



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

**INTRODUCCIÓN AL MODELO COMPTON MASS AS
DARK ENERGY**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO-
MATEMÁTICAS**

P R E S E N T A :

CLAUDIO SALAS PÉREZ



**ASESOR DE TESIS:
DR. TONATIUH MATOS CHASSIN**

**COASESOR DE TESIS:
DR. RICARDO BECERRIL BÁRCENAS**

Morelia Mich. Diciembre de 2022

Índice general

1. Abstract	1
2. Introducción	2
2.1. Expansión del universo	2
2.2. Expansión acelerada del universo	3
2.3. Efecto Compton	4
2.4. Tensor de Ricci en gravedad débil y ondas gravitacionales con masa	6
3. Modelo Compton Mass as Dark Energy	11
3.1. CMaDE	11
3.2. Ecuaciones de campo del modelo CMaDE	16
3.3. Ecuación de Friedmann para el modelo CMaDE	24
3.4. Sistema de ecuaciones de CMaDE	25
4. Soluciones Numéricas del modelo CMaDE	28
4.1. Método Adams-Bashforth-Moulton (ABM)	28
4.2. Resultados numéricos usando el método ABM	30
4.2.1. Soluciones numéricas para el sistema 3.32	30
4.2.2. Soluciones numéricas para el sistema 3.33	34
4.3. Réplica de resultados con RK4	36
4.4. Aproximaciones analíticas	38
4.4.1. Ecuaciones analíticas para el sistema 3.32	39
4.4.2. Ecuaciones analíticas para el sistema 3.33	41
5. Conclusiones	43
6. Perspectivas	44

Resumen

Desde que se conoce que el universo se está expandiendo aceleradamente se propuso la existencia de una nueva energía que se encuentra presente de manera perfectamente homogénea en todo el universo, pero debido a que es muy poco densa se desconoce como interactúa con las demás fuerzas fundamentales ajenas a la gravitación. A esta nueva energía se le llama energía oscura debido a su naturaleza desconocida. Desde el siglo XX existen diferentes modelos cosmológicos que tratan de explicar como funciona la energía oscura y por ende la expansión acelerada del universo, entre los más populares se encuentra Λ CDM, que genera predicciones muy acertadas a los valores observacionales que se han venido obteniendo en los últimos años y por lo tanto es de los modelos más aceptados hoy en día. Lamentablemente estos modelos no dan una explicación de la naturaleza que tiene la energía oscura.

El modelo CMADE muestra que, considerando la naturaleza cuántica del campo gravitatorio, se le puede asociar una masa efectiva Compton a su longitud de onda, proponiendo así dos cosas interesantes, una de ellas es que esta masa efectiva puede considerarse como energía oscura y la otra es que la longitud de onda Compton de la interacción gravitacional esta dada por el universo observable, por lo que la energía oscura varia conforme el universo observable se expande. Este nuevo modelo no solo proporciona una definición natural y muy novedosa de lo que es la energía oscura, sino que también tiene excelentes predicciones numéricas que al compararlas con Λ CDM se puede observar que ambos modelos se comportan de maneras similares, lo que lo convierte a CMADE en un modelo igual de bueno que Λ CDM, además de que no se necesita introducir ninguna constante para ajustar el modelo, con el solo hecho de considerar la energía del gravitón e introducirla en las ecuaciones de Albert Einstein, el resto del modelo se da de manera natural y sin la necesidad de matemáticas altamente rigurosas.

Capítulo 1

Abstract

Since it is known that the universe is expanding rapidly, the existence of a new energy that is present in a perfectly homogeneous way throughout the universe has been proposed, but because it is very sparse, it is unknown how it interacts with other alien fundamental forces to gravitation. This new energy is called dark energy due to its unknown nature. Since the 20th century there have been different cosmological models that try to explain how dark energy works and therefore the accelerated expansion of the universe, among the most popular is LCDM, which generates very accurate predictions based on the observational values that have been obtained. in recent years and therefore it is one of the most accepted models today. Unfortunately these models do not give an explanation of the nature of dark energy.

The CMaDE model shows that, considering the quantum nature of the gravitational field, a Compton effective mass can be associated to its wavelength, thus proposing two interesting things, one of which is that this effective mass can be considered as dark energy and the other is that the Compton wavelength of the gravitational interaction is given by the observable universe, so the dark energy varies as the observable universe expands. This new model not only provides a natural and very novel definition of what dark energy is, but also has excellent numerical predictions that when compared with LCDM it can be seen that both models behave in similar ways, which makes it to CMaDE in a model as good as LCDM, in addition to the fact that no constant needs to be introduced to fit the model, with the mere fact of considering the energy of the graviton and introducing it into the Albert Einstein equations, the rest of the model occurs naturally and without the need for highly rigorous mathematics.

