



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS MAT. LUIS
MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

**Formación de distribuciones
estacionarias de plasma alrededor de
hoyos negros de Kerr**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

PRESENTA:

Flavio Rosales Infante

TUTOR:

Dr. Francisco Shidarta Guzmán Murillo



Morelia, Michoacán, México.
Junio 2022

*A mis padres y novia por darme su apoyo y cariño de
forma incondicional.*

Agradecimientos

A mis padres Flavio y Marcela, por haberme brindado su apoyo en cada paso para cumplir mis metas, su esfuerzo y dedicación fue una parte esencial para culminar este trabajo. A mi novia Diana por su cariño y apoyo moral que me brindó permitiendome no darme por vencido en los momentos más difíciles y su familia por haberme abierto las puertas de su hogar durante todo este proceso.

Agradezco mi asesor Dr. Francisco Shidarth quien con su conocimiento, consejos y correcciones guiaron esta investigación, así como a mis profesores de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas "Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez" quienes supieron impartir su conocimiento para hacer posible mi formación profesional.

A mis compañeros por su amistad y momentos que compartimos dentro y fuera de las aulas. A mis gatos Maya y Benito por haber estado a mi lado en el desarrollo de este trabajo y mis años de formación.

Al Instituto de Física y Matemática de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por haber proporcionado la infraestructura necesaria para el desarrollo de las simulaciones presentadas en este trabajo.

Resumen.

En este trabajo se presenta la evolución de un plasma siendo acretado por un hoyo negro de Kerr en el régimen de fluido de prueba, es decir, la entrada de materia al hoyo negro así como el mismo plasma no afectan al espacio-tiempo. La dinámica del fluido está siendo afectada por un campo magnético inicial constante y paralelo al eje de rotación. Se buscan distribuciones de densidad de materia en reposo, velocidad y campo magnético estacionarias variando el parámetro de espín del hoyo negro y la magnitud del campo magnético inicial, obteniendo un total de veintiún simulaciones en tres dimensiones espaciales. Para llevar a cabo la evolución se resuelven las ecuaciones de magnetohidrodinámica ideal en un espacio tiempo curvo de forma numérica utilizando el método de Alta Resolución con Captura de Choques.

Asbtract.

In this work, the evolution of a plasma being accreted by a Kerr black hole in the test fluid regime is presented, that is, the entrance of matter to the black hole as well as the plasma itself does not affect space-time. The fluid dynamics is being affected by a constant initial magnetic field parallel to the axis of rotation. Stationary distributions of rest-mass density, velocity and magnetic field are sought by varying the spin parameter of the black hole and the magnitude of the initial magnetic field, obtaining a total of twenty-one simulations in three spatial dimensions. To carry out the evolution, the ideal magnetohydrodynamic in a curved space-time equations are solved numerically using the High Resolution Shock Capture method.

Palabras clave: Relatividad numérica, hoyo negro, Kerr, acreción, plasma.

CONTENIDO

1. Introducción	1
2. Magnetohidrodinámica en espacio-tiempos curvos	4
2.1. Dinámica del plasma	4
2.2. Métodos numéricos	8
2.2.1. Volúmenes finitos en una dimensión	9
2.2.2. Volúmenes finitos en tres dimensiones	11
2.2.3. Reconstrucción de variables	12
2.2.4. Solucionador de Riemann aproximado HLLE	15
2.2.5. Evolución temporal	17
2.2.6. Condiciones de frontera	19
2.2.7. Recuperación de las variables primitivas	20
2.2.8. Transporte de flujos restringidos	21
2.3. Cactus	21
2.3.1. GRHydro	22
2.3.2. Carpet	24

2.3.3. Compilación y ejecución	26
3. Acreción	28
3.1. El espacio-tiempo	28
3.2. Condiciones iniciales para el fluido	34
3.3. Condiciones iniciales para el campo magnético	40
4. Resultados	42
4.1. Caso 1: Acreción esféricamente simétrica	43
4.2. Caso 2: Acreción hidrodinámica en un hoyo negro de Kerr	49
4.3. Caso 3: Acreción MHD en un hoyo negro de Schwarzschild	52
4.4. Caso 4: Acreción MHD en un hoyo negro de Kerr	57
4.5. Caso 5: Formación de un disco de acreción.	66
5. Conclusiones	71
A. Apéndice	73
REFERENCIAS	75

Capítulo 1

Introducción

La acreción en un objeto compacto es un problema en astrofísica que se ha estudiado exhaustivamente, uno de los primeros trabajos al respecto es presentado en [Bondi 1952], donde se encontró una solución analítica esféricamente simétrica de la caída de un fluido perfecto a un acretor puntual con un potencial newtoniano, posteriormente este trabajo se extendió a una solución radial y estacionaria para la acreción de un fluido perfecto con presión en el espacio-tiempo de Schwarzschild [Michel 1972]. Una evolución natural de este estudio sería encontrar una solución analítica para la acreción de un fluido en el espacio-tiempo de Kerr pero no ha sido posible encontrar una solución general, sin embargo se han realizado notables trabajos como [Pariev 1995] donde se estudiaron los flujos de acreción en un hoyo negro rotante con parámetro de espín arbitrario y ecuación de estado politrópica, considerando una desviación de la solución de Bondi, es decir, se estudia el límite no relativista. Por otro lado [Petrich et al. 1988] encuentran una solución analítica para un fluido de prueba ultra-relativista en un hoyo negro rotante, esta solución es especialmente interesante debido a que no considera perturbaciones de las soluciones de Bondi o Michel.

Estos modelos se han extendido añadiendo diversas consideraciones físicas, entre las que están resolver las ecuaciones de campo de Einstein acopladas a la hidrodinámica con simetría esférica, como se muestra en el artículo académico [Guzmán et al. 2020]; añadiendo un fluido con bajo momento angular [Mach et al. 2018], un campo magnético externo o transferencia radiativa [Mckinney et al. 2014] . Todos estos casos estarán influidos por las condiciones iniciales, teniendo así una gran cantidad de escenarios por estudiar. Debido a la complejidad de las ecuaciones se vuelve inviable la construcción

de soluciones analíticas, recurriendo así a las soluciones numéricas.

Los estudios de un plasma siendo acregado por un hoyo negro rotante que obedece las ecuaciones de la magnetohidrodinámica han sido un lugar común en años recientes debido a que son el modelo teórico para observaciones de núcleos galácticos activos (AGN por sus siglas en inglés), entre las que se encuentra uno de los descubrimientos más espectaculares de la época, la captura de la primer imagen de un hoyo negro por la colaboración Event Horizon Telescope [EHT I 2019]. La estrategia más común para el desarrollo de simulaciones de este tipo es utilizar condiciones iniciales correspondientes a un fluido con distribución toroidal en equilibrio hidrostático, en conjunto con un campo magnético poloidal axialmente simétrico, algunos ejemplos de este tipo de simulaciones aparecen en [De Villiers & Hawley 2003], donde se presenta la formación de discos de acreción y [McKinney 2006] la formación de jets debido al mecanismo de Blandford-Znajek para la extracción de energía del hoyo negro de Kerr [Blandford & Znajek 1976].

Existe una amplia variedad de códigos que resuelven las ecuaciones de MHD en un espacio-tiempo curvo, el primer código estable que logró evolucionar un plasma alrededor de un hoyo negro de Kerr es HARM [Gammie, MacKinney & Tóth 2003], con el tiempo diversas comunidades han creado sus propios códigos como lo son ECHO [Del Zanna et al. 2007] y Whisky [Giacomazzo & Rezzolla 2007], programado sobre la plataforma Cactus [Babiuc-Hamilton et al. 2015] que goza de popularidad por su fácil manejo.

En este trabajo se presenta la solución numérica en tres dimensiones de la MHD ideal para un plasma siendo acregado en un hoyo negro rotante, dicho proceso de acreción es modificado por un campo magnético constante y paralelo al eje de rotación del hoyo negro. Se busca estudiar el efecto de la rotación del hoyo negro y la magnitud del campo magnético inicial sobre el proceso de acreción.

Para lograrlo se usan condiciones iniciales que corresponden a un flujo que entra desde una región lejana al hoyo negro, se traza la evolución del plasma y se estudia cómo el flujo se distribuye en perfiles cuasi-estacionarios alrededor del hoyo negro. De esta manera se estudian los efectos de la rotación y el campo magnético sobre la tasa de acreción, perfil de densidad y velocidad del plasma.

La metodología del trabajo incluye una fase de correspondencia, que nos obliga a comparar nuestro enfoque, la implementación de condiciones iniciales y de frontera, con resultados previos. Para ello usamos las soluciones conocidas de acreción esférica de Michel [Michel 1972], así como los recientes resultados que se han encontrado en simetría axial [Aguayo-Ortíz et al. 2021]. Una vez probado que la implementación funciona en estos casos exploramos el caso MHD.

El espacio de parámetros explorado tiene el fin de encontrar estados estacionarios, utilizando intensidades de campo magnético y parámetros de espín pequeños en un dominio numérico de radio $40M$, este régimen se escoge debido a que se adapta a las capacidades computacionales con las que contamos. Las ecuaciones de la MHD se resuelven utilizando la plataforma de Cactus, debido a que proporciona una infraestructura para la paralelización del código [Babiuc-Hamilton et al. 2015].

Los métodos numéricos utilizados en la simulaciones pueden describirse brevemente de la siguiente manera: la solución numérica se realiza utilizando la discretización de un dominio numérico descrito en coordenadas Cartesianas, usando volúmenes finitos y métodos de Alta Resolución con Captura de Choques, equipados con diversos reconstructores de variables y varias fórmulas de flujos de la clase HLL para el cálculo de flujos numéricos. La evolución temporal está realizada con el método de líneas (MoL) utilizando el integrador explícito Runge-Kutta de orden 4.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se presenta una descripción de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica en espacio-tiempos curvos, así como los métodos numéricos que se utilizan para resolverlas. En el Capítulo 3 se ilustran las condiciones iniciales y de frontera utilizadas en nuestro análisis. En el Capítulo 4 se presentan los resultados numéricos en escenarios que van desde los casos esféricamente simétricos hasta los más complejos. Finalmente en el Capítulo 5 presentamos las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Magnetohidrodinámica en espacio-tiempos curvos

SECCIÓN 2.1

Dinámica del plasma

La construcción de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD) está basada en la descomposición 3 + 1 del espacio-tiempo, cuyo elemento de línea se escribe como [Misner, Thorne & Wheeler 1973]

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \beta_i\beta^i)dt^2 + 2\beta_idx^idt + \gamma_{ij}dx^idx^j, \quad (2.1)$$

donde α es el lapso, β^i el vector desplazamiento y γ_{ij} es la 3-métrica de la hipersuperficie tipo espacio Σ_t de tiempo constante t con la que se folia el espacio-tiempo, en forma general se considera que α , β^i y γ_{ij} se encuentran en función de las coordenadas espaciales y temporal, sin embargo en este caso se busca resolver las ecuaciones de la MHD en un espacio-tiempo fijo, que no cambia en el tiempo, estando así en función únicamente de las coordenadas espaciales. El vector normal a Σ_t en cada punto del espacio-tiempo está dado por $n^\mu = g^{\mu\nu}n_\nu$ donde $n_\nu = (-\alpha, 0, 0, 0)$. Con esta métrica podemos construir la 4-velocidad de un elemento de fluido $u^\mu = (u^0, u^i)$ con $i = 1, 2, 3$ en términos de las velocidades medidas por un observador euleriano

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{W}{\alpha} = \frac{1}{\alpha\sqrt{1-v^i v_i}}, \quad (2.2)$$

$$v^i = \frac{u^i}{u^0} = \frac{u^i}{W} + \frac{\beta^i}{\alpha}, \quad (2.3)$$

siendo τ el tiempo propio, v^i las componentes de la 3-velocidad del elemento del fluido y W su factor de Lorentz, que podemos escribir con esta métrica como

$$W = \frac{1}{\sqrt{1-v^i v_i}} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma_{ij}v^i v^j}}. \quad (2.4)$$

La representación 3 + 1 de la MHD ideal se sigue del procedimiento presentado en [Antón et al 2006] y [Baumgarte & Shaphiro 2003]. El campo electromagnético está descrito por el tensor de campo de Faraday $F^{\mu\nu}$, que relaciona las componentes de campo eléctrico E y magnético B medidas desde el observador con 4-velocidad n^μ de la siguiente manera

$$F^{\mu\nu} = n^\mu E^\nu - n^\nu E^\mu - \eta^{\mu\nu\lambda\delta} n_\lambda B_\delta, \quad (2.5)$$

donde

$$\eta^{\mu\nu\lambda\delta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} [\mu\nu\lambda\delta], \quad (2.6)$$

se usó la siguiente notación $g = \det(g_{\mu\nu})$ y $[\mu\nu\lambda\delta]$ el símbolo de Levi-Civita totalmente antisimétrico. Por otro lado el dual del tensor de campo electromagnético $*F^{\mu\nu}$ está definido como

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\lambda\delta} F_{\lambda\delta}. \quad (2.7)$$

En términos del campo eléctrico y magnético medidos por el observador Euleriano sus componentes se escriben como

$$*F^{\mu\nu} = n^\mu B^\nu - n^\nu B^\mu + \eta^{\mu\nu\lambda\delta} n_\lambda E_\delta. \quad (2.8)$$

Las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse en términos de estos dos tensores como [Barut 1964]

$$\nabla_\nu *F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.9)$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \mathcal{J}^\mu, \quad (2.10)$$

donde ∇_ν es la derivada covariante consistente con la métrica (2.1) y \mathcal{J}^μ es la 4-corriente eléctrica. De acuerdo a la ley de Ohm podemos expresar la corriente eléctrica de la siguiente manera

$$\mathcal{J}^\mu = \rho_q u^\mu + \sigma F^{\mu\nu} u_\nu \quad (2.11)$$

aquí ρ_q es la densidad de carga eléctrica y σ la conductividad eléctrica. Es posible simplificar las ecuaciones de Maxwell aplicando la condición de la MHD ideal, es decir, tomando en cuenta que el fluido en cuestión es un conductor perfecto. El fluido tendrá una conductividad infinita, y por ello el término $\sigma F^{\mu\nu} u_\nu$ debe desaparecer para mantener la corriente finita. Esto implica que el campo eléctrico medido por un observador en reposo es cero, mientras que el observador con velocidad n^μ mide las componentes del campo E en función del campo magnético

$$E^\mu = F^{\mu\nu} n_\nu = \frac{1}{W} \eta^{\mu\nu\lambda\delta} u_\nu u_\lambda B_\delta, \quad (2.12)$$

de forma explícita

$$E^0 = 0, \quad (2.13)$$

$$E^i = -\alpha \eta^{0ijk} v_j B_k, \quad (2.14)$$

o en términos de los 3-vectores $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$, donde el producto cruz es definido usando el elemento de volumen inducido en el espacio-tiempo absoluto $\eta = \alpha \eta^{0ijk}$. Utilizando la expresión de las componentes eléctricas y la elección del observador Euleriano podemos reescribir (2.5) y (2.8) como

$$F^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu\lambda\delta} u_\lambda B_\delta, \quad (2.15)$$

$${}^*F^{\mu\nu} = \frac{u^\mu B^\nu - u^\nu B^\mu}{W}, \quad (2.16)$$

y podemos reducir (2.9), haciendo uso de (2.16), a la condición de divergencia libre del campo magnético y la ecuación de inducción para la evolución del campo magnético

$$\frac{\partial(\sqrt{\gamma} B^i)}{\partial x^i} = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^0} (\sqrt{\gamma} B^i) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{\gamma} [(\alpha v^i - \beta^i) B^j - (\alpha v^j - \beta^j) B^i]), \quad (2.18)$$

reescribiendo (2.17) y (2.18) usando los 3-vectores se tiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \vec{B}) = \vec{\nabla} \times [(\alpha \vec{v} - \vec{\beta}) \times \vec{B}]. \quad (2.20)$$

Una vez establecida la ecuación de evolución para el campo magnético en la MHD ideal, debemos obtener las ecuaciones para la evolución de la materia. Estas ecuaciones pueden obtenerse de la ecuación para la conservación de la masa en reposo del plasma y la divergencia del tensor de energía-momento, que respectivamente son

$$\nabla_\mu (\rho_0 u^\mu) = 0, \quad (2.21)$$

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.22)$$

donde $T^{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento para un fluido en un campo magnético, se obtiene sumando el tensor para el fluido, que asumimos perfecto y el tensor de energía-momento del campo electromagnético

$$T^{\mu\nu} = T_{fluido}^{\mu\nu} + T_{EM}^{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

explícitamente el tensor de energía-momento para el fluido perfecto es

$$T_{fluido}^{\mu\nu} = \rho_0 h u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

donde ρ_0 es la densidad de masa en reposo del elemento de fluido, p su presión y h su entalpía específica, definida por $h = 1 + \epsilon + p/\rho_0$, siendo ϵ la energía interna específica. Podemos obtener $T_{EM}^{\mu\nu}$ en función del tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$

$$T_{EM}^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F_\lambda^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\delta} F_{\lambda\delta}, \quad (2.25)$$

y usando (2.15) es posible reescribir (2.25) como

$$T_{EM}^{\mu\nu} = \left(u^\mu u^\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \right) b^2 - b^\mu b^\nu, \quad (2.26)$$

donde b^k es el campo magnético medido desde un marco de referencia comóvil con el fluido $b^\mu = u_\nu {}^*F^{\mu\nu}$ con ${}^*F^{\mu\nu}$ el dual del tensor de Faraday y $b^2 = b^\mu b_\mu$. Entonces, sumando (2.24) y (2.26), el tensor de energía momento total es

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 h^* u^\mu u^\nu + p^* g^{\mu\nu} - b^\mu b^\nu. \quad (2.27)$$

Aquí p^* es la suma de la presión hidrodinámica con la presión magnética $p^* = p + b^2/2$, y observemos que esta notación es consistente si definimos además $\epsilon^* = \epsilon + b^2/(2\rho)$ y entonces $h^* = 1 + \epsilon^* + p^*/\rho$.

Las ecuaciones de la MHD ideal en relatividad general en forma de balance de flujos pueden ser escritas como

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_{x^i} \mathbf{F}^i(\mathbf{u}) = \mathbf{S}(\mathbf{u}), \quad (2.28)$$

donde \mathbf{u} es el conjunto de variables conservativas, $\mathbf{F}^i(\mathbf{u})$ los flujos y $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ representa fuentes de las ecuaciones de balance. El conjunto de las ocho variables conservativas está definido en función las de variables primitivas ρ_0 , p , v^i , ϵ y B^k como

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} D \\ S_i \\ \tau \\ B^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\gamma} W \rho_0 \\ \sqrt{\gamma} (\rho_0 h^* W^2 v_j - \alpha b^0 b_j) \\ \sqrt{\gamma} (h^* W^2 - p^* - (\alpha b^0)^2) - D \\ \sqrt{\gamma} B^k \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

donde γ es el determinante de la 3-métrica γ_{ij} . Se puede encontrar una relación para b^μ y B^k de la siguiente manera:

$$b^0 = \frac{WB^i v_i}{\alpha}, \quad (2.30)$$

$$b^i = \frac{B^i + \alpha b^0 u^i}{W}, \quad (2.31)$$

$$b^2 = \frac{B^2 + \alpha(b_0)^2}{W^2}, \quad (2.32)$$

donde $B^2 = B^i B_i$.

Los flujos se definen en términos de las variables primitivas y conservativas como

$$\mathbf{F}^i(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} D(\alpha v^i - \beta^i) \\ S_j(\alpha v^i - \beta^i) + p^* \delta_j^i \\ \tau(\alpha v^i - \beta^i) + p^* v^i \\ \mathcal{B}^k(\alpha v^i - \beta^i) - \mathcal{B}^i(\alpha v^k - \beta^k) \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

y los términos fuente son

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ T^{\mu\nu}(\partial_\mu g_{\nu j} + \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{\delta j}) \\ \alpha(T^{\mu 0} \partial_\mu \ln \alpha - T^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0) \\ 0^k \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

donde $0^k = (0, 0, 0)^T$.

El sistema (2.29,2.33,2.34) es un sistema indeterminado de 8 ecuaciones diferenciales parciales para nueve variables primitivas. Para cerrar el sistema se suele asumir que el fluido obedece la ecuación de estado del gas ideal

$$p = \rho_0 \epsilon (\Gamma - 1), \quad (2.35)$$

donde Γ es el índice adiabático del gas.

SECCIÓN 2.2

Métodos numéricos

Se ha escrito el sistema de ecuaciones de la MHD ideal como un sistema de balance de flujos, dado que en sistemas no lineales como el descrito es común la formación de ondas

de choque en las soluciones, los métodos numéricos que no estén basados en sistemas de balance de flujos en presencia de ondas de choque convergerán a una solución incorrecta [Hou & Le Floch 1994], por otro lado [Lax & Wendroff 1960] han demostrado que los esquemas conservativos, si convergen, convergerán a la solución débil del problema.

Los esquemas no conservativos hacen uso de una discretización del dominio llamada diferencias finitas, estos se valen de la diferenciabilidad de la solución, mientras que los métodos conservativos necesitaran de una nueva discretización del dominio que no utilice la diferenciabilidad de las funciones involucradas en las ecuaciones, llamada volúmenes finitos. Los volúmenes finitos se distinguen principalmente de las diferencias finitas en que los primeros se enfocan en las celdas que componen la malla y el segundo en los puntos de la malla.

La estrategia para resolver un problema de valores iniciales (PVI) para la MHD es la siguiente:

1. Escribir el sistema de ecuaciones como un conjunto de ecuaciones de balance de flujos, como se hizo en (2.28), (2.29), (2.33) y (2.34).
2. Establecer condiciones iniciales para el PVI en las variables primitivas.
3. Evolucionar las variables conservativas usando el esquema de volúmenes finitos incluyendo condiciones de frontera adecuadas. Este paso necesita:
 - a) Reconstruir las variables conservativas en términos de los valores de las intercel-das.
 - b) Calcular los flujos numéricos.
 - c) Calcular las fuentes.
 - d) Implementar el método de líneas en la fórmula semidiscreta usando un integrador, en nuestro caso RK4.
 - e) Recuperar las variables primitivas para los siguientes pasos temporales y datos de salida.
4. Repetir el paso 3 hasta un tiempo final t_f .

2.2.1 Volúmenes finitos en una dimensión

Para poder ilustrar esta discretización consideremos para fines ilustrativos un dominio en el plano $x - t$ que se divide en celdas de volumen espacio-temporal $\Delta t \Delta x$, que nos restringe a tener un conjunto de valores discretos $t^n = n \Delta t$ y el espacio se discretiza con celdas cuyos centros se localizan en $x_i = i \Delta x$, donde el tamaño del paso temporal

es $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ y la resolución espacial es $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$, mientras que $x_{i-\frac{1}{2}}$ y $x_{i+\frac{1}{2}}$ son los valores extremos de las celdas centradas en $(x_i, t^{n+\frac{1}{2}})$ como se ilustra en la Figura 2.1.

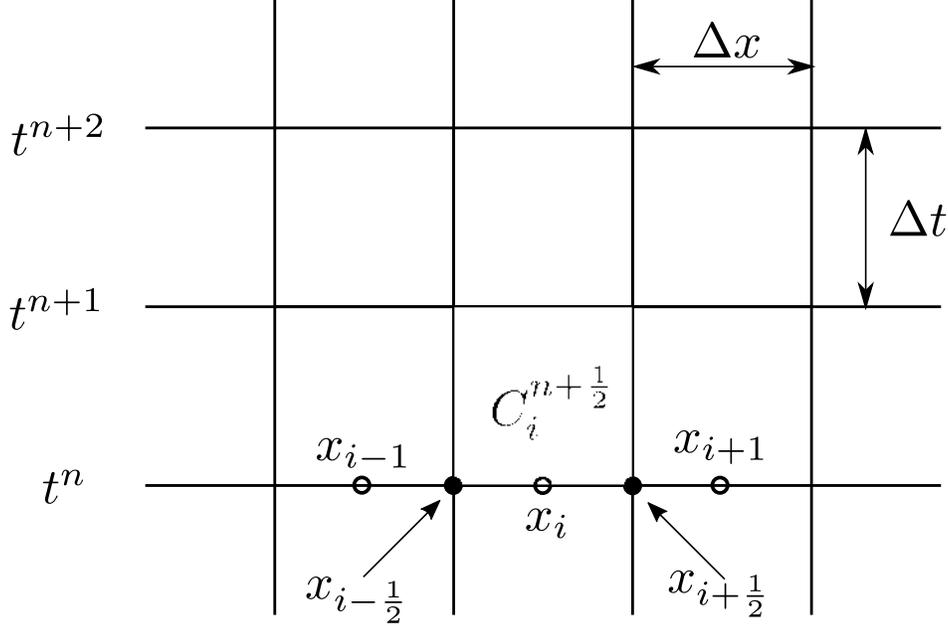


Figura 2.1: Discretización del dominio numérico homogéneo utilizando el esquema de volúmenes finitos.

Estudiemos el esquema de volúmenes finitos para una ley de conservación en una dimensión espacial

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{S}(\mathbf{u}), \quad (2.36)$$

donde \mathbf{u} es el vector de variables conservativas, $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ el vector de flujos y $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ los términos fuente. Entonces podemos escribir la versión integral de la ecuación (2.36) tomando el promedio de la ecuación en la celda de espacio-tiempo $C_i^{n+\frac{1}{2}}$:

$$\frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{u})) dx dt = \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{S} dx dt, \quad (2.37)$$

y es posible desarrollarlo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_t \mathbf{u} dx dt &= \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (\mathbf{u}(x, t^{n+1}) - \mathbf{u}(x, t^n)) dx \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{u}(x, t^{n+1}) dx - \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{u}(x, t^n) dx \right) \\ &= \frac{1}{\Delta t} (\bar{\mathbf{u}}_i^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_i^n), \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}_i^{n+1}$ y $\bar{\mathbf{u}}_i^n$ son los promedios espaciales de las variables a los tiempos t^n y t^{n+1}

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{u}(x, t^n) dx, \quad \bar{\mathbf{u}}(x, t^{n+1}) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{u}(x, t^{n+1}) dx. \quad (2.39)$$

De forma análoga podemos escribir el promedio del flujo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{u}) dx dt &= \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{F}(\mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) \right) dt \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left(\bar{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (2.40)$$

definimos $\bar{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ y $\bar{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ los promedios temporales en $x_{i+\frac{1}{2}}$ y $x_{i-\frac{1}{2}}$

$$\bar{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt, \quad \bar{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt. \quad (2.41)$$

Por último escribimos el promedio en el espacio-tiempo de los términos de fuente de la siguiente manera

$$\bar{\mathbf{S}}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{S}(t, x) dx dt. \quad (2.42)$$

Con esta nueva notación reescribimos (2.37) de forma discreta

$$\bar{\mathbf{u}}_i^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \bar{\mathbf{S}}_i^{n+\frac{1}{2}} \Delta t. \quad (2.43)$$

La ecuación (2.43) es una ecuación de evolución para el esquema de volúmenes finitos en una dimensión espacial.

