



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
“ MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

**OPORTUNIDADES DE ARBITRAJE DESDE LA
PERSPECTIVA DE TEORÍAS DE NORMA**

TESIS

Que para obtener el grado de

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:

LUIS ALBERTO RAMOS LLANOS

ASESOR:

DR. ALFREDO RAYA MONTAÑO

Morelia, Michoacán, Agosto 2022

With a Little Help

from My Friends

Agradecimientos

Agradezco a la UMSNH y a la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas "Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez", por darme la oportunidad de estudiar, una de las cosas que más aprecio comprender en mi vida, la física y las matemáticas. A mis profesores por su conocimientos que me han sido dados, que sepan que a cada paso los trato de aplicar. En especial al Dr. Alfredo Raya Montaña por permitirme colaborar y apoyarme durante los temas tratados. Por su apoyo y confianza al final de la carrera. También al Dr. Joaquín Estevez Delgado y Dr. José Vega Cabrera, porque no solo fueron profesores, también amigos durante mis estudios, apoyándome a cada paso. A mis gatos que nunca me dejaron de acompañar en las noches de estudio, gris, negrito, Quimera y Bash, y la gorda que siempre nos cuida. A mis amigos de la facultad que hice durante todo este tiempo, aún de muchos ya no se nada. Si algún día lo leen, sabrán que conservó su amistad. En especial a aquellos con los que compartía tiempo entre clases en las bancas fuera del IFM. Un agradecimiento muy especial a Jennifer López Chacon por regresarme por el camino de la ciencia y de la economía. Por su cariño y apoyo. Agradezco a mis padres que gracias a su infinito apoyo y paciencia logró terminar mis estudios y escribir esta tesis. Todo es gracias a ustedes.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	VII
Abstract	IX
Introducción	XI
1. De Maxwell	1
1.1. Potencial vectorial y escalar	2
1.1.1. Norma de Coulomb	4
1.1.2. Norma de Lorentz	5
1.2. La transformación de Lorentz	7
1.3. Cuadrivector	10
1.4. Magnitudes electromagnéticas	12
1.5. La ecuación de continuidad	13
1.6. Potenciales en la norma de Lorentz	15
1.7. Leyes de transformación de los campos electromagnéticos	16

1.8. Electrodinámica covariante	16
2. De física a finanzas	23
2.1. Simetría	23
2.2. Simetría de norma	24
2.3. Espacio Interno	26
2.4. Conexiones	29
2.5. Cantidades invariantes de norma	30
2.6. Curvatura	34
2.7. Curvatura dinámica	36
2.8. Finanzas Matemáticamente	37
2.9. Dinámica de arbitraje	53
2.10. Dinámica del comercio	57
2.11. Dinámica de comerciantes y arbitraje	63
3. Cambio de Moneda 1D	67
3.1. Ejemplo 1	74
3.2. Ejemplo 2	80
3.3. Ejemplo 3	85
4. Conclusiones	93
Bibliografía	97

Resumen

La econofísica es un campo interdisciplinario con sus propios objetos de estudio, sus técnicas particulares de investigación y su propia comunidad científica. Una forma de ver los diferentes mercados financieros internacionales es mediante el concepto de electromagnetismo. Es este último enfoque el usado en el presente trabajo de investigación. En la presente tesis se propone analizar el arbitraje de divisas desde un enfoque físico mediante una analogía con la ley de la electrodinámica. Dentro de los resultados encontrados, se concluye que a partir de la teoría, se ofrecen modelos como los propuestos en este trabajo describen algunos aspectos del mercado.

Palabras clave: Mercados financieros, Teoría de norma, Econofísica, Ecuaciones de Maxwell, Arbitraje de divisas.

Abstract

Econophysics is an interdisciplinary field with its own objects of study, its particular research techniques and its own scientific community. One way of seeing the different international financial markets is through the concepts of electromagnetism. The latter is the approach that is used in the present research work. In this thesis it is proposed to analyze currency arbitrage from a physical approach through an analogy with the laws of electrodynamics. Among the results found, it is concluded that from theory, models such as those proposed in this work describe some aspects of the market.

Keywords: Financial markets, Gauge theory, Econophysics, Maxwell's equations, Currency arbitrage.

Introducción

Es sabido que a lo largo de la historia, los físicos han logrado pasar sus conocimientos a otros campos de la investigación científica. Esta combinación de conocimientos han ayudado a generar cambios de paradigma en la forma en que se lleva a cabo la investigación fuera en esas áreas [1]. La econofísica es un campo de estudio científico relativamente nuevo, que aplica teorías y métodos originalmente desarrollados en la física, con el fin de entender y resolver problemas en economía, especialmente, aquellos de comportamiento estocásticos y con dinámica no lineal. La econofísica es un campo interdisciplinario con sus propios objetos de estudio, sus técnicas particulares de investigación y su propia comunidad científica [2]. La econofísica surge durante los años 90's, teniendo como cuna el Instituto Santa Fe de Nuevo México. En dicha institución se realiza el estudio de sistemas complejos [1]. Uno de los principales exponentes de la econofísica es Brian Arthur, quien acuñó el término *economía adaptativa* para nombrar a los sistemas económicos formados por un gran número de agentes que realizan transacciones de tipo económico [3]. Existen diversos trabajos donde se toma como base el uso de sistemas complejos para la descripción de diferentes fenómenos económicos, utilizando métodos de análisis empíricos y herramientas teóricas que ayudan a describir sistemas compuestos por un gran número de subsistemas que interactúan entre sí [4]. Otra

forma de ver los diferentes mercados financieros internacionales es mediante el concepto de electromagnetismo [5]. Es este último enfoque el usado en el presente trabajo de investigación.

En el primer Capítulo de esta tesis introducimos la teoría física sobre la que se sustenta la analogía con el mercado de divisas. Para ello, se presentan las ecuaciones de Maxwell y sus simetrías, en particular las simetrías de Lorentz y de norma. Se hacen algunas observaciones y se desarrollan las herramientas necesarias para el análisis. En el Capítulo 2 se describe un contexto económico, además de hacer la descripción del mercado de divisas desde una perspectiva física. En el Capítulo 3 se propone modelos unidimensionales para describir el intercambio de dos monedas y estudiar la ganancia de estas operaciones bajo diferentes suposiciones del mercado. Finalmente, en el último Capítulo se presentan las conclusiones de esta investigación.

Capítulo 1

De Maxwell

La economía es un organismo vivo [6]. Como uno de sus representantes tiene a la moneda, la cual simboliza la evolución del trueque. Con el paso del tiempo, ha evolucionado y tomado más significado y también valor. A lo largo de esta tesis analizamos y explicamos cómo la física, en especial la electrodinámica, puede ayudar a comprender mejor algunos aspectos de la economía mundial. Las ecuaciones de Maxwell describen la dinámica de los campos eléctricos y magnéticos generados por cargas y corrientes. En forma diferencial, éstas se escriben como [7] [8] [9] [10]

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} && \text{Ley de Gauss} \\ \nabla \cdot B &= 0 && \text{Ley de Gauss para el campo magnético} \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \leftrightarrow \nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 && \text{Ley de Faraday} \\ \nabla \times B &= \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} && \text{Ley de Ampère}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Aquí E y B son, respectivamente, los campos eléctrico y magnético, ρ es la densidad de carga y J la densidad de corriente, que están relacionadas mediante la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0. \quad (1.2)$$

Además, ε_0 es la constante dieléctrica y μ_0 la permitividad del vacío. Las ecuaciones están descritas para 3+1 dimensiones que son tres espaciales y una temporal. Existe una versión reducida dimensionalmente a 1+1 dimensiones que nos será útil en este trabajo. Para realizar dicha reducción, tendremos primeramente que ver las ecuaciones desde un punto de vista tensorial.

Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo las transformaciones discretas de paridad, inversión temporal y conjugación de carga. Además, poseen una simetría de norma, la cual es pieza angular en la física moderna. Para entender dicha simetría, necesitamos introducir los potenciales electromagnéticos.

1.1. Potencial vectorial y escalar

Resolver directamente las seis ecuaciones de Maxwell (1.1) (3 para cada componente cartesiana de E y 3 para las de B) sólo se puede hacer en unos cuantos ejemplos. Es conveniente entonces introducir potenciales, para obtener un menor número de ecuaciones de segundo orden que satisfacen también ecuaciones de Maxwell. De los conceptos en electrostática y magnetostática se requieren un potencial escalar Φ y un potencial vector A .

Como $\nabla \cdot B = 0$, podemos definir B en términos de un potencial vector:

$$B = \nabla \times A. \quad (1.3)$$

Sustituimos la definición (1.3) en la ley de Faraday (1.1),

$$\begin{aligned}\nabla \times E + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times A) &= 0, \\ \Rightarrow \quad \nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) &= 0.\end{aligned}$$

De aquí definimos el potencial escalar

$$E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla\Phi, \quad (1.4)$$

o bien,

$$E = -\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (1.5)$$

Estos potenciales son importantes porque poseen una simetría de norma que da libertad a la hora de escogerlos.

Ahora consideremos la Ley de Gauss y usemo la ecuación (1.5) de la siguiente manera

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \nabla \cdot \left(-\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

de donde

$$-\nabla^2\Phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot A) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1.6)$$

Ahora, de la Ley de Ampere, usando las ecuaciones (1.3) y (1.5), tenemos

$$\nabla \times (\nabla \times A) - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \mu_0 J,$$

o bien, usando la identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$, reescribimos

$$-\nabla^2 A + \nabla \left(\nabla \cdot A + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \mu_0 J. \quad (1.7)$$

Hemos reducido el conjunto de las ecuaciones de Maxwell a solo cuatro. El desacoplamiento se puede lograr explotando la arbitrariedad involucrada en la definición de los potenciales.

Dado que B se define a través de (1.3) en términos de A , el potencial vector es arbitrario en la medida en que se puede sumar el gradiente de alguna función escalar Λ . Por lo tanto, B permanece sin cambios bajo la transformación

$$A \rightarrow A' = A + \nabla \Lambda. \quad (1.8)$$

Para que el campo eléctrico (1.5) no cambie, el potencial escalar debe transformarse simultáneamente como

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \quad (1.9)$$

Las ecuaciones (1.8) y (1.9) implican que que podemos elegir convenientemente a la función Λ para que las ecuaciones de Maxwell se puedan resolver de forma más simple. Esto es equivalente a imponer alguna restricción sobre Φ , A o ambos. Esta elección no es única, como veremos a continuación.

1.1.1. Norma de Coulomb

De la ecuación (1.6) vemos que si imponemos la restricción

$$\nabla \cdot A = 0, \quad (1.10)$$

el potencial escalar satisface la *ecuación de Poisson*,

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.11)$$

cuya solución se puede escribir como

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', t)}{|x - x'|} d^3x'. \quad (1.12)$$

El potencial escalar es simplemente el potencial de Coulomb instantáneo debido a la densidad de carga $\rho(x, t)$. Este es el origen del nombre norma de Coulomb [9] a la elección (1.10).

Para el potencial vectorial, con esta restricción tenemos que

$$-\nabla^2 A + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \mu_0 J - \nabla \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right), \quad (1.13)$$

o bien, descomponiendo la corriente en su parte longitudinal y transversal como

$$J = J_{\parallel} + J_{\perp}, \quad \nabla \times J_{\parallel} = 0, \quad \nabla \cdot J_{\perp} = 0,$$

escribiendo Φ como en la ecuación (1.12) y usando la ecuación de continuidad en el último término a la derecha en la ecuación (1.13) dentro de la integral, tenemos

$$-\nabla^2 A + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 J_{\perp}. \quad (1.14)$$

El lado izquierdo de esta expresión es un operador de onda, de donde identificamos la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas con la velocidad de la luz

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (1.15)$$

Veamos otra elección común para los potenciales.

1.1.2. Norma de Lorentz

Parafraseando “*Classical Electrodynamics*” Ref. [9], las transformaciones simultáneas (1.8) y (1.9) se denominan una transformación de norma, mientras la invariancia de los campos bajo dicha transformación se denomina invariancia de norma. Entonces, además de la norma de Coulomb, podemos elegir para los potenciales la restricción

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (1.16)$$

Esta relación (1.16) entre A y Φ se llama condición de Lorentz. Para ver que siempre se pueden encontrar potenciales que satisfagan la condición de Lorentz, supongamos que el potencial A, Φ que satisface (1.16). Entonces, hagamos una transformación de norma a los potenciales A', Φ' y exijamos que A', Φ' satisfagan la condición de Lorentz:

$$\nabla \cdot A' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 = \nabla \cdot A + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Lambda}{\partial t^2}. \quad (1.17)$$

Por lo tanto, siempre que se pueda encontrar una función de norma Λ para satisfacer

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Lambda}{\partial t^2} = - \left(\nabla \cdot A + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (1.18)$$

el nuevo par de potenciales A', Φ' satisfará la condición de Lorentz (1.16). Hay arbitrariedad en la elección, pues, evidentemente, la transformación de norma restringida,

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A + \nabla \Lambda, \\ \Phi &\rightarrow \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

donde

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0, \quad (1.20)$$

preserva la condición de Lorentz, siempre que A, Φ la satisfagan inicialmente. Se dice que todos los potenciales de esta clase restringida pertenecen al norma de Lorentz.

Ahora, continuamos al igual que con la elección de la norma de Coulomb, usando la constricción de norma de Lorentz para reducir las ecuaciones de Maxwell en términos de los potenciales. De

$$\nabla \cdot A + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad (1.21)$$

tenemos

$$\Rightarrow \nabla \cdot A = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (1.22)$$

que al reemplazar esta divergencia en las ecuaciones (1.6) y (1.7) nos resulta en

$$-\nabla^2 \Phi + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.23)$$

mientras que para el potencial vector A , tenemos

$$-\nabla^2 \cdot A + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \mu_0 J. \quad (1.24)$$

Es decir, en la norma de Lorentz, los potenciales Φ y A satisfacen ecuaciones de onda con fuentes. Por conveniencia en esta tesis trabajaremos en la norma de Lorentz, ya que su forma da una expresión más *amistosa* de poder usar.

1.2. La transformación de Lorentz

La relatividad especial apareció en un momento en que los científicos luchaban por comprender la ausencia de efectos de movimiento relativo de Galileo en experimentos de propagación de luz. La mayoría de las soluciones cuestionaron la validez de las ecuaciones de Maxwell o postularon propiedades especiales para el éter, el presunto medio donde se propagan las ondas de luz. Einstein resolvió los problemas conceptuales asociado con la electrodinámica de los cuerpos en movimiento al rechazar la validez universal de las leyes Newton y mantener la validez universal de las leyes de Maxwell. Su famoso artículo de 1905 [11] sobre el tema enmarca la solución utilizando dos postulados:

1. Las leyes de la física toman la misma forma en cada marco inercial.
2. La velocidad de la luz en el vacío es la misma en todos los marcos inerciales

El postulado 1 es una generalización del principio de relatividad de Galileo para incluir la leyes de electrodinámica de Maxwell [7]. Para poder hablar de valor siempre hay que hablar de perspectivas o de sistemas de referencia. Con la experiencia que se tiene en física, sabemos que se pueden hacer cambio, conversiones o transformación de una moneda o producto en distintas prepectivas o puntos de referencia. Para la relatividad especial, las leyes de transformación de coordenadas de Galileo no son compatibles con los postulados 1 y 2 recién mencionados. Es necesario introducir las transformaciones de Lorentz, que como veremos más adelante, no es al azar tomarlas también para el mercado financiero, ya que serán usadas para la relación que se tiene con el cambio de monedas.

Lorentz propuso y es aceptado que la diferente percepción del tiempo por diferentes observadores en marcos referencia inerciales no pueden ser las mismas. La transformación de Lorentz más general entre las coordenadas de dos marcos inerciales que en cierto instante de tiempo coinciden en sus respectivos orígenes de coordenadas y que están alineados espacialmente a lo largo de la dirección z , difiere de la transformación de configuración estándar (de Galileo). La relación entre las coordenadas de ambos observadores es

$$x' = x \quad y' = y \quad z' = \gamma(z + \beta ct) \quad ct' = \gamma(ct + \beta z), \quad (1.25)$$

donde $\beta = v/c$ y $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, siendo v la velocidad relativa entre los marcos inerciales.

Derivamos la transformación inversa de K' a K resolviendo las ecuaciones lineales en (1.25)

para las funciones $z(z', t')$ y $t(z', t')$. Por simetría, obtenemos la misma respuesta intercambiando las variables primadas y no primadas en (1.25) y dejando que $v \rightarrow -v$:

$$x = x' \quad y = y' \quad z = \gamma(z' + \beta ct') \quad ct = \gamma(ct' + \beta z'). \quad (1.26)$$

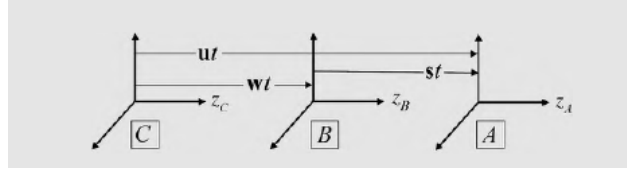


Figura 1.1: Movimiento a velocidad constante. Fuente: Zangwill,A,(2013) [7]

En el caso más general, la velocidad de impulso v no necesita estar a lo largo de uno de los ejes de coordenadas como lo hace en la configuración estándar de la Figura 1.1. Tampoco los ejes cartesianos del marco K' necesitan estar alineados con los ejes cartesianos del marco K . En este caso, para un impulso (sin rotación), descomponemos r en sus componentes $r_{\parallel}$ y $r_{\perp}$ que se encuentran paralelos y perpendiculares a la dirección del impulso. Usando estas variables, la transformación de Lorentz y su inversa toman la forma

$$\begin{aligned} r'_{\perp} &= r_{\perp}, & r_{\perp} &= r'_{\perp}, \\ r'_{\parallel} &= \gamma(r_{\parallel} - \beta ct), & r_{\parallel} &= \gamma(r'_{\parallel} + \beta ct'), \\ ct' &= \gamma(ct - \beta \cdot r_{\parallel}), & ct &= \gamma(ct' + \beta \cdot r'_{\parallel}). \end{aligned} \quad (1.27)$$

A continuación introducimos el concepto de cuadrivector para entender la esencia de las transformaciones de Lorentz y la estructura del espacio-tiempo.

1.3. Cuadrivector

En esta sección, presentamos el cuadrivector como el primer paso hacia un formalismo que hará que la covarianza de las ecuaciones de Maxwell bajo transformaciones de Lorentz sea evidente. Nuestro objetivo inmediato es la física que se puede aprender directamente de la manipulación de cuadrivectores individuales. Más adelante, explotaremos los cuadrivectores (y sus generalizaciones) para facilitar el hacer explícita la covarianza de las ecuaciones de Maxwell y agilizar los cálculos.

Sean $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$ tri-vectores en el espacio Euclidiano. El producto escalar de dos vectores tridimensionales,

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \quad (1.28)$$

es invariante bajo rotaciones de un sistema coordenado. En otras palabras, si K y K' son dos sistemas que coinciden en su origen pero sus ejes están totados, entonces

$$a \cdot b = a_k b_k = a'_k b'_k = a' \cdot b'. \quad (1.29)$$

Denotamos un cuadrivector en el espacio de Minkowski por

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4). \quad (1.30)$$

Para justificar llamar a (1.30) un *vector*, de manera similar requerimos que el producto escalar de dos cuadrivectores en dicho espacio,

$$a_\mu b_\mu = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4, \quad (1.31)$$

sea invariante bajo transformaciones de Lorentz de un marco inercial a otro,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_\mu b_\mu = a'_\mu \cdot b'_\mu = \vec{a}' \cdot \vec{b}'. \quad (1.32)$$

Un caso especial es la invariancia de la norma (al cuadrado) de un cuatrivector

$$a_\mu a_\mu = a'_\mu a'_\mu \equiv a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2. \quad (1.33)$$

El prototipo de un cuatrivector en relatividad especial es el de coordenadas de la posición espacio-temporal,

$$\vec{r} = (x, y, z, ict) = (r, ict). \quad (1.34)$$

El cuarto componente de (1.34) es un número imaginario puro. Esta elección asegura que (1.33) produzca el signo negativo apropiado en el producto escalar en el espacio de Minkowski con las convenciones del producto en espacio Euclideo. Es precisamente cuando demandamos la invariancia de estas cantidades lo que nos lleva a la transformación de Lorentz (1.25) y su inversa (1.26). Usando (1.34), las representaciones matriciales explícitas para estas transformaciones son

$$r'_\mu = \left[\frac{\partial r'_\mu}{\partial r_\nu} \right] r_\nu = L_{\mu\nu} r_\nu \quad \text{y} \quad r_\mu = \left[\frac{\partial r_\mu}{\partial r'_\nu} \right] r'_\nu = L_{\mu\nu}^{-1} r'_\nu. \quad (1.35)$$

Para el caso de un impulso a lo largo del eje z solamente, tenemos la transformación estándar

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}, \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -i\beta\gamma \\ 0 & 0 & i\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}. \quad (1.36)$$

Notemos que el determinante de estas matrices de transformación es uno

$$|L| = |L^{-1}| = 1. \quad (1.37)$$

Por definición, los componentes de un cuatrivector arbitrario $\vec{a}$ se transforman exactamente como $\vec{r}$. Por lo tanto, a_1, a_2 y a_3 a menudo se denominan componentes de espaciales

de $\vec{a}$, y a_4 se denomina componente temporal de $\vec{a}$. Más precisamente, $\vec{a}$ es un cuadrivector si entre dos sistemas de referencia inerciales se transforma como

$$a'_\mu = L_{\mu\nu} a_\nu. \quad (1.38)$$

Volviendo a (1.27), (1.38) es equivalente a las transformaciones

$$\begin{aligned} a'_\perp &= a_\perp, & a_\perp &= a'_\perp, \\ a'_\parallel &= \gamma(a_\parallel + i\beta a_4), & a_\parallel &= \gamma(a'_\parallel - i\beta a'_4), \\ a'_4 &= \gamma(a_4 - i\beta \cdot a_\parallel), & a_4 &= \gamma(a'_4 + i\beta \cdot a'_\parallel). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Para entender la naturaleza de estas transformaciones, es necesario conocer un poco más sobre la naturaleza de la luz, que son ondas electromagnéticas. A continuación veremos cómo se transforman los campos eléctricos y magnéticos así como sus fuentes (cargas y corrientes) vistos por dos observadores inerciales.

1.4. Magnitudes electromagnéticas

La relatividad especial explica por qué diferentes observadores inerciales interpretan el mismo fenómeno electromagnético de diferentes maneras. Las discusiones más elegantes de este tema explotan la formulación manifiestamente covariante del electromagnetismo [7][8][9]. En esta sección, ofrecemos un enfoque más prosaico que, aunque solo sea por contraste, hará que el poder, la elegancia y la economía del enfoque covariante sean aún más impresionantes. Nuestra primera tarea es descubrir cómo las derivadas con respecto al espacio y al tiempo se transforman bajo una transformación de Lorentz. Usando (1.27), la respuesta es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r'_{\parallel}} &= \frac{\partial r_{\parallel}}{\partial r'_{\parallel}} \cdot \frac{\partial}{\partial r_{\parallel}} + \frac{\partial r_{\perp}}{\partial r'_{\parallel}} \cdot \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} + \frac{\partial t}{\partial r'_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial r_{\parallel}} + \frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right), \\
\frac{\partial}{\partial r'_{\perp}} &= \frac{\partial}{\partial r_{\perp}}, \\
\frac{\partial}{\partial r'_{\perp}} &= \frac{\partial r_{\parallel}}{\partial t'} \cdot \frac{\partial}{\partial r_{\parallel}} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left(c\beta \cdot \frac{\partial}{\partial r_{\parallel}} + \frac{\partial}{\partial t} \right).
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Como $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}$, la comparación de (1.40) con (1.39) muestra que estamos listos para definir el cuadvivector de derivadas

$$\vec{\nabla} = \left(\nabla, \frac{\partial}{\partial(ict)} \right). \tag{1.41}$$

La longitud invariante asociada con (1.41) es el operador D' Alambertiano que aparece en la ecuación de onda

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{1.42}$$

El cuadvivector (1.41) y el operador de onda (1.42) son fundamentales para la discusión de ondas electromagnéticas.

