



Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo

**Facultad de Ciencias Físico
Matemáticas**

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

Sincronización y Control de Sistemas
Hipercaóticos

T E S I S

que para obtener el título de:
Licenciado en Ciencias en Físico Matemáticas

P r e s e n t a :

Néstor Daniel Ramírez Nambo

Asesor:

Dr. Ulises Uriostegui Legorreta

Morelia Michoacán, Octubre 2022

Agradecimientos

A mi madre, familia y amigos quienes nunca dejaron de apoyarme, y especialmente a mis hermanos a quienes ya no les puedo entregar este logro en persona. ¡Lo logré hermanos!

CAPÍTULO 0. AGRADECIMIENTOS

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	v
1. Dinámica de los osciladores van der Pol y Duffing	1
1.1. Introducción	1
1.2. Oscilador van der Pol	1
1.2.1. Análisis de la ecuación de van der Pol	2
1.3. Oscilador Duffing	11
1.3.1. Análisis de la ecuación de Duffing	12
1.3.2. El oscilador de Duffing forzado	15
2. Control y sincronización de sistemas caóticos	17
2.1. Introducción	17
2.2. Métodos de control caos	18
2.2.1. Control a través de un parámetro accesible del sistema	19
2.2.2. Control por modificación de la estructura del sistema	19
2.2.3. Control por inyección de señales externas	20
2.2.4. Técnicas clásicas de Ingeniería de control	20
2.3. El problema general de la sincronización	21
2.4. Sincronización de sistemas caóticos	21
2.4.1. Métodos de sincronización	22
2.4.2. Tipos de Sincronización	25
2.4.3. La configuración de Pecora y Carroll (PC)	26
2.4.4. La configuración APD.	26
2.4.5. Sincronización entre sistemas no idénticos de baja dimensión. . .	27
3. Sistema hipercaótico van der Pol-Duffing	29
3.1. Introducción	29
3.2. Sistema van der Pol-Duffing	30

ÍNDICE GENERAL

4. Conclusiones	41
Bibliografía	43

Introducción

La tesis trata sobre el control y sincronización de sistemas hipercaóticos, particularmente en el sistema van der Pol-Duffing con forzamiento. La importancia del estudio de la sincronización de sistemas caóticos tiene numerosas aplicaciones en áreas de la tecnología, electrónica, química y otros. Algunas aplicaciones del control y sincronización del caos son: sincronización de sistemas caóticos con láser, análisis de reacciones químicas, circuitos electrónicos, modelado de sistemas biológicos, modelado de células cardiacas, etc. Dentro del amplio espectro de problemas que se investigan actualmente en esta área, este trabajo aporta resultados originales especialmente en la sincronización caótica. Se investigan estos sistemas desde el punto de vista teórico.

En el primer capítulo se analizará la dinámica de los osciladores de van der Pol y Duffing. Para conocer más a detalle su estabilidad, puntos de equilibrio y dinámica que presentan al variar los parámetros de los osciladores.

En el segundo capítulo se describen los métodos de control y sincronización más importantes que dan el soporte teórico para la comprensión del presente trabajo y se realiza una revisión de las técnicas de control y sincronización para, posteriormente, aplicarlas a resolver el sistema van der Pol-Duffing.

En el tercer capítulo se aborda el problema de control y sincronización del sistema van der Pol-Duffing mediante los esquemas unidireccional y bidireccional, para así, lograr resolver el problema de sincronización completa entre osciladores distintos. Se analizó la dinámica del sistema y se realizaron simulaciones numéricas variando parámetros del sistema para ver si existía sincronización.

Finalmente el cuarto capítulo contiene las conclusiones de este trabajo de tesis. Se discute en detalle los resultados obtenidos en este trabajo.

CAPÍTULO 0. INTRODUCCIÓN

Capítulo 1

Dinámica de los osciladores van der Pol y Duffing

1.1. Introducción

Una de las áreas que han contribuido a la comprensión del fenómeno del caos lo contribuye la teoría de las oscilaciones, donde varios modelos eléctricos y electromecánicos exhiben un comportamiento caótico. Las primeras aportaciones provienen de las investigaciones de Duffing con un modelo de una varilla vibrante electromagnetizada, y de van der Pol, quien estudió los circuitos eléctricos con un trido cuya resistencia varía con la intensidad de la corriente.

El estudio formal del oscilador de Duffing, cabe decir en el contexto de la teoría del caos, fue efectuado por Holmes y Moon en 1979. Ellos demostraron que conforme ocurría la variación de un parámetro el oscilador podía exhibir una secuencia de bifurcaciones del tipo duplicación del periodo, hasta alcanzar un estado caótico.

Van der Pol pudo notar el comportamiento caótico del oscilador que lleva su nombre, aunque no le dedicó más atención. El estudio moderno del oscilador forzado de van der Pol se le debe a Levi 1981.

1.2. Oscilador van der Pol

El oscilador de van der Pol fue descrito por el ingeniero y físico holandés Balthasar van der Pol mientras trabajaba en Philips Company (Holanda), van der Pol encontró oscilaciones estables que llamó oscilaciones de relajación [1], conocidas en la actualidad como ciclos límite en circuitos que usaban válvulas de vacío. Cuando esos circuitos se hacen funcionar cerca del ciclo límite entran en acoplamiento y la señal entra en fase con la corriente. Van der Pol y su colega, Van der Mark, informaron en el número de septiembre de 1927 de Nature [2] que, para determinadas frecuencias aparecía un ruido

CAPÍTULO 1. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

irregular, siempre cerca de las frecuencias de acoplamiento. Fue uno de los primeros descubrimientos experimentales del caos [3].

La ecuación de van der Pol tiene una larga historia en la Física y la Biología. Por ejemplo, en Biología, Fitzhugh y Nagumo aplicaron la ecuación a un campo bidimensional en el modelo de FitzHugh-Nagumo para describir el potencial de acción de las neuronas [4]. También se ha usado en sismología para modelar el comportamiento de dos placas en una falla [5]. Aunque se conoce mejor a van der Pol por su trabajo con circuitos eléctricos, descubrió una amplia variedad de sistemas que presentan oscilaciones: el arpa eólica, un martillo neumático, el rechinido de un cuchillo en un plato, el ondear de una bandera al viento, el ocasional zumbido de una llave de agua, la recurrencia periódica de epidemias y crisis económicas y, por último, el latido del corazón [6]. Van der Pol agrupó varios fenómenos en una sola categoría de sistemas que presentan oscilaciones periódicas.

El oscilador de van der Pol es un sistema dinámico consistente en un circuito eléctrico no lineal utilizado a principios del siglo pasado. Este oscilador con amortiguamiento no lineal está descrito por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden homogénea:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (1.1)$$

donde x es la variable dinámica y μ el parámetro que indica la no linealidad y la fuerza de amortiguamiento.

1.2.1. Análisis de la ecuación de van der Pol

De la Ec. (1.1) podemos ver que cuando $\mu = 0$ el oscilador se comporta como un oscilador armónico simple. Sin embargo, conforme aumenta el valor de μ las formas de onda resultantes se asemejan a las de un oscilador de relajación. A medida que aumenta μ , el sistema es más inestable, con lo que las variables abandonarán la vecindad de origen con mayor rapidez [6]. Para poder entender mejor el comportamiento de este oscilador es necesario empezar por resolver la ecuación.

Cuando $x \ll 1$, el término cuadrático x^2 es despreciable y la ecuación del sistema se convierte en una ecuación diferencial lineal con amortiguamiento negativo $-\mu$, así

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu\frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (1.2)$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden se puede representar, como un sistema de ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu y - x. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 1. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

Los puntos x^* para los cuales $x^* = F(x^*) = 0$ se conocen como puntos fijos o críticos. Calculando el punto fijo del sistema, se tiene como punto fijo $P(x = 0, y = 0)$.

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ \mu y - x &= 0. \end{aligned}$$

Si se tiene un sistema dinámico lineal $\dot{X} = AX$, es fácil conocer qué tipo de punto fijo presenta dicho sistema; simplemente se calculan los eigenvalores λ a partir de la ecuación característica del sistema $\det(A - \lambda I) = 0$ y se analiza la relación que hay entre los eigenvalores. Los valores propios de una matriz están dados por su ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$, para 2 dimensiones es:

$$\lambda^2 - \lambda \text{Tr}(A) + \det(A) = 0, \quad (1.3)$$

entonces:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr}(A) \pm \sqrt{[\text{Tr}(A)]^2 - 4\det(A)}}{2}. \quad (1.4)$$

por lo que los valores propios dependen de la traza ($\text{Tr}(A)$) y del determinante ($\det(A)$) de la matriz A.

Podemos hacer un diagrama general por medio del discriminante de la Ec. (1.4), graficando $\det(A)$ vs $\text{Tr}(A)$, de donde tenemos las relaciones $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ y $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$

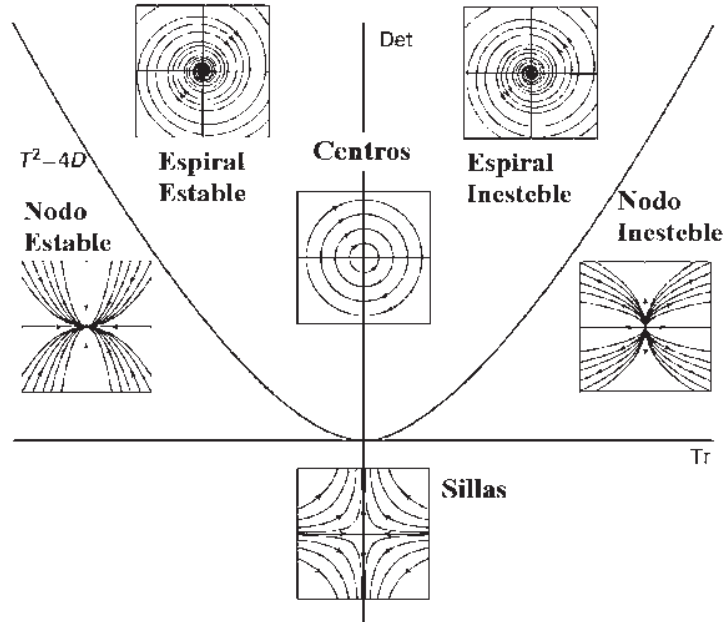


Figura 1.1: Clasificación de puntos fijos en el plano.

CAPÍTULO 1. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

La matriz que corresponde al sistema lineal es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}.$$

donde $Tr(A) = \mu$ y $det(A) = 1 > 0$. De esta manera, como se puede observar en el diagrama de bifurcación traza-determinante Fig. 1.1, no tendremos puntos Silla y el punto fijo $P(x = 0, y = 0)$ es inestable (espirales inestables $0 < \mu < 2$ y nodos inestables para $\mu \geq 2$) como se muestra en la Fig. 1.2. Por lo tanto cuando x es pequeño el sistema es inestable alrededor del punto fijo.

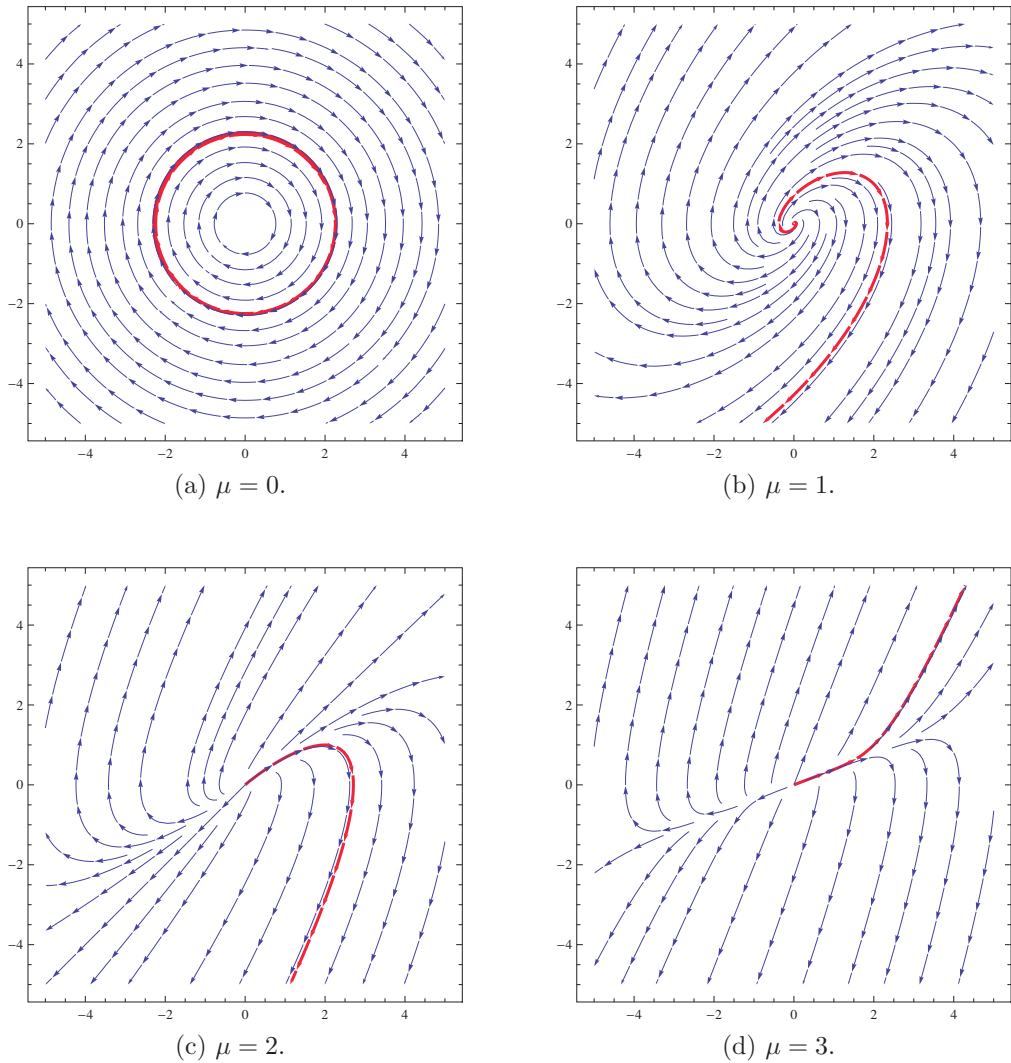


Figura 1.2: Espacio fase del sistema para ciertos valores de μ .

Para el caso cuando x es grande, el término x^2 es el dominante y el amortiguamiento es positivo. Por consiguiente, se espera que el comportamiento esté restringido a alguna

CAPÍTULO 1. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

región alrededor del punto fijo. El sistema de van der Pol satisface el Teorema de Liénard [9], ya que de la Ec. (1.1) tenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu(1 - x^2)y - x.\end{aligned}$$

donde $f(x) = -\mu(1 - x^2)$ y $g(x) = x$. Este sistema se puede reescribir en la forma de la ecuación de Liénard.