Keywords: **Constante cosmologica, Energia oscura, Efecto Compton**

Capítulo 2

Introducción

2.1. Expansión del universo

A finales de 1912 el astrónomo estadounidense Vesto M. Slipher hizo importantes observaciones que fueron pilares para descubrir la expansión del universo. En este año gracias a la técnica del desplazamiento al rojo, Vesto M. Slipher hizo su primer medición de la velocidad radial de la galaxia andrómeda que se acercaba a nosotros a una razón de 300 km/s. En los siguientes años Slipher siguió haciendo mediciones de diferentes galaxias y para 1917 presentó un catálogo con un total de 25 galaxias de las cuales 21 de ellas se alejaban de la vía láctea mientras 4 incluyendo a andrómeda se acercaban (Slipher, 1917).

Al mismo tiempo Albert Einstein trabajaba en su teoría de la relatividad general (Einstein 1916), que describe la atracción mutua entre objetos como resultado de la curvatura del espacio-tiempo. En esta nueva teoría se tiene un universo no estático pero ya que en 1917 esto se consideraba como un error, Einstein prefirió modificar sus ecuaciones agregando un nuevo término al cual llamó constante cosmológica Λ . Después se demostró que la solución estática de Einstein tenía algunos problemas (Eddington, 1930) por lo que se descartó la constante cosmológica; Aunque esta constante se descartó en esta época será de gran importancia después y se volverá a introducir a las ecuaciones de Einstein para formar parte importante de lo que se conoce hoy en día.

En 1922 Alexander Friedmann propuso nuevas soluciones a las ecuaciones de Einstein, las cuales proponían un universo no estático pues se expandía con respecto al tiempo, estas soluciones a pesar de que eran muy buenas fueron descartadas nueva-

mente por el año en que se publicaron (Friedmann, 1922).

Las observaciones de Vesto M. Slipher eran acertadas, pero en 1912 se creía que las galaxias que se observaban eran nebulosas espirales que se encontraban dentro de la vía láctea; en 1925 Edwin Hubble hizo nuevo trabajo observacional en el que se dio cuenta de que estas “nebulosas espirales” eran galaxias ajenas a la vía láctea por lo que se descubrió que el universo era mucho más grande de lo que se creía. Hubble también midió las velocidades de estas galaxias y las comparó entre sí, dándose cuenta que estas se alejaban unas de las otras (Hubble 1925).

Hasta ese momento solo las soluciones de Friedmann podían relacionar las medidas de las galaxias espirales y los marcos de la relatividad general, lamentablemente este trabajo había quedado en el olvido y no fue hasta 1927 que el astrónomo Georges Lemaître publicó un artículo donde propone nuevas soluciones a las ecuaciones de la relatividad general (Lemaître, 1927) y que son equivalentes a las soluciones propuestas por Friedmann en 1922. En estas nuevas soluciones, Lemaître tomaba en cuenta las mediciones hechas por Slipher y Hubble, con lo que logró derivar una tasa de expansión del universo de aproximadamente unos 600 km/s/Mpc, a esta tasa de expansión se le conoce como constante de Hubble.

Finalmente en 1931 se tomó en serio la idea de Lemaître gracias a una nueva publicación de Hubble en 1929 donde combinaba medidas de velocidades de galaxias con estimaciones de distancias mostrando por primera vez una relación gráfica de proporcionalidad entre velocidad y distancia (Hubble, 1929) consiguiendo una constante de proporcionalidad de 500 km/s/Mpc no muy diferente a la de Lemaître, esto se fue “mejorando” cada vez más tal que para 1931 se tenía una aproximación de 538 km/s/Mpc, a pesar de estar muy lejos del valor que se conoce hoy en día ($H_0 = 72,6$ km/s/Mpc gracias a los datos conseguidos con el satélite *Planck*) al menos ya se tenía una idea concreta de la expansión del universo.

