



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS MAT. LUIS
MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

COMPORTAMIENTO DE UNA FLUCTUACIÓN
DE MATERIA-RADIACIÓN EN LA SUPERFICIE
DE ÚLTIMA DISPERSIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciada en Ciencias Físico-Matemáticas

PRESENTA:

Ana Laura Colmenero César

ASESOR:

Dr. Francisco Shidarth Guzmán Murillo



Morelia, Michoacán, México.
Agosto 2022

A mis santos padres.

Agradecimientos

Dicen que de bien nacidos es ser agradecidos, así que quisiera tomar una página de este trabajo para dar gracias a quienes considero que han sido una parte sustancial en mi formación académica. Primero, a mi asesor el profesor Francisco Shidarth, por haberme guiado en este trabajo e introducirme al estrambótico mundo de la academia. Mencionar también a los profesores Ricardo Becerril, Adnan Bashir y Joaquín Estévez; cuya enseñanza de sus conocimientos fue virtuosa y por sus palabras que en su momento me alentaron.

Agradezco desde el paraíso de mi corazón a Ricardo Ochoa; como colega por compartir su fascinante visión de la física, sumando a mi propio estudio nuevas perspectivas. Y como mi pareja, apoyándome siempre que lo he necesitado, por su paciencia en momentos turbios y todo el bello amor que me brinda.

Y por último, pero más importante, agradezco a dos personitas; a mi madre, quien me ha enseñado el valor de la constancia y cuyo espíritu tan fuerte me ha demostrado que siempre es posible seguir andando, no importa cuanto nos haya golpeado el mundo; y a mi padre, quien me inculcó el interés por los asuntos del conocimiento en sus diversas formas y me da apoyo incondicional para seguir aquello que es valioso para mí. Por el sacrificio, la dedicación y el profundo esfuerzo de ambos, les estoy por siempre agradecida.

Resumen

En este trabajo de tesis se presenta la dinámica de una fluctuación en un fluido de materia acoplado a la radiación. Esto para simular numéricamente, mediante un código que resuelve las ecuaciones de la hidrodinámica relativista, el comportamiento de perturbaciones detectadas en la radiación de fondo cósmico. Los resultados muestran una diferencia entre la evolución de densidad y temperatura, que podría influir en la formación de las primeras galaxias.

Palabras clave: Cosmología, Fondo Cósmico de Microondas, Superficie de Última Dispersión, Hidrodinámica Relativista.

Abstract

This thesis presents the dynamics of a fluctuation in a fluid of matter coupled to radiation. This is to numerically simulate, by means of a code that solves the equations of relativistic hydrodynamics, the behavior of perturbations detected in the cosmic background radiation. The results show a difference between density and temperature evolution, which could influence the formation of the first galaxies.

Key words: Cosmology, Cosmic Microwave Background, Last Scattering Surface, Relativistic Hydrodynamics.

CONTENIDO

Agradecimientos	I
Resumen	II
Abstract	III
1. Introducción	1
2. Cosmología	3
2.0.1. El Principio Cosmológico	3
2.0.2. Expansión del Universo	4
2.0.3. Componentes del Universo	6
2.1. Dinámica Cósmica	7
2.1.1. Unidades naturales	7
2.1.2. Ecuación de Friedmann	9
2.1.3. Ecuaciones de fluido y aceleración	11
2.1.4. Ecuaciones de estado	12
2.1.5. Universo en constante cambio	13

3. Física del CMB	15
3.1. Levantando un ojo al cielo: Observando el CMB	16
3.2. Desacoplamiento, Recombinación y la Superficie de Última Dispersión .	18
3.2.1. Recombinación	19
3.2.2. Desacoplamiento	21
3.2.3. Superficie de última dispersión	22
3.2.4. Isotropía del CMB	23
3.3. Fluctuaciones en el CMB	25
3.3.1. Causa de las fluctuaciones	28
4. Modelo macroscópico	31
4.1. Las ecuaciones de la hidrodinámica relativista	31
4.2. Fluido acoplado a la radiación	32
4.3. Solución numérica de las ecuaciones	35
4.4. Pruebas estándar del acoplamiento materia-radiación	36
4.4.1. Sombra	36
4.4.2. Doble sombra	37
5. Fluctuación durante el desacoplamiento	39
5.1. Condiciones iniciales	41
5.2. Simulaciones en un dominio 2D	41
5.2.1. Fluctuación con un perfil gaussiano	42
5.3. Fluctuación con un perfil cosenoidal	50

5.4. Simulaciones en un dominio 3D	53
5.5. Resultados	61
6. Conclusiones	62
REFERENCIAS	64

Capítulo 1

Introducción

*Bien sé que soy mortal, una criatura de un día.
Pero si mi mente sigue los serpenteantes caminos de las estrellas,
entonces mis pies ya no pisan la tierra, sino que al lado de Zeus
mismo me colmo con ambrosía, el divino manjar.*

Ptolomeo

La necesidad por un origen ha llevado a la humanidad a construir disciplinas tales como la filosofía, el esoterismo, la religión, el arte y la ciencia. Intentando dar una resolución, cada parte aporta desde sus métodos una pizca a eso que llamamos conocimiento. Si es que la miriada de todos estos saberes puede llegar a una «verdad», contraria a una creencia holística, es algo que quizá nunca se logre; y si se llegase a una conclusión, el mundo no estará seguro de que sea correcta.

Sin embargo, cada grupo sigue indagando. El trabajo aquí presentado será una minúscula muestra de la búsqueda por parte de la física, más precisamente, la cosmología y la dinámica de fluidos. Nuestro objeto de estudio es un momento puntual en la historia del universo predicha por la Teoría del Big Bang: el desacoplamiento materia-radiación,

originando el ya observado y bien estudiado Fondo Cósmico de Microondas (CMB por sus siglas en inglés). Al ser la radiación más lejana detectada (cualquier radiación anterior queda opacada detrás del estado de equilibrio del CMB) del universo, en ella hay mucho interés científico, ya que guarda información que nos puede ayudar a entender el surgimiento de las primeras galaxias y las grandes estructuras que estas forman [1].

En la presente tesis nos concentramos en la dinámica de una fluctuación de materia acoplada a la radiación. En el momento de última dispersión materia y radiación se encontraban en equilibrio térmico [2], hecho que utilizamos para hallar el comportamiento de esta fluctuación dependiente del tiempo. Suponemos también que la dinámica de este fluido es gobernada por las ecuaciones de la hidrodinámica relativista [3] y por ello resolvemos estas últimas para su evolución. Colocamos la fluctuación centrada en un elemento comóvil de volumen constante y estudiamos la interacción radiación-materia.

Existe un interés en la comunidad científica en el estudio estadístico y global del CMB, así como la amplitud y resolución angular de las fluctuaciones de temperatura. Desconocemos algún estudio local de las fluctuaciones, razón por la que realizamos este trabajo. Estudiamos la evolución de una perturbación en la densidad del fluido y el comportamiento de su temperatura, con lo que podemos indagar si el contraste de temperatura corresponde al de la materia. Encontramos que esto, en general, no se cumple; lo podría indicar que la anisotropías de la temperatura en el CMB no necesariamente corresponden a la variación en la materia, más precisamente, puede haber contrastes de densidad mayores a los de temperatura, lo que podría explicar la formación temprana de galaxias que se han descubierto recientemente con el telescopio espacial James Webb [4].

La estructura escrita del trabajo es la siguiente: Primero, introduciremos la rama de la física que se encarga del estudio del universo como un todo: la cosmología. Expondremos las ecuaciones que rigen la dinámica del cosmos para poder entender la causa de la radiación de fondo de microondas a nivel microscópico. Después, presentaremos las ecuaciones que explican el comportamiento de un fluido acoplado a la radiación; mismas que resolveremos numéricamente, modelando una pequeña fluctuación en la superficie de última dispersión.

Capítulo 2

Cosmología

La **cosmología física** se encarga del estudio del universo como un *todo*, describiendo su pasado, explicando su presente y prediciendo su futuro. El cosmos está lleno de estructuras en un vasto rango de escalas; los planetas orbitando estrellas, las estrellas reunidas en galaxias, galaxias atadas gravitacionalmente en cúmulos e incluso éstos últimos llegan a formar configuraciones llamadas supercúmulos. Para lograr reducir su complejidad a un plano accesible a su entendimiento físico, es necesario hacer una gran serie de simplificaciones, discutidas a continuación.

2.0.1 El Principio Cosmológico

A *grandes* escalas, el universo es homogéneo e isotrópico, lo primero nos dice que no existen lugares privilegiados; se verá igual no importa *dónde* se monte un telescopio. Lo segundo, que no hay direcciones privilegiadas; se verá igual no importa *a dónde* se apunte un telescopio. Estas suposiciones no son inmediatamente obvias, es fácil notar que a escalas pequeñas el universo es descaradamente inhomogéneo y anisotrópico.

Pero, si consideramos una esfera centrada en nosotros con un diámetro de aproximadamente $200Mpc$ (6.171×10^{24}), esta contendría al Supercúmulo Perseo-Piscis y al Supercúmulo Hidra-Centauro. Estas estructuras miden típicamente $\sim 100Mpc$ a través de su dimensión más larga, y están separadas por vacíos de $\sim 100Mpc$. Parecen ser las estructuras más grandes del universo y es en estas escalas que el universo luce

homogéneo e isotrópico [5]. La cosmología moderna adopta entonces el llamado **principio cosmológico**: «No hay nada de especial sobre nuestra posición en el universo» [2].

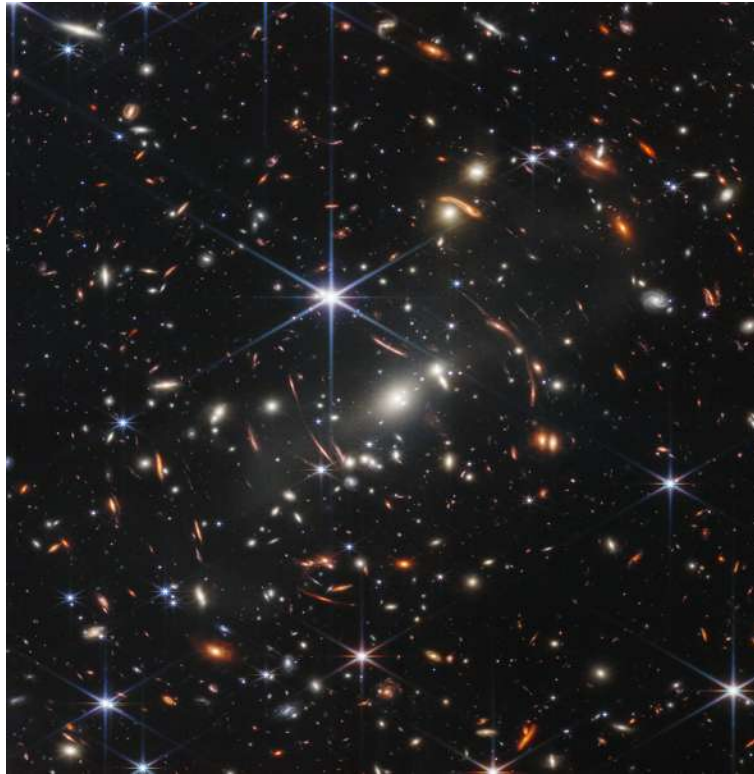


Figura 2.1: El Telescopio Espacial James Webb de la NASA ha producido la imagen infrarroja más profunda y nítida del universo distante hasta la fecha. Conocida como el primer campo profundo del Webb (Webb's First Deep Field), esta imagen del cúmulo de galaxias SMACS 0723 está desbordada en detalles (Créditos de la imagen: NASA, ESA, CSA, STScI: 2022).

2.0.2 Expansión del Universo

Las galaxias que observamos muestran un corrimiento al rojo proporcional a su distancia. Cuando miramos una galaxia en el espectro visible, lo que detectamos es la luz de las estrellas que esta contiene, de esta forma, el espectro de la galaxia contiene líneas de absorción creadas en sus estrellas. Si una línea de absorción particular tiene λ_{em} medida en el laboratorio, lo que medimos para la misma línea de absorción λ_{ob} en el espectro de una galaxia distante no serán, en general, las mismas. Decimos que la galaxia tiene un corrimiento al rojo dada por la fórmula:

$$z \equiv \frac{\lambda_{ob} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}. \quad (2.1)$$

En 1929 fueron medidas suficientes galaxias por el cosmólogo Edwin Hubble, quien estudiaba si existía una correlación entre el corrimiento al rojo de una galaxia y su distancia a nosotros. Hubble encontró la famosa relación conocida ahora como la Ley de Hubble [6]:

$$z = H_o r, \quad (2.2)$$

donde H_o es la *constante de Hubble*, con unidades de $\text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$. La mejor estimación a día de hoy es: $H_o = (67.3 \pm 1.2) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [7].

Vemos que las galaxias se están separando unas de otras, lo que implica que en el pasado estuvieron más próximas. Así la observación del corrimiento al rojo galáctico conduce de forma casi natural al modelo **Big Bang** para la evolución del universo. Este es explicado de forma somera como un modelo en que el universo se expande de un estado inicial de altísima densidad y continúa aumentando su tamaño hasta llegar a su estado de baja densidad actual.

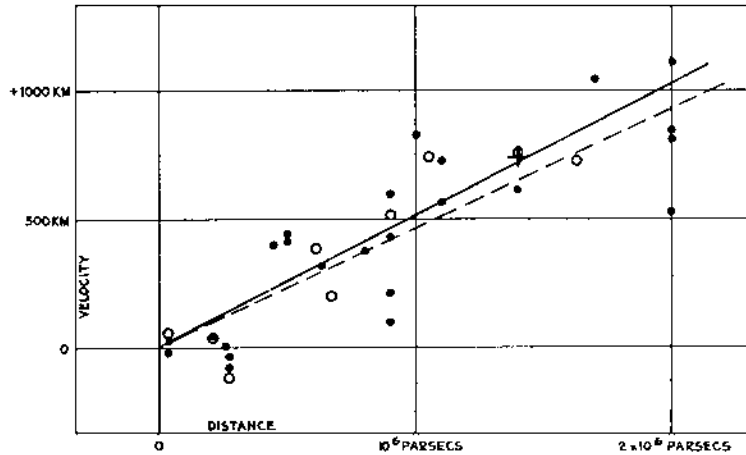


Figura 2.2: Diagrama original de Edwin Hubble (Tomado de Hubble, 1929: p.172).

Es conveniente describir este efecto introduciendo el factor de escala a , cuyo valor presente es fijado a 1 ($a(t_0) = 1$) por convención. Esto implica qué en épocas más

tempranas a era más pequeño de lo qué es hoy, creciendo en función del tiempo $a(t)$. Podemos ilustrarlo imaginando que colocamos una red cubriendo el espacio, que se expande de manera uniforme cuando el tiempo evoluciona. Los puntos en esta red, que corresponden a observadores en reposo, mantienen sus coordenadas, así que la distancia comóvil entre dos puntos (la cual mide la diferencia entre estas coordenadas) permanece constante. Sin embargo, la distancia física es proporcional al factor de escala; esto se puede entender como un escalamiento de coordenadas dependiente del tiempo $a(t)x$.

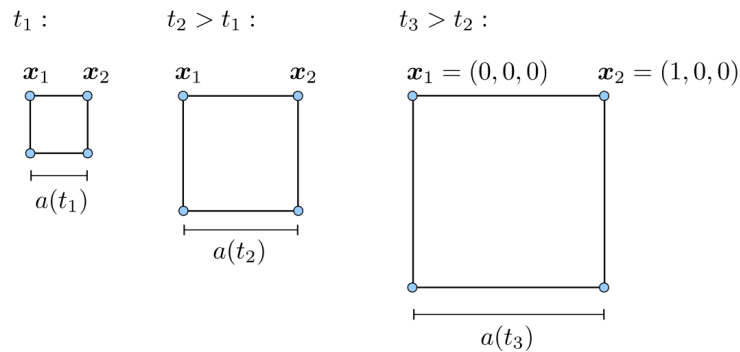


Figura 2.3: Ilustración de un universo en expansión con un factor $a(t)$ (Diagrama tomado de Dodelson, 2021: p.2).

2.0.3 Componentes del Universo

Al mirar dentro de nuestro propio mundo, logramos ver una diversidad de elementos y cómo interactúan de forma diferente entre sí. Pero desde el punto de vista de la cosmología, átomos tan diferentes como el oro y el helio son prácticamente indistinguibles. Entonces, la diferencia entre las distintas componentes del universo, son las *partículas elementales* que las conforman.

Un átomo de oro y de helio, así como todas las cosas que nos rodean en la vida cotidiana, se constituyen por *protones*, *neutrones* y *electrones*. Los primeros pertenecientes a los *bariones*, mientras los últimos, junto con el *neutrino* a los *leptones*.

Sumado a las anteriores, otro tipo de partícula que se sabe sin masa en reposo es el *fotón*. La radiación electromagnética puede entenderse como una onda o un flujo de partículas. Considerada como onda, se caracteriza por su frecuencia f o su longitud de onda $\lambda = c/f$; cuando se piensa como partícula, cada fotón se caracteriza por su

energía $E_\gamma = hf$. Los fotones permean el universo en un vasto rango de energías; desde ondas de radio hasta rayos gamma. Gracias a la observación de galaxias y cúmulos, se predice la existencia de una partícula adicional llamada *materia oscura*, la cual solamente interactúa de forma gravitacional con su entorno. Con la observación de supernovas tipo A, se ha demostrado una expansión acelerada del universo [8]; a nuestra última componente, causante de este fenómeno, se le ha dado el nombre de *energía oscura* (término acuñado por el cosmólogo Michael S. Turner [9]). La naturaleza de éstas últimas sigue generando debates entre la comunidad científica.

Partícula	Símbolo	Energía en reposo (MeV)	Carga
protón	p	938.3	+1
neutrón	n	939.6	0
electrón	e^-	0.511	-1
neutrino	ν_e, ν_μ, ν_τ	?	0
fotón	γ	0	0
materia oscura	?	?	0
energía oscura	?	?	0

Tabla 2.1: Inventario cósmico actual.

