Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

DINÁMICA DE ELECTRONES EN DIFERENTES DIMENSIONES

T E S I S

que para obtener el título de:

Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

presenta:

Luis Manuel Garcia Valdivia

Tutor:

Dr. Adnan Bashir

Morelia, Michoacán, México.

Agosto 2022

A mi familia y amigos, principalmente a mi madre,
Lorena.

Resumen.

En el presente trabajo se resuelve la ecuación de Dirac hasta en tres dimensiones espaciales acompañado con una dimensión temporal, en las representaciones 2×2 de las matrices de Dirac. También se incluye la solución utilizando la representación 4×4, para ampliar la discusión sobre las cuestiones de la simetría quiral. Se realiza una comparación con las soluciones conocidas de la misma ecuación en dimensiones $(3+1)$ junto con sus propiedades.

En dimensiones $(2+1)$ para obtener el espectro esperado de los fermiones y conservar ciertas simetrías discretas del lagrangiano correspodiente, necesitamos dos campos de Dirac que pertenecen a las representaciones inequivalentes de las matrices de Dirac.

Se estudia un tipo de simetría conocida como la simetría quiral. La primera parte de este capítulo contiene la discusión en dimensiones $(3+1)$. En la segunda parte analizamos esta simetría para el caso de dimensiones $(2+1)$ usando la representación 2×2 y 4×4 de las matrices de Dirac, por último, en dimensiones $(1+1)$.

Agregamos las conclusiones que obtuvimos en el estudio de la ecuación de Dirac y sus soluciones en las diferentes dimensiones bajo las transformaciones quirales y de paridad, así como la solución de la ecuación de Dirac añadiendo un potencial lineal escalar.

Esto es a grandes rasgos el trabajo realizado y presentado, cuya principal motivación es ampliar el conocimiento de las leyes físicas para el mayor entendimiento de la naturaleza.

Asbtract.

In the present work the Dirac equation is solved up to three spatial dimensions accompanied with one time dimension, in the 2×2 representations of the Dirac matrices. The solution using the 4×4 representation is also included, to extend the discussion of chiral symmetry issues. A comparison is made with known solutions of the same equation in $(3+1)$ dimensions along with their properties.

In $(2+1)$ dimensions to obtain the expected spectrum of the fermions and to preserve certain discrete symmetries of the corresponding lagrangian, we need two Dirac fields belonging to the inequivalent representations of the Dirac matrices.

A type of symmetry known as the chiral symmetry is studied. The first part of this chapter contains the discussion in $(3+1)$ dimensions. In the second part we analyze this symmetry for the case of $(2+1)$ dimensions using the 2×2 and 4×4 representation of Dirac matrices, finally, in $(1+1)$ dimensions.

We add the conclusions we obtained in the study of the Dirac equation and its solutions in the different dimensions under the chiral and parity transformations, as well as the solution of the Dirac equation by adding a linear scalar potential.

This is roughly the work done and presented, whose main motivation is to broaden the knowledge of physical laws for a better understanding of nature.

Palabras clave: Ecuación de Dirac, Lagrangiano, Simetrías, Potencial Lineal, Transformaciones Quirales, Matrices Gamma, Espín, Representación.

CONTENIDO

1. Introducción **1**

1.0.1. Ecuaciones de Movimiento, Espín y Dimensiones 1

1.0.2. Simetrías 2

2. La Ecuación de Dirac **3**

2.1. La Ecuación de Dirac en Dimensiones (3+1) 3

2.1.1. La Ecuación de Klein-Gordon 3

2.1.2. La Ecuación de Dirac 4

2.1.3. Representación Matricial 5

2.1.4. Partícula en Reposo 7

2.1.5. Partícula en Movimiento 8

2.1.6. Espín 10

2.2. La Ecuación de Dirac en Dimensiones (2+1) 12

2.2.1. Primera Representación 13

2.2.2. Partícula en Reposo 13

2.2.3. Partícula en Movimiento 14

2.2.4. Espín 15

2.2.5. Segunda Representación 17

2.3. La Ecuación de Dirac en Dimensiones (1+1) 17

2.3.1. Partícula en Reposo 18

2.3.2. Partícula en Movimiento 18

2.3.3. Espín 20

3. Transformaciones Quirales **21**

3.1. Simetría Quiral en Dimensiones $(3+1)$ 21

3.1.1. La Matriz γ^5 22

3.1.2. Significado Físico de la Matriz γ^5 22

3.1.3. Transformaciones Quirales 23

3.1.4. Corrientes Quirales 25

3.2. Simetría Quiral en Dimensiones $(2+1)$ 27

3.2.1. Representación (2×2) 27

3.2.2. Quiralidad en el Plano 28

3.2.3. Corriente Quiral 29

3.2.4. Transformaciones Quirales 31

3.2.5. Términos de Masa 32

3.2.6. Comparación Entre las Representaciones 2×2 y 4×4 33

3.3. Simetría Quiral en Dimensiones (1+1) 34

4. La Ecuación de Dirac Unidimensional con un Potencial Escalar Lineal 37

4.1. Solución de la ecuación de Dirac 37

5. Conclusiones **39**

6. Apéndice **41**

REFERENCIAS **45**

Capítulo 1

Introducción

1.0.1 Ecuaciones de Movimiento, Espín y Dimensiones

Las partículas, aún las supuestas puntuales presentan un atributo clásicamente inexplicable; se comportan como si tuvieran un momento angular intrínseco, es decir, característico de la partícula en sí, independientemente de su movimiento. Lo llamamos como espín de las partículas. El espín de las partículas puede ser solo un múltiplo entero o semientero de $\hbar$. Las partículas con espín entero $(0, 1, 2, \ldots)$ se llaman bosones porque siguen la estadística de Bose Einstein, las partículas con espín semientero $(1/2, 3/2, 5/2, \ldots)$ se llaman fermiones porque obedecen a la estadística de Fermi-Dirac. A nivel fundamental, las partículas con diferentes valores de espín se distinguen por las diferentes ecuaciones de movimientos que satisfacen. Las partículas con espín cero satisfacen la ecuación de Klein-Gordon (por ejemplo, Higgs), las partículas con espín 1 satisfacen las ecuaciones de Maxwell (por ejemplo, fotones) y las partículas con espín 1/2 satisfacen la ecuación de Dirac (por ejemplo, electrones). En esta tesis, **estudiaremos únicamente las partículas de espín** $1/2$.

Nos enfocamos en el caso donde las dimensiones espaciales son dos. Este caso es de interés directo en algunas teorías del estado sólido. Cuando se agregan interacciones electromagnéticas en el lagrangiano surgen complicacciones matemáticas más severas en dimensiones $(3 + 1)$ que en dimensiones $(2 + 1)$, por dichas razones estudiar el caso dimensional $(2 + 1)$ puede darnos una visión mas clara de los problemas teóricos sin preocuparnos de los problemas computacionales. En este caso un problema de interes es estudiar el comportamiento de las teorías existentes en diferentes dimensiones. Cuando las dimensiones son más grandes y tienen su geometría más complicada, éstas teorías adquieren un tratamiento más difícil. Nosotros escogemos las dimensiones $(2+1)$ y $(1+1)$ para evitarnos así complicaciones y estudiamos las diferencias que se deben al cambio de las dimensiones. Vemos que hay ciertos resultados que podemos generalizar para dimensiones impares arbitrariamente grandes.

1.0.2 Simetrías

El papel de las simetrías en la descripción de las propiedades de las partículas y sus interacciones es fundamental. El fisico C.N. Yang lo expresa así:

"La naturaleza parece aprovechar las simples representaciones matemáticas de las leyes de la simetría. Si nos detenemos a considerar la elegancia y la bella perfección del razonamiento matemático que entra en juego y las comparamos con sus consecuencias físicas complejas y de largo alcance, surge un profundo sentido de respeto hacia el poder de las leyes de la simetría..."

En la descripción de las interacciones fundamentales de las partículas, las simetrías de la ecuación del movimiento o del lagrangiano juegan un papel muy importante. Se puede llamar simetría a una transformación que deja el lagrangiano (o la acción) invariante. Podemos decir que existen dos tipos de simetrías: simetrías discretas y simetrías continuas. Las simetrías discretas son aquellas que no podemos efectuar por medio de una transformación infinitesimal, mientras que las simetrías continuas son aquellas que podemos efectuar por medio de una transformación infinitesimal.

- Las rotaciones y boosts son algunos ejemplos de las simetrías continuas y forman parte de las transformaciones de Lorentz.
- Dentro de las transformaciones discretas está la transformación de paridad. Construímos un lagrangiano invariante bajo transformaciones de paridad.

Capítulo 2

La Ecuación de Dirac

Al nivel de mecánica cuántica relativista las partículas libres de espín 1/2 satisfacen la ecuación de Dirac. En este capítulo, presentamos un análisis detallado de esta ecuación y sus soluciones en dimensiones $(3+1)$. En el caso de dimensiones $(2+1)$ las matrices γ presentan la propiedad de darnos dos representaciones inequivalentes y presentamos las soluciones para ambas representaciones. También se hace un estudio del espín en los casos mencionados anteriormente y concluímos el capítulo hablando del siginificado físico de esta propiedad.

SECCIÓN 2.1

La Ecuación de Dirac en Dimensiones (3+1)

2.1.1 La Ecuación de Klein-Gordon

Recordemos la relación que nos proporciona la Relatividad Especial para la energía y el momento de una partícula. La ecuación es la siguiente:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad , \tag{2.1}$$

En mecánica cuántica a cada observable físico le corresponde un operador lineal y hermítico. Para la energía y el momento se hacen las siguientes definiciones:

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad , \tag{2.2}$$

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla \quad . \tag{2.3}$$

Sutituyendo las definiciones (2.2) y (2.3) en la ecuación (2.1), y aplicando a una función de onda $\psi(\mathbf{x}, t)$, obtenemos una ecuación diferencial:

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right]^2 \psi = \left[(-i\hbar c\nabla)^2 + m^2c^4\right]\psi \quad , \tag{2.4}$$

$$\longrightarrow \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad . \tag{2.5}$$

La ecuación (2.5) es la ecuación de Klein-Gordon para una partícula libre. Es posible escribir dicha ecuación de una forma más compacta utilizando un formalismo covariante, por ejemplo $\partial_\mu\partial^\mu = \frac{1}{c^2}\partial_0^2 - \nabla^2 = \Box^2$. En particular, la ecuación se convierte en:

$$\left[\Box^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad . \tag{2.6}$$

La ecuación de Klein-Gordon no es válida cuando se trata como una ecuación de onda, con interpretación probabilística, esto nos lleva a incoherencias internas con las densidades de probabilidad para la partícula, debido a que la ecuación (2.1) tiene soluciones $\pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c}$.

2.1.2 La Ecuación de Dirac

Durante algún tiempo, se pensó que la ecuación de Klein-Gordon era la única generalización relativista de la ecuación de Shrodinger hasta que Dirac descubrió una alternativa. Su objetivo era escribir una ecuación lineal en $\frac{\partial}{\partial t}$. Para ser covariante, también debe ser lineal en ∇ y por lo tanto tiene la forma general:

$$E = (\alpha \cdot P + \beta m) \quad . \tag{2.7}$$

Donde los coeficientes $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ y β los determinaremos tomando en cuenta que una partícula libre debe satisfacer la ecuación relativista (2.1). De (2.7) tenemos:

$$\begin{aligned} E^2 &= (\alpha_i P_i + \beta m)(\alpha_j P_j + \beta m) \quad , \\ &= (\alpha_i P_i)^2 + (\beta m)^2 + (\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)P_iP_j + (\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)P_i m \quad , \end{aligned}$$

Comparando con la ecuación (2.1) notamos los siguiente:

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \quad y \quad \alpha_i, \beta \quad \textbf{anticonmutan unos con otros}. \tag{2.8}$$

Lo anterior nos lleva a intuir que los coeficientes α_i y β no pueden ser simples números, por tanto consideraremos transformaciones lineales actuando sobre una función de onda ψ.