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0. \quad (1.5)$$

Teorema 1.2.1 (Teorema de Liénard) *Si en la Ec. (1.5) $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen las siguientes propiedades*

- $f(x)$ y $g(x)$ son continuamente diferenciables para todo x
- $g(-x) = -g(x)$ para todo x ($g(x)$ es una función impar)
- $g(x) > 0$ para todo $x > 0$
- $f(-x) = f(x)$ para todo x ($f(x)$ es una función par)
- la función impar $F(x) = \int_0^x f(u)du$ tiene exactamente un cero positivo en $x = a$, es negativa para $0 < x < a$, es positiva y no decreciente para $x > a$, y $F(x) \rightarrow \infty$, cuando $x \rightarrow \infty$

entonces el sistema Ec. (1.5) tiene un único ciclo límite estable en torno al origen del espacio fase.

Entonces, de acuerdo al teorema de Liénard el sistema original de van der Pol tiene una única trayectoria cerrada que rodea al origen y a ella tienden en espiral todas las demás trayectorias, asegurándose con esto que hay un ciclo límite estable en el espacio fase.

Usando la transformación de Liénard

$$y = x - \frac{x^3}{3} - \frac{\dot{x}}{\mu}. \quad (1.6)$$

se obtiene

$$\dot{x} = \mu\left(x - \frac{x^3}{3} - y\right). \quad (1.7)$$

derivando la Ec. (1.6) y despejando x de la Ec. (1.1).

$$\dot{y} = \dot{x}(1 - x^2) - \frac{\ddot{x}}{\mu}, \quad (1.8)$$

$$\frac{x}{\mu} = -\frac{\ddot{x}}{\mu} + (1 - x^2)\dot{x}. \quad (1.9)$$

CAPÍTULO 1. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

igualando las Ecs. (1.8) y (1.9)

$$\dot{y} = \frac{x}{\mu}. \quad (1.10)$$

Por lo tanto la Ec. (1.1) puede reescribirse como el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu\left(x - \frac{x^3}{3} - y\right), \\ \dot{y} &= \frac{x}{\mu}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Cuando $\mu \ll 1$, es conveniente reescribir la Ec. (1.1) como el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu\left(x - \frac{x^3}{3}\right) - y, \\ \dot{y} &= x. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Siguiendo los mismos pasos anteriores para el cálculo de puntos fijos y así encontrar la matriz asociada al sistema. Tenemos nuevamente el punto fijo $P(0, 0)$.

$$\begin{aligned} \mu\left(x - \frac{x^3}{3}\right) - y &= 0, \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Consideremos la Ec. (1.12). Si hacemos $f = \mu\left(x - \frac{x^3}{3}\right) - y$ y $g = x$, donde derivamos parcialmente cada una de ellas con respecto a x y y obtenemos:

$$f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x} = \mu(1 - x^2), \quad f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y} = -1,$$

$$g_x \equiv \frac{\partial g}{\partial x} = 1, \quad g_y \equiv \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

La matriz Jacobiana del sistema evaluada en el punto fijo $P(0, 0)$ para $\mu \ll 1$ está dado por:

$$\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

de donde $Tr(J) = \mu$, $det(J) = 1$, por lo que alrededor del punto de equilibrio se obtienen espirales inestables. El punto de equilibrio en estas condiciones resultó ser, una vez más, inestable (repulsor) Fig. 1.3.

CAPÍTULO 1. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

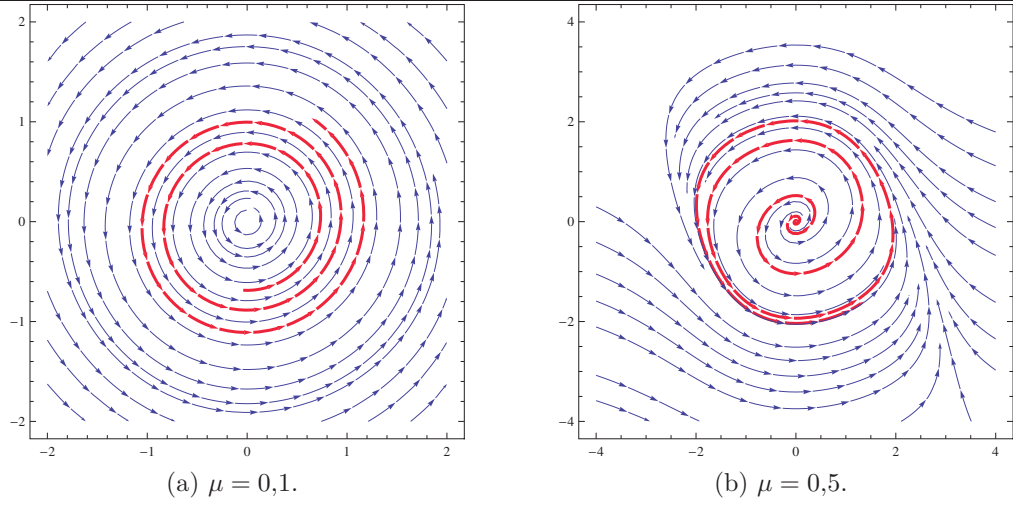


Figura 1.3: Espacio fase del sistema para ciertos valores de μ .

En el caso límite, para $\mu = 0$ (amortiguamiento nulo) el sistema es lineal, preserva la energía y se tiene que la matriz del sistema es

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

donde la $Tr(\mathbf{B}) = 0$, $det(\mathbf{B}) = 1$. Para este caso se obtienen centros Fig. 1.4.

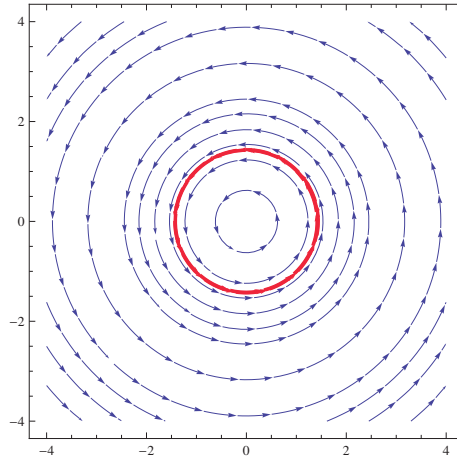


Figura 1.4: Espacio fase del sistema para $\mu = 0$ de la matriz $\mathbf{B}$.

El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, los valores propios son $\lambda = \pm i$.
Para $\lambda_1 = i$:

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

CAPÍTULO 1. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

Para $\lambda_1 = i$ se tiene que, $y = -ix$, por lo tanto el vector propio asociado es

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_1 = -i$ se tiene que, $y = ix$, por lo tanto el vector propio asociado es

$$\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Entonces, la solución del sistema en términos de los vectores propios se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t - i \sin t),$$

de modo que agrupando términos y reescribiendo nuevas constantes D y E se obtiene

$$x = D \cos t + E \sin t, \quad (1.13)$$

$$y = D \sin t - E \cos t. \quad (1.14)$$

Para obtener la solución aproximada para pequeños valores de μ ($\mu \ll 1$) se consideran nuevas variables (u, v) , que rotan con la solución sin perturbarla, es decir

$$\begin{aligned} u &= x \cos t + y \sin t, \\ v &= -x \sin t + y \cos t, \end{aligned}$$

Sustituyendolas en las Ecs. (1.13) y (1.14) se obtiene

$$\dot{u} = \mu \left(u \cos t - v \sin t - \frac{1}{3} (u \cos t - v \sin t)^3 \right) \cos t, \quad (1.15)$$

$$\dot{v} = -\mu \left(u \cos t - v \sin t - \frac{1}{3} (u \cos t - v \sin t)^3 \right) \sin t. \quad (1.16)$$

Como $\dot{u}$ y $\dot{v}$ son $O(\mu)$, la velocidad cambiante de u y v es mucho menor que la de $\cos t$ y $\sin t$. Entonces se puede aplicar la teoría del promedio a las Ecs. (1.15) y (1.16). Integrando los miembros derechos de estas ecuaciones con respecto a t desde 0 a $T = 2\pi$ y manteniendo fijas a u y v se obtiene

$$\dot{u} = \frac{\mu}{8} u (4 - (u^2 + v^2)), \quad (1.17)$$

$$\dot{v} = \frac{\mu}{8} v (4 - (u^2 + v^2)). \quad (1.18)$$

Para mostrar que el sistema tiene un ciclo límite hacemos un cambio de variables

$$r^2 = u^2 + v^2. \quad (1.19)$$

CAPÍTULO 1. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

derivando

$$r\dot{r} = u\dot{u} + v\dot{v}.$$

Sustituyendo las Ecs. (1.17) y (1.18) en la Ec. (1.19) y usando $r^2 = u^2 + v^2$, se tiene que

$$r\dot{r} = \frac{\mu}{8}u^2(4 - (u^2 + v^2)) + \frac{\mu}{8}v^2(4 - (u^2 + v^2)),$$

de donde se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{r} = \frac{\mu}{8}r(4 - r^2). \quad (1.20)$$

Si $2 < r$, $\dot{r} < 0$ el nodo es pozo o atractor pero esto no podría suceder porque en casos anteriores, se demostró que el punto crítico es un punto repulsor. Para $r = 2$ se tiene un equilibrio estable del sistema. Por lo tanto, el sistema original de la Ec. (1.12) tiene un ciclo límite con $r = 2$ para pequeños valores de μ , Fig. 1.5.

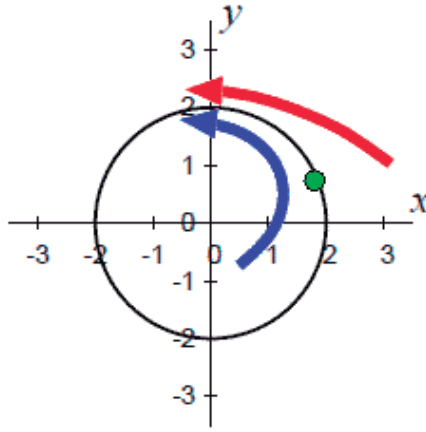


Figura 1.5: Flujos del oscilador de van der Pol para $\mu \ll 1$.

Cuando $\mu \gg 1$, es conveniente usar la Ec. (1.11). En este caso, si hacemos $f = \mu(x - \frac{x^3}{3} - y)$, $g = \frac{x}{\mu}$ y derivamos parcialmente cada una de ellas con respecto a x , y con respecto a y obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu(1 - x^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\mu,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\mu}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

La matriz Jacobiana del sistema evaluando en el punto fijo $P(0,0)$ para $\mu \gg 1$:

$$\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \mu & -\mu \\ \frac{1}{\mu} & 0 \end{pmatrix}.$$

CAPÍTULO 1. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

de donde $Tr(J) = \mu$, $det(J) = 1$, por lo que el punto de equilibrio es un nodo inestable, es decir, está expulsando sus trayectorias. Una vez mas se demuestra que el punto de equilibrio del sistema es repulsor Fig 1.6.

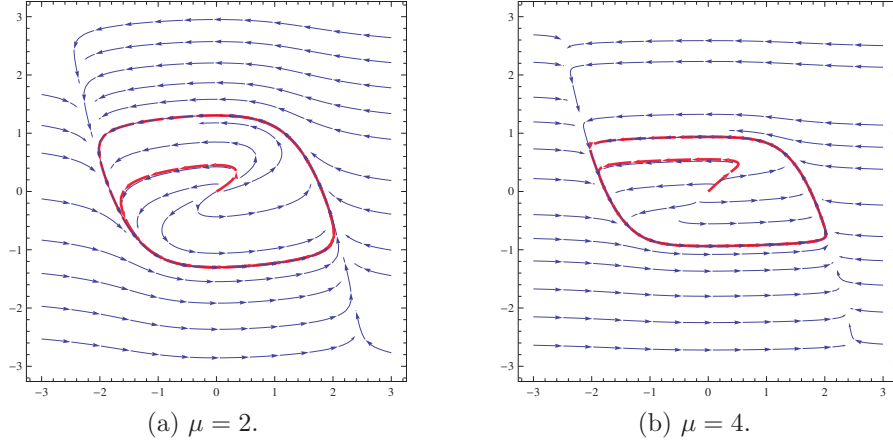


Figura 1.6: Espacio fase del sistema para ciertos valores de μ .

En los términos que describe Kanamaru[7] cuando el sistema está fuera de la curva

$$y = x - \frac{x^3}{3}$$

se obtiene la relación $|\dot{x}| \gg |\dot{y}| = O(1/\mu)$. Entonces el sistema se mueve rápidamente en dirección horizontal. Cuando el sistema entra en la región donde $|x - x^3/3 - y| = O(1/\varepsilon^2)$, $\dot{x}$ y $\dot{y}$ son comparables porque ambas son $O(1/\mu)$. Entonces el sistema discurre despacio a lo largo de la curva y, eventualmente, sale de esta región como se muestra en la Fig.1.7. Se puede observar que el sistema tiene un ciclo límite estable.

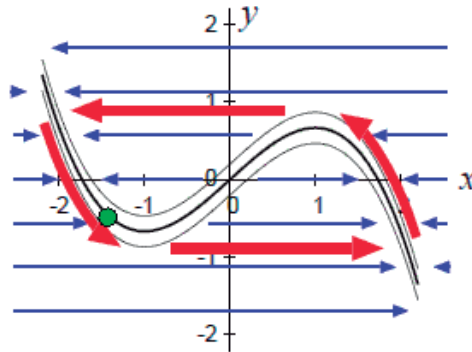


Figura 1.7: Flujos del oscilador de van der Pol para $\mu \gg 1$.

CAPÍTULO 1. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

También se ha observado que el periodo de oscilación está determinado en especial por el tiempo durante el cual el sistema permanece alrededor de la función cúbica, donde ambas $\dot{x}$ y $\dot{y}$ son $O(1/\mu)$. Por tanto, el periodo de oscilación estimado es aproximadamente $T \propto \mu$. Cuando van der Pol, en 1927, desarrolló la Ec. (1.1) con un circuito eléctrico formado por dos resistencias R y r , un capacitor C , una inductancia y un tetrodo, el periodo de oscilación determinado en el circuito fue $\mu = RC$. Como RC es la constante del tiempo de relajación en un circuito RC , van der Pol nombró a esta oscilación como oscilación de relajación. Las características de la oscilación de relajación son el comportamiento asintótico lento y el salto discontinuo repentino hacia otro valor Fig. 1.7. Usando unas cuantas oscilaciones de relajación, van der Pol y van der Mark modelaron la actividad eléctrica del corazón en 1928.

1.3. Oscilador Duffing

La ecuación de Duffing, que lleva el nombre del ingeniero eléctrico Alemán Georg Duffing, ha sido ampliamente utilizada en Física, Economía, Ingeniería y muchos otros fenómenos físicos. Dada su característica de oscilación y la naturaleza caótica, muchos científicos se inspiran en esta ecuación diferencial no lineal debido a su naturaleza de replicar una dinámica similar en nuestro mundo natural. Esta ecuación diferencial junto con la de van der Pol, se ha convertido en uno de los ejemplos más comunes de la dinámica no lineal. La ecuación de Duffing es una ecuación diferencial para modelar un oscilador de doble pozo tal como el sistema mecánico magneto-elástico [8]. Este sistema consiste en una varilla colocada verticalmente entre dos imanes con el extremo superior fijo y el extremo inferior libre para oscilar, como se muestra en la Fig. 1.8.