SECCIÓN 2.1

Dinámica Cósmica

Llamamos dinámica cósmica a la evolución del universo como un *todo*; al estudiarlo, no nos interesa el destino de partículas o sistemas individuales, sino su comportamiento colectivo y promedio, el cuál es descrito por la *mecánica estadística*. Por otra parte; la única fuerza relevante es la *gravedad*, la cual también provee la métrica del espacio-tiempo en que la materia evoluciona, esto es explicado por la *relatividad general*. De esta manera, la cosmología es esencialmente la aplicación de estos campos de la física. En esta sección, obtendremos las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del universo en el curso del tiempo a partir de las ecuaciones de campo de Einstein.

2.1.1 Unidades naturales

En cosmología es apropiado utilizar un sistema de unidades de modo que cada variable esté expresada en potencias de energía, así las ecuaciones son simplificadas por

la ausencia de constantes. Estas son llamadas unidades naturales. Para introducirlas, examinemos primero la ecuaci3n de Einstein escrita en el Sistema Internacional de Unidades (SI)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

El tensor energ3a-momento $T_{\mu\nu}$ tiene unidades de densidad de energ3a (Jm^{-3}) o equivalentemente, densidad de flujo de momento ($kgm^{-1}s^{-2}$). La multiplicaci3n de este tensor por las unidades de G/c^4 ($s^2kg^{-1}m^{-1}$) produce m^{-2} , que concuerda con las unidades de la parte izquierda de la ecuaci3n ya que el tensor m3trico $g_{\mu\nu}$ no posee unidades y el tensor de Riemann es la segunda derivada con respecto a la distancia del tensor m3trico.

En las unidades naturales cosmol3gicas, cuatro constantes fundamentales son fijadas a la unidad: la velocidad de la luz c , la constante reducida de Planck $\hbar$, la permitividad el3ctrica en el vac3o ϵ_0 y la constante de Boltzmann k_B :

$$c = \hbar = \epsilon_0 = k_B = 1, \quad (2.4)$$

donde

$$\begin{aligned} c &= 2.9979 \times 10^8 ms^{-1}, \\ \hbar &= 1.0546 \times 10^{-34} Js, \\ \epsilon_0 &= 8.8542 \times 10^{-12} A^2 s^4 kg^{-1} m^{-3}, \\ k_b &= 1.3806 \times 10^{-23} JK^{-1}. \end{aligned}$$

Como consecuencia de estas definiciones, la masa y la densidad tienen unidades de energ3a E , mientras que longitud y tiempo adquieren unidades de E^{-1} . En la tabla siguiente se muestran m3s variables.

En unidades naturales, la Ecuaci3n (2.3) se vuelve:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Trabajaremos con esta 3ltima.

Variable	Unidades SI	Unidades Naturales	Factor
masa	kg	E	c^{-2}
longitud	m	E^{-1}	$\hbar c$
tiempo	s	E^{-1}	$\hbar$
energía	kgm^2s^{-2}	E	1
velocidad	ms^{-1}	adimensional	c
densidad de energía	$kgm^{-1}s^{-1}$	E^4	$(\hbar c)^{-3}$

Tabla 2.2: Muestra de variables escritas en unidades naturales y su factor de conversión.

2.1.2 Ecuación de Friedmann

Introducido el sistema de unidades escogido, analizaremos la dinámica del cosmos. Iniciamos con el aspecto de la relatividad general contenida en la Ecuación (2.5) que enlaza la geometría del espacio-tiempo con el tensor energía-momento de la materia y radiación [10].

En 1930, los físicos Howard Robertson y Arthur Walker [5] se preguntaron qué forma asumiría una métrica del espacio-tiempo si el universo es espacialmente homogéneo e isotrópico en todo momento y si las distancias pueden expandirse o contraerse como función del tiempo. La métrica que obtuvieron (de manera independiente uno del otro) es llamada «Métrica de Robertson-Walker» cuyas componentes están dadas por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(t)^2}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

y

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right)$$

con $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$, $a(t)$ el factor de escala introducido en la Sección 1.1.2 y k es una constante que describe la curvatura del universo. Esta métrica es parecida a la usada en relatividad especial [10], a excepción de que las coordenadas espaciales están

multiplicadas por el factor de escala a .

Para determinar como la función $a(t)$ evoluciona con el tiempo, necesitamos el comportamiento de los constituyentes del universo mencionados en la Sección 2.0.3, y así resolver las ecuaciones de Einstein (2.5). Para la parte derecha de (2.5), el tensor energía-momento en el caso general de un fluido perfecto toma la forma [11]:

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (\rho + p)u_\mu u_\nu + \Sigma_{\mu\nu},$$

donde p , ρ , u_μ , y $\Sigma_{\mu\nu}$ son la presión, densidad de energía, cuadrivelocidad y estrés anisotrópico respectivamente. En el caso del estrés, su valor es cero para el caso homogéneo e isotrópico y $\rho = \rho(t)$ así como $p = p(t)$. Las cuadrivelocidades están restringidas a la forma $g^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = -1$ y en el caso particular de un sistema de referencia comóvil tendríamos $u_i = 0$ y $u_0 = -1$. El escalar del tensor energía-momento para una variedad homogénea e isotrópica será:

$$T^\mu_\mu = 3p - \rho, \quad (2.6)$$

mientras que los símbolos de Christoffel distintos de cero son:

$$\Gamma^0_{ij} = g_{ij}\dot{a}a, \quad (2.7)$$

$$\Gamma^i_{0j} = \Gamma^i_{j0} = \delta_{ij}\frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.8)$$

Los tensores de Ricci no nulos son:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (2.9)$$

$$R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)\frac{g_{ij}}{a^2}. \quad (2.10)$$

Sustituyendo esta información en la Ecuación (2.5), tendríamos para alguna de las entradas en el tensor:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (2.11)$$

Esta es la **ecuación de Friedmann**, que describe la expansión métrica del espacio para modelos homogéneos e isotrópicos [12]. Definimos ahora el parámetro de Hubble como $H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}$. Es posible determinar $H_0 = 100h \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, donde h se conoce como la constante de Hubble adimensional. Para un universo con una diversidad de fluidos tendríamos:

$$H(t)^2 = \sum_i \frac{8\pi G}{3}\rho_i - \frac{k}{a^2}. \quad (2.12)$$

Definimos la densidad crítica como la necesaria para que el universo sea plano, es decir $k = 0$. Por encima de dicha densidad el universo será cerrado y por debajo abierto.

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (2.13)$$

Es apropiado definir las densidades de los diferentes fluidos en términos de los parámetros de densidad, teniendo:

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{\rho_i(t)}{\rho_c}. \quad (2.14)$$

2.1.3 Ecuaciones de fluido y aceleración

La ecuación de campo de Einstein nos lleva a la conservación del tensor energía-momento bajo las identidades de Bianchi, tomando la forma [10]:

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0, \quad (2.15)$$

resultando en un conjunto de 4 ecuaciones de conservación, una por cada entrada espacio-temporal. Para el caso $\nu = 0$, se tiene

$$\nabla_\mu T_0^\mu = \frac{\partial T_0^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^\mu T_0^\alpha - \Gamma_{0\mu}^\alpha T_\alpha^\mu = 0. \quad (2.16)$$

Desarrollando la expresión anterior, recordando que la presión y la densidad sólo dependen del tiempo y con $u^0 u_0 = -1$, llegamos a la ecuación de fluido:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.17)$$

Las ecuaciones restantes, cuando $\nu = i$, no son tomados en cuenta, pues estas son de importancia sólo en la cosmología perturbativa, que no consideramos para los fines de este trabajo.

Derivando la Ecuación de Friedmann (2.11) y utilizando la ecuación de fluido (2.17) encontramos la ecuación de aceleración:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3p + \rho), \quad (2.18)$$

que nos da el ritmo de aceleración al que el universo se expande.

2.1.4 Ecuaciones de estado

Una ecuación de estado es relación matemática entre diversas funciones de estado tales como la temperatura, la presión, el volumen, la densidad y la energía interna [13]. De las tres ecuaciones que describen la evolución del universo, solamente dos son independientes. Así que tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas ($a(t)$, $\rho(t)$ y $P(t)$). Lo que necesitamos es una ecuación de estado que nos de una relación entre la presión y la densidad:

$$p = p(\rho) \quad (2.19)$$

En general, estas pueden ser complicadas [13]. Sin embargo, para sustancias de naturaleza cosmológica, esta ecuación de estado puede escribirse de una simple forma lineal [5] $P = \omega\rho$, donde ω es un número adimensional. Consideraremos en este estudio una materia «tipo polvo», esto es, que no ejerce presión. Su ecuación de estado estará dada por un $\omega = 0$. Para un gas relativista, los fotones poseen momento, y por lo tanto ejercen presión. Su ecuación estará regida por un $\omega = 1/3$ [2].

Para un gas, la velocidad del sonido está dada por $c_s = \sqrt{\omega}$ [11]. Un caso interesante es el que genera una aceleración positiva en la Ecuación (2.18); esto se logra con $\omega < -1/3$. En una sustancia con $\omega < 0$, la velocidad del sonido es imaginaria, lo que implica que pequeñas perturbaciones a un gas con presión negativa no generan ondas de sonido estables, sino que sus amplitudes crecen o decrecen con el tiempo [5]. Como se mencionó en la Sección 2.0.3, se ha observado una expansión acelerada del universo implicando que existe una componente, conocida como energía oscura, con una velocidad del sonido imaginaria. Debido a esto, su naturaleza es un tema abierto en la astrofísica actual.

2.1.5 Universo en constante cambio

El modelo que adoptaremos, el cual se ajusta a los datos observaciones actuales en buena medida [5], es espacialmente plano ($k = 0$) y contiene radiación, materia y energía oscura (que denotaremos por Λ)¹. La Ecuación de Friedmann (2.11) se convierte en:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_i + \frac{\lambda}{3} \quad (2.20)$$

Mientras que para un universo que contiene una variedad de fluidos, la Ecuación (2.17) se escribe:

$$\sum_i \dot{\rho}_i + 3\frac{\dot{a}}{a}(p_i + \rho_i) = 0. \quad (2.21)$$

A pesar de que tenemos un mult fluido, consideramos que la Ecuación de Friedmann se resuelve de manera precisa solamente por la componente dominante [5]. En este modelo,

¹En la literatura, el parámetro Λ se suele llamar «constante cosmológica» en honor a Albert Einstein, quien la teorizó en 1917 para conseguir una solución con un universo estático. [14]

el universo al principio estaba dominado por la radiación ($\omega = 1/3$), obedeciendo una evolución:

$$a(t) \propto t^{1/2}, \quad \rho_r \propto \left(\frac{1}{t}\right)^2, \quad \rho_m \propto \left(\frac{1}{t}\right)^{3/2}, \quad (2.22)$$

para después ser dominado por la materia ($\omega = 0$):

$$a(t) \propto t^{2/3}, \quad \rho_r \propto \left(\frac{1}{t}\right)^{8/3}, \quad \rho_m \propto \left(\frac{1}{t}\right)^2. \quad (2.23)$$

y actualmente dominado por Λ :

$$a(t) \propto e^t, \quad \rho_r \propto e^{-4t}, \quad \rho_m \propto e^{-3t}. \quad (2.24)$$

Donde ρ_r es la densidad de radiación y ρ_m de materia. Esto nos dice que hubo una época en que la materia y la radiación coexistían en igual proporción, al igual que la materia y Λ . Llamamos a estas épocas como *igualdad materia-radiación*, denotada por t_{rm} e *igualdad materia-lambda* $t_{m\Lambda}$.

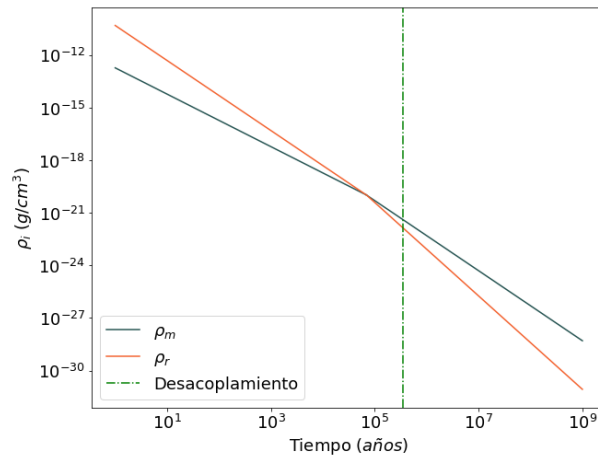


Figura 2.4: Evolución temporal de las densidades. Se indica con una línea punteada el momento del desacoplamiento, que origina la radiación de fondo cósmico (CMB), discutida en el Capítulo 2.

Capítulo 3

Física del CMB

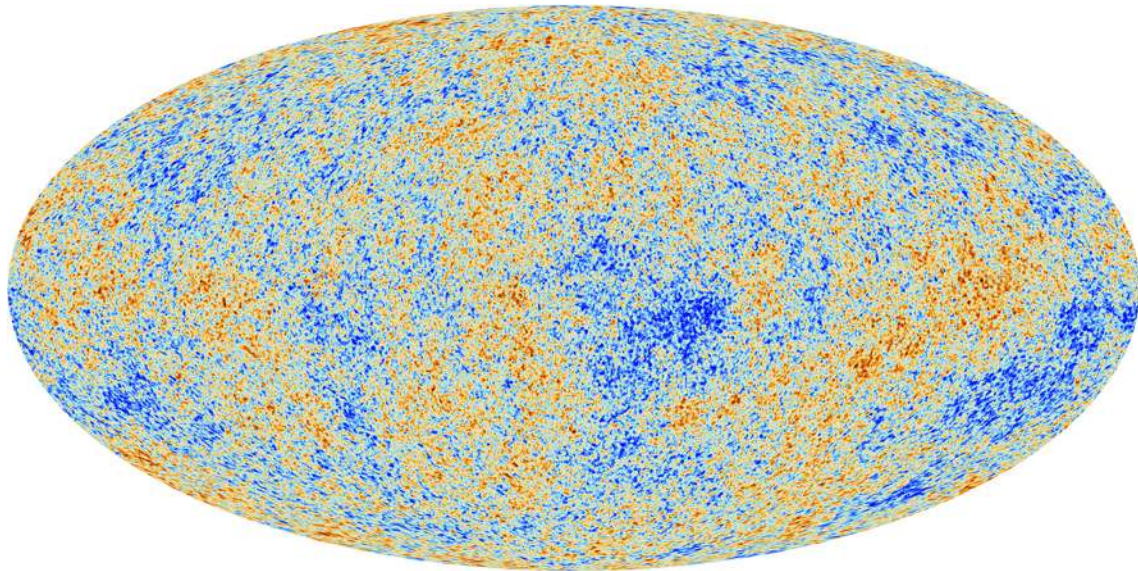


Figura 3.1: El Fondo Cósmico de Microondas (CMB) visto por el satélite Planck (Crédito de la imagen: ESA and the Planck Collaboration: 2013).

En este capítulo veremos la importancia del estudio de la Radiación de Fondo Cósmico de Microondas (CMB por sus siglas en inglés) y explicaremos las reacciones microscópicas que dieron lugar a su origen.

SECCIÓN 3.1

Levantando un ojo al cielo: Observando el CMB

A mediados del siglo XX, la comunidad científica había desarrollado dos teorías diferentes para explicar el origen del universo. La primera, llamada teoría del estado estacionario, establece que el universo siempre ha existido y seguirá sin cambio alguno. La segunda, la teoría del Big Bang, en donde el universo provenía de un estado de altísima densidad y temperatura y luego se expandió. Este último modelo predice la existencia de un baño de radiación que permea el universo como resultado de un acoplamiento-desacoplamiento materia-radiación debido a las altas densidades y temperaturas.

El fondo cósmico de microondas fue predecido por primera vez en 1948 por Ralph Alpher, Robert Herman y George Gamow [15], estimando su temperatura en 5K. Pero la idea iba más lejos de las capacidades experimentales de aquella época. Su descubrimiento accidental sucedió 18 años después, cuando Arno Penzias y Robert Wilson trabajaban con un radiómetro para experimentos en comunicación de satélites en los «Bell Telephone Laboratories». El 20 de mayo de 1964 midieron un exceso de 4.2 K que no pudieron explicar [16]. Una reunión entre los grupos de Princeton y Crawford Hill determinó que el excedente era debido al fondo cósmico de microondas. Esto les valió el premio Nobel a Penzias y Wilson en 1978.

Su descubrimiento fue una cuestión problemática para los partidarios del modelo estacionario, quienes proponían que el fondo de microondas era el resultado de la luz dispersada de galaxias distantes. Sin embargo, futuras mediciones demostraron que el espectro era de cuerpo negro, un resultado que el modelo estacionario no podía explicar. Así, en 1970, el consenso científico fue que el fondo cósmico de microondas debía ser un remanente del Big Bang.

La energía promedio de un fotón del CMB al día de hoy, $\langle h\nu \rangle = 6.3 \cdot 10^{-4} eV$ [17], es pequeña comparada con las energías requeridas para romper el núcleo atómico ($\sim 1 MeV$) o excitar los niveles de energía atómicos ($\sim 10 eV$), pero comparables a las diferencias de energía entre niveles vibracionales y rotacionales de algunas moléculas, incluyendo H_2O . Por esto, después de trece mil millones de años viajando a través del cosmos, los fotones del CMB son absorbidos a un microsegundo de la superficie terrestre por una molécula de agua en la atmósfera. La detección original por Penzias y Wilson ocurrió a una longitud de onda de 73.5mm [16], siendo esta la longitud de onda de las señales de

telecomunicaciones con la que trabajaban; esta es dos órdenes de magnitud más grande que la longitud de onda de un cuerpo negro a $T = 2.7255K$.

Por esta razón, las observaciones del CMB durante los últimos 50 años se han hecho principalmente por satélites, globos a grandes altitudes y desde la Antártica, donde el contenido de agua en la atmósfera es muy bajo [17]. Las misiones espaciales sucesivas, tales como COBE, WMAP y PLANCK, han construido un mapa con precisión creciente de la radiación de fondo sobre todo el cielo. Codificado en este mapa, se encuentra una descripción de los parámetros que describen a nuestro universo [17]. Esta es la importancia de la observación del CMB.