Éstas transformaciones las llamaremos **matrices** γ **de Dirac** que se definen como:

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta\alpha) \quad . \tag{2.9}$$

Usando las relaciones deducidas en (2.8) y la definición en (2.9) vemos que las matrices γ de Dirac satisfacen las relaciones de anticonmutación:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad . \tag{2.10}$$

O explícitamente, ya que $\gamma^0 = \beta$, tenemos:

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \qquad (\gamma^0)^2 = I \quad , \tag{2.11}$$

además:

$$\gamma^{k\dagger} = (\beta\alpha^k)^\dagger = \alpha^k\beta = -\gamma^k \quad , \tag{2.12}$$
$$(\gamma^k)^2 = \beta\alpha^k\beta\alpha^k = -I \quad . \tag{2.13}$$

En la proxima sección trataremos de encontrar cuál es dicha representación matricial.

2.1.3 Representación Matricial

Supongamos que existe una representación 2×2 de las matrices γ de Dirac. Podemos tomar, por ejemplo, las siguientes definiciones:

$$\gamma^0 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ,$$
$$\gamma^1 = i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$
$$\gamma^2 = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

donde $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ son las matrices de Pauli. La matriz restante γ^3 la encontraremos de modo que cumpla las relaciones que determinamos en la sección anterior, podemos entonces escribir:

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad .$$

Recordando que $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 0$ con $\mu \neq \nu$ (no conmutan entre sí) y la ecuación (2.13) tenemos lo siguiente:

$$\gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0 = 0 \quad , \tag{2.14}$$
$$\gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^1 = 0 \quad , \tag{2.15}$$
$$\gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2 = 0 \quad , \tag{2.16}$$
$$(\gamma^3)^2 = -1 \quad . \tag{2.17}$$

De la ecuación (2.14) tenemos:

$$\begin{aligned}
\gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \\
&= \begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & -B \\ C & -D \end{pmatrix} \quad , \\
&= \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & -2D \end{pmatrix} \quad , \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Por otro lado, la ecuación (2.15) implíca:

$$\begin{aligned}
\gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \\
&= i\begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix} \quad , \\
&= i\begin{pmatrix} B+C & A+D \\ A+D & B+C \end{pmatrix} \quad , \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Por último, de (2.16) concluímos que:

$$\begin{aligned}
\gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \\
&= \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B & A \\ -D & C \end{pmatrix} \quad , \\
&= \begin{pmatrix} C-B & D+A \\ -A-D & C-B \end{pmatrix} \quad , \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}$$

De (2.14) se puede concluír que $A = D = 0$, de la ecuación (2.15) $B = -C$, que sustituyendo en (2.16) nos lleva a $2C = 0 \to C = 0$, por tanto:

$$\gamma^3 = 0_{2,2} \quad .$$

Evidentemente la matriz $\gamma^3 = 0_{2,2}$ no cumple con la ecuación (2.17), por tanto, no existe una representación matricial 2×2 de las matrices γ para un espacio-tiempo dimensional (3+1). Similarmente, no existe una representación 3×3 de las matrices de γ.

De hecho, las matrices más pequeñas que funcionan son las 4×4, pero hay más de una elección posible, o representación, de las matrices. Si bien la elección de la representación no puede afectar a las propiedades de la ecuación de Dirac, afecta al significado físico de las componentes individuales de la función de onda.

En la representación de Dirac, las cuatro matrices gamma contravariantes son:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3 \quad . \tag{2.18}$$

Eventualmente escribiremos de manera explícita ésta representación.

Por otra parte, Dirac sugirió una ecuación lineal de la energía para una partícula relativista $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, factorizando de la siguiente forma:

$$(\gamma^k p_k + mc)(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0 \quad . \tag{2.19}$$

Lo anterior implíca lo siguiente:

$$(\gamma^k p_k + mc) = 0 \quad , \tag{2.20}$$
$$(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0 \quad . \tag{2.21}$$

Comencemos con la ecuación (2.21). Sustituyendo el cuadri-momento p_μ por su operador lineal correspondiente. Así, escribimos entonces:

$$(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad . \tag{2.22}$$

En la siguiente sección encontraremos la solución de ésta ecuación para la partícula en reposo.

2.1.4 Partícula en Reposo

Para una partícula libre, podemos por tanto buscar eigen-soluciones para el cuadri-momento de la ecuación de Dirac con soluciones de la forma:

$$\psi = u(\mathbf{p})e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} \quad . \tag{2.23}$$

Como la función de onda ψ se representa por la matriz de Dirac 4×1, ha de ser un objeto de 4 componentes. Se verá que la función de onda contiene dos conjuntos de grados de libertad, uno asociado a la energía positiva y otro a la negativa. Luego:

$$(i\hbar\gamma^0 \partial_0 - mc)u(\mathbf{p}) = 0 \quad . \tag{2.24}$$

Ya que estamos buscando eigenvectores para la energía, podemos encontrarlos fácilmente usando la forma de la ecuación (2.7):

$$Eu = (c\alpha \cdot p + \beta mc^2)u \tag{2.25}$$

Para ésta ecuación, existen cuatro soluciones independientes, dos con energía $E > 0$ y dos con $E < 0$, Recordando que estamos en la representación Dirac-Pauli, tomando la partícula en reposo, $p = 0$, tenemos:

$$Eu = (\beta mc^2)u = \begin{pmatrix} mc^2 I & 0 \\ 0 & -mc^2 I \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} mc^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & mc^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mc^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -mc^2 \end{pmatrix} u \quad . \tag{2.26}$$

Notemos que la matriz β es una matriz triangular, tanto inferior como superior.

Teorema 1. Los valores propios de una matriz triangular son las entradas de su diagonal principal.

Usando el teorema anterior, concluímos que los valores propios para la partícula en reposo son $E = mc^2, mc^2, -mc^2, -mc^2$, y eigenvectores:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.27}$$

Otra manera de escribir estas soluciones, resaltando por separado cada una de las cuatro componentes del espinor como las componentes de un vector columna, es la siguiente:

$$\psi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imc^2 t/\hbar}, \quad \psi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imc^2 t/\hbar}, \quad \psi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{imc^2 t/\hbar}, \quad \psi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imc^2 t/\hbar} \quad .$$

En la próxima sección encontraremos la solución de la ecuación de Dirac para partícula en movimiento.

2.1.5 Partícula en Movimiento

Para la partícula en movimiento tenemos que $p \neq 0$, usando entonces la representación Dirac-Pauli la ecuación (2.25) se convierten en:

$$\begin{aligned} E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} &= (c\alpha \cdot p + \beta mc^2) \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 I & 0 \\ 0 & -mc^2 I \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \quad , \\ &= \begin{pmatrix} mc^2 & c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{2.28}$$

donde u ha sido dividido en dos espinores de dos componentes cada uno, u_A y u_B respectivamente. Esto se reduce al sistema de ecuaciones:

$$(c\vec{\sigma}\cdot\vec{p})u_B = (E - mc^2)u_A \quad , \tag{2.29}$$
$$(c\vec{\sigma}\cdot\vec{p})u_A = (E + mc^2)u_B \quad . \tag{2.30}$$

Para las dos soluciones con energía $E > 0$, tomamos $u_A^{(s)} = \phi^{(s)}$, donde:

$$\phi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.31}$$

Usando la ecuación (2.30) obtenemos las componentes:

$$u_B^{(s)} = \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E + mc^2}\phi^{(s)} \tag{2.32}$$

y entonces, las soluciones para la energía positiva de la ecuación de Dirac son:

$$u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \phi^{(s)} \\ \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2}\phi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad E > 0 \tag{2.33}$$

con $s = 1, 2$, y obviamente N es una constante de normalización. Para las soluciones con energía $E < 0$, similarmente tomamos $u_B^{(s)} = \phi^{(s)}$, y de (2.29) llegamos a:

$$u_A^{(s)} = \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E - mc^2}u_B^{(s)} = -\frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|E| + mc^2}\phi^{(s)} \quad . \tag{2.34}$$

Por tanto, obtenemos:

$$u^{(s+2)} = N \begin{pmatrix} \frac{-c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|E|+mc^2}\phi^{(s)} \\ \phi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad E < 0 \quad . \tag{2.35}$$

Por ejemplo, para un electrón con momento p tenemos cuatro soluciones: $u^{(1,2)}$, correspondientes a la energía positiva, y $u^{(3,4)}$, correspondientes a la energía negativa.

Si el término $\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$ lo desarrollamos explícitamente podemos escribir la cuatro soluciones de la ecuación de Dirac de la siguiente manera:

$$\psi^{(1)} = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}, \qquad \psi^{(2)} = N_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E+mc^2} \end{pmatrix} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}, \tag{2.36}$$

$$\psi^{(3)} = N_3 \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{E-mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E-mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}, \qquad \psi^{(4)} = N_4 \begin{pmatrix} \frac{c(p_x-ip_y)}{E-mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E-mc^2yhy} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} \quad . \tag{2.37}$$

Las dos soluciones $u^{(3,4)}$ con energía negativa para nuestro electrón están asociadas con la antipartícula, el positrón. De hecho, un positrón de energía E y momento p está descrito por una de las soluciones con $-E, -p$, esto es:

$$u^{(3,4)}(-p)e^{-i[-\vec{p}]\cdot\vec{x}/\hbar} \equiv v^{(2,1)}(p)e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} \quad , \tag{2.38}$$

donde $p^0 \equiv E > 0$. Los espinores del positron, v, son introducidos por conveniencia notacional. Recordemos que la ecuación de Dirac para $u(p)$ es:

$$(i\hbar \not{p} - mc)u(p) = 0 \quad . \tag{2.39}$$

donde $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ (Feynman slash notation). ¿Qué implíca esto para $v(p)$? Para un electrón de energía $-E$ y momento $-p$ tenemos:

$$(-i\hbar \not{p} - mc)u(-p) = 0 \quad , \tag{2.40}$$

y entonces:

$$(i\hbar \not{p} + mc)v(p) = 0 \quad . \tag{2.41}$$

Donde $p^0 \equiv E > 0$.

Por último, notemos que en la ecuación de Dirac, por ejemplo, en (2.28), tenemos una doble degeneración. Esto significa que debe existir otro observable el cuál conmute con H y P, cuyos eigenvalores pueden ser tomados para distinguir los estados.

2.1.6 Espín

En base al principio que establece que en ausencia de fuerzas externas, el momento angular total $\vec{J}$ se conserva, $[H, \vec{J}] = 0$, es decir, que este conmuta con el hamiltoniano, veamos cuál es la expresion para el espín $\vec{S}$ (momento angular interno de la partícula).

Si evaluamos el conmutador del momento angular orbital $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ con el hamiltoniano:

$$[H_D, L_k] = \epsilon_{ijk}[H_D, r_i p_j] \neq 0 \quad , \tag{2.42}$$

y obtenemos, para partícula libre, que estos operadores no conmutan entre sí. Lo anterior determina que existe una componente adicional con características de momento angular (el espín $\vec{S}$) que compensa al $\vec{L}$ de tal manera que el momento angualar total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, sí se conserva, o dicho de otro modo:

$$[H_D, J_k] = 0 \quad .$$

Sabemos que el electrón tiene espín, y que en el caso no relativista, los operadores de espín (precisamente las matrices de Pauli) trivialmente conmutan con el hamiltoniano, ya que la ecuación de Schrödinger actúa sólo sobre la parte "orbital" de la función de onda. Entonces deberíamos comprobar el estado del conmutador de H_D y $\vec{\Sigma}$ con:

$$\vec{\Sigma} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \quad . \tag{2.43}$$

¿Cómo podemos hacer una representación de σ que opere en nuestras cuatro dimensiones? Las matrices de cuatro por cuatro:

$$\vec{\Sigma_i} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma_i} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma_i} \end{pmatrix} \quad , \tag{2.44}$$

satisfacen las relaciones de conmutación de espín: $[\Sigma_i, \Sigma_j] = i\epsilon_{kij}\Sigma_k$ como matrices. Luego el conmutador con el hamiltoniano es:

$$[\Sigma_j, H_D] = [\Sigma_j, c\alpha_i p_i] + mc^2[\Sigma_j, \beta] \quad , \tag{2.45}$$

Usando las matrices de Dirac, y nuestras matrices Σ_j de cuatro por cuatro, tenemos: $[\Sigma_j, c\alpha_i] = c(i\epsilon_{jik}\alpha_k)$ y $[\Sigma_j, mc^2\beta] = 0$. Entonces el conmutador se convierte en:

$$[\Sigma_j, H_D] = p_i[\Sigma_j, c\alpha_i] = cp_i(i\epsilon_{jik}\alpha_k) = -ic(\epsilon_{jil}\alpha_i p_l) \quad , \tag{2.46}$$

esto significa que, aunque ni $\vec{L}$ ni $\vec{\Sigma}$ conmuta por separado, la suma:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{\Sigma} \quad , \tag{2.47}$$

lo hace:

$$[\vec{J}, H_D] = 0 \quad . \tag{2.48}$$

Así, los estados estacionarios del Hamiltoniano pueden tomarse como los eigenestados del momento total angular.