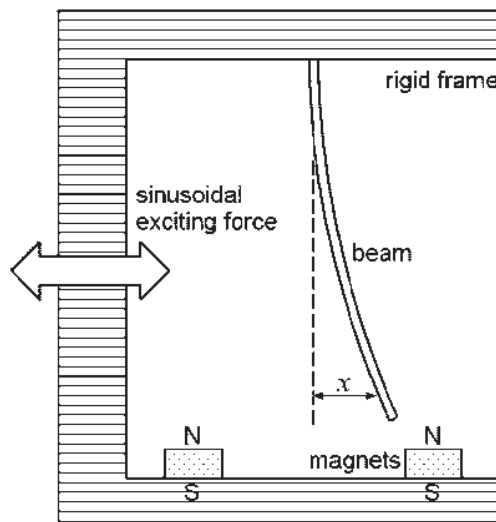


Figura 1.8: Sistema físico que es modelado por el oscilador de Duffing.

CAPÍTULO 1. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

La varilla será atraída a uno de los dos imanes y dada una cierta velocidad oscilará sobre ese imán hasta que la fricción lo pare. Cada uno de los imanes crea un punto fijo donde la viga puede venir a parar sobre ese imán y permanecer en equilibrio. Sin embargo, cuando el sistema entero es sacudido por una fuerza periódica, la viga puede saltar hacia atrás de un imán a otro de una manera aparentemente al azar. Dependiendo de que tan grande sea la fuerza que sacude no puede haber puntos fijos estables y ningún ciclo fijo estable en el sistema. Este sistema se puede modelar matemáticamente por la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t). \quad (1.21)$$

donde α controla el tamaño de la rigidez, β controla la cantidad de no linealidad en la fuerza de restauración. Si $\beta = 0$, La ecuación de Duffing describe un oscilador armónico simple amortiguado y forzado.

1.3.1. Análisis de la ecuación de Duffing

Iniciemos nuestro estudio considerando la ecuación de Duffing Ec. (1.21) (con $\gamma = \delta = 0$) como un oscilador no lineal que describe el movimiento de una partícula clásica dentro de un potencial de la forma

$$V(x) = \alpha \frac{x^2}{2} + \beta \frac{x^4}{4}, \quad (1.22)$$

con $\alpha < 0$ y $\beta > 0$. Se trata de un potencial de doble pozo al estar formado por dos mínimos simétricos respecto a una barrera de potencial centrada en $x = 0$. Este potencial se conoce como potencial de Duffing [9]. Si elegimos $\alpha = -1$ y $\beta = 1$ los mínimos se encontrarán en $x = \pm 1$, y tendrán un potencial de $V = 1/4$.

La fuerza correspondiente a este potencial es

$$F = -\frac{dV(x)}{dx} = x - x^3.$$

A través de las leyes de la dinámica clásica, el movimiento de la partícula encerrada en nuestro doble pozo vendrá determinado por la ecuación $F = ma$ y si tomamos la masa de la partícula igual a la unidad, la ecuación diferencial que determina el movimiento de partícula queda de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x - x^3 \quad (1.23)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial de forma numérica usando Mathematica y obtenemos la solución en el espacio de fase, dada por la Fig. 1.9.

CAPÍTULO 1. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

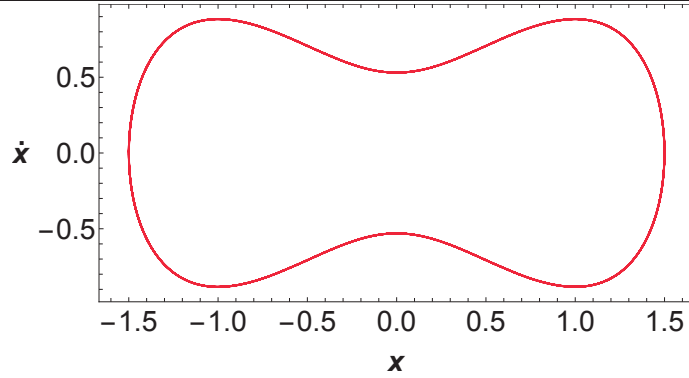


Figura 1.9: Trayectoria cerrada del sistema de Duffing ($\delta = 0$ y $\gamma = 0$).

Cuando la partícula está situada sobre el mínimo de la derecha en $x = 1$ y tiene una velocidad inicial igual a 1, esta velocidad es suficiente para hacer que la partícula supere la barrera de potencial en $x = 0$ pase al pozo de la izquierda y vuelva a superar la barrera de potencial y después retorne al seno de la derecha y así continúa oscilando indefinidamente. Esto siempre se ocurrirá si la velocidad inicial de la partícula es mayor que $1/\sqrt{2}$, lo cual se puede verificar si se iguala la energía de la barrera de potencial a la energía cinética inicial de la partícula que parte de uno de los mínimos. Como vemos la trayectoria de la partícula es cerrada y su movimiento es periódico, y esto era de esperarse, puesto que no existe en el oscilador ningún término disipativo que impida la conservación de la energía.

Hay muchas maneras de analizar la ecuación de Duffing, cada una en función de los valores que se asignan a los diferentes parámetros. Analizaremos el caso no forzado ($\gamma = 0$) con valores de $\alpha = -1$ y $\beta = 1$ de la Ec. (1.21), basandonos en el análisis dado por Wiggins (1990)[9]. En este caso la Ec. (1.21) está dado por

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = 0. \quad (1.24)$$

Rescribiendo la ecuación diferencial de segundo orden en un sistema de ecuaciones de primer orden correspondiente a la Ec. (1.24) es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3 - \delta y. \end{aligned}$$

el primer paso en este análisis es identificar y clasificar todos los puntos fijos del sistema. Procediendo de forma similar a lo hecho con el oscilador de van der Pol, se puede ver que los puntos fijos del sistema Ec. (1.24) son los puntos fijos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ como se muestra en la Fig. 1.10. En esta figura se muestra también algunas órbitas del sistema Ec. (1.24).

CAPÍTULO 1. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

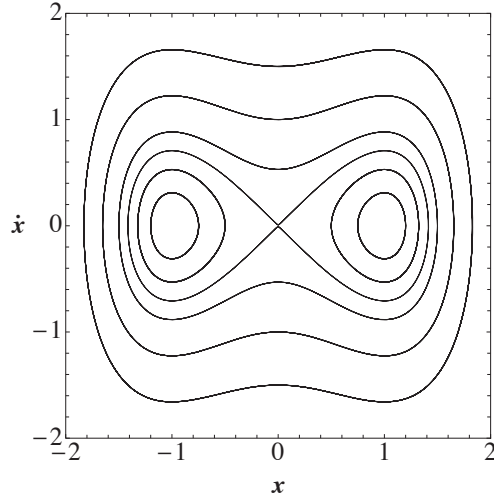


Figura 1.10: Puntos fijos del sistema de Duffing.

Para analizar la estabilidad de los puntos fijos. Partimos de la matriz Jacobiana del sistema Ec. (1.24)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & -\delta \end{pmatrix}.$$

Para el punto fijo $P(0,0)$, se tiene que:

$$\mathbf{C}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\delta \end{pmatrix}.$$

teniendo como polinomio característico $\lambda^2 + \delta\lambda - 1 = 0$ para el punto fijo $P(0,0)$, donde $Tr(C) = -\delta$ y $det(C) = -1$, de esta manera como se puede observar en el diagrama de bifurcación traza-determinante Fig. 1.1, la clasificación de este punto fijo se limita a un punto silla debido a que el $det(C) = -1$.

Para los puntos fijos $P(\pm 1, 0)$ se tiene que

$$\mathbf{C}_{(\pm 1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\delta \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo para este par de puntos fijos $P(\pm 1, 0)$ se tiene como polinomio característico $\lambda^2 + \delta\lambda + 2 = 0$, donde $Tr(C) = -\delta$ y $det(C) = 2$. A diferencia del caso anterior, ahora se tiene una variedad de clasificación que se le asocia al valor de δ , teniendo como resultado 3 casos posibles.

1. Caso (i)

Si $\delta > 0$, esto implica que $Tr(C) < 0$ y $det(C) = 2$, por lo tanto este par de puntos fijos $P(\pm 1, 0)$ corresponden a puntos estables.

CAPÍTULO 1. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

2. Caso (ii)

Si $\delta = 0$, esto implica que $Tr(C) = 0$ y $det(C) = 2$, por lo tanto este par de puntos fijos $P(\pm 1, 0)$ corresponden a dinámica del tipo centro.

3. Caso(iii)

Si $\delta < 0$, esto implica que $Tr(C) > 0$ y $det(C) = 2$, por lo tanto este par de puntos fijos $P(\pm 1, 0)$ corresponden a puntos inestables.

Se ha descubierto que para ciertos valores de δ hay una transición en la dinámica del sistema dependiendo de su valor. Esto se puede entender en el análisis de la ecuación de Duffing (con $\gamma = 0$), donde dos de los tres puntos fijos cambian de ser estables a inestables, dependiendo del valor de δ . En particular cuando el amortiguamiento es positivo ($\delta > 0$), el sistema sigue una trayectoria en espiral estable. A la inversa, cuando el amortiguamiento es negativo ($\delta < 0$), las espirales del sistema son inestables en los puntos fijos $P(\pm 1, 0)$.

1.3.2. El oscilador de Duffing forzado

Sabemos que el oscilador Duffing corresponde a un modelo de oscilador no lineal forzado, por este motivo vamos a complicar el movimiento de la partícula que se mueve sometida al potencial de Duffing introduciendo amortiguamiento (rozamiento) y una fuerza motriz externa periódica. (Si sólo introdujeramos amortiguamiento, el comportamiento no sería muy divertido: al final la partícula acabaría siempre quieta sobre uno de los dos pozos de potencial). Tomando $\alpha = -1$ y $\beta = 1$ en la Ec. (1.21), la ecuación del movimiento a considerar es:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = \gamma\cos(\omega t). \quad (1.25)$$

donde δ es el coeficiente de amortiguamiento y γ es magnitud (amplitud) de la fuerza motriz cuya frecuencia de oscilación es ω . Veremos que a medida que la fuerza externa va aumentando en su magnitud, el movimiento de la partícula se irá haciendo más complejo hasta convertirse en caótico. Fijaremos $\delta = 0,1$ y $\omega = 1,4$ en todo lo que sigue, y empezaremos con la amplitud de la fuerza externa $\gamma = 0,1$ (veremos que esto hace que estemos fuera del régimen caótico). En la Fig. 1.11 se muestra el aspecto que toma la trayectoria en el espacio fase para condiciones iniciales del sistema $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$.

CAPÍTULO 1. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

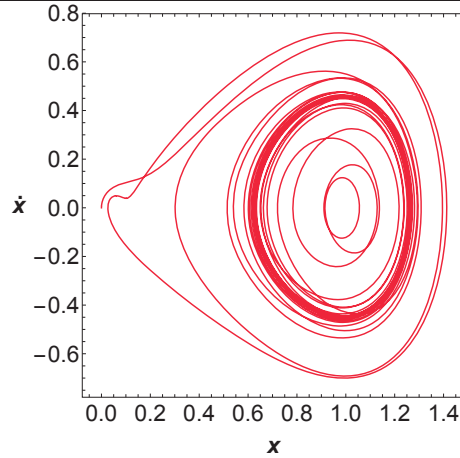


Figura 1.11: Espacio fase para un valor de $\gamma = 0,1$.

Ahora veremos cómo cambian las trayectorias en el espacio fase cuando se aumenta la amplitud de la fuerza motriz. En la Fig 1.12 se muestra la dinámica para el valor de $\gamma = 0,35$, donde se puede observar que para este valor de γ , el sistema ya presenta caos.

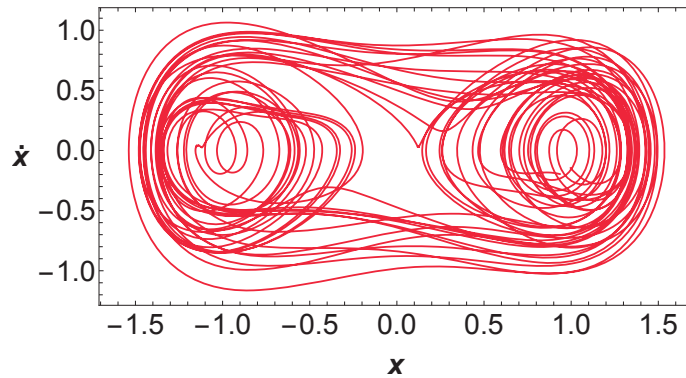


Figura 1.12: Espacio fase para un valor de $\gamma = 0,35$.

La ecuación de Duffing puede tomar diferentes dinámicas en el espacio fase, dependiendo de la elección de los parámetros. A pesar de esta gran variedad, el sistema puede ser diseñado para generar trayectorias que presenten una transición de órbitas periódicas a comportamiento caótico. La ecuación de Duffing se ha utilizado en los campos de la ingeniería, economía, física, crecimiento de la población y la genética, por nencionar algunos, teniendo la ecuación un gran reto en la exploración de los diferentes parámetros que influyen en la dinámica global del sistema.

Control y sincronización de sistemas caóticos

2.1. Introducción

El comportamiento caótico de un sistema dinámico puede ser indeseable, como en el caso de las fibrilaciones cardíacas, en la predicción de fenómenos climáticos, o en problemas ocasionados por la desincronización, etc, aunque también puede ser deseable, como en los procesos de mezclado o de transferencia de calor. Por ese motivo el “control del caos” ha sido uno de los tópicos de interés en los últimos años [10-12]. Obviamente siempre es posible controlar el caos utilizando grandes perturbaciones, pero el punto importante es obtener una técnica de control eficiente, que requiera una energía de control mínima. Es decir debe constituir sólo una pequeña perturbación del sistema dinámico.

Otro tópico de gran importancia, en función de sus aplicaciones, y estrechamente relacionado al “control del caos” es la “sincronización de sistemas caóticos”. La posibilidad que dos o más sistemas caóticos oscilen de manera sincronizada y coherente no es obvia, debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales. Sin embargo, Pecora y Carroll [13] demostraron que es posible acoplar dos sistemas caóticos, que parten de estados iniciales distintos, de modo tal que sus oscilaciones se sincronicen. El estudio de la sincronización ha dado origen al surgimiento de nuevos métodos para controlar un sistema caótico. En este sentido se han obtenido logros importantes en lo referente a estrategias para controlar arritmias cardíacas, reacciones químicas industriales de tipo oscilatorio y sistemas electrónicos [14-15].

El presente capítulo tiene como finalidad describir métodos de control y sincronización de sistemas caóticos ya que constituye uno de los métodos principales para la obtención de un sistema de comunicaciones analógicas seguras. Sin embargo, por razones de complejidad, se hará referencia en este capítulo, a algunos de los métodos

CAPÍTULO 2. CONTROL Y SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS

más utilizados para el control de sistemas caóticos.

2.2. Métodos de control caos

El objetivo básico del control de un sistema caótico es forzarlo a seguir una determinada trayectoria. Obviamente el objetivo específico varía en función de cada aplicación particular, aunque el más común es lograr que el movimiento caótico se transforme en periódico. No obstante, recientemente se han presentado aplicaciones donde el estado final deseado del sistema es también de características caóticas; es decir el problema de control, en ese caso, consiste en transformar un comportamiento caótico indeseado, en otro comportamiento también caótico, pero cuyas propiedades pueden fijarse de alguna manera. De hecho la sincronización caótica utilizada en los sistemas de comunicaciones puede pensarse como un método de control de este tipo. También es importante el estudio del proceso inverso, donde se trata que un sistema que inicialmente es periódico cambie su comportamiento a caótico. En este caso el método de control se conoce como de *anti-control* del caos.