1.5. La ecuación de continuidad

En los procesos físicos, existen cantidades que se conservan en los sistemas en estudio. Un ejemplo es la conservación de la carga eléctrica en los fenómenos electromagnéticos, que representamos usando la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{1.43}$$

Como $\nabla \cdot J$ es el producto escalar de dos tri-vectores y tanto el gradiente como la derivada temporal son componentes del cuadvivector de derivadas (1.41), es natural preguntarse si

(1.43) es el producto escalar (1.32) de dos cuadvectores. De hecho, si adivinamos

$$\vec{j} = (J, ic\rho), \quad (1.44)$$

la (1.43) asume la forma independiente de marco de referencia

$$\square \cdot \vec{j} = 0, \quad (1.45)$$

donde $\square \cdot$ representa la divergencia en cuatro dimensiones. Para confirmar que (1.44) es un cuadvector, consideremos un elemento de carga eléctrica $dq' = \rho' dx' dy' dz'$ en reposo en el marco inercial K' de la Figura 1.1. Cuando se ve desde el marco K , la carga es $dq = \rho dx dy dz$ y $dz = dz'/\gamma$ porque el elemento de volumen se contrae como

$$L = \Delta z = \frac{1}{\gamma} \Delta z' = L' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < L' \quad (1.46)$$

a lo largo de la dirección del movimiento. Por otro lado, la invariancia de la carga eléctrica requiere que $dq = dq'$. Para que esto sea así, la relación entre las densidades de carga observadas en K y K' debe ser $\rho = \gamma\rho'$:

$$dq = \rho dx dy dz = [\gamma\rho'] dx' dy' \left[\frac{dz'}{\gamma} \right] = \rho' dx' dy' dz' = dq'. \quad (1.47)$$

La *dilatación de la densidad de carga* implícita en (1.47) se sigue inmediatamente si (1.44) es de hecho un cuadvector con su ley de transformación:

$$j'_{\parallel} = \gamma(j_{\parallel} - \rho v), \quad j'_{\perp} = j_{\perp}, \quad \rho' = \gamma(\rho - v \cdot j/c^2). \quad (1.48)$$

De esta manera establecemos cómo se transforman las fuentes de campos eléctricos y magnéticos entre dos observadores inerciales.

1.6. Potenciales en la norma de Lorentz

La libertad de norma de la que disfrutaban el potencial escalar $\Phi(r, t)$ y el potencial vectorial $A(r, t)$ implica que estas cantidades no poseen propiedades de transformación intrínsecas cuando cambiamos los marcos inerciales. Sin embargo, adquieren propiedades de transformación bastante específicas si elegimos una restricción de norma que se conserva mediante una transformación de Lorentz. Usando (1.43) como modelo, la construcción de norma de Lorentz,

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad (1.49)$$

tiene esta propiedad si podemos definir los cuadvectores

$$\vec{A} = (A, i\Phi/c), \quad (1.50)$$

y usando (1.41) para escribir (1.49) como una cuadridivergencia invariante

$$\square \cdot \vec{A} = 0. \quad (1.51)$$

Para confirmar que (1.51) es de hecho un cuadvector, recordemos que los potenciales electromagnéticos en la norma Lorentz satisfacen las ecuaciones de onda no homogéneas

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{y} \quad \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] A = -\mu_0 J. \quad (1.52)$$

Con la inserción de un factor de i en ambos lados de la ecuación de potencial escalar, una representación de vector fila de ambas ecuaciones en (1.52) es

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] (A, i\Phi/c) = -\mu_0 (J, ic\rho). \quad (1.53)$$

La combinación de (1.53) con la invariancia de Lorentz del operador de onda (1.42) y el carácter de cuatro corrientes de (1.44) muestra que las propiedades de transformación en los

lados izquierdo y derecho de (1.53) no serán las mismas a menos que (1.50) sea de hecho, un cuadvivector.

1.7. Leyes de transformación de los campos electro-magnéticos

Los observadores en diferentes marcos inerciales pueden estar en desacuerdo sobre el origen de un fenómeno electromagnético dado porque los conceptos de campo eléctrico y campo magnético son intrínsecamente dependientes del observador. Esta conclusión, que resuelve de un golpe con la *asimetría* señalada por Einstein en el párrafo citado al comienzo de este Capítulo. No es sorprendente una vez que aceptamos el significado dependiente del observador de densidad de carga y densidad de corriente implícito en (1.48). De hecho, si $c = c_{\parallel} + c_{\perp}$ divide un trivector en componentes paralelas y perpendiculares a la velocidad $v = c\beta$ a la que un marco K' se mueve con respecto a un marco K (ver Figura 1.1), tenemos [8]:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad E'_{\perp} = \gamma(E + \beta \times cB)_{\perp}, \quad E_{\perp} = \gamma(E' - \beta \times cB')_{\perp}, \quad (1.54)$$

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel}, \quad cB'_{\perp} = \gamma(cB - \beta \times E)_{\perp}, \quad cB_{\perp} = \gamma(cB' + \beta \times E')_{\perp}. \quad (1.55)$$

Estas leyes de transformación se acomodan de una forma más simple y compacta si utilizamos el concepto de tensor, como discutimos a continuación.

1.8. Electrodinámica covariante

Observando las ecuaciones de Maxwell, podemos ver que se escriben como derivadas con respecto al tiempo y al espacio de los campos E y B . En el espacio tridimensional común,

el tiempo interviene en las ecuaciones como un escalar, pero las tres derivadas espaciales aparecen en ciertas combinaciones simétricas (divergencia o rotacional). Podríamos ver la Simetría de manera más directa escribiendo la ecuación de la divergencia (ley de Gauss) como

$$\sum_i \frac{\partial E_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (1.56)$$

y la ecuación del rotacional (es decir, la ley de Ampère) como

$$\frac{\partial B_j}{\partial x_i} - \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = \mu_0 J_k + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_k}{\partial t}. \quad (1.57)$$

Esta última ecuación representa realmente tres ecuaciones (las tres componentes de la ecuación vectorial del rotacional) donde i, j, k representan una permutación cíclica de x, y, z . En una transformación de Lorentz, se mezclan las coordenadas del espacio y del tiempo de modo que la transformación puede considerarse una rotación en el espacio $x_1 x_2 x_3 x_4$. Estos deberán reflejarse en las ecuaciones de Maxwell en una forma simétrica. Debemos proceder con cuidado, sin embargo, por que una cantidad vectorial en tres dimensiones no forma parte necesariamente de un vector en cuatro dimensiones.

Empezamos con la ecuación de continuidad (1.41):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0.$$

Como J_x, J_y, J_z nos son independientes de la densidad de carga ρ , si definimos el cuadri-vector densidad de corriente $\mathfrak{J}_\nu$ por sus componentes $\mathfrak{J}_1 = J_x, \mathfrak{J}_2 = J_y, \mathfrak{J}_3 = J_z, \mathfrak{J}_4 = ic\rho$, podemos escribir la ecuación de continuidad en forma covariante

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{J}_\nu}{\partial x_\nu} = 0, \quad (1.58)$$

donde se entiende que la sumatoria va desde $\nu = 1$ hasta $\nu = 4$; o, en forma equivalente,

$$\square \cdot \mathfrak{J} = 0. \quad (1.59)$$

Ahora el potencial vector A y el potencial escalar Φ satisfacen las ecuaciones de onda no homogéneas:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\mu_0 J, \\ \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Como J y ρ son los componentes de un cuadvivector, la ecuación (1.60) debe representar las cuatro componentes de una ecuación de cuadvivector y A y Φ deben combinarse también para formar un cuadvivector. Si definimos el cuadvipotencial o potencial universal $\mathfrak{U}_1 = A_1, \mathfrak{U}_2 = A_2, \mathfrak{U}_3 = A_3, \mathfrak{U}_4 = i\Phi/c$, entonces las ecuaciones (1.60) pueden escribirse como

$$\sum_{\nu} \frac{\partial^2 \mathfrak{U}_{\lambda}}{\partial x_{\nu}^2} = -\mu_0 \mathfrak{J}_{\lambda}. \quad (1.61)$$

También puede ser expresadas por

$$\square^2 \mathfrak{U} = -\mu_0 \mathfrak{J}_{\lambda}, \quad (1.62)$$

donde introducimos la notación simplificada $\square^2 \equiv \nabla^2 - (1/c^2)\partial^2/\partial t^2$, que representa al operador Laplaciano tetradimensional, o el operador de d' Alembert. La constricción para considerar la norma de Lorentz(1.21) toma forma

$$\sum_{\nu} \frac{\partial^2 \mathfrak{U}_{\lambda}}{\partial x_{\nu}^2} = 0, \quad (1.63)$$

o

$$\square \cdot \mathfrak{U} = 0. \quad (1.64)$$

Examinamos ahora las componentes del campo electromagnético. Éstas pueden obtenerse de las ecuaciones tridimensionales usuales

$$B = \nabla \times A, \quad (1.65)$$

$$E = -\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (1.66)$$

Pero A e $i\Phi/c$ forman un cuadvivector, de modo que la última ecuación puede escribirse (en sus componentes) como

$$i\frac{1}{c}E_1 = \frac{\partial \mathfrak{U}_1}{\partial x_4} - \frac{\partial \mathfrak{U}_4}{\partial x_1}, \dots \quad (1.67)$$

Por tanto, B e iE/c juntos forman el rotacional tetradimensional de $\mathfrak{U}$. La operación del rotacional aplicada a un vector produce realmente un tensor antisimétrico. Esto es evidente de la forma de la ecuación anterior, pues está claro que debe generarse una cantidad de dos índices. Definimos el tensor campo electromagnético F con la expresión

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathfrak{U}_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \mathfrak{U}_\mu}{\partial x_\nu}. \quad (1.68)$$

Aquí

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0,$$

$$F_{14} = -F_{41} = -iE_1/c,$$

$$F_{24} = -F_{42} = -iE_2/c,$$

$$F_{34} = -F_{43} = -iE_3/c,$$

$$F_{12} = -F_{21} = B_3,$$

$$F_{23} = -F_{32} = B_1,$$

$$F_{31} = -F_{13} = B_2.$$

En forma matricial [8],

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y/c \\ B_y & -B_z & 0 & -iE_z/c \\ -iE_x/c & -iE_y/c & -iE_z/c & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.69)$$

Las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas se escriben entonces en forma compacta como

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} F_{\mu\nu} = \mu_0 j_{\nu}. \quad (1.70)$$

Usando la convención de Einstein para la suma de índices repetidos, escribimos esta ecuación como

$$\partial^{\mu} F_{\mu\nu} = \mu_0 j_{\nu}, \quad (1.71)$$

con $\partial^{\mu} = \partial/\partial x_{\mu}$. Las ecuaciones de Maxwell homogéneas también se pueden escribir en términos de $F_{\mu\nu}$. Para ver esto, consideremos una expresión del tensor de Lorentz de tercer rango donde se relaciona una permutación cíclica de los índices (sin suma) con el siguiente:

$$\partial_{\lambda} F_{\mu\nu} + \partial_{\mu} F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} F_{\lambda\mu} = 0. \quad (1.72)$$

Como $F_{\mu\mu} = 0$ y $F_{\lambda\mu} = -F_{\mu\lambda}$ el lado izquierdo de la ecuación (1.72) es cero si dos índices cualesquiera son iguales. Sin embargo, haciendo $\lambda = 1, \mu = 2$ y $\nu = 3$ en la ecuación (1.72) se obtiene

$$0 = \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \nabla \cdot B. \quad (1.73)$$

De manera similar, haciendo $\lambda = 4, \mu = 2$ y $\nu = 2$ en la ecuación (1.72) se obtiene

$$0 = \partial_4 F_{12} + \partial_1 F_{24} + \partial_2 F_{41} = \frac{\partial B_z}{\partial(ict)} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{iE_y}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{iE_x}{c} \right) = -i \left[\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E \right]_z. \quad (1.74)$$

Las elecciones restantes para los índices en (1.72) generan los otros componentes cartesianos de la ley de Faraday.

La apariencia poco elegante de (1.72) brinda la oportunidad de señalar que (1.69) no es la única forma de incrustar E y B en un tensor de Lorentz de segundo orden. Esto es así porque las fórmulas de transformación de Lorentz (1.54) y (1.55) son invariantes a la transformación de dualidad $B \rightarrow -E/c$ y $E/c \rightarrow B$. Como resultado, la misma operación de simetría discreta aplicada a los elementos de $F_{\mu\nu}$ produce un tensor de Lorentz de segundo rango independiente que llamaremos $G_{\mu\nu}$. La matriz forma de este *tensor dual* es

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_z/c & E_y/c & -iB_x \\ E_z/c & 0 & -E_x/c & -iB_y \\ -E_y/c & E_x/c & 0 & -iB_z \\ iB_x & iB_y & iB_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.75)$$

Este tensor satisface

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0, \quad (1.76)$$

$$F_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = -4 \frac{E \cdot B}{c}. \quad (1.77)$$

En el siguiente Capítulo se presenta la relación existente entre la teoría de norma y el mercado financiero, así como la interacción entre los vendedores y los comparadores visto desde un punto de vista físico.

Capítulo 2

De física a finanzas

En este Capítulo estudiamos una relación existente entre los mercados financieros y la física. Para ello, tomamos como base el libro *“Physics from Finance: A gentle introduction to gauge theories, fundamental interactions and fiber bundles”* [5], el cual es un compilado de estudios previos de la relación entre las finanzas y la física. Dicho libro se sustenta en los trabajos presentados por Kirill Ilinski [12] [13], K. Young [14] y Juan Maldacena [15].

2.1. Simetría

Primero definamos qué es una simetría. Para ello, imaginemos dos amigos, un joven y una chica que juegan un juego de pelota como se ilustra en la Figura 2.1. Ella se para frente a él y sostiene una pelota perfectamente redonda en la mano. Él cierra los ojos mientras ella realiza una transformación a la pelota: La rota sin desplazarla. Él vuelve a abrir los ojos. Si ella gira la pelota mientras los ojos de él están cerrados, es imposible que determine si ella hizo algo o no. Por lo tanto, las rotaciones son simetrías de este juego de pelota. Pero si ella

desplaza la pelota a otro lugar, él lo notará de inmediato. Por lo tanto, las traslaciones no son simetrías del juego de pelota.



Figura 2.1: Representación de una simetría en un juego de pelota. Fuente: Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Ahora, si en lugar de una pelota ella sostiene un cubo, solo puede hacer rotaciones por ángulos muy especiales sin que él se de cuenta.

En general, todas las transformaciones que, en principio, cambian algo pero conducen a un resultado indistinguible son simetrías. Formulado de otra manera, una simetría nos lleva de un estado a otro diferente, que pasa a tener las mismas propiedades. Con esto en mente, hablemos de una importante simetría del mercado financiero. Esto nos lleva directamente a formular el concepto de espacio interno de un *modelo de juguete financiero*, i.e., una versión simplificada del mercado.

2.2. Simetría de norma

La observación clave que necesitamos es que *los precios no tienen ningún significado absoluto*. Podemos cambiarlos arbitrariamente, siempre que todos los precios se cambien por igual. Por ejemplo, imaginemos que un comerciante vende tres limones a 1€ cada uno y luego

utiliza este dinero para comprar seis fresas a 0.50€ cada una como se muestra en la Figura 2.2.

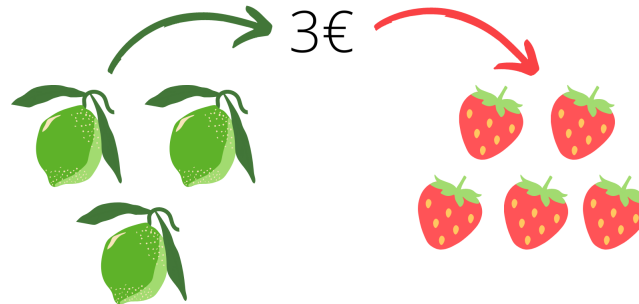


Figura 2.2: Cambio realizado de tres limones a 1€ cada uno para comprar seis fresas a 0.50€ cada una. Elaboración propia con base en Schwichtenberg, J. (2019) [5].

El resultado final de dicho proceso no cambia si por alguna razón, el gobierno decide imprimir lotes de billetes de euro de manera que el valor de cada uno se reduzca por un factor de diez. Así, aunque el comerciante obtiene 10€ por cada limón, luego debe pagar 5€ por fresa. De nuevo, nuestro comerciante comienza con tres limones y termina con seis fresas, como se muestra en la Figura 2.3.

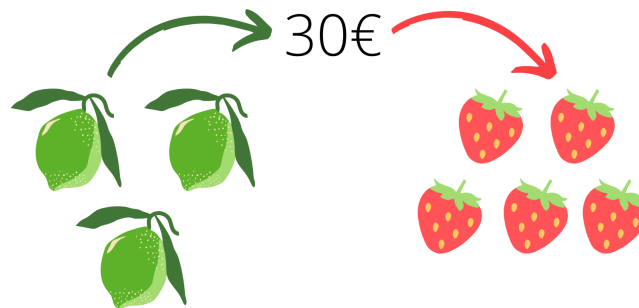


Figura 2.3: Cambio realizado de tres limones a 10€ cada uno para comprar seis fresas a 5€ cada una. Fuente: Elaboración propia con base en Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Este es el caso porque el dinero fiat no tiene un valor absoluto fijo. Por lo tanto, podemos cambiar la escala de una moneda determinada sin ningún *efecto físico*. Esto lo podemos apreciar en la Figura 2.4. Como mencionamos anteriormente, siempre que encontramos una transformación que deja un objeto dado sin cambios, llamamos a la transformación simetría. En este sentido, decimos que reescalar una determinada moneda es una simetría del mercado financiero.

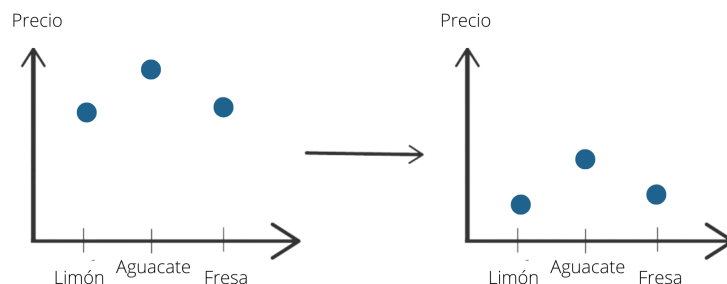


Figura 2.4: Representación gráfica del reescalamiento de precio de tres productos. Fuente: Elaboración propia con base en [5].

A primera vista, esto puede parecer un detalle trivial y sin importancia. Pero, como veremos a continuación, esta simetría es una herramienta sumamente útil cuando queremos describir matemáticamente el mercado financiero. Para ello, queremos entender qué relación tiene la simetría con el espacio interno del mercado financiero.

2.3. Espacio Interno

Ahora concentrémonos en un producto específico, como el cobre. Imaginemos que todos los precios posibles del cobre viven en un espacio interno que llamamos *espacio de dinero*. Cada punto corresponde a un precio específico, como se ilustra en la Figura 2.5.



Figura 2.5: Representación gráfica del *espacio del dinero*. Fuente: Schwichtenberg, J. (2019) [5].

No importa dónde estemos exactamente en el espacio de dinero, podemos mover el precio del cobre libremente. El precio puede ser cualquier número entre $0,0 \dots 01\text{€}$ e $\infty\text{€}$. Para tener en cuenta todas estas posibilidades simultáneamente, pensemos en una línea recta que representa geométricamente a nuestro espacio de dinero. Cada punto de esta línea corresponde a un precio específico del producto en la moneda (local), como se ilustra en la en la Figura 2.6. La simetría de nuestro sistema consiste en desplazamientos o traslaciones de un punto a otro sobre la recta.

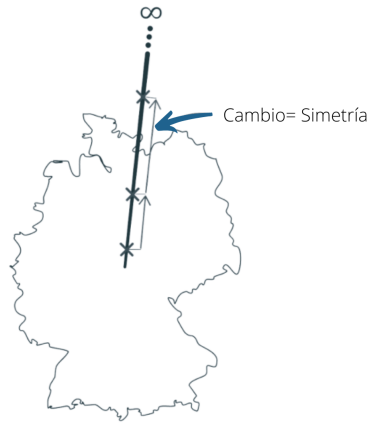


Figura 2.6: Representación gráfica de los desplazamientos de un punto a otro sobre la recta en el *espacio de dinero*. Fuente: Elaboración propia con base en Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Dado que diferentes países usan diferentes monedas y tienen diferentes precios para el mismo producto, es útil imaginar que existe una línea de este tipo sobre cada país, como se ilustra en la Figura 2.7. Juntas, todas estas líneas con todas las ubicaciones posibles (aquí, todos los países) producen la arena que usamos para describir lo que sucede en nuestro modelo de juguete.



Figura 2.7: Representación gráfica del *espacio del dinero* para cada país del mundo. Fuente: Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Los espacios internos no solo son importantes para ayudarnos a realizar un seguimiento de lo que está sucediendo, sino también porque pueden influir directamente en la dinámica.

Para entender esto, necesitamos hacer que nuestro modelo de juguete sea un poco más realista introduciendo otro elemento fundamental del mercado: diferentes divisas.

2.4. Conexiones

Ahora necesitamos hablar sobre lo que sucede cuando los países usan diferentes monedas. Cuando permitimos que los países usen monedas diferentes, todavía tiene que ser cierto que los precios por sí solos no tienen ningún significado. Una cifra grande para el precio del cobre en un país (por ejemplo, 10 rupias indias por kilogramo) y una cifra pequeña en otro país (por ejemplo, 0,5€ por kilogramo) no significa necesariamente que el cobre sea más barato en este último país.

Que el precio de un producto en un país determinado sea barato o caro depende de los tipos de cambio de la moneda local. Si solo decimos a un comerciante que el cobre se comercializa en Japón a 100¥ por kilogramo, es imposible que ella o él decidan si tiene sentido enviar su cobre a Japón y venderlo allí. Pero si además le decimos que 100¥ valen 0,8€, ella o él sabrán inmediatamente que es un buen precio comparado con, digamos, 0,5€ el kilo en Alemania.

Para nuestra imagen geométrica, esto significa que cuando los países usan monedas diferentes, no solo necesitamos una línea encima de cada país, sino también algo que los una. Nuestros tipos de cambio son el pegamento que nos permite calcular cuánto vale una moneda dada en términos de otra moneda, como se ilustra en la Figura 2.8.



Figura 2.8: Tipo de cambio del mismo bien en diferentes países. Fuente: Elaboración propia con base en Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Esta interpretación geométrica tiene una interpretación muy clara en términos de la simetría del mercado.