Si Heinrich Olbers hubiera tenido ojos capaces de ver longitudes de onda milimétricas, no habría formulado su famosa «Paradoja de Olbers», ya que el cielo nocturno es verdaderamente brillante en todas partes.

Propiedad	Valor
Temperatura	$2.7255K$
Pico de emisión	$0.106cm$
Densidad de número de fotones	$411cm^{-3}$
Densidad de energía de fotones	$0.26eVcm^{-3}$
Energía promedio	$6.34 \cdot 10^{-4}eV$

Tabla 3.1: Parámetros del CMB [17].

El CMB resulta ser la aproximación más cercana que tenemos a un cuerpo negro ideal [2]. La densidad de energía de radiación a una temperatura T , está dada por [3]:

$$\rho_r \propto T^4. \quad (3.1)$$

Sabemos que la densidad de radiación evoluciona con la expansión del universo bajo la relación [2]:

$$\rho_r \propto \frac{1}{a^4}, \quad (3.2)$$

combinando las dos ecuaciones anteriores, tenemos una ecuación crucial:

$$T \propto \frac{1}{a} \quad (3.3)$$

Esto significa que el universo se vuelve más frío a medida que se expande. Ya que la temperatura actual es de $2.7255K$, implica que a épocas más tempranas, el universo debió haber sido mucho más caliente.

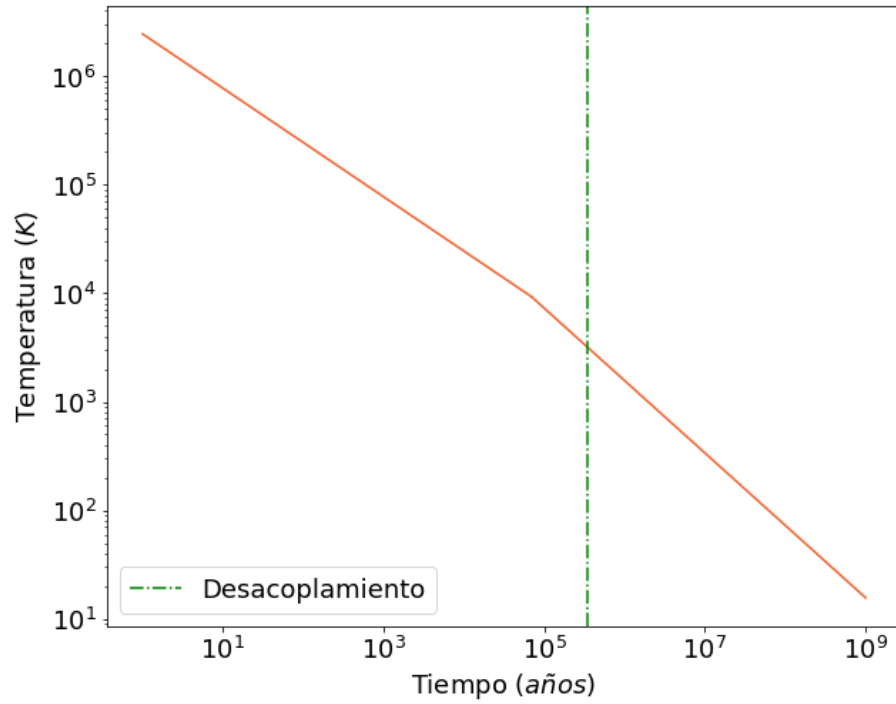


Figura 3.2: Evolución temporal de la temperatura. Se indica con una línea punteada el momento del desacoplamiento, que origina la radiación de fondo cósmico (CMBr).

SECCIÓN 3.2

Desacoplamiento, Recombinación y la Superficie de Última Dispersión

Para entender mejor el origen del Fondo Cósmico de Microondas, tenemos que examinar el proceso por el cual la materia bariónica cambia de ser un plasma ionizado a un gas de

átomos neutros, y el proceso estrechamente relacionado donde el universo pasa de ser opaco a transparente. Distinguiremos aquí tres momentos en la historia del universo. El primero, la época de la **recombinación**, donde la componente bariónica del universo pasa de estar ionizada a neutra.

Segundo, el **desacoplamiento**; momento donde la razón en que los fotones se dispersaban de los electrones era más pequeña que el parámetro de Hubble. Cuando los fotones se desacoplan, cesan de interactuar con los electrones y el universo se vuelve transparente. Tercero, la época de **última dispersión**, cuando un fotón corriente del CMB tuvo su última dispersión de un electrón.

3.2.1 Recombinación

Asumimos que la componente bariónica del universo consistía enteramente de hidrógeno en la época de recombinación. El hidrógeno puede tomar la forma de un átomo neutro (representado por H), o de un núcleo desnudo (el protón p). Para mantener la carga neutra en este universo dominado sólo por el hidrógeno, el número de densidad de electrones libres n_e debe ser igual al de los protones n_p . Definimos el factor de ionización como [11]:

$$X \equiv \frac{n_p}{n_p + n_H} = \frac{n_p}{n_{bar}} = \frac{n_e}{n_{bar}}. \quad (3.4)$$

Vemos que cuando $X = 1$, la componente bariónica está enteramente ionizada y cuando $X = 0$, consiste completamente de átomos neutros.

La energía de ionización del hidrógeno es $Q = 13.6$ eV. Un fotón energía $hf > Q$ es capaz de fotoionizar un átomo de hidrógeno; esta reacción puede ir también en dirección contraria, un protón y un electrón pueden sufrir una recombinación, formando un átomo de hidrógeno mientras un fotón se lleva el exceso de energía [5]:



X dependerá de este balance.

En épocas tempranas, la fracción de ionización del universo estaba muy cerca de $X = 1$. Cuando esto ocurría, los fotones interactuaban con los electrones a través de la **dispersión de Thomson** [5]:

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-, \quad (3.6)$$

ya que $hf \ll m_e$; la energía cinética de la partícula y la frecuencia del fotón no cambian en el proceso de dispersión.

Buscamos la temperatura de la recombinación, la cual no sólo dependerá de la energía de ionización Q , sino también de la razón barión-fotón η , ya que la probabilidad de que un hidrógeno recién formado interactúe con un electrón aumentará gracias a esta. Mientras los fotones sigan acoplados a la materia, la Reacción (3.5) estará en equilibrio estadístico.

Debido a esto, y sabiendo $hf \ll m_e$, utilizamos la **ecuación de Saha** [11], donde se relaciona el estado de ionización de un elemento con la temperatura T

$$\frac{n_H}{n_p n_e} = \left(\frac{m_e kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{-3/2} \exp \left(\frac{Q}{kT} \right). \quad (3.7)$$

Ahora, la convertiremos en una relación entre X , T y η . Resultando en:

$$\frac{1-X}{X^2} = 3.84\eta \left(\frac{kT}{m_e} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{Q}{kT} \right) \quad (3.8)$$

que es una ecuación cuadrática para X . Si definimos el momento de la recombinación en el instante en que $X = 1/2$, y asumiendo $\eta = 5.5 \times 10^{-10}$ [5], la temperatura de la recombinación será:

$$T_{rec} = 3740K \quad (3.9)$$

$$, \quad (3.10)$$

correspondiente a $z_{rec} = 1370$, y un tiempo $t_{rec} = 240,000$ años. La recombinación no fue un proceso instantáneo, en el modelo de evolución que consideramos, esta ocurre en un $\Delta t \approx 70,000$ años.

3.2.2 Desacoplamiento

El camino libre de un fotón que está continuamente interactuando con electrones según la dispersión de Thomson está dado por [5]:

$$\lambda = \frac{1}{n_e \sigma_e}, \quad (3.11)$$

donde $\sigma_e = 6.55 \times 10^{-29} \text{ m}^2$. La frecuencia con que un fotón sufre una dispersión es:

$$\Gamma = \frac{1}{\lambda} = n_e \sigma_e. \quad (3.12)$$

Recordando que $n_e = n_{e,0}/a^3 = n_{bar,0}/a^3$, podemos escribir en términos del factor de escala $a(t)$:

$$\Gamma(a) = \frac{4.4 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}}{a^3}. \quad (3.13)$$

Los fotones permanecen acoplados a los electrones siempre que $\Gamma(a) > H(a)$, es decir, que la frecuencia con la que se dispersan sea más grande que la tasa de expansión del universo. Esto es equivalente a que el camino medio λ es más pequeño que la distancia de Hubble $H_D \equiv 1/H$.

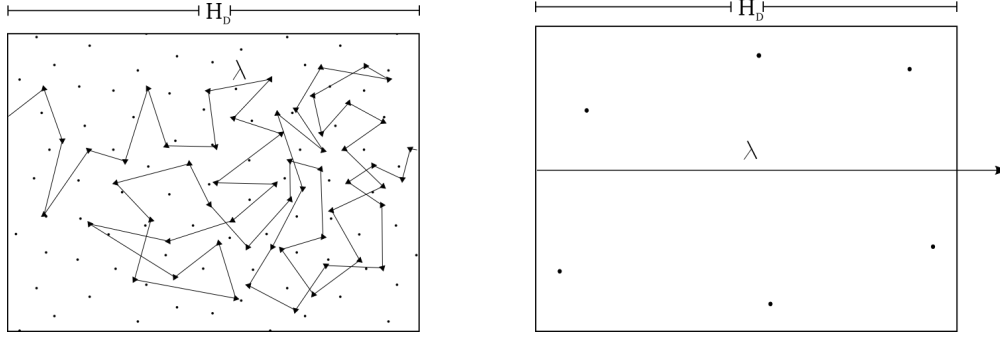


Figura 3.3: Elemento comóvil opaco $\lambda < H_D$ (izquierda) y transparente $\lambda > H_D$ (derecha)

Como el número de densidad de los electrones libres decae rápidamente durante la época de recombinación, el desacoplamiento sucede poco después. La razón de dispersión del fotón, cuando el hidrógeno está parcialmente ionizado es:

$$\Gamma(z) = n_e(z)\sigma_e = X(z)(1+z)^3 n_{bar,0}\sigma_e, \quad (3.14)$$

mientras el valor numérico del parámetro de Hubble durante la época de recombinación es $H(z) = 1.24 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}(1+z)^{3/2}$. El corrimiento al rojo del desacoplamiento de los fotones se encuentra ajustando $\Gamma = H$. De esta manera, encontramos que $z_{des} = 1130$. En realidad, el valor exacto es más pequeño. La ecuación de Saha asume que la reacción $H + \gamma \rightleftharpoons p + e^-$ está en equilibrio. Sin embargo, cuando Γ es menor a H , la fotoionización deja de estar en equilibrio, como consecuencia para z menores a ~ 1200 , la fracción de ionización X es mayor a lo que predice la ecuación de Saha, y el desacoplamiento de los fotones se retrasa. Sin ahondar en física fuera de equilibrio, redondeamos este valor a $z_{des} \approx 1100$, con una temperatura correspondiente $T_{des} \approx 3000 \text{ K}$, donde la edad del universo era $t_{des} \approx 350,000$ años.

3.2.3 Superficie de última dispersión

Cuando examinamos el CMB con nuestras antenas, los fotones que se colectan han viajado directamente hasta nosotros desde la última vez que se dispersaron de un electrón libre. Durante un breve intervalo $t \rightarrow t + dt$, la probabilidad de que un fotón sufra una dispersión es $dP = \Gamma(t)dt$. Si detectamos un fotón del CMB al tiempo t_0 , el número esperado de dispersiones por el que ha pasado desde un tiempo anterior t es [5]:

$$\tau(t) = \int_t^{t_0} \Gamma(t) dt. \quad (3.15)$$

Este número adimensional τ se conoce como la **profundidad óptica**. El tiempo para el que $\tau = 1$ es cuando sucede la **última dispersión**. Podemos escribir la profundidad óptica en función de z :

$$\tau(z) = \int_0^z X(z)(1+z)^{1/2} dz. \quad (3.16)$$

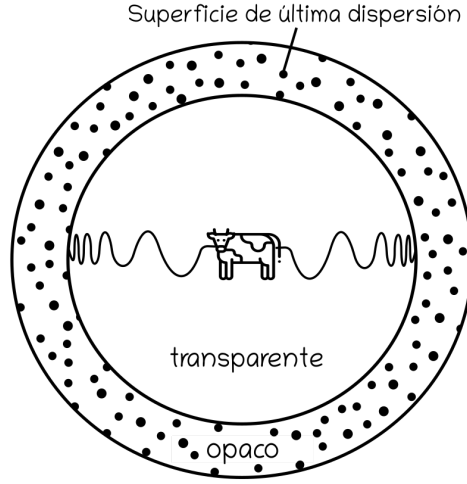


Figura 3.4: Un observador es rodeado por una superficie esférica. Los fotones del CMB viajan en línea recta, siendo corridos al rojo.

La última dispersión de un fotón típico del CMB ocurre después que la reacción de fotoionización esté fuera de equilibrio, así que la ecuación de Saha no se cumple estrictamente; aún así, para nuestros propósitos, podemos asumir que el corrimiento al rojo de la última dispersión es comparable al del desacoplamiento, así $z_{ud} \approx z_{des} \approx 1100$. Justo como vemos bancos de neblina en la tierra, podemos ver poco a través de la «neblina de electrones» que oculta al universo temprano de nuestra visión directa.

3.2.4 Isotropía del CMB

A cualquier posición angular (θ, ϕ) sobre el cielo, el espectro del CMB es cercano a un cuerpo negro perfecto, como se ve en la Figura 3.2.4. Denotando con $T(\theta, \phi)$ la

Evento	z	Temperatura (K)	Tiempo (años)
recombinación	1370	3740	240,000
desacoplamiento	1100	3000	350,000
última dispersión	1100	3000	350,000

Tabla 3.2: Épocas importantes en el universo temprano. Se muestran en función del corrimiento al rojo z , este puede ser convertido en años por medio de la relación adecuada para la componente dominante.

temperatura de un punto dado en el cielo, la temperatura promedio sobre toda la esfera es:

$$\langle T \rangle = \frac{1}{4\pi} \int T(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = 2.7255 \pm 0.0006 K. \quad (3.17)$$

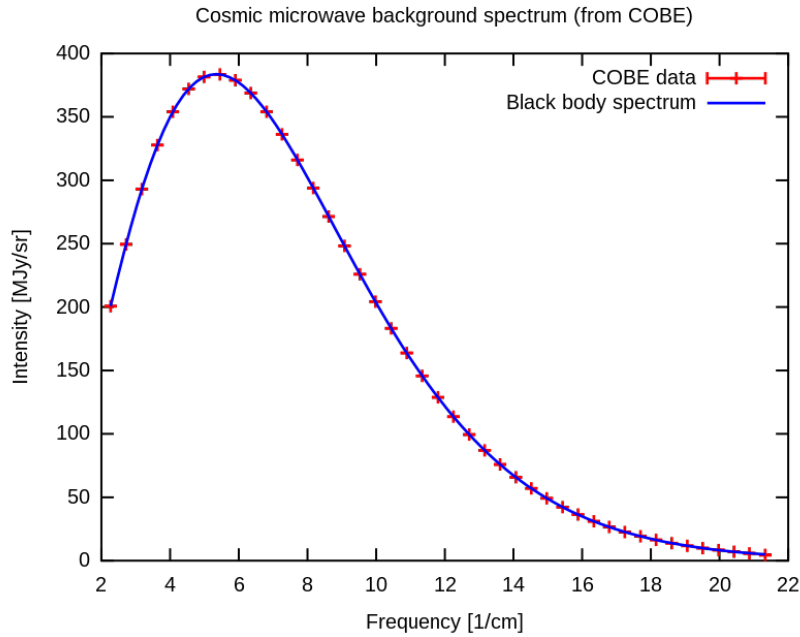


Figura 3.5: El espectro del Fondo Cósmico de Microondas medido por el satélite COBE [18] es el de un cuerpo negro con temperatura $T = 2.7255 K$. Diagrama tomado de: https://en.wikipedia.org/wiki/Cosmic_microwave_background/media/File:Cmbr.svg

Las desviaciones de esta temperatura promedio de un punto a otro son pequeñas. Definiendo las fluctuaciones adimensionales de T :

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \frac{T(\theta, \phi) - \langle T \rangle}{\langle T \rangle}, \quad (3.18)$$

se encuentra que [7]:

$$\left\langle \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle^{1/2} \approx 1.8 \cdot 10^{-5}. \quad (3.19)$$

El hallazgo en la variación de temperatura dado por μK a través de todo el cielo es una fuerte evidencia de que el universo es homogéneo e isotrópico [17].

SECCIÓN 3.3

Fluctuaciones en el CMB

Las anisotropías en la temperatura de la Radiación de Fondo Cósmico codifican una colección de parámetros cosmológicos [11]. Existen varias causas de las fluctuaciones en la temperatura del CMB [17]; las importantes para este trabajo son las llamadas «perturbaciones primarias», grabadas en la superficie de última dispersión en $z \approx 1100$ (Sección 3.2.3). Estas fluctuaciones reflejan inhomogeneidades en la densidad, las cuales son las semillas para la formación de la estructura a gran escala del Universo [1]. Junto a estas, también están las «fluctuaciones secundarias» debido a la interacciones de algunos fotones del CMB con la materia en su camino desde la superficie de última dispersión al Universo cercano y las «fluctuaciones terciarias», debidas al efecto de gas y polvo en nuestra propia galaxia y el dipolo causado por el movimiento de la Tierra relativo al flujo de Hubble[17].

El tamaño angular $\delta\theta$ de una fluctuación de temperatura en el CMB se relaciona a un tamaño físico l en la superficie de última dispersión por [5]:

$$d_A = \frac{l}{d\theta}, \quad (3.20)$$

donde d_A es la distancia angular diametral. Como $z_{ud} \approx 1100 \ll 1$, una buena aproximación será

$$d_A \approx \frac{d_{hor}(t_0)}{z_{ud}}, \quad (3.21)$$

$$d_A \approx 13 Mpc. \quad (3.22)$$

Las fluctuaciones en la superficie de última dispersión con un ángulo observado $\delta\theta$ tienen un tamaño propio de:

$$l = d_A(\theta) = 13 Mpc \left(\frac{\delta\theta}{1 rad} \right) = 0.22 Mpc \left(\frac{\delta\theta}{1^\circ} \right) \quad (3.23)$$

en el $t(z_{ud})$. Fluctuaciones vistas por el Explorador del Fondo Cósmico (COBE por sus siglas en inglés) corresponden a escalas físicas de $l(1 + z_{ud}) > 1700 Mpc$ al día de hoy, de tamaño mayor a los supercúmulos. Experimentos posteriores con más alta resolución midieron fluctuaciones de $l \approx 0.04 Mpc$, que son $40 Mpc$ a tiempo actual, justo el tamaño de los supercúmulos [5].