Al construir el operador $\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}$ se logra obtener un operador asociado a una constante de movimiento, que comparte estados propios con el H_D en tanto que:

$$[H_D, \vec{\Sigma} \cdot \vec{p}] = 0 \quad . \tag{2.49}$$

Es decir, el operador:

$$\vec{\Sigma} \cdot \hat{p} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

conmuta con H_D y P; $\hat{p}$ es el vector unitario de pointing en la dirección del momento $\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$. La componente del espín en la dirección de movimiento, $\frac{\hbar}{2}\sigma \cdot \hat{p}$ es por tanto un buen número cuántico y puede ser utilizado para etiquetar las soluciones. Llamamos a éste número cuántico la helicidad del estado. Los posibles eigenvalores λ del operador de helicidad $\frac{\hbar}{2}\sigma \cdot \hat{p}$ son:

$$\lambda = +\frac{\hbar}{2} \quad \text{helicidad positiva} \quad , \tag{2.51}$$

$$\lambda = -\frac{\hbar}{2} \quad \text{helicidad negativa} \quad . \tag{2.52}$$

Con la elección de (2.31), de los espinores $\phi^{(s)}$, es apropiado escoger $\mathbf{p}$ a lo largo del eje z, $\mathbf{p} = (0, 0, p)$. Entonces:

$$\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \cdot \hat{p}\phi^{(s)} = \frac{\hbar}{2}\sigma_3\phi^{(s)} = \lambda\phi^{(s)} \quad , \tag{2.53}$$

con $\lambda = \pm\frac{\hbar}{2}$ correspondientes a $s = 1, 2$ respectivamente.

SECCIÓN 2.2

La Ecuación de Dirac en Dimensiones (2+1)

En (2+1) dimensiones, se necesitan únicamente tres matrices de γ. Entonces podemos tener una representacion dos dimensional de dichas matrices en términos de las matrices de Pauli. Sin embargo, como mostraremos enseguida, existen dos representaciones no equivalentes de las matrices de γ en su representación dos dimensional. Es fácil mostrar que en tres dimensiones:[1]

$$\mathcal{P} \equiv \gamma^0\gamma^1\gamma^2 = \pm i\mathrm{I} \quad .$$

Por lo tanto, una de las matrices de γ se puede escribir en términos de las otras. Por ejemplo:

$$\gamma^2 = \pm i\gamma^0\gamma^1 \quad .$$

Por el hecho de tener estas dos posibilidades, existen dos representaciones inequivalentes de las matrices de γ. Podemos escogerlas de la siguiente manera:

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^2 = i\sigma_2 \quad ,$$
$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^2 = -i\sigma_2 \quad .$$

Para entender un poco más la importancia de la existencia de estas dos representaciones matriciales inequivalentes, revisemos el concepto de equivalencia de matrices y su significado físico. Si dos matrices son equivalentes matemáticamente implíca que se puede

[1]Se puede mostrar que en dimensiones impares arbitrarias el producto de todos los matrices de gamma es proporcional a la matriz de identidad, como se muestra en el apéndice A.

obtener a una matriz a partir de transformaciones elementales de la otra, físicamente esto significa que ambas matrices tienen el mismo contenido físico, es decir, que ambas matrices nos darían la misma información sobre el sistema por lo que podemos usar cualquiera de las dos matrices y obtendremos el mismo resultado.

Ahora cuando las representaciones son inequivalentes, matemáticamente implíca que no se puede obtener una a partir de transformaciones elementales de la otra, esto quiere decir que el contenido físico que obtenemos es diferente, debemos estudiar las dos representaciones matriciales y cada una nos dará diferente información sobre el sistema.

2.2.1 Primera Representación

Los espinores de Dirac tienen dos componentes en el espacio-tiempo dimensional (2+1). Estos componentes corresponden a los estados propios de energía positiva y negativa o estados de partículas en movimiento hacia adelante y hacia atrás en el tiempo. Por lo tanto, el álgebra de Dirac se define en términos del álgebra de Pauli. Elegimos las matrices de Dirac constantes en el espacio-tiempo plano γ^μ como:

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2) \quad , \tag{2.54}$$

con

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^2 = i\sigma_2 \quad , \tag{2.55}$$

donde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son las matrices de Pauli. Satisfacen la siguiente relación de anticonmutación:

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = 2g^{ij} \quad , \tag{2.56}$$

donde g^{ij} es la métrica del espacio-tiempo (2+1).

2.2.2 Partícula en Reposo

La partícula en en reposo implíca que $p = (p_x, p_y) = 0$, la ecuación de Dirac se escribe entonces de la siguiente manera:

$$(i\hbar\gamma^0\partial_0 - mc)\psi(t) = 0 \quad . \tag{2.57}$$

Tomando la forma análoga de la ecuación (2.25), para dimensiones (2+1) tenemos que:

$$E\psi = \beta mc^2\psi = \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \psi \quad . \tag{2.58}$$

Los valores propios para la partícula en reposo son $E = mc^2, -mc^2$ y eigenvectores:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.59}$$

Podemos escribir éstas soluciones explícitamente resaltando las componentes de los espinores como:

$$\psi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imc^2t/\hbar}, \quad \psi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imc^2t/\hbar} \quad , \tag{2.60}$$

donde $\psi^{(1)}$ y $\psi^{(2)}$ corresponden a energías positiva y negativa respectivamente.

2.2.3 Partícula en Movimiento

Para $p = (p_x, p_y) \neq 0$ la ecuación de Dirac se escribe como:

$$(i\hbar \not{p} - mc)u(p) = 0 \quad , \tag{2.61}$$

con soluciones de la forma:

$$\psi = u(p)e^{-ip\cdot x/\hbar} \quad . \tag{2.62}$$

Como la función de onda ψ se representa por una matriz de Pauli 2×1, ha de ser un objeto de 2 componentes. Escribiendo:

$$u(p) = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \quad , \tag{2.63}$$

y tomando la representación de Pauli para las matrices γ llegamos a:

$$\begin{aligned} E\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} &= (c\alpha \cdot p + \beta mc^2)\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & c(ip_x + p_y) \\ c(-ip_x + p_y) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} mc^2 & c(ip_x + p_y) \\ c(-ip_x + p_y) & -mc^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{2.64}$$

donde u ha sido dividido en dos espinores de dos componentes cada uno, u_A y u_B respectivamente. Esto se reduce al sistema de ecuaciones:

$$c(ip_x + p_y)u_B = (E - mc^2)u_A \quad , \tag{2.65}$$

$$c(p_y - ip_x)u_A = (E + mc^2)u_B \quad . \tag{2.66}$$

Para la solución con energía $E > 0$, tomamos $u_A = 1$, y de la ecuación (2.66) obtenemos:

$$u_B = \frac{c(p_y - ip_x)}{E + mc^2} \quad , \tag{2.67}$$

por otro lado, para la solución con energía $E < 0$ tomamos u_B=1, entonces:

$$u_A = \frac{c(ip_x + p_y)}{E - mc^2} = -\frac{c(ip_x + p_y)}{|E| + mc^2} \quad . \tag{2.68}$$

Por tanto las soluciones de la ecuación de Dirac tienen la forma:

$$\psi^{(1)} = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c(p_y - ip_x)}{E+mc^2} \end{pmatrix} e^{-ip\cdot x/\hbar} = u_1(p)e^{-ip\cdot x/\hbar}, \qquad \psi^{(2)} = N_2 \begin{pmatrix} \frac{c(ip_x+p_y)}{E-mc^2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ip\cdot x/\hbar} = u_2(p)e^{-ip\cdot x/\hbar} \quad .$$

donde N_i $(i = 1, 2)$ son constantes de normalización. Para una partícula en reposo, $p_x = p_y = 0$, inmediatamente recuperamos sus soluciones. Para interpretar la solución de la energía negativa, notamos como antes que $u_2(-E, -p)$ también satisface la ecuación de Dirac:

$$(\not{p} + m)u_2(-E, -p) = 0 \quad . \tag{2.69}$$

Usaremos la siguiente notación para la solución con energía negativa:

$$v_1(E, p) = u_2(-E, -p) = N_2 \begin{pmatrix} \frac{c(ip_x+p_y)}{E-mc^2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.70}$$

Recordemos que nuestra solución v_1 está asociada con la antipartícula, por ejemplo, un positrón de energía E y momento p.

2.2.4 Espín

Como en el caso de tres dimensiones, proponemos la siguiente forma para el Hamiltoniano que gobierna la dinámica de un fermión en un plano:

$$H_D = c\gamma^0(\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + mc^2) \quad , \tag{2.71}$$

donde $\vec{\gamma} \cdot \vec{p} = \gamma^1 p^1 + \gamma^2 p^2$. Como la partícula está confinada a moverse únicamente en el plano xy, esto implíca que sólo existe una componente del momento orbital angular que puede escribirse de la forma:

$$L_3 = -i\hbar(r^1p^2 - r^2p^1) \quad . \tag{2.72}$$

Por lo tanto, el conmutador del Hamiltoniano con la componente del momento angular orbital es:

$$[H_D, L_3] = -i\hbar c\gamma^0[\vec{\gamma} \cdot \vec{p}, r^1p^2 - r^2p^1] = -i\hbar c\gamma^0(\gamma^1p^2 - \gamma^2p^1) = -i\hbar c\gamma^0[\vec{\gamma} \times \vec{p}] \neq 0 \quad . \tag{2.73}$$

Lo cual implíca que debe existir una componente adicional con características de momento angular (el espín) que compensa al L_3 de tal manera que el momento angular total se conserva, o dicho de otro modo:

$$[H_D, J_3] = 0 \quad . \tag{2.74}$$

Similarmente, definimos el operador:

$$\Sigma_3 = \frac{\hbar}{2}\sigma_3 = \frac{\hbar}{2} i\gamma^1\gamma^2 \quad . \tag{2.75}$$

Si calculamos ahora el conmutador del momento angular total con nuestro Hamiltoniano obtenemos:

$$\begin{aligned}
[H_D, J_3] &= [H_D, L_3 + \Sigma_3] = [H_D, L_3] + [H_D, \Sigma_3] \quad , \\
&= -i\hbar c\gamma^0[\vec{\gamma} \times \vec{p}] + i\frac{\hbar}{2}c[\gamma^0(\vec{\gamma}\cdot\vec{p}), \gamma^1\gamma^2] \quad , \\
&= -i\hbar c\gamma^0[\vec{\gamma} \times \vec{p}] + i\frac{\hbar}{2}c\vec{p}\,[\gamma^0\vec{\gamma}\gamma^1\gamma^2 - \gamma^1\gamma^2\gamma^0\vec{\gamma}] \quad , \\
&= -i\hbar c\gamma^0[\vec{\gamma} \times \vec{p}] + i\frac{\hbar}{2}c\vec{p}\,[\gamma^0\vec{\gamma}\gamma^1\gamma^2 - \gamma^0\gamma^1\gamma^2\vec{\gamma}] \quad , \\
&= -i\hbar c\gamma^0[\vec{\gamma} \times \vec{p}] + i\frac{\hbar}{2}c\vec{p}\,\gamma^0[\vec{\gamma}\gamma^1\gamma^2 - \gamma^1\gamma^2\vec{\gamma}] \quad , \\
&= -i\hbar c\gamma^0[\vec{\gamma} \times \vec{p}] + i\hbar c\gamma^0[\gamma^2 p^1 - \gamma^1 p^2] \quad , \\
&= -i\hbar c\gamma^0[\vec{\gamma} \times \vec{p}] + i\hbar c\gamma^0[\vec{\gamma} \times \vec{p}] \quad , \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Es decir:

$$[H_D, J_3] = 0 \quad . \tag{2.76}$$

Interpretamos a Σ_3 como el momento angular intrínseco o espín de la partícula que satisface la ecuación de Dirac. Como L_3 es siempre perpendicular al plano del movimiento de la partícula, también es el espín. Por lo tanto, el espín no tiene ningun componente paralelo a la dirección del movimiento de la partícula. Σ_3 mismo se puede interpretar como la helicidad en el sentido que nos da el componente del espín perpendicular al plano del movimiento de la partícula. Si las componentes del momento p_x y p_y son cero, entonces:

$$\Sigma_3 u_1(p) = \frac{\hbar}{2}u_1(p) \quad , \tag{2.77}$$

$$\Sigma_3 v_1(p) = -\frac{\hbar}{2}v_1(p) \quad , \tag{2.78}$$

$$\Sigma_3 u_2(p) = \frac{\hbar}{2}u_2(p) \quad , \tag{2.79}$$

$$\Sigma_3 v_2(p) = -\frac{\hbar}{2}v_2(p) \quad . \tag{2.80}$$

$$\tag{2.81}$$

Por lo tanto, los fermiones tienen la orientación del espín en dirección opuesta y perpendicular al plano. Más adelante, hablaremos un concepto importante: la quiralidad.