2.5. Cantidades invariantes de norma

Aunque la discusión que hemos hecho hasta ahora puede parecer aburrida o incluso trivial, ideas como éstas yacen en el corazón de la física moderna. Para entender cómo sucede esto, necesitamos hablar de dinámica. Recordemos que para describir lo que sucede en un sistema dado, necesitamos una *ecuación de movimiento*. Para plantear dicha ecuación, necesitamos tener en cuenta es que ésta no puede depender de nada que cambie si se cambia la escala de una moneda. En particular, esto significa que nuestra ecuación de movimiento no puede depender directamente de los precios del cobre, por ejemplo. Estos precios dependen de la moneda local y, por lo tanto, cambian tan pronto como un país cambia la escala de su moneda. Esto en sí mismo es una idea poderosa. Ingenuamente, pudimos haber pensado que cualquier

ecuación que describa nuestro sistema ciertamente involucra los precios del cobre. Pero una ecuación de este tipo no sería útil porque los precios no tienen ningún significado directo. Podemos preguntarnos, ¿qué tiene entonces un efecto sobre la dinámica del mercado? Las oportunidades de ganar dinero ciertamente tienen un efecto. Si estas oportunidades aparecen en alguna parte, los comerciantes (individuos o países) seguramente la utilizarían para ganar dinero.

Si empezamos comprando cobre por 10€ y terminamos vendiéndolo por 10000¥, esto no nos dice nada a menos que calculemos cuántos euros obtenemos por nuestros yenes. Un punto crucial es que tal oportunidad de ganar dinero no depende de las convenciones locales. Por ejemplo, si Japón decide eliminar un cero de su moneda, solo obtendrá 1000¥ por su cobre. Pero aún podría cambiarlos por 80,2 € porque el tipo de cambio euro-yen se ajusta tan pronto como Japón decide modificar su moneda.

En física, llamamos *invariante calibre*, *invariante de norma* o *invariante de gauge* a una cantidad que no depende de las convenciones locales. En nuestro ejemplo, la cantidad de dinero que podemos ganar a través de este comercio de cobre es invariante de norma. Esta es una observación importante porque si queremos escribir una ecuación que describa el sistema, el factor de ganancia que cuantifica la oportunidad es una variable que debe aparecer en ella.

Tratando de averiguar qué otras cantidades deberían aparecer en nuestra ecuación de movimiento, descartamos a los tipos de cambio, pues éstos dependen de las convenciones locales. Sin embargo, podemos construir una cantidad estrechamente relacionada con los tipos de cambio que no dependa de las convenciones locales y, por lo tanto se haga presente de alguna manera en nuestra ecuación de movimiento.

Todas las oportunidades de ganar dinero son cruciales para la dinámica dentro de nuestro

sistema. Hasta ahora, solo hemos hablado de cómo podemos ganar dinero comerciando con cobre. Resulta que a veces es posible ganar dinero simplemente intercambiando una divisa por otra. Esto se conoce como *arbitraje de divisas*. Por ejemplo, imaginemos que los tipos de cambio entre algunas monedas *históricas* son los siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{DM}{P} &= 1, \\ \frac{P}{F} &= 2, \\ \frac{F}{L} &= 10, \\ \frac{DM}{L} &= 10,\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde DM denota Deutsche Mark (Marco Alemán), F Francs (Franco francés), P Pounds (Libra británica) y L Lira (italiana). Un comerciante puede ganar dinero intercambiando divisas. Si comienza con $1DM$, puede cambiarlo por $1P$, luego usar la libra para cambiarlo por $2F$, luego cambiarlos por $20L$ y finalmente volver a cambiarlos por $2DM$. Esto se ilustra en la Figura 2.9.



Figura 2.9: Representación del tipo de cambio entre Alemania, Italia, Francia y Reino Unido.

Fuente: Elaboración propia con base en Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Notemos que es crucial que terminemos con la misma moneda con la que comenzamos porque, de lo contrario, no podemos estar seguros de que realmente ganamos dinero. Además, tengamos en cuenta que dicha posibilidad de arbitraje es una característica real del sistema y no depende de las convenciones locales. Podemos verificar esto explícitamente. En primer lugar, nuestros tipos de cambio cambian cuando, por ejemplo, Italia decide quitar un cero de su moneda $L \rightarrow \tilde{L} = 10L$. Como resultado de este cambio en Italia, nuestros tipos de cambio cambian de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \frac{DM}{P} &= 1, \\
 \frac{P}{F} &= 2, \\
 \frac{F}{L} &= 10, \rightarrow \frac{F}{\tilde{L}} = \frac{F}{10L} = 1 \\
 \frac{DM}{L} &= 10 \rightarrow \frac{DM}{\tilde{L}} = \frac{DM}{10L} = 1.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Si bien los tipos de cambio son diferentes, ¡la cantidad de dinero que gana nuestro comerciante

no cambia con tal reescalamiento! Si comienza de nuevo con $1DM$, aún puede cambiarlo por $1P$, luego por $2F$, luego cambiarlos por $2\tilde{L}$ y finalmente cambiarlos por $2DM$. El resultado final es el mismo que antes, como podemos ver en la Figura 2.10.



Figura 2.10: Representación del tipo de cambio entre Alemania, Italia, Francia y Reino Unido bajo un escalamiento en el valor de la moneda de Italia. Fuente: Elaboración propia con base en Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Por lo tanto, lo que hemos descubierto es un segundo método para ganar dinero. El factor de ganancia que cuantifica cuánto dinero podemos ganar no depende de las convenciones locales y, por lo tanto, es deseable que aparezca en nuestra ecuación de movimiento. Veamos cómo hacerlo en términos geométricos.

2.6. Curvatura

Volviendo por un momento a nuestra imagen geométrica, ya hemos mencionado que los tipos de cambio son el pegamento que une las líneas que representan los espacios mone-

tarios locales en los distintos países. Nuestro espacio interno total consiste en todas estas líneas pegadas. Una interpretación extremadamente útil es que las oportunidades de arbitraje corresponden geoméricamente a una curvatura distinta de cero de este espacio interno. Intuitivamente, cada vez que nos movemos en un circuito, lazo o bucle cerrado y terminamos en un estado diferente al que empezamos, decimos que el espacio en el que nos movemos es curvo. Esta imagen se muestra en la Figura 2.11.



Figura 2.11: Bucle o lazo cerrado en una operación de cambio de divisas. Fuente: Elaboración propia con base en Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Por el momento, simplemente imaginemos que si existe la posibilidad de arbitraje, nuestros espacios internos locales (líneas) están pegados de manera no trivial. Esta es una imagen útil porque cada vez que un comerciante realiza una transacción financiera, no solo se mueve a través del espacio-tiempo sino también a través de nuestro espacio interno. Su comportamiento está directamente influenciado por la curvatura del espacio, de forma análoga a cómo una canica rueda de manera diferente sobre una superficie curva.

Antes de continuar y discutir cosas como esta formalmente en detalle, hay una característi-

ca más del modelo de juguete que debemos discutir, con el objetivo de que dicho modelo sea más realista.

2.7. Curvatura dinámica

En un mercado financiero real no solo hay comerciantes sino también otros actores. Lo más importante es que hay bancos que determinan los tipos de cambio y permiten a los comerciantes cambiar una moneda por otra. Pero estos bancos no están puramente sentados pasivamente en un segundo plano. Se encuentran dando forma dinámicamente a lo que está sucediendo en el sistema. En particular, ajustan los tipos de cambio todo el tiempo. Hacen esto, por ejemplo, para deshacerse de las oportunidades de arbitraje porque, de lo contrario, se quedarían sin dinero rápidamente.

Esto significa que hay una interacción continua entre los dos tipos de actores. El comportamiento de los comerciantes está directamente influenciado por el patrón de oportunidades de arbitraje dentro del sistema. A su vez, los bancos modifican las tasas de cambio todo el tiempo dependiendo del comportamiento de los comerciantes. Esta idea nos permite echar un primer vistazo a lo que todo esto tiene que ver con la física.

En primer lugar, en física seguimos exactamente los mismos pasos para encontrar cantidades que no dependan de las convenciones locales. Con estas cantidades a mano, escribir las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema es solo un pequeño paso adicional. Además, como discutiremos más adelante, los factores de ganancia que discutimos en el contexto del modelo de juguete financiero son matemáticamente completamente análogos a las cantidades utilizadas para describir la física fundamental basada en la descripción de la interacción entre

partículas elementales y campos de fuerza.

Resulta extremadamente instructivo reformular todo lo que acabamos de discutir en términos matemáticos. Esto nos permite comprender muchos de los conceptos más importantes de la física moderna y escribir una de las ecuaciones más importantes.

2.8. Finanzas Matemáticamente

Matemáticamente, imaginamos que nuestros países viven en un entramado bidimensional (lattice o retículo). Cada punto de la red está etiquetado con 2 números: $\vec{n} = (n_1, n_2)$. En otras palabras, cada país puede ser identificado por un vector $\vec{n}$ que apunta a su ubicación, de acuerdo a la Figura 2.12.

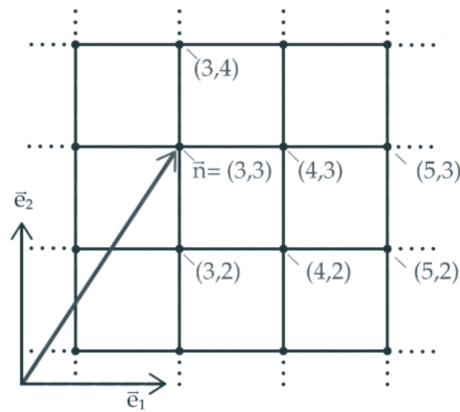


Figura 2.12: Representación de los países dentro de una red con identificador de la forma $\vec{n} = (n_1, n_2)$. Fuente: Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Podemos movernos de un país a un país vecino usando un vector base $\vec{e}_i$, donde i denota la dirección en la que nos movemos. Por ejemplo, $\vec{e}_1 = (1, 0)$ en la Figura 2.13.

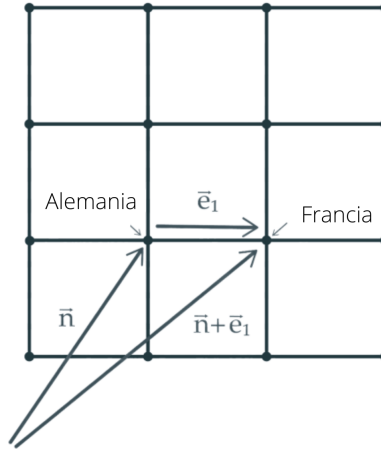


Figura 2.13: Ubicación de un país y su país vecino a lo largo del vector base $\vec{e}_1$. Fuente: Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Denotamos los tipos de cambio entre el país etiquetado por el vector $\vec{n}$ y su vecino en la dirección i por $R_i(\vec{n})$. Por ejemplo, si el país en la ubicación $\vec{n}$ usa DM y su vecino usa F , $R_1(\vec{n})$ dice cuántos Francos obtenemos por cada Marco, como se ilustra en la Figura 2.14.

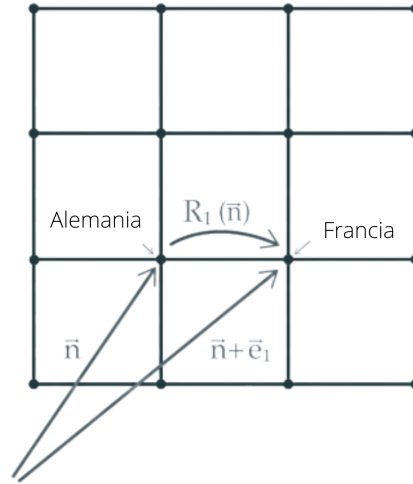


Figura 2.14: Representación de los tipos de cambio entre el país representado por $\vec{n}$ y su vecino en la dirección i $R_1(\vec{n})$. Fuente: Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Análogamente, $R_2(\vec{n})$ describe el tipo de cambio entre el país en $\vec{n}$ y el país en $\vec{n} + \vec{e}_2$ de acuerdo a la Figura 2.15.

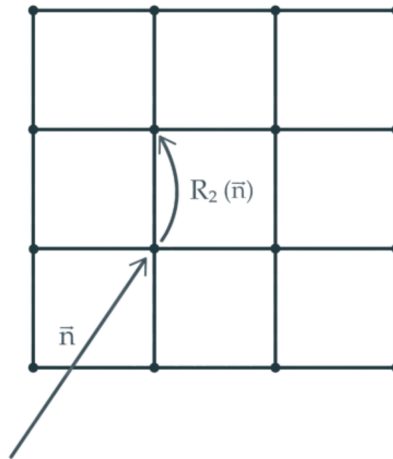


Figura 2.15: Representación del tipo de cambio $R_2(\vec{n})$. Fuente: Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Y $R_1(\vec{n} + \vec{e}_2)$ describe el tipo de cambio entre el país en $\vec{n} + \vec{e}_2$ y el país en $\vec{e} + \vec{e}_2 + \vec{e}_1$ como en la Figura 2.16.

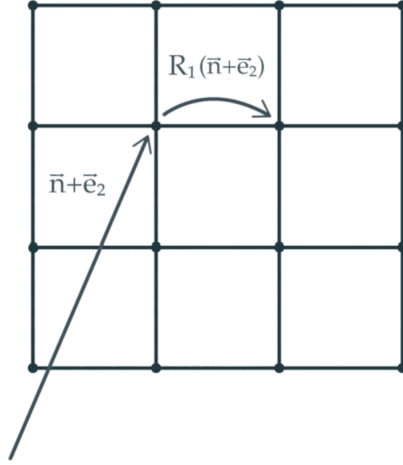


Figura 2.16: Representación del tipo de cambio $R_1(\vec{n} + \vec{e}_2)$ entre el país $\vec{n} + \vec{e}_2$ y el ubicado en $\vec{n} + \vec{e}_2 + \vec{1}$. Fuente: Schwichtenberg, J. (2019) [5].

En física y en finanzas, solemos introducir los logaritmos correspondientes de los tipos de cambio mediante la definición

$$R_i(\vec{n}) \equiv e^{A_i(\vec{n})}. \quad (2.3)$$

El siguiente ingrediente que necesitamos es una notación para las transformaciones de norma. En nuestro modelo de juguete, una transformación de norma es un cambio de escala de una moneda local e impacta directamente, por ejemplo, en los tipos de cambio. Usamos la notación $f(\vec{n})$ para denotar un cambio de escala de la moneda en el país en $\vec{n}$ por un factor f . Esto se ilustra en la Figura 2.17.

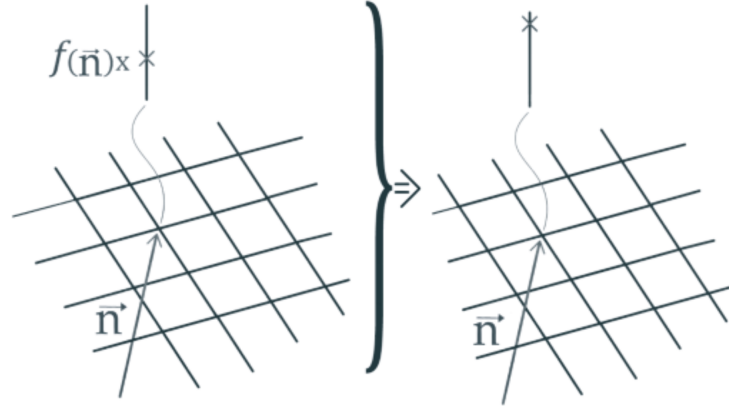


Figura 2.17: Representación de un cambio de escala $f(\vec{n})$. Fuente: Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Además, volvemos a introducir el logaritmo correspondiente, considerando la función $\varepsilon(\vec{n})$ mediante la relación

$$f(\vec{n}) \equiv e^{\varepsilon(\vec{n})}. \quad (2.4)$$

En general, cuando realizamos tal transformación de norma, $f(\vec{n})$, en el país etiquetado por $\vec{n}$ y también otra transformación de norma en el país vecino en la dirección i , $f(\vec{n} + \vec{e}_i)$, el correspondiente tipo de cambio se modifica por la relación de estos dos factores como

$$R_i(\vec{n}) \rightarrow \frac{f(\vec{n} + \vec{e}_i)}{f(\vec{n})} R_i(\vec{n}), \quad (2.5)$$

tal como se ilustra en la Figura 2.18.

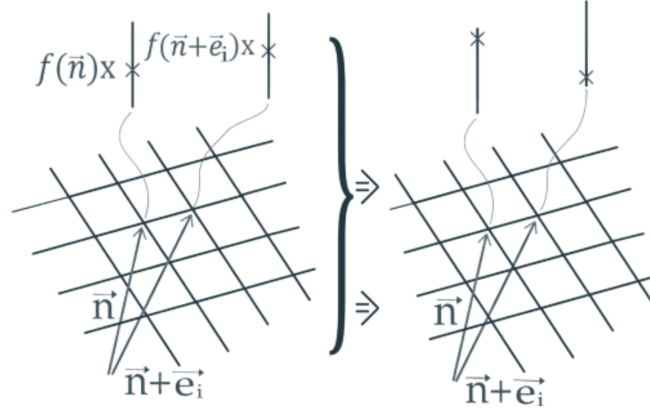


Figura 2.18: Representación de un cambio de escala $f(\vec{n})$ en un país etiquetado como $\vec{n}$ y un cambio de escala de un país vecino en la dirección i representado por $f(\vec{n} + \vec{e}_i)$. Fuente: Schwichtenberg, J. (2019) [5].

En términos de logaritmos, esta relación se lee

$$\begin{aligned}
 R_i(\vec{n}) &= e^{A_i(\vec{n})} \rightarrow \frac{f(\vec{n} + \vec{e}_i)}{f(\vec{n})} R_i(\vec{n}) \\
 &= \frac{e^{\varepsilon(\vec{n} + \vec{e}_i)}}{e^{\varepsilon(\vec{n})}} e^{A_i(\vec{n})} \\
 &= e^{A_i(\vec{n}) + \varepsilon(\vec{n} + \vec{e}_i) - \varepsilon(\vec{n})},
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

de donde podemos concluir que

$$A_i(\vec{n}) \rightarrow A_i(\vec{n}) + \varepsilon(\vec{n} + \vec{e}_i) - \varepsilon(\vec{n}). \tag{2.7}$$

Mencionamos anteriormente que un aspecto importante del sistema es si existen oportunidades de arbitraje. Existe una posibilidad de arbitraje cuando podemos operar con divisas de tal manera que terminemos con más dinero del que teníamos al inicio. Pero solo podemos hacer tal declaración cuando la moneda inicial y la moneda final son la misma. Solo entonces podemos estar seguros de si la cantidad final de dinero es mayor o no que la cantidad con la

que comenzamos. Por lo tanto, necesitamos intercambiar dinero en un bucle o lazo. Definiendo el factor de ganancia como la relación entre la cantidad final de dinero y la cantidad inicial de dinero (en la misma moneda local), la ganancia total que podemos obtener siguiendo un lazo específico se puede cuantificar mediante

$$G(\vec{n}) = R_i(\vec{n})R_j(\vec{n} + \vec{e}_i) \frac{1}{R_i(\vec{n} + \vec{e}_j)} \frac{1}{R_j(\vec{n})}. \quad (2.8)$$

Cuando este factor de ganancia es mayor que uno, podemos ganar dinero intercambiando dinero siguiendo el lazo. Si es más pequeño que uno, perdemos dinero.

Para entender la ecuación (2.8) para el factor de ganancia en el caso de un proceso en un lazo, imaginemos que comenzamos con $1DM$. Lo cambiamos por Libras y $R_1(\vec{n}) = 1P/DM$ nos dice que obtenemos en total $1P$. Posteriormente, cambiamos nuestras Libras por Francos y $R_2(\vec{n} + \vec{e}_1) = 2F/P$ nos dice que en total obtenemos $2F$. Posteriormente, cambiamos nuestros Francos por Liras. $R_1(\vec{n} + \vec{e}_2) = \frac{1}{10}F/L$ nos dice que obtenemos $10L$ por cada Franco. Por lo tanto, tenemos que calcular $2F/R_1(\vec{n} + \vec{e}_2) = 20L$. Finalmente, usamos que $R_2(\vec{n}) = 10\frac{L}{DM}$ nos dice que debemos pagar $10L$ por cada Marco Alemán y por lo tanto calculamos $20L/R_2(\vec{n}) = 2DM$. El factor de ganancia en este caso es:

$$\frac{\text{cantidad final}}{\text{cantidad inicial}} = \frac{2DM}{1DM} = 2, \quad (2.9)$$

que es lo que se obtiene al sustituir valores por los tipos de cambio en la (2.8), como se ilustra en la Figura 2.19.

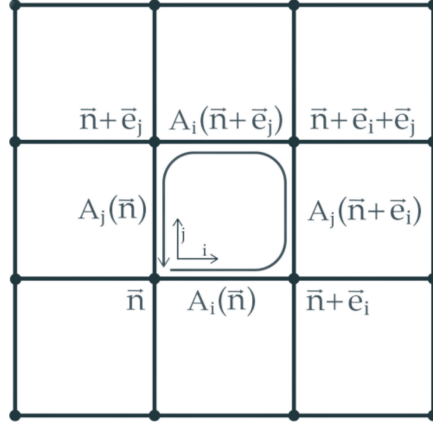


Figura 2.19: Representación un bucle de cambio para posibles comerciantes en una red. Fuente: Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Una vez más, introducimos el logaritmo correspondiente mediante la relación

$$G(\vec{n}) = e^{F_{ij}(\vec{n})}, \quad (2.10)$$

y nuevamente, podemos reescribir nuestra ecuación (2.8) en términos de los logaritmos

$$\begin{aligned} G(\vec{n}) &= R_i(\vec{n}) R_j(\vec{n} + \vec{e}_i) \frac{1}{R_i(\vec{n} + \vec{e}_j)} \frac{1}{R_j(\vec{n})} e^{F_{ij}(\vec{n})} = e^{A_i(\vec{n} + \vec{e}_j)} \\ &\quad e^{A_j(\vec{n} + \vec{e}_i)} \frac{1}{e^{A_i(\vec{n} + \vec{e}_j)}} \frac{1}{e^{A_j(\vec{n})}} \\ &= e^{A_i(\vec{n}) + A_j(\vec{n} + \vec{e}_i) - A_i(\vec{n} + \vec{e}_j) - A_j(\vec{n})}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Podemos leer aquí inmediatamente que

$$F_{ij}(\vec{n}) = A_j(\vec{n} + \vec{e}_i) - A_j(\vec{n}) - [A_i(\vec{n} + \vec{e}_j) - A_i(\vec{n})]. \quad (2.12)$$

Una verificación de consistencia crucial es que G y F_{ij} no cambian bajo transformaciones de norma. Una posibilidad de arbitraje es algo real y, por lo tanto, no puede depender de elecciones locales del sistema monetario interno. Entonces, en palabras, G y F_{ij} codifican

lo que es físico en la estructura de los tipos de cambio. Además, una observación técnica importante es que $F_{ij}(\vec{n})$ es antisimétrica: $F_{ij}(\vec{n}) = -F_{ji}(\vec{n})$, que sigue directamente de la definición (2.11).

Hasta ahora, solo hemos hablado de tipos de cambio espaciales. Sin embargo, también existen tipos de cambio temporales, es decir, tipos de interés. Un truco inteligente para incorporarlos es introducir el tiempo como la coordenada temporal de un cuadrivector, tal como lo hacemos en la relatividad especial. En otras palabras, además de ubicaciones específicas (países), nuestro retículo contiene copias de estas ubicaciones en diferentes instantes, como ilustramos en la Figura 2.20.