Consideramos ahora las fluctuaciones de densidad $\delta T/T$. Ya que el fondo cósmico de microondas es medido en una esfera, es útil expandir en armónicos esféricos:

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{l,m}(\theta, \phi). \quad (3.24)$$

Una medida estadística de las fluctuaciones de temperatura es la función de correlación $C(\theta)$ [17]. Consideramos dos puntos en la superficie de última dispersión representados por los vectores $\hat{n}$ y $\hat{n}'$, separados por un ángulo θ tal que $\cos \theta = \hat{n} \cdot \hat{n}'$. La función de correlación $C(\theta)$ se encuentra multiplicando juntos los valores de $\delta T/T$ en los dos puntos y promediando el producto sobre todos los pares de puntos separados por un ángulo θ :

$$C(\theta) = \left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{n}) \frac{\delta T}{T}(\hat{n}') \right\rangle_{\hat{n} \cdot \hat{n}' = \cos \theta}, \quad (3.25)$$

Si sabemos los valores de $C(\theta)$ para todo ángulo θ , tendríamos una descripción estadística completa de las fluctuaciones sobre todo el cielo. En la práctica, sin embargo, esta información está disponible para un limitado rango de escalas. Usando la expansión $\delta T/T$ en armónicos esféricos de la Ecuación (3.3), la función de correlación puede ser escrita en la forma [5]:

$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos\theta). \quad (3.26)$$

donde P_l son los polinomios de Legendre y

$$C_l = \langle |a_l^m|^2 \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_m |a_l^m|^2. \quad (3.27)$$

De esta forma, la función de correlación puede ser fragmentada en sus múltiples componentes C_l . El monopolo $l=0$ se desvanece si la temperatura promedio ha sido definida correctamente. El término dipolar $l=1$ refleja el movimiento de la Tierra através del espacio [17]. Los momentos $l \geq 2$ son los de interés para esta tesis, ya que representan las fluctuaciones presentes en el momento de última dispersión.

El espectro de potencia (*power spectrum*) en las fluctuaciones de temperatura del CMB es usualmente graficado como [17]:

$$\Delta_T^2 \equiv \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l \langle T \rangle^2 \quad (3.28)$$

en función del momento multipolar l ; las unidades de Δ_T^2 son μK^2 . La determinación más precisa de Δ_T^2 ha sido dada por el satélite Planck, esta se muestra en la Figura 3.3.

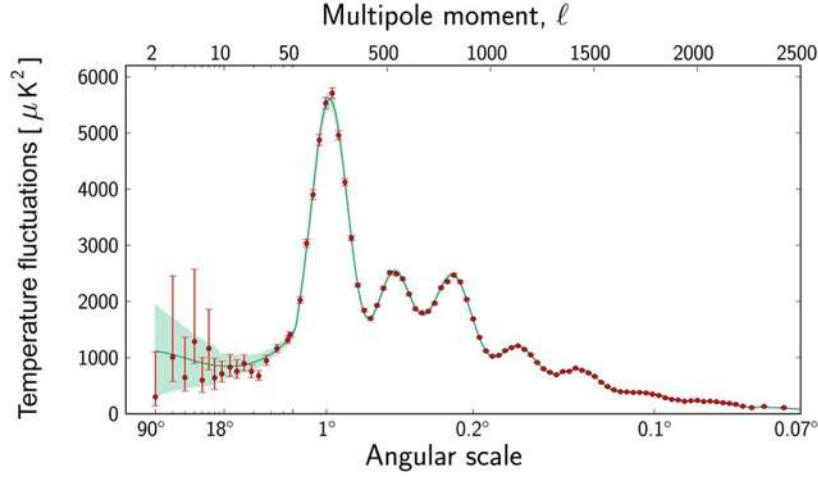


Figura 3.6: Espectro de potencia de las fluctuaciones de temperatura en el CMB observadas por el satélite Planck [7]. Los puntos rojos son las mediciones de Δ_T^2 definida en la Ecuación (3.3). La curva verde es el mejor ajuste a los datos obtenido por los parámetros que definen el «modelo estándar», llamado Λ -CDM (Lambda Cold Dark Matter), este es el modelo que mejor explica las observaciones en el CMB, la estructura a gran escala y la aceleración del Universo [11]. Diagrama tomado de: [19].

3.3.1 Causa de las fluctuaciones

En el tiempo de última dispersión, una escala importante es la distancia de Hubble $H(z_{ud}) \approx 0.2 \text{ Mpc}$. Un parche con este tamaño físico tendrá un tamaño angular visto desde la tierra de $\theta \approx 1^\circ$. El origen de las fluctuaciones es diferente para $\theta > \theta_H$ que $\theta < \theta_H$.

Fluctuaciones a gran escala $\theta > \theta_H$

Estas surgen por el efecto gravitacional de las fluctuaciones primordiales en la distribución de materia oscura no bariónica. Consideramos las densidades

$$\begin{aligned}\rho_{mo}(z_{ud}) &\approx 1.8 \times 10^{12} \text{ MeV} m^{-3}, \\ \rho_m(z_{ud}) &\approx 2.8 \times 10^{11} \text{ MeV} m^{-3}, \\ \rho_r(z_{ud}) &\approx 3.8 \times 10^{11} \text{ MeV} m^{-3},\end{aligned}$$

donde vemos que $\rho_{mo} > \rho_r > \rho_m$. Suponemos que ρ_{mo} varía con la posición:

$$\rho_{mo}(\vec{r}) = \overline{\rho_{mo}} + \delta\rho_{mo}(\vec{r}), \quad (3.29)$$

así, estas fluctuaciones primordiales de materia oscura provocaron fluctuaciones en el potencial:

$$\nabla^2(\delta\Phi) = 4\pi G\delta\rho. \quad (3.30)$$

Consideramos un fotón del CMB en un mínimo local del potencial en el momento de última dispersión. Subiendo este pozo, pierde energía y se corre al rojo. Contrariamente, un fotón en el máximo gana energía y tiene un corrimiento al azul. Los puntos azules en COBE corresponde a mínimos en $\delta\Phi$ y los rojos a máximos, produciendo el llamado efecto Sachs-Wolfe:

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{3}\delta\Phi. \quad (3.31)$$

Fluctuaciones a pequeña escala $\theta < \theta_H$

Los fotones, electrones y protones crearon un fluido fotón-barión, cuya densidad de energía es sólo un tercio de la materia oscura. Así, este fluido acoplado se mueve principalmente bajo la influencia gravitacional de la materia oscura, en lugar de su propia gravedad. El parámetro de estado w de este fluido es un intermedio entre $1/3$ (fotones únicamente) y $w = 0$ (bariones fríos).

Si este fluido se encuentra en un pozo de potencial de materia oscura, caerá a su centro y al ser comprimido por la gravedad, su presión comienza a subir, eventualmente, la presión es suficiente para causar que el fluido se expanda, la presión vuelve a caer y la gravedad lo contrae de nuevo. A este fenómeno se la llama oscilaciones acústicas.

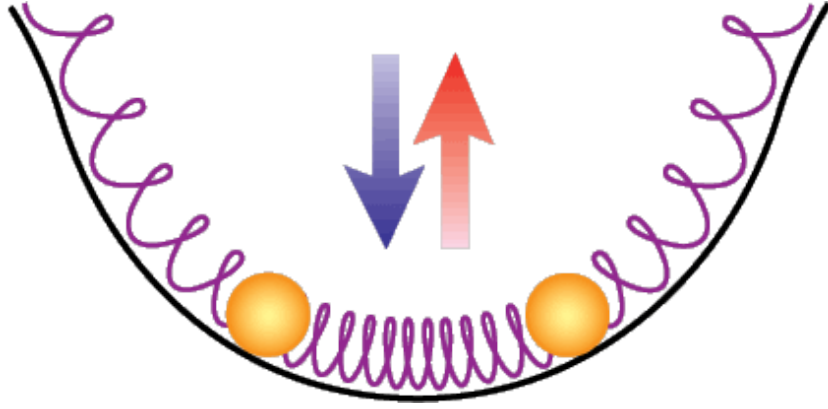


Figura 3.7: Oscilaciones acústicas debidas al juego entre la presión y el potencial gravitacional. Imagen: Wayne Hu (<http://background.uchicago.edu/~whu/beginners/sound.html>).

Si el fluido dentro de este potencial está a su máxima compresión en el momento del desacoplamiento, su densidad será más alta que el promedio y como $T \propto \rho^{1/4}$, los fotones liberados tendrán una temperatura mayor. Estos pozos de potencial tuvieron tamaño propio $\sim 1/H(z_{ud})$.

Capítulo 4

Modelo macroscópico

Hasta ahora, hemos abordado las reacciones microscópicas que dieron origen al fondo cósmico de microondas; pasaremos ahora a una versión macroscópica de acoplamiento materia-radiación, introduciendo brevemente la teoría cinética, que da origen a las ecuaciones de la hidrodinámica relativista, que permite estudiar la dinámica entre radiación y materia.

SECCIÓN 4.1

Las ecuaciones de la hidrodinámica relativista

A continuación se presentan las ecuaciones que describen la evolución de un fluido genérico relativista en su forma diferencial [3]:

$$\nabla_\mu J^\mu = 0, \quad (4.1)$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (4.2)$$

donde

$$J^\mu = mN^\mu = m \int p^\mu f \frac{d^3p}{p^0},$$

$$T^{\mu\nu} = \int p^\mu p^\nu f \frac{d^3p}{p^0},$$

son las componentes de los tensores de densidad de masa en reposo y energía momento, respectivamente. Estos son obtenidos al calcular el primer y segundo momento de la *función de distribución*. Así (4.1) alude a la conservación de la masa en reposo y (4.2) a la conservación de energía-momento.

SECCIÓN 4.2

Fluido acoplado a la radiación

Es necesario conocer el comportamiento de un *fluido de materia acoplado a la radiación*. Primero veremos las propiedades de un fluido compuesto solamente de fotones y más adelante presentaremos las ecuaciones que describen la evolución de un *multifluido* [3].

Fluido de radiación

Este fluido está compuesto de fotones y obedece la distribución estadística de Bose-Einstein, con densidad de energía:

$$\rho_R = (8\pi h_p) \frac{\nu^3}{\exp(h_p \nu / k_b T - 1)} \quad (4.3)$$

con la Ecuación (4.3) y sabiendo que la radiación de cuerpo negro obedece:

$$B(\nu, T) = \frac{1}{4\pi} \rho_R, \quad (4.4)$$

podemos obtener las siguientes relaciones:

$$\rho_R = a_R T^4, \quad (4.5)$$

$$p_R = \frac{1}{3} \rho_R, \quad (4.6)$$

siendo ρ_R la *densidad de energía de radiación térmica*, a_R la constante de radiación y p_R la presión de radiación térmica.

Entramos ahora a la discusión del acoplamiento materia-radiación. El intercambio de momento a través de las colisiones es tal que ambos fluidos tienen la misma cuadrivelocity [3], esto quiere decir que el tensor energía-momento será una combinación lineal de los tensores de cada especie de fluido separada. En nuestro caso:

$$T^{\mu\nu} = T_M^{\mu\nu} + T_R^{\mu\nu}, \quad (4.7)$$

denotando los subíndices M y R para materia y radiación, respectivamente. Además:

$$T_M^{\mu\nu} = \rho h u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (4.8)$$

$$T_R^{\mu\nu} = \int I_\nu N^\alpha N^\beta d\nu d\Omega, \quad (4.9)$$

son las componentes del tensor energía-momento de la materia y radiación, respectivamente. En el último, I_ν representa la intensidad específica y N^α es un 4-vector que define la dirección de propagación de los fotones.

En el marco de referencia comóvil del fluido, podemos usar al 4-vector N^α para expandir la intensidad I_ν en momentos del campo de radiación. Como resultado, los primeros términos corresponden a la densidad de energía ρ_R , el flujo F_R^α y el tensor tensión $P_R^{\alpha\beta}$ de radiación [3]:

$$\rho_R = \int I_\nu d\nu d\Omega, \quad (4.10)$$

$$F_R^\alpha = h_\beta^\alpha \int I_\nu N^\beta d\nu d\Omega, \quad (4.11)$$

$$P_R^{\alpha\beta} = \int I_\nu N^\alpha N^\beta d\nu d\Omega, \quad (4.12)$$

y el tensor energía-momento de radiación puede escribirse como:

$$T_R^{\mu\nu} = (\rho_R + p_R)u^\mu u^\nu + F_R^\mu u^\nu + u^\mu F_R^\nu + p_R g^{\mu\nu}. \quad (4.13)$$

Las ecuaciones que describen la dinámica de un fluido de materia acoplado a la radiación son

$$\nabla_\mu(\rho u^\mu) = 0, \quad (4.14)$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = G_R^\nu, \quad (4.15)$$

$$\nabla_\mu T_R^{\mu\nu} = -G_R^\nu, \quad (4.16)$$

que representan respectivamente la ecuación de continuidad y la conservación energía-momento. La última describe la evolución del campo de radiación, donde G_R^μ es la densidad de radiación, que depende de las interacciones físicas entre la materia y radiación:

$$G_R^\mu \equiv \int (\chi_\nu I_\nu - \eta_\nu) N^\nu d\nu d\Omega, \quad (4.17)$$

donde

$$\chi_\nu \equiv \chi_\nu^t + \chi_\nu^s, \quad (4.18)$$

$$\eta_\nu \equiv \eta_\nu^t + \eta_\nu^s, \quad (4.19)$$

son los coeficientes de opacidad y emisividad, cada uno con una contribución térmica y de dispersión. Introducimos la condición de acoplamiento. El campo de radiación es perfectamente isotrópico en el marco comóvil del fluido, entonces $p_R = \rho_R/3$ y el flujo de radiación es cero $F_R^\mu = 0$, que corresponde a un régimen ópticamente grueso.

En el momento del desacoplamiento en que los fotones viajan libremente, tenemos que $\xi_\nu = 0$, que implica $G_R^\mu = 0$, correspondiente a un medio ópticamente delgado.

SECCIÓN 4.3

Solución numérica de las ecuaciones

Utilizaremos un código que resuelve las ecuaciones de la hidrodinámica acoplada a la radiación: *CAFE-R* [20]. Hemos presentado las ecuaciones de la hidrodinámica relativista que modelan la evolución de un fluido de radiación. Mencionaremos brevemente el funcionamiento del código utilizado, iniciando con la escritura de las ecuaciones en la forma de balance de flujos:

$$\partial_0 \mathbf{U} + \partial_i \mathbf{F}^i = \mathbf{S}, \quad (4.20)$$

usando coordenadas cartesianas, donde $\mathbf{U}$ es el vector de las variables conservadas, las cuales son funciones de las variables primitivas: $\mathbf{p}^T = (\rho, \nu^i, P, E_r, F_r^i)$, $\mathbf{F}^i$ son los flujos y $\mathbf{S}$ las fuentes, que están dadas por:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} D \\ S^i \\ \tau \\ \tau_r \\ S_r^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho W \\ \rho h W^2 \nu^i \\ \rho h W^2 - P - \rho W \\ E_r \\ F_r^i \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{F}^i = \begin{bmatrix} \nu^i \mathbf{D} \\ S^j \nu^i + P \delta^{ij} \\ T \nu^i + P \nu^i \\ F_r^i \\ P_r^{ji} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_r^i \\ G_r^0 \\ -G_r^0 \\ -G_r^i \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

- Para la solución del sistema de ecuaciones, se utiliza el método de líneas con resoluciones uniformes en el espacio y el tiempo, relacionadas por $\Delta t = CFL \cdot$

$\min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, donde CFL es el factor de Courant-Friedrichs-Lewy.

- En la integración en el tiempo, se usa un integrador de segundo orden IMEX Runge-Kutta, en el que las variables hidrodinámicas son resueltas explícitamente, mientras las variables de radiación de forma implícita.
- La contribución espacial se construye mediante una discretización de volúmenes finitos; y los flujos numéricos en las interfaces espaciales de las celdas se calculan con la fórmula numérica de flujos HLLE.
- Existen dos métodos aproximados para resolver la ecuación de Boltzmann, que describen el medio ópticamente grueso y delgado. La primera es la aproximación de Eddington, donde se asume que el campo de radiación es isotrópico. El segundo es llamado la cerradura M1 que considera anisotropías en el campo de radiación, pues relaciona a un orden mayor en esta ecuación la materia y radiación.

SECCIÓN 4.4

Pruebas estándar del acoplamiento materia-radiación

Expondremos dos pruebas del código que ilustran la diferencia entre la cerradura de Eddington y la M1 en presencia de un obstáculo.

4.4.1 Sombra

La prueba consiste en la inyección por la izquierda de un fluido gas-radiación en un entorno ópticamente delgado que se encuentra con un obstáculo circular, hecho de un gas ópticamente grueso. Se resuelve en un dominio $[-1, 3] \times [-1, 1]$ en el plano $z = 0$, el cual cubrimos con 100×50 celdas.

Una captura de E_r en $t \sim 15$ se muestra en la Figura 4.1 para los dos modelos de cerradura.

- Para la aproximación de Eddington, la radiación se propaga de manera isotrópica, incluyendo la región detrás del obstáculo y no se forma ninguna sombra.

- La solución con la cerradura M1 corresponde a un campo de radiación propagándose de forma paralela a la dirección usada para la inyección en este medio ópticamente delgado produciendo una sombra.