2.2. Expansión acelerada del universo

Una vez aclarado que el universo se está expandiendo, se pensó que este se estaría desacelerando debido a la atracción gravitacional que empujaba en dirección opuesta a la expansión; así que dos equipos comenzaron a competir para demostrar la

desaceleración del universo. El equipo supernova cosmology project (SCP) creado en 1988 y liderado por Saul Perlmutter en Berkeley y el equipo High-z Supernova Search Team (HZT) creado en 1994 y liderado por Brian Schmidt en conjunto con Adam Riess, estaban observando supernovas para poder demostrar la desaceleración del universo pero debido a lo difícil que era saber donde y cuando sucederían las supernovas, ambos equipos idearon por su cuenta un método para saber donde y cuando serían las próximas supernovas lo que les facilitó crear un amplio catálogo de fotos y mediciones de supernovas.

En 1998 se publicaron las observaciones de los dos equipos; HZT publicó un trabajo con las observaciones de 10 supernovas y el equipo SCP publicó un artículo con resultados de análisis de 42 supernovas (Perlmutter et al. 1999). Sin embargo, los resultados fueron un tanto inesperados, las supernovas más distantes eran más débiles de lo que se esperaba si el universo se estuviese desacelerando, en cambio estos resultados sugerían que la expansión del universo se está acelerando. En el 2011 Saul Perlmutter, Brian Schmidt y Adam Riess fueron merecedores del premio Nobel de física gracias al trabajo por separado de estos dos equipos (premio Nobel de física, 2011).

Esta nueva expansión acelerada implica que un factor ajeno a los conocidos estaba presente en el universo, este nuevo factor es una fuerza que se opone a la gravedad y no tiene un análogo físico newtoniano. Debido a lo misterioso que es este nuevo factor en 1998 se le dio el nombre de **Energía oscura**.

2.3. Efecto Compton

En un experimento que Arthur Compton realizaba en 1923 descubrió que los fotones se pueden comportar como partículas y que a partículas como el electrón se les puede asociar una longitud de onda. Para llegar a estos resultados Compton creó un experimento en el que lanzaba fotones de rayos X a un electrón, percatándose de que la longitud de onda de la radiación dispersa es mayor que la longitud de onda de la radiación incidente y esto solo se pudo explicar asumiendo que los fotones de rayos X se comportan como partículas.

Considérese una colisión elástica entre un fotón (considerándolo como partícula) y un electrón estático. El fotón incidente tiene una energía $E = h\nu$ y un momento $p = \frac{h\nu}{c}$, mientras que el electrón que inicialmente está en reposo tiene una energía E_0 como en la figura 2.1. Si al colisionar, el fotón se esparce con un ángulo θ y un momento p' , el electrón retrocederá con un momento p_e , entonces, debido a la conservación de momento

$$\vec{p} = \vec{p}_e + \vec{p}'$$

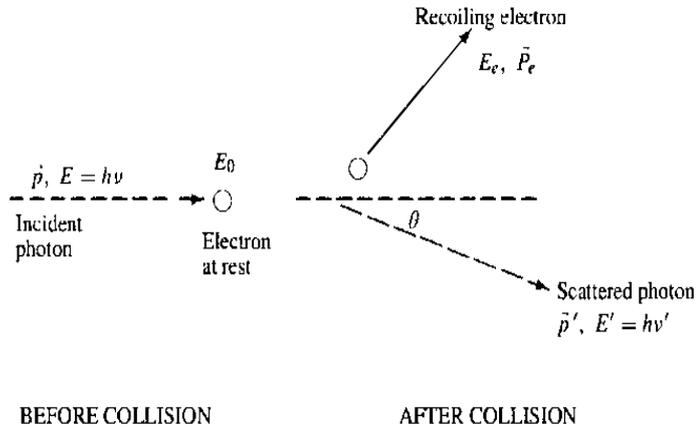


Figura 2.1: Colisión entre un fotón con energía $E = h\nu$ y un electrón en reposo. Adaptado de *Quantum Mechanics concepts and applications*, (p.13), por Nouredine Zettili.

si se despeja el momento del electrón y se eleva al cuadrado se tiene

$$p_e^2 = (\vec{p} - \vec{p}')^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos\theta = \frac{h^2}{c^2}(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos\theta)$$

La energía del electrón antes y después de la colisión están dadas, respectivamente, por

$$E_0 = m_e c^2$$

$$E_e = \sqrt{\vec{p}_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} = h \sqrt{\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos\theta + \frac{m_e^4 c^2}{h^4}}$$