2.2.2 Volúmenes finitos en tres dimensiones

Podemos realizar una extensión del método para el caso con tres dimensiones espaciales, para ello consideremos que el dominio computacional se divide en celdas de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ con un conjunto de valores discretos $t^n = n \Delta t$, $x_i = i \Delta x$, $y_j = j \Delta y$ y $z_k = k \Delta z$, las celdas tienen su centro en $C_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}}$ y las caras de las celdas son planos de $x_{i+\frac{1}{2}}$,

$x_{i-\frac{1}{2}}$, $y_{j+\frac{1}{2}}$, $y_{j-\frac{1}{2}}$, $z_{k+\frac{1}{2}}$ y $z_{k-\frac{1}{2}}$ constantes, como se muestra en la Figura 2.2. Se puede encontrar una fórmula para la evolución de los promedios de las variables conservativas en función de los flujos numéricos calculados en las fronteras de las celdas utilizando un proceso análogo al que se llevó para obtener la ecuación (2.43). Explícitamente el esquema se escribe como [Toro 1999]

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_{i,j,k}^{n+1} &= \bar{\mathbf{u}}_{i,j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{\mathbf{F}}^1_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{F}}^1_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\bar{\mathbf{F}}^2_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{F}}^2_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\bar{\mathbf{F}}^3_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{F}}^3_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \bar{\mathbf{S}}_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t, \end{aligned} \quad (2.44)$$

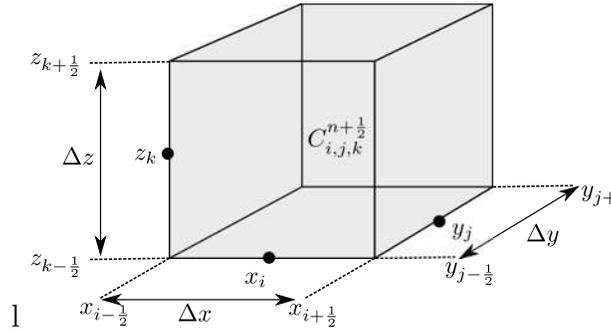


Figura 2.2: Celda de la malla $C_{i,j,k}^{t^{n+\frac{1}{2}}}$ centrada en x_i , y_j , z_k en el tiempo intermedio t^n y t^{n+1} .

Notemos que para obtener las ecuaciones (2.43) y (2.44) es necesario que \mathbf{u} y $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ sean continuamente diferenciables en la celda, esto no es posible de asegurar debido a la posible presencia de discontinuidades en la solución, ya sea durante la evolución o en las condiciones iniciales. Este problema se puede solucionar reconstruyendo las variables en cada celda como se presenta en la siguiente sección.

2.2.3 Reconstrucción de variables

Las ecuaciones (2.43) y (2.44) nos dan expresiones para la evolución de las variables conservativas, sin embargo no conocemos a priori el promedio temporal del flujo en las interceldas, existen diversas maneras para resolver este problema, entre ellas están los métodos numéricos tipo Godunov. La idea central detrás de los métodos tipo Godunov es considerar cada frontera de las interceldas como un problema de Riemann local, por lo que se requiere aproximar los promedios temporales de las variables conservativas como funciones constantes a trozos.

Existen diversos métodos de reconstrucción para los valores de las variables para el problema de Riemann a resolver, constantes como Godunov, lineales como los limitadores minmod, MC y superbee; también pueden ser aproximados con polinomios como

los métodos ENO y WENO. Por simplicidad, en esta sección se describirá la reconstrucción sobre la dirección de x , debido a que en las demás direcciones se realiza de forma análoga. El limitador Godunov se basa en tomar el valor del centro de la celda y tomarlo como constante sobre ésta:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2},j,k}^L &= \mathbf{u}_{i,j,k}, \\ \tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2},j,k}^R &= \mathbf{u}_{i+1,j,k}.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Minmod, MC y superbee siguen la misma lógica, sin embargo ahora no será una constante sino una línea recta. Lo que distingue cada uno de estos métodos es la manera de calcular la pendiente de la recta σ_i , con la siguiente fórmula

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2},j,k}^L &= \mathbf{u}_{i,j,k} + \sigma_i(x_{i+\frac{1}{2}} - x_i), \\ \tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2},j,k}^R &= \mathbf{u}_{i+1,j,k} + \sigma_{i+1}(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+1}),\end{aligned}\quad (2.46)$$

- Minmod [Van Leer 1979]

$$\sigma_i = \text{minmod}\left(\frac{\mathbf{u}_{i,j,k} - \mathbf{u}_{i-1,j,k}}{\Delta x}, \frac{\mathbf{u}_{i+1,j,k} - \mathbf{u}_{i,j,k}}{\Delta x}\right), \quad (2.47)$$

donde

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| < |b| \text{ y } ab > 0 \\ b & \text{si } |a| > |b| \text{ y } ab > 0 \\ 0 & \text{si } ab \leq 0 \end{cases}. \quad (2.48)$$

- Diferencias centrales monotizadas (MC) [Van Leer 1977]

$$\sigma_i = \text{minmod}\left(\frac{\mathbf{u}_{i+1,j,k} - \mathbf{u}_{i-1,j,k}}{2\Delta x}, 2\frac{\mathbf{u}_{i,j,k} - \mathbf{u}_{i-1,j,k}}{\Delta x}, 2\frac{\mathbf{u}_{i+1,j,k} - \mathbf{u}_{i,j,k}}{\Delta x}\right), \quad (2.49)$$

donde

$$\text{minmod}(a, b, c) = \begin{cases} \min(a, b, c) & \text{si } a, b, c > 0 \\ \max(a, b, c) & \text{si } a, b, c < 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}. \quad (2.50)$$

- Superbee [Roe 1986]

$$\sigma_i = \text{maxmod}(\sigma_i^{\mathbf{I}}, \sigma_i^{\mathbf{II}}), \quad (2.51)$$

donde

$$\sigma_i^{\mathbf{I}} = \minmod \left(2 \frac{\mathbf{u}_{i,j,k} - \mathbf{u}_{i-1,j,k}}{\Delta x}, \frac{\mathbf{u}_{i+1,j,k} - \mathbf{u}_{i,j,k}}{\Delta x} \right), \quad (2.52)$$

$$\sigma_i^{\mathbf{II}} = \minmod \left(\frac{\mathbf{u}_{i,j,k} - \mathbf{u}_{i-1,j,k}}{\Delta x}, 2 \frac{\mathbf{u}_{i+1,j,k} - \mathbf{u}_{i,j,k}}{\Delta x} \right), \quad (2.53)$$

y

$$\maxmod(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| > |b| \text{ y } ab > 0 \\ b & \text{si } |a| < |b| \text{ y } ab > 0 \\ 0 & \text{si } ab \leq 0 \end{cases} . \quad (2.54)$$

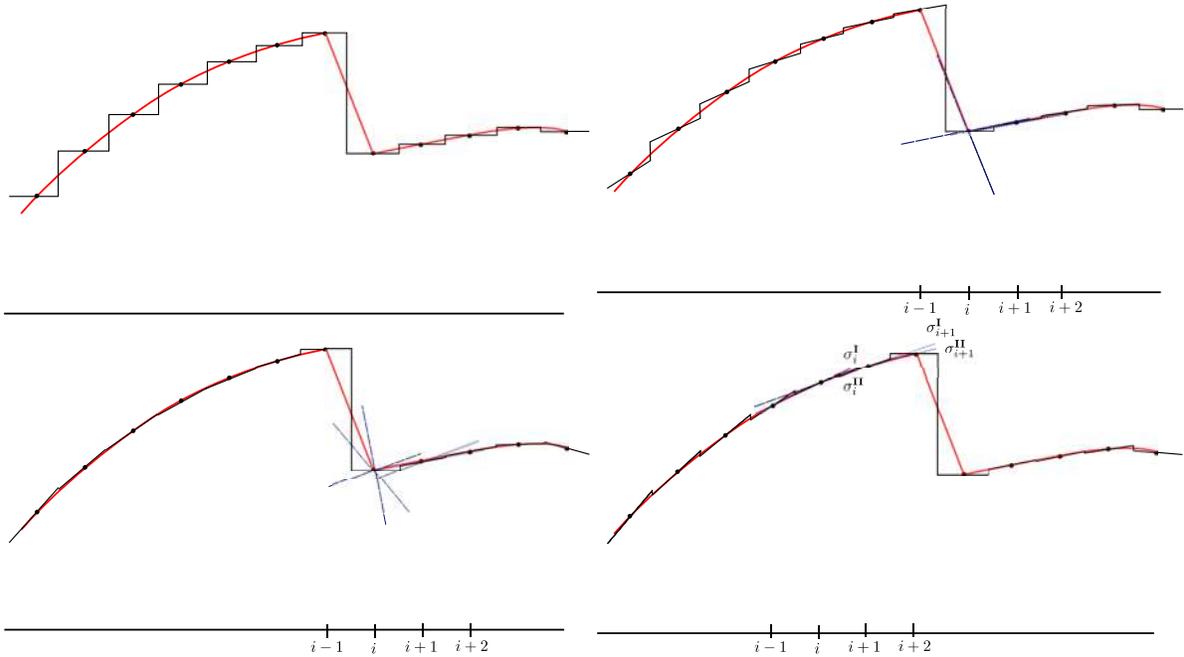


Figura 2.3: De izquierda a derecha y de arriba a abajo, se muestra el limitador Godunov, minmod, MC y superbee. En cada una de las imágenes se muestra un esquema de la reconstrucción lineal para cada limitador así como un ejemplo donde se muestran las pendientes necesarias para la reconstrucción. Las líneas punteadas sirven para la reconstrucción de $\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2},j,k}^R$ y las segmentadas para $\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2},j,k}^L$.

El limitador Godunov es el método más sencillo de implementar, sin embargo produce mucha disipación en la captura de discontinuidades. El limitador minmod escoge la menor pendiente en las interceldas y se reduce al limitador Godunov cuando las pendientes tienen signos opuestos, tiene una mayor precisión en la reconstrucción comparada con el limitador Godunov. MC es un limitador similar a minmod con la diferencia de que nos permite escoger una pendiente intermedia, haciendo que las pendientes no sean

tan pronunciadas. Por otro lado, superbee tiene un mejor desempeño en la captura de choques que los limitadores anteriores, sin embargo es más difícil de implementar.

2.2.4 Solucionador de Riemann aproximado HLLE

No se puede encontrar una solución analítica general para los problemas de Riemann con excepción de los casos unidimensionales, y el trabajo computacional de calcularlos de forma numérica para cada problema en las interceldas resulta incosteable para un caso en múltiples dimensiones. Bajo estas circunstancias surgen los resolvedores de Riemann aproximados como HLLE (Harten Lax Leer Einfeldt) que nos dan una solución aproximada explícita disminuyendo así las exigencias computacionales.

Los resolvedores de Riemann aproximados se basan en la estructura de eigenvalores de la matriz Jacobiana asociada a un sistema de ecuaciones tipo ley de balance de flujos, en nuestro caso (2.36), se dice que el resolvedor es incompleto debido a que toma en cuenta para la solución solo dos eigenvalores y no la descomposición característica completa. La idea central se encuentra en suponer que después del decaimiento de la discontinuidad inicial solamente dos ondas se propagan en direcciones opuestas con velocidades λ^- y λ^+ generando así un estado constante entre los valores $\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^L$ y $\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^R$ de la siguiente forma

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}^L & \text{si } \lambda < \lambda^- \\ \tilde{\mathbf{u}}^{HLLE} & \text{si } \lambda^- < \lambda < \lambda^+ \\ \tilde{\mathbf{u}}^R & \text{si } \lambda > \lambda^+ \end{cases}, \quad (2.55)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{u}}^{HLLE} = \frac{\lambda^+ \tilde{\mathbf{u}}^R - \lambda^- \tilde{\mathbf{u}}^L + \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^L) - \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^R)}{\lambda^+ - \lambda^-}. \quad (2.56)$$

El objetivo de utilizar estos resolvedores es construir los flujos numéricos para las ecuaciones de evolución (2.43) o (2.44). Los flujos en la interfaz $x_{i+\frac{1}{2}}$ están dados como

$$\bar{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^{HLLE} = \frac{\lambda^+ \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^L) - \lambda^- \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^R) + \lambda^+ \lambda^- (\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^R - \tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^L)}{\lambda^+ - \lambda^-}, \quad (2.57)$$

donde λ^+ y λ^- son definidos por

$$\begin{aligned} \lambda^+ &= \max(0, \lambda_j^L, \lambda_j^R), \\ \lambda^- &= \min(0, \lambda_j^L, \lambda_j^R), \end{aligned} \quad (2.58)$$

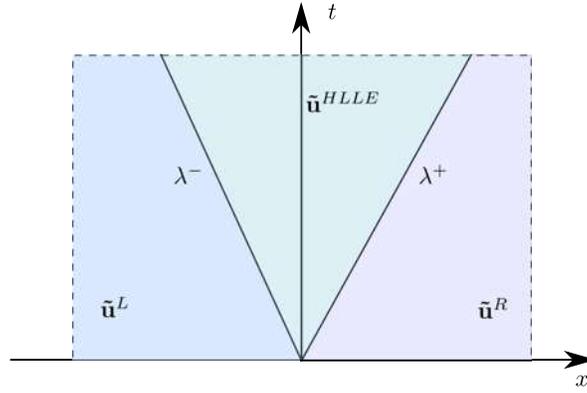


Figura 2.4: Se muestran los eigenvalores más rápidos λ^- y λ^+ , que corresponden a las velocidades con las que se propagan las ondas a la izquierda y derecha respectivamente en el plano $x - t$.

para el caso del sistema de ecuaciones de la MHD ideal (2.28)-(2.34), $j = 1, 2, \dots, 8$. La estructura característica de la MHD ideal en espacio-tiempos curvos es analizada en [Anile 1989], en este caso requerimos los valores propios para la implementación del resolutor HLL. Las velocidades características relacionadas con la propagación de perturbaciones de la densidad de materia tiene un valor propio comúnmente conocido como velocidad entrópica, y para cada dirección está dado por

$$\lambda = \alpha v^i - \beta^i, \quad (2.59)$$

mientras que para las ondas de Alfvén

$$\lambda = \frac{b^i \pm \sqrt{\rho_0 h + b^2 u^i}}{b^0 \pm \sqrt{\rho_0 h + b^2 u^0}}, \quad (2.60)$$

y las cuatro velocidades asociadas con las ondas magnetosónicas lentas y rápidas se obtienen de la solución de la siguiente ecuación cuártica para λ

$$\rho_0 h \left(\frac{1}{C_s^2} - 1 \right) a^4 - \left(\rho_0 h \frac{b^2}{C_s^2} \right) a^2 G + (b^i - b^0 \lambda)^2 G = 0, \quad (2.61)$$

donde

$$a \equiv \frac{W}{\alpha} (-\lambda + \alpha v^i - \beta^2), \quad (2.62)$$

$$G \equiv \frac{1}{\alpha^2} (-(\lambda + \beta^i)^2 + \alpha^2 \gamma^{ii}), \quad (2.63)$$

y C_s la velocidad del sonido. Notemos que en el término γ^{ii} se omite la convención de suma de Einstein. La ecuación (2.61) se resuelve de forma numérica utilizando el método de Newton-Raphson.

La elección del solucionador HLLE es una practica común en la MHD en espacios tiempos curvos debido a que la precisión obtenida es comparable con solucionadores que utilizan una descomposición completa de la estructura característica, teniendo estos últimos una implementación más complicada [Font 2008].

2.2.5 Evolución temporal

Para resolver las ecuaciones de la MHD se hace uso del método de líneas (MoL), que consiste en escribir al sistema de ecuaciones diferenciales parciales como un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en el tiempo, para lo que se asume que el sistema se puede escribir de forma semidiscreta. Utilizando (2.43) podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = & - \frac{\bar{\mathbf{F}}^1_{i+\frac{1}{2},j,k}{}^{HLLE} - \bar{\mathbf{F}}^1_{i-\frac{1}{2},j,k}{}^{HLLE}}{\Delta x} - \frac{\bar{\mathbf{F}}^2_{i,j+\frac{1}{2},k}{}^{HLLE} - \bar{\mathbf{F}}^2_{i,j-\frac{1}{2},k}{}^{HLLE}}{\Delta y} \\ & - \frac{\bar{\mathbf{F}}^3_{i,j,k+\frac{1}{2}}{}^{HLLE} - \bar{\mathbf{F}}^3_{i,j,k-\frac{1}{2}}{}^{HLLE}}{\Delta z} + \bar{S}_{i,j,k}^{+\frac{1}{2}} = [\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}})]_{i,j,k}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

$[\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}})]_{i,j,k}$ es un operador que contiene las derivadas numéricas espaciales de los flujos numéricos y las fuentes en forma discretas. Los flujos numéricos se calculan utilizando el resolvidor de Riemann HLLE, (2.64) se integra de t^n a t^{n+1} y se repite para todo i , j y k para tener al final la solución en todo el espacio tetradimensional. Existen diversas maneras de integrar la versión semidiscreta, entre los que están los métodos Runge-Kutta de m-etapas, de forma recursiva podemos escribirlos como

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}^{(0)} &= \bar{\mathbf{u}}^n, \\ \bar{\mathbf{u}}^{(p)} &= \sum_{q=0}^{p-1} (\alpha_{pq} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} + \Delta t \beta_{pq} [\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}^{(q)})]_{i,j,k}), \\ \bar{\mathbf{u}}^{n+1} &= \bar{\mathbf{u}}^{(m)}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

donde α_{pq} y β_{pq} son constantes, sin embargo los métodos Runge-Kutta de segundo y tercer orden son los más usados debido a que satisfacen las condiciones para cumplir la propiedad TVD (*total variation diminishing*) [Shu & Osher 1989]

$$\alpha_{pq} \geq 0, \quad \beta_{pq} \geq 0, \quad \sum_{q=0}^{p-1} \alpha_{pq} = 1, \quad (2.66)$$

y la condición para un máximo de la constante de Courant-Friedrichs-Lewy definida como $C_{CFL} = \Delta t \lambda_{max}^n / \Delta x$, donde λ_{max}^n es la velocidad característica del sistema en el paso temporal n

$$C_{CFL,max} = \min_{pq} \left(\frac{\alpha_{pq}}{\beta_{pq}} \right), \quad (2.67)$$

para los métodos Runge-Kutta de segundo y tercer orden $C_{CFL,max} = 1$. La propiedad TVD nos asegura el amortiguamiento de oscilaciones de alta frecuencia en la solución cuando se integre en el tiempo, en el caso de haber una discontinuidad este tipo de métodos pueden suavizarla durante la evolución. A continuación se presenta el método de Runge-Kutta de tercer orden

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{u}}^{(0)} &= \bar{\mathbf{u}}^n, \\
\bar{\mathbf{u}}^{(1)} &= \bar{\mathbf{u}}^{(0)} + \Delta t[\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}^{(0)})]_{i,j,k}, \\
\bar{\mathbf{u}}^{(2)} &= \frac{1}{4}(3\bar{\mathbf{u}}^{(0)} + \bar{\mathbf{u}}^{(1)} + \Delta t[\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}^{(1)})]_{i,j,k}), \\
\bar{\mathbf{u}}^{n+1} &= \frac{1}{3}(\bar{\mathbf{u}}^{(0)} + 2\bar{\mathbf{u}}^{(2)} + 2\Delta t[\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}^{(2)})]_{i,j,k}),
\end{aligned} \tag{2.68}$$

en la practica la constante de Courant se considera constante para poder establecer el paso temporal como $\Delta t = C_{CFL} \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

Es posible utilizar métodos Runge-Kutta de mayor orden, a pesar de que este método no es TVD se ha demostrado en [Gottlieb et al. 2001] que preserva fuertemente la estabilidad (SSP por sus siglas en inglés) bajo condiciones más relajadas que en la propiedad TVD

$$\alpha_{pq} \geq 0, \quad C_{CFL,max} = \min_{pq} \left(\frac{\alpha_{pq}}{|\beta_{pq}|} \right), \tag{2.69}$$

buscamos esta propiedad debido a que nos asegura la ausencia de oscilaciones aumentado el orden de la aproximación sin un coste computacional adicional. Se utilizó el método Runge-Kutta de orden cuatro que es SSP para el desarrollo de las simulaciones presentadas en esta tesis, definido de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{u}}^{(0)} &= \bar{\mathbf{u}}^n, \\
\bar{\mathbf{u}}^{(1)} &= \bar{\mathbf{u}}^{(0)} + \frac{1}{2}\Delta t[\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}^{(0)})]_{i,j,k}, \\
\bar{\mathbf{u}}^{(2)} &= \bar{\mathbf{u}}^{(0)} + \frac{1}{2}\Delta t[\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}^{(1)})]_{i,j,k}, \\
\bar{\mathbf{u}}^{(3)} &= \bar{\mathbf{u}}^{(0)} + \Delta t[\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}^{(2)})]_{i,j,k}, \\
\bar{\mathbf{u}}^{n+1} &= \frac{1}{6}(-2\bar{\mathbf{u}}^{(0)} + 2\bar{\mathbf{u}}^{(1)} + 4\bar{\mathbf{u}}^{(2)} + 2\bar{\mathbf{u}}^{(3)} + \Delta t[\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}^{(3)})]_{i,j,k}).
\end{aligned} \tag{2.70}$$

En problemas sencillos como la solución numérica de la ecuación de advección con métodos explícitos, la constante de Courant se determina con base en la velocidad de propagación de la onda para que no sea mayor a la velocidad de la malla y así el método pueda tener toda la información necesaria para la correcta solución del problema. Para nuestro sistema de ecuaciones en un caso ideal se debería encontrar un máximo de las velocidades características del sistema para poder determinar una constante de Courant adecuada para resolver el sistema, sin embargo esto resulta complicado debido a que este

máximo varía en el tiempo, por ello se determinan las constantes de Courant utilizadas en el trabajo por medio de ensayo y error.

Con Δx , Δy y Δz buscamos minimizar su tamaño dentro de las capacidades de la memoria RAM y cálculo con la que contamos, debido a que al hacer esto podemos utilizar constantes C_{CFL} más grandes, haciendo que el tiempo de cálculo sea menor. Es importante tratar de disminuir el tiempo en que la computadora realiza la evolución temporal debido a que se está utilizando un dominio numérico relativamente grande, si no se tiene cuidado en la elección de los parámetros numéricos el tiempo de ejecución podría tomar meses.

Para el desarrollo de este trabajo se considera $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.5$, entonces $\Delta t = C_{CFL}\Delta x$, en las simulaciones realizadas en este trabajo se utilizaron los valores $C_{CFL} = 0.40.25, 0.2, 0.159$ y 0.15 .

2.2.6 Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera son una parte importante en la solución de cualquier PVI, para un dominio numérico tridimensional cartesiano se necesitan en cada cara. Para el desarrollo de este trabajo es necesario conocer dos tipos de condiciones de frontera

- Condiciones de flujo saliente: Este tipo de condiciones de frontera evita que el flujo que se dirige a las caras de la frontera regrese al dominio numérico, las condiciones para las seis caras se definen como

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_{N_x,j,k} &= \tilde{\mathbf{u}}_{N_x-1,j,k}, & \tilde{\mathbf{u}}_{0,j,k} &= \tilde{\mathbf{u}}_{1,j,k}, \\ \tilde{\mathbf{u}}_{i,N_y,k} &= \tilde{\mathbf{u}}_{i,N_y-1,k}, & \tilde{\mathbf{u}}_{i,0,k} &= \tilde{\mathbf{u}}_{i,1,k}, \\ \tilde{\mathbf{u}}_{i,j,N_z} &= \tilde{\mathbf{u}}_{i,j,N_z-1}, & \tilde{\mathbf{u}}_{i,j,0} &= \tilde{\mathbf{u}}_{i,j,1}.\end{aligned}\tag{2.71}$$

- Condiciones de flujo entrante: De forma similar, estas condiciones consisten en inyectar materia al dominio numérico a través de las caras. Esencialmente estas condiciones consisten en heredar el valor de las variables en las fronteras de las condiciones iniciales en todo el dominio en los subsecuentes pasos temporales. Se definen para las seis caras como

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_{N_x,j,k}^{n+1} &= \tilde{\mathbf{u}}_{N_x,j,k}^n, & \tilde{\mathbf{u}}_{0,j,k}^{n+1} &= \tilde{\mathbf{u}}_{0,j,k}^n, \\ \tilde{\mathbf{u}}_{i,N_y,k}^{n+1} &= \tilde{\mathbf{u}}_{i,N_y,k}^n, & \tilde{\mathbf{u}}_{i,0,k}^{n+1} &= \tilde{\mathbf{u}}_{i,0,k}^n, \\ \tilde{\mathbf{u}}_{i,j,N_z}^{n+1} &= \tilde{\mathbf{u}}_{i,j,N_z}^n, & \tilde{\mathbf{u}}_{i,j,0}^{n+1} &= \tilde{\mathbf{u}}_{i,j,0}^n.\end{aligned}\tag{2.72}$$

Ambas fueron implementadas en [Gracia-Linares 2017] para que cada cara pueda tener una condición de frontera distinta en cada cara. En todas las simulaciones de esta

tesis se utilizaron condiciones de frontera de flujo entrante en las seis caras del dominio numérico, para emular un escenario astrofísico en que constantemente se está aproximando plasma hacia el hoyo negro.

2.2.7 Recuperación de las variables primitivas

Las variables que se evolucionan en la MHD ideal escrita como un conjunto de ecuaciones de balance de flujos son las variables conservativas D , S_i , τ y \mathcal{B}^k , estas se escriben en términos de las variables primitivas ρ_0 , p , v^i y B^k , como se muestra en (2.29). Sin embargo no se conoce una forma explícita de invertir (2.29), por lo que se necesita aplicar métodos numéricos para recuperar las variables primitivas.

Asumiendo la ecuación de estado del gas ideal, podemos expresar ρ_0 , v^i , B^k , W y e en función de las variables conservativas y la presión

$$B^k = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \mathcal{B}^k, \quad (2.73)$$

$$v^i = \frac{S_i}{(\tau + \sqrt{\gamma p + D}) \gamma_{ij}}, \quad (2.74)$$

$$W = \frac{\tau + \sqrt{\gamma p + D}}{\sqrt{(\tau + \sqrt{\gamma p + D})^2 - S^2}}, \quad (2.75)$$

$$\rho_0 = \frac{D}{\tau + \sqrt{\gamma p + D}} \sqrt{(\tau + \sqrt{\gamma p + D})^2 - S^2}, \quad (2.76)$$

$$e = \frac{\sqrt{(\tau + \sqrt{\gamma p + D})^2 - S^2} - \sqrt{\gamma p} - D}{D}, \quad (2.77)$$

donde $S^2 = \gamma^{ij} S_i S_j$. Para obtener el valor de la presión se buscan los ceros de la siguiente función con ayuda de las expresiones anteriores

$$f(p) = p - \rho_0 e (\Gamma - 1), \quad (2.78)$$

esto se realiza utilizando el método de Newton-Raphson y el propósito es en iterar el valor de la presión de la siguiente manera

$$p_k = p_{k-1} - \frac{f(p)}{f'(p)}, \quad (2.79)$$

el proceso se termina con cuando el error relativo definido como la diferencia entre los valores consecutivos entre el promedio de ellos cumple la siguiente condición

$$\left| \frac{p_k - p_{k-1}}{\frac{1}{2}(p_k + p_{k-1})} \right| < \epsilon. \quad (2.80)$$

Donde ϵ es la tolerancia relativa, esta puede ser arbitrariamente pequeña siempre que $\epsilon > 0$, en el artículo [Siegel et al. 2018] definen la convergencia de un esquema de recuperación de variables primitivas en MHD relativista general cuando el error relativo es menor a 5×10^{-9} , por lo que un rango apropiado para la elección de ϵ es

$$0 < \epsilon < 5 \times 10^{-9}, \quad (2.81)$$

en el desarrollo de las simulaciones presentadas en este trabajo se fija la tolerancia relativa de forma más conservadora, haciendo $\epsilon = 10^{-18}$.

Una vez encontrado el valor de la presión en todos los puntos del dominio, se procede a calcular las variables primitivas con (2.73)-(2.77).

2.2.8 Transporte de flujos restringidos

La MHD ideal tiene una ecuación extra (2.17), que no es de evolución, sino una restricción, esta ecuación describe la ausencia de monopolos magnéticos. Una de las principales dificultades en la solución numérica en las simulaciones de la MHD ideal es la aparición de errores numéricos en la restricción de divergencia en el campo magnético que podrían mal interpretarse como monopolos magnéticos. Uno de los métodos para combatir este problema es el algoritmo de transporte restringido, que introduce una viscosidad artificial [Evans & Hawley 1988]. En el desarrollo de esta tesis se utilizó un esquema simplificado conocido como flux-CT basado en los flujos numéricos, descrito en [Tóth 2000] y [Mösta et al 2013].

SECCIÓN 2.3

Cactus

El código Cactus Einstein toolkit [Babiuc-Hamilton et al. 2015] es una colección de componentes para la simulación y análisis de sistemas astrofísicos relativistas, actualmente utiliza el Framework Cactus como la infraestructura que proporciona la paralelización e I/O.