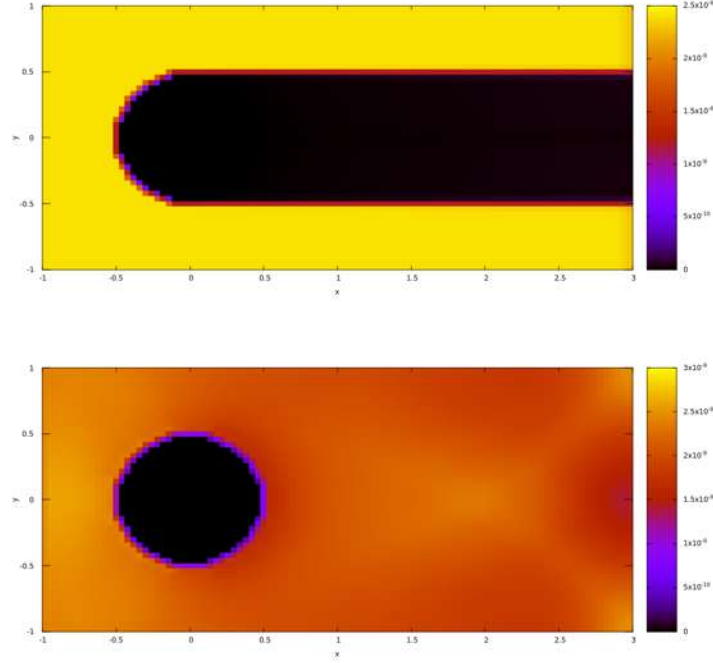


Figura 4.1: Captura de la densidad de energía E_r (erg/cm^3) en $t = 15$ para la cerradura de Eddington (arriba) y la M1 (abajo).

4.4.2 Doble sombra

Esta prueba muestra la capacidad de manejar escenarios con varias fuentes de luz. Se resuelve el problema en el dominio $x \in [-6, 3] \times y \in [-1.5, 1.5]$ con un obstáculo circular en el origen. En la Figura 4.2 se muestra la captura de la densidad de energía de radiación E_r .

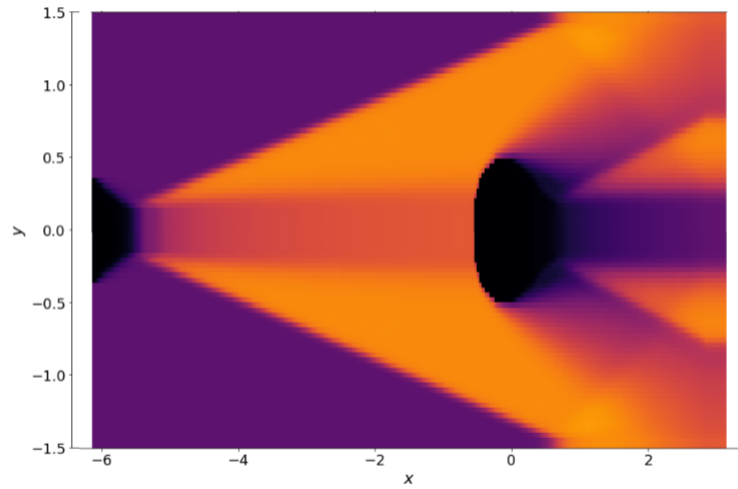


Figura 4.2: Captura de E_r en $t = 20$ para la prueba de doble sombra.

Los resultados mostrados en las figuras 4.1 y 4.2 muestran que el código funciona correctamente en pruebas estándar, cuyos detalles pueden encontrarse en [20].

Capítulo 5

Fluctuación durante el desacoplamiento

Utilizando el código CAFE-R [20] descrito y probado en la Sección 4.3, vamos a modelar diversas fluctuaciones de densidad y temperatura en el momento de última dispersión, esto con el fin de buscar alguna relación entre el contraste de estas variables. Ya que las anisotropías del CMB fueron las semillas para la formación galáctica [1], estudiar la evolución de dichas fluctuaciones aisladas puede ser de gran interés. Para lograrlo, utilizaremos condiciones iniciales en dichas variables similares a las del CMB.

Sabemos que la época del universo temprano en la que sucedió el desacoplamiento está acotada a un tiempo alrededor de 350,000 años. Esto se puede ver en la Figura 5.1. Recordamos el valor de z_{des} durante el desacoplamiento, obtenido en la Sección 3.2.2:

$$z_{des} \approx 1100. \tag{5.1}$$

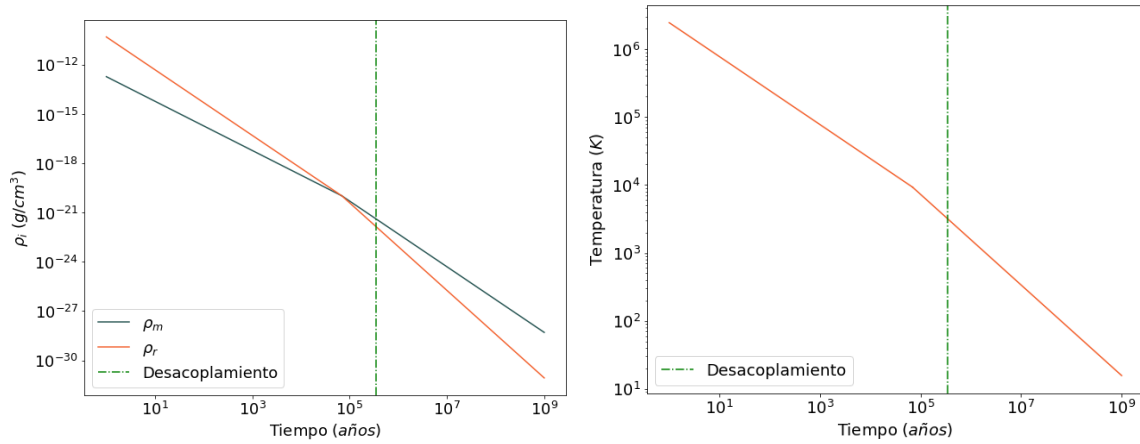


Figura 5.1: Evolución temporal de las densidades (izquierda) y temperatura (derecha). Se indica con una línea punteada el momento del desacoplamiento.

Esta ventana de tiempo pertenece a un universo dominado por la materia [5], de esta forma, hallamos el valor para la densidad mediante las ecuaciones (2.23), que cuantifican las densidades dado cualquier factor de escala a para un universo homogéneo e isotrópico dominado por la materia; y la ecuación (3.3), que encuentra la temperatura del universo para este mismo a . Utilizando la relación entre el corrimiento al rojo z y el factor de escala [2]:

$$1 + z = \frac{1}{a}, \quad (5.2)$$

podemos encontrar el valor de a y sustituirlo en (2.23) y (3.3). Así encontramos nuestras condiciones análogas al momento de última dispersión. Sustituyendo:

$$\rho_{m,des} \approx 1.334 \cdot 10^{-22} g/cm^3, \quad (5.3)$$

$$T_{des} \approx 3000K. \quad (5.4)$$

Estos serán los valores que se tomarán como base en nuestras simulaciones.

SECCIÓN 5.1**Condiciones iniciales**

Las simulaciones consisten en la evolución de fluctuaciones en la densidad y temperatura dado un medio ambiente. Las condiciones iniciales en el ambiente, denotadas con un subíndice a , serán aquellas en el momento del desacoplamiento, encontradas en la sección anterior. De esta manera fijamos:

$$\rho_a = 1.334 \cdot 10^{-22} g/cm^3, \quad (5.5)$$

$$T_a = 3000K, \quad (5.6)$$

que permanecerán constantes. Dado que las variaciones de densidad en el dominio estarán dadas por diferentes funciones especificadas en cada simulación, denotamos mediante el subíndice f el perfil que obedecen dichas fluctuaciones. La variación de temperatura y densidad inicial máxima está regido por:

$$\delta T/T \sim 10^{-5}, \quad (5.7)$$

$$\delta \rho_m / \rho_m \sim 10^{-5}. \quad (5.8)$$

Partimos de aquí porque las observaciones realizadas por el satélite *Planck* [7] registran anisotropías multipolares de $20\mu K$ (Sección 3.2.4) y queremos tener un contraste inicial de igual orden entre densidad y temperatura. Fijamos el índice adiabático del fluido en $\gamma = 1.4$. Las condiciones antes mencionadas son usadas en todas las pruebas.

SECCIÓN 5.2**Simulaciones en un dominio 2D**

Simularemos las pruebas siguientes en un dominio $[-1, 1] \times [-1, 1]$ en el plano $z = 0$, el cual cubrimos con 50×50 celdas. Este es usado porque se pueden explorar más simulaciones con distintos parámetros.

5.2.1 Fluctuación con un perfil gaussiano

El primer grupo de simulaciones poseen una fluctuación en la densidad ρ_f dada por:

$$\rho_f = \rho_a + A \exp \left[\frac{-(x^2 + y^2)}{\omega^2} \right], \quad (5.9)$$

donde A es un parámetro fijo que permite el contraste de densidad $\delta\rho_m/\rho \sim 10^{-5}$ mencionado en las condiciones iniciales. Este perfil permite explorar diversos tamaños físicos de las fluctuaciones al momento del desacoplamiento; ya que, al variar el parámetro ω , la anchura de la gaussiana cambia.

Condiciones de frontera de flujo saliente

Fijamos las condiciones de frontera para las siguientes simulaciones como *outflow* (flujo saliente). En estas, no existe información que viaje desde las fronteras hacia el dominio numérico y la dinámica está dominada sólo por la fluctuación.

Escogemos diferentes valores para ω , los cuales han sido listados con sus respectivas gráficas. Esto nos permite comparar la evolución para fluctuaciones con distintas distribuciones en nuestro dominio.

1) $\omega = 0.6$

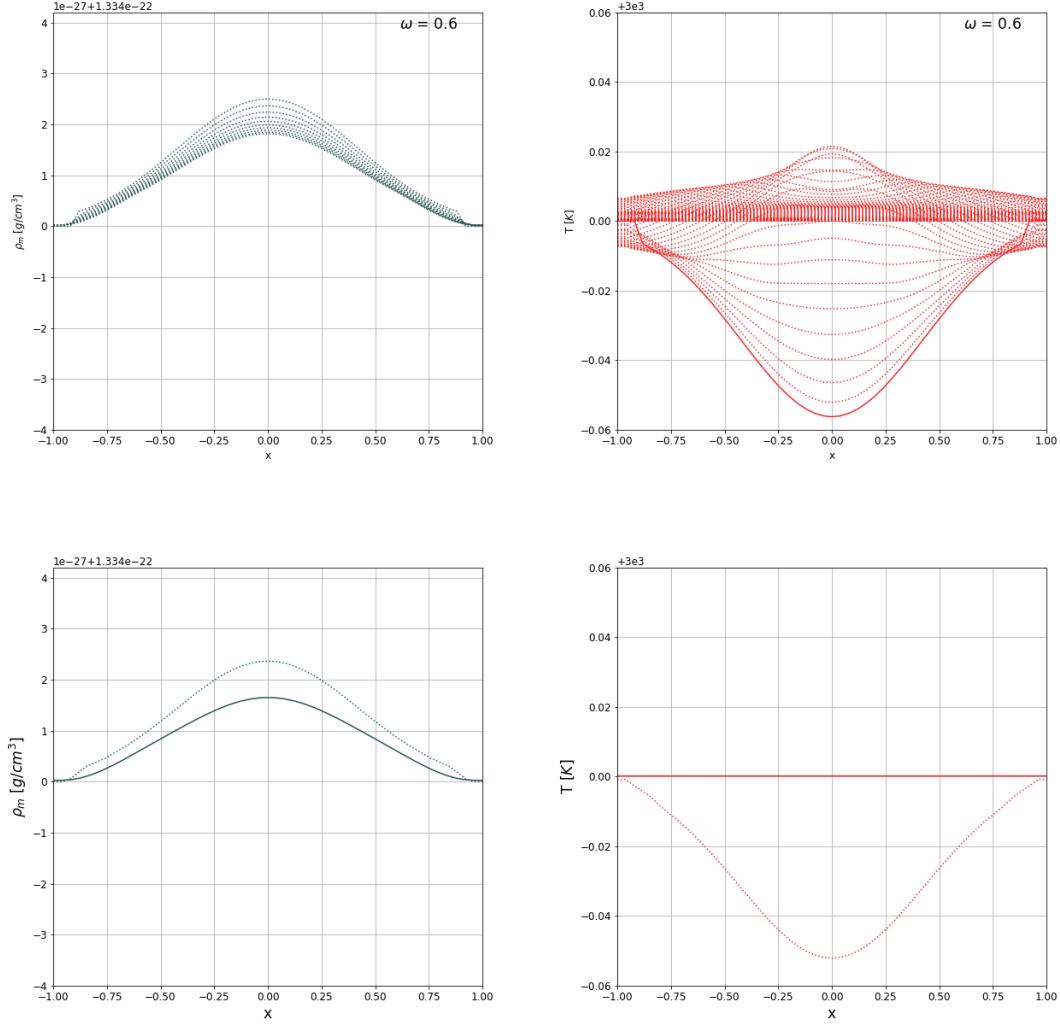


Figura 5.2: Las dos gráficas superiores muestran la evolución completa en la densidad (izquierda) y temperatura (derecha); mientras que en las inferiores sólo se grafican el valor inicial (línea punteada) y final (línea sólida) para $\omega = 0.6$.

2) $\omega = 0.22$

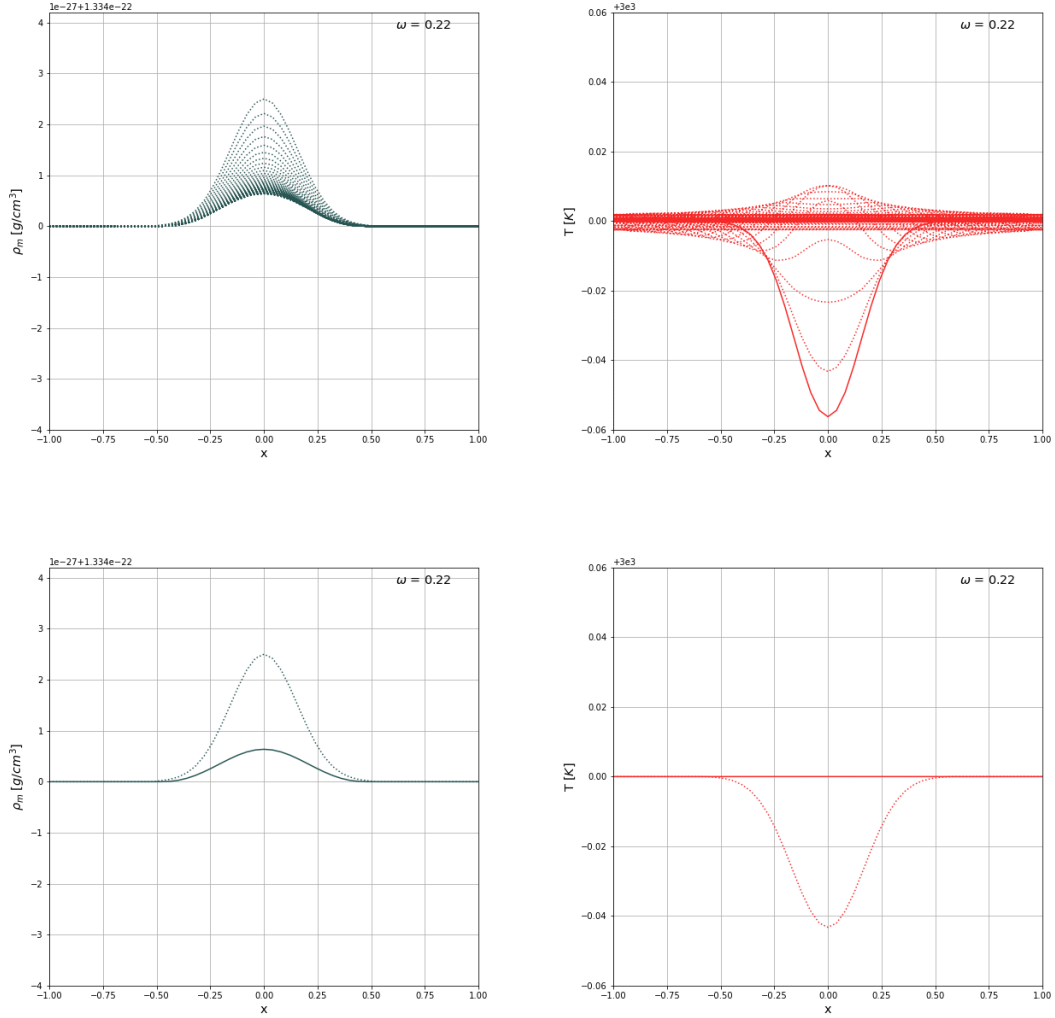


Figura 5.3: Las dos gráficas superiores muestran la evolución completa en la densidad (izquierda) y temperatura (derecha); mientras que en las inferiores sólo se grafican el valor inicial (línea punteada) y final (línea sólida) para $\omega = 0.22$.