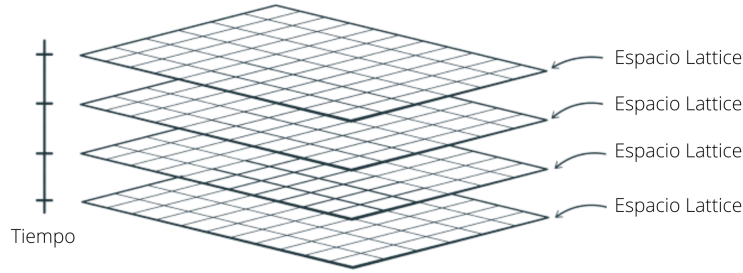


Figura 2.20: Copias de redes con ubicaciones en diferentes instantes. Fuente: Elaboración propia con base en Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Esto significa que un punto en esta red de espacio-tiempo está especificado por $2 + 1$ coordenadas $\vec{n} = (n_0, n_1, n_2)$ y el componente cero indica el punto en el tiempo. Entonces, (2.11) se lee

$$F_{\mu\nu}(\vec{n}) = A_\nu(\vec{n} + \vec{e}_\mu) - A_\nu(\vec{n}) - [A_\mu(\vec{n} + \vec{e}_\nu) - A_\mu(\vec{n})], \quad (2.13)$$

donde antes $ij \in \{1, 2\}$ y ahora $\mu, \nu \in \{0, 1, 2\}$.

Un paso importante para que nuestro modelo sea más realista es permitir no solo una ubicación posible para cada país, sino, en principio, infinitas ubicaciones por todo el mundo. Gráficamente, podemos imaginar que agregamos más y más puntos a nuestra red. Estos puntos representan posibles ubicaciones de nuestros comerciantes, como se ilustra en la Figura 2.21.

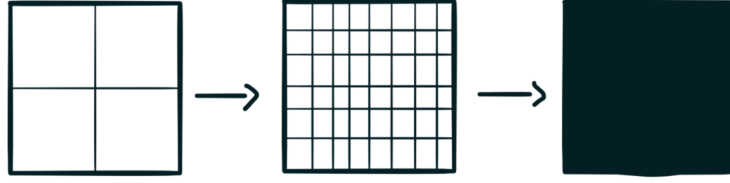


Figura 2.21: Representación de una red conforme aumenta el número de comerciantes. Fuente: Elaboración propia con base en Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Cada ubicación posible corresponde a un vector $\vec{x} = a\vec{n}$, donde $\vec{n}$ es un vector con componentes enteros, $\vec{n} = (n_i, n_j)^T$. Estos números enteros se vuelven cada vez más grandes en valor, en cualquier ubicación específica, a medida que se hace más y más pequeño. Esto se debe a que colocamos en más y más puntos (ubicaciones) dentro de un intervalo de espacio determinado. Sin embargo, la longitud de un vector $\vec{x}$ permanece fija y de tamaño finito. Por lo general, a se conoce como el espaciamiento de la red. El límite en el que hay una separación infinitesimal entre ubicaciones posibles, se conoce precisamente como límite del continuo.

Con esta notación a mano, podemos especificar qué significa matemáticamente el límite continuo. En el límite del continuo, la distancia entre puntos vecinos de la red tiende a cero $a \rightarrow 0$ mientras que $\vec{x}$ tiene que seguir siendo un vector finito fijo. Además, dado que nuestros contadores $A_i(\vec{n})$ conectan puntos de red en nuestro retículo discreto, ¡necesitamos reempla-

zarlos con contadores que conectan puntos en nuestro espacio continuo $A_i(\vec{n}) \rightarrow a\vec{A}_i(\vec{x})$.

Como veremos en un momento, el factor a asegura que los valores de nuestros contadores permanezcan fijos, ya que tomamos el límite $a \rightarrow 0$.

Entonces, específicamente, la transformation en (2.7)

$$A_i(\vec{n}) \rightarrow A'_i(\vec{n}) \equiv A_i(\vec{n}) + \epsilon(\vec{n} + \vec{e}_i) - \epsilon(\vec{n}), \quad (2.14)$$

se convierte ahora en

$$\begin{aligned} a\tilde{A}_i(\vec{x}) \rightarrow a\tilde{A}'_i(\vec{x}) &\equiv a\tilde{A}_i(\vec{x}) + \epsilon(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \epsilon(\vec{x}) \\ &= a\tilde{A}_i(\vec{x}) + a \frac{\epsilon(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \epsilon(\vec{x})}{a} \\ &= a \left(\tilde{A}_i(\vec{x}) + \frac{\epsilon(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \epsilon(\vec{x})}{a} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

En el límite $a \rightarrow 0$, el segundo término del lado derecho nos da

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\epsilon(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \epsilon(\vec{x})}{a} \equiv \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}, \quad (2.16)$$

y mirando la ec. (2.11), podemos por lo tanto concluir que

$$\tilde{A}_i(\vec{x}) \rightarrow \tilde{A}'_i(\vec{x}) \equiv \tilde{A}_i(\vec{x}) + \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}. \quad (2.17)$$

Análogamente, el factor de ganancia en la ecuación (2.11),

$$F_{ij}(\vec{n}) = A_j(\vec{n} + \vec{e}_i) - A_j(\vec{n}) - [A_i(\vec{n} + \vec{e}_j) - A_i(\vec{n})], \quad (2.18)$$

se convierte en

$$\begin{aligned} F_{ij}(\vec{x}) &= a\tilde{A}_j(\vec{x} + a\vec{e}_i) - a\tilde{A}_j(\vec{x}) - [a\tilde{A}_i(\vec{x} + a\vec{e}_j) - a\tilde{A}_i(\vec{x})] \\ &= a^2 \frac{\tilde{A}_j(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \tilde{A}_j(\vec{x})}{a} - a^2 \frac{\tilde{A}_i(\vec{x} + a\vec{e}_j) - \tilde{A}_i(\vec{x})}{a}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

¡y podemos concluir que tenemos que reemplazar $F_{ij} \rightarrow a^2 \tilde{F}_{ij}$ para obtener una cantidad con un valor fijo en el límite $a \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}
a^2 \tilde{F}_{ij}(\vec{x}) &= a^2 \frac{\tilde{A}_j(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \tilde{A}_j(\vec{x})}{a} - a^2 \frac{\tilde{A}_i(\vec{x} + a\vec{e}_j) - \tilde{A}_i(\vec{x})}{a} \\
\tilde{F}_{ij}(\vec{x}) &= \frac{\tilde{A}_j(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \tilde{A}_j(\vec{x})}{a} - \frac{\tilde{A}_i(\vec{x} + a\vec{e}_j) - \tilde{A}_i(\vec{x})}{a}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

En el lado derecho, nuevamente tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\tilde{A}_j(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \tilde{A}_j(\vec{x})}{a} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{A}_j, \\
\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\tilde{A}_i(\vec{x} + a\vec{e}_j) - \tilde{A}_i(\vec{x})}{a} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{A}_i.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Por lo tanto, encontramos que

$$\tilde{F}_{ij}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{A}_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{A}_i. \tag{2.22}$$

En lo que resta de este trabajo, dejaremos de usar la tilde simplificar la notación. Además, si incluimos los tipos de cambio temporales, tenemos que reemplazar nuestros índices i, j con μ, ν , cada uno de los cuales va de 0 a 2. Para resumir, en el límite continuo, la ecuación (2.7) se convierte en

$$A_\mu(t, \vec{x}) \rightarrow A_\mu(t, \vec{x}) + \frac{\partial \epsilon}{\partial x_\mu}, \tag{2.23}$$

y (2.13) se convierte en

$$F_{\mu\nu}(t, \vec{x}) \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \tag{2.24}$$

Anteriormente notamos que no solo podemos ganar dinero intercambiando divisas, sino también intercambiando bienes como el cobre. Dependiendo de los precios locales, puede ser lucrativo comprar cobre en un país, llevarlo a otro país, venderlo allí y luego regresar al país original para comparar la cantidad final de dinero con la cantidad de dinero con la que comenzamos. A partir de la definición del factor de ganancia como la relación entre la cantidad final de dinero y la cantidad inicial de dinero (en la misma moneda local), el factor de ganancia para dicho proceso viene dado por

$$g_i(\vec{n}) = \frac{p(\vec{n} + \vec{e}_i)}{p(\vec{n})R_i(\vec{n})}, \quad (2.25)$$

donde $p(\vec{n})$ denota el precio del cobre en el país ubicado en $\vec{n}$. Para entender la definición en la Ec. (2.25), imaginemos que comenzamos con $10DM$ y el precio de un kilogramo de cobre en Alemania es $p(\vec{n}) = 10DM$. Esto significa que podemos comprar exactamente 1 kilogramo de cobre. Entonces podemos ir al país vecino y vender nuestro cobre por, digamos, $30F$ ya que $p(\vec{n} + \vec{e}_1) = 30F$. Después, podemos volver a Alemania y cambiar nuestros $30F$ por $15DM$ ya que, digamos, $R_i(\vec{n}) = 2$. Por lo tanto, habremos hecho $5DM$ en total; y entonces el factor de ganancia en este caso es:

$$\frac{\text{Cantidad final}}{\text{Cantidad inicial}} = \frac{15DM}{10DM} = 1,5. \quad (2.26)$$

Esto es exactamente lo que se obtiene al sustituir valores por los precios y el tipo de cambio en la ecuación (2.25). De nuevo, un factor de ganancia mayor que uno significa que ganamos dinero y un factor de ganancia menor que uno significa que perdemos dinero. En la Figura 2.22 representa el comercio de cobre entre dos países y el factor de ganancia del mismo.

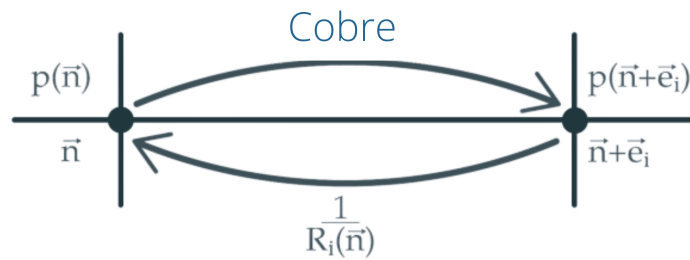


Figura 2.22: Comercio de cobre entre dos países. Fuente: Elaboración propia con base en Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Una vez más, introducimos los logaritmos correspondientes,

$$g_i(\vec{n}) \equiv e^{H_i(\vec{n})}, \quad p(\vec{n}) \equiv e^{\varphi(\vec{n})}, \quad (2.27)$$

de modo que la ecuación (2.25) se lee

$$\begin{aligned} g_i(\vec{n}) &= \frac{p(\vec{n} + \vec{e}_i)}{p(\vec{n})R_i(\vec{n})} \\ e^{H_i(\vec{n})} &= \frac{e^{\varphi(\vec{n} + \vec{e}_i)}}{e^{\varphi(\vec{n})}e^{A_i(\vec{n})}} \\ &= e^{\varphi(\vec{n} + \vec{e}_i) - \varphi(\vec{n}) - A_i(\vec{n})}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Esto implica

$$H_i(\vec{n}) = \varphi(\vec{n} + \vec{e}_i) - \varphi(\vec{n}) - A_i(\vec{n}). \quad (2.29)$$

El factor de ganancia $g_i(\vec{n})$ y su logaritmo $H_i(\vec{n})$ cuantifican directamente qué tan lucrativo es el comercio de cobre para un comerciante con sede en la ubicación $\vec{n}$ y que hace negocios con el país en $\vec{n} + \vec{e}_i$. Podemos imaginar que cuanto más lucrativo sea un comercio, más lo utilizarán los comerciantes para ganar dinero. Esto nos motiva a definir la corriente de cobre

$$J_i(\vec{n}) \equiv qH_i(\vec{n}) = q(\varphi(\vec{n} + \vec{e}_i) - \varphi(\vec{n}) - A_i(\vec{n})), \quad (2.30)$$

donde q es una constante de proporcionalidad que cuantifica la intensidad con la que los comerciantes en un sistema dado reaccionan ante una oportunidad de ganar dinero comerciando con cobre.

De manera completamente análoga a lo que hicimos anteriormente, podemos generalizar esta fórmula para situaciones que involucren tiempo reemplazando $i \in \{1, 2\}$ con $\mu \in \{0, 1, 2\}$:

$$J_\mu(\vec{n}) = q(\varphi(\vec{n} + \vec{e}_\mu) - \varphi(\vec{n}) - A_\mu(\vec{n})). \quad (2.31)$$

Además, en el límite continuo, la ec. (2.31) se convierte en

$$J_\mu(t, \vec{x}) = q \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi(t, \vec{x}) - A_\mu(t, \vec{x}) \right). \quad (2.32)$$

Hablemos ahora de las tres cantidades $J_\mu(\vec{n})$ (con $\mu \in \{0, 1, 2\}$) con más detalle. El factor de ganancia $H_i(\vec{n})$ nos dice qué tan lucrativo es un comercio en el que se transporta cobre desde el país en $\vec{n}$ al país vecino en $\vec{n} + \vec{e}_i$. Por tanto, $J_i(\vec{n})$ es una medida de la cantidad de cobre que fluye entre los dos países. El comercio relacionado con $H_0(\vec{n})$ no implica el intercambio de cobre entre países vecinos. En cambio, $H_0(\vec{n})$ nos dice cuánto podemos ganar comprando cobre y vendiéndolo en un momento posterior en el mismo país. Por lo tanto, $J_0(\vec{n})$ es una medida de la cantidad de cobre en el país en $\vec{n}$. Esta es una idea importante ya que, hasta ahora, no teníamos nada en nuestra descripción que contuviera información sobre la cantidad de cobre en un lugar determinado o sobre cómo fluye el cobre a través del sistema. El cobre está representado en nuestra descripción en términos un tanto abstractos por su precio. Sin embargo, la cantidad de cobre en un país dado no es proporcional al precio local del cobre. El precio local depende del sistema de coordenadas del dinero local y, por lo tanto, no puede representar directamente una cantidad medible como la cantidad de cobre. En cambio, la cantidad de cobre en un país dado debe estar representada por una cantidad independiente de la norma como $J_0(\vec{n})$. Lo mismo es cierto para el flujo de cobre $J_i(\vec{n})$.

Quizás una segunda perspectiva ayude a entender esto mejor. La idea principal es que la distribución y el flujo de cobre están codificados de alguna manera en el patrón de precios en los distintos países en diferentes momentos. Los precios en sí mismos no contienen información sobre el flujo y la distribución del cobre, ya que dependen de las convenciones locales. En cambio, todo lo que necesitamos saber está codificado en cómo cambian los precios a medida

que nos movemos de un país a otro o a un punto diferente en tiempo. Por ejemplo, si el precio en un país determinado baja rápidamente con el tiempo, esto indica que tienen demasiado cobre. En otras palabras, un precio que cae rápidamente es un indicador de que mucho cobre se encuentra en el país correspondiente. El factor de ganancia $H_0(\vec{n})$ describe con precisión cómo cambia con el tiempo el precio en el país ubicado en $\vec{n}$. Usando estas ideas, definimos $J_0(\vec{n}) \equiv qH_0(\vec{n})$ que describe cuánto cobre se encuentra en el país en $\vec{n}$. La constante de proporcionalidad q es necesaria para describir cómo se relacionan cantidades dadas de cobre (por ejemplo, 3 kilogramos o 2 metros cúbicos) con cambios específicos del precio $H_0(\vec{n})$. De manera similar, si el precio en un país es mucho más alto que en un país vecino, podemos suponer que necesitan desesperadamente cobre y, por lo tanto, hay una entrada neta de cobre. Por lo tanto, una diferencia de precio en los países vecinos es un indicador de que el cobre fluye del país de bajo precio al país de alto precio. La diferencia de precios entre el país en $\vec{n}$ y su vecino en $\vec{n} + \vec{e}_i$ se describe con precisión mediante $H_i(\vec{n})$. Por lo tanto, usamos $J_i(\vec{n}) \equiv qH_i(\vec{n})$ para describir el flujo de cobre desde $\vec{n}$ a $\vec{n} + \vec{e}_i$.

Ahora que hemos introducido una notación matemática para describir nuestro modelo de juguete, también podemos escribir reglas específicas que describen cómo se comporta el sistema. Necesitamos dos tipos de reglas. Por un lado, necesitamos reglas que describan cómo aparecen y evolucionan las oportunidades de arbitraje con el tiempo. Por otro lado, necesitamos reglas que describan cómo se comportan nuestros operadores y, en particular, cómo reaccionan ante la presencia de oportunidades de arbitraje. El diagrama mostrado en la Figura 2.23. resume lo que descubriremos en las siguientes secciones.

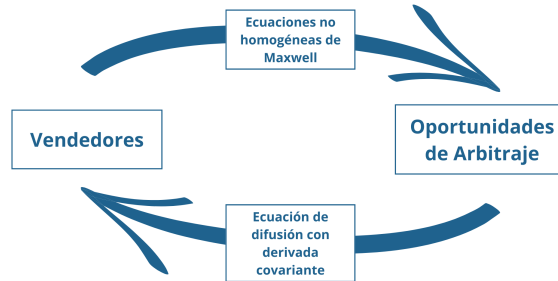


Figura 2.23: Diagrama entre la relación entre los comerciantes, el arbitraje y la física. Fuente: Elaboración propia con base en Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Comenzaremos con las reglas que describen las oportunidades de arbitraje y luego pasaremos a derivar las reglas que describen cómo reaccionan los comerciantes ante ellas.

2.9. Dinámica de arbitraje

Es posible considerar varios tipos de dinámicas dentro de nuestro modelo de juguete financiero. Diferentes tipos de dinámicas requieren diferentes tipos de leyes. Sin embargo, a continuación discutimos un conjunto muy particular de reglas que corresponden a las ecuaciones de Maxwell. Entonces, nuestro objetivo no es derivar ecuaciones que describan los mercados financieros con precisión, sino usar el mercado financiero para comprender conceptos como las ecuaciones de Maxwell.

Para derivarlos, comenzamos con la suposición crucial de que el cobre se conserva, es decir, no se destruye ni se produce cobre. En particular, esto significa que cada vez que la cantidad de cobre disminuye en un país determinado, debe haberse ido a alguna parte. Por el contrario, cada vez que aumenta la cantidad de cobre en un país, debe haber venido de alguna parte.

que J_μ y $F_{\mu\nu}$ son buenas cantidades para describir a nuestro sistema, ya que no dependen de las convenciones locales. Las cantidades J_μ contienen información sobre las posiciones y el flujo de cobre, mientras que $F_{\mu\nu}$ representan oportunidades de arbitraje.

Sin embargo, la primera conjetura ingenua para escribir $F_{\mu\nu}$ en un lado y J_μ en el otro lado de una ecuación falla porque J_μ tiene solo un índice pero $F_{\mu\nu}$ tiene dos índices. Además, hay otra pieza de información que podemos usar: la ec. (2.34).

Si al tomar la derivada del lado derecho de una ecuación se obtiene cero, el lado izquierdo también tiene que ser cero. Sin embargo, no hay ninguna razón por la que $\partial_\mu F_{\mu\nu}$ deba ser cero y este es otro indicio de que nuestra primera suposición ingenua es incorrecta. La observación crucial es que

$$\partial_\nu \partial_\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad (2.35)$$

ya que $F_{\mu\nu}$ es antisimétrico, pero las derivadas parciales conmutan $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$. Esto sugiere que deberíamos intentar

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 J_\mu, \quad (2.36)$$

donde hemos introducido la constante de proporcionalidad μ_0 que codifica con qué intensidad reacciona el patrón de oportunidades de arbitraje ante la presencia y el flujo de cobre. Esta ecuación tiene exactamente un índice libre (μ) en ambos lados y, lo más importante, ambos lados dan cero si calculamos la derivada

$$\partial_\mu \partial_\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 \partial_\mu J_\mu.$$

$$0 = 0.$$

La ec. (2.36) es la famosa ecuación no homogénea de Maxwell (1.71). Para nuestro sistema

discreto, ésta se lee

$$\sum_{\nu=0}^2 F_{\mu\nu}(\vec{n}) - \sum_{\nu=0}^2 F_{\mu\nu}(\vec{n} - \vec{e}_\nu) = \mu_0 J_\mu(\vec{n}). \quad (2.37)$$

Podemos entender el significado de estas ecuaciones, regresando a la ecuación (2.37) con $\mu = 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^2 F_{0\nu}(\vec{n}) - \sum_{\nu=0}^2 F_{0\nu}(\vec{n} - \vec{e}_\nu) &= \mu_0 J_0(\vec{n}), \\ \sum_{i=1}^2 F_{0i}(\vec{n}) - \sum_{i=1}^2 F_{0i}(\vec{n} - \vec{e}_i) &= \mu_0 J_0(\vec{n}), \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde usamos que $F_{00}(\vec{n}) = 0$, ya que $F_{\mu\nu}$ es antisimétrico. Aquí, tenemos $\mu_0 J_0(\vec{n})$ en el lado derecho, que es proporcional a la cantidad de cobre ubicada en $\vec{n}$. Así, para $\mu = 0$, la ecuación (2.36) nos da información sobre el patrón de tipos de cambio en un país en el que está presente el cobre. En el límite continuo, la ec. (2.38) se convierte en

$$\partial_i F_{0i} = \mu_0 J_0, \quad (2.39)$$

que es Ley de Gauss (2.1). Del mismo modo, para $\mu \rightarrow i \in \{1, 2\}$ en la ecuación (2.37), obtenemos ecuaciones que nos dan información sobre el patrón de tipos de cambio que están presentes siempre que el cobre fluya

$$\sum_{\nu=0}^2 F_{i\nu}(\vec{n}) - \sum_{\nu=0}^2 F_{i\nu}(\vec{n} - \vec{e}_\nu) = \mu_0 J_i(\vec{n}). \quad (2.40)$$

En el límite continuo, esta ecuación se convierte en

$$\partial_0 F_{i0} + \partial_j F_{ij} = \mu_0 J_i, \quad (2.41)$$

que tiene la forma de la Ley de Ampere (1.1).

Además, la ecuación de Maxwell homogénea

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0, \quad (2.42)$$

se sigue automáticamente de la definición del factor de ganancia $F_{\mu\nu}$ en términos de los tipos de cambio A_μ .

Ahora seguimos adelante e intentamos escribir reglas que describan cómo se comportan nuestros comerciantes.