Sea el sistema dinámico a lineal n – dimensional de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, p, t). \quad (2.1)$$

donde las componentes del vector $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ son las n variables de estado, en tanto que p es un parámetro externo o de control cuyo propósito es modificar la dinámica del sistema mediante la mínima perturbación posible. En lo que sigue se supone que para el valor elegido de este parámetro, $x(t)$ es una solución caótica de la Ec. (2.1).

Los métodos de control del caos generalmente utilizan dos propiedades fundamentales de los sistemas caóticos: la sensibilidad a las condiciones iniciales, y la existencia de infinitas órbitas periódicas inestables embebidas en el atractor (estable).

Si $x(t)$ es la trayectoria del sistema, sin aplicar el control, y $g(t)$ es la trayectoria deseada, el propósito del control puede expresarse matemáticamente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{x}(t) - g(t)| = 0. \quad (2.2)$$

en donde $\tilde{x}(t)$ es la trayectoria modificada por el sistema de control.

Según la aplicación particular $g(t)$ puede ser una de las soluciones inestables existente en el propio sistema, o bien una señal externa que se desea imponer. En base a las distintas estrategias utilizadas para influenciar la dinámica del sistema pueden distinguirse cuatro tipos distintos de control que se describen a continuación.

CAPÍTULO 2. CONTROL Y SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS

2.2.1. Control a través de un parámetro accesible del sistema

El estudio de la influencia de las variaciones de los parámetros en el comportamiento asintótico del sistema es el objeto de la teoría de bifurcaciones [9]. Si el propósito del control es suprimir oscilaciones caóticas y obtener comportamiento regular, éste es el método más simple. En efecto, en el caso de los circuitos electrónicos, basta con modificar el valor de uno de los componentes pasivos (resistencias o capacitores). La principal desventaja del método es que pueden requerirse variaciones grandes en los valores de los parámetros, para lograr el comportamiento deseado. Por otro lado, el método es difícil de aplicar en la etapa de diseño, donde existen pocas herramientas de simulación que cuenten con la posibilidad de realizar un análisis de bifurcaciones, y aún existiendo esa posibilidad, se requiere una descripción del problema en una forma matemática cerrada (ecuaciones diferenciales o en diferencias) que no siempre se puede obtener en forma simple.

Otra alternativa es hacer variable el parámetro de control aplicando una pequeña perturbación de una frecuencia adecuada. Es decir se sustituye en la Ec. (2.1) a p por $p + \eta \cos \Omega t$ [16]. Merece mencionarse especialmente el método Ott-Grebogi-Yorke (OGY), propuesto en 1990, que se basa en aprovechar la existencia de un número infinito de órbitas periódicas inestables, embebidas en el atractor caótico. Aplicando pequeñas perturbaciones temporales al parámetro p (Ec. (2.1)), se busca estabilizar la trayectoria caótica haciendo que el sistema siga la órbita periódica seleccionada. Para determinar los valores de las perturbaciones se necesitan conocer los autovalores y autovectores de la órbita inestable; información que no está disponible si no se cuenta con el modelo matemático del sistema. Pero los datos necesarios pueden obtenerse a partir de las órbitas reconstruidas en el espacio de fases por el método “embebimiento por retraso temporal”, que transforma una serie temporal de las mediciones de una variable del sistema, en una trayectoria (vectorial) en el espacio de estados. Una ventaja adicional del método OGY es la flexibilidad de poder elegir la órbita periódica que se va a controlar.

El método OGY se ha utilizado para controlar sistemas dinámicos, sistemas Hamiltonianos (conservativos), transitorios caóticos y dispersiones (scattering) caóticas. Cuando esta técnica se aplica a un circuito físico real, el principal problema se encuentra en los errores introducidos por el ruido, la cuantificación de los conversores (A/D y D/A) y los efectos de redondeo en los cálculos. Se encontró que el método es muy sensible al nivel de ruido, ya que las señales de control pequeñas pueden quedar enmascaradas por el mismo, imposibilitando cualquier intento para modificar el comportamiento en la forma deseada.

2.2.2. Control por modificación de la estructura del sistema

Uno de estos métodos es de absorción de oscilaciones que se basa en una técnica usual en la ingeniería mecánica, donde se utilizan dispositivos que absorben las vibra-

CAPÍTULO 2. CONTROL Y SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS

ciones indeseadas (tal es el caso de los amortiguadores o las mesas diseñadas para una máquina-herramienta). Para su implementación se acopla el sistema caótico principal a un nuevo sistema (controlador) más simple y de parámetros fácilmente modificables. En el caso de un sistema electrónico el elemento absorbente puede ser tan simple como un capacitor adicional puesto en paralelo o un circuito tanque LC [17,18].

2.2.3. Control por inyección de señales externas

Ejemplos de estos métodos son la estimulación resonante que consiste en la perturbación con señales aperiódicas; el agregado de una segunda fuerza externa periódica [19]; el empleo de un término que contemple una débil polarización constante adicional [20], o la adición de un nivel adecuado de ruido externo que, se ha demostrado, puede ayudar a eliminar el comportamiento extraño de un atractor caótico [19-22].

Pyragas [23] propuso la interesante idea de realimentar una de las variables del vector de estados, utilizando una señal de control proporcional a la diferencia entre esa variable y su copia retardada. La ecuación diferencial para la variable elegida resulta:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x(t)) + K[x_i(t) - x_i(t - \tau)]. \quad (2.3)$$

Empleando el método de Pyragas se han podido obtener diferentes tipos de comportamiento, conforme a los valores del retardo τ y del factor lineal K .

2.2.4. Técnicas clásicas de Ingeniería de control

Se ha trabajado mucho en técnicas de control clásico: proporcional integral (PI), proporcional integral derivativo (PID), lineal, alineal, estocástico, etc. Huberman y Lumer [24], por ejemplo, propusieron llevar un sistema de un estado x a un estado deseado x_s , modificando dinámicamente el valor del parámetro de control p , por medio de la ecuación:

$$\frac{dp}{dt} = \varepsilon G(x - x_s) \quad \varepsilon \ll 1. \quad (2.4)$$

donde ε es un parámetro que ajusta la dureza del control y G es una función lineal o no lineal de la diferencia entre ambos estados. Este método, conocido como Algoritmo de Control Adaptativo (Adaptive Control Algorithm - ACA), no requiere señales externas ni el acceso a los parámetros internos y la acción de control es inmune a pequeñas variaciones en los valores de los parámetros. Su principal desventaja es que no se conoce a priori cuál es la meta que se debe alcanzar, sino que se trabaja por “prueba y error”.

2.3. El problema general de la sincronización

La sincronización de señales periódicas es un fenómeno bien conocido en Física, Ingeniería y muchas otras disciplinas científicas. En su aceptación tradicional, se dice que dos señales periódicas están sincronizadas cuando sus períodos son conmensurables. Una de las formas de lograr esta sincronización es mediante el empleo de fuerzas externas, como sucede en el caso de las comunicaciones electrónicas, donde se utiliza un oscilador patrón, de frecuencia muy estable (oscilador a cristal), pero de baja potencia como sincronismo de varios osciladores de inferior calidad y de mayor potencia [25].

La sincronización de osciladores, desacoplados entre sí, resulta, en esencia, más simple que el alterar el sincronismo natural que se establece cuando osciladores casi idénticos se acoplan entre sí, constituyendo un sistema más robusto [26,27]. Pero aún el problema más sencillo de varios osciladores independientes entre sí, sincronizados por una única señal periódica externa, presenta una estructura de resonancias múltiples muy compleja [27-29].

La posibilidad de que dos o más sistemas caóticos oscilen de manera sincronizada y coherente no es obvia debido a la conocida dependencia sensible con las condiciones iniciales. Sin embargo Pecora y Carroll [13] demostraron que es posible acoplar dos sistemas caóticos, que parten de estados iniciales distintos, de modo tal que sus oscilaciones (que no tiene por qué ser periódicas) se sincronicen. Esta sincronización puede ser idéntica (las señales correspondientes en ambos sistemas coinciden exactamente) o bien generalizada (existe una relación funcional fija entre las variables de uno y otro sistema). En ambos casos, la sincronización es un proceso asintótico. También es posible lograr una sincronización de fase [30], que es una noción más débil y de alguna forma equivalente a la sincronización usual en señales periódicas.

La sincronización y el control son temas estrechamente vinculados. A partir de técnicas de sincronización se han podido inferir nuevos métodos para controlar sistemas caóticos y se han obtenido logros importantes en el control de arritmias cardíacas, reacciones químicas industriales de tipo oscilatorio y sistemas electrónicos [30-32].

Ha habido un amplio desarrollo en la aplicación de técnicas de sincronización a sistemas de comunicaciones [31-33]. Algunas de las más utilizadas se describen a continuación.

2.4. Sincronización de sistemas caóticos

Los fenómenos caóticos se presentan en muchos sistemas naturales y en dispositivos artificiales. Muchos trabajos de investigación se han centrado principalmente en el descubrimiento y caracterización del caos. Recientemente, se han propuesto varias ideas y técnicas para utilizar las características del caos para alcanzar ciertos objetivos. La

CAPÍTULO 2. CONTROL Y SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS

sincronía de caos se ha empleado para incrementar la potencia de láseres, sincronizar circuitos electrónicos, controlar oscilaciones en reacciones químicas, estabilizar el ritmo cardíaco en animales y para seguridad en las comunicaciones mediante la codificación de información. Las aplicaciones del caos en diferentes campos de la ciencia y tecnología tienen su base en dos problemas, que son el control del caos y la sincronización de sistemas caóticos.

La sincronización de sistemas caóticos es el problema que se abordará en este trabajo de tesis; por tanto, se tratará de proporcionar una explicación más detallada del mismo.

La posibilidad de que dos o más sistemas caóticos oscilen de manera coherente y sincronizada no es obvia. Una de las principales características asociadas al comportamiento caótico, es la sensibilidad a condiciones iniciales. De lo anterior se pudiera concluir que la sincronización de sistemas caóticos no es factible, porque en sistemas reales no es posible reproducir exactamente condiciones iniciales idénticas. Así, incluso una desviación infinitesimal en los parámetros o de las condiciones iniciales eventualmente dará lugar a la divergencia de trayectorias. En este contexto, el hecho de alcanzar sincronía de sistemas caóticos, pueden considerarse como un problema fascinante e importante.

2.4.1. Métodos de sincronización

La sincronización, que puede ser entendida como el ajuste de ritmos entre dos o más osciladores debido a sus interacciones, es un fenómeno presente tanto en sistemas naturales como artificiales y es un típico ejemplo de auto-organización. El análisis del fenómeno de sincronización de sistemas dinámicos ha sido objeto de un área de investigación muy activa desde su primera observación por el científico holandés Christian Huygens en 1673 quien observó sincronización en dos péndulos acoplados.

El estudio sistemático moderno, tanto experimental como teórico, de este fenómeno fue iniciado por Appleton, van der Pol y Andronov y Vitt que observaron sincronización en generadores eléctricos. Cobra popularidad hace aproximadamente 30 años, tiempo en el cual se produjeron diversidad de artículos y libros que tratan de una u otra manera sobre la sincronización en sistemas que van desde los biológicos tales como luciérnagas, grillos, cigarras, hormigas, sistemas ecológicos, diferentes comportamientos en poblaciones humanas, células cardíacas, neuronas en el sistema nervioso y en la relación fisiológica entre el corazón y pulmones, pasando por sistemas químicos (osciladores bioquímicos) y llegando a sistemas artificiales como circuitos electrónicos, etc.

Los grandes trabajos sobre la sincronización del caos se atribuyen a Fujisaka, Pincovsky y Afraimovich [34,35] y a Pecora y Carroll [13] quienes presentaron los primeros

CAPÍTULO 2. CONTROL Y SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS

ejemplos sobre la sincronización unidireccional de sistemas caóticos acoplados. Sin embargo, tras el trabajo de Pecora y Carroll, se ha mostrado que dos comportamientos caóticos imprevisibles, que inicialmente evolucionan sobre trayectorias diferentes, pueden fundirse en una única trayectoria común si se acoplan adecuadamente. El desarrollo de los sistemas de comunicaciones utilizando caos nació a partir de esa idea y se ha afianzado, a través de trabajos fundamentales de un número importante de investigadores.

Los circuitos se presentan como una herramienta de una gran utilidad para estudiar una gran variedad de procesos, actuando como complemento entre el experimento en sí y la simulación numérica por computadora. Entre las ventajas que ofrece la simulación con circuitos se encuentran tanto el alto grado de desarrollo de componentes electrónicos como el bajo costo de los dispositivos. Y son varios los ejemplos de circuitos electrónicos utilizados para el estudio de Caos: el sistema de Lorenz, Rössler y Chua, por mencionar solo algunos.

El significado de sincronización de caos se refiere al proceso en el que se involucran dos (o varios) sistemas caóticos (equivalentes o no equivalentes) ajustando sus propiedades para que tiendan a un comportamiento común (periódico o ruidoso) [34]. Este fenómeno de sincronización inicialmente hace que los sistemas evolucionen sobre atractores diferentes para que finalmente puedan lograr empatar, acoplarse y coincidir en una misma trayectoria [33-37]. Es sorprendente que la sincronización entre dos sistemas caóticos aparece cuando se considera la dependencia de la dinámica caótica en las condiciones iniciales del sistema.

Hay que destacar que hay una gran variedad de esquemas de acoplamiento que conducen al régimen de sincronización. Dependiendo de la configuración particular del acoplamiento, podemos distinguir dos casos principales: acoplamiento unidireccional y acoplamiento bidireccional.

1. Acoplamiento unidireccional.

El sistema global está formado por dos subsistemas acoplados según una configuración de tipo maestro-esclavo Fig. 2.1. Eso implica que el comportamiento del sistema esclavo depende del comportamiento del sistema maestro, mientras que este último no se ve influido por el comportamiento del sistema esclavo. Como resultado, el sistema esclavo se encuentra forzado a seguir la dinámica (o una función propia de la dinámica) del maestro. Dicho de otro modo, cuando la evolución de uno de los dos sistemas no es alterada por el acoplamiento la configuración resultante es un acoplamiento unidireccional.

CAPÍTULO 2. CONTROL Y SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS

2. Acoplamiento bidireccional.

Aquí ambos subsistemas son acoplados con otro, o cuando los dos subsistemas son conectados de tal forma que sus trayectorias están mutuamente influenciadas por el comportamiento del otro. Esta situación ocurre en fisiología, entre el sistema cardiaco y el respiratorio, también se da en láseres con retroalimentación.

Es sorprendente que la sincronización entre dos sistemas caóticos aparece cuando se considera la dependencia de la dinámica caótica en las condiciones iniciales del sistema. Cuando las condiciones iniciales en los sistemas caóticos, al tener la mas mínima variación en el sistema, provoca que se obtengan resultados y evolucione en un sistema más complejo que al que originalmente se tenía, esto hace que a simple vista sea difícil la sincronización en sistemas caóticos reales, ya que en la práctica no es posible igualar las condiciones iniciales o hacer dos sistemas totalmente idénticos, para poder lograr la sincronización; se pueden crear sistemas muy parecidos pero siempre existirá un margen de error.