Cactus es un programa de fuente abierta con estructura modular que facilita la computación en paralelo de soluciones de PVI, en distintas arquitecturas. El nombre de Cactus proviene de su diseño, un núcleo central llamado “pulpa” que conecta un conjunto de aplicaciones modulares llamadas “espinas”. Una de las espinas más importantes

es GRHydro, que permite la solución del sistema de la MHD ideal en un espacio-tiempo curvo descrito en coordenadas cartesianas 3D. GRHydro está basado en el código Whisky [Giacomazzo & Rezzolla 2007] desarrollado originalmente por miembros del *EU Network on Sources of Gravitational Radiation*. Otro conjunto de espinas importantes para el desarrollo de esta tesis es Carpet, encargadas del manejo de la malla cuando se buscan múltiples niveles de refinamiento.

Dentro del conjunto de espinas, se encuentra la espina MoL, encargada de la evolución temporal con el método de líneas, como se describió en la sección 2.2.5 y la versión "Hilbert" de Cactus lanzada en Mayo de 2015 cuenta con los integradores descritos en la Tabla 2.1.

Etiqueta	Integrador numérico
Generic	Runge-Kutta tipo Shu-Osher
ICN	Crank Nicolson iterativo
ICN-avg	Crank Nicolson iterativo promediado
Euler	Método de Euler
RK2	Runge-Kutta de orden 2
RK3	Runge-Kutta de orden 3
RK45	Fehlberg con estimación de error
RK45CK	Cash-Karp con estimación de error
RK65	Método encajado RK6(5) con estimación de errores
RK87	Método encajado RK8(7) con estimación de errores
AB	Adams-Bashfort
RK2-MR-2:1	RK multiresolución basado en RK2
RK4-MR-2:1	RK multiresolución basados en RK4(3)

Cuadro 2.1: Integradores numéricos implementados en MoL.

2.3.1 GRHydro

La espina GRHydro resuelve las ecuaciones de la MHD en espacio-tiempos curvos, utilizando el esquema de volúmenes finitos descrito en la sección 2.2, por lo que tenemos que elegir el reconstructor y el resolvidor de Riemann. En la versión Hilbert se encuentran implementados los métodos de reconstrucción en la Tabla 2.2, pero para la MHD solamente se encuentra implementado el resolvidor de Riemann HLL.

Para evitar divergencias en diferentes cantidades como la entalpía específica y que ésta divergencia se traduzca a divergencias en otras cantidades se necesita que la densidad sea distinta de cero en todo el dominio numérico, entonces se introduce un valor mínimo de la densidad conocido como densidad atmosférica ρ_{atm} . La densidad atmosférica sirve además para reestablecer la densidad si es que surgen densidades negativas no físicas.

Etiqueta	Reconstructor
tvb	limitadores de pendiente TVD: minmod, diferencias centrales monotónicas (vanleerMC2) y superbee
ppm	método parabólico por partes
eno	esencialmente no oscilatorio
weno	ponderado esencialmente no oscilatorio
weno-z	versión mejorada de WENO [Borges et al. 2007]
mp5	quinto orden que conserva monotonicidad

Cuadro 2.2: Reconstructores implementados en GRHydro.

Para evitar las singularidades en espacio-tiempos, GRHydro utiliza una espina llamada `Hydro_InitExcision` que asigna un valor constante para las variables magnetohidrodinámicas en una zona del dominio numérico llamada excisión, dentro de la cual no se resuelven las ecuaciones de la MHD. Los parámetros a controlar en la espina `Hydro_InitExcision` son presentados en la tabla 2.3. Las componentes del campo magnético y el campo de velocidades se asignan como cero dentro de la excisión, además la densidad de materia se asigna como la densidad atmosférica ρ_{atm} .

Etiqueta	Descripción
<code>hydro_initexcision</code>	Establece una zona de excisión
<code>hydro_initexcision_type</code>	Tipo de excisión a aplicar (caja, esfera, ejes o diagonal)
<code>hydro_initexcision_position_x</code>	Posición del centro de la excisión en el eje x
<code>hydro_initexcision_position_y</code>	Posición del centro de la excisión en el eje y
<code>hydro_initexcision_position_z</code>	Posición del centro de la excisión en el eje z
<code>hydro_initexcision_coordinate_length</code>	Tamaño de la excisión

Cuadro 2.3: Parámetros de la espina `Hydro_InitExcision`

En este trabajo se utiliza una excisión esférica centrada en el origen de radio $1.5M$ para evitar la singularidad de anillo del espacio-tiempo de un hoyo negro de Kerr, evitando así divergencias en la métrica. La excisión se sitúa fuera de la singularidad de anillo, la ergosfera interna y el horizonte de eventos interno además de estar dentro del horizonte de eventos externo y la ergosfera externa. La excisión se sitúa en esta zona para asegurar que las velocidades características del sistema apunten al interior del hoyo negro y así garantizar la entrada de la materia al hoyo negro.

2.3.2 Carpet

Se necesita establecer una discretización para resolver las ecuaciones diferenciales parciales. La forma usual de establecer una malla es tener una resolución constante en todo el dominio numérico, esto es llamado unigrid, sin embargo aumentar la resolución de esta malla resulta sumamente costoso para dominios tridimensionales, llevándolo a ser inviable en escenarios astrofísicos con procesos violentos. Una solución para solventar este problema es superponer un conjunto de mallas con distinta resolución, donde las mallas con mayor tamaño tendrán menos resolución, esto es llamado refinamiento de malla fija.

Se encuentran implementadas dos espigas encargadas del manejo de la discretización dentro de Cactus, estas son *driver* para el caso unigrid y *carpet* para el refinamiento de malla fija. Carpet está basado en el esquema planteado por [Berger & Olinger 1984], donde el dominio computacional tiene un refinamiento base cartesiano con resolución Δx^0 subdividido en un conjunto de mallas rectangulares que se clasifican en k grupos según su resolución llamados niveles de refinamiento. Las mallas están totalmente contenidas dentro del nivel de refinamiento anterior y la resolución de estos niveles mantiene la relación $\Delta x^k = \Delta x^{k-1}/N_{refinamiento}$ donde $N_{refinamiento}$ es un número entero mayor a 1 que en la mayoría de casos se fija como 2, ya que para valores mayores de $N_{refinamiento}$ la cantidad de zonas de “buffering” necesarios para la evolución aumentaría consiguiendo por lo tanto un aumento en la memoria necesaria para ejecutar el programa, sin tener un aumento considerable en la resolución de la malla. La Figura 2.5 muestra un ejemplo esquemático de una distribución de mallas.

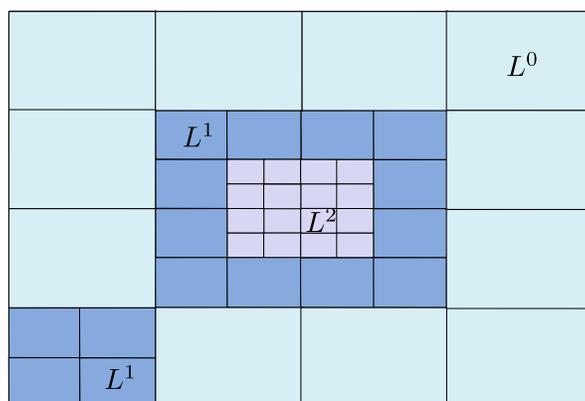


Figura 2.5: Distribución de un refinamiento de malla fija con 2 niveles de refinamiento, donde L^0 es el refinamiento base, L^1 y L^2 el primer y segundo nivel de refinamiento.

La evolución temporal en Carpet busca mantener el criterio de estabilidad dado por la constante CFL, para esto primero se evolucionan los datos del nivel de refinamiento más grueso funcionando como las condiciones de frontera para el siguiente refinamiento. Los datos de la malla gruesa se copian de forma directa en la malla fina en los puntos

espaciales y los pasos temporales donde están ambas mallas definidas, después se interpolan los datos en el tiempo y el espacio a lo largo de la frontera para la evolución en los dominios de mayor resolución. Para garantizar la consistencia de las condiciones de frontera de la malla fina para la evolución con un método numérico como los Runge-Kutta se hace uso de zonas de “buffering”, cuyo papel consiste en que en los pasos temporales intermedios se prolonga la frontera por medio de una interpolación dentro de la malla gruesa, así se obtiene la suficiente información para la evolución. Esto se esquematiza en la Figura 2.6.

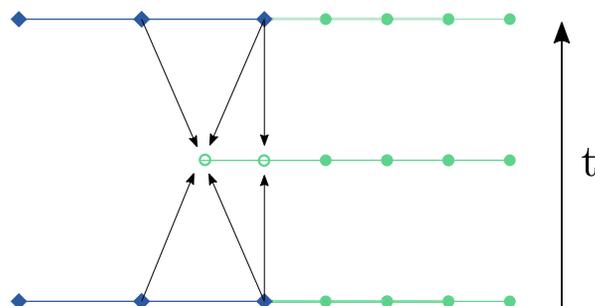


Figura 2.6: Esquema de la evolución temporal en la frontera entre dos niveles de refinamiento. Los rombos representan la malla gruesa, los círculos la malla fina y las flechas la interpolación.

Los principales parámetros a regular en las espinas Carpet están presentados en la Tabla 2.4.

Espina	Etiqueta	Descripción
CarpetRegrid2	num_centres	Número de centros en los que se sobreponen los niveles de refinamiento
	num_levels_i	Número de niveles de refinamiento para el centro i
	radius_i[j]	Radio del nivel refinamiento j en el centro i
Carpet	prolongation_order_space	Operador de orden de prolongación en el espacio
	prolongation_order_time	Operador de orden de prolongación en el tiempo

Cuadro 2.4: Parámetros de Carpet.

2.3.3 Compilación y ejecución

Cactus permite la construcción de distintas configuraciones para opciones de compilación y colecciones de espinas, las distintas configuraciones alojadas dentro del directorio `configs`. El procedimiento para crear una configuración es primero dar las opciones de compilación con el comando `make <nombre de la configuracion> <options>`, para el desarrollo de las simulaciones de esta tesis se utilizó el siguiente conjunto de opciones

```
F77=gfortran
F90=gfortran
CC=gcc
CXX=g++
```

```
PERL=/usr/bin/perl
FPP=/usr/bin/cpp -traditional
F77_OPTIMISE_FLAGS=-O2 -fcray-pointer
F90_OPTIMISE_FLAGS=-O2 -fcray-pointer
```

```
PTHREADS=yes
```

Una vez que se ejecuta el comando se generará un directorio con el nombre de la configuración dentro del directorio `configs`, dentro del cual se tendrá que escribir un archivo con el nombre `ThornList` que contenga la colección de espinas necesarias para la generación de la configuración, y una vez escrito se ejecuta el comando `make <configuracion>` para la compilación de las espinas listadas.

Una vez hechos los pasos anteriores dentro del directorio `exe` se habrá creado un archivo ejecutable con el nombre `cactus_<configuracion>`. Por otra parte, cada espina necesita un conjunto de parámetros que se encuentran descritos dentro de los directorios

```
arrangements/<Conjunto de espinas>/<Espina>
```

con el nombre `par.ccl`. En la mayoría de casos los parámetros se mantendrán con la opción por defecto y los que se desean modificar se cambiarán por medio de un archivo de parámetros que tendrá que estar en el directorio `exe`, tradicionalmente se nombra con el sufijo `.par` y tiene la siguiente estructura básica

```
ActiveThorns = "<Espina>"
<Espina>::<parametro> = <valor>
```

Las etiquetas de las Tablas 2.1, 2.2 y 2.4 son los nombres de algunos parámetros que a menudo se modifican en su correspondiente espina. Por último, la ejecución del programa se lleva a cabo con el comando

```
mpirun -np <numero de procesadores> ./cactus_<nombre de la configuracion>  
<archivo de parametros>.par
```

Capítulo 3

Acreción

SECCIÓN 3.1

El espacio-tiempo

En 1963 Kerr encontró una solución para las ecuaciones de Einstein que describe un hoyo negro rotante no cargado. Esta solución es estacionaria, axialmente simétrica con respecto del eje de rotación, asintóticamente plana y caracterizada por dos parámetros: la masa M y momento angular J del hoyo negro. La solución de Kerr suele presentarse en coordenadas de Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) , en estas coordenadas el elemento de línea se escribe de la siguiente manera

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma^2} \right) dt^2 - \frac{4Mar}{\Sigma^2} \sin^2 \theta dt d\phi + \frac{\Sigma^2}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta^2}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.1)$$

donde

$$\Sigma^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2,$$

y $a = J/M$ es una constante llamada parámetro de espín. Esta métrica es invariante bajo las transformaciones simultáneas de inversión temporal $t \rightarrow -t$ y $\phi \rightarrow -\phi$, sin

embargo no es invariante bajo inversión temporal únicamente a excepción de $a = 0$, que es el caso del hoyo negro de Schwarzschild.

Expandiendo (3.1) en torno a a/r y M/r

$$\begin{aligned}
ds^2 &= - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{2aM \cos^2 \theta}{r^3} + \dots \right) dt^2 - \left(\frac{4aM \sin^2 \theta}{r} + \dots \right) dt d\phi \\
&+ \left[1 + \frac{a^2(\cos^2 \theta - 1)}{r^2} + \dots \right] \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\
&+ \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 M \sin^2 \theta}{r} \right) \sin^2 \theta d\phi^2,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

y haciendo $a = 0$ podemos ver que (3.2) se reduce a la métrica de Schwarzschild.

En coordenadas de Boyer-Lindquist existen dos superficies donde la estructura de rayos nulos colapsa, estas superficies se obtienen imponiendo la condición $g_{tt} = 0$ y son conocidas como ergosuperficies

$$r_{s,\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}, \tag{3.3}$$

mientras que los horizontes de eventos se determinan calculando en qué superficies diverge la componente de la métrica g_{rr} , es decir haciendo $\Delta = 0$

$$r_{eh,\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \tag{3.4}$$

Como podemos observar, los horizontes de eventos y las superficies donde la estructura de rayos nulos colapsa no coinciden, a diferencia de lo que sucede en la solución de Schwarzschild. Además para la existencia de los horizontes de eventos es necesario que $|a| \leq M$.

La región entre $r_{s,+}$ y $r_{eh,+}$ es llamada ergosfera, caracterizada porque el efecto llamado *frame dragging* es particularmente fuerte en esta región. Este efecto consiste en la capacidad de un cuerpo masivo rotante para "arrastrar" el espacio-tiempo, es decir incluso teniendo una partícula de prueba con momento angular cero, el arrastre le inyectará una velocidad angular distinta de cero [Schutz 2009]:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{p^\phi}{p^t} = \frac{g^{\theta t}}{g^{tt}} = \frac{2Mar}{(r^2 + a^2)\Sigma + 2Ma^2r \sin^2 \theta}. \tag{3.5}$$

Existen dos tipos de singularidades en las coordenadas de Boyer-Lidquist, las que están dadas por el horizonte de eventos $\Delta = 0$ y las que están dadas por $\Sigma^2 = 0$. Para verificar

si estas singularidades son físicas o removibles bajo un cambio de coordenadas debemos evaluar el escalar de Kretschmann \mathcal{K} , que divergirá únicamente en las singularidades reales:

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \frac{48M^2}{\Sigma^6}(r^6 - 15a^2r^4\cos^2\theta + 15a^4r^2\cos^4\theta - a^6\cos^6\theta).\end{aligned}\quad (3.6)$$

Sustituyendo $\Sigma^2 = 0$ y $\Delta = 0$ en (3.6) podemos notar que la única singularidad física en el espacio-tiempo de Kerr corresponde a la condición $\Sigma^2 = 0$. De hecho, podemos remover la singularidad cuando $\Delta = 0$ con la siguiente transformación de coordenadas

$$dt' = dt + \frac{2Mr}{\Delta}dr, \quad d\phi = d\phi + \frac{a}{\Delta}dr, \quad (3.7)$$

o de forma explícita

$$t' = t + \int \frac{2Mr}{\Delta}dr, \quad (3.8)$$

$$\phi' = \phi + \int \frac{a}{\Delta}dr. \quad (3.9)$$

Estas nuevas coordenadas (t', r, θ, ϕ') son llamadas coordenadas de Kerr-Schild

$$\begin{aligned}ds^2 &= -(1-B)dt'^2 - 2Ba\sin^2\theta dt'd\phi' + 2Bdt'dr - 2a(1+B)\sin^2\theta drd\phi' \\ &+ (1+B)dr^2 + \Sigma^2 d\theta^2 + \frac{A\sin^2\theta}{\Sigma^2}d\phi'^2,\end{aligned}\quad (3.10)$$

donde

$$B = \frac{2Mr}{\Sigma^2}.$$

La singularidad física $\Sigma^2 = r^2 + a\cos^2\theta = 0$ ocurre en $r = 0$, $\theta = \pi/2$, se podría interpretar de forma errónea que es posible alcanzar el punto $r = 0$ a través de una trayectoria donde $\theta \neq \pi/2$. Esta dificultad puede solventarse con las llamadas coordenadas de Kerr-Schild Cartesianas (t, x, y, z) definidas por las transformaciones

$$x := \sqrt{r^2 + a^2}\sin\theta\cos\left[\phi' - \arctan\left(\frac{a}{r}\right)\right], \quad (3.11)$$

$$y := \sqrt{r^2 + a^2}\sin\theta\sin\left[\phi' - \arctan\left(\frac{a}{r}\right)\right], \quad (3.12)$$

$$z := r\cos\theta, \quad (3.13)$$

$$t := t'. \quad (3.14)$$

Las superficies de r constante se convierten en elipsoides definidos por

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1, \quad (3.15)$$

y esta relación sirve además para calcular de forma implícita a r . Todos los puntos en la superficie $z = 0$ y $x^2 + y^2 \leq a^2$ cumplen con $r = 0$, representando así la singularidad física en estas coordenadas. Podemos expresar los horizontes de eventos dados por (3.4) con ayuda de (3.15) como

$$\frac{x^2 + y^2}{(M \pm \sqrt{M^2 - a^2})^2 + a^2} + \frac{z^2}{(M \pm \sqrt{M^2 - a^2})^2} = 1, \quad (3.16)$$

mientras que las ergosuperficies (3.3) es conveniente expresarlas como un conjunto de ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left((M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta})^2 + a^2 \right) \sin^2(\theta) \\ z &= (M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}) \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.17)$$

En la Figura 3.1 se muestran las superficies importantes para el espacio-tiempo de Kerr en coordenadas de Kerr-Schild con un parámetro de espín $a = 0.99$ y $M = 1$, los horizontes de eventos determinados por la ecuación (3.16), las ergosuperficies descritas por las ecuaciones paramétricas (3.17) y la singularidad de anillo $z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2$ que representa la única singularidad física del espacio-tiempo. Para poder analizar el efecto de *frame dragging* dentro de la esrgosfera es importante notar que la ergosuperficie externa vista desde el plano ecuatorial es un círculo de radio $r_{s,+} = \sqrt{4M^2 + a^2}$, para el caso presentado en la Figura 3.18 este radio es $r_{s,+} = 2.231613766$.

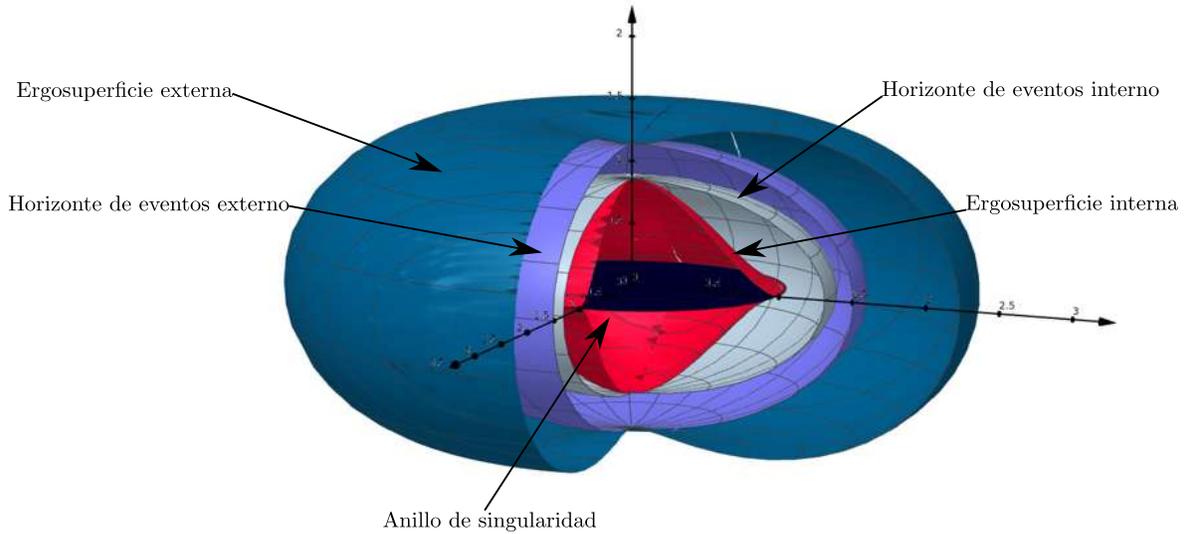


Figura 3.1: Espacio-tiempo de Kerr en coordenadas de Kerr-Schild. Se muestran los horizontes de eventos, ergosuperficies y la singularidad de anillo para un hoyo negro con parámetro de espín $a = 0.99$ y masa $M = 1$.

El elemento de línea en coordenadas de Kerr-Schild Cartesianas es

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2z^2} \left[dt + \frac{r(x dx + y dy)}{a^2 + r^2} + \frac{a(y dx - x dy)}{a^2 + r^2} + \frac{z}{r} \right]^2, \quad (3.18)$$

o bien, puede escribirse de la siguiente forma [Baumgarte & Shaphiro 2010]

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + 2Hl_\mu l_\nu) dx^\mu dx^\nu, \quad (3.19)$$

donde $H = Mr^3/(r^4 + a^2z^2)$, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ la métrica de Minkowsky y

$$l_\mu = \left(1, \frac{rx + ay}{r^2 + a^2}, \frac{ry - ax}{r^2 + a^2}, \frac{z}{r} \right) \quad (3.20)$$

y bajo el formalismo 3 + 1 identificamos la función de lapso α , el vector de corrimiento β^i y la 3-métrica tipo espacio γ_{ij} a partir del elemento de línea (3.19)

$$\alpha = \frac{1}{1 + 2H}, \quad (3.21)$$

$$\beta^i = \frac{2H}{1 + 2H} l^i, \quad (3.22)$$

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + 2Hl_i l_j. \quad (3.23)$$

Describiremos el proceso de acreción en un hoyo negro de Kerr considerando estas coordenadas. Como la acreción se considera en el régimen de fluido de prueba, el espacio-tiempo no cambiará durante la evolución.

Para el desarrollo de este trabajo se utilizan cuatro valores del parámetro de espín $a = 0.1, 0.3, 0.5$ y 0.7 , los espacio-tiempos para cada caso se encuentran representados en la Figura 3.2. Para evitar la singularidad de anillo y garantizar la entrada de la materia al hoyo negro se utiliza el método de excisión, expuesto en la sección 2.3.1, de una aproximación a una esfera formada por cubos del dominio computacional centrada en el origen, a la cual llamaremos esfera lego. Dicha esfera lego tiene radio $r_e = 1.5$ y se encuentra situada entre el horizonte de eventos interno y el horizonte eventos externo para cada caso, esto se ilustra en la Figura 3.2 donde se pueden ver las distintas superficies de los hoyos negros y la esfera de excisión.

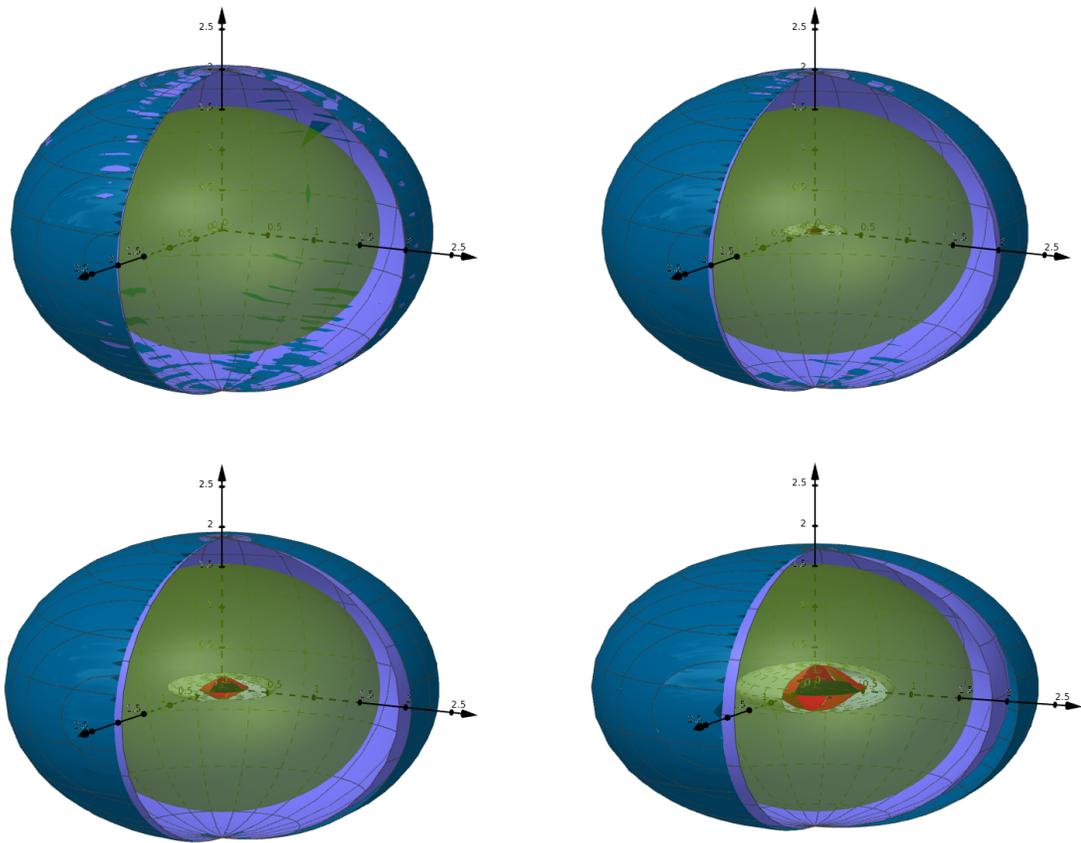


Figura 3.2: Espacio-tiempos de Kerr en coordenadas de Kerr-Schild para $M = 1$ y parámetros de espín $a = 0.1, 0.3, 0.5$ y 0.7 respectivamente. Se muestran los horizontes de eventos, ergosuperficies y singularidad de anillo para cada caso, en color verde se muestra la esfera de excisión.

SECCIÓN 3.2

Condiciones iniciales para el fluido

Las condiciones iniciales para las variables hidrodinámicas se construyen con la solución para un flujo radial estacionario de un fluido perfecto en un hoyo negro de Schwarzschild, conocido como acreción de Michel, dicha solución fue establecida en [Michel 1972]. Para el cálculo de estas soluciones en coordenadas de Edington-Finkelstein (EF) se sigue el procedimiento presentado en [Papadopoulos & Font 1998]. Las condiciones iniciales se encuentran inspiradas en las utilizadas en el trabajo de Tesis [Romero-Amezcuca 2020], donde se resuelven las ecuaciones de la hidrodinámica en un espacio-tiempo curvo con simetría esférica de forma numérica partiendo de condiciones iniciales constantes y llegando a las soluciones estacionarias de Michel.

El propósito es iniciar con esta distribución de fluido sobre un espacio-tiempo de Kerr para poder estudiar los efectos de la rotación del hoyo negro sobre el fluido.