2.10. Dinámica del comercio

Antes de intentar comprender cómo reaccionan los comerciantes ante las oportunidades de arbitraje, debemos comprender cómo se comportan cuando no las hay. Pero, ¿qué sabemos realmente sobre los comerciantes? Por supuesto, si hay una oportunidad sin riesgo de ganar dinero, sin duda la usarán. Esta es la parte fácil que queremos entender en un segundo paso. Pero, ¿qué hacen si no hay oportunidades tan obvias? La mejor respuesta es: no lo sabemos. La psicología individual de cada comerciante es demasiado compleja y es simplemente imposible conocer todos los factores posibles que influyen en sus decisiones. Pero esto no significa que no podamos describir cómo se mueven los comerciantes a través de nuestro sistema. De hecho, muchos de los avances importantes de la física moderna son métodos para describir sistemas sin conocer todos los detalles. Y después de todo, uno de los principales objetivos de los economistas es producir teorías del comportamiento humano que pasen por alto los detalles de la psicología individual. En un nivel microscópico, hay una cantidad increíblemente grande de factores que influyen en las decisiones de cada comerciante todo el tiempo. Por lo tanto, la situación es análoga a lo que sucede con los granos de polen en el agua. Estos granos chocan constantemente con las moléculas de agua, pero no hay forma de que podamos describir todas las moléculas de agua que influyen en los granos de polen. Si ignoramos este nivel microscópico

y nos alejamos, nuestros granos de polen simplemente realizan caminatas aleatorias. Por lo tanto, nuestra hipótesis de trabajo será que los comerciantes se mueven al azar. Así que lo que necesitamos es una ecuación que describa a nuestros comerciantes aleatoriamente. Dado que no estamos haciendo ninguna suposición especial, la ecuación que buscamos es exactamente la misma ecuación que describe los granos de polen en el agua. Esta ecuación que describe objetos en movimiento aleatorio se conoce como la ecuación de difusión y se lee

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(t, x)}{\partial x^2}, \quad (2.43)$$

donde ρ es la densidad de probabilidad de la cantidad que queremos describir y D es una constante conocida como constante de difusión.

Anteriormente argumentamos que $J_0(t, x)$ nos dice cuánto cobre se encuentra en una ubicación particular. Pero ahora, asumimos que nuestros comerciantes mueven el cobre al azar. Esto significa que necesitamos describir nuestro modelo en términos probabilísticos. Para entender lo que esto significa, imaginemos que existe solo una unidad de cobre. Nuestro objetivo es describir cómo se mueve esta unidad de cobre. En este caso, necesitamos describirlo usando una densidad de probabilidad.

Podemos imaginar que en un instante t_0 , la función $\rho(t, x)$ es exactamente uno para una ubicación particular x_0 :

$$\rho(t_0, x_0) = 1 \text{ y cero en otro caso.} \quad (2.44)$$

En otras palabras, esto significa que estamos seguros de encontrar nuestra unidad de cobre en t_0 en la ubicación x_0 . En un punto posterior en el tiempo t_1 , la densidad de probabilidad

posiblemente se vea así:

$$\begin{aligned}
 \rho(t_1, x_0) &= 0,1 \\
 \rho(t_1, x_1) &= 0,2 \\
 \rho(t_1, x_2) &= 0,7 \\
 \rho(t_1, x) &= 0 \text{ para otras localizaciones de } x
 \end{aligned}
 \tag{2.45}$$

Esto significa que tenemos un 70 % de certeza de encontrar la unidad de cobre en la ubicación x_2 , un 20 % de certeza de encontrarla en x_1 y solo un 10 % de certeza de encontrarla en x_0 . Formulado de otra manera, si preparamos el sistema por igual muchas veces, esperamos encontrar nuestra unidad de cobre en este momento en x_2 en el 70 % de los casos, en x_1 en el 20 % de los casos y en x_0 en solo el 10 % de los casos. Además, no esperamos encontrarlo en ningún otro lugar. De manera similar, si hay múltiples unidades de cobre en el sistema, $\rho(t, x)$ nos dice cómo esperamos que se distribuyan por todo el sistema.

Para resumir: J_0 nos dice cuánto cobre se encuentra en un lugar en particular. Ahora, usamos ρ para describir cuánto cobre podemos esperar encontrar en un lugar en particular si repetimos nuestro experimento varias veces. Este cambio a una perspectiva probabilística es necesario porque asumimos que nuestros comerciantes mueven el cobre al azar. Si bien, por lo tanto, no podemos estar seguros de lo que sucederá, puede hacer predicciones probabilísticas.

Ahora, ¿cómo llegamos de la hipótesis del camino aleatorio a la ecuación (2.43)? Como antes, centrémonos en una unidad de cobre. En cada paso de tiempo Δt , la ubicación x de la unidad cambia en un paso l :

$$x(t + \Delta t) = x(t) + l(t). \tag{2.46}$$

Nuestra tarea es escribir una ecuación que nos permita calcular la densidad de probabilidad

$\rho(x, t + \Delta t)$ dada la densidad de probabilidad en un paso de tiempo anterior $\rho(x', t)$. Luego, podemos comenzar con una densidad específica en un punto en el tiempo (por ejemplo, uno en el que todo el cobre se encuentra en un punto en particular) y calcular cómo se distribuye el cobre a través del sistema. Si una unidad de cobre se mueve desde x' en el tiempo t a x al tiempo $t + \Delta t$, debe haber movido un paso $l = x - x'$. ¿Cuál es la probabilidad de que dé ese paso? Para responder a esta pregunta, necesitamos introducir la distribución de probabilidad de nuestro paseo aleatorio. Denotamos la distribución de probabilidad que nos dice la probabilidad de cada paso posible como $\chi(l)$. En particular, $\chi(l_s)$ nos dice la probabilidad de que nuestra unidad de cobre avance un paso específico l_s . Por lo tanto, la probabilidad de encontrar nuestra unidad de cobre en x en el tiempo $t + \Delta t$ es

$$\begin{aligned}\rho(x, t + \delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', t) \chi(x - x') dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x - l, t) \chi(l) dl,\end{aligned}\tag{2.47}$$

donde sumamos sobre todas las ubicaciones anteriores posibles x' . En palabras, esta fórmula significa que sumamos sobre todas las posibilidades cómo nuestra unidad de cobre puede terminar en x en $t + \Delta t$. En principio, podemos llegar a x desde cualquier lugar x' . Pero debemos tener en cuenta que el paso de x' a x solo ocurre con una cierta probabilidad, como lo indica $\chi(x - x')$. Además, la densidad de probabilidad que indica qué tan probable es encontrar nuestra unidad de cobre en x' en t es $\rho(x', t)$. Por lo tanto, la probabilidad de encontrar la unidad de cobre en x en $t + \Delta t$ está dada por la suma de todas las ubicaciones posibles x' en t ponderada por los valores de densidad de probabilidad que nos dicen qué tan probable es que realmente esté en x' y que la ocurre un paso de x' a x . Esto se ilustra en la en la Figura 2.25.

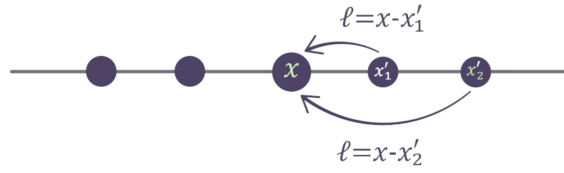


Figura 2.25: Representación de la probabilidad sobre qué tan probable es que realmente esté en x' y que ocurra un paso de x' a x . Fuente: Schwichtenberg, J. (2019) [5].

Ahora, necesitamos hacer algunas suposiciones (bastante leves) sobre $\chi(l)$ para poder avanzar. Si bien no necesitamos especificar la distribución de probabilidad $\chi(l)$ en sí misma, debemos hacer una suposición acerca de la media y la desviación estándar de los pasos l . A partir de la media y la desviación estándar, podemos decir qué tan lejos de su original posición que podemos esperar encontrar cada unidad dada de cobre. Pero como no queremos privilegiar ninguna dirección en particular, suponemos que la probabilidad de que los pasos en cada dirección sean iguales. Esto implica que la media de l es cero porque los pasos hacia la izquierda ocurren en promedio con la misma frecuencia que los pasos hacia la derecha.

$$\int_{-\infty}^{\infty} l \chi(l) dl = 0. \quad (2.48)$$

Por supuesto, no asumimos que el cobre no se mueve en absoluto. En cambio, una media de cero solo implica que los pasos en cada dirección ocurren con la misma probabilidad y, por lo tanto, se promedian. Esto también significa que la desviación estándar

$$\int_{-\infty}^{\infty} l^2 \chi(l) dl = a, \quad (2.49)$$

es distinta de cero. La desviación estándar codifica información sobre la distancia total que se mueve cada unidad de cobre en promedio en cada paso. La constante a depende del sistema

en cuestión y, por lo general, debe determinarse experimentalmente. En otras palabras, a es simplemente el nombre que le damos a la desviación estándar. Además, $\chi(l)$ debe normalizarse correctamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(l) dl = 1. \quad (2.50)$$

Este requisito asegura que las probabilidades para todos los pasos posibles sumen 100 % = $100 \frac{1}{100} = 1$. Con estas fórmulas a la mano, podemos reescribir la Ec. (2.47). La idea crucial es que observamos el sistema desde lejos y, por lo tanto, el tamaño del paso es pequeño en comparación con la escala en la que ρ varía notablemente. Lo anterior nos permite desarrollar con Taylor $\rho(x - l, t)$:

$$\begin{aligned} \rho(x, t + \Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x - l, t) \chi(l) dl \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \left(\rho(x, t) - l \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right) \chi(l) dl \\ &\approx \rho(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \chi(l) dl - \frac{\partial \rho}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} l \chi(l) dl + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} l^2 \chi(l) dl \\ &\approx \rho(x, t) + \frac{a}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Además, asumimos que las operaciones ocurren mucho más rápido que la escala de tiempo en la que observamos ρ . Esto nos permite expandir Taylor $\rho(x, t + \Delta t)$ en el lado izquierdo

$$\rho(x, t + \Delta t) \approx \rho(x, t) + \Delta t \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.52)$$

Usando las ecuaciones (2.51) y (2.52), encontramos

$$\begin{aligned} \rho(x, t) + \Delta t \frac{\partial \rho}{\partial t} &\approx \rho(x, t) + \frac{a}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \\ \Delta t \frac{\partial \rho}{\partial t} &\approx \frac{a}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &\approx \frac{a}{2 \Delta t} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Ahora, usando $D \equiv \frac{a}{2\Delta t}$ tenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (2.53)$$

Esta es exactamente la ecuación de difusión (2.43) que queríamos encontrar. Por lo tanto, hemos demostrado que la ecuación de difusión nos permite predecir en términos probabilísticos cómo se mueve el cobre si nuestros comerciantes actúan al azar. Ahora podemos seguir adelante y pensar en cómo podemos incorporar a nuestra ecuación cómo reaccionan los comerciantes ante las oportunidades de arbitraje.

2.11. Dinámica de comerciantes y arbitraje

Una oportunidad de arbitraje es una forma sin riesgos de ganar dinero. Entonces, cada vez que aparece una oportunidad de este tipo en el mercado, está claro que esto provocará una desviación entre nuestros comerciantes. ¿Cómo podemos incorporar este efecto en la ecuación de difusión? La respuesta a esta pregunta es realmente simple y hermosa. De hecho, la idea que usaremos a continuación es considerada por muchos físicos como una de las ideas más fundamentales de la física moderna. La observación principal es que tan pronto como haya oportunidades de arbitraje, debemos ser más cuidadosos cuando calculamos derivados. Cuando calculamos la derivada de una función, comparamos los valores de la función en dos lugares diferentes. Esto sigue si recordamos la definición habitual de una derivada

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (2.54)$$

Pero cada vez que hay una oportunidad de arbitraje, necesariamente hay un tipo de cambio no trivial A_μ en alguna parte. Por lo tanto, comparar los valores de una función en dos

ubicaciones diferentes no es trivial. Necesitamos tener en cuenta el tipo de cambio A_μ entre las dos ubicaciones. De lo contrario, estamos comparando manzanas con naranjas (por ejemplo, dólares con euros).

Afortunadamente, ya sabemos cómo hacer esto. La idea que necesitamos es exactamente la misma que ya usamos en la ec. (2.29). Nuestro objetivo era comparar los precios del cobre en dos lugares diferentes y encontramos

$$J_\mu(\vec{n}) = q(\varphi(\vec{n} + \vec{e}_\mu) - \varphi(\vec{n}) - A_\mu(\vec{n})), \quad (2.55)$$

que en el límite continuo se convierte en

$$J_\mu(\vec{x}) = q(\partial_\mu \varphi(\vec{x}) - A_\mu(\vec{x})). \quad (2.56)$$

Así es como, en general, se ve la derivada de una función en presencia de tipos de cambio no triviales $A_\mu(\vec{x})$. Es convencional llamar a esto la derivada covariante

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - A_\mu(\vec{x}). \quad (2.57)$$

En palabras, esto significa que necesitamos ajustar los valores de la función usando el tipo de cambio apropiado. Esto ya es todo lo que necesitamos saber.

Para obtener la ecuación correcta que describe a nuestros operadores en presencia de tipos de cambio no triviales, simplemente tenemos que reemplazar la derivada ordinaria ∂_μ con la derivada covariante D_μ . Concretamente, la ecuación de difusión en presencia de oportunidades de arbitraje es

$$\begin{aligned} D_t J_0(t, x) &= D D_x^2 J_0(t, x), \\ (\partial_t - A_t(t, x)) J_0(t, x) &= D(\partial_x - A_x(t, x))^2 J_0(t, x), \end{aligned} \quad (2.58)$$

donde D sigue siendo la constante de difusión y D_x y D_t denotan las derivadas covariantes.

Eso es todo. Para describir cómo se comportan los comerciantes cuando existen oportunidades de arbitraje, simplemente tenemos que tener en cuenta constantemente los tipos de cambio no triviales. Hacemos esto reconociendo que cada vez que calculamos la derivada de alguna función, necesitamos incluir el tipo de cambio apropiado. Esto es necesario porque cuando calculamos una derivada, estamos evaluando la función en dos lugares diferentes. Esto nos lleva a la conclusión de que necesitamos reemplazar nuestras derivadas ordinarias con derivadas covariantes $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$, donde $D_\mu = \partial_\mu - A_\mu$. Si hacemos esto, automáticamente terminaremos con las ecuaciones correctas.

Hay dos lecciones importantes que aprendimos en este Capítulo. En primer lugar, vimos por qué es útil la simetría de norma. Al pensar en la simetría de norma, aprendemos qué cantidades son independientes de las convenciones locales. En segundo lugar, derivamos la ecuación correcta que describe la interacción entre el flujo de bienes como el cobre y las oportunidades de arbitraje utilizando las ideas de que debemos describir el sistema con cantidades de norma invariantes.

Capítulo 3

Cambio de Moneda 1D

Los Capítulos anteriores nos sirvieron para poder plantear y simplificar cómo podemos comprender el arbitraje de monedas desde la teoría de norma. Las ecuaciones básicas de nuestro modelo financiero se resumen en

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} && \text{Ley de Gauss,} \\ \nabla \cdot B &= 0 && \text{Ley de Gauss para el campo magnético,} \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} && \text{Ley de Faraday,} \\ \nabla \times B &= \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} && \text{Ley de Ampère,} \\ \nabla \cdot J &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} && \text{Ecuación de continuidad,} \\ D_t \rho &= -D D_x^2 && \text{Ecuación de Difusión.}\end{aligned}\tag{3.1}$$

En este Capítulo haremos algunas suposiciones para resolver dichas ecuaciones. Pero antes hay que terminar de reunir algunos conceptos útiles para el análisis. Empezamos analizando datos reales tomados de Forex

Fecha	EUR/MXN	Fecha	EUR/MXN
15.03.2022	22.8689	28.02.2022	22.9552
14.03.2022	22.8625	25.02.2022	22.9114
11.03.2022	22.7965	24.02.2022	22.9874
09.03.2022	23.1379	23.02.2022	22.8736
08.03.2022	23.2901	22.02.2022	22.9773
07.03.2022	23.1158	21.02.2022	22.9536
04.03.2022	22.8736	18.02.2022	22.959
03.03.2022	22.829	17.02.2022	23.0426
02.03.2022	22.9015	16.02.2022	23.0534
01.03.2022	22.9564	15.02.2022	23.1542

Cuadro 3.1: Datos obtenidos de <https://mx.investing.com/>

Al graficar los datos de fecha y cierre, obtenemos la gráfica mostrada en la Figura 3.1

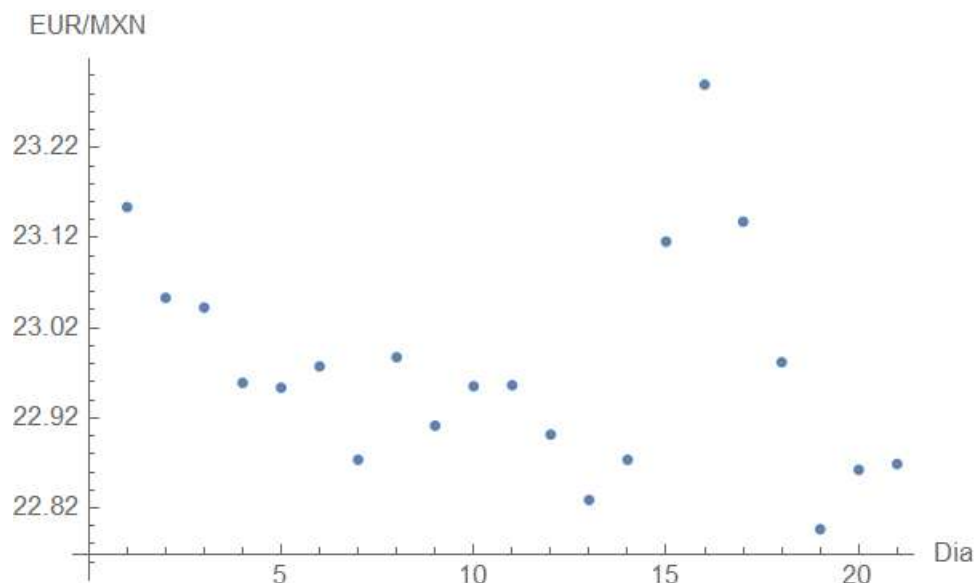


Figura 3.1: Datos obtenidos de <https://mx.investing.com/>

Los datos se pueden fácilmente ajustar linealmente. Sin embargo, este ajuste, por más fino que sea, no nos dará un buen análisis del mercado a futuro, ya que de esta forma sólo tendrá sentido en el lapso del tiempo en que se analizó. Adicionalmente, no es claro qué es lo que puede estar modificando cada nuevo valor. El análisis del comportamiento de la ganancias es de donde podemos obtener un buen modelo que nos permita saber un poco más del comportamiento, minimizando factores.

Hay que reafirmar que al momento de hacer arbitraje de monedas, no siempre los cambios se terminan con la misma moneda, ni tampoco es necesario que sea entre solo 2 monedas, pero se tiene que mantener una como referencia en cada análisis. Es necesario definir un ciclo o lazo como el cambio que va de una moneda a otra e inversamente. Esto es con el fin de verificar en qué momento se tiene ganancia, la cual se calcula como la diferencia de la cantidad invertida menos la cantidad obtenida. Para nuestros fines, como mencionamos en

el Capítulo 2, nos importa tener un factor de cambio. Este nos ayudará a dar sentido a los cálculos desde la perspectiva de teorías de norma.

Recordando la ecuación (2.28), podemos escribir la ganancia como

$$\text{Ganacia} = (\text{EUR invertidos}) \left(\frac{1}{\text{EUR recuperados}} \right),$$

de donde entendemos que cuando Ganacia =1 es que no la hay, Ganacia < 1 es pérdida y Ganacia > 1 es ganancia.

Por otro lado, hay que considerar, por ejemplo, que si un cambio entre dos divisas se hace en el mismo momento, como anteriormente se realizó, no se tendrá una ganancia (esto es sin considerar gastos adicionales por movimiento), ya que si el cambio se realiza el día 15 de marzo 2022, al verificar en la Tabla 3.1 tendremos que era de 1€ igual \$22.86 pesos mexicanos al momento del cambio y regresamos el factor de cambio corresponde a 1, lo cual concuerda con lo visto en el Capítulo 2. Esto indica que el tiempo juega un papel importante, ya que si se hace el cambio en determinado tiempo, este puede generar ganancias, pérdida o ninguna diferencia.

Para propósito demostrativo, observemos la Tabla 3.1 para mostrar el cálculo factor de ganancia. Tomando la unidad de tiempo como un día y la fecha más lejana como el día 1.

Día	Factor ganancia	Día	Factor ganancia
1	1.00437	10	1.00318
2	1.00364	11	0.99805
3	1.00024	12	0.989522
4	0.998969	13	0.992516
5	1.00453	14	1.00658
5	0.995049	15	1.00679
6	1.00332	15	1.00679
7	0.998092	16	1.00813
8	0.999948	17	0.997113
9	1.0024	18	0.99972

Cuadro 3.2: Datos obtenidos de <https://mx.investing.com/>

Graficando estos datos e incluyendo una línea $e=1$ que representa la línea donde no hay una ganancia, ni pérdida, obtenemos la Figura 3.2 tal. El comportamiento mostrado es típico de un camino aleatorio.

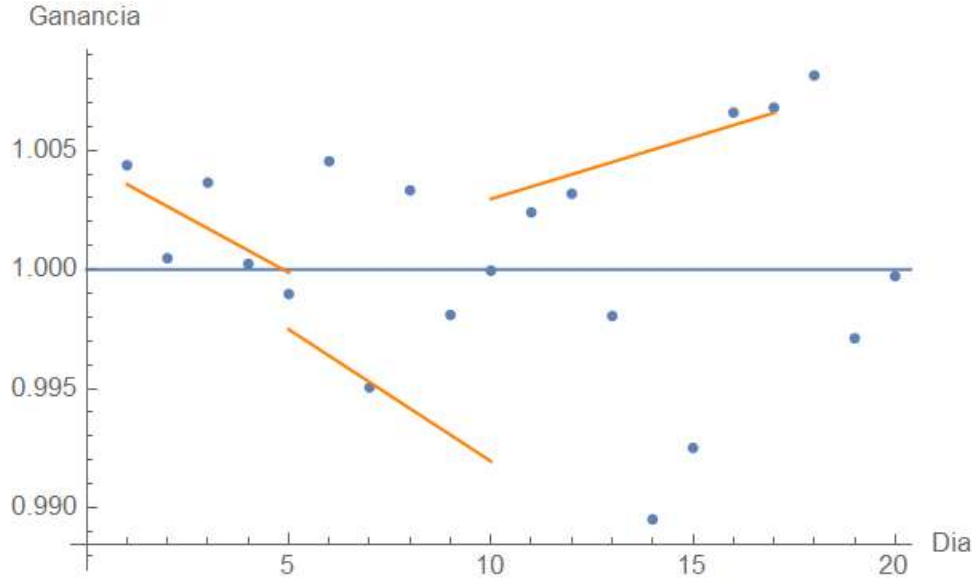


Figura 3.2: Gráfica elaborada a partir de datos obtenidos en <https://mx.investing.com/>.

Esta es una información física relevante que en nuestro modelo financiero debe incluir. Más aún, al enfocarnos solamente en el intercambio entre dos monedas, nos basta que la dinámica de nuestro modelo se formule en una dimensión espacial y una temporal. Esta simplificación será importante en nuestro tratamiento. La reducción dimensional de las ecuaciones se realiza de la siguiente manera.

Con la matrices (1.75) podemos identificar las componentes del tensor de Faraday con el campo electromagnético [16]

$$F_{01} = \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = E. \quad (3.2)$$

Imaginando que dicho campo está orientado en la dirección x , al no tener campo magnetico tenemos $B = 0$, las ecuaciones de Maxwell toma forma

Ley de Gauss:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.3)$$

Ley de Faraday:

$$\nabla \times E = 0. \quad (3.4)$$

Ley de Ampère:

$$\begin{aligned} \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = -\mu_0 J &\rightarrow \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = -J \\ &\rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{J}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0. \quad (3.6)$$

Para los potenciales, la condición de Lorentz se escribe:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (3.7)$$

Ahora, como asumimos que el campo eléctrico se describe con una función continua, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial J}{\partial x}. \end{aligned}$$

Así la ecuación de continuidad se vuelve

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \quad (3.8)$$

$$\rightarrow E_{xt} \varepsilon_0 + E_{xt} (-\varepsilon_0) = 0 \quad (3.9)$$

donde E_{xt} es la segunda derivada cruzada de E .