2.2.5 Segunda Representación

En el caso de reposo, las soluciones no cambian en la segunda representación por el hecho de que γ^2 nunca entra en discusión. En el caso de movimiento, es fácil saber las soluciones porque cambiar el signo de γ_2 es equivalente al cambiar el signo de p_y. Por tanto, las soluciones son:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c(-ip_x+p_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix} e^{-ip\cdot x/\hbar} \equiv u_2(p) e^{-ip\cdot x/\hbar} \quad ,$$

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} \frac{c(ip_x-p_y)}{E-mc^2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ip\cdot x/\hbar} \equiv u_2'(p) e^{-ip\cdot x/\hbar} \quad .$$

De la manera convencional, interpretamos la solución $u_2'(p)$ de la energía negativa como de la antipartícula con energía positiva usando la siguiente notación:

$$v_2(p) \equiv u_2'(-E,-p) = \begin{pmatrix} \frac{c(ip_x-p_y)}{E+mc^2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

SECCIÓN 2.3

La Ecuación de Dirac en Dimensiones (1+1)

Las matrices de Dirac β y α pueden elegirse arbitrariamente entre las tres matrices σ de Pauli. Una cierta elección de dichas matrices determina una representación para las matrices de Dirac y la correspondiente representación de los espinores. Los espinores de Dirac tienen dos componentes en el espacio-tiempo dimensional (1+1). En particular tomamos la representación de Dirac de γ^μ:

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1) \quad , \tag{2.82}$$

con

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_2 \quad , \tag{2.83}$$

donde σ_1, σ_3 son las matrices de Pauli. Recordemos que éstas matrices satisfacen las relaciones:

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^1)^\dagger = \gamma^1 \quad , \tag{2.84}$$

$$(\gamma^0)^2 = (\gamma^1)^2 = 1 \quad , \tag{2.85}$$

$$\left\{\gamma^1, \gamma^0\right\} = \gamma^1\gamma^0 + \gamma^0\gamma^1 = 0 \quad . \tag{2.86}$$

La ecuación (2.84) implíca que las matrices son hermíticas y (2.86) que cumplen con la relación de anticonmutación. Una forma de escribir la ecuación de Dirac en forma Hamiltoniana es:

$$E\psi = (i\hbar\gamma^1\partial_1 - \gamma^0 mc)\psi \quad . \tag{2.87}$$

2.3.1 Partícula en Reposo

Para una partícula libre, buscamos soluciones para el momento en la ecuación de Dirac de la forma:

$$\psi = u(p)e^{-ip\cdot x/\hbar} \quad . \tag{2.88}$$

La función de onda contiene dos conjuntos de grados de libertad, uno asociado a la energía positiva y otro a la negativa. Si tomamos $p = p_x = 0$, la ecuación (2.87) se convierte en:

$$Eu = (\beta mc^2)u = \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} u \quad . \tag{2.89}$$

Los valores propios para la partícula en reposo son $E = mc^2, -mc^2$ y eigenvectores:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.90}$$

Podemos escribir éstas soluciones explícitamente resaltando las componentes de los espinores como:

$$\psi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imc^2t/\hbar}, \quad \psi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imc^2t/\hbar} \quad , \tag{2.91}$$

donde $\psi^{(1)}$ y $\psi^{(2)}$ corresponden a energías positiva y negativa respectivamente.

2.3.2 Partícula en Movimiento

Para $p_x \neq 0$ la ecuación de Dirac se escribe como:

$$(i\hbar\gamma^1\partial_1 - \gamma^0 mc)\psi = 0 \quad . \tag{2.92}$$

Similarmente, con soluciones para los espinores de la forma:

$$u(p_x) = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \quad , \tag{2.93}$$

y tomando la representación de Pauli para las matrices γ en nuestra ecuación de forma Hamiltoniana (2.87) llegamos a:

$$\begin{aligned} E\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} &= (c\alpha\cdot p + \beta mc^2)\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & cp_x \\ cp_x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \quad , \\ &= \begin{pmatrix} mc^2 & cp_x \\ cp_x & -mc^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{2.94}$$

donde u ha sido dividido en dos espinores de dos componentes cada uno, u_A y u_B respectivamente. Esto se reduce al sistema de ecuaciones:

$$cp_x u_B = (E - mc^2)u_A \quad , \tag{2.95}$$

$$cp_x u_A = (E + mc^2)u_B \quad . \tag{2.96}$$

Para la solución con energía $E > 0$, tomamos $u_A = 1$, y de la ecuación (2.95) obtenemos

$$u_B = \frac{cp_x}{E + mc^2} \quad , \tag{2.97}$$

para la solución con energía $E < 0$ tomamos u_B=1, entonces:

$$u_A = \frac{cp_x}{E - mc^2} = -\frac{cp_x}{|E| + mc^2} \quad . \tag{2.98}$$

Por tanto las soluciones a la ecuación de Dirac tienen la forma:

$$\psi^{(1)} = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{cp_x}{E+mc^2} \end{pmatrix} e^{-ip\cdot x/\hbar} = u_1(p)e^{-ip\cdot x/\hbar}, \qquad \psi^{(2)} = N_2 \begin{pmatrix} \frac{cp_x}{E-mc^2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ip\cdot x/\hbar} = u_2(p)e^{-ip\cdot x/\hbar} \quad .$$

donde N_i $(i = 1, 2)$ son constantes de normalización. Para una partícula en reposo, $p_x = 0$, inmediatamente recuperamos sus soluciones. Para interpretar la solución de la energía negativa, notamos como antes que $u_2(-E, -p)$ también satisface la ecuación de Dirac:

$$(i\hbar\not{p} + mc)u_2(-E, -p_x) = 0 \quad . \tag{2.99}$$

Denotamos por conveniencia la solución con energía negativa como:

$$v_1(E, p_x) = u_2(-E, -p_x) = N_2 \begin{pmatrix} \frac{cp_x}{E-mc^2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.100}$$

Recordemos que nuestra solución v_1 está asociada con la antipartícula.

2.3.3 Espín

Para derivar el operador de espín en una dimensión, por ejemplo, podemos utilizar los estados propios de Σ_3 representando a S_z, como los estados base:

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{2.101}$$

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \tag{2.102}$$

$$\Sigma_3 \chi_\pm = \pm \frac{\hbar}{2} \chi_\pm \quad , \tag{2.103}$$

$$\Sigma_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{2.104}$$

Es fácil ver que ésta es la única matriz que funciona. Debe ser diagonal ya que los estados base son vectores propios de la matriz. Los valores propios correctos aparecen en la diagonal.

Ahora aplicamos los operadores de subida y bajada:

$$\Sigma_+ \chi_+ = 0 \quad , \tag{2.105}$$

$$\Sigma_+ \chi_- = \sqrt{s(s+1) - m(m+1)} \hbar \chi_+ = \hbar \chi_+ \quad , \tag{2.106}$$

$$\Sigma_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{2.107}$$

$$\Sigma \chi = 0 \quad , \tag{2.108}$$

$$\Sigma_- \chi_+ = \sqrt{s(s+1) - m(m-1)} h \chi_- = h \chi_- \quad , \tag{2.109}$$

$$\Sigma_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.110}$$

Si decidieramos obtener los operadores para otras dimensiones, como S_x y S_y, entonces aplicamos:

$$\Sigma_1 = \frac{1}{2} (\Sigma_+ + \Sigma_-) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_1 \quad ,$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2i} (\Sigma_+ - \Sigma_-) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_2 \quad .$$

Se trata nuevamente de matrices hermíticas y sin traza.

Capítulo 3

Transformaciones Quirales

El lagrangiano fermiónico en dimensiones $(3 + 1)$ tiene una simetría que se realiza unicaménte cuando los fermiones no tienen masa. Esta es la llamada simetría quiral. En este capítulo nos preguntamos: ¿Existe la discusión de las transformaciones quirales y la simetría quiral en dimensiones $(2 + 1)$ en la representación fundamental de las matrices γ?. Empezamos recordando a estas transformaciones en dimensiones $(3 + 1)$ revisando sus propiedades y su significado físico.

SECCIÓN 3.1

Simetría Quiral en Dimensiones $(3 + 1)$

Las transformaciones quirales en dimensiones $(3+1)$ surgen de la existencia de la matriz γ^5 que anticonmuta con todas las matrices de γ. Después de definirla, estudiamos sus propiedades.

3.1.1 La Matriz γ^5

Definimos la matriz γ^5 como el siguiente producto de las matrices γ que aparecen en la representación de Dirac:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad . \tag{3.1}$$

Así, explícitamente obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{3.2}$$

Llamamos a éste el operador de quiralidad. Algunas propiedades de γ^5 son las siguientes:

- γ^5 es un operador hermítico ya que se cumple que:

$$\gamma^{5\dagger} = \gamma^5 \quad . \tag{3.3}$$

- Se puede verificar fácilmente que:

$$(\gamma^5)^2 = 1 \quad . \tag{3.4}$$

- γ^5 anticonmuta con γ^μ , es decir se cumple que:

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = \left\{\gamma^5, \gamma^\mu\right\} = 0 \quad . \tag{3.5}$$

Una manera para demostrar lo anterior es la siguiente: escribamos a γ^5 en términos de sus componentes como lo hicimos en la ecuación (3.1):

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu + i\gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad . \tag{3.6}$$

En el miembro derecho cuando γ^μ del segundo término intenta cruzar al otro lado, consigue un signo negativo en cada salto, excepto cuando cruza por el mismo, por lo que el signo que consigue es un $(-1)^3$. Por lo tanto, podemos escribir

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu - i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu = 0 \quad . \tag{3.7}$$

3.1.2 Significado Físico de la Matriz γ^5

Para altas energías (en comparación con las masa de fermiones), γ^5 es proporcional al operador de helicidad para las soluciones $u^{(s)}$ de la ecuación de Dirac. Se cumple que:

$$\frac{\hbar}{2}\gamma^5 u^{(s)} \approx \vec{\Sigma} u^{(s)} \quad , \tag{3.8}$$

para $E = m$. Recordemos que el operador de helicidad lo definimos como:

$$\vec{\Sigma} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \quad . \tag{3.9}$$

Notemos que podemos escribir a γ^5:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{3.10}$$

donde I es la matriz identidad dos dimensional. Efectuando el producto de γ^5 con $u^{(s)}$ donde $s = 1, 2$, obtenemos:

$$\gamma^5 u^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{(s)} \\ \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2}\phi^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2}\phi^{(s)} \\ \phi^{(s)} \end{pmatrix} \quad . \tag{3.11}$$

Ahora consideramos que para altas energías $E + mc^2 \approx E \approx pc$. Usando el hecho de que:

$$\vec{p} \cdot \hat{p} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|p|} \quad , \tag{3.12}$$

podemos escribir entonces:

$$\gamma^5 u^{(s)} \approx \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p}\phi^{(s)} \\ \phi^{(s)} \end{pmatrix} \quad . \tag{3.13}$$

Ahora, veamos el valor de $\vec{\Sigma} u^{(s)}$:

$$\vec{\Sigma} u^{(s)} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{(s)} \\ \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2}\phi^{(s)} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \begin{pmatrix} \phi^{(s)} \\ \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2}\phi^{(s)} \end{pmatrix} \approx \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p}\phi^{(s)} \\ \phi^{(s)} \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

por lo que podemos concluir la validez de la ecuación (3.8). En el último paso, hemos usado la identidad:

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})^2 = \frac{1}{|p|} p_i p_j \sigma_i \sigma_j = \frac{1}{2|p|} p_i p_j \left[\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i\right] = \frac{1}{2|p|} p_i p_j 2\delta_{ij} = 1 \quad . \tag{3.15}$$

Nosotros sabemos que el operador de helicidad es un observable físico, pero γ^5 (por lo general) no lo es. Sin embargo, en el límite relativista se vuelve un observable físico relacionado con la helicidad.