Las coordenadas de EF al igual que las coordenadas de Kerr-Schild son penetrantes en el horizonte y equivalentes cuando el parámetro de espín es $a = 0$, el elemento de línea para un hoyo negro de Schwarzschild en coordenadas de EF se escribe como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{4M}{r} dt dr + \left(1 + \frac{2M}{r} \right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.24)$$

identificando (3.24) con (2.1) obtenemos la función lapso, el vector de corrimiento y la 3-métrica tipo espacio para estas coordenadas:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}}, \quad (3.25)$$

$$\beta^i = \left(\frac{2M}{r} \frac{1}{1 + \frac{2M}{r}}, 0, 0, 0 \right), \quad (3.26)$$

$$\gamma_{ij} = \text{diag} \left(\frac{2M}{r} \frac{1}{1 + \frac{2M}{r}}, r^2, r^2 \sin^2 \theta \right). \quad (3.27)$$

La idea original de Michel es integrar la ecuación para la conservación de la masa (2.21) y la divergencia del tensor de energía-momento (2.21) suponiendo simetría esférica, de

donde se obtiene

$$\frac{d(\sqrt{-g})\rho_0 u^r}{dr} = 0, \quad (3.28)$$

$$\frac{d(\sqrt{-g})T_t^r}{dr} = 0, \quad (3.29)$$

donde g es el determinante del tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Para el caso del hoyo negro de Schwarzschild en coordenadas de EF se cumple que $\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{\gamma} = r^2 \sin \theta$. Para un fluido perfecto el tensor de energía-momento está definido por (2.24), entonces las ecuaciones (3.28) y (3.29) toman la forma:

$$r^2 \rho_0 u^r = C_1, \quad (3.30)$$

$$r^2 \rho_0 h u^r u_t = C_2, \quad (3.31)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. Tomando los diferenciales totales de las expresiones (3.30) y (3.31) se obtiene

$$\frac{d\rho_0}{\rho_0} + \frac{du^r}{u^r} + 2\frac{dr}{r} = 0, \quad (3.32)$$

$$\frac{d(\rho_0 h)}{\rho_0 h} + 2\frac{dr}{r} + \frac{du^r}{u^r} + \frac{du_t}{u_t} = 0, \quad (3.33)$$

restando ambas expresiones se obtiene

$$\frac{d(\rho_0 h)}{\rho_0 h} - \frac{d\rho_0}{\rho_0} + \frac{du_t}{u_t} = 0, \quad (3.34)$$

y podemos reescribir los primeros dos términos de la ecuación anterior como

$$\frac{d(\rho_0 h)}{\rho_0 h} = d \ln(\rho_0 h) = \frac{d \ln(\rho_0 h)}{d \ln \rho_0} d \ln \rho_0, \quad (3.35)$$

$$\frac{d\rho_0}{\rho_0} = d \ln \rho_0, \quad (3.36)$$

así obtenemos la siguiente condición

$$\left[\frac{d \ln(\rho_0 h)}{d \ln \rho_0} - 1 \right] d \ln \rho_0 + \frac{du_t}{u_t} = 0. \quad (3.37)$$

A partir de la condición de normalización $u^\mu u_\mu = -1$ se puede encontrar una expresión para u_t

$$(u_t)^2 = -g_{tt} + (u^r)^2, \quad (3.38)$$

y con ayuda de (3.38) se obtiene el siguiente desarrollo

$$\frac{du_t}{u_t} = \frac{u^r}{(u_t)^2} du^r - \frac{1}{2(u_t)^2} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} dr = \frac{u^r}{(u_t)^2} du^r + \frac{M}{r^2 (u_t)^2} dr. \quad (3.39)$$

Finalmente se sustituye (3.39) en (3.37) y haciendo uso de (3.32) se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{du^r}{u^r} \left[V^2 - \left(\frac{u^r}{u_t} \right)^2 \right] + \frac{dr}{r} \left[2V^2 - \frac{M}{r(u_t)^2} \right] = 0, \quad (3.40)$$

donde $V^2 = d \ln(\rho_0 h) / d \ln \rho_0 - 1$. Esta ecuación es conocida como ecuación de viento, si cualquiera de los dos paréntesis se hace cero corresponde a un punto de retorno, sin embargo las soluciones que pasan por los puntos críticos donde ambos paréntesis se anulan representan una solución donde el material está cayendo al hoyo negro [Lora-Clavijo 2014]. Los valores críticos de u^r o V se obtienen de las siguientes relaciones:

$$(u_c^r)^2 = \frac{M}{2r_c}, \quad V_c^2 = \frac{(u_c^r)^2}{(u_c^r)^2 + 1 - \frac{2M}{r_c}}, \quad (3.41)$$

las cantidades quedan determinadas una vez conocido el valor del radio crítico r_c . Por otro lado se considera que el fluido obedece la ecuación de estado para un gas politrópico $p = K\rho_0^\Gamma$, porque se cumple la condición de isentroía. Dado el valor de la densidad crítica ρ_c y la constante adiabática es posible determinar la constante politrópica con el procedimiento presentado por Michel definiendo la función $T = p/\rho_0$ y escribiendo a V_c^2 en términos de esta nueva función

$$V_c^2 = \frac{(1+n)T_c}{n(1+(1+n)T_c)}, \quad (3.42)$$

donde n es el índice politrópico definido por $n = 1/(\Gamma - 1)$. De esta última ecuación se obtiene una expresión para la constante politrópica

$$K = T_c \rho_c^{1-\Gamma} = -\frac{nV_c^2}{(1+n)(nV_c^2 - 1)} \rho_c^{1-\Gamma}. \quad (3.43)$$

Una vez conocida la constante politrópica se calculan las constantes de integración C_1 y C_2 y finalmente se resuelven conjuntamente (3.30) y (3.31). De forma explícita la ecuación a resolver es

$$\left(1 + (n+1)K\rho_0^{\frac{1}{n}} \right)^2 \left(\frac{C_1^2}{\rho_0^2 r^4} + 1 - \frac{2M}{r} \right) - \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 = 0. \quad (3.44)$$

No se conoce una solución exacta para (3.44), debe ser encontrada de forma numérica. En el desarrollo de este trabajo se utiliza el método de Newton-Raphson para hacerlo.

Una vez conocido el perfil de densidad podemos escribir el la velocidad y presión en función de este perfil, la presión se escribe directamente de forma directa con ayuda de la ecuación de estado politrópica, mientras que para la velocidad primero debemos

escribir u^r , u_t y u^t con ayuda de las ecuaciones (3.30) y (3.31), una vez conocidas estas velocidades podemos escribir v^r con (2.2) y (2.3)

$$u^r = \frac{C_1}{r^2 \rho_0}, \quad (3.45)$$

$$u_t = \sqrt{(u^r)^2 + 1 + \frac{2M}{r}}, \quad (3.46)$$

$$u^t = -\frac{1 + (1 + \frac{2M}{r})(u^r)^2}{u_t + g_{rr}\beta u^r}, \quad (3.47)$$

$$v^r = \frac{u^r}{\alpha u^t} + \frac{\beta^r}{\alpha}, \quad (3.48)$$

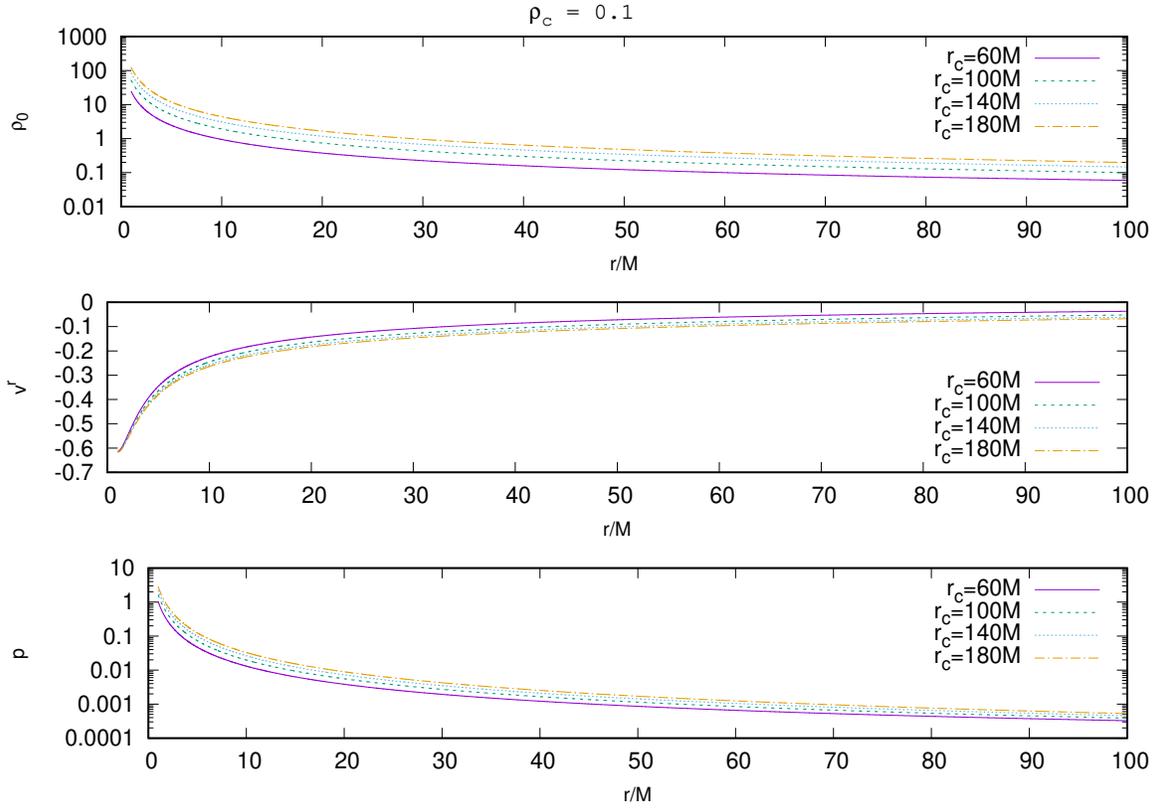


Figura 3.3: Soluciones para la acreción de Michel para distintos valores de r_c con el mismo valor de densidad crítica $\rho_c = 0.1/M^2$.

En la Figuras 3.3 y 3.4 se muestran algunos ejemplos de soluciones de la acreción de Michel para los perfiles de densidad, velocidad y presión con distintos valores de r_c y ρ_c . Las cantidades críticas ρ_c y r_c representan la densidad en donde se alcanza el punto sónico, es decir, donde la velocidad del fluido alcanza a la velocidad del sonido, la velocidad incrementa hasta llegar al horizonte de eventos donde se alcanza un máximo.

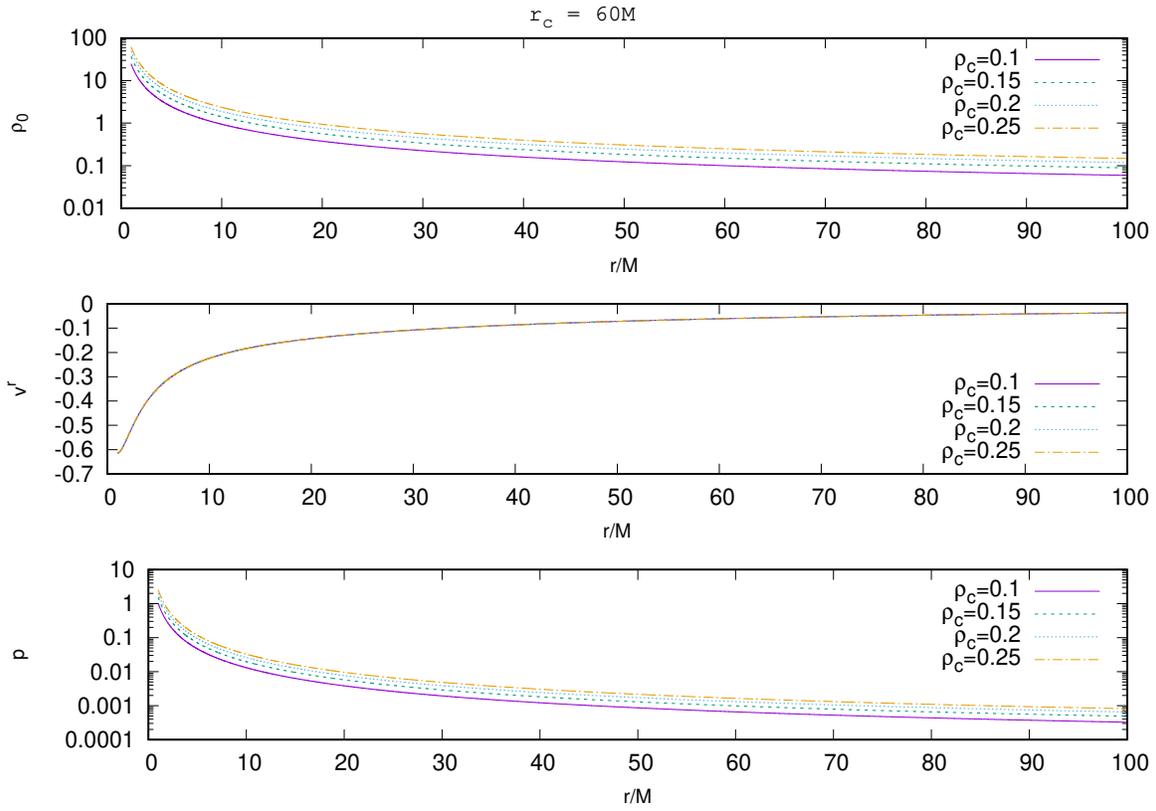


Figura 3.4: Soluciones para la acreción de Michel para distintos valores ρ_c con el mismo valor de radio crítico $r_c = 60M$.

Debido a que utilizamos coordenadas penetrantes podemos calcular lo que sucede dentro del horizonte de eventos, la velocidad aquí disminuye por acción del factor de Lorentz $W = \alpha u^t$ en la ecuación (3.48). Es importante notar que la velocidad no depende de la densidad crítica y disminuye cuando el radio crítico se hace más pequeño. Por otra parte los perfiles de densidad y presión tienen un comportamiento asintótico, tendiendo a cero en todos los casos.

Este es un resultado construido en simetría y coordenadas esféricas, es necesario trasladarlo al dominio numérico descrito en coordenadas cartesianas. La resolución del primer dominio numérico es mayor a la de el segundo, por lo que se realiza una interpolación para las variables hidrodinámicas en cada punto (x_i, y_j, z_k) , utilizando los valores de la solución en el punto más cercano al radio del punto a interpolar y el siguiente punto.

El dominio numérico está definido por $\mathcal{D} = [-40, 40] \times [-40, 40] \times [-40, 40] \times [0, t_f]$, donde t_f dependerá del caso a resolver. Las condiciones iniciales se definen tomando los valores de las variables hidrodinámicas para la solución de Michel en un radio de $r = 40M$ imponiendo éstos valores dentro de la esfera de radio $40M$ a excepción de la esfera de excisión centrada en el origen donde se mantiene la densidad atmosférica y velocidad cero. En la región comprendida entre la esfera de radio $40M$ y las fronteras del dominio numérico se mantienen los valores descritos por la solución construida para la acreción Michel.

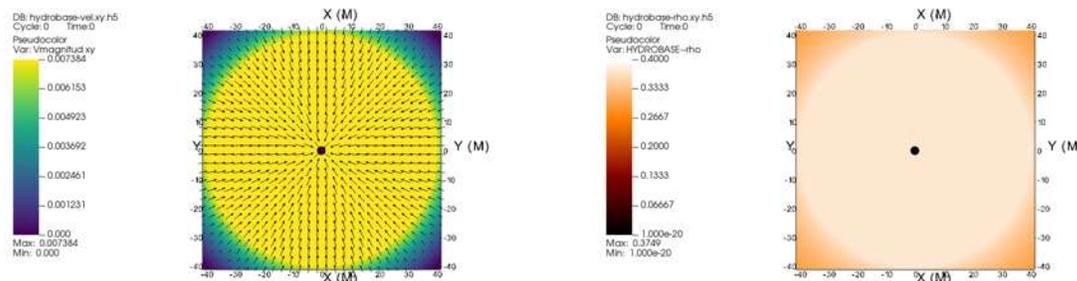


Figura 3.5: Condiciones iniciales para el fluido en el plano xy , en el lado izquierdo se presenta el campo de velocidades y en el derecho la densidad.

La elección de ρ_c y r_c en este trabajo, es tal que la velocidad del fluido en las fronteras sea pequeña, sin embargo si se reduce demasiado r_c se corre el peligro de que el radio de acreción esté dentro del dominio computacional y el fluido que no está siendo acretado interactúe con las fronteras de flujo entrante. Para resolver este problema se buscaron un conjunto de parámetros en el que los puntos más lejanos del dominio numérico la velocidad sea cero, con un algoritmo similar a la bisección. Los parámetros escogidos son: $\rho_c = 1/M^2$ y $r_c = 13.143306732177734M$, en la Figura 3.5 se muestran las condiciones iniciales para los parámetros elegidos.

La razón de escoger condiciones iniciales que disminuyan la velocidad radial es que

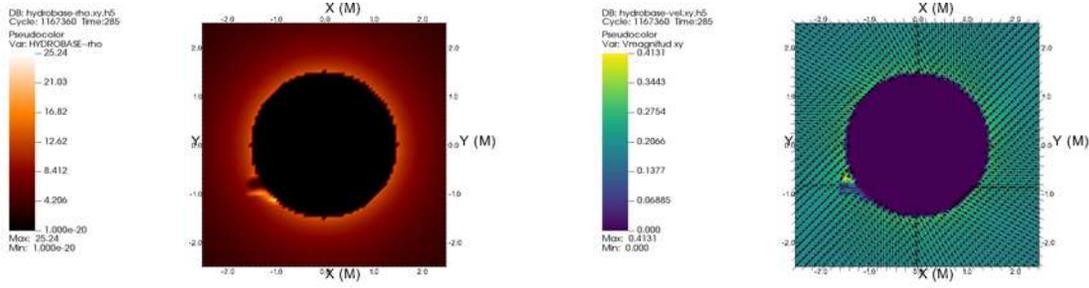


Figura 3.6: Densidad de masa en reposo y campo de velocidades en los planos xy al tiempo $t = 285M$ para el caso $a = 0.9$, $B_0 = 10^{-3}/M$, $\rho_c = 0.1/M^2$ y $r_c = 50M$.

durante la evolución de la solución para la MHD ideal en el espacio-tiempo de Kerr las velocidades características aumentan de tal manera que ocasiona eyecciones no físicas, por ejemplo en la Figura 3.6 se muestra uno de estos errores para la simulación con parámetro de espín $a = 0.9$, magnitud del campo magnético inicial $B_0 = 10^{-3}/M$, valores críticos $\rho_c = 0.1/M^2$, $r_c = 50M$ y radio de excisión $r_e = 1.5M$. Este conjunto de parámetros implica una mayor velocidad radial para las condiciones iniciales ocasionando un fallo en la evolución.

SECCIÓN 3.3

Condiciones iniciales para el campo magnético

El campo magnético inicial se considera constante y paralelo eje de rotación z , tal que

$$\vec{B} = B_0 \hat{z}, \quad (3.49)$$

el campo magnético se escoge de esta forma para que sea paralelo al eje de rotación. Se encuentra inspirado en la solución para un campo electromagnético cuando un hoyo negro de Kerr es colocado en un campo magnético inicial uniforme y alineado con el eje de rotación [Wald 1974], dicha solución es asintóticamente uniforme. La motivación física para considerar este campo magnético se deriva de las simulaciones MHD del medio interestelar a gran escala, dichas simulaciones no permiten observar a detalle la dinámica del núcleo galáctico debido al gran tamaño del dominio computacional, por ello se ha optado por disminuir el dominio dándole así un tratamiento local al núcleo galáctico, al hacer esto se asume que el campo magnético es generado por fuentes remotas al hoyo negro tendiendo a una configuración uniforme [Jaffe 2019].

El considerar campos magnéticos iniciales constantes en las simulaciones para la acreción de un plasma en un hoyo negro de Kerr es una práctica usual, diversos trabajos

exploran los efectos de cambiar la orientación de dicho campo inclinándolo con respecto al eje de rotación del hoyo negro, ejemplos de estos trabajos son [Ressler et al. 2021], [Fragile et al. 2007] y [Liska et al. 2021]. En el desarrollo de este trabajo se limita al estudio con el campo alineado con el eje de rotación y cuatro valores para la magnitud del campo $B_0 = 10^{-8}/M$, $10^{-7}/M$, $10^{-6}/M$ y $10^{-2}/M$, en unidades de código.

M/B_0	$10^{-8}/M$	$10^{-7}/M$	$10^{-6}/M$	$10^{-2}/M$
$5M_\odot$	4.71244×10^{10}	4.71244×10^{11}	4.71244×10^{12}	$4.712441568 \times 10^{16}$
$10^5 M_\odot$	2356220.784	23562207.84	235622.4	2.35622×10^{12}
$10^9 M_\odot$	235.6220784	2356.220784	23562.20784	235622078.4

Cuadro 3.1: Conversión a unidades físicas para la magnitud del campo magnético inicial, el campo magnético se mide en Gauss (**G**) y la masa del hoyo negro en masas solares (M_\odot).

La magnitud del campo magnético se escala con la masa del hoyo negro, por lo tanto el valor en unidades físicas dependerá de la masa del hoyo negro, convirtiendo con ayuda del Apéndice A encontramos los valores de la magnitud del campo para un hoyo negro de baja masa $M = 5M_\odot$, de masa intermedia $M = 10^5 M_\odot$ y uno supermasivo $M = 10^9 M_\odot$, como se muestra en la Tabla 3.1. Para poder dimensionar la magnitud del campo magnético utilizado, podemos compararlo con la intensidad del campo magnético terrestre, que varía entre $0.25\mathbf{G}$ y $0.65\mathbf{G}$, siendo más intenso en los polos y más débil en el ecuador.

Capítulo 4

Resultados

El espacio de parámetros estudiado está definido por la magnitud del campo magnético $B_0 = 0, 10^{-8}/M, 10^{-7}/M, 10^{-6}/M$ y el parámetro de espín $a = 0, 0.1, 0.3, 0.5$ y 0.7 , además de un último caso con $a = 0.1$ y $B_0 = 10^{-2}/M$. Todas las simulaciones cuentan con condiciones de frontera de flujo entrante en todas las caras del dominio numérico, las condiciones iniciales para las variables hidrodinámicas están definidas en la sección 3.2 y las condiciones iniciales del campo magnético en la sección 3.3.

Como se ha mencionado anteriormente en la sección 3.2 el dominio numérico es un cubo de radio $40M$ centrado en el origen, un dominio numérico relativamente grande para mantener el campo magnético aproximadamente constante. La resolución base utilizada en todas las simulaciones es $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.5M$, el factor de Courant, cantidad de niveles de refinamiento y su tamaño dependerán de cada simulación. Se considera un solo centro para los niveles de refinamiento, éste está ubicado en el origen de coordenadas donde está centrado también el hoyo negro.

Las condiciones de frontera utilizadas son de flujo entrante para inyectar materia de forma constante en el dominio numérico y la excisión es una esfera con radio $1.5M$. Es importante notar que la excisión está dentro del horizonte de eventos externo en todos los casos, esto asegura que cuando el plasma pase por el horizonte no podrá salir.

El primer resultado de las simulaciones consiste en determinar si el sistema alcanza o no un estado estacionario. La estacionariedad se diagnostica estudiando varios elementos, a saber, el flujo de acreción en una esfera de radio $2M$, la densidad de materia en reposo

en los planos xy y xz , la relajación del campo magnético hacia una configuración casi independiente del tiempo así como el campo de velocidades. En la Figura 4.1 se muestra un ejemplo de la densidad, el campos magnético y de velocidades para el diagnóstico de estacionariedad.

De estos criterios el que se puede evaluar con mayor facilidad es la tasa de acreción sobre una superficie esférica. Como ejemplo, en la figura 4.2 se muestra la tasa de acreción en las superficies esféricas con radios $r_s = 2M$ y $4M$ para el caso particular de $a = 0.7$ y $B_0 = 10^{-6}/M$. Se puede observar que la tasa se estabiliza en torno al valor $\dot{M} = -424.246$, que es ya un indicio de la estacionariedad.

Basados en la inspección que hemos comentado, concentramos los casos de estacionariedad en la Tabla 4.1 para el caso de $\rho_c = 1/M^2$, $r_c = 13.143M$. Como material suplementario, se anexa una animación donde se muestra la evolución de la densidad del plasma y de las líneas de campo magnético. En las Figuras 4.8, 4.9, 4.14 y 4.19 se muestran las tasas de acreción con las que se diagnostica la estacionariedad y en la Tabla 4.1 los valores en torno a los que se estaciona.

a / B_0	0	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}
0	-424.4019	-425.2657	-425.2667	-423.8338
0.1	-425.2192	-425.2419	-425.2421	-425.2184
0.3	-425.2214	-424.3433	-424.2510	-424.2506
0.5	-425.2493	-424.3429	-424.2737	-424.2365
0.7	-425.2609	-425.1908	-424.2561	-424.2463

Cuadro 4.1: Tabla con los valores en unidades de código en torno a los que se estaciona la tasa de acreción para cada caso presentado en este trabajo, para distintos valores del parámetro de espín a y de la magnitud del campo magnético inicial B_0 .

Las gráficas presentadas en este trabajo están en unidades de código, es decir, geométricas con $M = 1$. En las ocasiones en las que se convierte a unidades físicas cgs-Gaussianas, como se muestra en el apéndice A, se fija la masa del hoyo negro con $M = 10^9 M_\odot$, correspondiente a un hoyo negro supermasivo.

SECCIÓN 4.1

Caso 1: Acreción esféricamente simétrica

A forma de validación del código utilizado, se realizaron dos simulaciones para el parámetro de espín $a = 0$, magnitud del campo magnético inicial $B_0 = 0$ y dos conjuntos

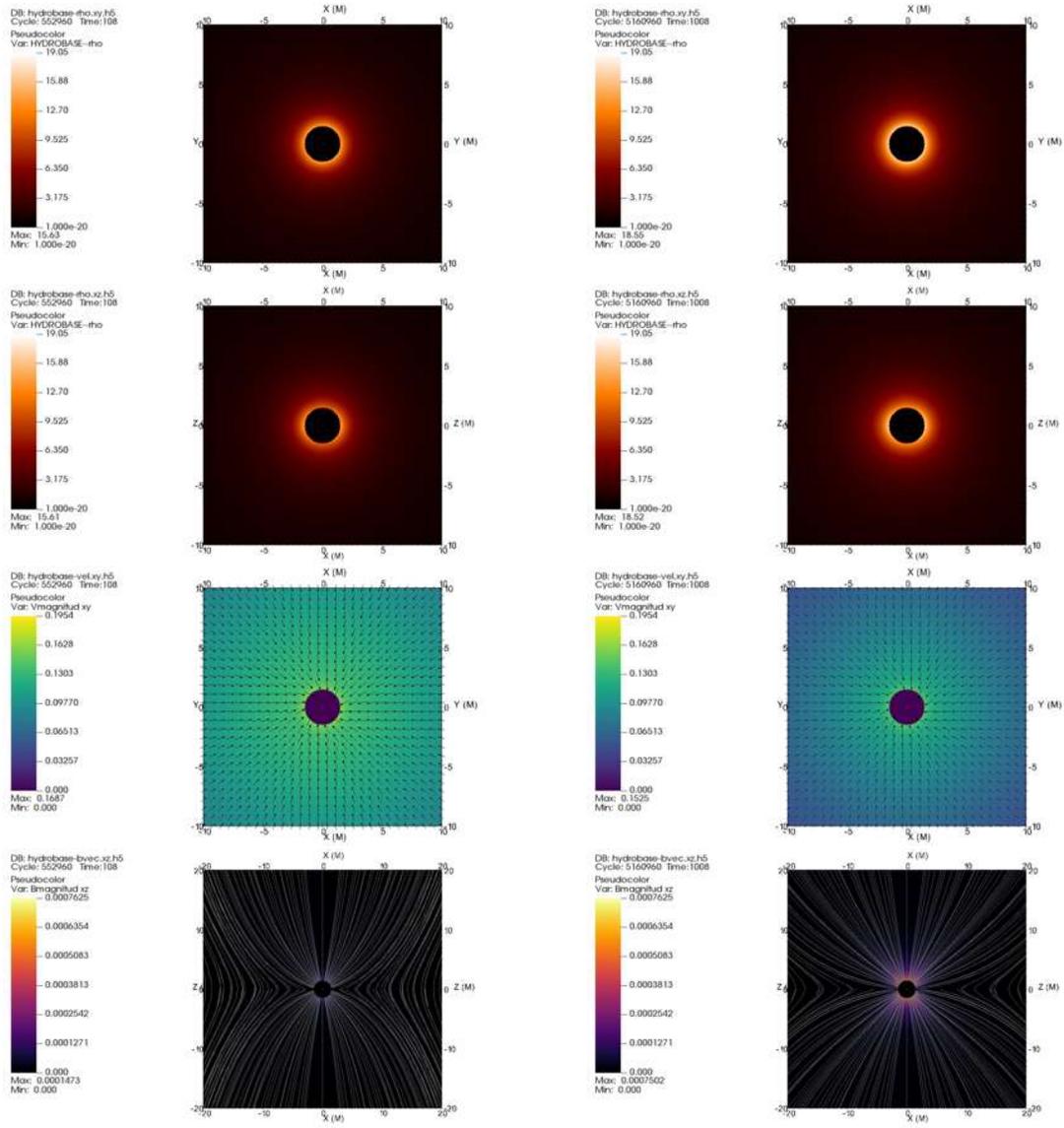


Figura 4.1: En la primer y segunda fila se muestra la densidad del fluido sobre el planos xy y xz respectivamente, en la tercer fila el campo de velocidades sobre el mismo plano y en la cuarta la estructura de líneas de campo magnético y la magnitud de dicho campo en el plano xz . En la columna izquierda los resultados corresponden al tiempo $t = 108M$ y en la columna derecha al tiempo $t = 1008M$.