Para resolver las ecuaciones acopladas (3.3), (3.5) y (3.8), vamos a introducir una versión *apagada*, donde las reglas del juego se establecen al principio y no se modifican a lo largo de la evolución del mercado. Esta puede verse de dos maneras,

1. Haciendo una conjetura para la ganancia, $E(x, t)$ que nos reproduzca, por ejemplo, una tendencia positiva o negativa del mercado como función del tiempo al estar realizando intercambio entre dos divisas. En este caso, nuestro modelo es capaz de predecir cuál es la distribución de un tipo de moneda que nos lleve a ese comportamiento de ganancia.
2. Haciendo una conjetura de la distribución inicial de una moneda y prediciendo cuál sería la ganancia al intercambiarla con otra moneda.

Esto lo verificamos a continuación mediante ejemplos explícitos.

3.1. Ejemplo 1

Proponemos un perfil de ganancia tal que esté localizado espacialmente al tiempo $t = 0$, y que nos de una evolución lineal del mercado para $t > 0$, ya sea tendencia a la alza o a la baja, es decir,

$$E(x, t) = e^{-x^2}(a + bt), \quad (3.10)$$

donde dependiendo de los valores de los parámetros a y b tenemos una tendencia creciente o decreciente. En la Figura 3.3 se muestra el perfil espacial de esta ganancia para distintos valores de t fijando $a = b = 1$. Es claro que aunque la distribución siga centrada en el origen, se encuentra cada vez más ensanchada a medida que transcurre el tiempo. En cualquier caso, la evolución temporal para esta ganancia es lineal con una pendiente que depende del

parámetro b como se muestra en la Figura 3.4. Un perfil 3D de esta ganancia se muestra en la Figura 3.5.

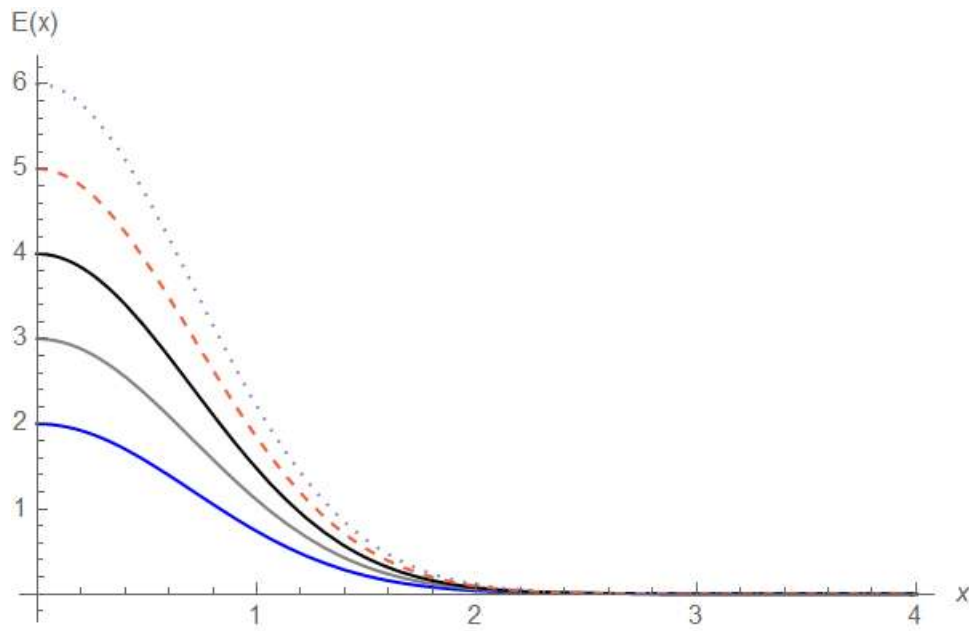


Figura 3.3: $E(x) = e^{-x^2}(a + bt)$, con $a = b = 1$.

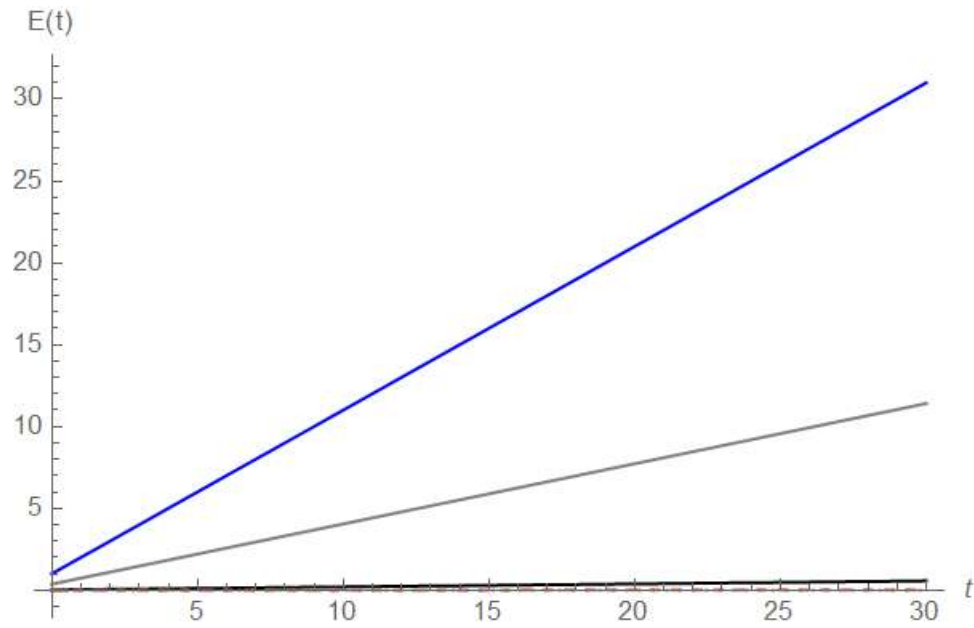


Figura 3.4: $E(t) = e^{-x^2}(a + bt)$, con $a = b = 1$.

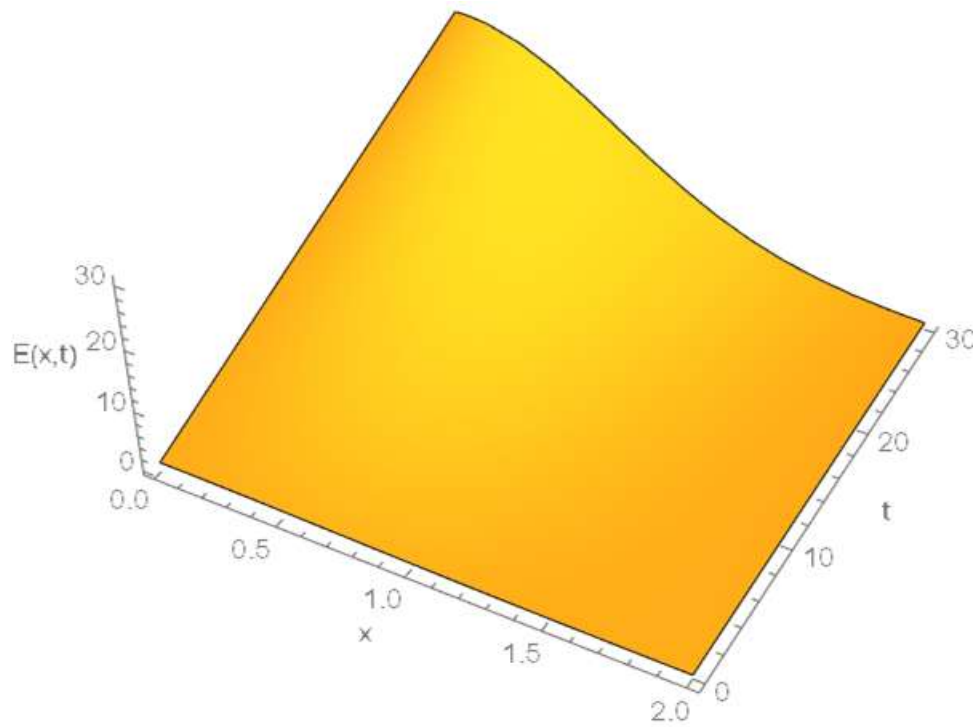


Figura 3.5: $E(x,t) = e^{-x^2}(a + bt)$, con $a = b = 1$.

De la ley de Gauss, tenemos

$$\rho(x, t) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x} E(x, t) = -2e^{-x^2} x \varepsilon_0 (a + bt). \quad (3.11)$$

El perfil espacial de la distribución inicial de moneda se muestra en la Figura 3.6 con los parámetros fijos $a = b = \varepsilon_0 = 1$. Se puede ver cómo la distribución esta centrada fuera del origen y se ensancha a medida que el argumento temporal se hace más grande. La evolución temporal también es lineal, pero el valor de $\rho(x, 0)$ cambia, como se muestra en la Figura 3.7. Esto se entiende del perfil bidimensional de esta distribución de moneda mostrado en la Figura 3.8.

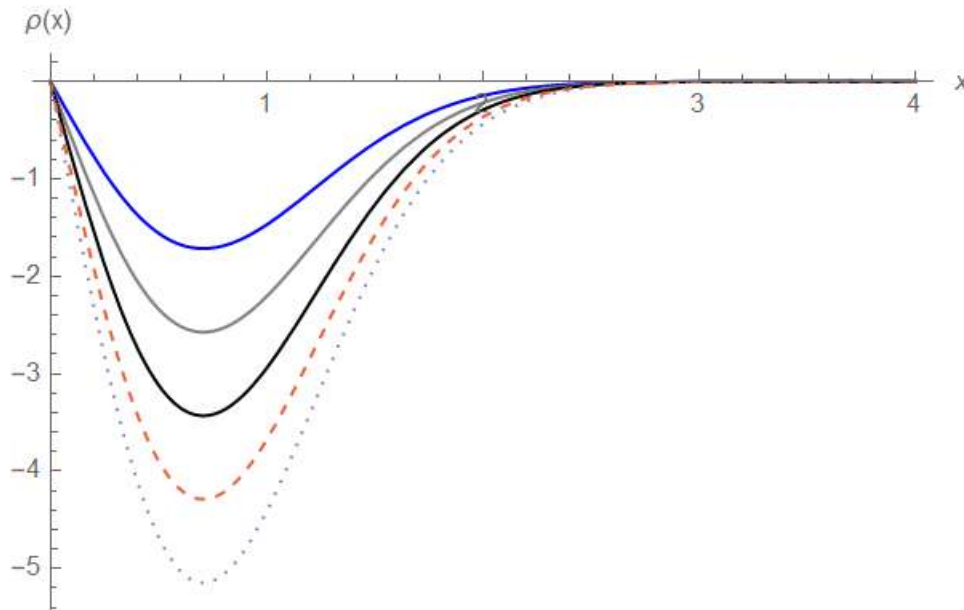


Figura 3.6: $\rho(x) = e^{-x^2} \varepsilon_0$, con $a = b = \varepsilon_0 = 1$.

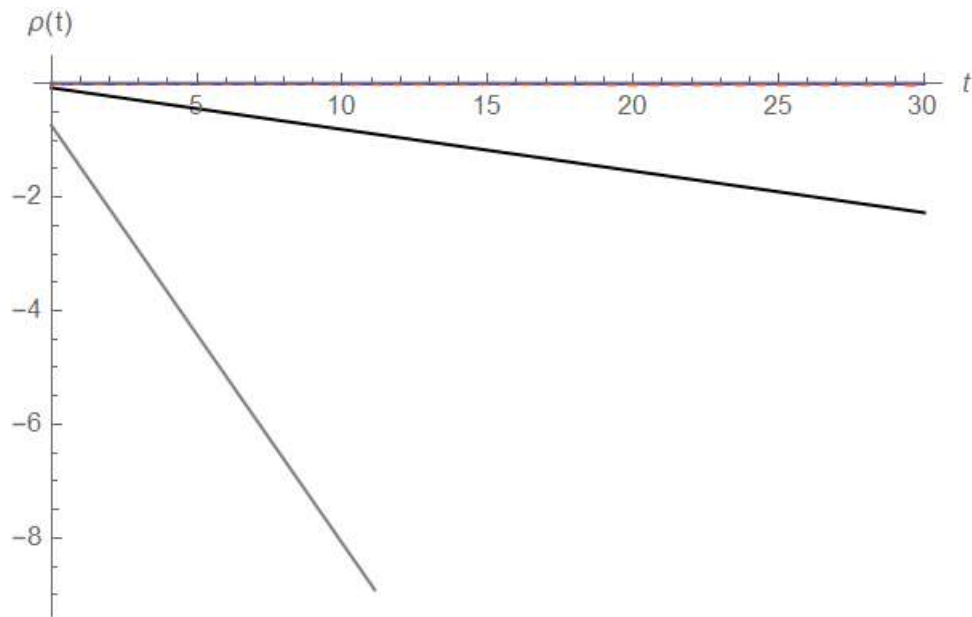


Figura 3.7: $\rho(t) = -2e^{-x^2}x\varepsilon_0(a+bt)$, con $a = b = \varepsilon_0 = 1$.

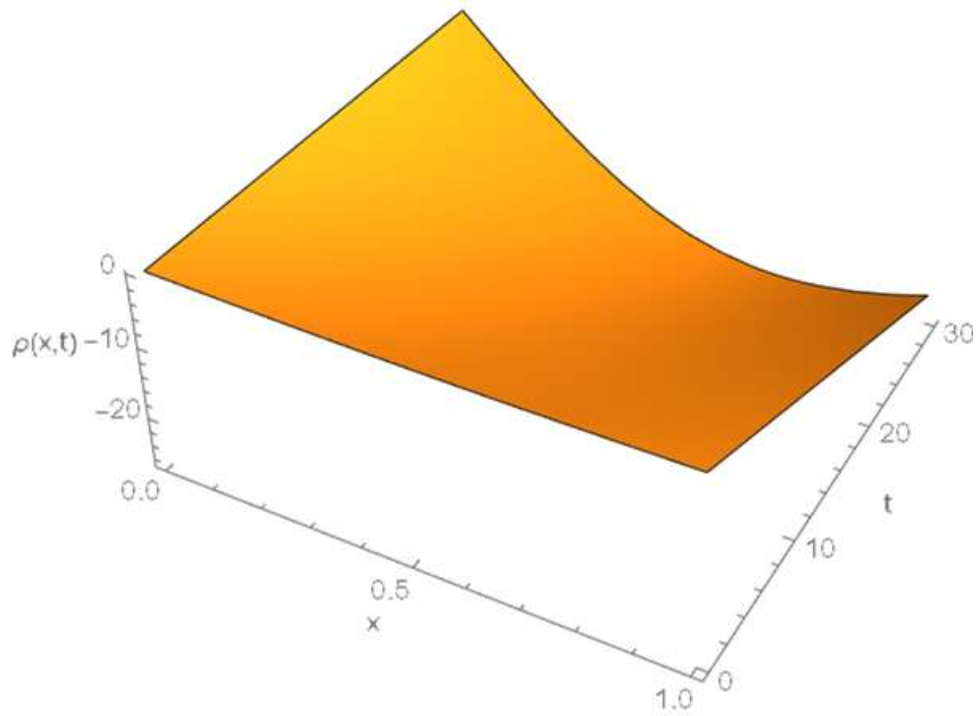


Figura 3.8: $\rho(x,t) = -2e^{-x^2}x\varepsilon_0(a+bt)$, con $a = b = \varepsilon_0 = 1$.

De forma similar, de la Ley de Ampère, tenemos

$$J(x, t) = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E(x, t) = -be^{-x^2} \varepsilon_0, \quad (3.12)$$

que es independiente del tiempo, es decir, representa flujo de moneda estático. El perfil espacial de dicho flujo se presenta en la Figura 3.9 para $b = \varepsilon_0 = 1$, que muestra un flujo concentrado en el origen y que disminuye lejos de éste. Esto se aprecia mejor en el perfil 3D de esta cantidad mostrado en la Figura 3.10.

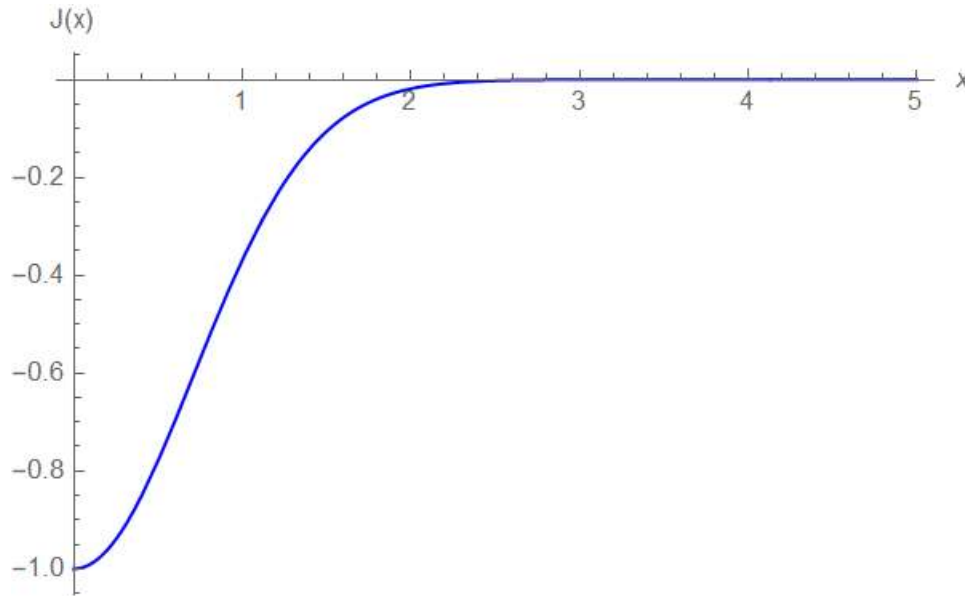


Figura 3.9: $J(x) = \frac{be^{-x^2}}{\varepsilon_0}$, con $b = \varepsilon_0 = 1$.

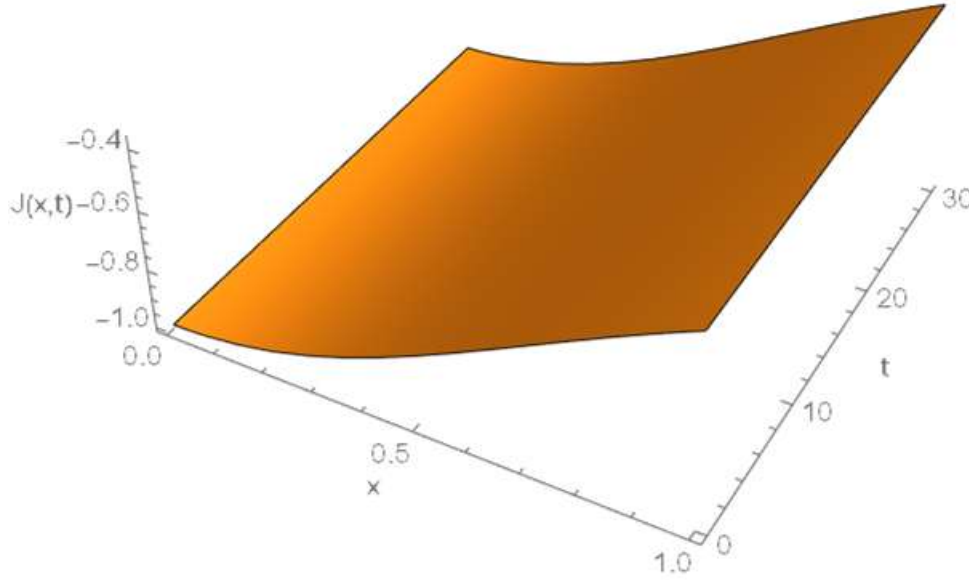


Figura 3.10: $J(t) = -b\varepsilon_0 e^{-x^2}$, con $b = \varepsilon_0 = 1$.

3.2. Ejemplo 2

Para este ejemplo proponemos un perfil de ganancia tal que este localizados al tiempo $t = 0$, esta vez lo consideramos con un crecimiento o decrecimiento acelerado del mercado, ya sea tendencia a la alza o a la baja, es decir,

$$E(x, t) = e^{-x^2} (at^2 + bt + c), \quad (3.13)$$

donde de los valores de los a , b , y c tenemos también una tendencia creciente o decreciente acelerado, haciendo énfasis en a es la aceleración. En la Figura 3.11 se muestra el perfil espacial de la ganancia para distintos valores de t manteniendo fijos $a = b = c = 1$. En la Figura 3.12 se muestra el comportamiento de la ganancia como función del tiempo, que muestra una aceleración en el crecimiento. Se muestra una perfil en 3D en la Figura 3.13.

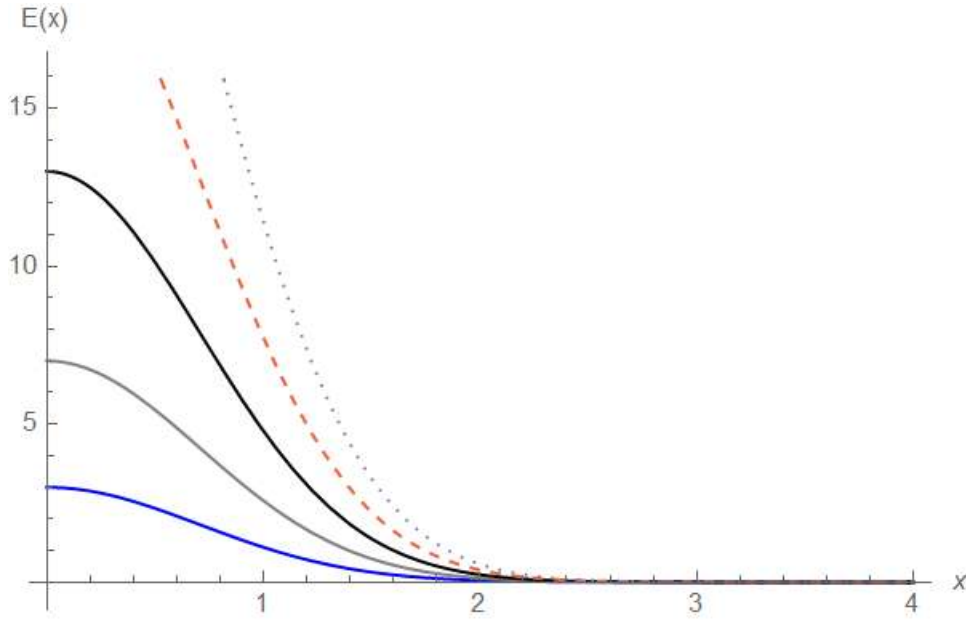


Figura 3.11: $E(x) = e^{-x^2} (at^2 + bt + c)$, con $a = b = c = 1$.

De la ley de Gauss tenemos

$$\rho(x, t) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E(x, t) = 2e^{-x^2} x \varepsilon_0 (at^2 + bt + c). \quad (3.14)$$

El perfil espacial de la distribución inicial de moneda se muestra en la Figura 3.14 fijando también $\varepsilon_0 = 1$. Se puede ver como la distribución está centrada fuera del origen y se empieza a dispersar a medida que el argumento temporal se hace más grande, aunque es más rápida la dispersión comparado al Ejemplo 1 debido a la aceleración. La evolución temporal toma forma curva provocada por la aceleración, pero el valor de $\rho(x, 0)$ cambia, como se muestra en la Figura 3.15. Se muestra perfil del la grafica en 3D de esta distribución de moneda en la Figura 3.16.