En telecomunicaciones la sincronización brinda comunicaciones seguras [37]. Existen dos formas principales de acoplamiento, de forma unidireccional la cual consiste en sistemas Maestro-Esclavo (Master -Slave) ver Fig. 2.1, donde el maestro es el sistema guía o de referencia y el esclavo es el sistema guiado el cual es dependiente del maestro. En el caso de ser bidireccional ambos sistemas interactúan entre sí y están acoplados uno con el otro creando una sincronización mutua.



Figura 2.1: Esquema de sincronización.

La sincronización entre dos sistemas, se consigue cuando uno de los sistemas modifica su comportamiento y sigue la trayectoria del otro sistema, o ambos oscilan en una nueva trayectoria común [38]. El acoplamiento podrá ser de dos tipos difusivo o conductivo [39]. La aparición y la robustez de los estados de sincronización ha sido establecida mediante diferentes esquemas de acoplamiento, tales como el método de Pecora y Carroll [13], la realimentación negativa [40], acoplamiento esporádico [41], descomposición activa-pasiva [40-42].

En el contexto de sistemas caóticos acoplados, diferentes clases de sincronización han sido estudiadas recientemente. Sincronización idéntica ó completa, sincronización

CAPÍTULO 2. CONTROL Y SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS

en fase, sincronización de retardo, sincronización generalizada, sincronización de retardo intermitente, sincronización de fase imperfecta, y finalmente la cuasi sincronización [34-43].

2.4.2. Tipos de Sincronización

Cuando uno trata con sistemas acoplados, la sincronización aparece como la igualdad de las variables de estado, mientras que evoluciona en el tiempo. Para el acoplamiento, debemos distinguir entre dos diferentes situaciones. Cuando la evolución de uno de los sistemas acoplados es inalterada por el acoplamiento, tenemos como resultado el acoplamiento unidireccional o maestro-esclavo. Por el contrario nos referimos a un acoplamiento bidireccional cuando ambos sistemas son conectados de manera tal que influyen mutuamente en su comportamiento.

En primer lugar, para establecer con la mayor claridad posible el análisis posterior, introduzcamos primero las siguientes definiciones:

Definición 2.4.1 *Dos sistemas cóticos están en sincronización completa si las funciones de error, $|x(t) - y(t)|$ e $|u(t) - v(t)|$ convergen a cero, para un t grande:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - v(t)| = 0. \quad (2.5)$$

Las primeras ecuaciones significan que cada estado del sistema esclavo es exactamente igual a cada estado del sistema maestro, en el límite $t \rightarrow \infty$. La sincronización del caos puede entenderse como un problema de seguimiento de trayectorias o como un problema de estabilización. La estabilización consiste en obtener un control que lleve a las trayectorias de un sistema dinámico que representa el error de sincronización a converger a cero. El problema de seguimiento de trayectorias consiste en encontrar un control que haga que las trayectorias del sistema esclavo sigan las trayectorias del sistema maestro. En relación con esto, introduzcamos lo siguiente:

Definición 2.4.2 *Dos sistemas caóticos están en sincronización práctica si las funciones de error satisfacen las siguientes condiciones:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| \leq \epsilon, \quad (2.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - v(t)| \leq \phi, \quad (2.7)$$

para valores positivos de $\epsilon, \phi > 0$.

Esta definición es necesaria porque, en muchos casos, las funciones de error no convergen precisamente a cero con la evolución del tiempo, pero en la práctica, aún podemos considerar los sistemas como sincronizados. Sin embargo, en la implementación de circuitos analógicos, los componentes electrónicos tienen tolerancias, lo que hace imposible reproducir las condiciones iniciales de las simulaciones numéricas. Para tener en cuenta esto, tenemos lo siguiente:

CAPÍTULO 2. CONTROL Y SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS

Definición 2.4.3 *Dos sistemas caóticos están en sincronización parcial cuando sólo una parte de las variables de estado se sincronizan y las otras no lo hacen.*

En ciertos sistemas, es posible lograr una sincronización completa en un estado del sistema esclavo, mientras que en el otro sólo es posible obtener una sincronización nula o práctica.

2.4.3. La configuración de Pecora y Carroll (PC)

Iniciamos considerando un sistema caótico cuya evolución temporal está dada por la siguiente ecuación:

$$\dot{z} = F(z), \quad (2.8)$$

Aquí $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ es un vector de estado n – dimensional definiendo un vector de campo $F : R^n \rightarrow R^n$. El esquema PC consiste al suponer un sistema dinámico de Ec. (2.1), y descomponerlo en tres subsistemas.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u, v), \\ \dot{v} &= g(u, v), \quad \text{Maestro} \\ \dot{w} &= h(u, w). \quad \text{Esclavo} \end{aligned}$$

Donde $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_l)$ y $n = m + k + l$. El segundo subsistema de Ec. (2.8) define el sistema maestro, considerando el tercer subsistema de Ec. (2.8) que representa el sistema esclavo, su evolución es guiada por la trayectoria del maestro utilizando la señal u .

Así la sincronización completa es definida como una identidad entra las trayectorias del sistema respuesta w y una réplica w' de esta $w' = h(u, w')$ para la misma señal de conducción caótica $u(t)$. La existencia de CS implica que la respuesta del sistema es asintóticamente estable ($\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, siendo $e(t)$ el error sincronización dado por $e(t) = |w - w'|$). En otras palabras, el sistema olvida sus condiciones iniciales, evolucionando en un atractor caótico. Este tipo de sincronización se puede lograr siempre que los exponentes de Lyapunov del sistema esclavo bajo las órdenes del maestro (los exponentes condicionales de Lyapunov) sean negativas, es decir el sistema es conservativo. Como condición se cumple solo si u es una señal de sincronización.

2.4.4. La configuración APD.

Este método se considera un sistema caótico autónomo y es rescrito como un sistema no autónomo.

$$\dot{x} = f(x, s(t)). \quad (2.9)$$

En donde $s(t)$ es la señal de conducción $s = h(x)$ o $\dot{s} = h(x, s)$, y $f : R^n \rightarrow R^n$. La sincronización completa se refiere a la relación entre el sistema Ec. (2.7) y una réplica

CAPÍTULO 2. CONTROL Y SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS

(el sistema de respuesta) que es conducida por la misma señal $s(t)$. Cabe mencionar que esta última afirmación no excluye un comportamiento caótico de $s(t)$, ya que es conducido por una señal caótica $s(t)$.

Para poder ilustrar mejor esta configuración, L. Kocarev y U. Parlitz [43] analizaron el sistema propuesto por Lorenz.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -10x + s(t), \\ \dot{y} &= 28x - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - 2,66z.\end{aligned}$$

Conducido por $s = h(x) = 10$ y, se puede comprobar mediante el uso de los exponentes de Lyapunov que el sistema se sincroniza con su copia para todos los tipos considerados de la señal de conducción $s(t)$.

En comparación con la configuración PC que solo puede lograr sincronizarse un numero finito de formas para un sistema caótico dado, APD permite elegir libremente la señal de conducción $s(t)$, o alternativamente la función $h(x)$ lo que la hace muy poderosa y en general extrema flexibilidad en aplicaciones.

2.4.5. Sincronización entre sistemas no idénticos de baja dimensión.

Hoy en día una de las áreas de investigación de sistemas dinámicos es poder sincronizar sistemas no idénticos. Llegar a sincronizar este tipo de sistemas es un grán reto, ya que implica aplicar teorías de control. La parte fundamental de la tesis es llegar a sincronizar los osciladores van der Pol y Duffing, ya que estos osciladores presentan dinámica muy diferente entre sí. Se ha visto que cuando sistemas caóticos idénticos son acoplados con un factor de acoplamiento lo suficientemente fuerte, se puede alcanzar la sincronización completa, siguiendo una misma trayectoria caótica. La sincronización en este caso es asociada con la transición de los exponentes de Lyapunov de valores positivos a negativos. Sin embargo, sistemas experimentales y cada vez más reales, a menudo no son completamente idénticos, especialmente si existen discrepancias en los parámetros de los sistemas. Es por ello que la sincronización completamente idéntica no se puede esperar en los sistemas que no son completamente idénticos por que no existe una relación $x(t) = y(t)$, al ver una sincronización completa se vería una línea recta a 45° grados al observar las señales $x(t)$ vs $y(t)$. Para sistemas caóticos que no son idénticos se pueden sincronizar completamente para tener la relación $x(t) = y(t)$, mediante forzamientos de señales periódicas y diseñando sistemas de control apropiados para los sistemas a sincronizar.

CAPÍTULO 2. CONTROL Y SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS

Sistema hipercaótico van der Pol-Duffing

3.1. Introducción

El oscilador de van der Pol y el oscilador de Duffing, analizados en el capítulo 1, se destacan como paradigmas de osciladores no lineales. El primero es el prototipo de ciclo límite, mientras que el segundo es el prototipo del atractor extraño. Los extensos estudios dedicados al oscilador van der Pol han revelado que posee un rico comportamiento dinámico especialmente cuando es forzado externamente. El oscilador de van der Pol con un pozo doble de potencial exhibe ricos y sorprendentes estructuras de bifurcación con un importante número de estados, el mar caótico que contiene muchas islas de los estados periódicos y las transiciones del caos a estados normales que se producen a través de diversas vías: duplicidad de período, caos transitorio y cuasi-periodicidad.

Para el oscilador de Duffing, su régimen autónomo conduce a oscilaciones amortiguadas, mientras que en la presencia de una fuerza externa sinusoidal demuestra histéresis, multiestabilidad, duplicación de período, y los escenarios intermitentes al caos. Un modelo de osciladores acoplados de diferentes atractores podría servir como un buen modelo para los sistemas reales en la naturaleza [44]. En cuanto a la unión entre un oscilador de van der Pol y el oscilador de Duffing, tres esquemas básicos se pueden enumerar: acoplamiento giroscópico (acoplamiento a través de la aceleración), acoplamiento disipativo (acoplamiento a través de la velocidad), y el acoplamiento elástico (acoplamiento a través de la posición) [44-46].

En este Capítulo vamos a analizar la dinámica que presenta un sistema hipercaótico van der Pol-Duffing. Se estudiará el comportamiento dinámico del sistema al variar ciertos parámetros del sistema para analizar la sincronización unidireccional y bidireccional.

CAPÍTULO 3. SISTEMA HIPERCAÓTICO VAN DER POL-DUFFING

3.2. Sistema van der Pol-Duffing

En esta sección se estudiará el sistema hipercaótico de van der Pol-Duffing, este sistema se basa en los osciladores van der Pol y Duffing, acoplados mediante la combinación de acoplamientos elásticos y disipativos. El sistema van der Pol-Duffing se describe por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u + K(y - x) \\ \dot{u} &= \mu(1 - x^2)u - x + A_1 \cos w_1 t + K(v - u) \\ \dot{y} &= v + G(x - y) \\ \dot{v} &= -\alpha v + y - \varepsilon y^3 + A_2 \cos w_2 t + G(u - v)\end{aligned}$$

Para $K = 0$ y $G = 0$, ambos osciladores están desacoplados. El acoplamiento empleado en el sistema es una retroalimentación lineal que puede ser visto como una perturbación de cada oscilador por una señal proporcional a la diferencia de su posición (acoplamiento elástico) y velocidad (acoplamiento disipativo). Los parámetros de acoplamiento se fijan $K = 0$ y $G = 0$ para llevar a los osciladores van der Pol y Duffing por separado a una region caótica. Posteriormente se fijarán los parámetros del oscilador van der Pol y Duffing forzados con $\mu = 0,8$, $\alpha = 0,3$, $\varepsilon = 1$, $A_1 = 1$, $w_1 = 0,25$, $A_2 = 0,5$ y $w_2 = 1,3$, con condiciones iniciales: $x(0) = 0,8$, $y(0) = 2$, $u(0) = 1$ y $v(0) = -1$. Las simulaciones numéricas se realizaron con *Mathematica*. En la Fig. 3.16 se observa la dinámica de los osciladores forzados.

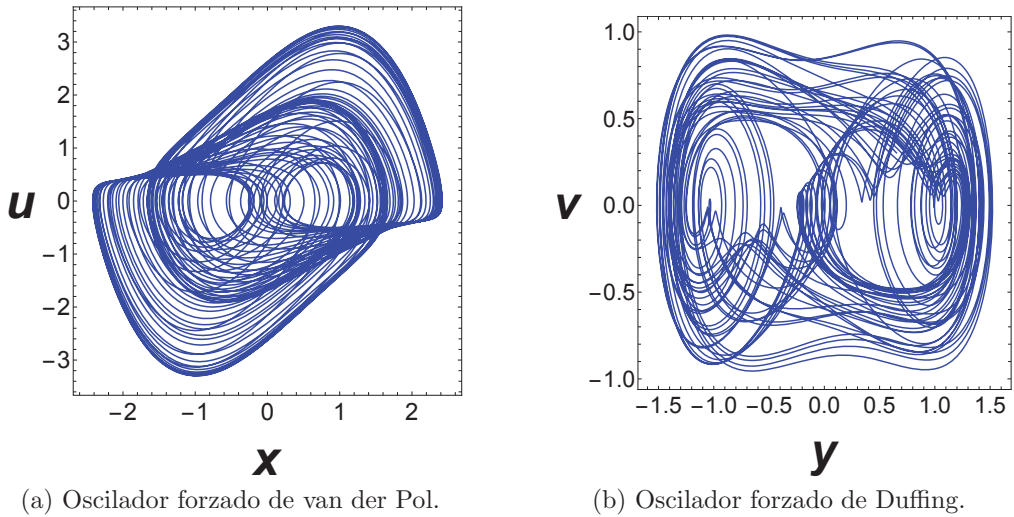


Figura 3.1: Dinámica de los osciladores van der Pol y Duffing.

Estudiaremos su comportamiento haciendo $G = 0$, y tendremos como parámetro de control K . Para este caso se tendrá un acoplamiento unidireccional por lo que el oscilador de Duffing actuará como el sistema maestro y el oscilador de van der Pol como el sistema esclavo. Las funciones de error $|y(t) - x(t)|$ y $|v(t) - u(t)|$ se obtienen

CAPÍTULO 3. SISTEMA HIPERCAÓTICO VAN DER POL-DUFFING

variando el parámetro de control K , se varía en pequeños pasos de 0 a 200. Como se puede observar en la Fig. 3.2 las funciones de error $|y(t) - x(t)|$ y $|v(t) - u(t)|$ convergen a cero para valores ciertos valores del parámetro K , cuando el oscilador de Duffing actúa como sistema maestro y el oscilador de van der Pol como sistema esclavo, se acoplan de manera unidireccional. Se logra obtener una sincronización completa en los canales $(x(t), y(t))$ e $(u(t), v(t))$.