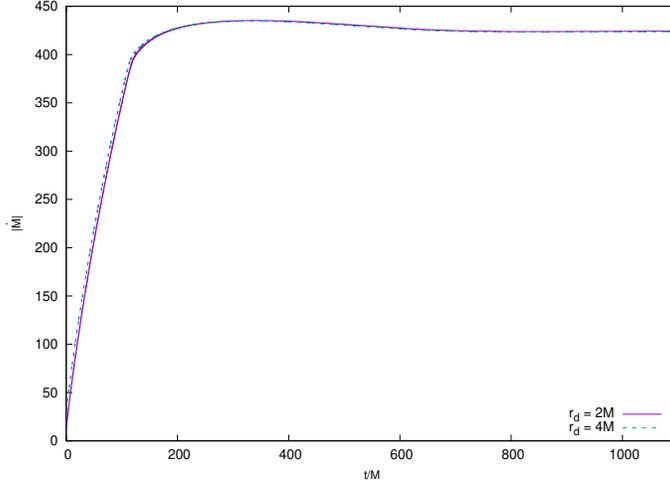


Figura 4.2: Tasa de acreción sobre las superficies esféricas de radios $r_s = 2M$ y $4M$ para el caso $a = 0.7$ y $B_0 = 10^{-6}/M$.

de valores críticos ρ_c y r_c . En ambas simulaciones se utilizó un parámetro de Courant $C_{CFL} = 0.25$ y tres niveles de refinamiento, con radios $6M$ y $3M$ respectivamente.

Este caso corresponde a la acreción de un fluido perfecto en un hoyo negro de Schwarzschild, es decir, la acreción de Michel descrita en la sección 3.2. En las Figuras 4.3 y 4.4 se muestra la densidad de masa en reposo ρ_0 y el campo de velocidades en los planos xy y xz en un tiempo donde la evolución del sistema se ha estacionado, y es posible notar cómo se recupera la simetría esférica del flujo de acreción.

El primer conjunto de valores críticos a analizar es $\rho_c = 0.1/M^2$ y $r_c = 50M$, este conjunto de valores son comunes en la literatura, se presentan soluciones con códigos en simetría esférica para este conjunto de valores en [Guzmán et al. 2020] y [Rezzolla & Zanotti 2013] mientras que las soluciones desarrolladas en esta sección son realizadas en un dominio tridimensional. El segundo conjunto de valores críticos es $\rho_c = 1/M^2$ y $r_c = 13.143M$ y corresponde a los parámetros escogidos en la sección 3.2.

Una vez que se conoce la simetría de la solución numérica, podemos analizar los perfiles de densidad y velocidad de forma unidimensional como se muestran en la Figuras 4.5 y 4.6, en este caso se escogen los datos sobre el eje x , se puede observar cómo las soluciones exactas se comportan como un atractor en el tiempo para las soluciones numéricas. La densidad de masa en ambos casos aumenta sin superar la densidad de masa exacta en ambos casos, para el primer conjunto de parámetros se acerca al perfil exacto de forma más rápida que el segundo conjunto debido a que la magnitud de la velocidad del fluido es menor en el segundo. Los errores producidos por las condiciones de frontera no son despreciables durante la evolución, estos se producen debido a que la forma cartesiana del dominio numérico al no ser ideal para la geometría esférica del problema, esto es

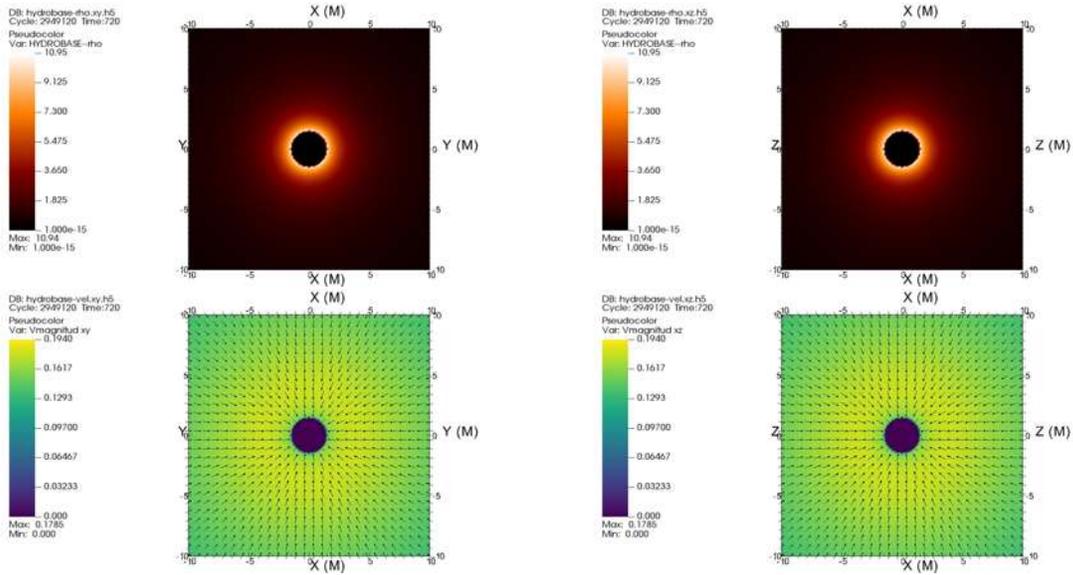


Figura 4.3: Densidad de masa en reposo y campo de velocidades en los planos xy (izquierda) y xz (derecha) al tiempo $t = 720M$ para el caso $a = 0$, $B_0 = 0$, $\rho_c = 0.1/M^2$ y $r_c = 50M$.

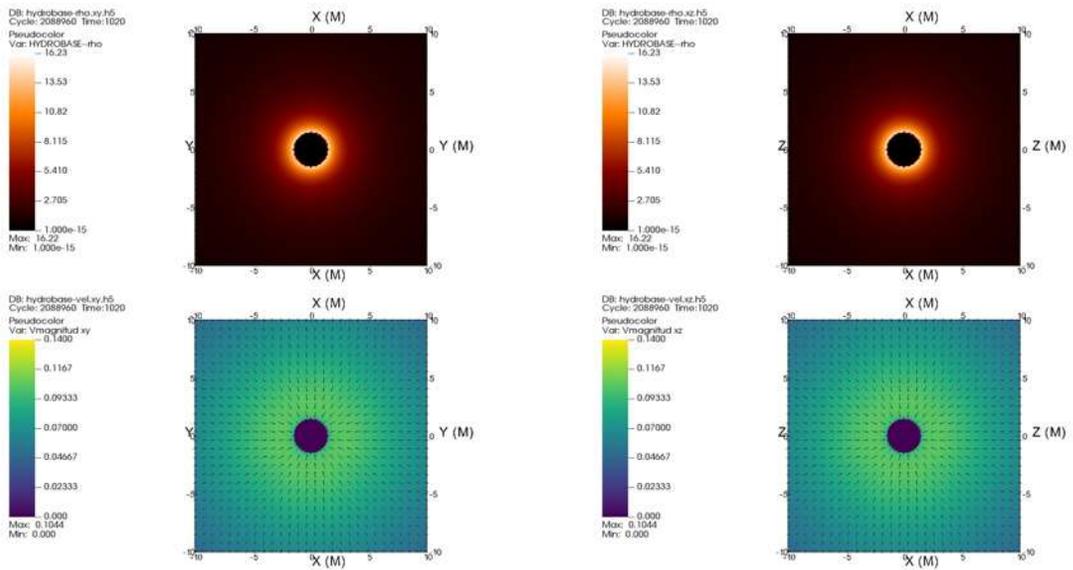


Figura 4.4: Densidad de masa en reposo y campo de velocidades en los planos xy (izquierda) y xz (derecha) al tiempo $t = 1120M$ para el caso $a = 0$, $B_0 = 0$, $\rho_c = 1/M^2$ y $r_c = 13.143306732177734M$.

apreciable en los perfiles de densidad cerca de la frontera externa de los perfiles de velocidad radial v^r en ambos casos, a pesar de estos errores los perfiles se estacionan cerca de los valores exactos en la frontera externa.

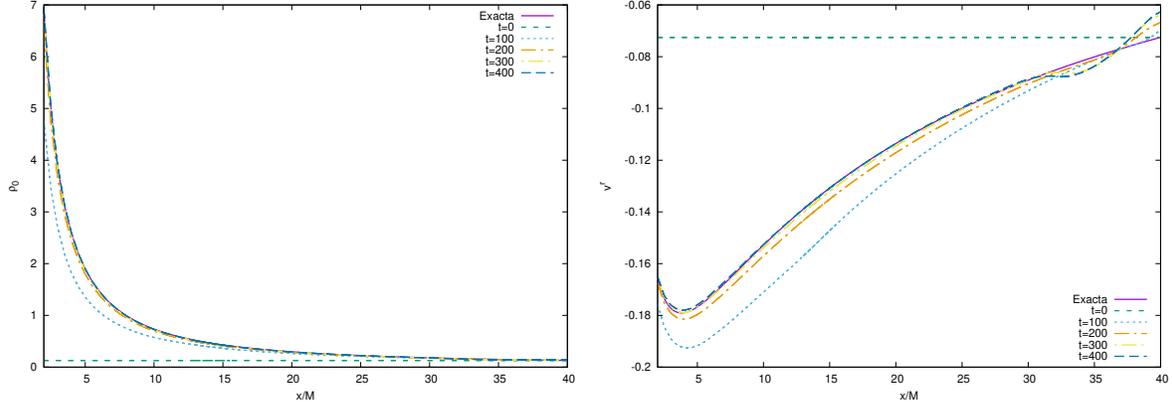


Figura 4.5: Perfiles de densidad de masa y velocidad en reposo proyectados sobre el eje x durante la evolución de la simulación, a los tiempos $t = 0, 100M, 200M, 300M, 400M$ para el caso $a = 0, B_0 = 0, \rho_c = 0.1/M^2$ y $r_c = 50M$.

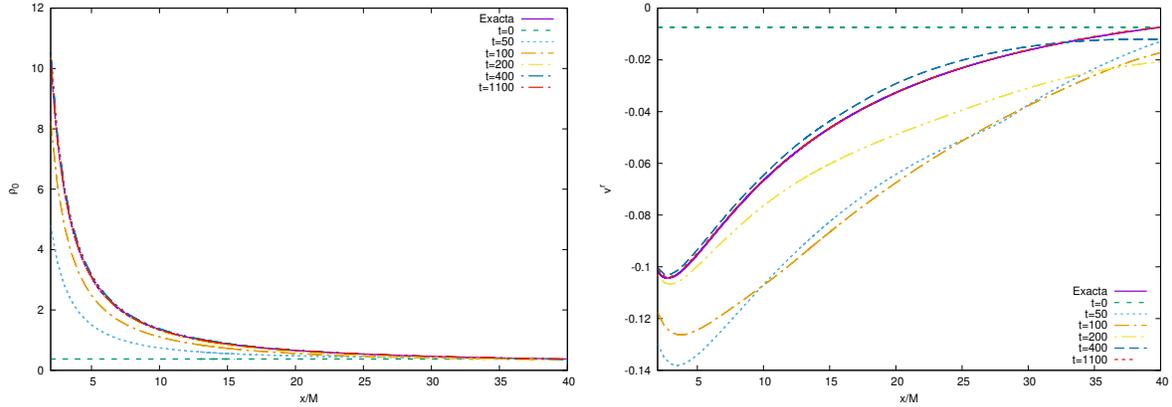


Figura 4.6: Perfiles de densidad de masa y velocidad en reposo proyectados sobre el eje x durante la evolución de la simulación, a los tiempos $t = 0, 50M, 100M, 200M, 400M, 1100M$ para el caso $a = 0, B_0 = 0, \rho_c = 1/M^2$ y $r_c = 13.143306732177734M$.

En las Figuras 4.7 y 4.8 se muestra la tasa de acreción y el error de ésta, medida en una superficie de radio $2M$, comienza creciendo y tiende a acercarse al valor exacto, las simulaciones se estacionan en torno a $\dot{M} = -424.4019 = -0.08617069995M_\odot/s$ para el caso con $\rho_c = 1/M^2$ y $r_c = 13.143306732177734M$ y $\dot{M} = -314.14994 = 0.0637851061M_\odot/s$ para $\rho_c = 0.1/M^2$ y $r_c = 50M$. La diferencia entre ambos valores se debe en mayor parte a la baja resolución y en menor proporción a la densidad atmosférica que contribuirá como una acreción parasitaria. Los mínimos presentes en las gráficas del error de la tasa de acreción corresponden a los puntos donde la tasa de

acreción numérica es igual a la tasa de acreción exacta para luego aumentar de forma momentánea.

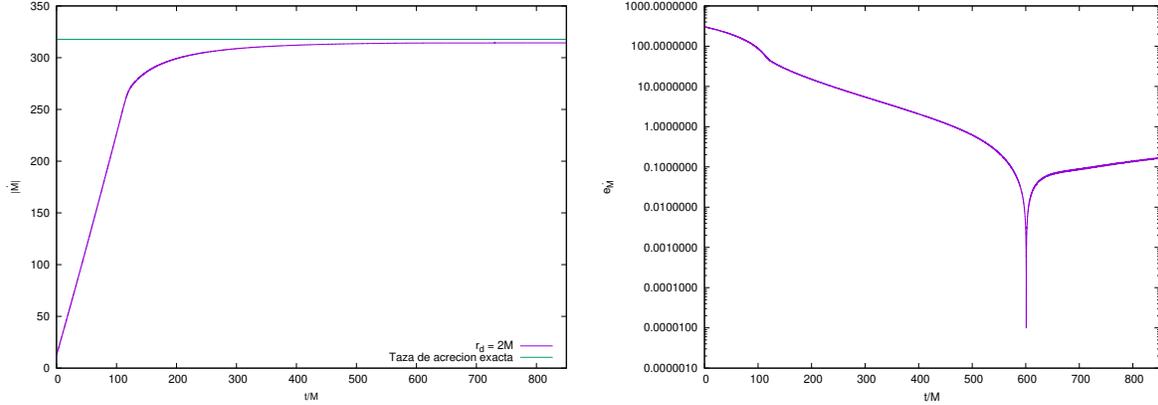


Figura 4.7: Tasa de acreción y error para el caso con parámetro de espín $a = 0$, magnitud del campo magnético inicial $B_0 = 0$ y valores críticos $\rho_c = 0.1/M^2$, $r_c = 50M$.

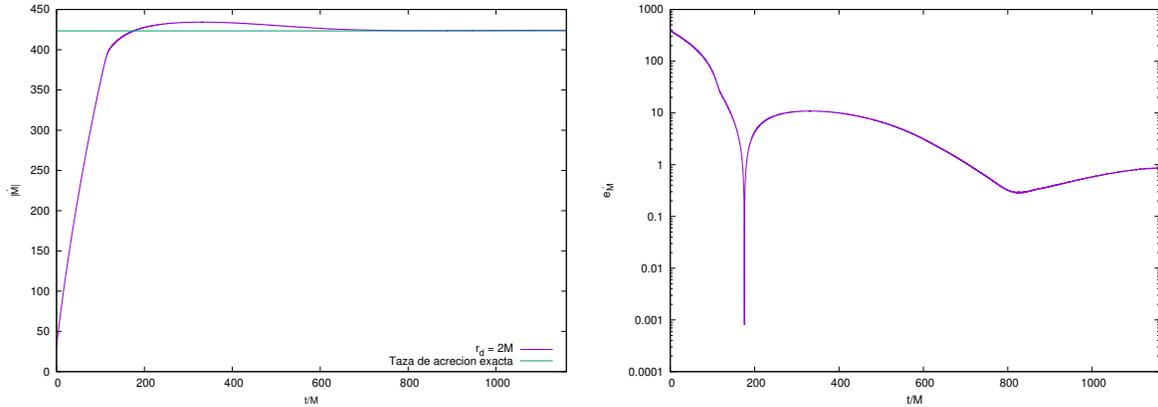


Figura 4.8: Tasa de acreción y error para el caso con parámetro de espín $a = 0$ y magnitud del campo magnético inicial $B_0 = 0$ y valores críticos $\rho_c = 1/M^2$, $r_c = 13.143306732177734M$.

Los resultados obtenidos en este caso son consistentes con [Guzmán et al. 2020]. El error y tiempo de evolución es menor para el primer caso debido a que la velocidad radial es mayor que en el segundo caso, tendiendo a eliminar errores.

SECCIÓN 4.2

Caso 2: Acreción hidrodinámica en un hoyo negro de Kerr

Para poder interpretar la influencia del campo magnético sobre la dinámica del sistema, se busca comparar con el caso hidrodinámico relativista con los mismos parámetros de espín. En las cuatro simulaciones de este caso se utilizó un factor de Courant $C_{CFL} = 0.4$ y 3 niveles de refinamiento con radios $6M$ y $3M$.

El efecto del espín sobre la tasa de acreción es tal que decrece cuando el espín aumenta, como se muestra en la Figura 4.9 y la Tabla 4.1. No existe una diferencia sustancial en la tasa de acreción, debido a que los efectos del espín sobre la tasa de acreción comienzan a ser importantes para valores de $\Gamma \geq 5/3$ donde Γ es la constante adiabática, como se demostró en [Aguayo-Ortíz et al. 2021]. En unidades físicas las tasas de acreción se estabiliza en torno a los valores $\dot{M} = -0.086336645$, -0.086336953 , -0.086342618 y $-0.086344973M_{\odot}/s$ respectivamente para los parámetros de espín $a = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$.

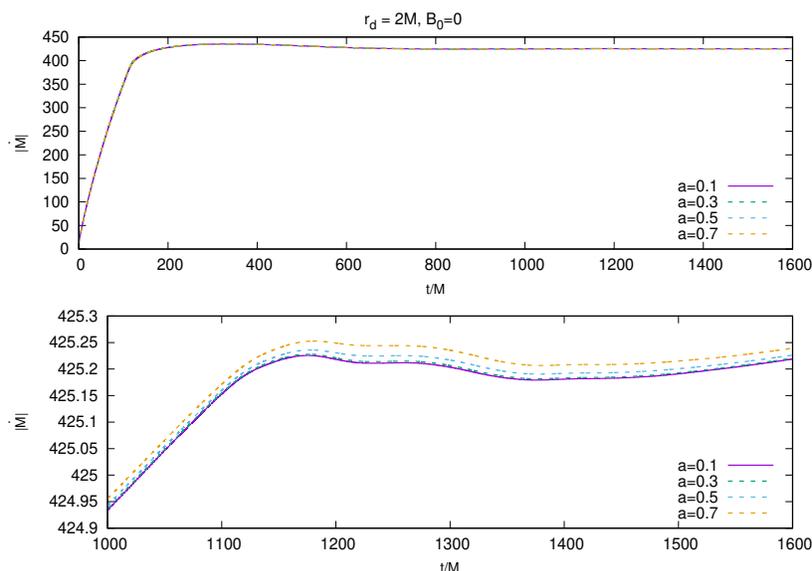


Figura 4.9: Tasas de acreción para los casos con parámetro de espín $a = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$, sin campo magnético. En la primera figura se muestra la tasa de acreción durante toda la evolución y en la segunda cuando inicia a estacionarse.

Uno de los efectos de la rotación sobre la dinámica del fluido es que la densidad de materia en reposo es axialmente simétrica respecto al eje de rotación achatándose respecto a los polos, esto se puede observar en la Figura 4.10 que la densidad es radialmente simétrica mientras que en la figura 4.11 se muestran isosuperficies de den-

sidad en las que se puede apreciar que el achatamiento respecto a los polos aumenta conforme el parámetro de espín es mayor. Como material adicional se muestran un conjunto de animaciones de las isosuperficies tridimensionales de densidad https://www.youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnT2bstJU_-JtmYOQj_bswKa.

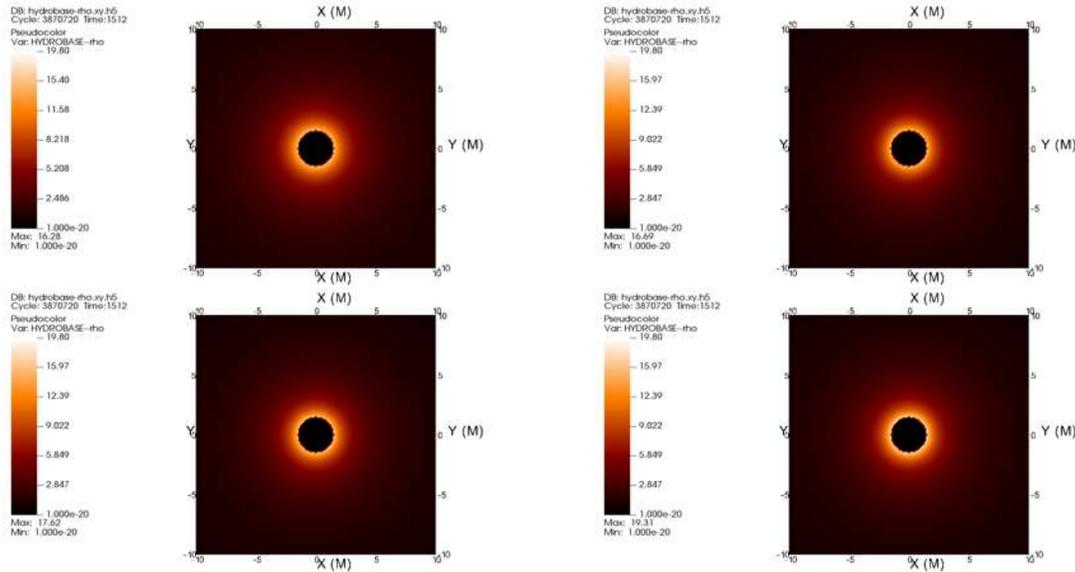


Figura 4.10: Densidad de materia en reposo en el plano xy para los parámetros de espín $a = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ sin campo magnético.

Por otro lado, el campo de velocidades se ve afectado por el efecto de *frame dragging*, eliminando la simetría esférica que mostraba la acreción de Michel como se muestra en la Figura 4.13. El efecto de *frame dragging* es especialmente fuerte dentro de la ergosfera, donde la velocidad es mucho mayor así como la rotación a favor de la dirección del giro del hoyo negro, la Figura 4.12 muestra el campo de velocidades en el plano xy limitada por la ergosuperficie externa, abarcando la ergosfera y una parte de la zona entre el horizonte de eventos interno y externo.

A diferencia de los campos de velocidades en el plano xz para el caso de la acreción de Michel, no coincide con las medidas en el plano xy , en este nuevo caso las velocidades tienden a direccionarse hacia el plano ecuatorial, esto se hace más evidente cerca del hoyo negro y cuando aumenta el parámetro de espín, este efecto se muestra en la Figura 4.13.

Como material adicional se presenta un conjunto de animaciones de la evolución de las variables primitivas para la acreción hidrodinámica en un hoyo negro de Kerr

- $a = 0.1$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnRMFXT0t0Tc7khLte4N_LnT.

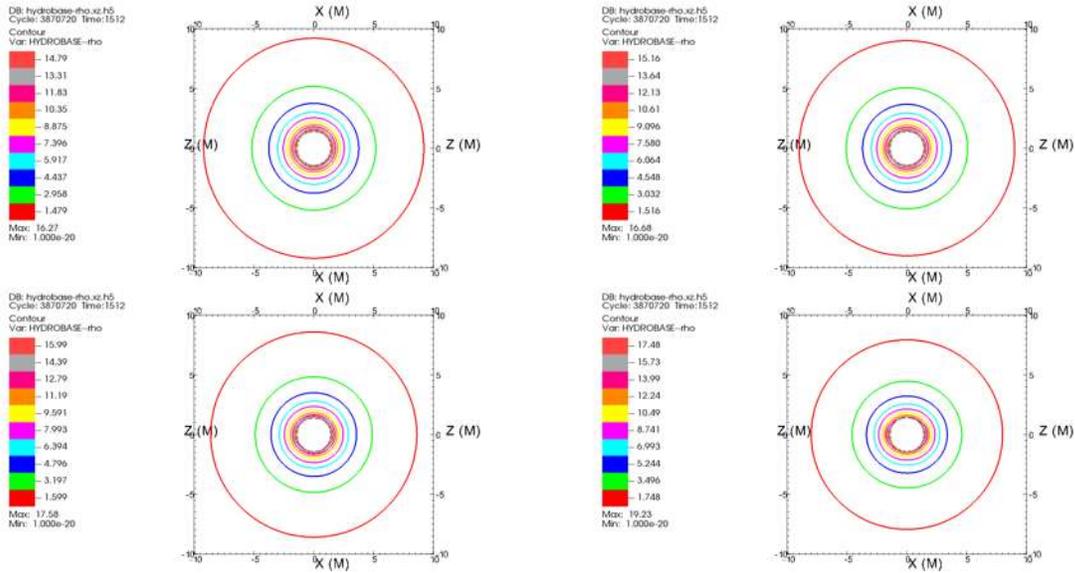


Figura 4.11: Isosuperficies de densidad en el plano xz para los parámetros de espín $a = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ sin campo magnético.

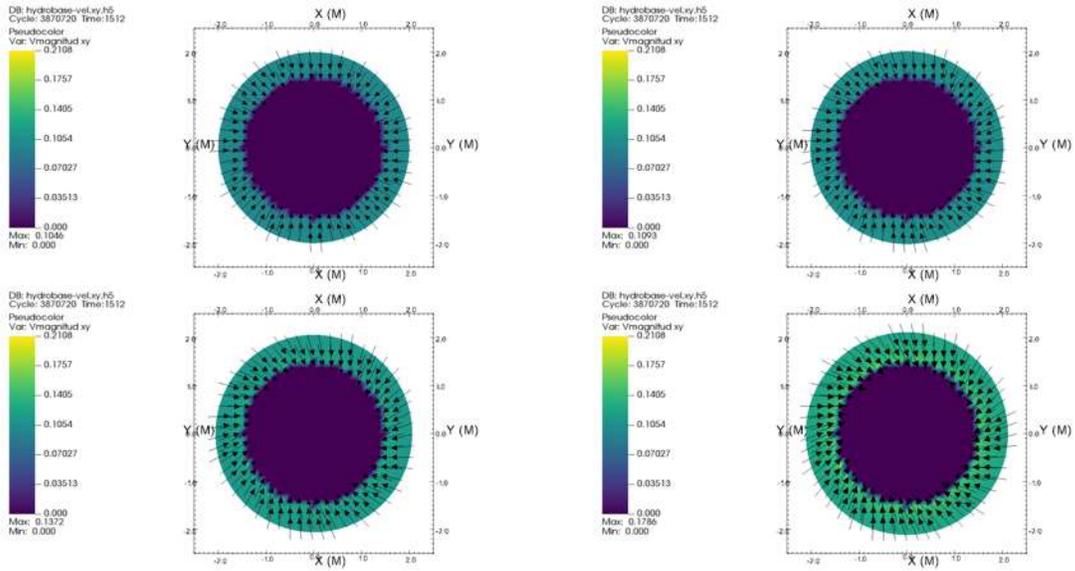


Figura 4.12: Campo de velocidades para los casos sin campo magnético dentro de la ergosfera en el plano xy limitada por los radios $r_{s,+} = 2.002498M, 2.022375M, 2.061553M, 2.118962M$ para los parámetros de espín $a = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ respectivamente.