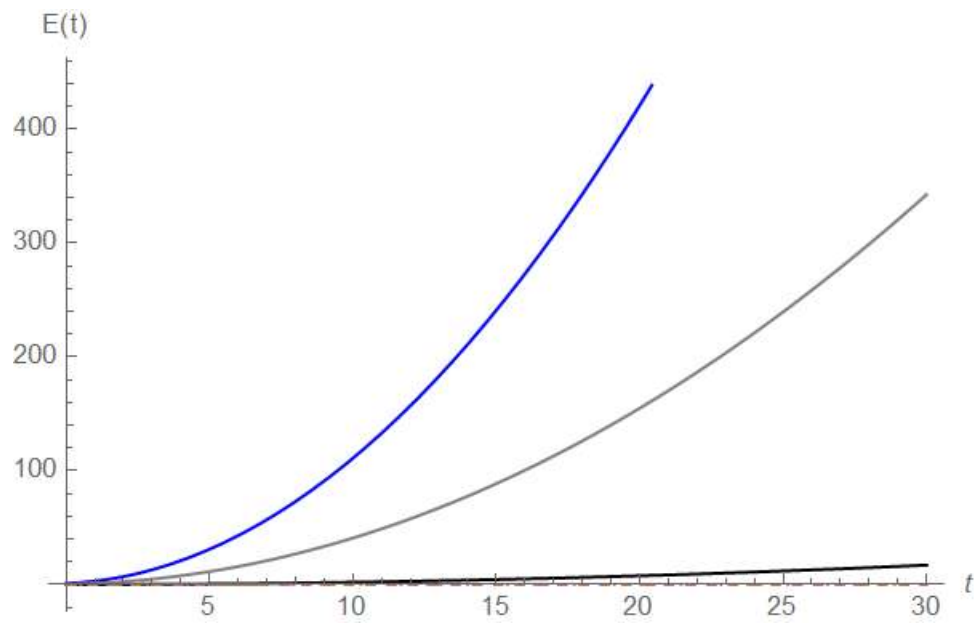


Figura 3.12: $E(t) = e^{-x^2} (at^2 + bt + c)$, con $a = b = c = 1$.

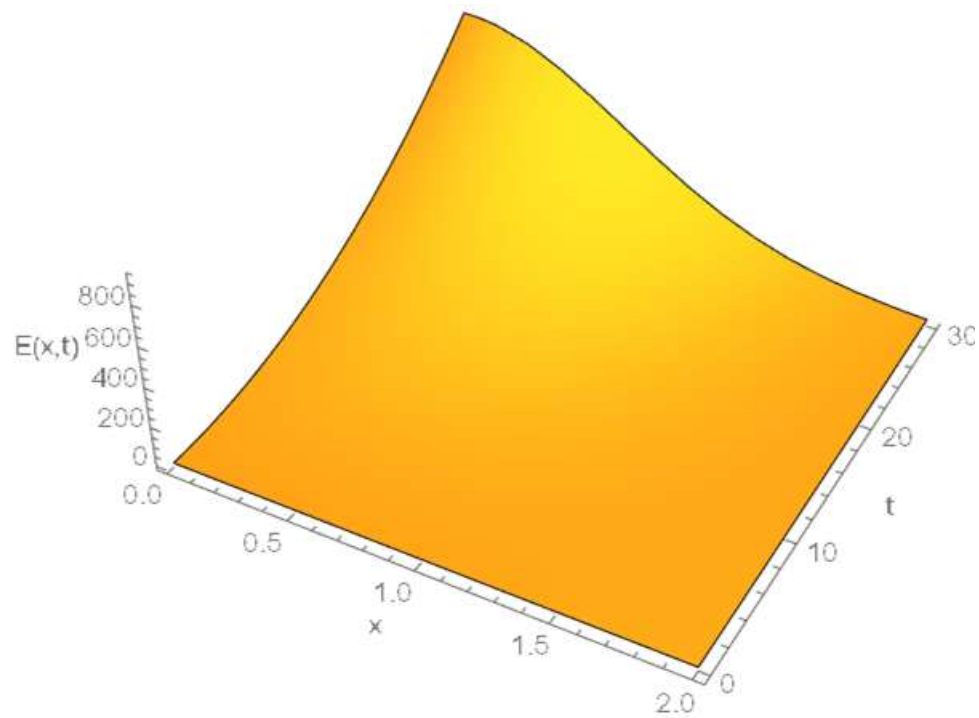


Figura 3.13: $E(x, t) = e^{-x^2} (at^2 + bt + c)$, con $a = b = c = 1$.

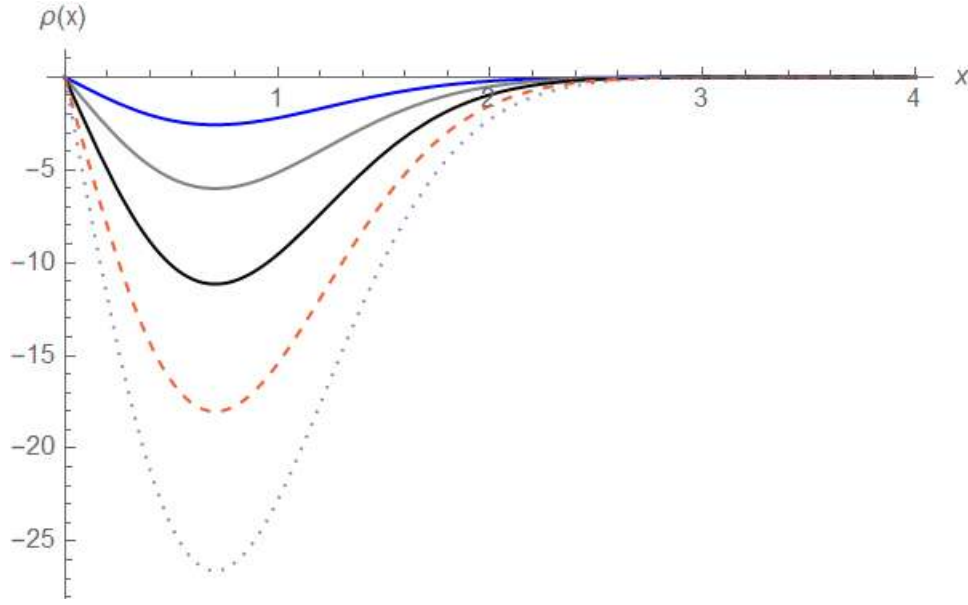


Figura 3.14: $\rho(x) = -2e^{-x^2}x\varepsilon_0(at^2 + bt + c)$, con $a = b = c = \varepsilon_0 = 1$.

De forma similar, de la Ley de Ampère, tenemos

$$J(x, t) = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x} E(x, t) = -\varepsilon_0 e^{-x^2} (2at + b). \quad (3.15)$$

Al tener una aceleración dependiente del tiempo, es decir, representa flujo de moneda que crece o decrece linealmente. El perfil espacial de dicho flujo se presenta en la Figura 3.17, que muestra que está concentrado en el origen y que aumenta, debido a ser acelerado. Esta vez hay un perfil de decrecimiento lineal como función del tiempo que se muestra en la Figura 3.18. Finalmente, se muestra perfil 3D de esta cantidad en la Figura 3.19.

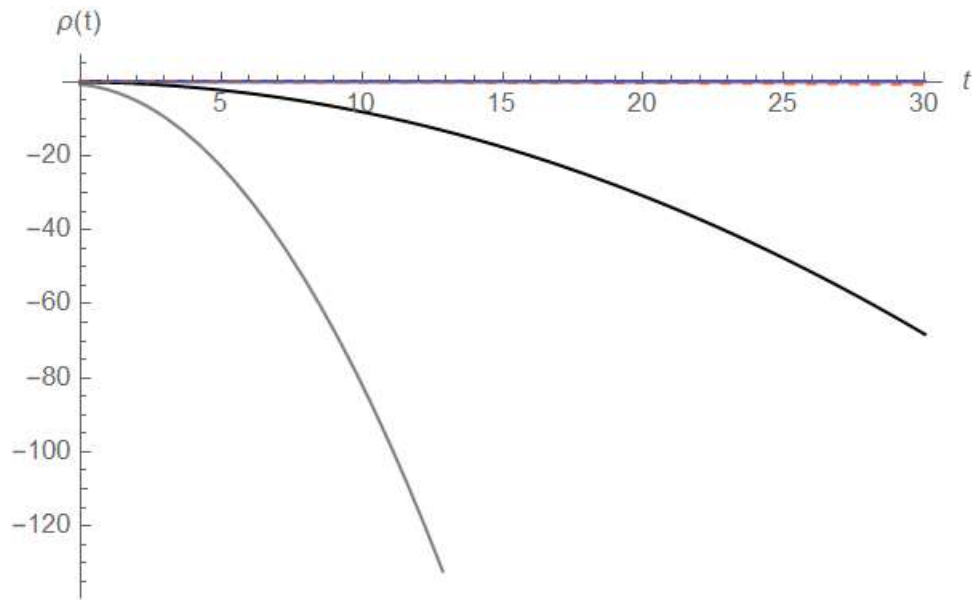


Figura 3.15: $\rho(t) = -2e^{-x^2} x \varepsilon_0 (at^2 + bt + c)$, con $a = b = c = \varepsilon_0 = 1$.

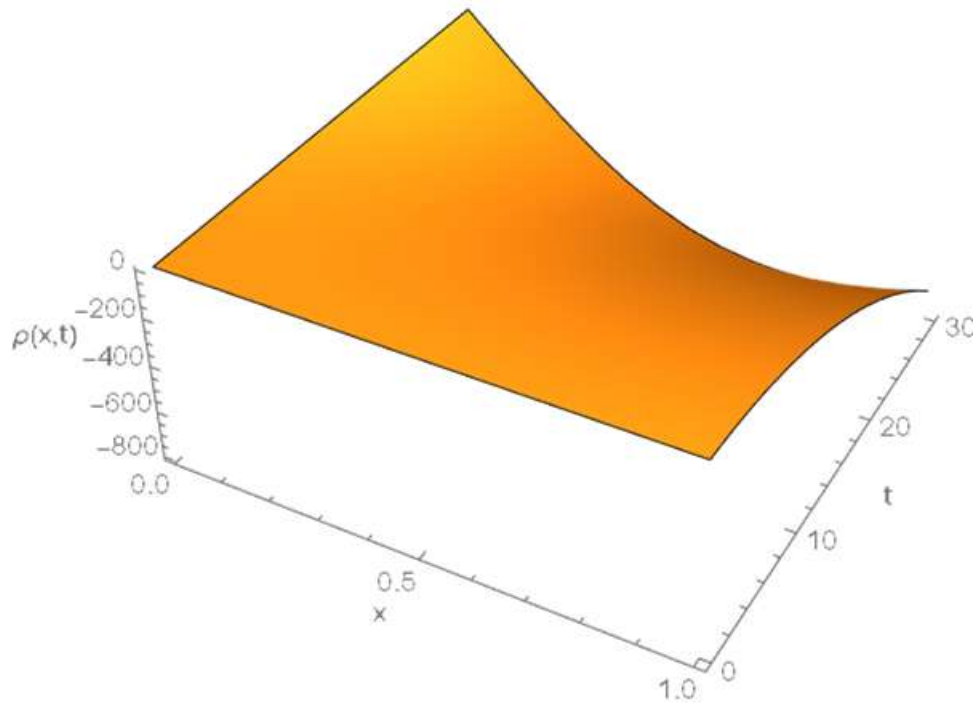


Figura 3.16: $\rho(x,t) = -2e^{-x^2} x \varepsilon_0 (at^2 + bt + c)$, con $a = b = c = \varepsilon_0 = 1$.

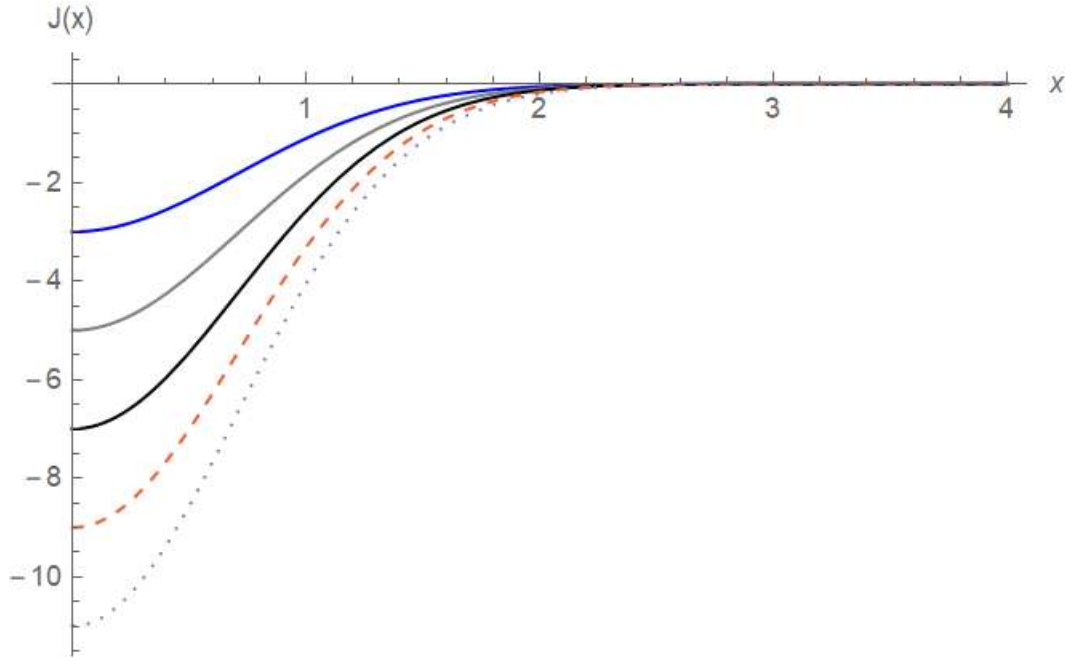


Figura 3.17: $J(x) = \frac{e^{-x^2}(2at+b)}{\mu_0}$, con $a = b = \mu_0 = 1$.

3.3. Ejemplo 3

Hasta ahora hemos visto ejemplos donde se tiene una función de ganancia $E(x, t)$, que tiene una tendencia lineal o acelerado. Para este ejemplo cambiaremos a un modelo que describe una moneda que se va diluyendo aleatoriamente en todo el mercado, lo cual es un modelo de $\rho(x, t)$. Nos interesa saber si es consistente el comportamiento que hemos tenido con los ejercicios anteriores.

Entonces, consideramos

$$\rho(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{Dt}}, \quad (3.16)$$

que es una solución a la ecuación de Difusión. En la Figura 3.20 podemos ver en un perfil espacial donde la distribución está centrada en el origen y se comienza a difundir como t comienza a aumentar, mientras en la Figura 3.21 tenemos una distribución donde la distri-

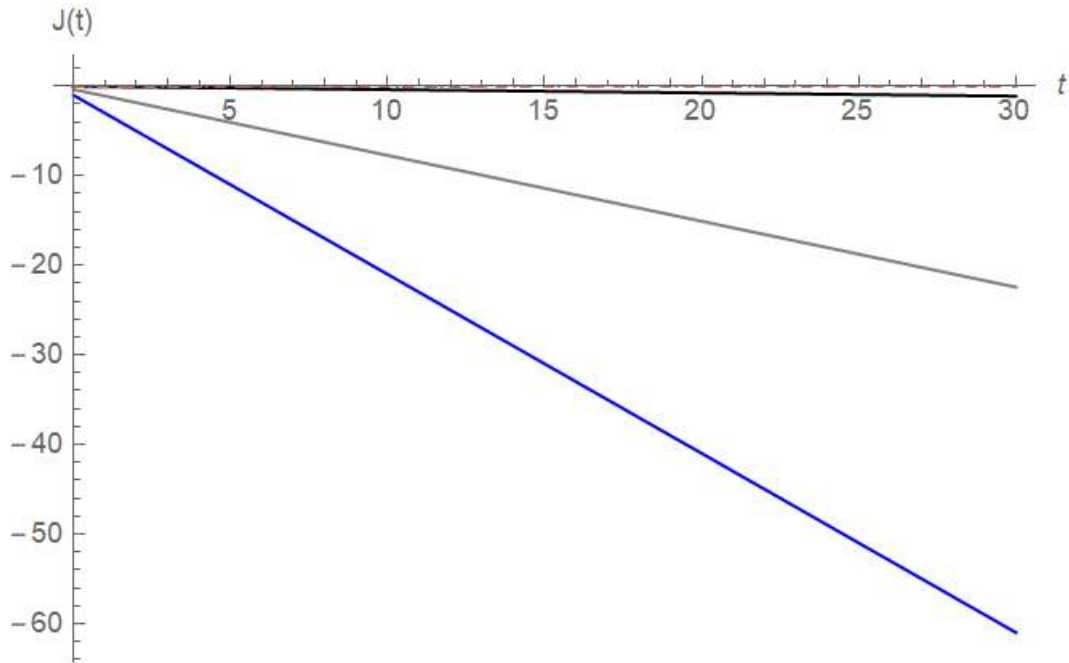


Figura 3.18: $J(t) = \frac{e^{-x^2}(2at+b)}{\mu_0}$, con $a = b = \mu_0 = 1$.

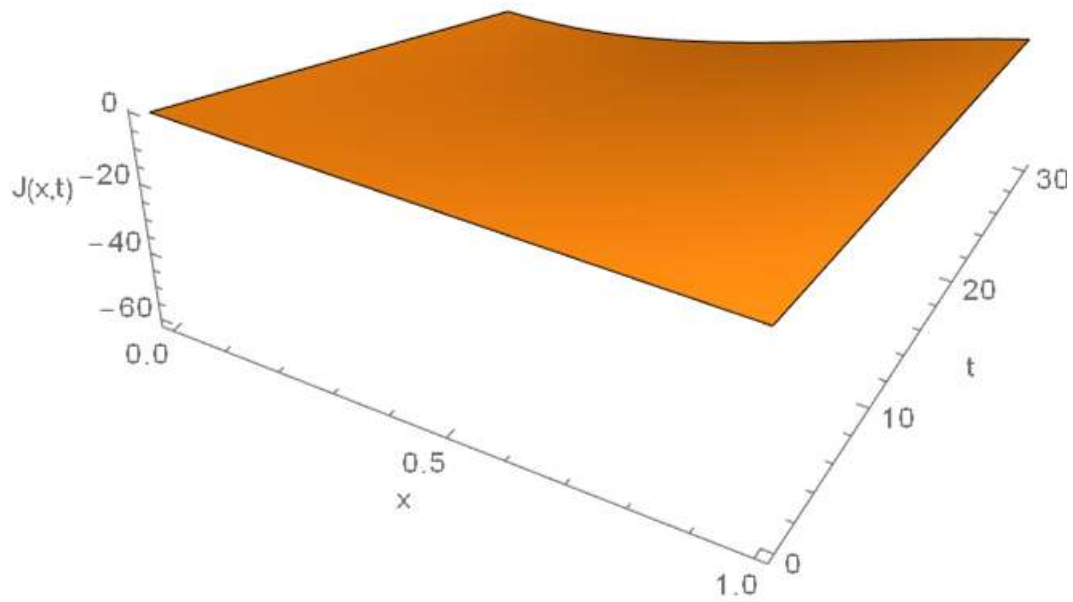


Figura 3.19: $J(x) = \frac{e^{-x^2}(2at+b)}{\mu_0}$, con $a = b = \mu_0 = 1$.

bución no está centrada en el origen y después de disminuir rápidamente este comienza a difundirse de forma uniforme lentamente. La Figura 3.22 ofrece un perfil en 3D para apreciar estos cambios.

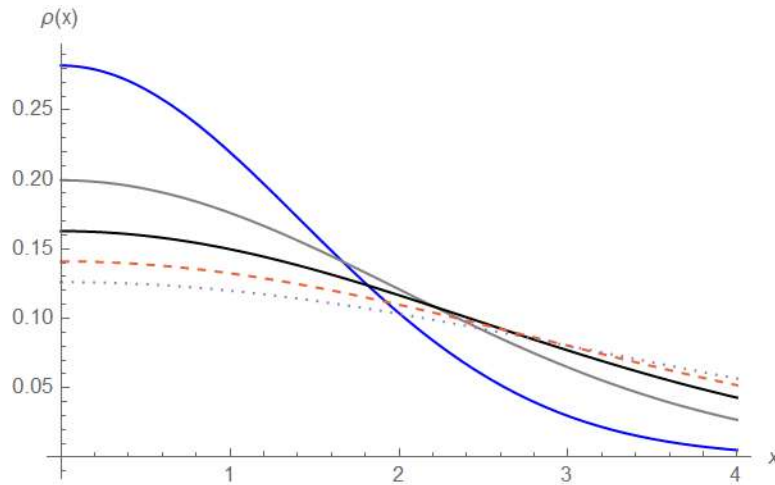


Figura 3.20: $\rho(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{Dt}}$, con $D = 1$.

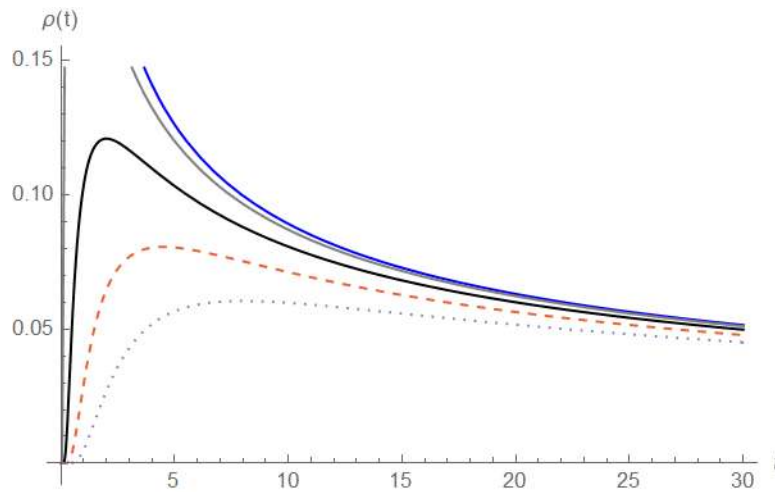


Figura 3.21: $\rho(t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{Dt}}$, con $D = 1$.

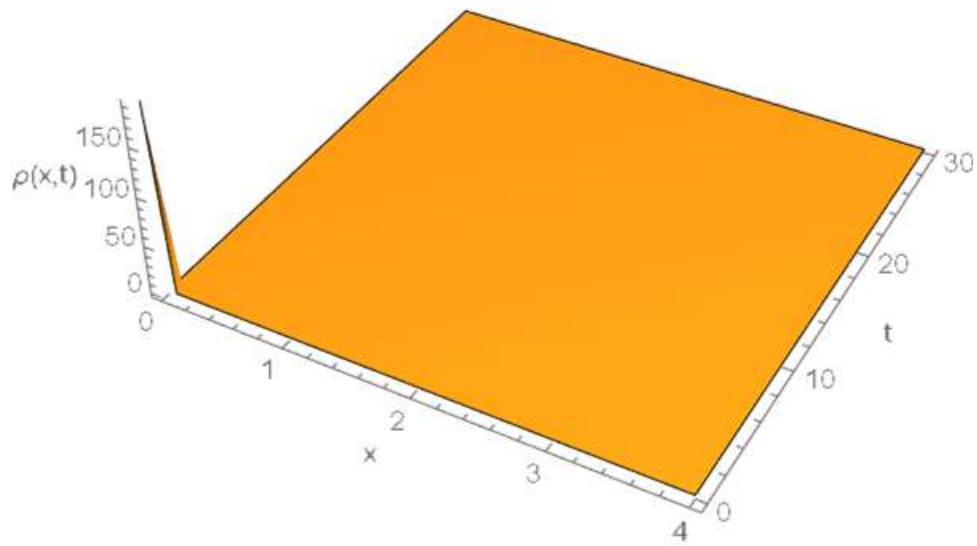


Figura 3.22: $\rho(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{Dt}}$, con $D = 1$.