La energía incidente y dispersada del fotón es $E = h\nu$ y $E' = h\nu'$ respectivamente, entonces por la conservación de la energía se tiene

$$E + E_0 = E' + E_e$$

$$\Rightarrow h\nu + m_e c^2 = h\nu' + h\sqrt{\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu'\cos\theta + \frac{m_e^4 c^2}{h^4}}$$

$$\Rightarrow \nu - \nu' + \frac{m_e c^2}{h} = \sqrt{\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu'\cos\theta + \frac{m_e^4 c^2}{h^4}}$$

elevando al cuadrado ambos lados y simplificando

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos\theta)$$

y esto se puede expresar como

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos\theta) = \lambda_c (1 - \cos\theta)$$

donde $\lambda_c = \frac{h}{m_e c^2}$ es la longitud de onda asociada al electrón, entonces se puede decir que a las partículas se le puede asociar una longitud de onda y ya que el fotón dispersó al electrón también se le puede asociar una masa distinta de cero a la que se le llamará masa efectiva.

2.4. Tensor de Ricci en gravedad débil y ondas gravitacionales con masa

Para poder comprender la idea principal del modelo CMaDE, hay dos factores importantes a considerar, el tensor de Ricci en una gravedad débil y la ecuación de ondas gravitacionales, que se consiguen al considerar una gravedad débil (o linealizada). Como ambos factores se consiguen con una gravedad débil, estos se pueden relacionar fácilmente entre si.

Las ecuaciones de Einstein generalmente son difíciles de resolver, pero una gra-

vedad débil (o linealizada) ayuda a comprender el significado físico de estas ecuaciones. Para una gravedad linealizada se toma un sistema de coordenadas cuasi-minkowskiano, de tal forma que la métrica $g_{\mu\nu}$ se aproxima a la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ a grandes distancias del sistema que se esté estudiando. Con estas condiciones se puede definir la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ como una métrica de Minkowski más una pequeña perturbación h

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

siempre y cuando $|h| \ll 1$.

Para una gravedad débil se puede usar la parte lineal del tensor de Riemann $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ dada por

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right]$$

una vez que se tiene el tensor de Riemann se puede conseguir el tensor de Ricci facilmente haciendo $R_{\mu\nu\kappa}^\nu$ o bien

$$R_{\mu\kappa} = R_{\mu\nu\kappa}^\nu = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}$$

por lo tanto el tensor de Ricci tendrá la forma

$$\begin{aligned} R_{\mu\kappa} &= \frac{g^{\lambda\nu}}{2} \left[-\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial^2 g_\nu^\nu}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_\mu^\lambda}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_\kappa^\nu}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - g^{\lambda\nu} \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right] \end{aligned}$$

por definición

$$g_\lambda^\lambda \equiv g$$

y

$$g^{\lambda\nu} \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \equiv \square(\cdot)$$

donde \square se conoce como operador D'Alambertiano. Tomando estas definiciones, el

tensor de Ricci se puede escribir como

$$R_{\mu\kappa} = \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial^2 g}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_\mu^\lambda}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_\kappa^\nu}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \square g_{\mu\kappa} \right]$$

si ahora se sustituye ec.(2.1)

$$R_{\mu\kappa} = \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial^2(\eta + h)}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} + \frac{\partial^2(\eta_\mu^\lambda + h_\mu^\lambda)}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2(\eta_\kappa^\nu + h_\kappa^\nu)}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \square(\eta_{\mu\kappa} + h_{\mu\kappa}) \right]$$

la parte minkoswkiana se va con las derivadas, por lo que

$$R_{\mu\kappa} = \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial^2 h}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 h_\mu^\lambda}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 h_\kappa^\nu}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \square h_{\mu\kappa} \right]$$

usando notación de Einstein este tensor se puede escribir como,

$$R_{\mu\kappa} = \frac{1}{2} \left[h_{\mu,\kappa\lambda}^\lambda - h_{,\kappa\mu} + h_{\kappa,\nu\mu}^\nu - \square h_{\mu\kappa} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(h_{\mu,\lambda}^\lambda - \frac{1}{2} h_{,\mu} \right)_{,\kappa} + \left(h_{\kappa,\nu}^\nu - \frac{1}{2} h_{,\kappa} \right)_{,\mu} - \square h_{\mu\kappa} \right]$$

si se elige el sistema de coordenadas adecuado esta expresión se puede reducir bastante.

Entonces, eligiendo el sistema coordenado de tal manera que se cumpla

$$\left(h_{\mu,\alpha}^\alpha - \frac{1}{2} h_{,\mu} \right)_{,\beta} = 0$$

se consigue una simple expresión de la forma

$$R_{\mu\kappa} = \frac{1}{2} \square h_{\mu\kappa} \quad (2.2)$$

que representa al tensor de Ricci en gravedad débil.