3.1.3 Transformaciones Quirales

Las transformación quiral de la función de onda ψ se define como:

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha\gamma^5} \psi \quad , \tag{3.16}$$

donde α es un número real, Entonces:

$$\psi^{\dagger} \rightarrow \psi'^{\dagger} = \psi e^{-i\alpha\gamma^5} \quad . \tag{3.17}$$

Nosotros queremos ver como se transforma el lagrangiano fermiónico:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc\right)\psi \quad , \tag{3.18}$$

donde denotamos $\psi \equiv \psi(x)$. Recordando que $\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^0$ y usando las ecuaciones (3.16), (3.17) en (3.18) obtenemos:

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}^{\dagger} e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma^0\left(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc\right)e^{i\alpha\gamma^5}\psi \quad . \tag{3.19}$$

Analicemos primero el término $e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma^0\gamma^{\mu}$, se necesitará para el segundo término del lagrangiano de Dirac, así:

$$e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma^0 = \left[1 + (-i\alpha)\gamma^5 + \frac{(-i\alpha)^2\left(\gamma^5\right)^2}{2!} + \cdots\right]\gamma^0 \quad . \tag{3.20}$$

Cuando γ^0 cruza al otro lado los signos cambian dependiendo de si el número de los γ^{μ}s involucrados es par o impar, por lo que ahora tenemos:

$$e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma^0 = \gamma^0\left[1 - (-i\alpha)\gamma^5 + \frac{(-i\alpha)^2\left(\gamma^5\right)^2}{2!} + \cdots\right] \quad . \tag{3.21}$$

Simplificamos $e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma^0\gamma^{\mu}$. Al momento que γ^{μ} cruza al otro lado obtenemos que:

$$e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma^0\gamma^{\mu} = \gamma^0\left[1 - (-i\alpha)\gamma^5 + \frac{(-i\alpha)^2\left(\gamma^5\right)^2}{2!} + \cdots\right]\gamma^{\mu} \quad , \tag{3.22}$$

$$= \gamma^0\gamma^{\mu}\left[1 + (-i\alpha)\gamma^5 + \frac{(-i\alpha)^2\left(\gamma^5\right)^2}{2!} + \cdots\right] \quad , \tag{3.23}$$

$$= \gamma^0\gamma^{\mu}e^{-i\alpha\gamma^5} \quad . \tag{3.24}$$

Ahora para ver como se comporta el lagrangiano (3.18) bajo la transformación de quiralidad, vamos a analizar cada uno de sus elementos por separado. Analizamos el primer término del lagrangiano. Usando la ecuación (3.24) en el primer término del lagrangiano, obtenemos lo siguiente:

$$i\bar{\psi}'\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi' = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi \quad , \tag{3.25}$$

es decir, éste término es invariante bajo transformación quiral. Ahora veamos el término que contiene a la masa, el cual está dado por:

$$-mc\bar{\psi}^{\dagger}e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma^0 e^{i\alpha\gamma^5}\gamma^0\psi \quad . \tag{3.26}$$

Sustituyendo (3.21) en (3.26) obtenemos:

$$-mc\bar{\psi}^{\dagger}\gamma^{0}\underbrace{\left[1-(-i\alpha)\gamma^{5}+\frac{(-i\alpha)^{2}\left(\gamma^{5}\right)^{2}}{2!}+\cdots\right]}_{\neq e^{-i\alpha\gamma^{5}}}e^{i\alpha\gamma^{5}\psi} \quad . \tag{3.27}$$

Esto implíca que:

$$\bar{\psi}^{'}\psi^{'}\neq\bar{\psi}\psi \quad . \tag{3.28}$$

El término de masa no permanece invariante ante esta transformación, tenemos en consecuencia que sólo si $m=0$ el lagrangiano es invariante bajo transformaciones quirales.

3.1.4 Corrientes Quirales

Por el teorema de Noether (Emmy Noether, 1917), las simetrías continuas nos producen corrientes y cargas conservadas. Por ejemplo, las leyes de la física son simétricas con respecto a las traslaciones del tiempo, el teorema de Noether relaciona esta invariancia con la conservación de la energía. Simetría espacial implíca la conservación del momento lineal. Una simetría es la invariancia del lagrangiano correspondiente bajo cierta transfornación. Sabemos que el lagrangiano fermiónico es invariante bajo transformación quiral. Es una simetría continua porque podemos considerar el parámetro α tan pequeño como deseemos. En seguida, encontramos la corriente conservada asociada con esta transformación. Por lo tanto bajo la transformación quiral, podemos escribir:

$$\psi'=\psi+i\alpha\gamma^{5}\psi \quad . \tag{3.29}$$

Esto implíca:

$$\psi'^{\dagger}=\psi^{\dagger}-i\alpha\psi^{\dagger}\gamma^{5} \quad , \tag{3.30}$$

$$\bar{\psi}'=\bar{\psi}+i\alpha\bar{\psi}\gamma^{5} \quad . \tag{3.31}$$

Para encontrar la corriente quiral, recordamos el lagrangiano sin masa:

$$\mathcal{L}=[\bar{\psi}]_{\alpha}\left[i\hbar\gamma^{\mu}\right]_{\alpha\beta}\partial_{\mu}[\psi]_{\beta} \quad . \tag{3.32}$$

Veamos ahora el valor de su variación $\delta\mathcal{L}$:

$$\delta\mathcal{L}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\psi_{\alpha}\right)}\delta\left(\partial_{\mu}\psi_{\alpha}\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{\alpha}}\delta\psi_{\alpha}+\delta\left(\partial_{\mu}\bar{\psi}_{\alpha}\right)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\bar{\psi}_{\alpha}\right)}+\delta\bar{\psi}_{\alpha}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}_{\alpha}} \quad , \tag{3.33}$$

calculando las variaciones de los términos involucrados tenemos:

$$\delta\psi = i\alpha\left[\gamma^5\psi\right] \qquad \longrightarrow \qquad \delta\psi_\alpha = i\alpha\left[\gamma^5\right]_{\alpha\beta}[\psi]_\beta \quad , \tag{3.34}$$

$$\delta\left(\partial_\mu\psi\right) = i\alpha\gamma^5\left[\partial_\mu\psi\right] \qquad \longrightarrow \qquad \delta\left[\partial_\mu\psi_\alpha\right] = i\alpha\left[\gamma^5\right]_{\alpha\beta}\left[\partial_\mu\psi\right]_\beta \quad , \tag{3.35}$$

$$\delta(\bar{\psi}) = i\alpha\bar{\psi}\gamma^5 \qquad \longrightarrow \qquad \delta\bar{\psi}_\alpha = i\alpha[\bar{\psi}]_\beta\left[\gamma^5\right]_{\beta\alpha} \quad , \tag{3.36}$$

$$\delta\left(\partial_\mu\bar{\psi}\right) = i\alpha\left(\partial_\mu\right)\bar{\psi}\gamma^5 \qquad \longrightarrow \qquad \delta\left[\partial_\mu\bar{\psi}_\alpha\right] = i\alpha\left[\partial_\mu\bar{\psi}\right]_\beta\left[\gamma^5\right]_{\beta\alpha} \quad . \tag{3.37}$$

La ecuación de Euler-Lagrange para el campo ψ está dada por:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi\right)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = 0 \quad , \tag{3.38}$$

mientras que para el campo $\bar{\psi}$ tenemos:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\bar{\psi}\right)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = 0 \quad . \tag{3.39}$$

El lagrangiano de la ecuación (3.32) no contiene algún término $\partial_\mu\bar{\psi}$, así que:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = 0 \quad . \tag{3.40}$$

La ecuación correspondiente de Euler-Lagrange (3.39) indíca que:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = 0 \quad . \tag{3.41}$$

Usando las variaciones calculadas anteriormente junto con las ecuaciones (3.40) y (3.41) podemos escribir la ecuación (3.33) como:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_\alpha\right)} i\alpha\left[\gamma^5\right]_{\alpha\beta}\left[\partial_\mu\psi\right]_\beta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\alpha} i\alpha\left[\gamma^5\right]_{\alpha\beta}\psi_\beta \quad , \tag{3.42}$$

$$= i\alpha\left[\gamma^5\right]_{\alpha\beta}\left[\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_\alpha\right)}\psi_\beta\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_\alpha\right)}\right)\psi_\beta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\alpha}\psi_\beta\right] \quad , \tag{3.43}$$

$$= i\alpha\left[\gamma^5\right]_{\alpha\beta}\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_\alpha\right)}\psi_\beta\right) \quad . \tag{3.44}$$

Para calcular la derivada involucrada, partimos del lagrangiano de la ecuación (3.32) y obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_\alpha\right)} = i\hbar[\psi]_{\alpha'}\left[\gamma^\mu\right]_{\alpha'\beta}\delta_{\alpha\beta} = i\bar{\psi}_{\alpha'}\left[\gamma^\mu\right]_{\alpha'\alpha} \quad , \tag{3.45}$$

por lo que la variacion $\delta\mathcal{L}$ está dada por:

$$\delta\mathcal{L} = i\hbar\alpha \left[\gamma^5\right]_{\alpha\beta} \partial_\mu \left[i\bar{\psi}_{\alpha'} \left[\gamma^\mu\right]_{\alpha'\alpha} \psi_\beta\right] \quad , \tag{3.46}$$

$$= -\alpha\hbar\partial_\mu \left[\bar{\psi}_{\alpha'} \left(\gamma^\mu\right)_{\alpha'\alpha} \left(\gamma^5\right)_{\alpha\beta} \psi_\beta\right] \quad , \tag{3.47}$$

$$= -\alpha\hbar\partial_\mu j^\mu \quad . \tag{3.48}$$

donde hemos identificado la corriente quiral conservada como:

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \quad . \tag{3.49}$$

En la siguiente seccion estudiaremos el caso planar y veremos qué diferencias existen.

SECCIÓN 3.2

Simetría Quiral en Dimensiones $(2+1)$

3.2.1 Representación (2×2)

Comenzamos definiendo γ^5 como:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2 \quad .$$

Recordamos que ahora γ^μ son las matrices de Pauli. Por tanto, con la primera representación de las matrices de γ, obtenemos que:

$$\gamma^5 = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

es la identidad, pero esta no anticonmuta con γ^μ. De hecho, no hay ninguna matriz 2×2 que conmute con todas las matrices de gamma por lo que aparentemente no tiene sentido hablar de quilaridad en dimensiones $(2+1)$ en su representación 2×2. Ahora la pregunta es si QED3 sin masa tiene alguna simetría que no tenga QED3 con masa en su representación 2×2. La respuesta de Appelquist, Bowick, Karabali y Wijewardhana es: "Nosotros encontramos que la razón de esta respuesta es el hecho de que ellos no tomaron las dos respresentaciones inequivalentes en cuenta". Recordamos el lagrangiano invariante de paridad:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hbar\not{\partial} - mc)\psi + \bar{\psi}'(i\hbar\not{\partial} + mc)\psi' \quad . \tag{3.50}$$

Obviamente existe una simetría $\psi\psi'$ que se realiza únicamente para el lagrangiano no masivo. Lo llamamos como la simetría de intercambio. Además, existe la simetría quiral como mostramos enseguida.

