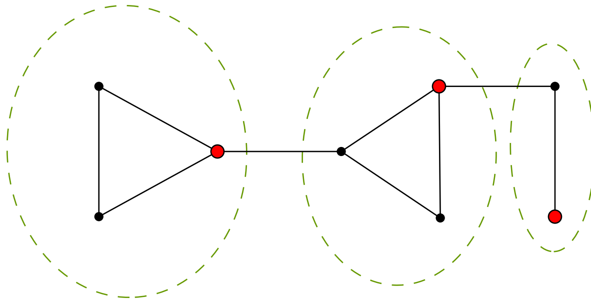
Para el caso $n = 3$ es fácil ver que no hay gráfica H que cumpla la igualdad $\gamma(K_3\Box H) = \gamma(H)$.

9.6 Ejemplo. No hay gráfica conexa no trivial tal que $\gamma(K_3\Box H) = \gamma(H)$.

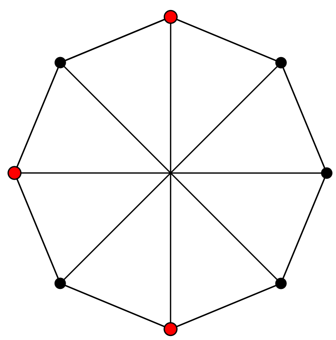
Demostración. Con una notación como la que hemos estado usando, supongamos que sí. Sea D un $\gamma-$conjunto para $K_3\Box H$. Como H es conexa y $\gamma(K_3\Box H) = \gamma(H)$, hay un vértice $v \in V(H) - D$. Sea $D_1' = D \cap V(H')$, $D_2'' = D \cap V(H'')$ y $D_3''' = D \cap V(H''')$. Entonces $D = D_1' \cup D_2'' \cup D_3'''$. Notemos que existe $x' \in V(H') - D_1'$ que no es adyacente a ningún vértice en D_1', pues de lo contrario, D_1' sería dominador más chico que H. Pero entonces x' no está dominado, una contradicción. ■

Se han determinado diversas condiciones bajo las cuales una gráfica G satisface la conjetura de Vizing.

Un *clan* de G es una subgrafica completa maximal. Decimos que G es *descomponible*, si V se puede cubrir por $\gamma(G)$ clanes. Por ejemplo, la siguiente gráfica es descomponible pues tiene número de dominación 3 y existen 3 clanes que cubren a todos los vértices de la gráfica.



Dada una gráfica descomponible G', una *BG gráfica* es una subgráfica generadora G de G', tal que $\gamma(G) = \gamma(G')$. Por ejemplo, son BG gráficas: árboles, ciclos, gráficas con $\gamma = 2$, gráficas con $\rho = \gamma$. No es BG gráfica:



Se sabe que las BG gráficas satisfacen la conjetura de Vizing. Enunciamos el teorema sin demostración.

9.7 Teorema. La conjetura de Vizing es cierta para BG gráficas.

Bibliografía.

[1] A. M. Barcalkin and L. F. German. The external stability number of the Cartesian product of graphs. *Bul. Akad. Stiince RSS Moldoven*, No. 1:5-8, 94, 1979.

[2] C. Berge. *Theory of Graphs and its Applications.*. Methuen, London, 1962.

[3] R. C. Brigham, P. Z. Chinn, and R. D. Dutton. Vertex domination-critical graphs *Networks.*, 18:173-179, 1988.

[4] R. C. Brigham, P. Z. Chinn, and R. D. Dutton. Bounds on the domination number of a graph. *Quart. J. Math. Oxford Ser. 2*, 41:269-275, 1990.

[5] Chartrand G., Zhang P., *A first course in Graph Theory*, Dover Publications, 2012.

[6] E. J. Cockayne. Chessboard domination problems. *Discrete Math.*, 86:13-20, 1990.

[7] E. J. Cockayne, R. M. Dawes, and S. T. Hedetniemi. Total domination in graphs. *Networks.*, 10:211-219, 1980.

[8] E. J. Cockayne, T. W. Haynes, and S. T. Hedetniemi. Extremal graphs for inequalities involving domination parameters. Submitted, 1996.

[9] E. J. Cockayne, S. T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*, Networks, Vol 7:247-261, 1977.

[10] Cozzens B. Margaret and Kelleher L. Laura, *Dominating Cliques in Grpahs*, Discrete Mathematics, Vol. 86:101-116, 1990.

[11] G. S. Domke, G. H. Fricke, R. C. Laskar, and A. Majumdar. Fractional domination and related parameters. In T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, editors, *Domination in Graphs: Advanced Topics*, chapter 3. Marcel Dekker, Inc., 1997.

[12] Haynes Teresa W., Hedetniemi Stephen, Slater Peter, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998.

[13] Haynes Teresa W., Hedetniemi Stephen, Slater Peter, *Domination in Graphs: Advanced Topics*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998.

[14] Harary F., *Graph Theory*, Perseus Books, 1994.

[15] Hedetniemi S. T., Laskar R. *Connected domination in graphs*, Graph Theory and Combinatorics. Academic Press, London-New York, 209-217, 1984

[16] W. McCuaig and B. Shepherd. Domination in Graphs with minimum degree two. *J. Graph Theory*, 13:749-762, 1989.

[17] O. Ore. *Theory of Graphs*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 38 (Amer. Math. Soc., Providence, RI), 1962.

[18] Y. Caro and Y. Roditty. On the vertex-independence number and star decomposition of graphs. *Ars Combin.*, 20:167-180, 1985.

[19] C. Payan and N. H. Xuong. Domination-balanced graphs. *J. Graph Theory*, 6:23-32, 1982.

[20] B. Randerath and L. Volkmann. Characterization of graphs with equal domination and covering number. *Discrete Math.* To appear.

[21] B. Reed. Paths, stars, and the number three. Submitted, 1996.

[22] L. A. Sanchis. Maximum number of edges in conected graphs with a given domination number. *Discrete Math.*, 87:65-72, 1991.

[23] P. J. Slater. Locating dominating sets and locating-dominating sets. In Y. Alavi and A. Schwenk, editors, *Graph Theory, Combinatorics, and Applications, Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs*, pages 1073-1079. John Wiley Sons, Inc., 1995.

[24] V. G. Vizing. A bound on the external stability number of a graph. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 164:729-731, 1965.

[25] V. G. Vizing. Some unsolved problems in graph theory. *Uspekhi Mat. Nauk*, 23(6 (144)):117-134, 1968.