3) $\omega = 0.09$

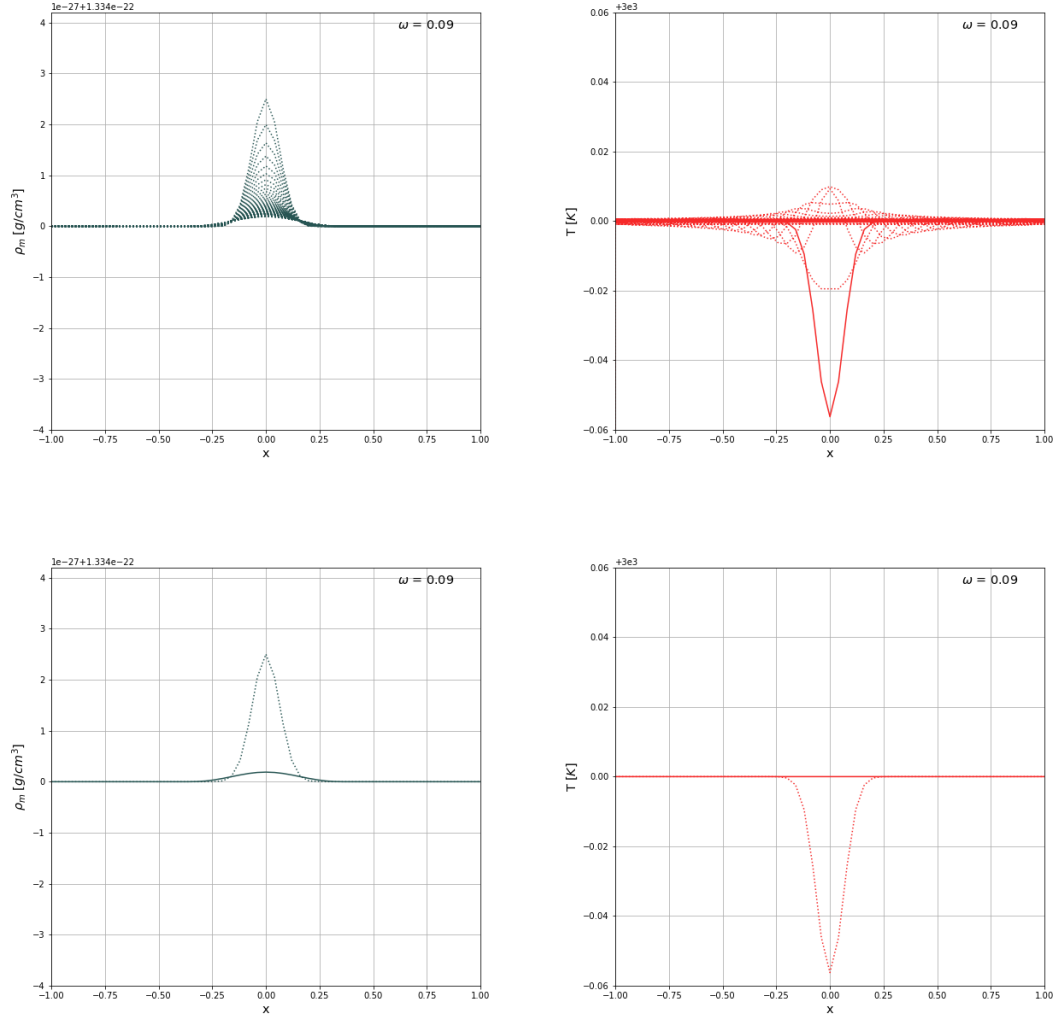


Figura 5.4: Las dos gráficas superiores muestran la evolución completa en la densidad (izquierda) y temperatura (derecha); mientras que en las inferiores sólo se grafican el valor inicial (línea punteada) y final (línea sólida) para $\omega = 0.09$.

4) $\omega = 0.02$

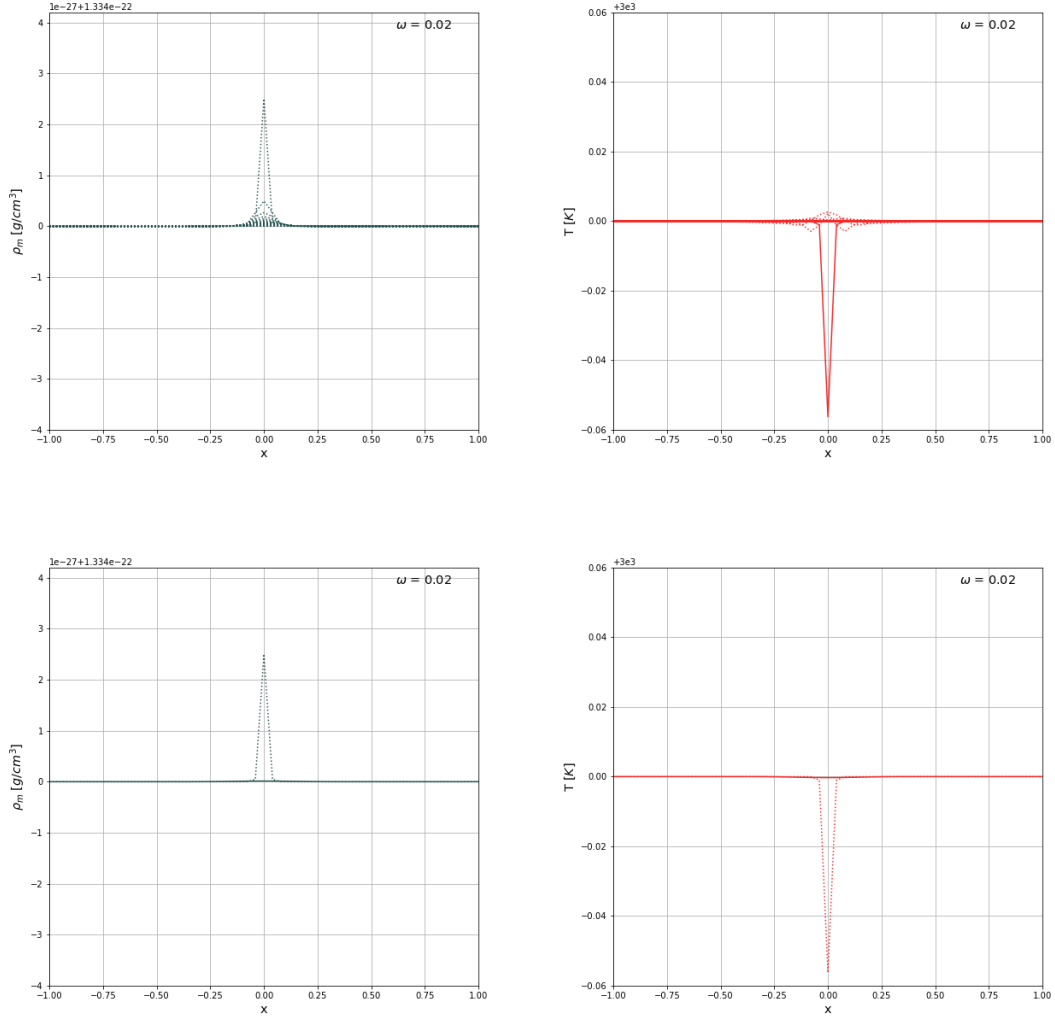


Figura 5.5: Las dos gráficas superiores muestran la evolución completa en la densidad (izquierda) y temperatura (derecha); mientras que en las inferiores sólo se grafican el valor inicial (línea punteada) y final (línea sólida) para $\omega = 0.02$.

Vemos que para $\omega = 0.6$, existe una ligera disminución en la densidad de materia Figura 5.2. Al hacer más pequeño el valor de ω , podemos apreciar que la reducción en la densidad aumenta. Esto se observa al comparar la Figura 5.3 con 5.5; en donde se está más cerca de una densidad constante. Este equilibrio se obtiene para $\omega = 0.02$ (Figura 5.5), en donde se evolucionó una fluctuación casi puntual.

Por la parte de la temperatura, en todos los casos se tiene un aumento hasta llegar a un valor máximo, para después establecerse en una cantidad constante. Sin embargo, el tiempo que tarda en llegar este equilibrio térmico es diferente para cada ω . Vemos que cuando la fluctuación está más extendida sobre el dominio (Figura 5.2), se necesita un tiempo mayor; mientras que para la perturbación puntual, este estado en un menor tiempo (Figura 5.5).

Los resultados de estas pruebas muestran una reducción en el contraste de densidad dependiente del parámetro ω . Esto nos dice que existe una relación entre el tamaño físico de una fluctuación y la evolución en su densidad. Por otra parte, podemos ver que en todas las simulaciones con condiciones de frontera de flujo saliente, el equilibrio térmico no se corresponde a una densidad constante, por tanto la variación entre materia y temperatura es distinta.

Condiciones de frontera periódicas

Ahora veremos la evolución del mismo perfil gaussiano pero con condiciones de frontera periódicas, en estas, cuando un elemento de fluido pasa a través de una cara de la celda, vuelve a aparecer en la cara opuesta con la misma velocidad; este comportamiento es útil al modelar una parte del universo que no está aislada y al ser homogéneo, se tiene un valor de densidad similar fuera de este volumen. Al igual que en las condiciones de flujo saliente, exploramos valores distintos de ω . Estos están enlistados con sus gráficas correspondientes.

1) $\omega = 0.6$

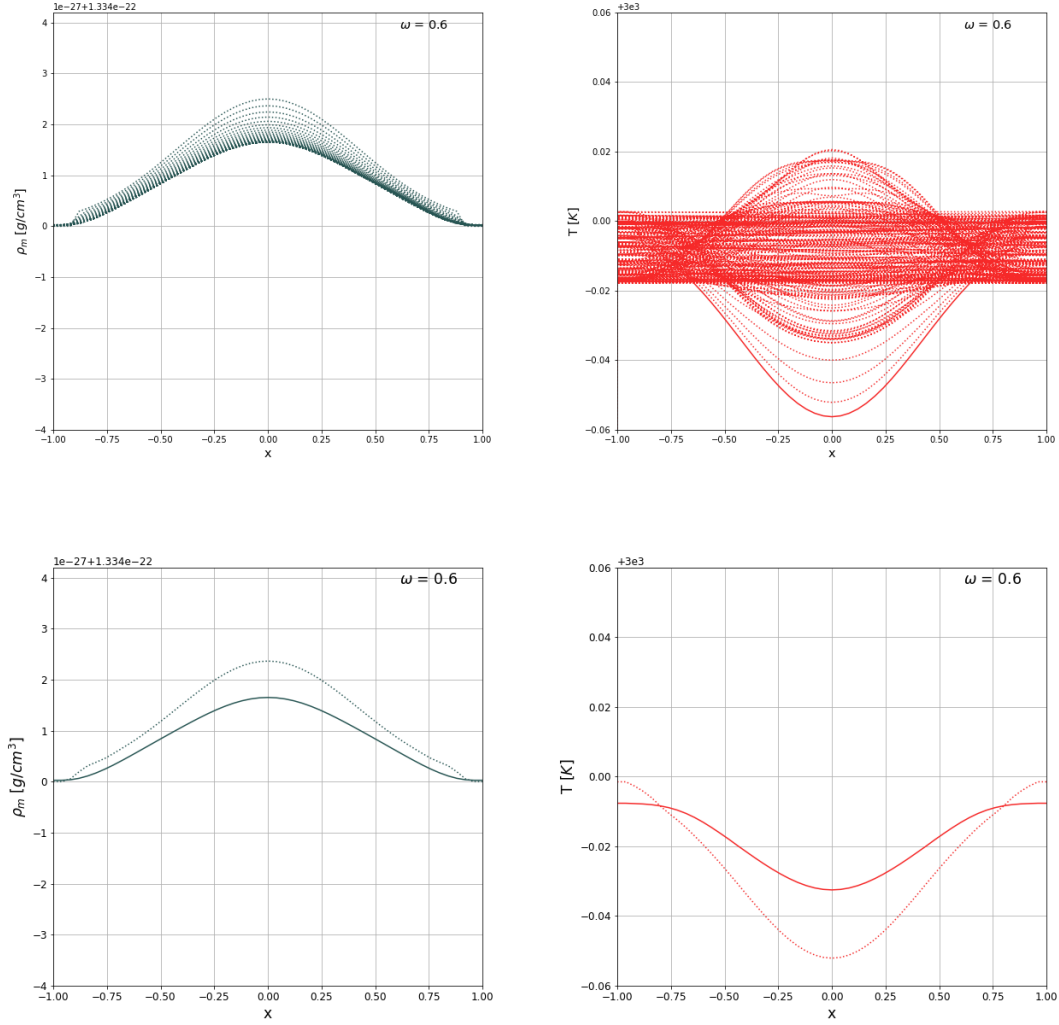


Figura 5.6: Las dos gráficas superiores muestran la evolución completa en la densidad (izquierda) y temperatura (derecha); mientras que en las inferiores sólo se grafican el valor inicial (línea punteada) y final (línea sólida) para $\omega = 0.6$.

2) $\omega = 0.22$

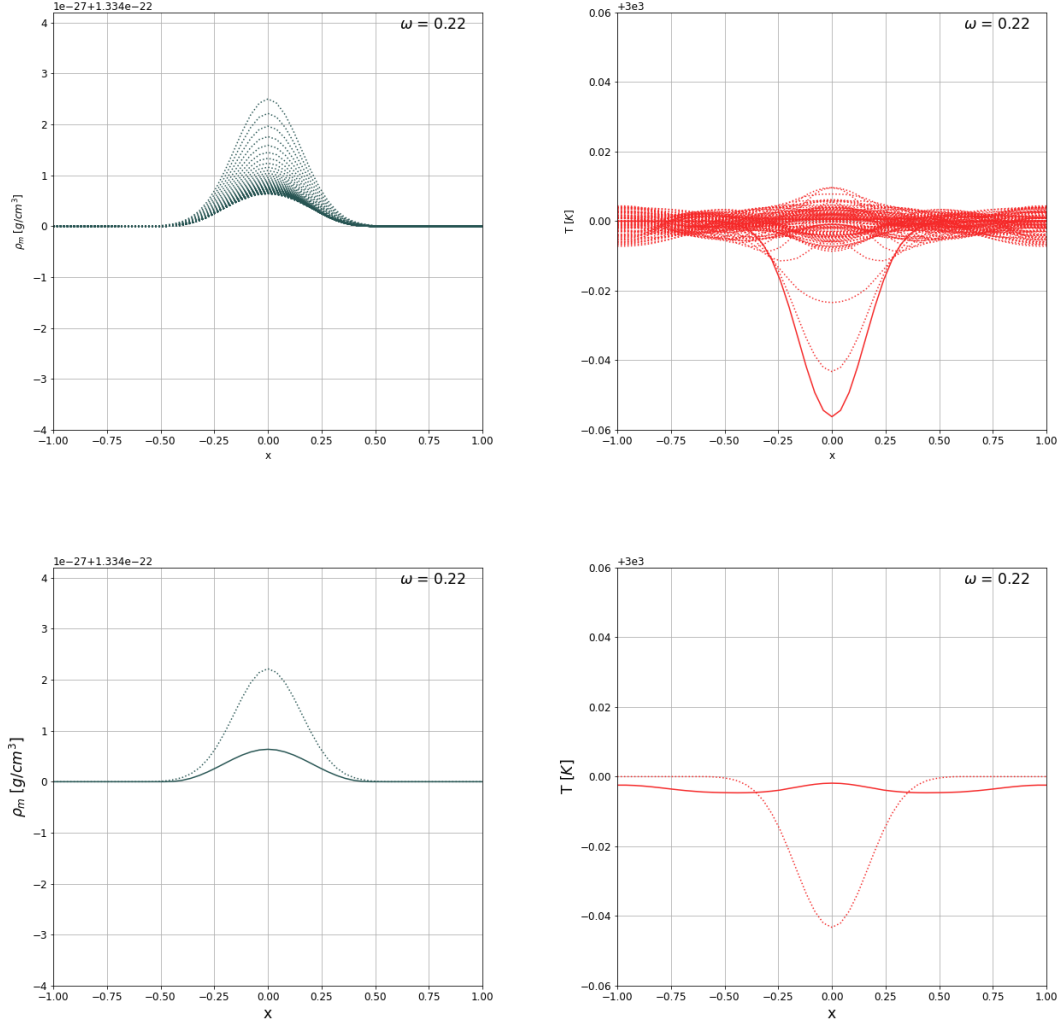


Figura 5.7: Las dos gráficas superiores muestran la evolución completa en la densidad (izquierda) y temperatura (derecha); mientras que en las inferiores sólo se grafican el valor inicial (línea punteada) y final (línea sólida) para $\omega = 0.22$.

La evolución muestra una disminución en la densidad relacionada con el tamaño de la fluctuación, al igual que en las pruebas con condiciones de frontera de flujo saliente. Sin embargo, vemos una diferencia en el comportamiento de la temperatura. En la Figura 5.6 para $\omega = 0.6$, observamos que esta se mantiene oscilando alrededor de un valor sin llegar nunca a establecerse. Un perfil similar se ve en la Figura 5.7, pero las oscilaciones poseen una amplitud más pequeña.

Los resultados de esta pruebas muestran que no se llega a un estado estacionario en la temperatura, esta sigue oscilando alrededor de $T \approx 3000K$ sin llegar a este valor. Mientras que en la densidad, seguimos viendo una reducción que no se empata con el ambiente.

SECCIÓN 5.3

Fluctuación con un perfil cosenoidal

En las dos simulaciones siguientes, la densidad de materia obedece una fluctuación dada por:

$$\rho_f = \rho_a + A \exp \left[\frac{-(x^2 + y^2)}{\omega^2} \right] \cdot \cos \left[20(\sqrt{x^2 + y^2}) \right]. \quad (5.10)$$

Esto nos permite modelar un estado inicial en el que se presentan fluctuaciones con densidad mayor en una región y menor en otra. Variamos la distribución del coseno mediante el parámetro ω , teniendo una perturbación cosenoidal más localizada y otra que se extiende sobre todo el dominio. Listamos los dos casos con sus respectivas gráficas. Para estas pruebas utilizamos condiciones de frontera periódicas.