3.2.2 Quiralidad en el Plano

Como hemos visto, en el plano tenemos dos representaciones inequivalentes de nuestras matrices γ. Las dos representaciones son indespensables, dado que sólo con una no es posible definir el lagrangiano invariante de paridad y tampoco se consigue el espectro completo de los fermiones. Ahora veremos que para la descripción de la simetría quiral también se necesitan las dos representaciones. Renombrando a nuestras soluciones ψ y ψ' como ψ_A y ψ_B en el lagrangiano tenemos:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_A \left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right)\psi_A + \bar{\psi}_B \left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc\right)\psi_B \quad . \tag{3.51}$$

Lo escribimos de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \left(\psi_A^\dagger\gamma^0\right)\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right)\psi_A + \left(\psi_B^\dagger\gamma^0\right)\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc\right)\psi_B \quad . \tag{3.52}$$

Definimos la transformación quiral de la siguiente manera:

$$\psi_A \longrightarrow \psi'_A = \psi_A + \alpha\psi_B \quad , \tag{3.53}$$

$$\psi_B \longrightarrow \psi'_B = \psi_B - \alpha\psi_A \quad . \tag{3.54}$$

donde α es un parámetro real pequeño, así:

$$\mathcal{L}' = i\hbar\left(\psi_A^\dagger + \alpha\psi_B^\dagger\right)\gamma^0\left(\gamma^\mu\partial_\mu\right)\left(\psi_A + \alpha\psi_B\right) - mc\left(\psi_A^\dagger + \alpha\psi_B^\dagger\right)\gamma^0\left(\psi_A + \alpha\psi_B\right) \tag{3.55}$$

$$+ i\hbar\left(\psi_B^\dagger - \alpha\psi_A^\dagger\right)\gamma^0\left(\gamma^\mu\partial_\mu\right)\left(\psi_B - \alpha\psi_A\right) + mc\left(\psi_B^\dagger - \alpha\psi_A^\dagger\right)\gamma^0\left(\psi_B - \alpha\psi_A\right) \quad . \tag{3.56}$$

Efectuando los productos y debido a que α es muy pequeño, suprimimos los términos que contengan α^2, por lo que ahora obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \bar{\psi}_A \left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right)\psi_A + \bar{\psi}_B \left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right)\psi_B \\ &+ \alpha\bar{\psi}_A \left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi_B + \alpha\bar{\psi}_B \left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right)\psi_A \\ &- \alpha\bar{\psi}_B \left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + m\right)\psi_A - \alpha\bar{\psi}_A \left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc\right)\psi_B \quad .\end{aligned} \tag{3.57}$$

Eliminando términos semejantes y reordenando obtenemos:

$$\mathcal{L}' = \left[\bar{\psi}_A \left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right)\psi_A + \bar{\psi}_B \left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc\right)\psi_B\right] - 2mc\alpha\bar{\psi}_A\psi_B - 2mc\alpha\bar{\psi}_B\psi_A \quad . \tag{3.58}$$

Los términos encerrados en el paréntesis cuadrado son nuestro lagrangiano original, por lo que podemos escribir:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - 2\,\mathrm{mc}\alpha\left(\bar{\psi}_A\psi_B + \bar{\psi}_B\psi_A\right) \quad . \tag{3.59}$$

Este lagrangiano es invariante solo si el término masivo es cero, lo que requerimos de la transformación de quiralidad.

3.2.3 Corriente Quiral

Podemos escribir el lagrangiano invariante bajo transformaciones quirales en términos de los componentes matriciales como:

$$\mathcal{L} = i\hbar \left[\bar{\psi}_A\right]_\alpha [\gamma^\mu]_{\alpha\beta}\, \partial_\mu [\psi_A]_\beta + i\hbar \left[\bar{\psi}_B\right]_\alpha [\gamma^\mu]_{\alpha\beta}\, \partial_\mu [\psi_B]_\beta \quad . \tag{3.60}$$

Como las transformaciones quirales son continuas, procedemos a encontrar la corriente conservada correspondiente. Empezamos escribiendo la variación $\delta\mathcal{L}$ bajo las transformaciones quirales:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} = &\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_{A\alpha}\right)}\delta\left(\partial_\mu\psi_{A\alpha}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{A\alpha}}\delta\psi_{A\alpha} \\ &+ \delta\left(\partial_\mu\bar{\psi}_{A\alpha}\right)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\bar{\psi}_{A\alpha}\right)} + \delta\bar{\psi}_{A\alpha}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}_{A\alpha}} \\ &+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_{B\alpha}\right)}\delta\left(\partial_\mu\psi_{B\alpha}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{B\alpha}}\delta\psi_{B\alpha} \\ &+ \delta\left(\partial_\mu\bar{\psi}_{B\alpha}\right)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\bar{\psi}_{B\alpha}\right)} + \delta\bar{\psi}_{B\alpha}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{B\alpha}} \quad . \end{aligned} \tag{3.61}$$

Ahora calculamos las variaciones para cada campo y su derivada. Para el campo ψ_A tenemos:

$$\delta\psi_A = \alpha\psi_B \quad \longrightarrow \quad \delta\psi_{A\alpha} = \alpha\psi_{Ba} \quad , \tag{3.62}$$
$$\delta\left(\partial_\mu\psi_A\right) = \alpha\partial_\mu\psi_B \quad \longrightarrow \quad \delta\left(\partial_\mu\psi_{Aa}\right) = \alpha\partial_\mu\psi_{B\alpha} \quad , \tag{3.63}$$
$$\delta\bar{\psi}_A = \alpha\bar{\psi}_B \quad \longrightarrow \quad \delta\bar{\psi}_{A\alpha} = \alpha\bar{\psi}_{Ba} \quad , \tag{3.64}$$
$$\delta\left(\partial_\mu\bar{\psi}_A\right) = \alpha\partial_\mu\bar{\psi}_B \quad \longrightarrow \quad \delta\left(\partial_\mu\bar{\psi}_{A\alpha}\right) = \alpha\partial_\mu\bar{\psi}_{B\alpha} \quad , \tag{3.65}$$

para el campo ψ_B tenemos:

$$\delta\psi_B = -\alpha\psi_A \quad \longrightarrow \quad \delta\psi_{B\alpha} = -\alpha\psi_{A\alpha} \quad , \tag{3.66}$$
$$\delta\left(\partial_\mu\psi_B\right) = -\alpha\partial_\mu\psi_A \quad \longrightarrow \quad \delta\left(\partial_\mu\psi_{B\alpha}\right) = -\alpha\partial_\mu\psi_{Aa} \quad , \tag{3.67}$$
$$\delta\bar{\psi}_B = -\alpha\bar{\psi}_A \quad \longrightarrow \quad \delta\bar{\psi}_{B\alpha} = -\alpha\bar{\psi}_{A\alpha} \quad , \tag{3.68}$$
$$\delta\left(\partial_\mu\bar{\psi}_B\right) = -\alpha\partial_\mu\bar{\psi}_A \quad \longrightarrow \quad \delta\left(\partial_\mu\bar{\psi}_{B\alpha}\right) = -\alpha\partial_\mu\bar{\psi}_{A\alpha} \quad . \tag{3.69}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos involucrados son las siguientes:
Para el campo ψ_A:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_A\right)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_A} = 0 \quad , \tag{3.70}$$

para el campo ψ_B:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_B\right)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_B} = 0 \quad , \tag{3.71}$$

para el campo $\bar{\psi}_A$:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_A \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} = 0 \quad , \tag{3.72}$$

para el campo $\bar{\psi}_B$:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_B \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_B} = 0 \quad . \tag{3.73}$$

Como el Lagrangiano bajo consideración no contiene ningún términos de tipo $\partial_\mu \bar{\psi}$ entonces:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_A \right)} \right) = 0 \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} = 0 \quad , \tag{3.74}$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\partial_\mu \bar{\psi}_B \right)} \right) = 0 \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}_B} = 0 \quad . \tag{3.75}$$

Por tanto, lo anterior nos reduce a sólo cuatro términos en la variación del lagrangiano:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_{A\alpha} \right)} \delta \left(\partial_\mu \psi_{A\alpha} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A\alpha}} \delta \psi_{A\alpha} \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_{B\alpha} \right)} \delta \left(\partial_\mu \psi_{B\alpha} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{B\alpha}} \delta \psi_{B\alpha} \quad . \end{aligned} \tag{3.76}$$

Sustituyendo las variaciones involucradas, podemos escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_{A\alpha} \right)} \left(\alpha \partial_\mu \psi_{B\alpha} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A\alpha}} \left(\alpha \psi_{B\alpha} \right) \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_{B\alpha} \right)} \left(-\alpha \partial_\mu \psi_{A\alpha} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{B\alpha}} \left(-\alpha \psi_{A\alpha} \right) \quad . \end{aligned} \tag{3.77}$$

Reordenando términos obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = \alpha \Bigg[& \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_{A\alpha} \right)} \psi_{B\alpha} \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_{A\alpha} \right)} \right) \psi_{B\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A\alpha}} \psi_{B\alpha} \\ & - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_{B\alpha} \right)} \psi_{A\alpha} \right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_{B\alpha} \right)} \right) \psi_{A\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{B\alpha}} \psi_{A\alpha} \Bigg] \quad . \end{aligned} \tag{3.78}$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.70) y (3.71) tenemos:

$$\delta \mathcal{L} = \alpha \partial_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_{A\alpha} \right)} \psi_{B\alpha} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_{B\alpha} \right)} \psi_{A\alpha} \right) \right] \quad . \tag{3.79}$$

Para encontrar las derivadas involucradas, usamos la ecuación (3.60) y conseguimos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_{A\alpha} \right)} = i\hbar \left[\bar{\psi}_A \right]_{\alpha'} \left[\gamma^\mu \right]_{\alpha' \alpha} \quad , \tag{3.80}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_{B\alpha} \right)} = i\hbar \left[\overline{\psi_B} \right]_{\alpha'} \left[\gamma^\mu \right]_{\alpha' \alpha} \quad . \tag{3.81}$$

Sustituyendo (3.80) y (3.81) en (3.79) obtenemos:

$$\delta\mathcal{L} = i\hbar\alpha\left[\left[\bar{\psi}_A\right]_{\alpha'}\left[\gamma^\mu\right]_{\alpha'\alpha}\partial_\mu\left[\psi_B\right]_\alpha - \left[\bar{\psi}_B\right]_{\alpha'}\left[\gamma^\mu\right]_{\alpha'\alpha}\partial_\mu\left[\psi_A\right]_\alpha\right] \quad . \tag{3.82}$$

concluímos entonces que:

$$\delta\mathcal{L} = i\alpha\hbar\partial_\mu j^\mu \quad , \tag{3.83}$$

donde:

$$j^\mu = \bar{\psi}_A\gamma^\mu\psi_B - \bar{\psi}_B\gamma^\mu\psi_A \quad . \tag{3.84}$$

Como la variación $\delta\mathcal{L} = 0$, la corriente j^μ es conservada, es decir:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad . \tag{3.85}$$

En la próxima sección estudiaremos fermiones planares en la representación 4×4 de las matrices de γ y al final de esa sección veremos con más claridad que a la transformación anterior si la podemos llamar como una transformación quiral.

3.2.4 Transformaciones Quirales

En la representación 4×4, tenemos suficiente libertad para construir dos matrices que anticonmuten con las matrices γ^0, γ^1 y γ^2, las cuales son:

$$\begin{aligned} \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad , \\ \gamma^5 &= i\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{3.86}$$

donde I es la matriz identidad dos dimensional. Estas dos matrices cumplen con las siguientes propiedades.

- Son operadores hermiticos, ya que:

$$\gamma^{5\dagger} = \gamma^5, \quad \gamma^{3\dagger} = \gamma^3 \quad . \tag{3.87}$$

- Se puede verificar fácilmente que:

$$\left(\gamma^5\right)^2 = 1 \quad , \left(\gamma^3\right)^2 = 1 \quad . \tag{3.88}$$

Dadas estas dos matrices, nuestras transformaciones quirales se definen de la siguiente manera:

$$\psi \longrightarrow \psi' = \psi e^{i\alpha\gamma^5} \quad , \tag{3.89}$$

$$\psi \longrightarrow \psi' = \psi e^{i\alpha\gamma^3} \quad . \tag{3.90}$$

donde α sigue siendo un parámetro real.