Si se estudia detenidamente, se sabe que para resolver una ecuación donde tenemos que integrar e^{-x^2} , la cual no se puede expresar en términos de funciones elementales. Debido a la complejidad esta función, fue evaluada completamente en Wolfram Alpha LLC, [17], que resuelve la integral mediante la función (trascendental) de error $erf(z)$. Con esto considerado, tenemos,

$$\begin{aligned} E_x(x, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho(x, t) dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{Dt}} dx \\ &= \frac{\sqrt{D}\sqrt{t} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D}\sqrt{t}}\right)}{2\varepsilon_0\sqrt{Dt}}. \end{aligned}$$

En la Figura 3.23 se muestra un perfil espacial para $D = \varepsilon_0 = 1$, donde podemos ver como al moverse en el tiempo, tiene un comportamiento más uniforme. Con la Figura 3.24 vemos el perfil temporal y como al considerar x mayores, la difusión es más uniforme a lo largo. Al ver el perfil en 3D de la Figura 3.25 tenemos un mejor vistazo del comportamiento de la función.

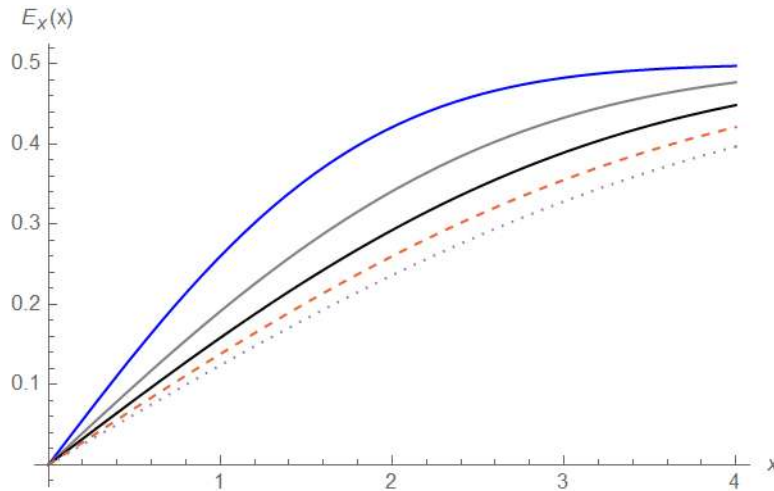


Figura 3.23: $E_x(x) = \frac{\sqrt{D}\sqrt{t} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D}\sqrt{t}}\right)}{2\varepsilon_0\sqrt{Dt}}$, con $D = \varepsilon_0 = 1$.

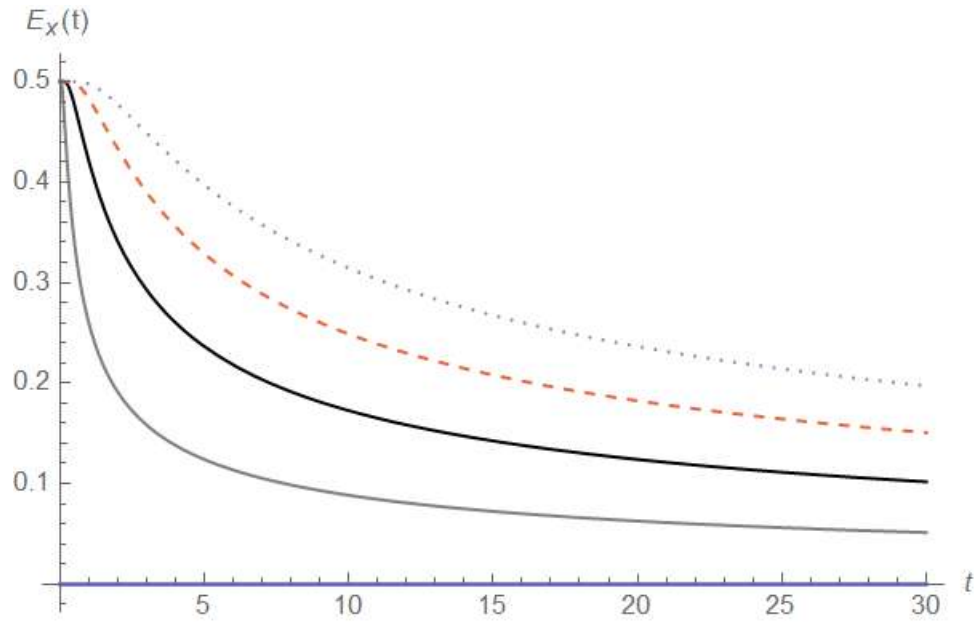


Figura 3.24: $E_x(t) = \frac{\sqrt{D}\sqrt{t}\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D}\sqrt{t}}\right)}{2\varepsilon_0\sqrt{Dt}}$, con $d = \varepsilon_0 = 1$.

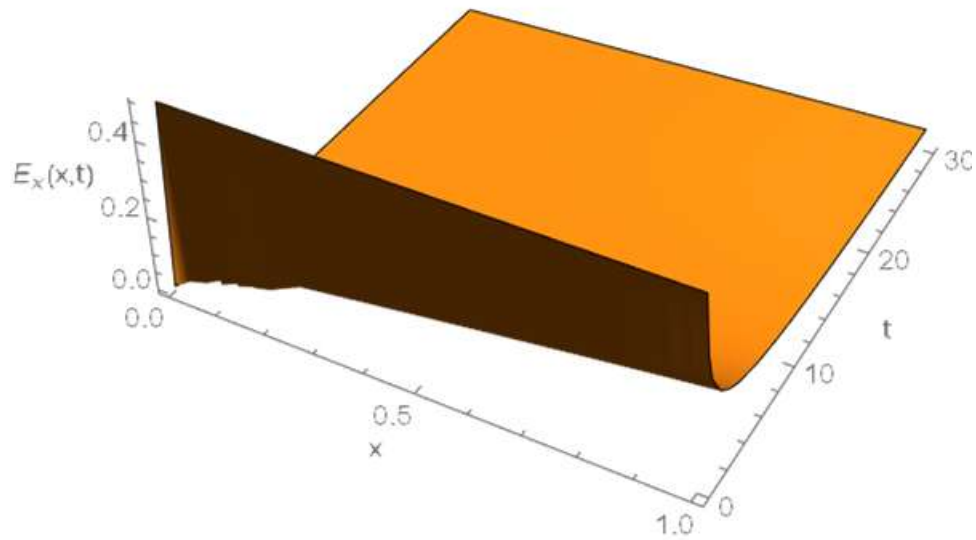


Figura 3.25: $E_x(x,t) = \frac{\sqrt{d}\sqrt{t}\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D}\sqrt{t}}\right)}{2\varepsilon_0\sqrt{Dt}}$, con $D = \varepsilon_0 = 1$.

Ya contando con $E_x(x, t)$ podemos usar la Ley de Ampère para determinar la corriente, para la cual tenemos

$$J_x(x, t) = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_x(x, t) = - \left(-\frac{D^{3/2} \sqrt{t} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D}\sqrt{t}}\right)}{4(Dt)^{3/2}} + \frac{\sqrt{D} \operatorname{Derf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D}\sqrt{t}}\right)}{4\sqrt{t}\sqrt{Dt}} - \frac{x e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{4\sqrt{\pi t}\sqrt{Dt}} \right)$$

En la Figura 3.26 que corresponde al perfil espacial vemos que la corriente no está centrada en el origen y que al paso del tiempo esta se empieza a difundir. De la Figura 3.27 vemos un comportamiento no simétrico respecto al máximo de esta función y que se acumula cerca del origen, pero que se difunde al crecimiento de t . La Figura 3.28 nos da una mejor vistazo de lo que sucede con la función $J_x(x, t)$.

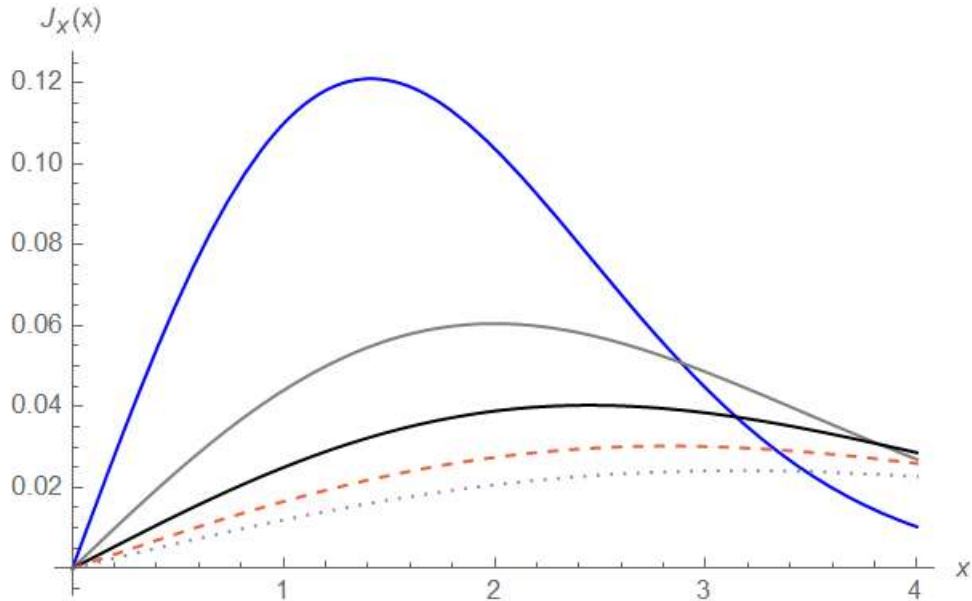


Figura 3.26: $J_x(x) = - \left(-\frac{d^{3/2} \sqrt{t} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D}\sqrt{t}}\right)}{4(Dt)^{3/2}} + \frac{\sqrt{D} \operatorname{Derf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D}\sqrt{t}}\right)}{4\sqrt{t}\sqrt{Dt}} - \frac{x e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{4\sqrt{\pi t}\sqrt{Dt}} \right)$, con $D = 1$.

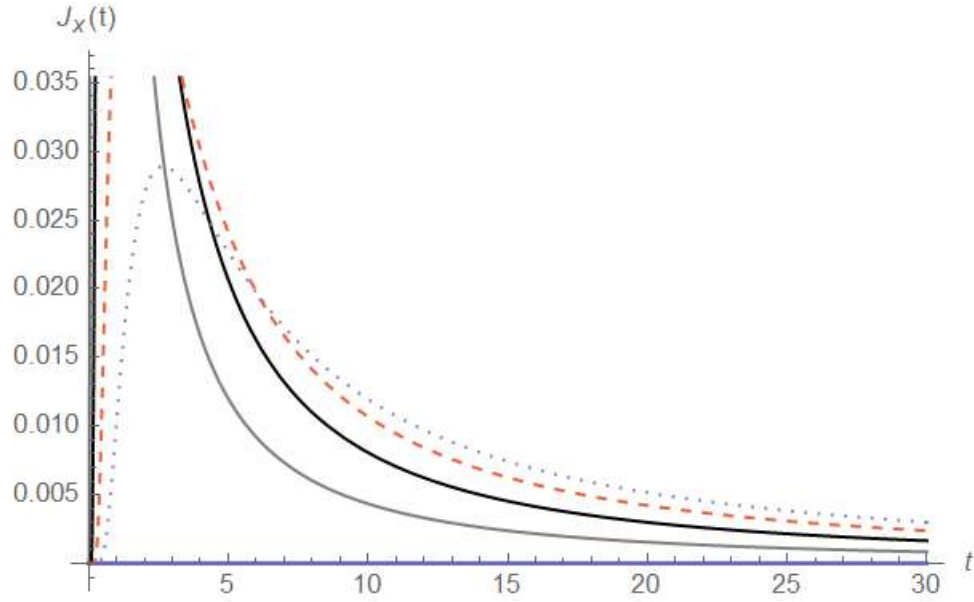


Figura 3.27: $J_x(x) = - \left(-\frac{D^{3/2}\sqrt{t}\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D}\sqrt{t}}\right)}{4(Dt)^{3/2}} + \frac{\sqrt{D}\text{Derf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D}\sqrt{t}}\right)}{4\sqrt{t}\sqrt{Dt}} - \frac{xe^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{4\sqrt{\pi t}\sqrt{Dt}} \right)$, con $D = 1$.

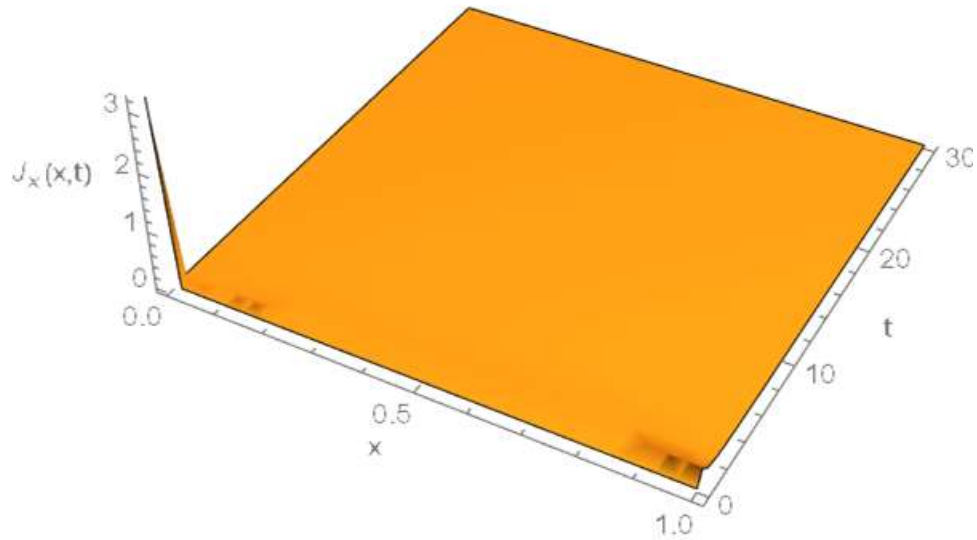


Figura 3.28: $J_x(x, t) = - \left(-\frac{D^{3/2}\sqrt{t}\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D}\sqrt{t}}\right)}{4(Dt)^{3/2}} + \frac{\sqrt{D}\text{Derf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D}\sqrt{t}}\right)}{4\sqrt{t}\sqrt{Dt}} - \frac{xe^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{4\sqrt{\pi t}\sqrt{Dt}} \right)$, con $D = 1$.

Capítulo 4

Conclusiones

De lo discutido a lo largo de esta tesis, se concluye los que a partir de la teoría electro-magnética, se pueden proponer modelos como los expuestos en este trabajo que describen algunos aspectos del mercado de intercambio de divisas. En el Ejemplo 1, se propone un modelo de interés académico donde se observa una evolución del mercado con un flujo constante de moneda en el mercado. El modelo propuesto en el Ejemplo 2 describe muy apropiadamente algunos segmentos del mercado real, como se ve en la Figura 4.1. Otros modelos, sabiendo leer bien los datos del mercado y tras ajustar apropiadamente los parámetros de los mismos, correctamente pueden predecir una tendencia del comportamiento del cambio de monedas por intervalos de tiempo más extendidos. El Ejemplo 3 está basado en la idea del comportamiento aleatorio de los compradores y vendedores en el mercado, un ingrediente realista que eventualmente podría explicar tendencias en el largo plazo.

Hay que considerar las fechas en las que los datos reales del mercado fueron tomados. El comportamiento del mercado se ha visto altamente modificado desde entonces por factores humanos como la guerra en Ucrania y la creciente crisis económica. Este tipo de elementos

aún no fueron considerados al momento de formular los modelos. Aunque es un un objetivo ambicioso, es claro que estos deben ser considerados para poder ofrecer una mejor descripción del mercado.

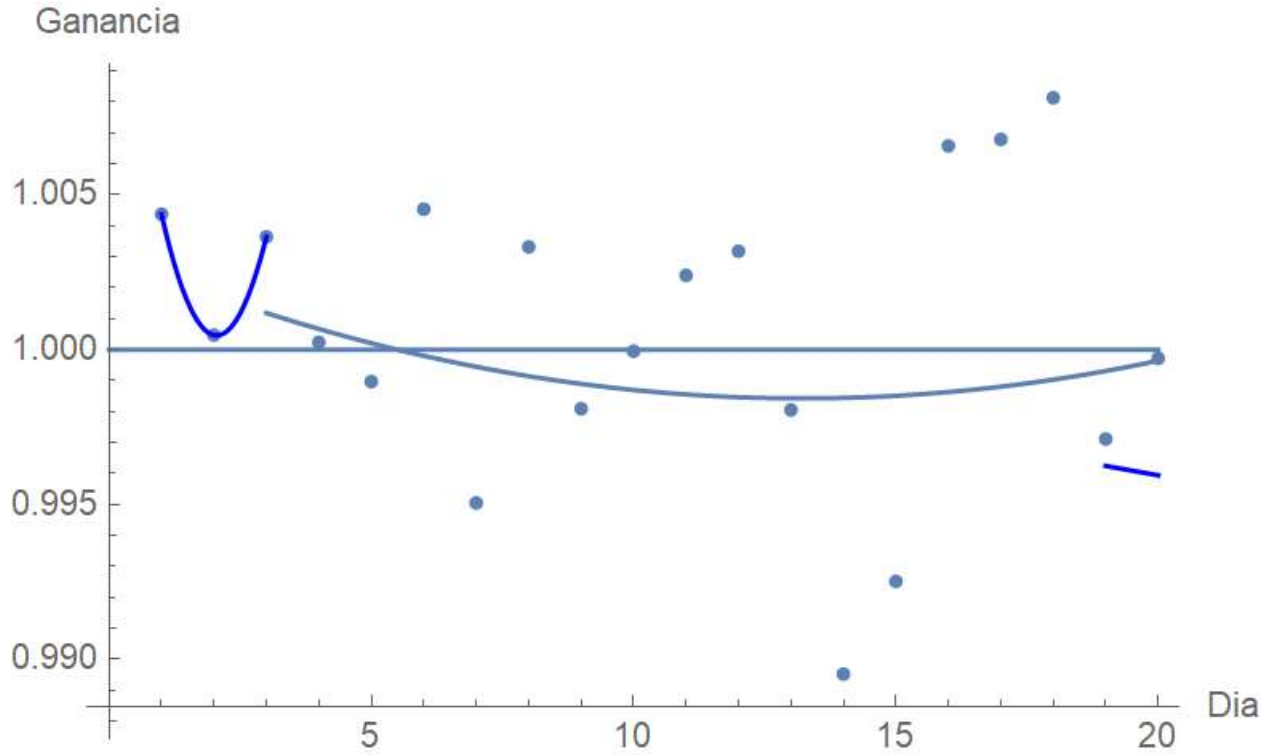


Figura 4.1: Datos mostrados anteriormente en la Figura 3.2, con curvas de tendencia basadas en el modelo propuesto de Ejemplo 2

Otra anotación es considerar que estos modelos son completamente teóricos, que han sido propuestos desde un principio físico-matemático, con solo la consideración de incluir los factores básicos del mercado que permitan tener una solución analítica simple. Desde este punto de vista, un detalle a mencionar es que estos modelos en general pertenecen a una familia de ejemplos de la forma

$$E(x, t) = E_x(x)E_t(t),$$

de donde se concluye que se puede profundizar de forma analítica la posibilidad que con un *ansatz* dado para el perfil campo eléctrico, siempre se cumpla la ecuación de continuidad. Al mismo tiempo, falta verificar y comprender la equivalencia en el mercado de ε_0 y μ_0 (y otros parámetros como q), ya que están heredadas de las ecuaciones de Maxwell y acompañan a las soluciones finales sin obedecer alguna restricción. Estos parámetros libres sin duda permitirán tener una mejor descripción del comportamiento del mercado.

Todo este análisis también debe conducirse de forma numérica, para entender los alcances en la descripción de las oportunidades de arbitraje desde la perspectiva de las teorías de norma en situaciones más complejas con ingredientes cada vez más realistas. Entre otros escenarios, ir más allá de la aproximación apagada y resolver las ecuaciones acopladas del modelo en todo su esplendor. Todas estas ideas y otras adicionales están siendo consideradas para el futuro.

Como última conclusión, aunque los modelos no parecieran dar una predicción exacta de los datos del mercado real, dadas la teoría que la sostiene y la visión que se usa, creo firmemente que explica -aunque de forma burda aún- de manera muy elegante cómo es que se comporta el arbitraje de monedas, lo cual es un concepto muy humano. En otras palabras, un pequeño avance para conocernos un poco más como humanos por medio de la física.

Bibliografía

- [1] Sitabhra Sinha, Arnab Chatterjee, Anirban Chakraborti, and Bikas K Chakrabarti. *Econophysics: an introduction*. John Wiley & Sons, 2010.
- [2] Ricardo Mansilla. *Una breve introducción a la econofísica*. Equipo Sirius, 2003.
- [3] W Brian Arthur, Steven N Durlauf, and David A Lane. *The economy as a complex evolving system II*, volume 27. Westview Press, 1997.
- [4] Rosario N Mantegna and H Eugene Stanley. *Introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*. Cambridge university press, 1999.
- [5] Jakob Schwichtenberg. *Physics from Finance: A gentle introduction to gauge theories, fundamental interactions and fiber bundles*. No-nonsense books, 2019.
- [6] Jan Bazant. La economía como organismo. *El Trimestre Económico*, 14(56(4)):534–547, 1948.
- [7] Andrew Zangwill. *Modern electrodynamics*. Cambridge University Press, 2013.
- [8] John R Reitz, FJ Milford, and RW Christy Fundamentos de la Teoría. Electromagnética, 1996.

- [9] John David Jackson. Classical electrodynamics, 1999.
- [10] Daniel Fleisch. *A student's guide to Maxwell's equations*. Cambridge University Press, 2008.
- [11] Albert Einstein et al. On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen der physik*, 17(10):891–921, 1905.
- [12] Kirill Ilinski. Physics of finance. *arXiv preprint hep-th/9710148*, 1997.
- [13] Cosma Shalizi. Physics of finance: Gauge modelling in non-equilibrium pricing. *Quantitative Finance*, 1(4):393, 2001.
- [14] Kenneth Young. Foreign exchange market as a lattice gauge theory. *American Journal of Physics*, 67(10):862–868, 1999.
- [15] Juan Maldacena. The symmetry and simplicity of the laws of physics and the higgs boson. *European Journal of Physics*, 37(1):015802, 2015.
- [16] I Richard Lapidus. Classical electrodynamics in a universe with two space dimensions. *American Journal of Physics*, 50(2):155–157, 1982.
- [17] Wolfram Research, Inc. Mathematica, Versión 13.1. Champaign, IL, 2022.