1) $\omega = 0.6$

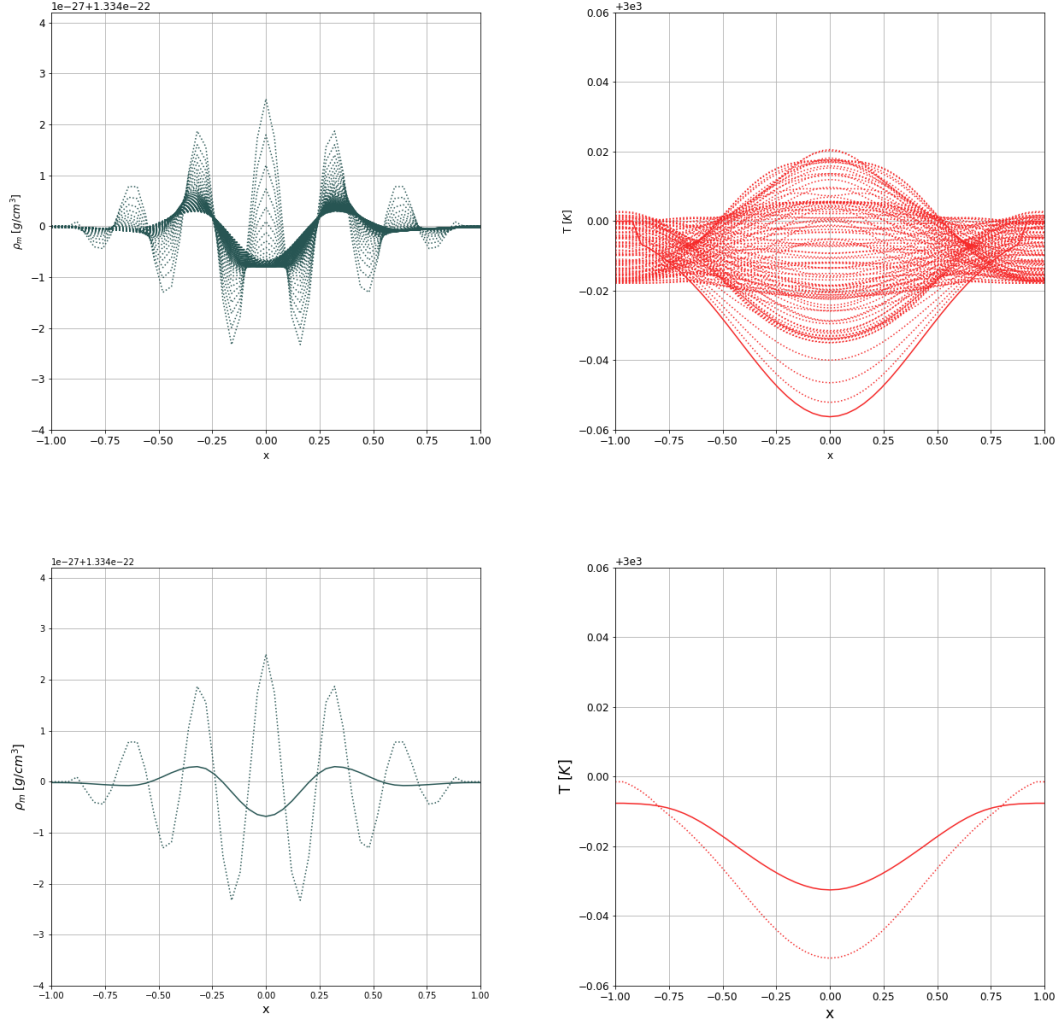


Figura 5.8: Las dos gráficas superiores muestran la evolución completa en la densidad (izquierda) y temperatura (derecha); mientras que en las inferiores sólo se grafican el valor inicial (línea punteada) y final (línea sólida) para $\omega = 0.6$.

2) $\omega = 0.22$

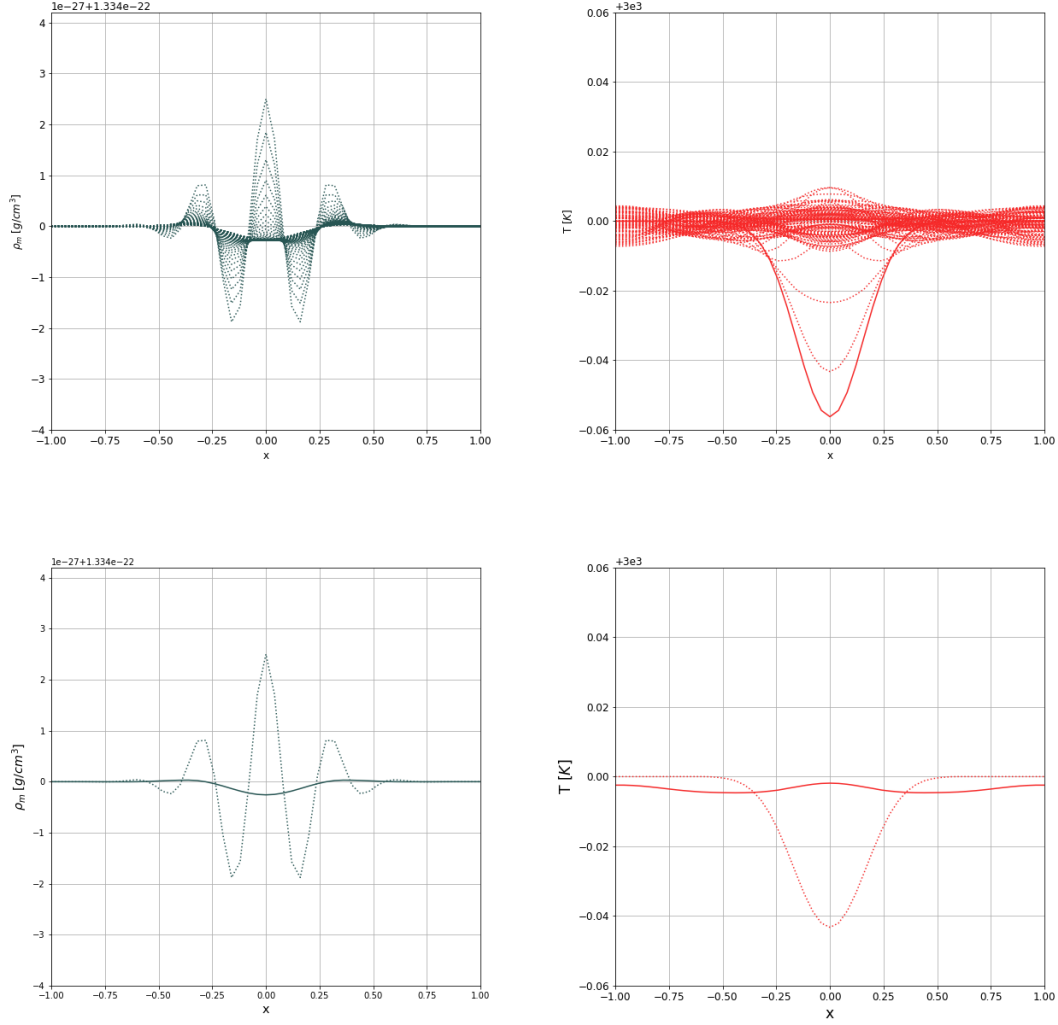


Figura 5.9: Las dos gráficas superiores muestran la evolución completa en la densidad (izquierda) y temperatura (derecha); mientras que en las inferiores sólo se grafican el valor inicial (línea punteada) y final (línea sólida) para $\omega = 0.22$.

Para una fluctuación coseinodal extendida por todo el dominio (Figura 5.9), vemos que el valor final para la densidad sigue presentando un perfil armónico, mientras que para la localizada (Figura 5.9) este se pierde y da paso a una fluctuación gaussiana de densidad más baja que el ambiente.

En ambos casos, la temperatura no muestra un contorno cosenoidal; sino que sigue presentando un comportamiento gaussiano dado por la anchura de ω . Esto deja ver que la variación en la densidad y temperatura son diferentes.

SECCIÓN 5.4

Simulaciones en un dominio 3D

Las simulaciones anteriores fueron hechas en un dominio bidimensional como prueba de concepto. Evolucionaremos ahora una fluctuación en un dominio tridimensional dado por $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$, cubierto por $50 \times 50 \times 50$ celdas y con un perfil de densidad gaussiano dado por:

$$\rho_f = \rho_a + A \exp \left[\frac{-(x^2 + y^2 + z^2)}{w^2} \right], \quad (5.11)$$

Condiciones de frontera de flujo saliente

La siguiente simulación se realizó con condiciones de frontera de flujo saliente. Fijaremos la anchura de esta fluctuación a $\omega = 0.22$.

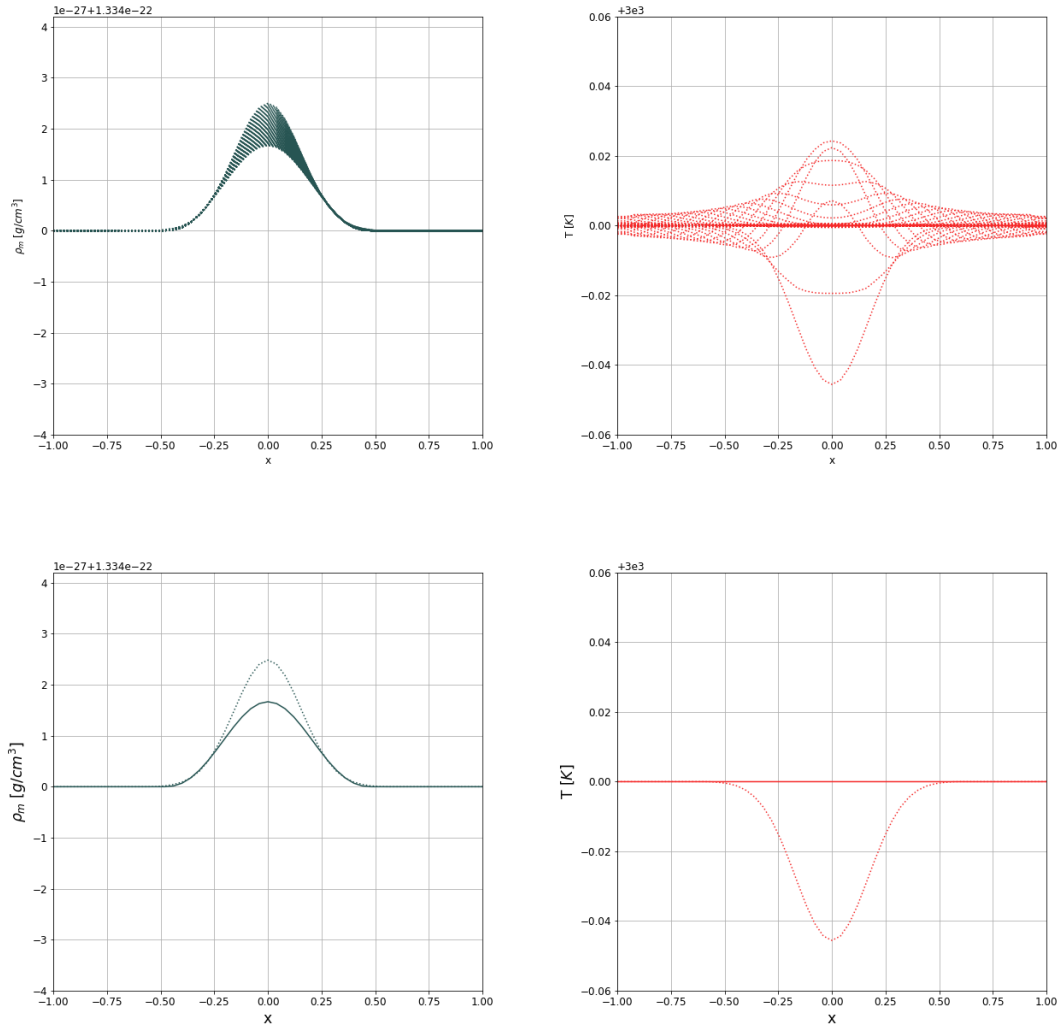


Figura 5.10: Las dos gráficas superiores muestran la evolución completa en la densidad (izquierda) y temperatura (derecha); mientras que en las inferiores sólo se grafican el valor inicial (línea punteada) y final (línea sólida) para $\omega = 0.22$.

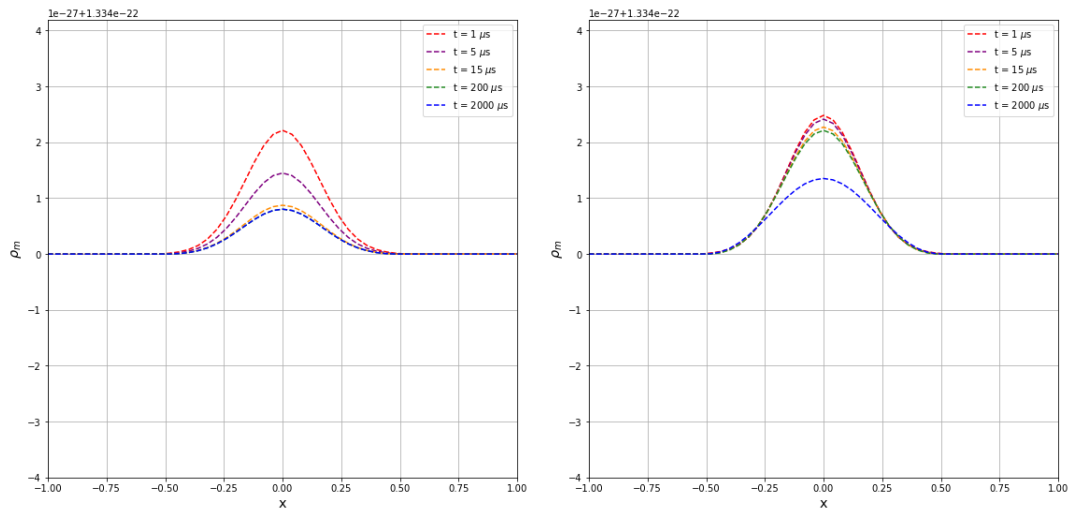


Figura 5.11: Se observa la evolución en la densidad para un dominio bidimensional (izquierda) y tridimensional (derecha).

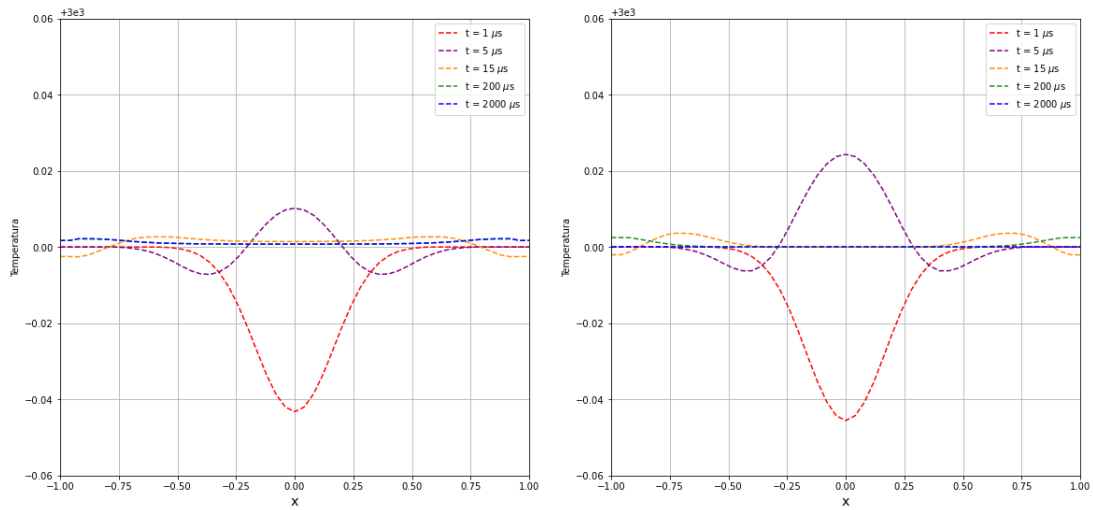


Figura 5.12: Mostramos la evolución en la temperatura para un dominio bidimensional (izquierda) y tridimensional (derecha).

Podemos apreciar en la Figura 5.10 una reducción menor en la densidad al mismo tiempo final que para la prueba realizada en 2D (Figura 5.3). Lo que haremos a continuación es evolucionar la fluctuación durante más tiempo, esto para que la densidad pueda seguir decayendo hasta llegar a un estado estacionario. Comparamos la evolución para ambos dominios en las figuras 5.11 y 5.12.

Observamos un comportamiento similar a la simulación hecha en el dominio bidimensional. La diferencia radica en que la evolución ocurre mucho más lento, ya que en un tiempo $t = 15\mu s$, la densidad en el dominio 2D llegó a su máxima reducción, mientras que para el 3D apenas mostró cambio. Esto es debido a que la distribución de materia es diferente para un caso bidimensional. Ilustramos esto en la Figura 5.11, donde el tiempo es especificado en la leyenda superior derecha con el color de línea correspondiente.

Sin embargo, al comparar la evolución de la temperatura entre el dominio bidimensional con el tridimensional, vemos que el equilibrio llega prácticamente al mismo tiempo ($t \approx 15\mu s$). Esto se aprecia mejor en la Figura 5.12, se especifica el tiempo en la leyenda superior derecha.

Condiciones de frontera periódicas

Por último, veremos la evolución de esta fluctuación gaussiana dadas condiciones de frontera periódicas en un dominio tridimensional. Estas modelan mucho mejor el medio estudiado, ya que presentan un dominio no aislado, y al ser homogéneo se tiene un valor de densidad similar fuera del volumen estudiado. Exploramos diferentes valores de ω .