3.2.5 Términos de Masa

Dada la libertad adicional hay dos tipos de términos de masa que se pueden definir:

$$mc\bar{\psi}\psi \quad , \tag{3.91}$$

$$mc\bar{\psi}\frac{i}{2}\left[\gamma^3,\gamma^5\right]\psi \quad . \tag{3.92}$$

Se ha mostrado anteriormente que el primer término rompe la simetría quiral. Ahora vemos como se comporta el segundo término bajo estas transformaciones. Como primer paso, rescribimos el conmutador de la siguiente manera:

$$\frac{i}{2}\left[\gamma^3,\gamma^5\right] = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad . \tag{3.93}$$

Por lo tanto, el término de masa se puede escribir como:

$$mc\bar{\psi}\frac{i}{2}\left[\gamma^3,\gamma^5\right]\psi = mc\psi^\dagger\gamma^0\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\psi \quad . \tag{3.94}$$

Recordando que en la representación:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix} \quad , \tag{3.95}$$

podemos escribir entonces:

$$mc\bar{\psi}\frac{i}{2}\left[\gamma^3,\gamma^5\right]\psi = mc\psi^\dagger\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}\psi \quad . \tag{3.96}$$

Ahora vamos a ver como se comporta éste término bajo las transformaciones quirales definidas anteriormente. Primero tomamos la ecuación (3.91), la cual se puede escribir de la siguiente manera:

$$\psi \longrightarrow \psi' = \left(1 + i\beta\gamma^5\right)\psi \quad , \tag{3.97}$$

y el conjugado hermítico:

$$\psi'^\dagger = \psi^\dagger\left(1 - i\beta\gamma^5\right)\psi \quad . \tag{3.98}$$

Por tanto tenemos lo siguiente:

$$mc\bar{\psi}'\frac{i}{2}\left[\gamma^3,\gamma^5\right]\psi' = mc\psi^\dagger\left(1 - i\beta\gamma^5\right)\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}\left(1 + i\beta\gamma^5\right)\psi \quad , \tag{3.99}$$

$$= mc\psi^\dagger\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}\psi - i\beta mc\psi^\dagger\left[\gamma^5,\sigma^3\right]\psi \quad , \tag{3.100}$$

$$= mc\bar{\psi}\frac{i}{2}\left[\gamma^3,\gamma^5\right]\psi - i\beta mc\psi^\dagger\left[\gamma^5,\sigma^3\right]\psi \quad . \tag{3.101}$$

Es fácil verificar que:

$$\left[\gamma^5, \sigma^3\right] = 0 \quad . \tag{3.102}$$

Por lo tanto, el término bajo consideración es invariante bajo la transformación quiral gobernada por γ^5. La invarianza bajo la transformación quiral dictada por γ^3 se puede mostrar en una manera identica, usando el hecho de que:

$$\left[\gamma^3, \sigma^3\right] = 0 \quad . \tag{3.103}$$

Entonces siempre podemos incluir el término de masa (3.92) sin romper la simetría quiral. Sin embargo éste término no es invariante bajo la transformación de paridad. Por lo tanto, no lo tomamos en consideración. En resumen, el lagrangiano invariante bajo transformaciones quirales queda sin ningun término de masa, requiriendo que también sea invariante bajo la transformación de paridad.

3.2.6 Comparación Entre las Representaciones 2×2 y 4×4

Recordamos que en la representación 4×4 para fermiones en el plano, la corriente quiral es:

$$j^\mu = -i\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \quad , \tag{3.104}$$

donde el factor $-i$ es solo por convención. La solución de la ecuación de Dirac para esta representación podemos escribirla como:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad . \tag{3.105}$$

Usando esta forma de la solución y la expresión explícita para γ^5, obtenemos:

$$\begin{aligned} j^\mu &= \left(\bar{\psi_A}, \bar{\psi_B}\right)\gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad , \\ &= \left(-\bar{\psi_B}\gamma^\mu, \bar{\psi_A}\gamma^\mu\right) \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad , \\ &= \bar{\psi_A}\gamma^\mu\psi_B - \bar{\psi_B}\gamma^\mu\psi_A \quad . \end{aligned} \tag{3.106}$$

Por lo tanto, comparando las ecuaciones (3.84) y (3.106), concluímos que las corrientes quirales asociadas con las transformaciones en la representación 2×2 y (3.89), (3.90) en la representación 4×4 son exactamente la misma corriente. Es decir, las tranformaciones de la ecuación (3.53), (3.54) sí son una transformación quiral en la representación fundamental para fermiones en el plano.

SECCIÓN 3.3

Simetría Quiral en Dimensiones (1+1)

Es importante recordar que en dimensiones (1+1) no existen representaciones inequivalentes, es decir, el tratamiento de la simetría quiral es análogo que en el caso de dimensiones (3+1).

Por tanto, podemos escribir el lagrangiano invariante bajo transformaciones quirales en términos de los componentes matriciales como:

$$\mathcal{L} = i\hbar \left[\bar{\psi}_A\right]_\alpha [\gamma^\mu]_{\alpha\beta} \partial_\mu [\psi_A]_\beta + i\hbar \left[\bar{\psi}_B\right]_\alpha [\gamma^\mu]_{\alpha\beta} \partial_\mu [\psi_B]_\beta \quad . \tag{3.107}$$

Como las transformaciones quirales son continuas, procedemos a encontrar la corriente conservada correspondiente. Empezamos escribiendo la variación $\delta\mathcal{L}$ bajo las transformaciones quirales:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} = {} & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_{A\alpha}\right)}\delta\left(\partial_\mu\psi_{A\alpha}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{A\alpha}}\delta\psi_{A\alpha} \\ & + \delta\left(\partial_\mu\bar{\psi}_{A\alpha}\right)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\bar{\psi}_{A\alpha}\right)} + \delta\bar{\psi}_{A\alpha}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}_{A\alpha}} \\ & + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_{B\alpha}\right)}\delta\left(\partial_\mu\psi_{B\alpha}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{B\alpha}}\delta\psi_{B\alpha} \\ & + \delta\left(\partial_\mu\bar{\psi}_{B\alpha}\right)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\bar{\psi}_{B\alpha}\right)} + \delta\bar{\psi}_{B\alpha}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{B\alpha}} \quad .\end{aligned} \tag{3.108}$$

Ahora calculamos las variaciones para cada campo y su derivada. Para el campo ψ_A tenemos:

$$\delta\psi_A = \alpha\psi_B \qquad \longrightarrow \qquad \delta\psi_{A\alpha} = \alpha\psi_{Ba} \quad , \tag{3.109}$$

$$\delta\left(\partial_\mu\psi_A\right) = \alpha\partial_\mu\psi_B \qquad \longrightarrow \qquad \delta\left(\partial_\mu\psi_{Aa}\right) = \alpha\partial_\mu\psi_{B\alpha} \quad , \tag{3.110}$$

$$\delta\bar{\psi}_A = \alpha\bar{\psi}_B \qquad \longrightarrow \qquad \delta\bar{\psi}_{A\alpha} = \alpha\bar{\psi}_{Ba} \quad , \tag{3.111}$$

$$\delta\left(\partial_\mu\bar{\psi}_A\right) = \alpha\partial_\mu\bar{\psi}_B \qquad \longrightarrow \qquad \delta\left(\partial_\mu\bar{\psi}_{A\alpha}\right) = \alpha\partial_\mu\bar{\psi}_{B\alpha} \quad , \tag{3.112}$$

para el campo ψ_B tenemos:

$$\delta\psi_B = -\alpha\psi_A \qquad \longrightarrow \qquad \delta\psi_{B\alpha} = -\alpha\psi_{A\alpha} \quad , \tag{3.113}$$

$$\delta\left(\partial_\mu\psi_B\right) = -\alpha\partial_\mu\psi_A \qquad \longrightarrow \qquad \delta\left(\partial_\mu\psi_{B\alpha}\right) = -\alpha\partial_\mu\psi_{Aa} \quad , \tag{3.114}$$

$$\delta\bar{\psi}_B = -\alpha\bar{\psi}_A \qquad \longrightarrow \qquad \delta\bar{\psi}_{B\alpha} = -\alpha\bar{\psi}_{A\alpha} \quad , \tag{3.115}$$

$$\delta\left(\partial_\mu\bar{\psi}_B\right) = -\alpha\partial_\mu\bar{\psi}_A \qquad \longrightarrow \qquad \delta\left(\partial_\mu\bar{\psi}_{B\alpha}\right) = -\alpha\partial_\mu\bar{\psi}_{A\alpha} \quad . \tag{3.116}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos involucrados son las siguientes:
Para el campo ψ_A:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_A\right)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_A}=0 \quad , \tag{3.117}$$

para el campo ψ_B:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_B\right)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_B}=0 \quad , \tag{3.118}$$

para el campo $\bar{\psi}_A$:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_A\right)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_A}=0 \quad , \tag{3.119}$$

para el campo $\bar{\psi}_B$:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_B\right)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_B}=0 \quad . \tag{3.120}$$

Como el Lagrangiano bajo consideración no contiene ningún términos de tipo $\partial_\mu\bar{\psi}$ entonces:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_A\right)}\right)=0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_A}=0 \quad , \tag{3.121}$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu\bar{\psi}_B\right)}\right)=0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial\bar{\psi}_B}=0 \quad . \tag{3.122}$$

Por tanto, lo anterior nos reduce a sólo cuatro términos en la variación del Lagrangiano:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}=&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_{A\alpha}\right)}\delta\left(\partial_\mu\psi_{A\alpha}\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{A\alpha}}\delta\psi_{A\alpha}\\&+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_{B\alpha}\right)}\delta\left(\partial_\mu\psi_{B\alpha}\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{B\alpha}}\delta\psi_{B\alpha} \quad .\end{aligned} \tag{3.123}$$

Sustituyendo las variaciones involucradas, podemos escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}=&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_{A\alpha}\right)}\left(\alpha\partial_\mu\psi_{B\alpha}\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{A\alpha}}\left(\alpha\psi_{B\alpha}\right)\\&+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_{B\alpha}\right)}\left(-\alpha\partial_\mu\psi_{A\alpha}\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{B\alpha}}\left(-\alpha\psi_{A\alpha}\right) \quad .\end{aligned} \tag{3.124}$$

Reordenando términos obtenemos:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}=\alpha\Bigg[&\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_{A\alpha}\right)}\psi_{B\alpha}\right)-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_{A\alpha}\right)}\right)\psi_{B\alpha}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{A\alpha}}\psi_{B\alpha}\\&-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_{B\alpha}\right)}\psi_{A\alpha}\right)+\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_{B\alpha}\right)}\right)\psi_{A\alpha}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{B\alpha}}\psi_{A\alpha}\Bigg] \quad .\end{aligned} \tag{3.125}$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, (3.117) y (3.118), tenemos:

$$\delta\mathcal{L} = \alpha\partial_\mu \left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi_{A\alpha}\right)} \psi_{B\alpha} \right) - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi_{B\alpha}\right)} \psi_{A\alpha} \right) \right] \quad . \tag{3.126}$$

Para encontrar las derivadas involucradas, usamos la ecuación (3.60) y conseguimos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi_{A\alpha}\right)} = i\hbar \left[\bar{\psi}_A\right]_{\alpha'} \left[\gamma^\mu\right]_{\alpha'\alpha} \quad , \tag{3.127}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi_{B\alpha}\right)} = i\hbar \left[\overline{\psi_B}\right]_{\alpha'} \left[\gamma^\mu\right]_{\alpha'\alpha} \quad . \tag{3.128}$$

Sustituyendo (3.127) y (3.128) en (3.126) obtenemos:

$$\delta\mathcal{L} = i\hbar\alpha \left[\left[\bar{\psi}_A\right]_{\alpha'} \left[\gamma^\mu\right]_{\alpha'\alpha} \partial_\mu \left[\psi_B\right]_\alpha - \left[\bar{\psi}_B\right]_{\alpha'} \left[\gamma^\mu\right]_{\alpha'\alpha} \partial_\mu \left[\psi_A\right]_\alpha \right] \quad . \tag{3.129}$$

concluímos entonces que:

$$\delta\mathcal{L} = i\alpha\hbar\partial_\mu j^\mu \quad , \tag{3.130}$$

donde:

$$j^\mu = \bar{\psi}_A \gamma^\mu \psi_B - \bar{\psi}_B \gamma^\mu \psi_A \quad . \tag{3.131}$$

Como la variación $\delta\mathcal{L} = 0$, la corriente j^μ es conservada, es decir:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad . \tag{3.132}$$

Capítulo 4

La Ecuación de Dirac Unidimensional con un Potencial Escalar Lineal

SECCIÓN 4.1

Solución de la ecuación de Dirac

Resolvemos la ecuación de Dirac en una dimensión espacial para el caso de un potencial lineal.