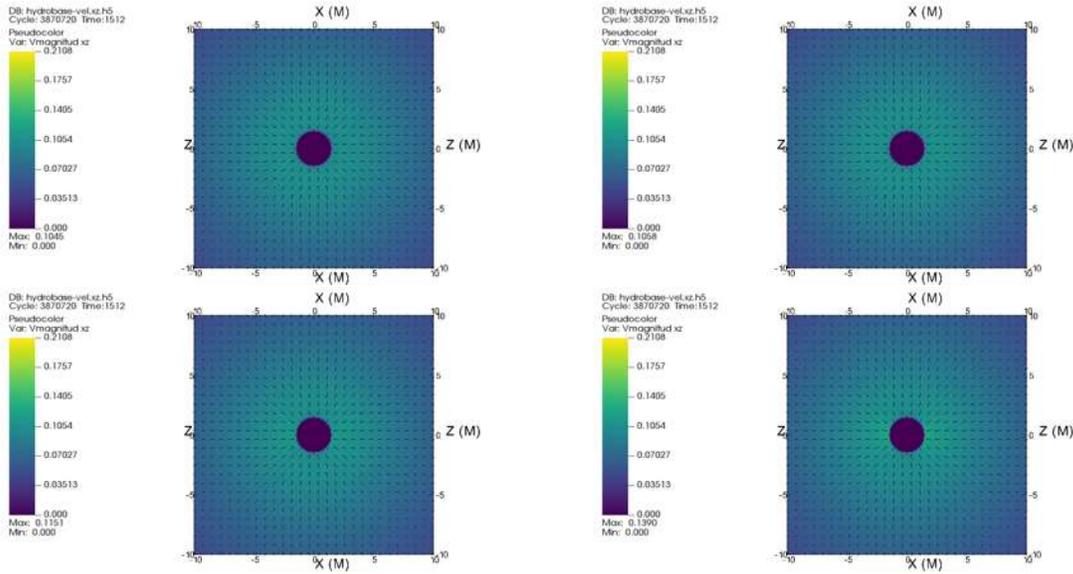


Figura 4.13: Campo de velocidades para los casos sin campo magnético con parámetros de espín $a = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ en el plano xz .

- $a = 0.3$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnRcVbre49a-gcLmISamse-x.
- $a = 0.5$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnQt4zM83RWhnycav4q1IEah.
- $a = 0.7$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnTCiYwzq4FWnyDLRCFzxs6e.

SECCIÓN 4.3

Caso 3: Acreción MHD en un hoyo negro de Schwarzschild

Este conjunto de simulaciones busca representar la acreción de un plasma que obedece las ecuaciones de la MHD ideal en un hoyo negro de Schwarzschild con las condiciones iniciales descritas en las secciones 3.2 y 3.3, esto corresponde a los parámetros $a = 0$ y $B_0 = 10^{-8}/M, 10^{-7}/M$ y $10^{-6}/M$, en unidades físicas éstos valores corresponden a $B_0 = 235.6220784, 2356.220784$ y 23562.20784G . Las tres simulaciones utilizaron un factor de Courant $C_{CFL} = 0.25$, y dos niveles de refinamiento cuyos radios son $6M$ y $3M$. Haciendo el parámetro de espín igual a cero, las coordenadas de Kerr-Schild

Cartesianas se reducen a las coordenadas de Edington-Finkelstein para un hoyo negro de Schwarzschild, dichas coordenadas son penetrantes en el horizonte, por lo que es posible situar el radio de excisión dentro del horizonte, en este caso, se sitúa en $1.5M$.

De forma similar a la sección anterior, la tasa de acreción aumenta cuando la magnitud del campo magnético inicial lo hace, los casos con $B_0 = 10^{-8}/M$ y $10^{-7}/M$ tienen un comportamiento muy similar, estacionándose en valores muy cercanos, mientras que el caso faltante aumenta en aproximadamente un 0.37%. En unidades físicas las tasas de acreción en torno a la que se estacionan las simulaciones son $\dot{M} = -0.086345948$, -0.086346151 y $-0.086055215M_\odot/s$.

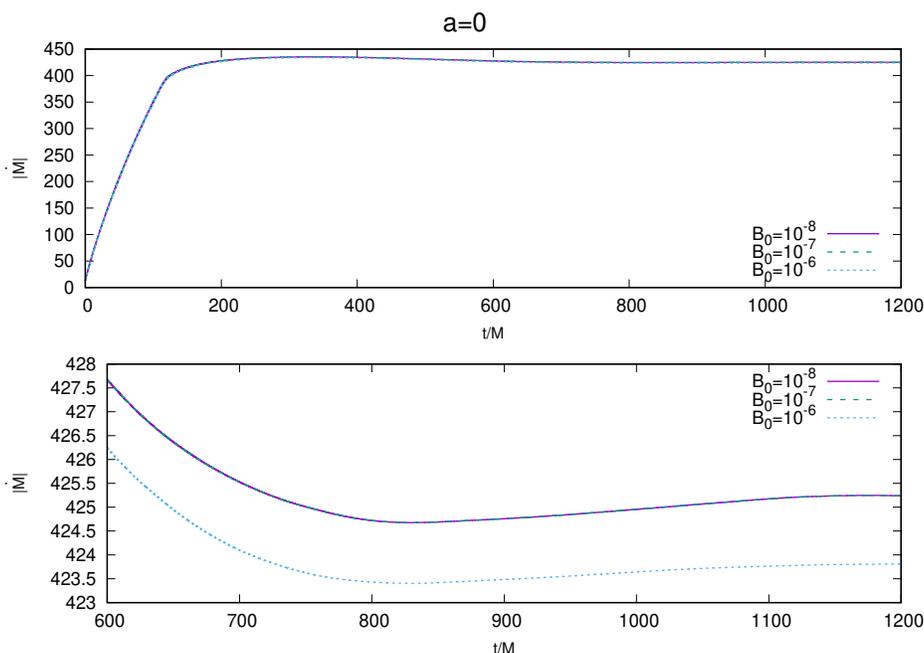


Figura 4.14: Tasas de acreción para los casos sin rotación y magnitud del campo magnético inicial $B_0 = 10^{-8}/M$, $10^{-7}/M$, $10^{-6}/M$. La primera imagen muestra la tasa de acreción durante toda la evolución, la segunda a partir de $t = 600M$.

La densidad de materia en reposo y campo de velocidades mantienen una simetría esférica, esto puede observarse comparando los resultados medidos en el plano xy y xz en las Figuras 4.15 y 4.16, así como la animación que muestra la evolución de la densidad de materia en reposo en tres dimensiones para el caso con $B_0 = 10^{-6}/M$ <https://youtu.be/RMG04wz0-fI>. Hay un aumento significativo en la densidad y campos de velocidades, pero se mantiene la velocidad máxima una vez que la simulación se ha estacionado en torno al valor $v_{max} = 0.1044$.

La Figura 4.17 muestra las líneas de campo magnético y la magnitud de éste en el plano xz , la disposición final de las líneas de campo es la misma para los tres casos, se observa que en el plano ecuatorial el campo magnético salvo cuando se está cerca del radio de

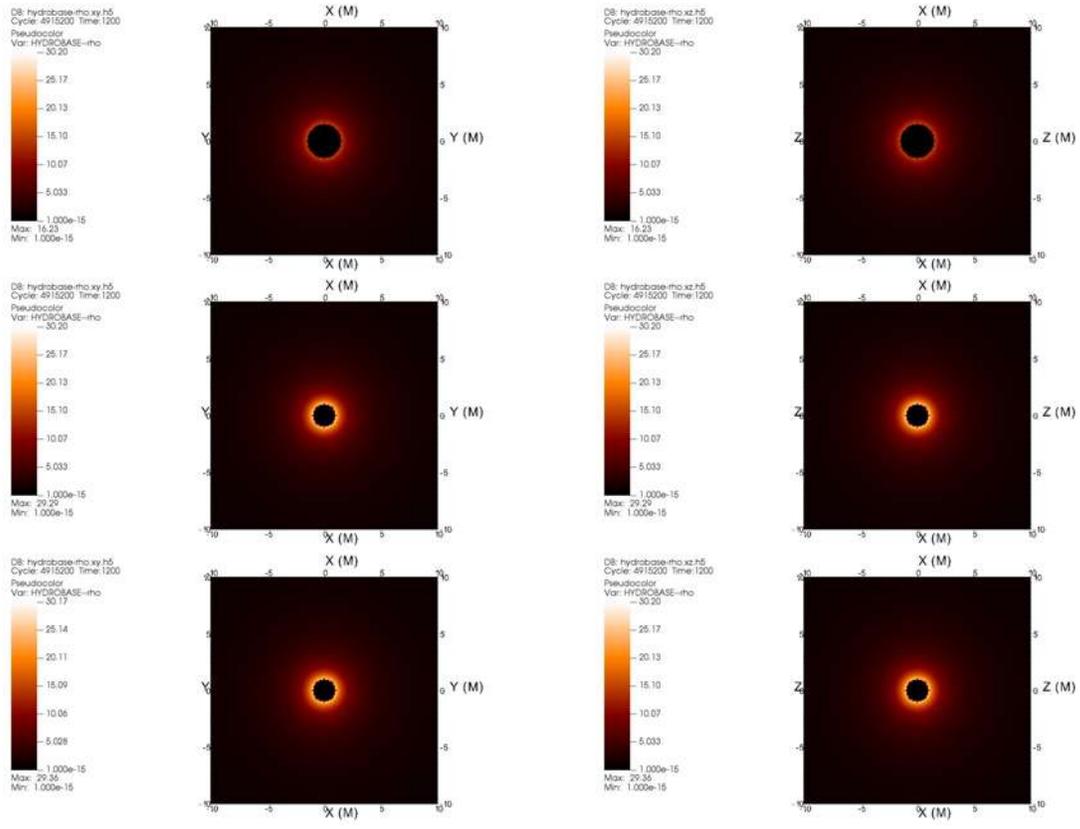


Figura 4.15: Densidad de materia en reposo en los planos xy y xz para los casos sin rotación y magnitud del campo magnético inicial de arriba hacia abajo $B_0 = 10^{-8}/M, 10^{-7}/M, 10^{-6}/M$. En el lado izquierdo se muestran los planos xy y en la derecha xz .

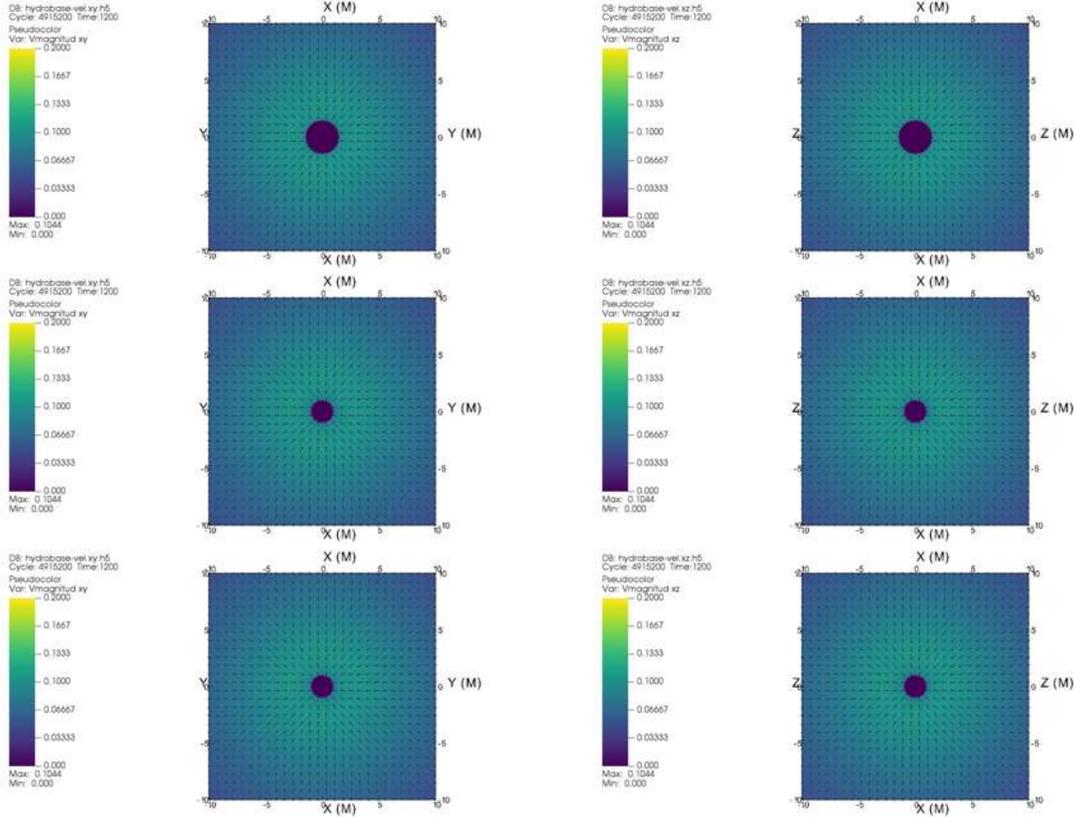


Figura 4.16: Campo de velocidad en los planos xy y xz para los casos sin rotación y magnitud del campo magnético inicial de arriba hacia abajo $B_0 = 10^{-8}/M, 10^{-7}/M, 10^{-6}/M$. En el lado izquierdo se muestran los planos xy y en la derecha xz .

excisión, para $B_0 = 10^{-7}$ y 10^{-6} hay una mayor intensidad de campo magnético en el polo inferior. Para el caso $B_0 = 10^{-6}/M$ se ha realizado una animación de la evolución de las líneas de campo en tres dimensiones <https://youtu.be/pav9xrsbBRI>.

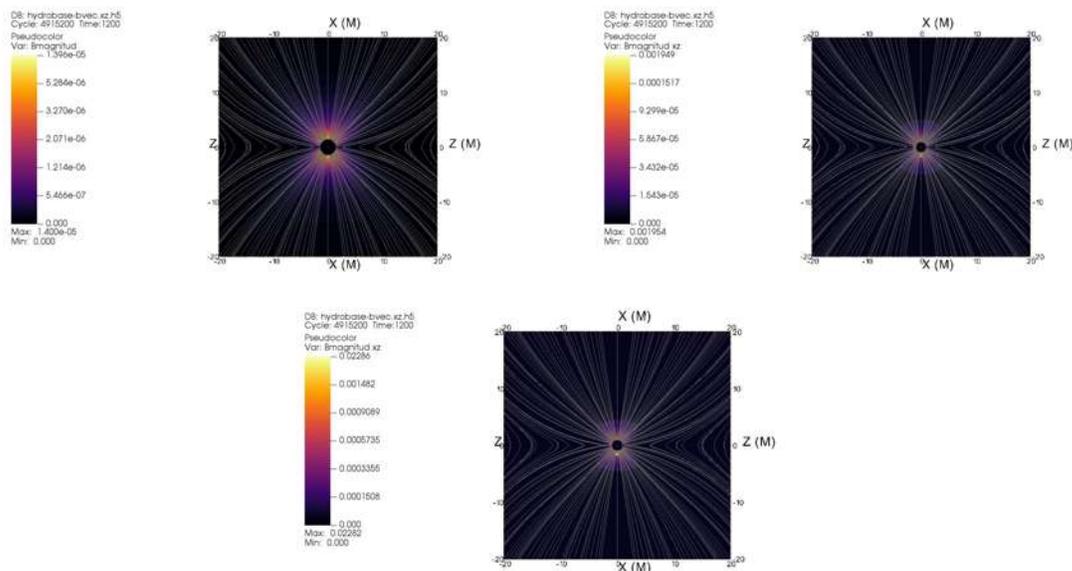


Figura 4.17: Líneas de campo magnético en el plano xz para los casos sin rotación, en sentido horario $B_0 = 10^{-8}/M, 10^{-7}/M, 10^{-6}/M$ al tiempo $t = 1200M$.

Para evaluar que el cumplimiento de la ecuación de constricción para la divergencia del campo magnético se mantenga con valores pequeños, en la Figura 4.18 se muestra la norma de la divergencia del campo magnético. Estos valores son los suficientemente pequeños para considerar que el método flux-CT descrito en la sección 2.2.8 está funcionando correctamente para estos casos, además se puede observar una dependencia de la magnitud del campo magnético, por lo que podría esperarse que en simulaciones con un campo magnético mucho más intenso el error podría ser significativo.

Como material adicional se muestra la evolución de las variables primitivas para los casos presentados en esta sección.

- $B_0 = 10^{-8}/M$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnRibZS1H60xIB2nw2QJAY7d.
- $B_0 = 10^{-7}/M$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnRJF0cM1GDyPYk2gDbQoK3t.
- $B_0 = 10^{-6}/M$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnRcNPVQ8wouGc5c0Zw-xwRY.

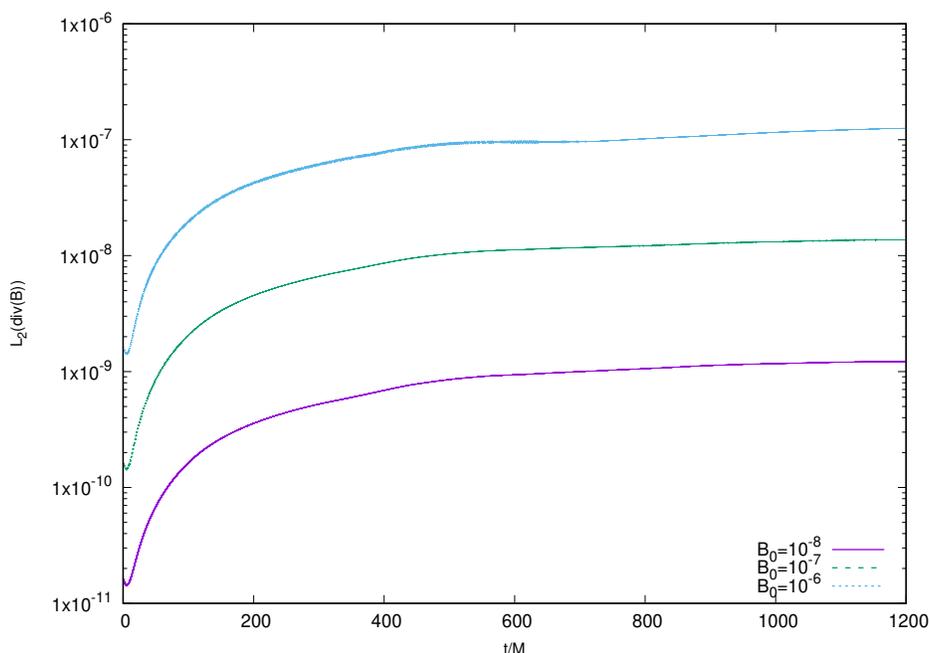


Figura 4.18: Norma de la divergencia del campo magnético para los casos sin rotación y magnitud del campo magnético inicial $B_0 = 10^{-8}/M, 10^{-7}/M, 10^{-6}/M$.

SECCIÓN 4.4

Caso 4: Acreción MHD en un hoyo negro de Kerr

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones para la acreción de un plasma cuya dinámica está descrita por las ecuaciones de la MHD ideal en un espacio-tiempo de Kerr descrito en coordenadas de Kerr-Schild Cartesianas. Se consideró que el hoyo negro está rotando de forma lenta, por lo que se utilizó valores del parámetro de espín pequeños $a = 0.1, 0.3, 0.5$, y 0.7 de igual manera la magnitud del campo magnético inicial es pequeña $B_0 = 10^{-8}/M, 10^{-7}/M$ y $B_0 = 10^{-6}/M$. En la Tabla 4.2 se muestran los parámetros numéricos que se utilizaron para cada simulación.

Las tasas de acreción presentadas en la Figura 4.19 tienen un comportamiento similar a las de la sección 4.3, es claro que hay contribución por parte de la rotación del hoyo negro, sin embargo parece estar dominado por el campo magnético en su comportamiento y en los valores en torno a los que se estaciona en unidades de código y físicas en las Tablas 4.1 y 4.3 respectivamente.

Por otra parte, los efectos en la dinámica provocados por la rotación del hoyo negro

a, B_0	C_{CFL}	n	r_i
0.1, 10^{-8}	0.25	3	6M, 3M
0.3, 10^{-8}	0.25	3	6M, 3M
0.5, 10^{-8}	0.2	4	6M, 4M, 2M
0.7, 10^{-8}	0.2	4	8M, 4M, 2M
0.1, 10^{-7}	0.25	3	6M, 3M
0.3, 10^{-7}	0.2	4	8M, 4M, 2M
0.5, 10^{-7}	0.159	4	10M, 5M, 2.5M
0.7, 10^{-7}	0.2	4	8M, 4M, 2M
0.1, 10^{-6}	0.25	3	6M, 3M
0.3, 10^{-6}	0.25	3	6M, 3M
0.5, 10^{-6}	0.25	3	6M, 3M
0.7, 10^{-6}	0.2	4	6M, 4M, 2M

Cuadro 4.2: En esta tabla se muestran los parámetros numéricos para las simulaciones de acrici3n MHD, donde C_{CFL} es el factor de Courant, n el número de niveles de refinamiento y r_i el radio de los niveles de refinamiento correspondientes.

a/B_0	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}
0.1	-0.086341115	-0.086341156	-0.086336344
0.3	-0.086158664	-0.086139923	-0.086342882
0.5	-0.086158582	-0.086144532	-0.086340019
0.7	-0.08633074	-0.086140959	-0.086342009

Cuadro 4.3: Valores de la tasa de acrici3n en torno a los que se estacionan ls simulaciones de acrici3n MHD en un hoyo negro de Kerr en unidades físicas M_\odot/s .

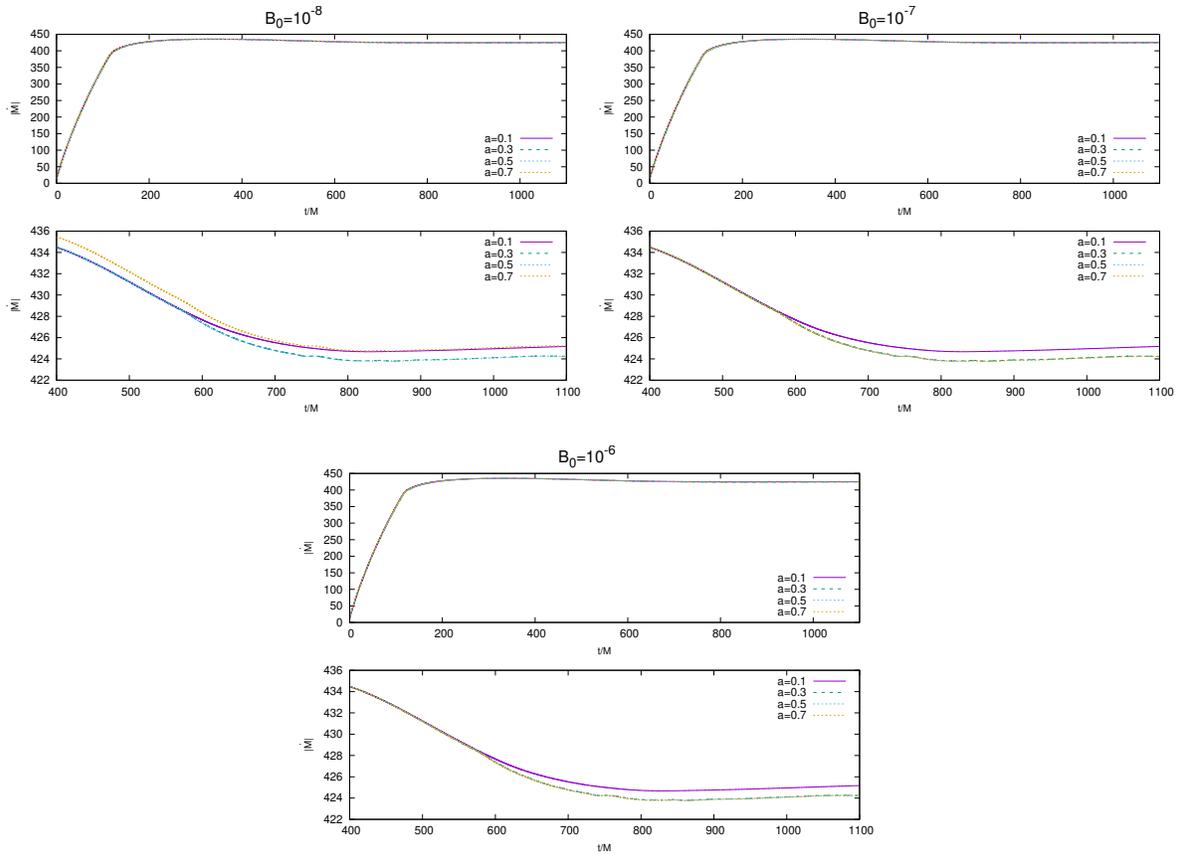


Figura 4.19: Tasas de acreción para las simulaciones con parámetro espín $a = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ y magnitud del campo magnético inicial $B_0 = 10^{-8}/M, 10^{-7}/M, 10^{-6}/M$. En cada recuadro se muestra la tasa de acreción durante toda la evolución y debajo un acercamiento para diferenciar cada simulación.

como el arrastre de marcos inerciales y el achatamiento de la densidad de materia en reposo en los polos, pueden observarse en las Figuras 4.20, 4.21 y 4.22, mientras que el segundo efecto en las isosuperficies de densidad de materia en reposo de las Figuras 4.23, 4.24 y 4.25.

Si comparamos las velocidades dentro de la ergosfera con los casos hidrodinámicos 4.12, la velocidad disminuye en presencia del campo magnético, mientras que el arrastre de los marcos inerciales es menos evidente conforme el campo magnético aumenta.

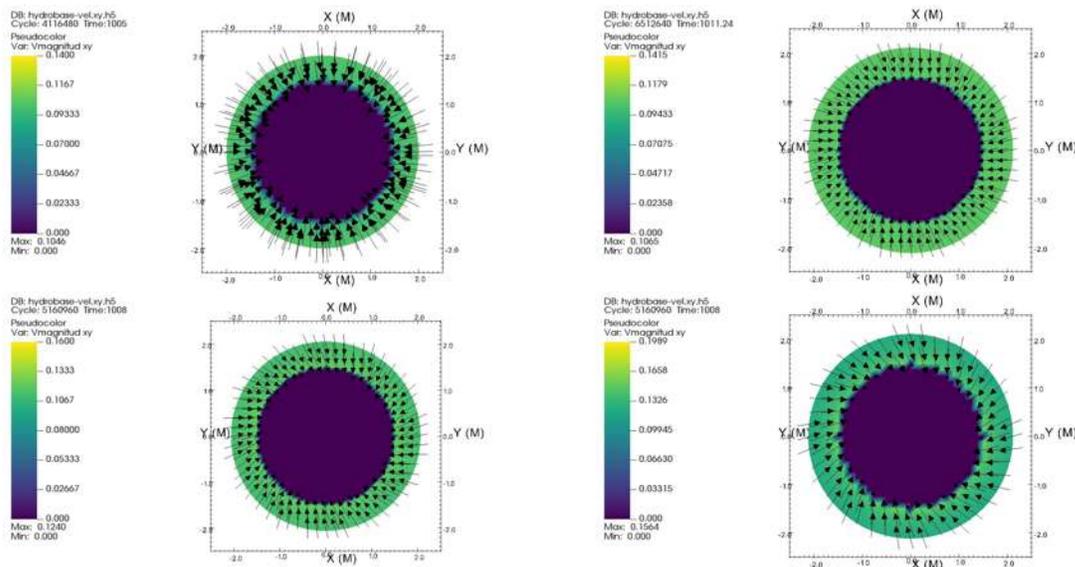


Figura 4.20: Campos de velocidades en un corte ecuatorial de las ergosferas, de izquierda a derecha las gráficas muestran los casos para $a = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$. Las cuatro gráficas tienen una magnitud del campo magnético inicial de $B_0 = 10^{-8}/M$ y están a tiempos $t = 1005M, 1011.24M, 1008M, 1008M$.