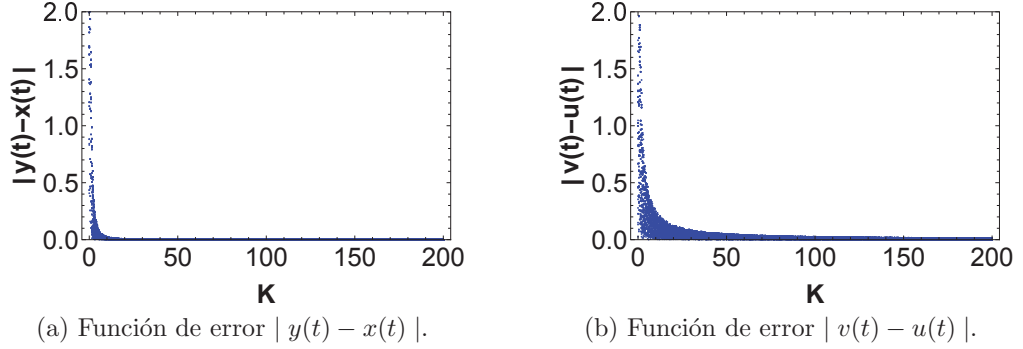


Figura 3.2: Funciones de error variando el parámetro de control K .

Para un valor $K = 150$, se puede observar en las Fig. 3.3, los gráficos de series de tiempo de $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ y $v(t)$ muestran que las señales están en sincronización completa.

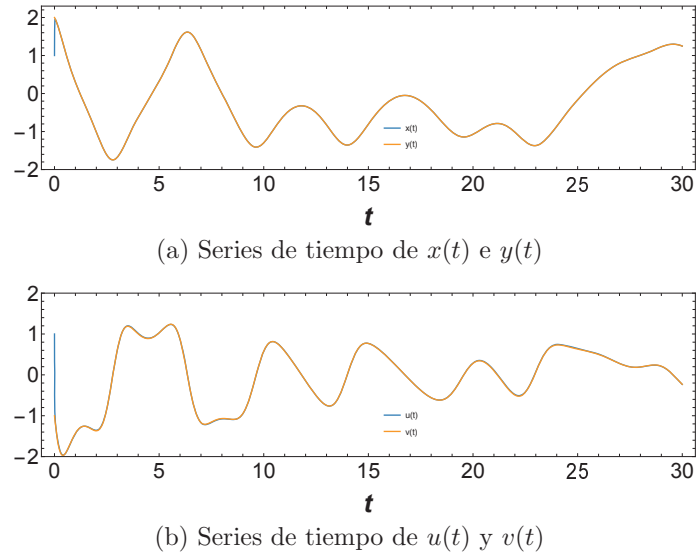


Figura 3.3: Series de tiempo de $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ y $v(t)$.

Analizando las proyecciones sobre los planos (x, y) e (u, v) para un valor de $K = 150$. En la Fig. 3.4 (a) se muestra el comportamiento del oscilador Duffing (sistema maestro) y en Fig. 3.4 (b) el oscilador van der Pol (sistema esclavo). En las Figs. 3.4

CAPÍTULO 3. SISTEMA HIPERCAÓTICO VAN DER POL-DUFFING

(c) y (d) podemos apreciar que en las proyecciones sobre los planos (x, y) e (u, v) hay sincronización completa, observando en ambas figuras una línea recta a 45° .

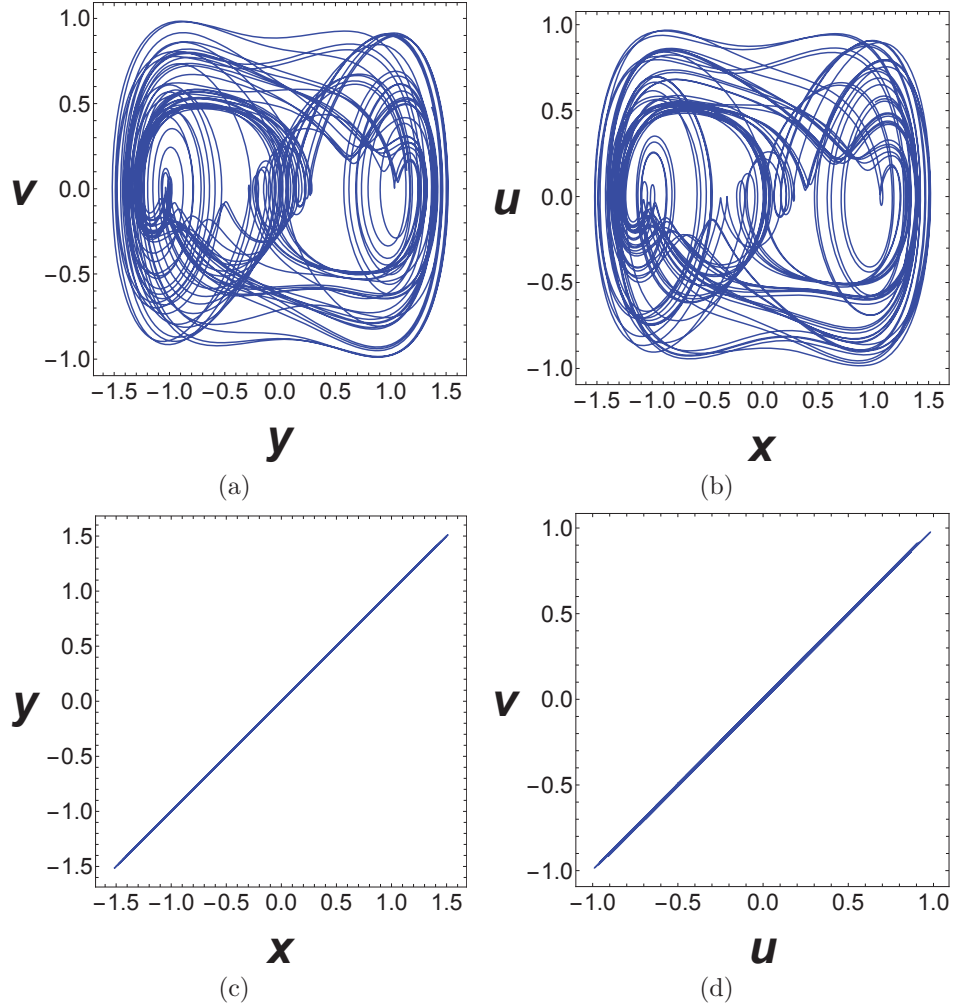


Figura 3.4: Acoplamiento unidireccional para $G = 0$ y $K = 150$. En (a) oscilador de Duffing (Maestro). En (b) oscilador de van der Pol (Esclavo). En (c) y (d) proyecciones sobre los planos (x, y) e (u, v) respectivamente.

Ahora se analizará el caso donde $K = 0$, y tendremos el parámetro de control G . Para este caso se tendrá un acoplamiento unidireccional, el oscilador de van der Pol actuará como sistema maestro y el oscilador de Duffing como sistema esclavo. Las funciones de error $|x(t) - y(t)|$ e $|u(t) - v(t)|$ se obtienen variando el parámetro de control G , se varía en pequeños pasos de 0 a 200. Como se muestra en la Fig. 3.5 la función de error $|x(t) - y(t)|$ convergen a cero para ciertos valores del parámetro G , mientras que la función de error $|u(t) - v(t)|$ para el rango de 0 a 200 no converge exactamente a cero. Cuando el oscilador de van der Pol actúa como sistema maestro y el oscilador de Duffing como sistema esclavo, se acoplan de manera unidireccional. Se

CAPÍTULO 3. SISTEMA HIPERCAÓTICO VAN DER POL-DUFFING

logra obtener una sincronización completa en el canal $(x(t), y(t))$, mientras que en el canal $(u(t), v(t))$ se obtiene una sincronización práctica.

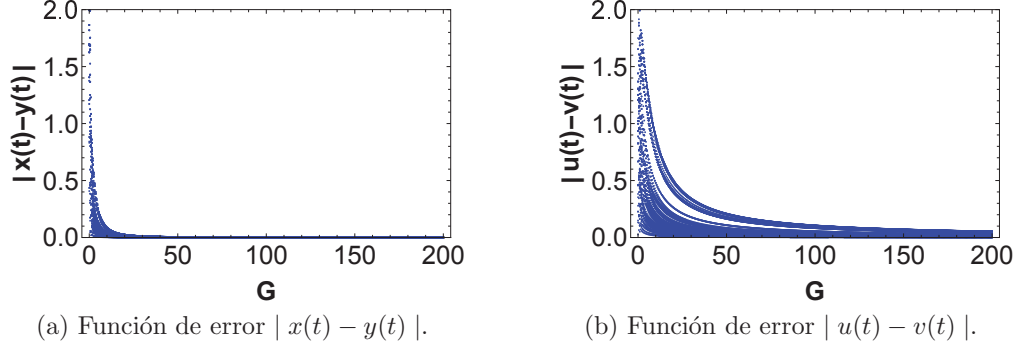


Figura 3.5: Funciones de error variando el parámetro de control G .

Para $G = 150$, en la Fig. 3.6 (a), se puede apreciar a partir del gráfico de series de tiempo de $x(t)$ e $y(t)$ las señales están en sincronización completa. Por el contrario, en la Fig. 3.6 b), el gráfico de series de tiempo de $u(t)$ y $v(t)$, muestra que las señales están en sincronización práctica.

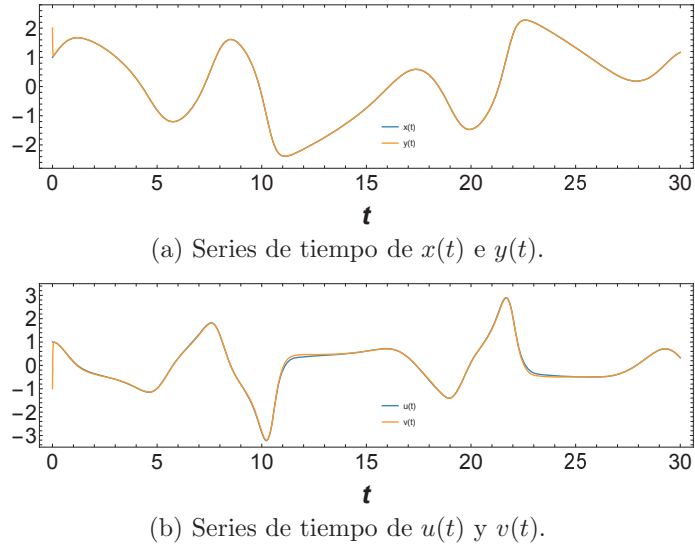


Figura 3.6: Series de tiempo de $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ y $v(t)$.

Analizando las proyecciones en los planos (x, y) e (u, v) para un valor específico de $G = 150$. En este caso el sistema maestro se encuentra en un régimen caótico. En la Fig. 3.7 (a) se muestra el comportamiento del oscilador van der Pol (maestro) y en la Fig. 3.7 (b) el oscilador Duffing (esclavo). En la Fig. 3.7 (c) podemos apreciar que en la proyección sobre el plano (x, y) hay sincronización completa, mientras que en la proyección sobre el plano (u, v) solo hay sincronización práctica ya que se observa en la Fig. 3.7 (d) una línea recta gruesa a 45° .

CAPÍTULO 3. SISTEMA HIPERCAÓTICO VAN DER POL-DUFFING

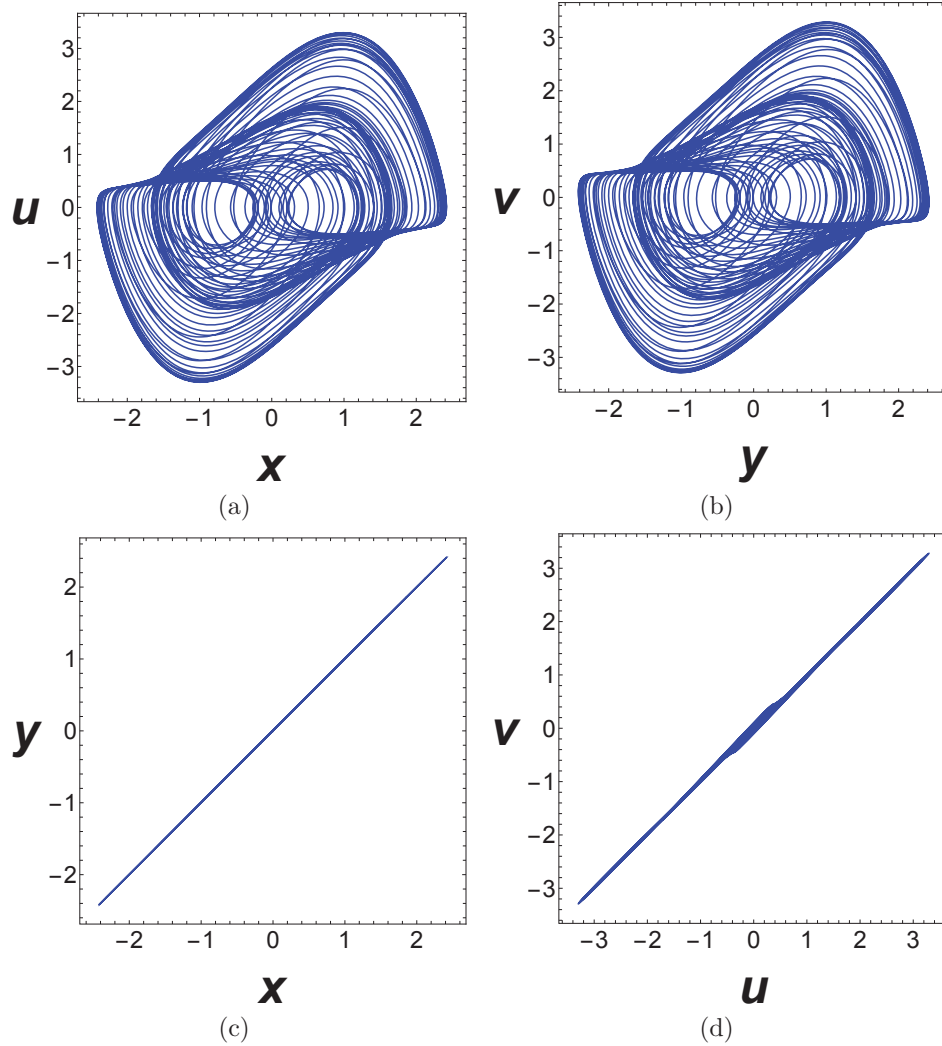
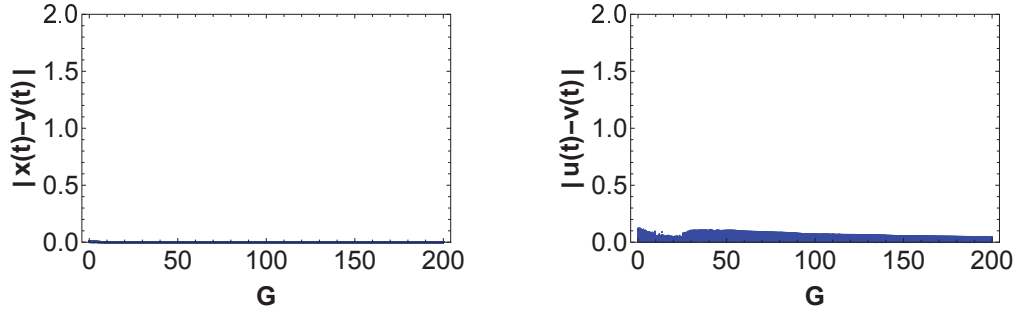


Figura 3.7: Acoplamiento unidireccional para $K = 0$ y $G = 150$. En (a) oscilador de van der Pol (Maestro). En (b) oscilador de Duffing (Esclavo). En (c) y (d) proyecciones sobre los planos (x, y) e (u, v) respectivamente.