El potencial lineal $V(x) = g|x|$ es una elección natural para un potencial de confinamiento en una dimensión espacial. La ecuación no relativista de Schrödinger admite una solución casi analítica para este potencial. Para resolver la ecuación de Dirac directamente, usamos la misma representación, es decir:

$$\alpha \equiv \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Para $\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ obtenemos las ecuaciones acopladas:

$$u' + (m + g|x|)u = Ev \quad , \tag{4.2}$$
$$-v' + (m + g|x|)v = Eu \quad . \tag{4.3}$$

Estas ecuaciones se desacoplan en términos de la variable $\xi = \sqrt{g}(\ \mathrm{m}/g + |x|)$, tal que para $x > 0$:

$$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2\right) u = \left(E^2/g + 1\right) u \quad , \tag{4.4}$$
$$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2\right) v = \left(E^2/g - 1\right) v \quad , \tag{4.5}$$

y para $x < 0$:

$$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2\right) u = \left(E^2/g - 1\right) u \quad , \tag{4.6}$$
$$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2\right) v = \left(E^2/g + 1\right) v \quad . \tag{4.7}$$

Obviamente estas son ecuaciones de tipo oscilador armónico. Las soluciones normalizables se pueden construir a partir de las funciones de Hermite de orden ν y $\nu + 1$, donde $E^2 = 2(\nu + 1)g$, como:

$$u = \begin{cases} Ce^{-\xi^2/2} H_{\nu+1}(\xi), & x > 0, \\ C' \frac{E}{\sqrt{g}} e^{-\xi^2/2} H_\nu(\xi), & x < 0 \quad . \end{cases} \tag{4.8}$$

$$v = \begin{cases} C \frac{E}{\sqrt{g}} e^{-\xi^2/2} H_\nu(\xi), & x > 0, \\ C' e^{-\xi^2/2} H_{y+1}(\xi), & x < 0 \quad . \end{cases} \tag{4.9}$$

Sin embargo, ya que ξ es siempre positivo, v no se limita a ser un número entero. Continuidad en $x = 0$ requiere que $\mathrm{CH}_{\nu+1}(\alpha) = C'EH_\nu(\alpha)/\sqrt{g}$ and $C'H_{\nu+1}(\alpha) = CEH_\nu(\alpha)/\sqrt{g}$, donde $\alpha = m/\sqrt{g}$. Estas condiciones nos llevan a $C' = \pm C$ y:

$$H_{v+1}(\alpha) = \pm \frac{E}{\sqrt{g}} H_\nu(\alpha) \quad , \tag{4.10}$$

siendo esta última la condición de valor propio. Esta condición tiene un rico conjunto de soluciones cuando está libre de la restricción al número entero ν; hay infinitas soluciones para cualquier valor positivo de α. El signo que aparece en la condición de valor propio corresponde a la paridad de la solución. El operador de paridad es reflejo en x combinado con la multiplicación por la matriz de Dirac β. Como ξ es independiente del signo de x, encontramos que:

$$\beta \begin{pmatrix} u(-x) \\ v(-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(-x) \\ u(-x) \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} \quad . \tag{4.11}$$

La presencia de tal simetría es, por supuesto, necesaria para que coincida con la solución no relativista.

Capítulo 5

Conclusiones

Hemos estudiado la ecuación de Dirac y el lagrangiano correspondiente bajo las simetrías de paridad y quiralidad en un plano. Encontramos varias diferencias inesperadas, además de algunas similitudes en comparación con el estudio de los fermiones en dimensiones $(3+1)$. Brevemente las detallamos abajo:

- La representación mínima de la las matrices de γ en el caso $(2+1)$ es 2×2 (en el caso $(3+1)$ es 4×4).
- Existen dos representaciones inequivalentes de las matrices de γ en su representación mínima en el caso de dimensiones impares.
- Cada una de las representaciones inequivalentes tiene sus relaciones de completez y proyectores. Es decir, no se necesita las dos representaciones simultáneamente para satisfacer estas relaciones. Por lo tanto, uno puede pensar que es suficiente trabajar únicamente con una de estas representaciones inequivalentes.
- Existen varias razones para concluir que es erróneo tomar en cuenta sólo una de las represesentaciones inequivalentes. En seguida mencionamos estas razones:
    - En $(3+1)$ dimensiones, existen 4 soluciones linealmente independientes en la representación mínima. Podemos identificar estas soluciones con : Partícula (espín-arriba), particula (espín abajo), Anti-partícula (espin-arriba), anti-partícula (espín-abajo). En $(2+1)$ dimensiones, existen únicamente dos soluciones linealmente independientes en la representación mínima de las matrices de γ si trabajamos sólo con una representación. Podemos identificar

éstas soluciones con : partícula (espín-arriba) y anti-partícula (espín-abajo). Por lo tanto, el espectro de las partículas queda incompleto hasta que no incluyamos la segunda representación.

- La paridad no se puede definir en su manera tradicional pues ésta corresponderá a una rotación. Aunque trabajemos con la definición de paridad adecuada para un plano, el lagrangiano fermiónico se queda no-invariante bajo la transformación de paridad si una las representaciones inequivalentes se ignora. Esta transformación convierte a la partícula espín-arriba a la partícula(espín-abajo. Una de estas no es una solución.
- La teoría no masiva tiene las mismas simetrías que la teoría masiva. Es decir, la simetría quiral no se puede definir porque no existe una matríz 2×2 que conmute con todas las matrices de Pauli.

- Tomando en cuenta las dos representaciones inequivalentes, llegamos a las siguientes conclusiones interesantes:

  - El espectro de las partículas se completa. Existen cuatro soluciones en total con la misma interpretación que se encuentra para $(3 + 1)$ dimensiones.
  - Ya se puede escribir un lagrangiano fermiónico invariante de paridad. La razón es que la transformación de paridad lleva las soluciones que corresponden a la otra representación, de tal manera que el lagrangiano queda invariante.
  - La teoría no masiva tiene dos simetrías (una discreta y otra continua) que no existen para la teoría masiva correspondiente. La simetría discreta es de intercambio (el lagrangiano es invariante bajo el intercambio de los campos que partenecen a diferentes representaciones), se realiza únicamente cuando las dos representaciones inequivalentes están presentes. El término de masa rompe esta simetría. La simetría continua de la teoría no masiva mezcla las soluciones que corresponden a las representaciones inequivalentes. Dicha simetría se puede identificar con la simetría quiral conocida a través de estudiar fermiones planares en su representación 4×4.

- A partir de los resultados, vemos que la ecuación de Dirac con un potencial lineal escalar es un problema bien definido en una dimensión, con un amplio conjunto de soluciones.

Capítulo 6

Apéndice

Algebra de las Matrices γ

A.1. Primera Identidad

Primero demostraremos que el producto $\mathcal{P}$ de las matrices γ conmuta con cualquier γ^μ, es decir, se cumple que:

$$[\gamma^\mu, \mathcal{P}] = \left[\gamma^\mu, \gamma^0\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^{d-1}\right] = 0, \tag{A.1}$$

donde $\mu = 0, 1, 2...$. Consideramos el producto $\gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\ldots\gamma^{d-1}$. Notamos que como d es un número impar, entonces $d-1$ es un número par. Cuando γ^μ intenta cruzar al otro lado, consigue un signo menos en cada salto, excepto cuando cruza sobre el mismo, por lo que tenemos:

$$\gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\cdot\gamma^{d-1} = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^{d-1}\gamma^\mu(-1)^{d-1} = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^{d-1}\gamma^\mu,$$

porque $(-1)^{d-1} = 1$. Resulta la primera ecuación. Como $\mathcal{P}$ conmuta con todas las γ^μ, se puede mostrar que $\mathcal{P}$ debe de ser proporcional a la identidad.

A.2. Segunda Identidad

Ahora vamos a demostrar que las matrices γ poseen la siguiente propiedad:

$$\left(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^{d-1}\right)\left(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^{d-1}\right) = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}}, \tag{A.2}$$

para las dimensiones d impar. Se hara la demostracion usando el método de inducción matemática. Para $d = 1$, el lado izquierdo es $(\gamma^0)(\gamma^0) = 1$ y el derecho también es $(-1)^0 = 1$. Ahora supongámoslo cierto para $d = n$, es decir:

$$\left(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^{n-1}\right)\left(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^{n-1}\right) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}. \tag{A.3}$$

Como d solo puede adquirir valores impares, debemos demostrar que se cumple para $d = n+2$, es decir,

$$\left(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^n\gamma^{n+1}\right)\left(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^n\gamma^{n+1}\right) = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

65 Para simplificar el lado izquierdo (LI), lo escribimos de nuevo de la siguiente manera:

$$\mathrm{LI} = \left(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^{n-1}\right)\gamma^n\gamma^{n+1}\left(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^{n-1}\right)\gamma^n\gamma^{n+1}$$

Cuando γ^{n+1} del primer conjunto intenta cruzar al lado derecho para formar $\left(\gamma^{n+1}\right)^2$, consigue un factor $(-1)^{n+1}$ de fase. Análogamente, un movimiento similar de γ^n adquiere un factor de $(-1)^n$. Por lo tanto, el lado derecho se puede escribir como:

$$\mathrm{LI} = (-1)^{2n+1}\left(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^{n-1}\right)\left(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^{n-1}\right)$$

Usando la ecuación (A.3), tenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{LI} &= (-1)^{2n+1}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\\ &= (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}\end{aligned}$$

que era lo que queríamos demostrar.

Términos de Masa y Paridad

B.1. Paridad

Recordando que de las soluciones de la ecuación de Dirac en dimensiones 2×2 son:

$$\begin{aligned} \psi_A^P(x) &= N \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c(p_y - ip_x)}{E+mc^2} \end{pmatrix} e^{\frac{-ip\cdot x}{\hbar}}, \quad \psi_A^N(x) = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_y + ip_x)}{E+mc^2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{-ip\cdot x}{\hbar}}, \\ \psi_B^P(x) &= N \begin{pmatrix} \frac{c(p_y + ip_x)}{E+mc^2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{-ip\cdot x}{\hbar}}, \quad \psi_B^N(x) = N \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c(p_y - ip_x)}{E+mc^2} \end{pmatrix} e^{\frac{-ip\cdot x}{\hbar}}. \end{aligned} \tag{B.1}$$

donde P y N indican que estas soluciones son de energía positiva y negativa respectivamente. Es fácil de comprobar que bajo la transformación de paridad:

$$p_x \to -p_x, \quad p_y \to p_y,$$

éstas soluciones se transforman como:

$$\begin{aligned} \psi_A \to \psi_A' &= -i\gamma^1 \psi_B, \\ \psi_B \to \psi_B' &= -i\gamma^1 \psi_A. \end{aligned} \tag{B.2}$$

La transformación de paridad no mezcla partículas con anti-partículas. Como consecuencia de estas transformaciones, tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_A' \psi_A' &= -\bar{\psi}_B \psi_B, \\ \bar{\psi}_B' \psi_B' &= -\bar{\psi}_A \psi_A. \end{aligned} \tag{B.3}$$

B.2. Primer Término

El término convencial de masa:

$$mc\bar{\psi}\psi, \tag{B.4}$$

se puede escribir como:

$$\begin{aligned} mc\bar{\psi}\psi = mc\psi^\dagger \gamma^0 \psi &= mc \begin{pmatrix} \psi_A^\dagger & \psi_B^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^0 & 0 \\ 0 & -\gamma^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}, \\ &= mc \left(\bar{\psi}_A \psi_A - \bar{\psi}_B \psi_B \right). \end{aligned} \tag{B.5}$$

Hay que ser cuidadoso en la representación la representación. La matríz γ^0 cuadri-dimensional es diferente que la matríz γ^0 dos dimensional. Ahora es obvio que bajo la transformación de paridad, el término de masa $mc\bar{\psi}\psi$ es invariante.

B.3. Segundo Término

El segundo término de masa se puede escribir como:

$$
\begin{aligned}
mc\bar{\psi}\frac{i}{2}\left[\gamma^3,\gamma^5\right]\psi &= mc\bar{\psi}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\psi, \\
&= mc\begin{pmatrix} \psi_A^\dagger & \psi_B^\dagger \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma^0 & 0 \\ 0 & -\gamma^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}, \\
&= mc\left(\bar{\psi}_A\psi_A + \bar{\psi}_B\psi_B\right). \qquad \text{(B.6)}
\end{aligned}
$$

Bajo la transformación de paridad, este término es obviamente no invariante y adquiere un signo negativo total. En resumen , el término que rompe la simetría quiral preserva la simetría de paridad y el término que conserva la simetría quiral rompe la simetría de paridad.

REFERENCIAS

[1] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, *(John Wiley & Sons)*, (1987).

[2] F. Halzen y A.D. Martin, *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, *(John Wiley & Sons)* , (1984).

[3] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics, Second Edition, (World Scientific)*, (1998).

[4] K. Shimizu, Prog. Theor. Phys. 74 610 (1985).

[5] T.W. Appelquist, M. Bowick, D. Karabali y L.C.R. Wijewardhana, Phys. Rev. D33 3704 (1986).