Comparando las isosuperficies de la figura 4.11 hay un aumento en la densidad de materia en reposo, además de acrecentar el achatamiento de las isosuperficies, tendiendo a concentrarse cerca del plano ecuatorial. Ambos efectos aumentan con el campo magnético, como puede observarse en las figuras 4.23, 4.24 y 4.25.

La disposición de las líneas de campo es la misma que para el caso de acreción en un hoyo negro de Schwarzschild a excepción de que en los polos hay un aumento de la magnitud del campo magnético proporcional al parámetro de espín, como puede observarse en las Figuras 4.26, 4.27 y 4.28.

Como se hizo en el caso 3, tenemos que asegurar que la divergencia del campo magnético se mantenga cercana a cero en todo el dominio, podemos asegurarnos de ello calculando la norma de esta magnitud durante la evolución, en la Figura 4.29 se muestra ésto mismo, quedándose en valores aceptables para las doce simulaciones.

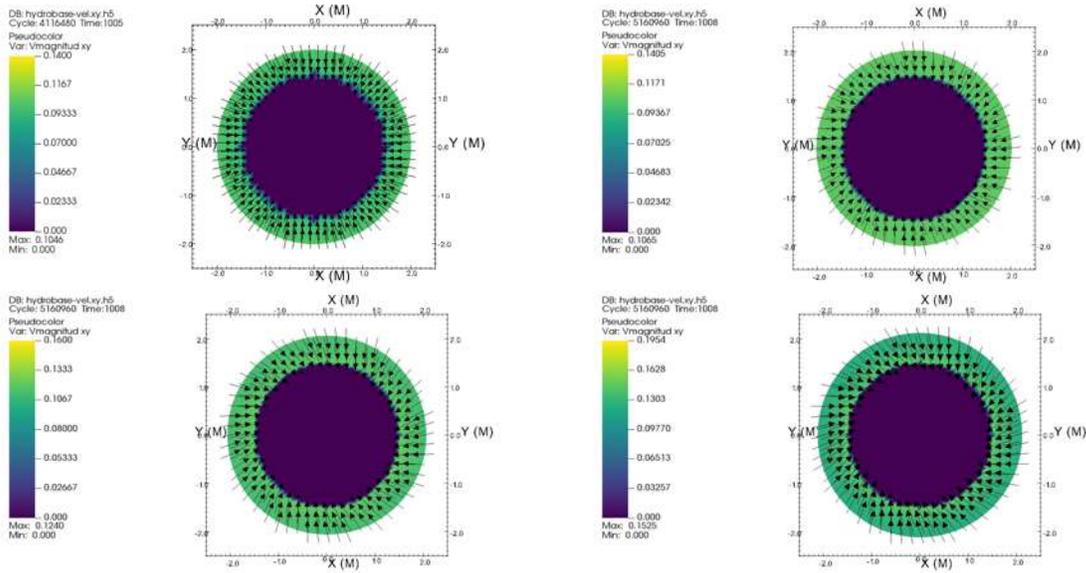


Figura 4.21: Campos de velocidades en un corte ecuatorial de las ergosferas, de izquierda a derecha las gráficas muestran los casos para $a = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$. Las cuatro gráficas tienen una magnitud del campo magnético inicial de $B_0 = 10^{-7}/M$ y están a tiempos $t = 1005M, 1008M, 1008M, 1008M$.

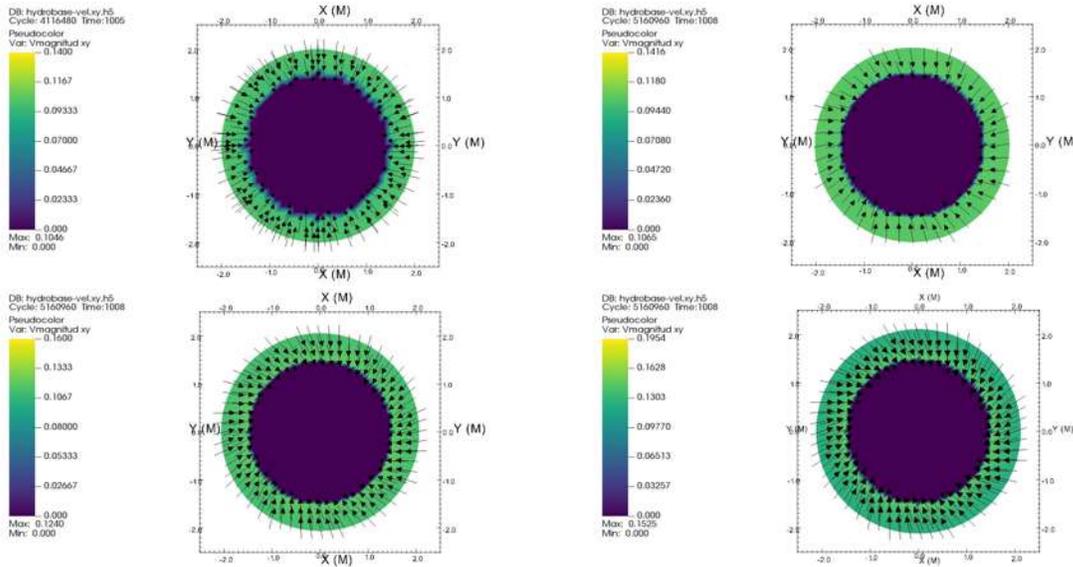


Figura 4.22: Campos de velocidades en un corte ecuatorial de las ergosferas, de izquierda a derecha las gráficas muestran los casos para $a = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$. Las cuatro gráficas tienen una magnitud del campo magnético inicial de $B_0 = 10^{-6}/M$ y están a tiempo $t = 1005M, 1008M, 1008M, 1008M$.

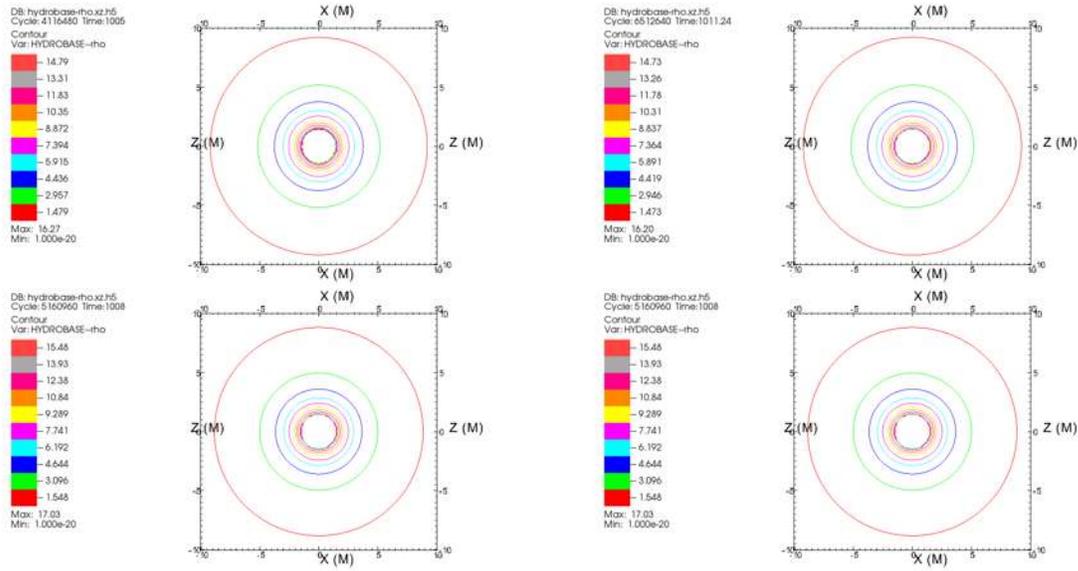


Figura 4.23: Isosuperficies de densidad en el plano xz , de izquierda a derecha las gráficas muestran los casos para $a = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$. Las cuatro gráficas tienen una magnitud del campo magnético inicial de $B_0 = 10^{-8}/M$ y están al tiempo $t = 1005M, 1011.24M, 1008M, 1008M$.

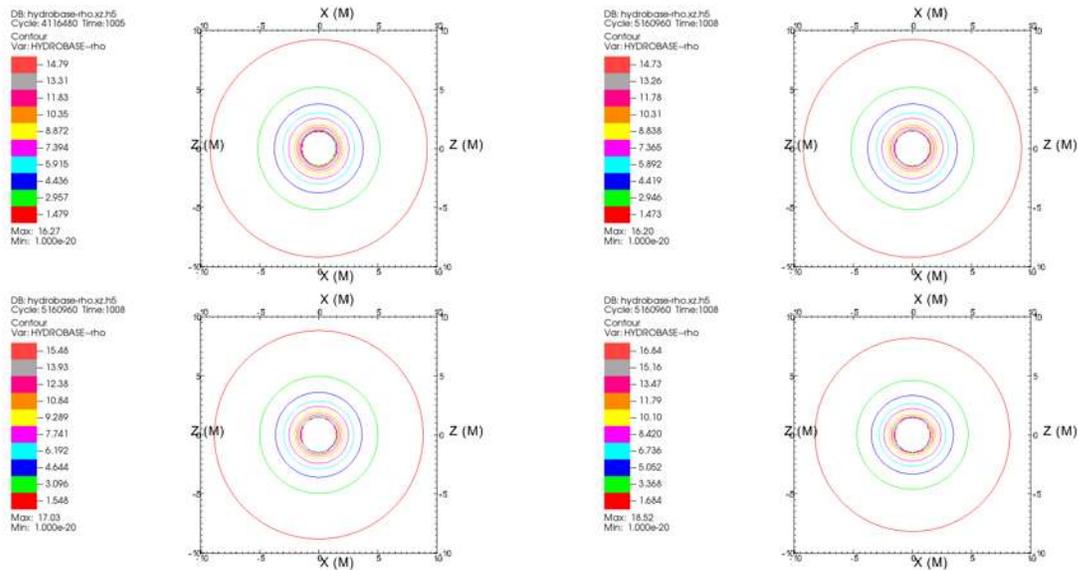


Figura 4.24: Isosuperficies de densidad en el plano xz , de izquierda a derecha las gráficas muestran los casos para $a = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$. Las cuatro gráficas tienen una magnitud del campo magnético inicial de $B_0 = 10^{-7}/M$, a tiempos cuando ya se han estacionado, respectivamente $t = 1005M, 1008M, 1008M, 1008M$.

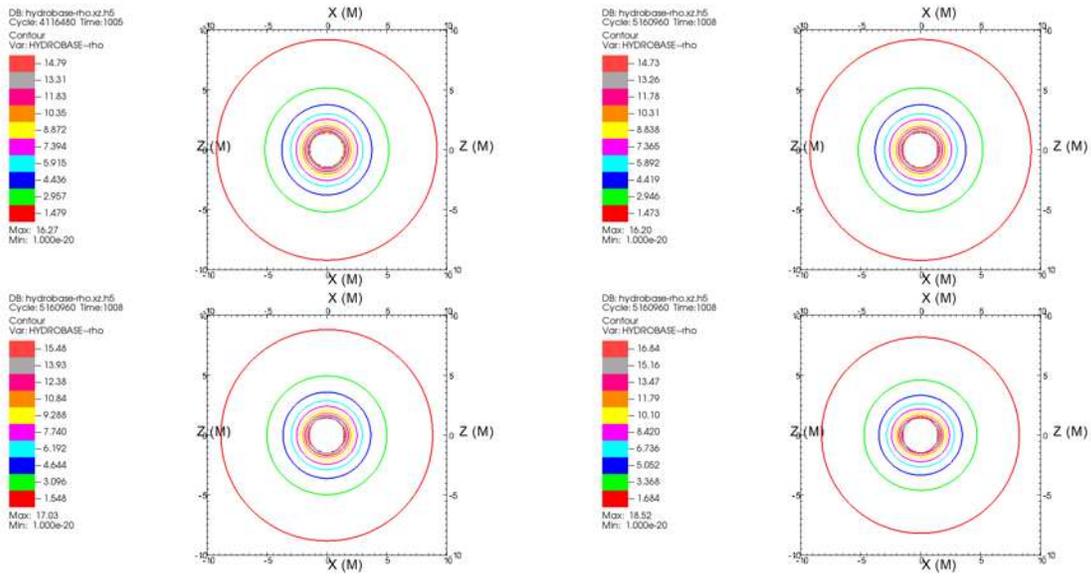


Figura 4.25: Isosuperficies de densidad en el plano xz , de izquierda a derecha las gráficas muestran los casos para $a = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$. Las cuatro gráficas tienen una magnitud del campo magnético inicial de $B_0 = 10^{-6}/M$ a tiempos cuando ya se han estacionado, respectivamente $t = 1005M, 1008M, 1008M, 1008M$.

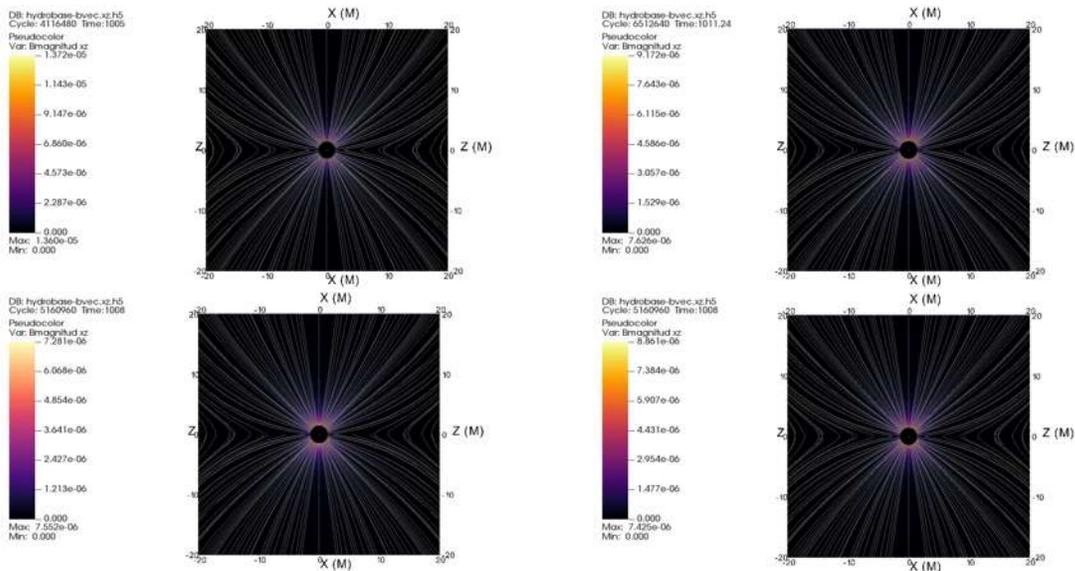


Figura 4.26: Estructura de las líneas de campo magnético y magnitud del mismo en el plano xz , para $B_0 = 10^{-8}/M$ y $a = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ respectivamente de izquierda a derecha y arriba a abajo. Para tiempos donde las simulaciones se han estabilizado y las líneas de campo son independientes de tiempo, respectivamente están a $t = 1005M, 1011.24M, 1008M, 1008M$.

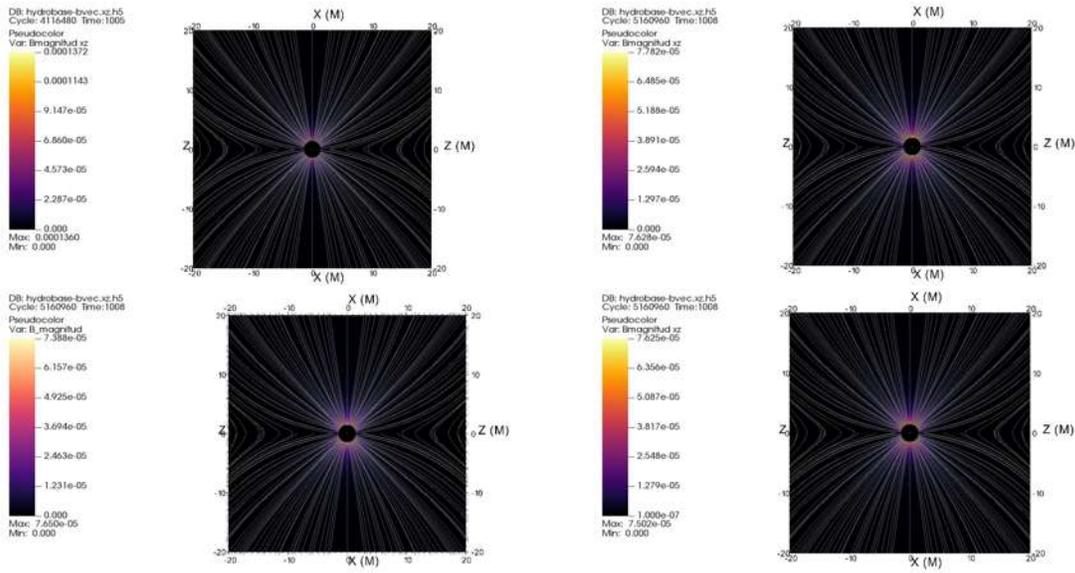


Figura 4.27: Estructura de las líneas de campo magnético y magnitud del mismo en el plano xz , para $B_0 = 10^{-7}/M$ y $a = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ respectivamente de izquierda a derecha y arriba a abajo. Para tiempos donde las simulaciones se han estabilizado y las líneas de campo son independientes de tiempo, respectivamente están a $t = 1005M, 108M, 1008M, 1008M$.

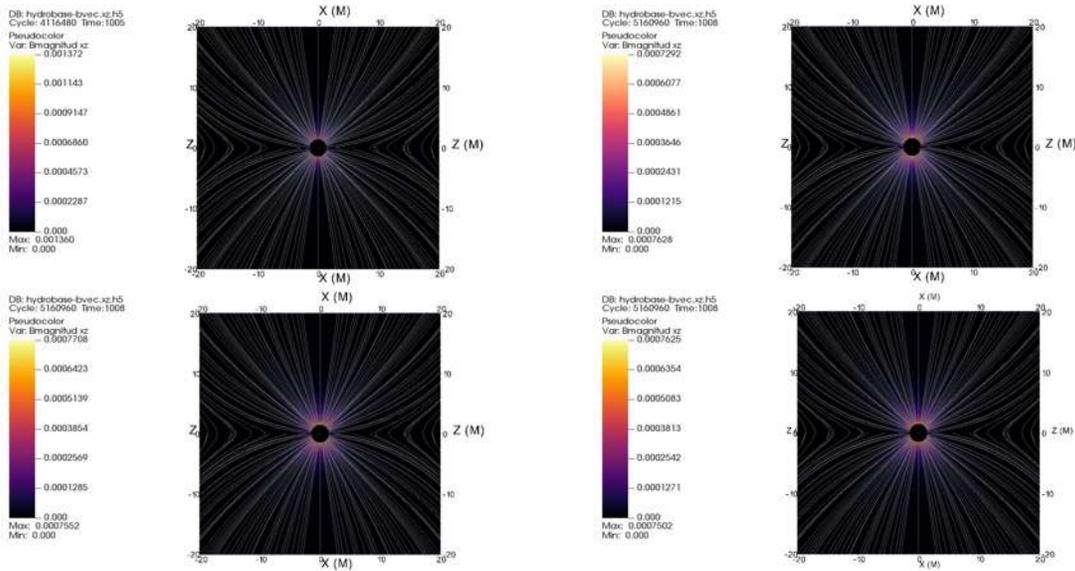


Figura 4.28: Estructura de las líneas de campo magnético y magnitud del mismo en el plano xz , para $B_0 = 10^{-6}/M$ y $a = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ respectivamente de izquierda a derecha y arriba a abajo. Para tiempos donde las simulaciones se han estabilizado y las líneas de campo son independientes de tiempo, respectivamente están a $t = 1005M, 1008M, 1008M, 1008M$.

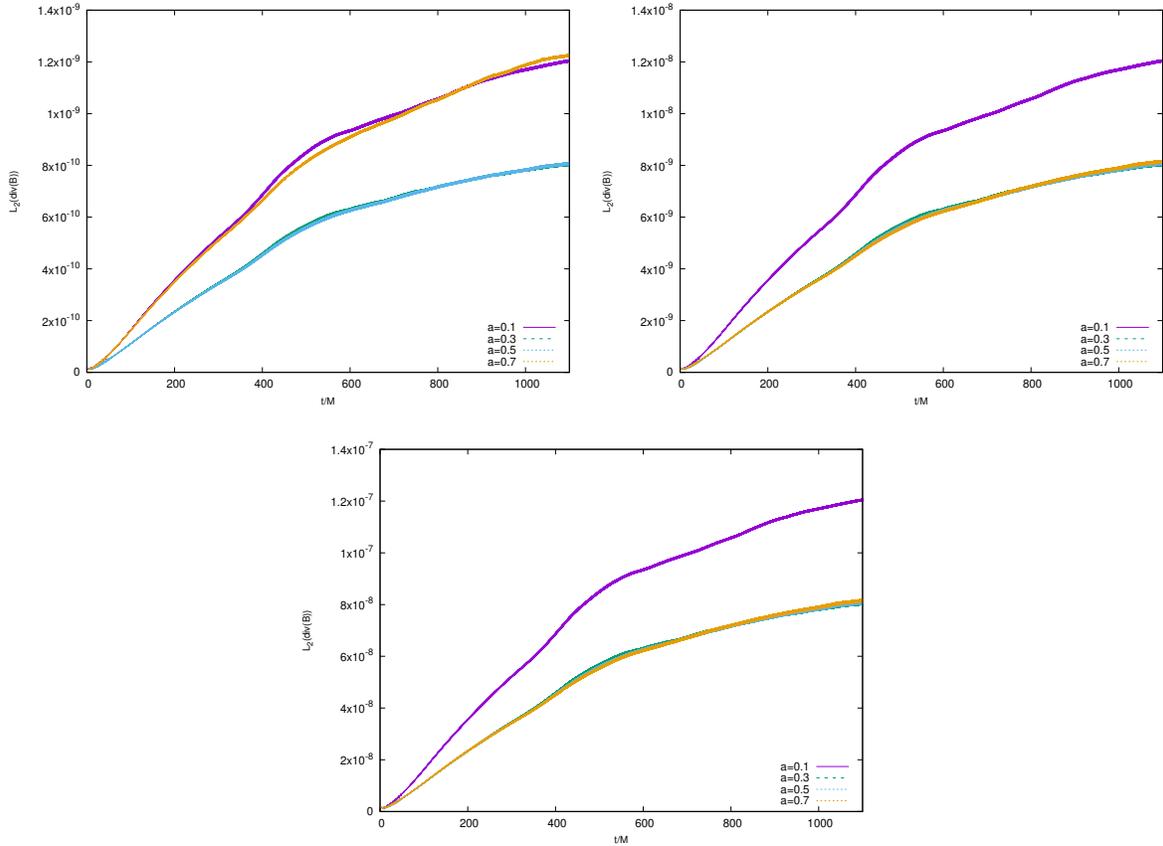


Figura 4.29: Norma de la divergencia del campo magnético en cada figura se muestran están presentes los cuatro casos de espín para cada magnitud del campo magnético inicial, en sentido horario $B_0 = 10^{-8}/M, 10^{-7}/M, 10^{-6}/M$.

- $a = 0.1, B_0 = 10^{-6}/M$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnSXC0AgKE1DxoF3ENUfWXEd.
- $a = 0.3, B_0 = 10^{-6}/M$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnSzWrpEoelLsLQPBaU4Jf05.
- $a = 0.5, B_0 = 10^{-6}/M$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnSCR9ct3n7KAR0WJqB3oTea.
- $a = 0.7, B_0 = 10^{-6}/M$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnRMPf8DA20ryfRsSmV-S8uy.
- $a = 0.1, B_0 = 10^{-7}/M$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnQXdLo_yZN3rXX1rsHoSxQ3.
- $a = 0.3, B_0 = 10^{-7}/M$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnTQp6W_defbaxEWpvDk0oXz.
- $a = 0.5, B_0 = 10^{-7}/M$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnTe7eA0Y5Q54p8H8kjXqGyn.
- $a = 0.7, B_0 = 10^{-7}/M$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnRKKzhD6p3vT58EPFjnXhwg.
- $a = 0.1, B_0 = 10^{-8}/M$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnS0zP_t6PU--JnSuJT96vVI.
- $a = 0.3, B_0 = 10^{-8}/M$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnSu8kEjm0K-G1aTULmF_iPN.
- $a = 0.5, B_0 = 10^{-8}/M$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnSgvzBN-0qyG_-RZurkJ1n0.
- $a = 0.7, B_0 = 10^{-8}/M$:
https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnTtEnKbCbSUPEU6z49sg1Ph.

SECCIÓN 4.5

Caso 5: Formación de un disco de acreción.

Este caso corresponde a un campo magnético mucho más intenso, donde el campo magnético inicial tiene una magnitud de $B_0 = 10^{-2}/M = 235622078.4\text{G}$ en un hoyo

negro rotando de forma lenta con un parámetro de espín $a = 0.1$. Se utilizaron 3 niveles de refinamiento situados en los radios $8M$ y $4M$, con un factor de Courant $C_{CFL} = 0.15$.

La tasa de acreción para este caso tiende a estabilizarse en torno a $\dot{M} = -427.51 = 0.08680163$, y hay un pico en $t \approx 358.21M = 1764230.8173s$ con $\dot{M} = -434.311 = 0.088182647M_{\odot}/s$. Debido a que la tasa de acreción, campo de velocidades, líneas de campo magnético y densidad de masa en reposo permanecen estables se puede diagnosticar que el sistema se estaciona.

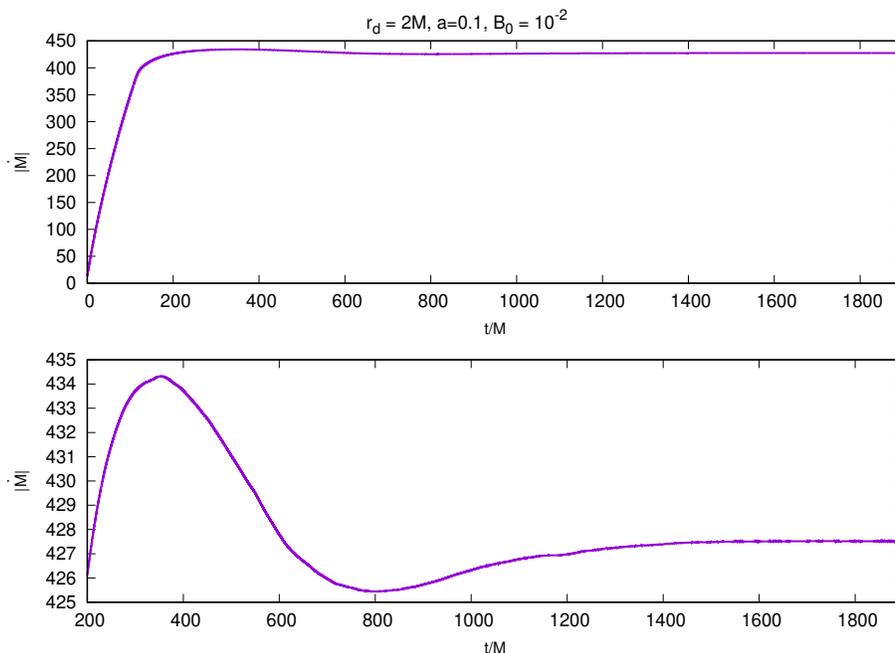


Figura 4.30: Tasa de acreción medida en $r_d = 2M$ para el caso con parámetro de espín $a = 0.1$ y magnitud del campo magnético inicial $B_0 = 10^{-2}/M$. En la primer figura se muestra la tasa medida durante toda la evolución del sistema y en la segunda de $t = 200M$ a $t = 1900M$.