Los casos estudiados anteriormente corresponden a un acoplamiento unidireccional, ya que el sistema esclavo no influye en el comportamiento del maestro. El segundo esquema a estudiar es el acoplamiento bidireccional, cuando dos sistemas interactúan mutuamente, con este tipo de acoplamiento no se puede hablar de un sistema maestro o esclavo. Cuando los parámetros de acoplamiento $K \neq 0$ y $G \neq 0$, se tiene un acoplamiento bidireccional entre ambos sistemas, una cuestión interesante a resolver es ver el comportamiento del sistema al variar los parámetros K y G cuando están acoplados de manera bidireccional. De manera numérica para ciertos valores de K y G se observó el comportamiento del sistema. Ahora analizaremos las funciones de error $|x(t) - y(t)|$ e $|u(t) - v(t)|$ para un valor de $K = 20$ y teniendo como parámetro de control G para ver el comportamiento bidireccional.

CAPÍTULO 3. SISTEMA HIPERCAÓTICO VAN DER POL-DUFFING

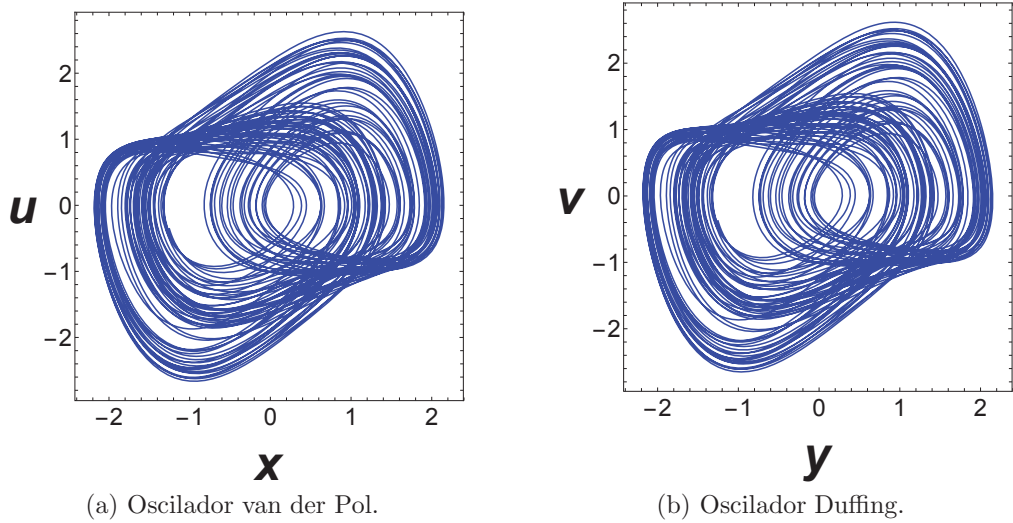


(a) Función de error $|x(t) - y(t)|$.

(b) Función de error $|u(t) - v(t)|$.

Figura 3.8: Funciones de error para un valor de $K = 20$ variando el parámetro de control G .

De manera similar las funciones de error $|x(t) - y(t)|$ e $|u(t) - v(t)|$ se obtienen fijando el parámetro $K = 20$ y variando el parámetro de control G . Como se puede ver en la Fig. 3.8 la función de error $|x(t) - y(t)|$ convergen a cero para ciertos valores del parámetro G , mientras que la función de error $|u(t) - v(t)|$ para el rango de 0 a 200 no converge exactamente a cero. En este caso se tiene una sincronización completa en el canal $(x(t), y(t))$, mientras que el canal $(u(t), v(t))$ se logra obtener una sincronización práctica. Se tomaron valores de $K = 20$ y $G = 60$ para ver el comportamiento bidireccional de ambos osciladores como se muestran en la Fig. 3.9.



(a) Oscilador van der Pol.

(b) Oscilador Duffing.

Figura 3.9: Dinámica del sistema para valores de $K = 20$ y $G = 60$.

En la Fig. 3.10 (a) podemos apreciar que en la proyección sobre el plano (x, y) hay sincronización completa, mientras que en la proyección sobre el plano (u, v) solo hay sincronización práctica porque se observa en la Fig. 3.10 (b) una línea recta gruesa a 45° .

CAPÍTULO 3. SISTEMA HIPERCAÓTICO VAN DER POL-DUFFING

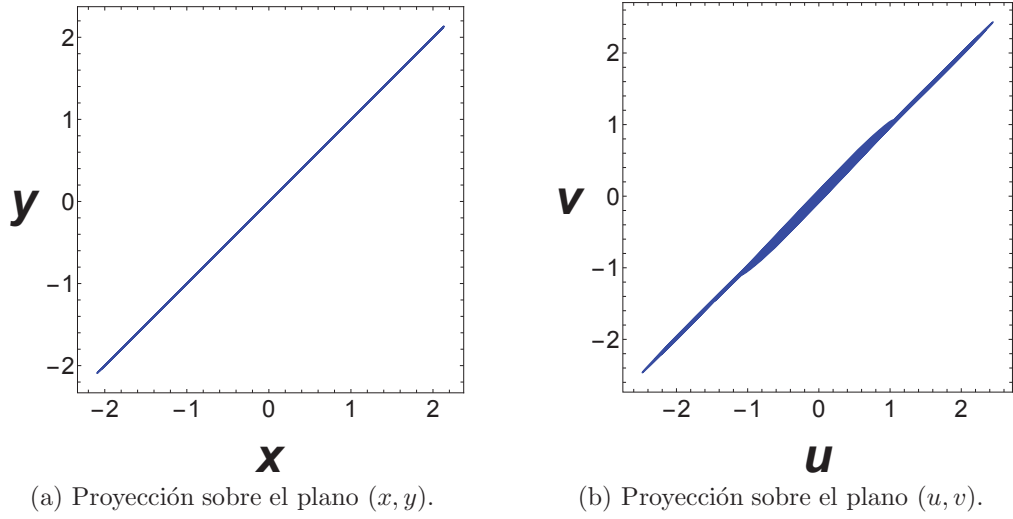


Figura 3.10: Acoplamiento bidireccional para $K = 20$ y $G = 60$.

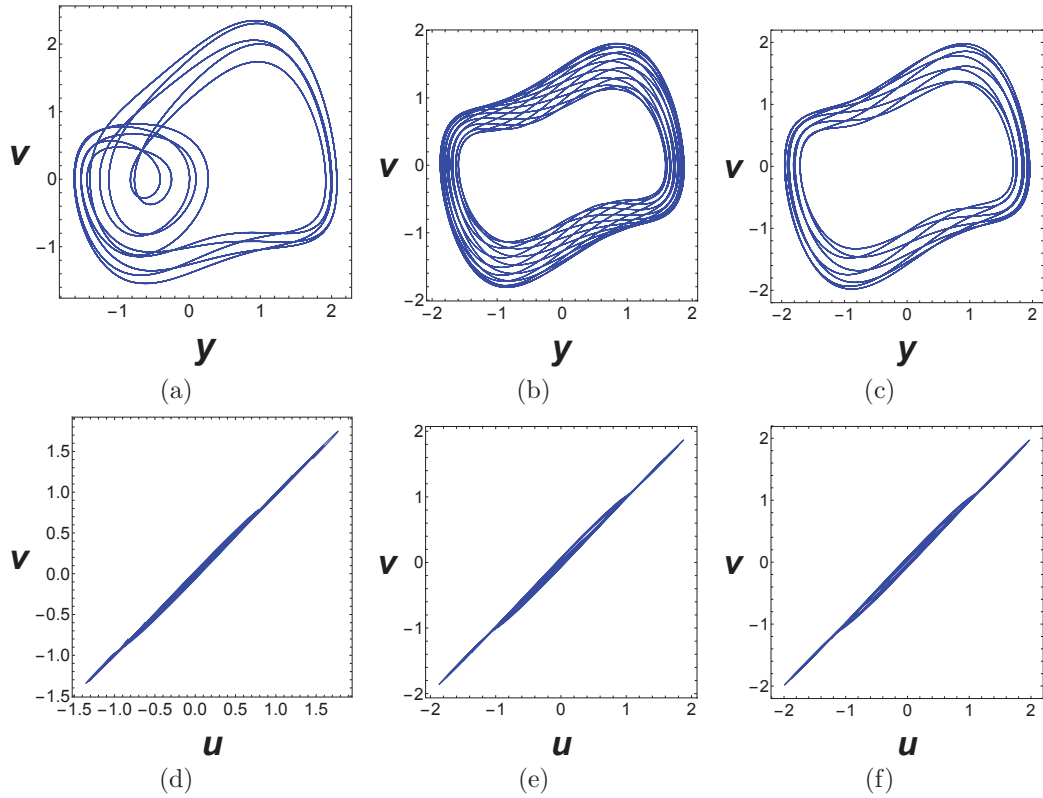


Figura 3.11: Acoplamiento bidireccional variando w_1 . En (a) $w_1 = 0,5$. En (b) $w_1 = 0,75$. En (c) $w_1 = 1$. En (d), (e) y (f) proyección del plano (u, v) para los 3 valores distintos de w_1 .

Analizaremos el sistema cuando $K = 20$ y $G = 60$, pero tomaremos como paráme-

CAPÍTULO 3. SISTEMA HIPERCAÓTICO VAN DER POL-DUFFING

tro de control w_1 para ver el comportamiento para diferentes valores de w_1 , como se observa en la Fig. 3.11 al variar el parámetro en la proyección sobre el plano (u, v) se observa que se mantiene una sincronización práctica.

Ahora estudiaremos el caso donde fijamos el valor de $G = 20$ y variando el parámetro de control K de 0 a 200 para ver el comportamiento bidireccional. Calculamos las funciones de error $|y(t) - x(t)|$ y $|v(t) - u(t)|$. En la Fig 3.12 se puede observar que las funciones de error $|y(t) - x(t)|$ y $|v(t) - u(t)|$ convergen a cero. La sincronización completa se puede obtener en ambos canales $(x(t), y(t))$ e $(u(t), v(t))$.

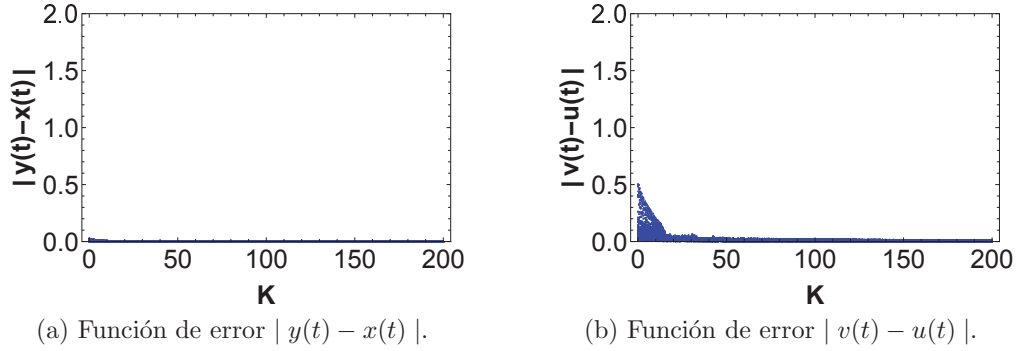


Figura 3.12: Funciones de error para un valor de $G = 20$ variando el parámetro de control K .

Analizando las proyecciones sobre los planos (x, y) e (u, v) para un valor de $K = 60$ y $G = 20$. En la Fig. 3.13 se muestra el comportamiento del oscilador van der Pol y el oscilador Duffing. En la Fig. 3.14 podemos apreciar que en las proyecciones sobre los planos (x, y) e (u, v) hay sincronización completa, observando en ambas figuras una línea recta a 45° .

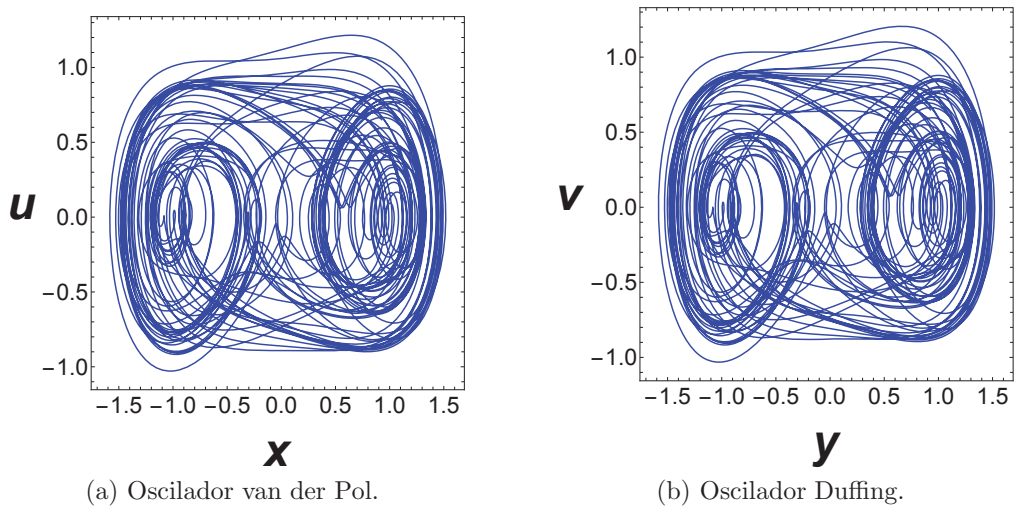


Figura 3.13: Dinámica del sistema para valores de $K = 60$ y $G = 20$.

CAPÍTULO 3. SISTEMA HIPERCAÓTICO VAN DER POL-DUFFING

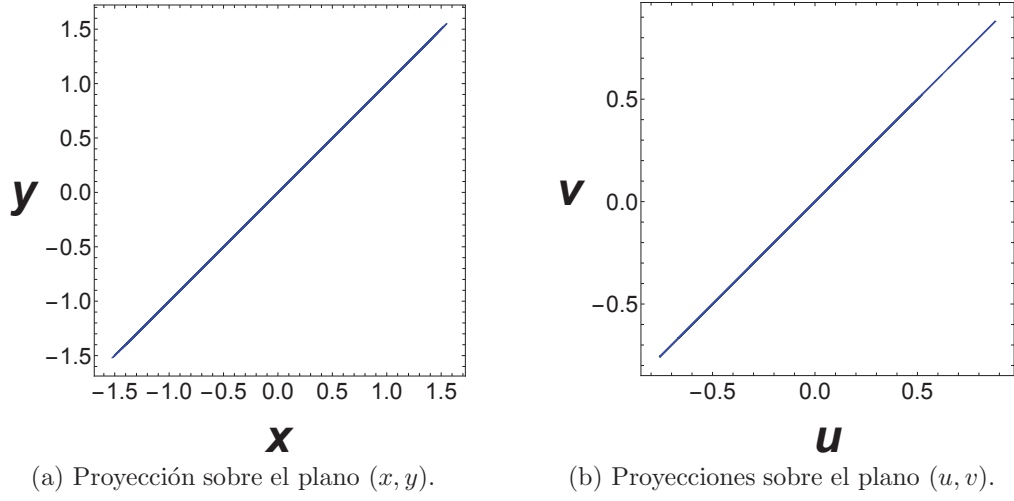


Figura 3.14: Acoplamiento bidireccional para $K = 60$ y $G = 20$.