1) $\omega = 0.6$

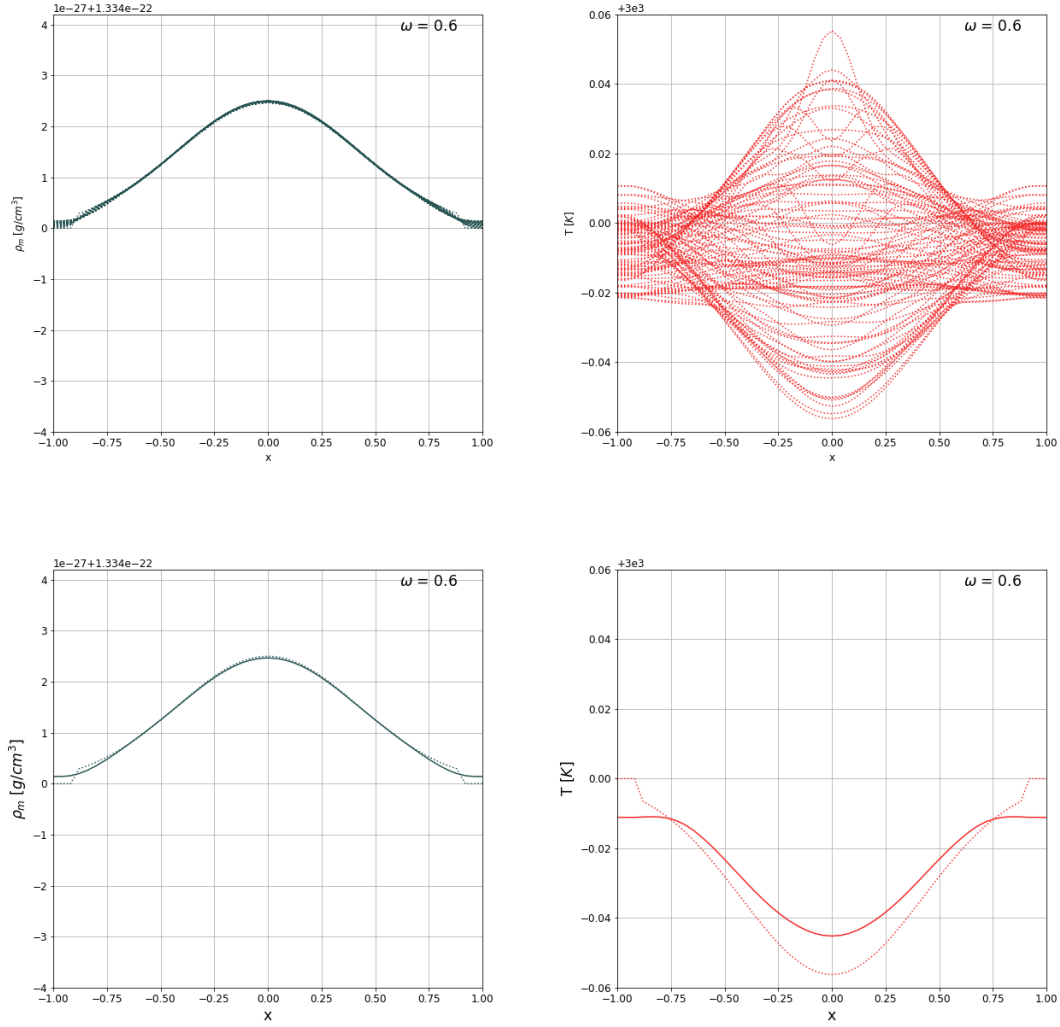


Figura 5.13: Las dos gráficas superiores muestran la evolución completa en la densidad (izquierda) y temperatura (derecha); mientras que en las inferiores sólo se grafican el valor inicial (línea punteada) y final (línea sólida) para $\omega = 0.6$.

2) $\omega = 0.09$

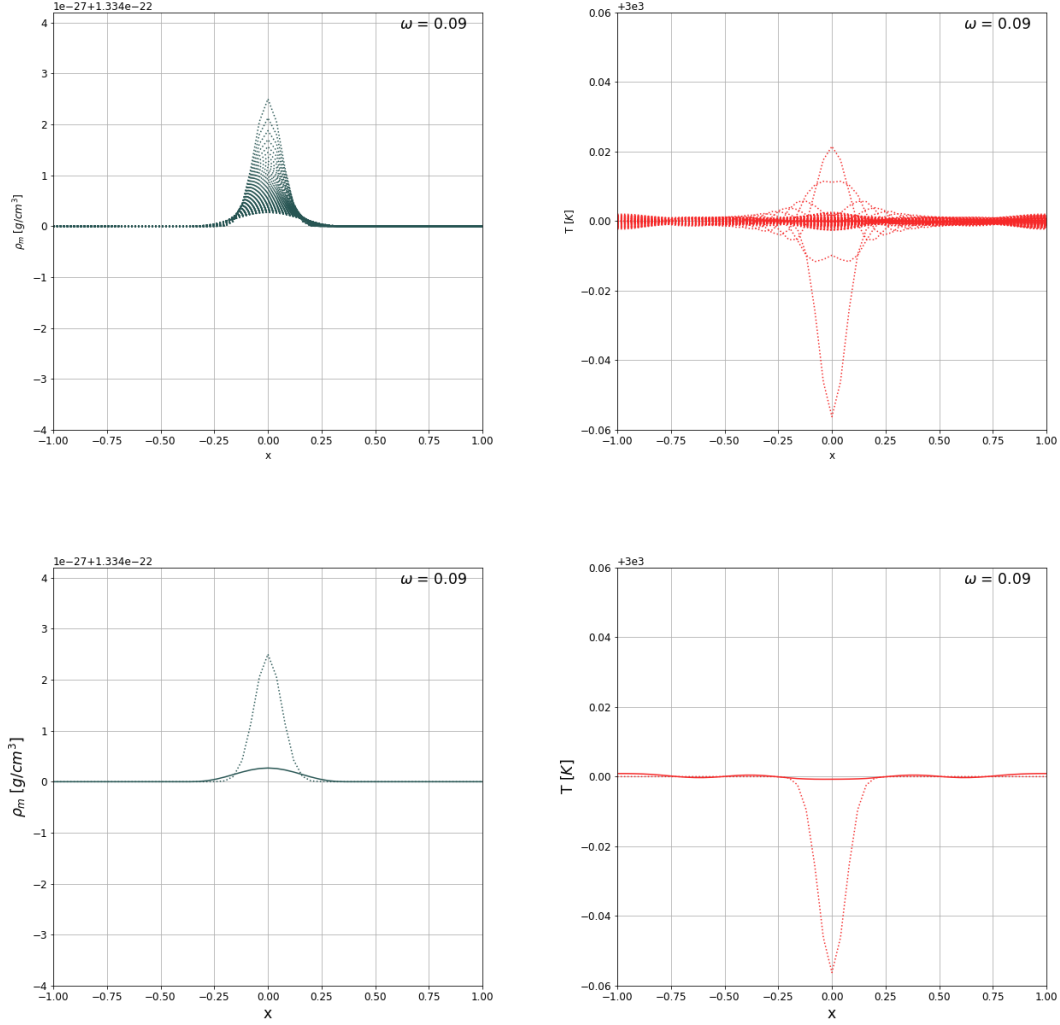


Figura 5.14: Las dos gráficas superiores muestran la evolución completa en la densidad (izquierda) y temperatura (derecha); mientras que en las inferiores sólo se grafican el valor inicial (línea punteada) y final (línea sólida) para $\omega = 0.09$.

3) $\omega = 0.02$

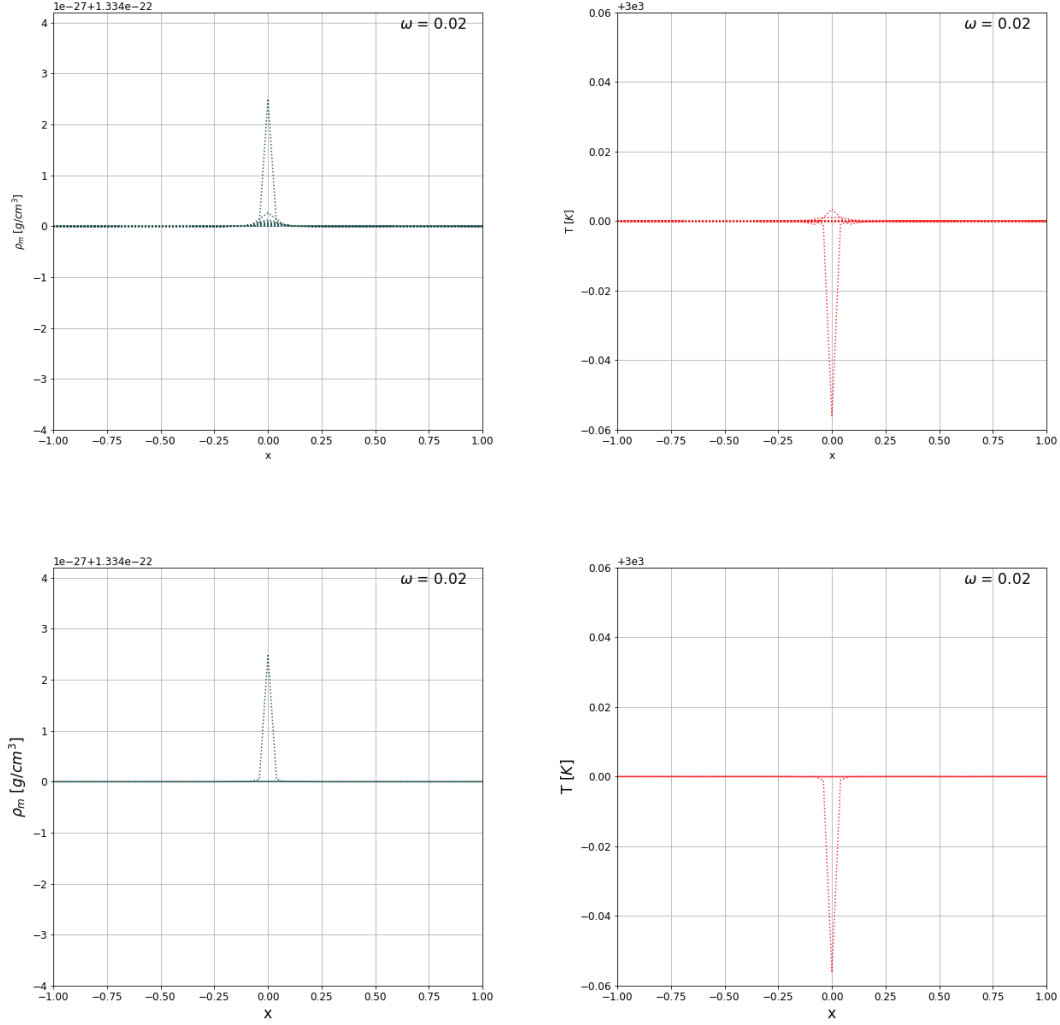


Figura 5.15: Las dos gráficas superiores muestran la evolución completa en la densidad (izquierda) y temperatura (derecha); mientras que en las inferiores sólo se grafican el valor inicial (línea punteada) y final (línea sólida) para $\omega = 0.02$.

Comparando la prueba hecha con condiciones periódicas para el dominio bidimensional en la Figura 5.6; en estas simulaciones 3D la temperatura tampoco llega a un equilibrio térmico con el ambiente, esto se ve en la Figura 5.13. Sin embargo, tenemos una reducción en la densidad de materia mucho menor a tiempos iguales.

Nos fijamos ahora en las gráficas mostradas en la Figura 5.14. Podemos ver una reducción mayor de la densidad, similar a la Figura 5.4. La temperatura sigue oscilando alrededor de $t = 3000K$ sin llegar a establecerse.

Por último, para $\omega = 0.02$ será necesario cambiar la escala en que se graficó; ya que aún existe una diferencia entre la densidad y temperatura, pero estas se convierten en fluctuaciones de órdenes menores. Hacemos esto en la Figura 5.16, donde vemos fluctuaciones armónicas en la temperatura y un perfil gaussiano suave en la densidad, a diferencia de su valor inicial casi puntual.

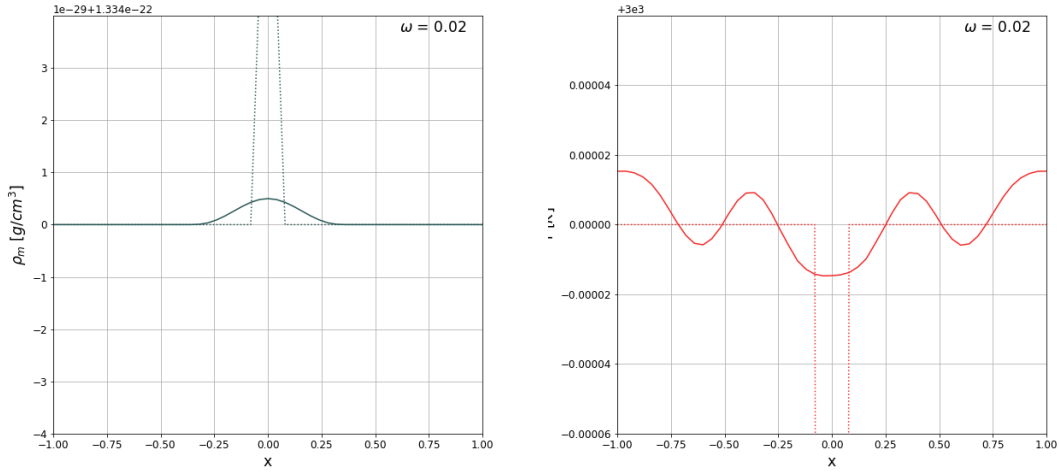


Figura 5.16: Acercamiento a la densidad (izquierda) y temperatura (derecha) para $\omega = 0.02$. La línea punteada denota el valor inicial y la sólida el final.

Los resultados anteriores indican una clara diferencia entre el contraste de temperatura y densidad. Calculamos el cambio en ambas variables, denotando como ρ_i y T_i a la densidad y temperatura inicial máxima en la fluctuación, respectivamente. Mientras $\delta\rho$ y δT denotan la diferencia entre el valor inicial y final.

Haciendo esto cuantificamos el contraste entre temperatura y densidad. Los resultados se muestran en la Tabla 5.1, en donde además añadimos el radio ω/ρ_i para ilustrar el

ω	ω/ρ_i	$\delta\rho/\rho_i$	$\delta T/T_i$
0.6	0.449766	$8.845411 \cdot 10^{-7}$	$2.224464 \cdot 10^{-5}$
0.09	0.067465	$1.793227 \cdot 10^{-5}$	$1.822503 \cdot 10^{-5}$
0.02	0.0149922	$1.87258 \cdot 10^{-5}$	$1.873026 \cdot 10^{-5}$

Tabla 5.1: Contraste de densidad y temperatura para distintos valores de ω , realizado en el dominio 3D con condiciones de frontera periódicas.

tamaño de la fluctuación sobre el dominio.

Esto nos deja ver que para fluctuaciones puntuales ($\omega = 0.02$) existe una correspondencia en el contraste de densidad y temperatura; mientras que para fluctuaciones más extendidas ($\omega = 0.6$) se encuentra una disparidad.

SECCIÓN 5.5

Resultados

Todas las simulaciones que hemos presentado apuntan a una sencilla conclusión: al evolucionar fluctuaciones con condiciones iniciales similares al momento de desacoplamiento, se tienen disparidades entre la densidad y temperatura. Esto es, a pesar de que se influyen físicamente, el contraste entre sus estados iniciales y finales es distinto. Esto apunta a especulaciones sobre la formación de galaxias tempranas, ya que satélites como *Planck* miden anisotropías en la temperatura, y nuestros resultados muestran que se puede tener un contraste de densidad distinto al de temperatura.

Capítulo 6

Conclusiones

Usando simulaciones numéricas presentamos la evolución de fluctuaciones de materia acoplada a la radiación, con el propósito de simular la dinámica en condiciones similares a las de la superficie de última dispersión en el universo temprano. Para lograrlo, consideramos valores de densidad y temperatura de esta época y resolvimos las ecuaciones de la hidrodinámica relativista en un elemento de volumen comóvil que contiene la fluctuación materia-temperatura.

Los resultados encontrados indican que al considerar la interacción materia-radiación, el comportamiento de la fluctuación en la materia no condiciona al de la temperatura: se pueden tener contrastes de temperatura distintos a los de densidad.

Estos resultados son interesantes aunque no definitivos y se necesita estudiar escenarios más elaborados, que puedan modelar más precisamente la dinámica materia-radiación durante esta época. Esto incluiría la influencia de elementos de volumen externos al comóvil, el efecto de la expansión del universo, haciendo un escalamiento en las coordenadas de las ecuaciones $x^i \rightarrow ax^i$, donde a es el factor de escala; simular la evolución de dos o más fluctuaciones simultáneamente; y medir la profundidad óptica, lo cual proveería información importante acerca de cómo evoluciona la transparencia del Universo una vez que materia y radiación se desacoplan.

El hecho de que la presión de radiación no es suficiente para desvanecer la fluctuación de materia y la diferencia entre la evolución de temperatura y densidad, nos permite especular acerca de la relevancia del resultado, ya que se han observado galaxias formadas a un tiempo sorprendentemente temprano en la historia del universo por el telescopio espacial James Webb.

REFERENCIAS

- [1] Malcolm S Longair. *Galaxy formation*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [2] Andrew Liddle. *An introduction to modern cosmology*. John Wiley & Sons, 2015.
- [3] Luciano Rezzolla and Olindo Zanotti. *Relativistic hydrodynamics*. Oxford University Press, 2013.
- [4] Kelly Kizer Whitt. Oldest galaxy yet seen by webb telescope. <https://earthsky.org/space/oldest-galaxy-yet-seen-by-webb-telescope/>.
- [5] Barbara Ryden. *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press, 2017.
- [6] Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae. *Proceedings of the national academy of sciences*, 15(3):168–173, 1929.
- [7] Nabila Aghanim, Yashar Akrami, Mark Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, M Ballardini, AJ Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak, et al. Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, 2020.
- [8] Joshua A Frieman, Michael S Turner, and Dragan Huterer. Dark energy and the accelerating universe. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 46:385–432, 2008.
- [9] Saul Perlmutter, Michael S Turner, and Martin White. Constraining dark energy with type ia supernovae and large-scale structure. *Physical Review Letters*, 83(4):670, 1999.
- [10] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2022.
- [11] Scott Dodelson. *Modern cosmology*. Elsevier, 2003.
- [12] Alexander Friedman. Über die krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, 10(1):377–386, 1922.

-
- [13] Herbert B Callen. Thermodynamics and an introduction to thermostatistics 2nd edition, johnwiley & sons, 1985.
 - [14] AI Miller. The collected papers of albert einstein; volume 6 the berlin years: Writings 1914-1917, 1997.
 - [15] George Gamow. The origin of elements and the separation of galaxies. *Physical Review*, 74(4):505, 1948.
 - [16] Arno A Penzias and Robert Woodrow Wilson. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *The Astrophysical Journal*, 142:419–421, 1965.
 - [17] M. Pettini. Introduction to cosmology. <https://people.ast.cam.ac.uk/~pettini/Intro%20Cosmology>.
 - [18] DJ Fixsen, ES Cheng, JM Gales, John C Mather, RA Shafer, and EL Wright. The cosmic microwave background spectrum from the full coBE* firas data set. *The Astrophysical Journal*, 473(2):576, 1996.
 - [19] Anastasios Theodoropoulos and Leandros Perivolaropoulos. The hubble tension, the m crisis of late time $h(z)$ deformation models and the reconstruction of quintessence lagrangians. 09 2021.
 - [20] FJ Rivera-Paleo and FS Guzmán. Cafe-r: a code that solves the special relativistic radiation hydrodynamics equations. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 241(2):28, 2019.