Este caso se distingue de los anteriores debido a la formación de un disco de acreción, al principio de la evolución las variables hidrodinámicas se mantienen esféricamente simétricas, cerca del tiempo del pico en la tasa de acreción comienza a formarse una superficie en el plano ecuatorial donde la velocidad tiende a ser cero, podemos identificar esta superficie como el radio magnetosférico descrito en [Narayan et al. 2003], dentro de esta zona la densidad es mayor al resto del dominio y las velocidades apuntan en dirección contraria al hoyo negro con una magnitud menor. Por otra parte, la densidad de materia en reposo medida en el plano xz se observa que el disco de acreción se localiza en el plano ecuatorial y que la velocidad medida en el mismo plano es mucho mayor fuera del disco y tendiendo a apuntar hacia el mismo.

El proceso de formación del disco de acreción es más claro cuando observamos la densi-

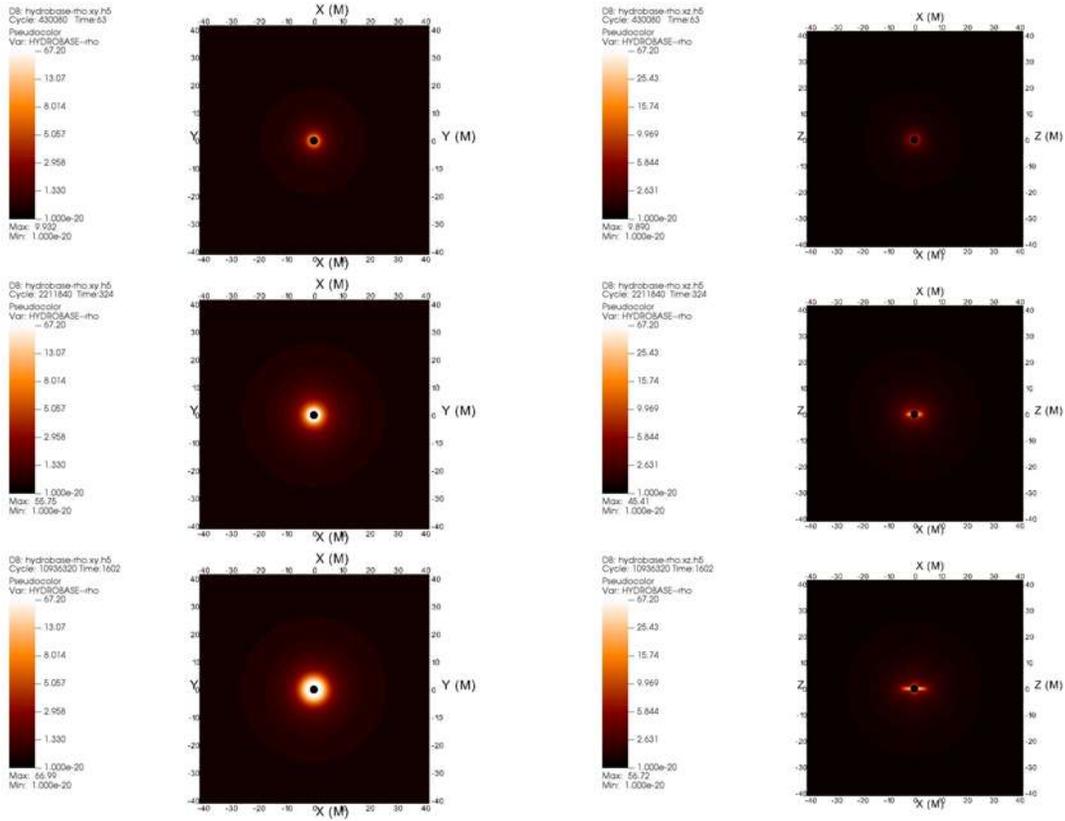


Figura 4.31: Densidad de materia en reposo para la simulación con $a = 0.1$ y $B_0 = 10^{-2}/M$ en los planos xy (izquierda) y xz (derecha), de arriba a abajo para los tiempos $t = 63M$, $324M$, y $1602M$.

dad de materia en reposo desde una perspectiva tridimensional, la Figura 4.32 muestra esta perspectiva mientras que la Figura 4.31 muestra los cortes en el plano xy y xz en tres momentos de la evolución, en $t = 36M$ cuando la distribución es aproximadamente esférico, para $t = 324M$ el disco comienza a formarse al margen de la esfera de excisión y $t = 1602M$ cuando el disco se ha expandido. Adicionalmente se puede encontrar una animación de la densidad de materia en reposo en tres dimensiones <https://youtu.be/iRXfLoDXUZU>.

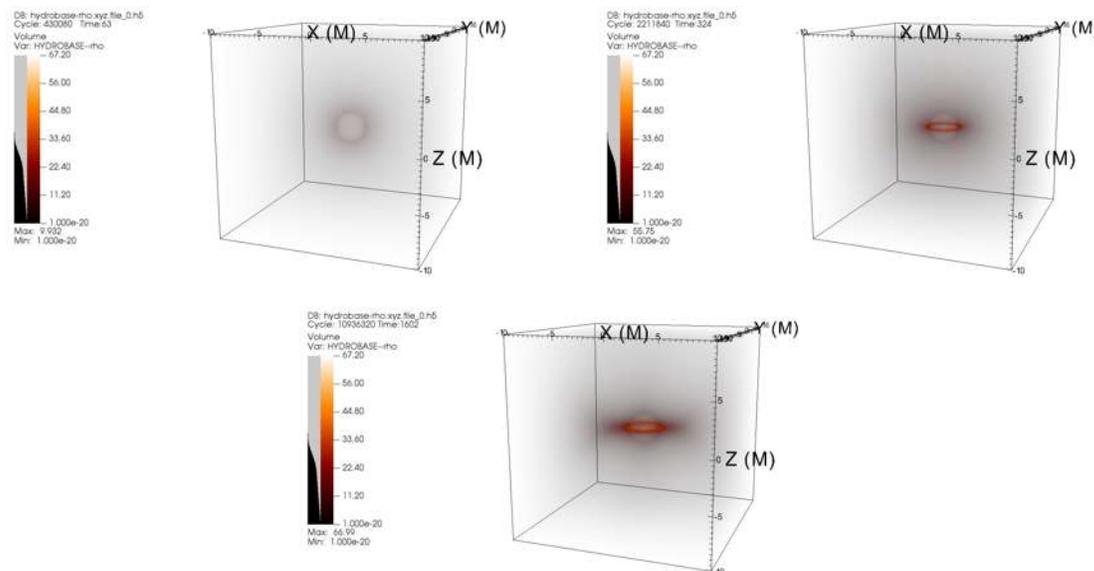


Figura 4.32: Densidad de materia en reposo para la simulación con $a = 0.1$ y $B_0 = 10^{-2}/M$ en los tiempos $t = 63M$, $324M$, y $1602M$.

En la Figura 4.33 se muestra el campo de velocidades en el plano xy donde se observa claramente el crecimiento del radio magnetosférico y con esto el crecimiento del disco de acreción, al final de la evolución el radio magnetosférico se sitúa aproximadamente en $4.75M$. Por otro lado las imágenes del plano xz muestran cómo parte del plasma fuera del plano ecuatorial entra al hoyo negro y otra parte se quedaría dentro del radio magnetosférico.

El campo magnético como en los casos anteriores se mantiene constante y paralelo en las fronteras, con una mayor distorsión de las líneas de campo, tendiendo más abruptamente a volverse paralelas al plano ecuatorial cerca del hoyo negro como se observa en la Figura 4.34.

Como material adicional se presentan las animaciones de la evolución de las variables hidrodinámicas y las líneas de campo para la formación del disco https://youtube.com/playlist?list=PLjX_KXndumnTEeIdChZGN0cG-5xAgxiVR.

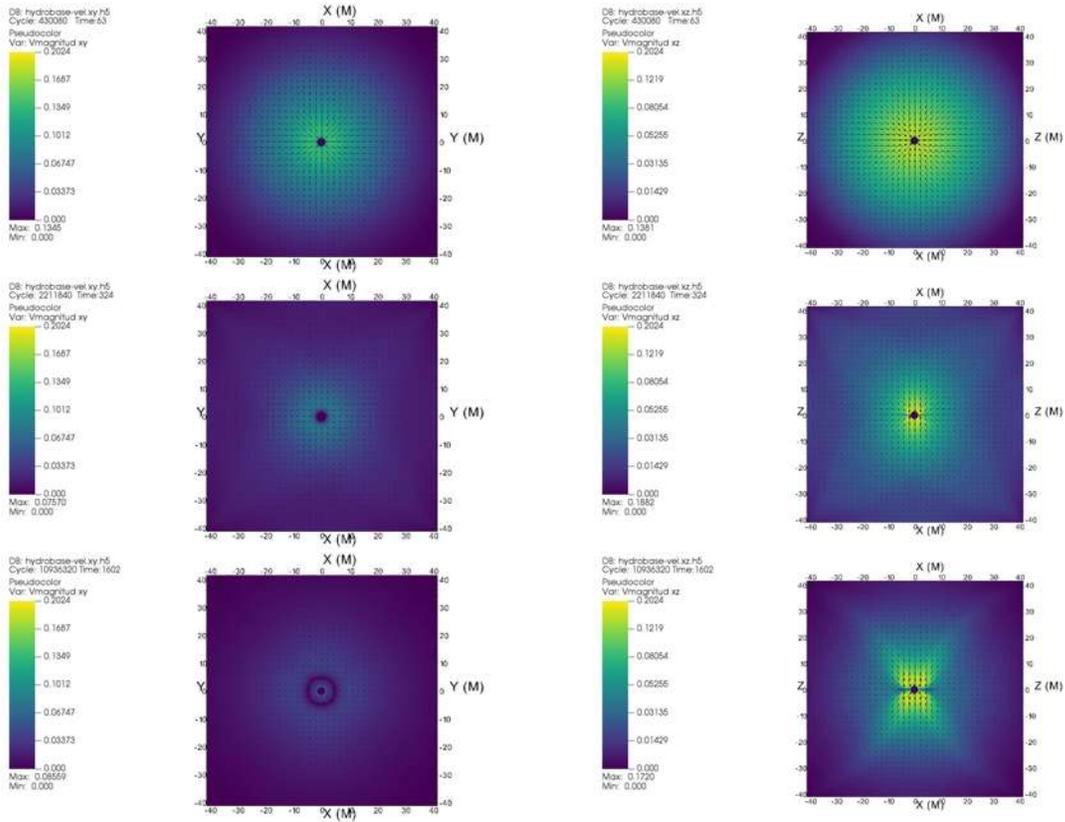


Figura 4.33: Campo de velocidades para la simulación con $a = 0.1$ y $B_0 = 10^{-2}/M$ en los planos xy (izquierda) y xz (derecha), de arriba a abajo para los tiempos $t = 63M, 324M,$ y $1602M$.

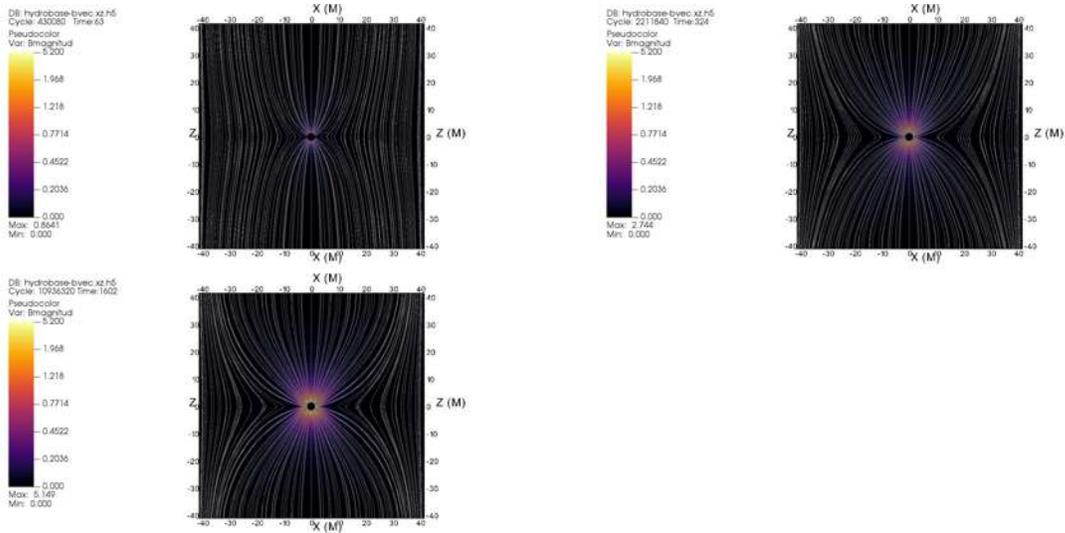


Figura 4.34: Líneas de campo magnético en el plano xz para la simulación con $a = 0.1$ y $B_0 = 10^{-2}/M$ en los tiempos $t = 63M, 324M,$ y $1602M$.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado un plasma siendo acretado desde una región lejana a un hoyo negro de Kerr, observando los perfiles de densidad y velocidades en que se acomoda de modo atractor el flujo del plasma. Los resultados representan el proceso de formación de las configuraciones axiales de flujo de plasma en torno a hoyos negros.

Se ha mostrado de qué manera los perfiles de distribución del plasma dependen de la intensidad del campo magnético inicial y el espín del hoyo negro.

Los resultados son sólidos en la medida que se recuperan los casos de correspondencia, a saber, la implementación usada en las simulaciones permite recuperar los casos de acreción esférica de Michel [Michel 1972] y los de acreción estacionaria axial sin campo magnético [Aguayo-Ortíz et al. 2021].

Se realizaron un conjunto de simulaciones para la acreción de un plasma en torno a un hoyo negro de Schwarzschild cuya dinámica está siendo modificada por un campo magnético inicial constante y perpendicular al plano ecuatorial, para tres valores distintos de la magnitud del campo magnético inicial. Posteriormente simulaciones para la acreción de un plasma en torno a un hoyo negro de Kerr para cuatro valores del parámetro de espín y siendo modificado por un campo magnético inicial constante y paralelo al eje de rotación del hoyo negro, dicho campo tiene tres valores distintos para su magnitud inicial teniendo un total de doce simulaciones para este caso. Finalmente se encuentra una combinación de parámetro de espín y magnitud de campo magnético inicial donde se forma un disco de acreción.

La contribución de este trabajo al estado del arte es la construcción de configuraciones estacionarias atractoras de plasma alrededor de hoyos negros de Schwarzschild y Kerr.

Acotando el alcance de este trabajo, no se exploró el régimen de formación de jets debido a los requisitos de equipo de cómputo necesarios, dos órdenes superiores en capacidad de cálculo y memoria RAM a los que utilizamos en nuestro análisis, como se muestra en estudios recientes [Ressler et al. 2021]. Sin embargo, se implementaron las condiciones de frontera para llevar a cabo dicho análisis en caso de contar con el equipo adecuado.

Como contribución adicional, se diagnosticó una comparación entre dos métodos de preservación de la constricción $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, el método de *cleaning* y el de transporte constreñido de flujo magnético. Encontramos que el segundo mantiene la constricción en los escenarios en que la presión magnética es mas importante y que la primera permite la violación de la constricción en órdenes de magnitud. Debido a esto no tenemos duda en recomendar usar el método de transporte constreñido de flujo magnético en simulaciones de MHD relativista.

A

Apéndice

En los cálculos realizados se utilizaron unidades geométricas, donde $G = c = 1$, lo que implica que las coordenadas temporal y espacial están escritos en términos de M , que se utiliza para escalar las unidades para un sistema en particular. Para poder comparar los resultados con observaciones es útil escribir explícitamente las conversiones necesarias para pasar de unidades geométricas a unidades cgs-Gaussianas siguiendo [Rezzolla & Zanotti 2013]. Aquí r es una longitud genérica, t el tiempo, m la masa, v una velocidad genérica, ρ la densidad de materia en reposo, \dot{M} es la tasa de acreción y G magnitud del campo magnético.

$$r_{cgs} = 1.47651 \times 10^5 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) r_{geo}, \quad (\text{A.1})$$

$$t_{cgs} = 4.92513 \times 10^{-6} c \left(\frac{M}{M_\odot} \right) t_{geo}, \quad (\text{A.2})$$

$$m_{cgs} = 1.9884 \times 10^{33} \left(\frac{G}{c^2} \right) \left(\frac{M}{M_\odot} \right) m_{geo}, \quad (\text{A.3})$$

$$v_{cgs} = 2.99792458 \times 10^{10} \left(\frac{1}{c} \right) v_{geo}, \quad (\text{A.4})$$

$$\rho_{cgs} = 6.17714^{17} \left(\frac{G}{c^2} \right) \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^2 \rho_{geo}, \quad (\text{A.5})$$

$$\dot{M}_{cgs} = 203040.325839115 \left(\frac{1}{c} \right) \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \dot{M}_{geo}, \quad (\text{A.6})$$

$$(\text{A.7})$$

$$\mathbf{G}_{cgs} = 2.356220784 \times 10^{19} \left(\frac{\sqrt{G}}{c^2} \right) \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \mathbf{G}_{geo}. \quad (\text{A.8})$$

Los subíndices representan al valor en el sistema de unidades, *cgs* para el sistema de unidades cgs-Gaussianas y *geo* para el sistema de unidades geométricas, aunque el resultado utilizar el factor de conversión para la tasa de acreción no está en el sistema cgs ya que las unidades serían M_\odot/s se mantiene este índice por simplicidad. M está dado en masas solares M_\odot , en los resultados de este trabajo la masa del hoyo negro se fijó en $M = 10^9 M_\odot$.

REFERENCIAS

- [Aguayo-Ortíz et al. 2021] Aguayo-Ortíz, A., Tejada, E., Sarbach, O. & López-Cámara, D. *Spherical accretion: Bondi, Michel, and rotating black holes* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **504** (2021), 5039-5053.
- [Anile 1989] Anile, A. M., *Relativistic Fluid and Magneto-Fluids*, Cambridge University Press, (1989)
- [Antón et al 2006] Antón, L., Zanotti, O., Miralles, J. A., Martí, J.M., Ibáñez, J.M., Font, J.A., Pons, J.A., “*Numerical 3+1 General Relativistic Magnetohydrodynamics: A Local Characteristic Approach* ” The Astrophysical Journal, **637** (2006), 296-312
- [Babiuc-Hamilton et al. 2015] Babiuc-Hamilton, M., Brandt, S. R., Diener, P., et al. , *The Hilbert release*, ET_2015_05, (2015) Zenodo, doi:10.5281/zenodo.3522086
- [Baumgarte & Shaphiro 2003] Baumgarte, T. W., Shapiro S.L., “*General Relativistic Magnetohydrodynamics For The Numerical Construction Of Dynamical Spacetimes*” The Astrophysical Journal, **585** (2003), 921-929
- [Baumgarte & Shaphiro 2010] Baumgarte, T. W., Shapiro S.L., *Numerical Relativity Solving Einstein’s Equations on the Computer*, Cambridge University Press, (2010)
- [Barut 1964] Barut, A. O., “*Electrodynamics And Classical Theory Of Fields & Particles*”, Dover Publications, Inc., first edition, (1964)
- [Berger & Olinger 1984] Berger, M. J. & Olinger, J. , “*Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations*” Journal of Computational Physics. **53** (1984), 484-512
- [Blandford & Znajek 1976] Blandford, R. D., Znajek, R.L. *Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **179** (1976), 433-456.
- [Bondi 1952] Bondi, H. *On spherically symmetrical accretion*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **112** (1952), 195-204.

-
- [Borges et al. 2007] Borges, R., Carmona, M., Costa, B. & Don, W. S. , “*An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws*” *Journal of Computational Physics*. **227** (2008), 3191-3211
- [De Villiers & Hawley 2003] De Villiers, J. P. & Hawley J. F. *Global General Relativistic Magnetohydrodynamic Simulations of Accretion Tori*” *Astrophysical Journal*, **592** (2003), 1060-1077.
- [Del Zanna et al. 2007] Del Zanna, L., Zanotti, O., Bucciantini, N. & Londrillo, P. *ECHO: an Eulerian Conservative High Order scheme for general relativistic magnetohydrodynamics and magnetodynamics*, *Astronomy & Astrophysics*, **473** (2007), 11-30.
- [EHT I 2019] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole, *The Astrophysical Journal Letters* (2019).
- [Evans & Hawley 1988] Evans, C. R., & Hawley J. F., “*Simulation Of Magnetohydrodynamics Flows: A Constrained Transport Method*” *The Astrophysical Journal*, **332** (1988), 659-677.
- [Fragile et al. 2007] Fragile, P. C., Blaes, O. M., Anninos, P., Salmonson, J. D. *Global general relativistic magnetohydrodynamic simulation of a tilted black hole accretion disk*, *The Astrophysical Journal*, **668** (2007), 417-429.
- [Font 2008] Font, J. A., *Numerical Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics in General Relativity* *Living Reviews in Relativity*, **11** (2008), 7.
- [Giacomazzo & Rezzolla 2007] Giacomazzo, B. & Rezzolla, L. , “*WhiskyMHD: a new numerical code for general relativistic magnetohydrodynamics*” *Classical and Quantum Gravity*. **24** (2007), 235-258.
- [Gammie, MacKinney & Tóth 2003] Gammie, C. F., McKinney, J. C. & Tóth, G. *HARM: A Numerical Scheme for General Relativistic Magnetohydrodynamics* *Astrophysical Journal*, **589** (2003), 444–457.
- [Gottlieb et al. 2001] Gottlieb, S. , C.W. & Tadmor E. , “*Strong Stability-Preserving High-Order Time Discretization Methods* ” *Society for Industrial and Applied Mathematics*. **43** (2001), 89-112.
- [Gracia-Linares 2017] Gracia-Linares, M. Dr. Sc. Thesis Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2013. http://bibliotecavirtual.dgb.umich.mx:8083/xmlui/handle/DGB_UMICH/2243.
- [Guzmán et al. 2020] Gúzman, F. S., Alvarez-Ríos, I., Romero-Amezcuca & A., *Spherical accretion of a perfect fluid onto a black hole* *Revista Mexicana de Física E*, **18** (2020), 1-24.

-
- [Hou & Le Floch 1994] Hou, T. Y., & Le Floch, P. G., “*Why Nonconservative Schemes Converge to Wrong Solutions: Error Analysis*” *Mathematics of Computation* , **62** (1994), 497-530.
- [Jaffe 2019] Jaffe, T. R. *Practical Modeling of Large-Scale Galactic Magnetic Fields: Status and Prospects*, *Galaxies*, **7** (2019), 52.
- [Lax & Wendroff 1960] Lax, P.D. & Wendroff, B., “*Systems of Conservation Laws III*” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **13** (1960), 217-237.
- [Liska et al. 2021] Liska, M., Hesp, C., Tchekhovskoy, A., Ingram, A., van der Klis, M., Markoff, S. B., Van Moer, M. *Disc tearing and Bardeen–Peterson alignment in GRMHD simulations of highly tilted thin accretion discs*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **507** (2021), 983-990.
- [Lora-Clavijo 2014] Lora-Clavijo, F.D. Dr. Sc. Thesis. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2013. http://bibliotecavirtual.dgb.umich.mx:8083/xmlui/handle/DGB_UMICH/2194
- [Mach et al. 2018] Mach, P., Piróg, M., Font, J. A. *Relativistic low angular momentum accretion: long time evolution of hydrodynamical inviscid flows*, *Classical and Quantum Gravity*, **35** (2018), 095005.
- [McKinney 2006] McKinney, J. C. *General Relativistic Magnetohydrodynamic Simulations of Jet Formation and Large-Scale Propagation from Black Hole Accretion Systems* *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **368** (2006), 1-25.
- [McKinney et al. 2014] McKinney, J. C., Tchekhovskoy, A., Sadowski, A., Narayan, R., *three-dimensional general relativistic radiation magnetohydrodynamical simulation of super-Eddington accretion, using a new code harmrad with M1 closure*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **441** (2014), 3177-3208.
- [Michel 1972] Michel, F. C., “*Accretion of matter by condensed objects*” *Astrophysics and Space Science* , **15** (1972), 153-160.
- [Misner, Thorne & Wheeler 1973] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A., “*Gravitation*”, W. H. Freeman and Company, first edition, (1973).
- [Mösta et al 2013] Mösta, P., Mundim, B. C., Faber, J. A., Hass, R., Noble, C. S., Bode, T., Löffler, F., Ott, C. D., Reisswig, C., Schnetter, E., *GRHydro: a new open-source general-relativistic magnetohydrodynamics code for the Einstein toolkit* *Classical and Quantum Gravity*, **32** (2013), 015005.
- [Narayan et al. 2003] Narayan, R., Igumenshchev, I. V. & Abramowicz, M. A. *Magnetically Arrested Disk: an Energetically Efficient Accretion Flow*, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, **55** (2003), L69-L72.

-
- [Narayan et al. 2012] Narayan, R., Sadowski, A., Penna, R. F., Kulkarni, A. K. *GRMHD simulations of magnetized advection-dominated accretion on a non-spinning black hole: role of outflows*, Monthly Notice of the Royal Astronomical Society, **426** (2012), 3241-3259.
- [Papadopoulos & Font 1998] Papadopoulos, P., Font, J. A., “*Relativistic hydrodynamics around black holes and horizon adapted coordinate systems*” Physical Review D, **58** (1998), 024005.
- [Pariev 1995] Pariev, V. I. *Hydrodynamic accretion onto rapidly rotating Kerr black hole* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **283** (1995), 1264–1280.
- [Petrich et al. 1988] Petrich, L. I., Shapiro, S. L., Teukolsky, S. A. *Accretion onto a Moving Black Hole: An Exact Solution*, Physical Review Letters, **60** (1988), 1781-1784.
- [Ressler et al. 2021] Ressler, S. M., Quataret, E., White C. J., & Bleas, O., “*Magnetically Modified Spherical Accretion in GRMHD: Reconnection-Driven Convection and Jet Propagation*” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **504** (2021), 6076–6095.
- [Rezzolla & Zanotti 2013] Rezzolla, L., Zanotti, O., *Relativistic Hydrodynamics*, Oxford University Press, first edition, (2013).
- [Roe 1986] Roe, P. L., *Characteristic-Based Schemes for the Euler Equation* Annual Review of Fluid Mechanics, **18** (1986), 337-365.
- [Romero-Amezcuca 2020] Romero-Amezcuca, A. *Acreción de un fluido perfecto en un agujero negro de Schwarzschild*, Thesis Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, (2020).
- [Schutz 2009] Schutz, B. “*A first course in general relativity*”, Cambridge University Press, second edition, (2009).
- [Shcherbakov 2008] Shcherbakov, R., *Spherically Symmetric Accretion Flows: Minimal Model With Magnetohydrodynamics Turbulence* The Astrophysical Journal Supplement Series, **177** (2008), 493-514.
- [Siegel et al. 2018] Siegel, D. M., Mösta, P., Desai, D., Wu S., *Recovery Schemes for Primitive Variables in General magnetohydrodynamics* The Astrophysical Journal, **859**, 71.
- [Shu & Osher 1989] Shu, C. W. & Osher, S. J., “*Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II*” Journal of Computational Physics, **83** (1989), 32-78.

-
- [Tóth 2000] Tóth, G., “*The $\nabla \cdot B = 0$ Constraint in Shock Capturing Magnetohydrodynamics Codes*” *Journal of Computational Physics*, **161** (2000), 605-652.
- [Toro 1999] Toro, E. F., “*Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*” Springer, (1999).
- [Van Leer 1977] Van Leer, B., *Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection* *Journal of Computational Physics*, **23** (1977), 276-299.
- [Van Leer 1979] Van Leer, B., *Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method* *Journal of Computational Physics*, **32** (1979), 101-136.
- [Wald 1974] Wald, R. M. *Black hole in a uniform magnetic field*, *Physical Review D*, **10** (1974), 1680-1685. ,