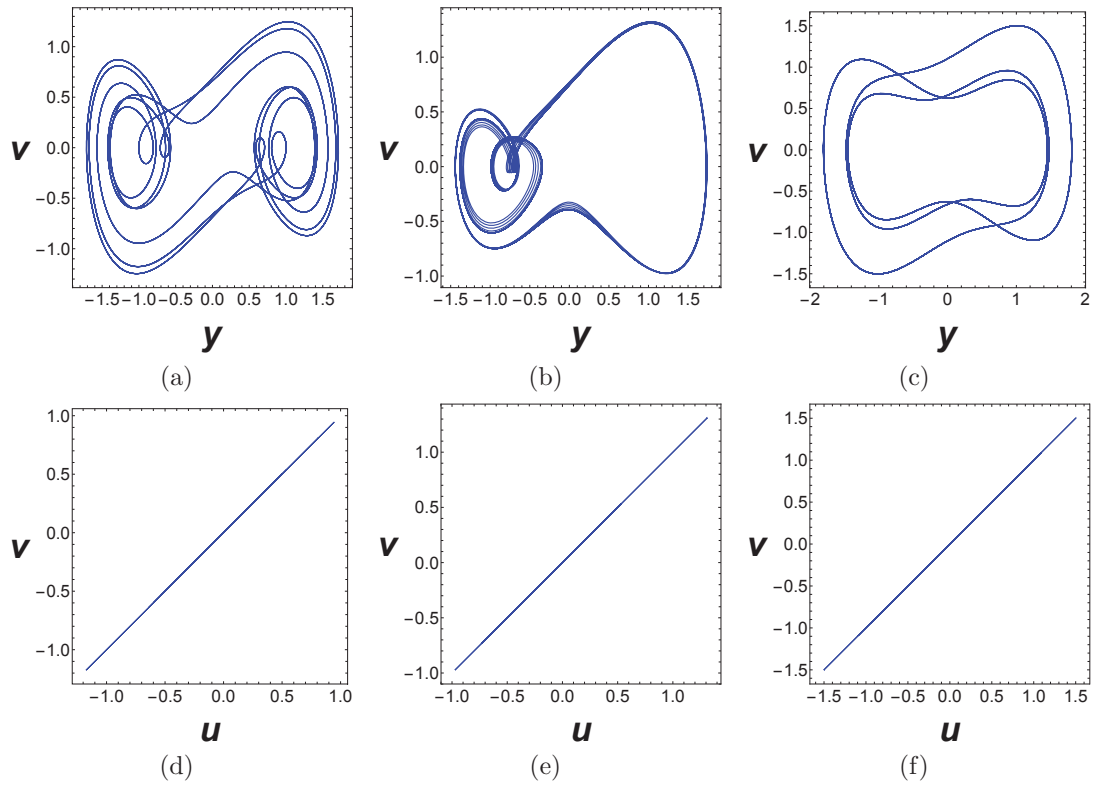


Figura 3.15: Acoplamiento bidireccional variando w_2 . En (a) $w_2 = 0,25$. En (b) $w_2 = 0,5$. En (c) $w_2 = 0,75$. En (d), (e) y (f) proyección del plano (u, v) para los 3 valores distintos de w_2 .

CAPÍTULO 3. SISTEMA HIPERCAÓTICO VAN DER POL-DUFFING

Analizaremos el sistema cuando $K = 60$ y $G = 20$, pero tomaremos como parámetro de control w_2 para ver el comportamiento para diferentes valores de w_2 , como se observa en la Fig. 3.15 al variar el parámetro en la proyección sobre el plano (u, v) se observa que se mantiene la sincronización completa para los distintos valores de w_2 .

Con el sistema hipercaótico de van der Pol-Duffing se puede estudiar la sincronización de manera unidireccional o bidireccional, teniendo este tipo de acoplamiento es de gran aporte para los sistemas de telecomunicaciones, para poder caracterizar en que rangos se logra obtener la sincronización completa y los valores de los parámetros de control. Es telecomunicaciones para envío o encriptamiento de información es necesario que se mantenga una sincronización completa para evitar la perdida de la información.

CAPÍTULO 3. SISTEMA HIPERCAÓTICO VAN DER POL-DUFFING

Capítulo 4

Conclusiones

Esta tesis está basada en el estudio de los osciladores dinámicos no lineales que en los últimos años ha tenido gran interés por parte de la comunidad científica. Los sistemas no lineales pueden presentar inestabilidades que en ocasiones conducen a un comportamiento no periódico conocido con el nombre de caos determinista. En particular, los osciladores de van der Pol y Duffing, han sido sistemas muy estudiados en la literatura, debido a las ventajas que presenta cuando se comparan con sistemas reales. Los resultados obtenidos en esta tesis están basados en simulaciones numéricas de las ecuaciones que describen la dinámica del sistema hipercaótico van der Pol-Duffing.

Abordamos el problema del control y sincronización del caos en el sistema van der Pol-Duffing. De acuerdo a los resultados obtenidos en esta tesis, podemos concluir lo siguiente: Cuando se tiene un acoplamiento unidireccional $G = 0$ y se varía K , el oscilador de Duffing actúa como el sistema maestro y el oscilador de van der Pol como el sistema esclavo podemos obtener una sincronización completa en las proyecciones sobre los planos (x, y) e (u, v) . Por otro lado, cuando el oscilador de van der Pol actúa como el sistema maestro y el oscilador de Duffing como el sistema esclavo ($K = 0$ y se varía G), podemos obtener una sincronización completa solo en la proyección sobre el plano (x, y) y una sincronización práctica en la proyección sobre el plano (u, v) .

En el caso de un acoplamiento bidireccional cuando $K = 20$ y se varía el parámetro de control G , cuando ambos osciladores interactúan mutuamente, podemos obtener una sincronización completa solo en la proyección sobre el plano (x, y) y una sincronización práctica en la proyección sobre el plano (u, v) , también se estudió que la sincronización práctica se mantenía cuando se varía el parámetro w_1 para 3 distintos valores.

En el caso de un acoplamiento bidireccional cuando $G = 20$ y se varía el parámetro de control K , podemos obtener una sincronización completa en ambas proyecciones sobre los planos (x, y) e (u, v) , también se estudió que la sincronización completa se mantenía cuando se varía el parámetro w_2 para 3 distintos valores.

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

En general podemos concluir que el canal donde siempre se lograba mantener la sincronización completa es el canal $(x(t), y(t))$, para todos los casos de acoplamiento unidireccional y bidireccional. En el área de telecomunicaciones es un resultado muy importante porque se planteó una manera distinta a la que actualmente existe en la literatura para poder sincronizar estos osciladores de van der Pol y Duffing. Finalmente queremos mencionar que los objetivos de esta tesis se han cubierto de manera satisfactoria. También queremos mencionar que este trabajo puede ser de utilidad para trabajos futuros en área de control y sincronización.

Bibliografía

- [1] Van der Pol, B., On relaxation-oscillations, The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. J. of Sci., 2(7), 978-992 (1927).
- [2] Kanamaru, T., Van der Pol oscillator, Scholarpedia, 2(1), 2202, (2007).
- [3] Fitz Hugh, R., Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes, Biophysics J, 1, 445-466, (1961).
- [4] Nagumo, J., Arimoto, S. and Yoshizawa, S. An active pulse transmission line simulating nerve axon, Proc. IRE, 50, 2061-2070, (1962).
- [5] Cartwright, J., Eguiluz, V., Hernandez-Garcia, E. and Piro, O., Dynamics of elastic excitable media, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 9, 2197-2202, (1999).
- [6] Borrelli, Robert y Courtney Coleman, Ecuaciones diferenciales: una perspectiva de modelación, México, Oxford University Press, (2002).
- [7] Kanamaru, Takashi, Van der Pol oscillator”, en Scholarpedia, 2(1), 2202, 2007, disponible en <http://www.scholarpedia.org/article/VanderPol>.
- [8] Holmes J. and Rand D.A., The bifurcations of Duffing’s equation: An application of catastrophe theory, Journal of Sound and Vibration, 44, 237-253, (1976).
- [9] Ott, E. Chaos in Dynamical Systems. New York: Cambridge University Press, (1993).
- [10] Murali K. Lakshmanan, M., Drive-response scenario of chaos synchronization in identical nonlinear systems, Physical Review E 49(6), 4882-4885, (1994).
- [11] Ogorzalek, M. J., Order and chaos in third-order RC ladder network with nonlinear feedback, IEEE Transactions on Circuits and Systems 36(9), 1221-1230, (1989).
- [12] Ott, E., Grebogi, C. Yorke, J., Controlling Chaos, Physical Review Letters 64(11), 1196-1199, (1990).
- [13] Pecora, L. M., Carroll, T. L., Synchronization in chaotic systems, Physical Review Letters 64(8), 821-824, (1990).

CAPÍTULO 4. BIBLIOGRAFÍA

- [14] Hunt, E. R. Johnson, G., Keeping chaos at bay, IEEE Spectrum Nov. Vol.93, 32-36, (1993).
- [15] Newell, T. C., Alsing, P. M., Gavrielides, A. Kovanis, V., Synchronization of Chaotic Diode Resonators by Occasional Proportional Feedback, Physical Review Letters 72(11), 1647-165, (1994).
- [16] Lakshmanan, M. Murali, K., Chaos in Nonlinear Oscillators: Controlling and Synchronization, World Scientific Series on Nonlinear Science 13, Singapore, (1996).
- [17] Kapitaniak, T., Kocarev, L. J. Chua, L. O., Controlling Chaos Without Feedback and Control Signals, International Journal Of Bifurcation And Chaos 3, 459-468, (1993).
- [18] Jackson, E. A., The Entrainment and Migration Controls of Multiple-attractor Systems, (1990).
- [19] Wiesenfeld, K. McNamara, B., Small signal amplification in bifurcating dynamical systems, Physical Review A 33, 629-642, (1986).
- [20] Murali, K., Lakshmanan, M. Chua, L. O., Controlling and synchronization of chaos in the simplest dissipative nonautonomous circuit, International Journal of Bifurcation and Chaos 5, 563-571, (1995).
- [21] Rajasekar, S. Lakshmanan, M., Algorithms for controlling chaotic motion: Application for the BVP oscillator, Physica D 67, 282-300, (1993).
- [22] Arizmendi, C. M., Fereydoon Family, Salas-Brito, A. L., Quenched disorder effects on deterministic inertia ratchets, Physical Review E, 63(6), 1104-1110, (2001).
- [23] Pyragas, K., Continuous control of chaos by self-controlling feedback, Physics Letters A 170, 421-428, (1992).
- [24] Huberman, B. A. Lumer, E., Dynamics of adaptive systems, IEEE Transactions on Circuits and Systems 37(4), 547-550, (1990).
- [25] Cartwright, M. L., Forced oscillations in nearly sinusoidal systems, Journal of the Institute of Electrical Engineering 95, 223-227, (1948).
- [26] Carroll, T. L., Heagy, J., Pecora, L. M., Synchronization and desynchronization in pulse coupled relaxation oscillators, Physics Letters A, 186(3), 225-229, (1994).
- [27] González, D. L. Piro, O., Chaos in a Nonlinear Driven Oscillator with Exact Solution, Physical Review Letters 50(12), 870-872, (1983).
- [28] Arizmendi, C. M., Larrondo, H. A., Sánchez, J. R. Piro, O., Bifurcaciones y Caos en un Oscilador Electrónico No Lineal, 69ª. Reunión Nacional de la AFA, Buenos Aires, (1984).

- [29] Campbell, A., González, A., González, D. L., Piro, O. Larrondo, H. A., Isochrones and the dynamics of kicked oscillators, *Physica A* 155, 565-584, (1989).
- [30] Rosenblum, M. G., Pikovsky, A. S. Kurths, J., Phase Synchronization of Chaotic Oscillators, *Physical Review Letters* 76(11), 1804-1807, (1996).
- [31] Carroll, T. L., Noise-Robust Synchronized Chaotic Communications, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 48(12), 1519-1522, (2001).
- [32] Williams, C., Chaotic Communications Over Radio Channels, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 48(12), 1394-1404, (2001).
- [33] Rulkov, N. F., Sushchik, M. M., Tsimring, L. S. Volkovskii, A. R., Digital Communication Using Chaotic-Pulse-Position Modulation, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 48(12), 1436-1444, (2001).
- [34] Fujisaka H and Yamada T. Stability theory of synchronized motions in coupled-oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics* 69: 32-46. (1983).
- [35] Boccaletti S. et al., The Synchronization of chaotic systems, *Physics Reports* 366, 1-101 (2002).
- [36] Kevin M. Cuomo, Alan V. Oppenheim Steven H. Strigatz, Synchronization of Lorenz-Based Chaotic Circuits with Applications to Communications, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol.40, pp 626-633, (1993).
- [37] Kapitaniak, T., Chua, L.O., Strange nonchaotic trajectories on torus, *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, vol. 7(2), 423-429. (1997).
- [38] Matías M.A. and Güémez J., Stabilization of chaos by proportional pulses in the system variables, *Physical Review Letters*, 72, 1455-1458, 1994. Lorenz, Edward. (1995).
- [39] Kapitaniak T., Chaos synchronization based on a continuous chaos control method in semiconductor lasers with optical feedback, *Phys. Rev. E* 50, 1642-1644 (1994).
- [40] Amritkar R.E., Gupte N., Synchronization of chaotic orbits: The effect of a finite time step, *Phys. Rev. E* 47, 3889 (1993).
- [41] Kocarev L., Parlitz U., General Approach for Chaotic Synchronization with Applications to Communication, *Phys. Rev. Lett.* 74, 5028 (1995).
- [42] Parlitz U., Kocarev L., Stojanovski T., Preckel H., Encoding messages using chaotic synchronization, *Phys. Rev. E* 53, 4351 (1996).

CAPÍTULO 4. BIBLIOGRAFÍA

- [43] Kengne J., Chedjou J.C., Kenne G, Kyamakya K., Kom G.H., Analog circuit implementation and synchronization of a system consisting of a van der Pol oscillator linearly coupled to a Duffing oscillator, *Nonlinear Dyn* 70, 2163–2173 (2012).
- [44] Uriostegui U., Tututi E.S., and Arroyo-Correa G., A new scheme of coupling and synchronizing low-dimensional dynamical systems, *Rev. Mex. Fís.*, vol. 67(2), 334–342 (2021).
- [45] Uriostegui U., and Tututi E.S., Synchronization in the van der Pol-Duffing system via elastic and dissipative couplings, *Rev. Mex. Fís.*, vol. 68(1), 011402 (2022).
- [46] Uriostegui-Legorreta U., Tututi-Hernández E.S., Master-slave synchronization in the Rayleigh and Duffing oscillators via elastic and dissipative couplings, *Rev. Ci. Tec.* 5(1), 151–164 (2022).