Las ondas gravitacionales son perturbaciones del espacio-tiempo que se propagan en todas direcciones a la velocidad de la luz, estas perturbaciones son causadas por diferentes eventos cosmológicos, como la colisión entre agujeros negros, pulsaciones de objetos compactos, estrellas de neutrones, entre otros. Estas perturbaciones del espacio-tiempo se predijeron por primera vez en 1915 gracias a la ecuaciones de la teoría de la

relatividad y observadas por primera vez en 2015.

Para conseguir esta ecuación se considera nuevamente una gravedad linealizada, es decir la métrica ec.(2.1) y las ecuaciones de Einstein en el vacío

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$$

y ya que el escalar de Ricci para un espacio plano es cero, entonces, para un espacio cuasi-plano también se puede considerar cero, por lo que se tiene

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$$

que al sustituir el tensor de Ricci ec.(2.2)

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square g_{\mu\nu}$$

o bien

$$\square g_{\mu\nu} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2\right)g_{\mu\nu} = 0$$

que es la ecuación conocida de onda en el vacío.

Las ondas electromagnéticas se pueden escribir como

$$\square A_\mu = 0$$

y si se les quiere agregar masa, entonces

$$\square A_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} A_\mu = 0$$

que se conoce como la ecuación de proca. La ecuación para un campo escalar sin masa también se puede escribir como

$$\square \Phi_\mu = 0$$

y al agregarle masa obtiene la forma

$$\square \Phi_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Phi_\mu = 0$$

que es similar a la ecuación de proca, entonces de manera análoga se le puede asociar una masa a la ecuación de ondas gravitacionales, por lo tanto se puede definir

$$\square g_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} g_\mu = 0 \quad (2.3)$$

que se obtiene solo por analogía y representa la ecuación de ondas gravitacionales con masa. Una vez que se tiene el tensor de Ricci ec.(2.2) y la ecuación de ondas gravitacionales con masa ec.(2.3) se puede comenzar a desarrollar la idea principal del modelo CMaDE.

Capítulo 3

Modelo Compton Mass as Dark Energy

3.1. CMaDE

El modelo Compton Mass as Dark Energy propone una solución de lo que es la naturaleza de la energía oscura, usando una combinación de simples argumentos cuánticos y las ecuaciones de la teoría de la relatividad general. En el universo el gravitón juega el papel de transmisor de interacción gravitacional y debido a que todo en el universo está sometido a la gravitación, entonces la energía del gravitón debería estar incluida en las ecuaciones de Einstein, por lo que el modelo CMaDE toma esta energía y la introduce en las ecuaciones de la relatividad general.

La energía de una partícula de masa cero como lo es el fotón esta dada por

$$E = h\nu$$

donde h es la constante de planck y ν es la frecuencia de la partícula. Gracias al efecto Compton a estas partículas de masa cero se les puede asociar una masa virtual (o efectiva) de tal manera que la ecuación de energía se convierte en

$$E = pc = mc^2$$

con m como una masa virtual. Una vez asociada esta masa virtual a dicha partícula también se le puede asociar una longitud de onda compton

$$\lambda = \frac{h}{mc}$$

entonces, ya que el gravitón tiene una masa $m_g = 0$ se le puede asociar una masa efectiva de tal manera que el gravitón tendrá una energía de la forma

$$E = p_g c = m_\gamma c^2 \quad (3.1)$$

y una longitud de onda compton

$$\lambda = \frac{h}{m_\gamma c} \quad (3.2)$$

donde m_γ es la masa virtual asociada al gravitón y la masa m_g sigue siendo cero.

Para poder introducir la energía del gravitón, es necesario el tensor de Ricci en gravedad débil ec.(2.2)

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \square h_{\mu\nu}$$

y la ecuación de ondas gravitacionales con una masa agregada ec.(2.3)

$$\square g_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} g_\mu = 0$$

Una vez que se tiene el tensor de Ricci y la ecuación de onda, se pueden relacionar con la ecuación de la relatividad general en su forma de Ricci, para esto se escribe la ecuación Einstein en su forma normal

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = \kappa^2 T_{\mu\nu}$$

si se multiplica por $g^{\mu\nu}$ en ambos lados

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda \right] &= \kappa^2 g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\ \Rightarrow g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda &= \kappa^2 T_{\mu\nu} \\ \Rightarrow R - \frac{1}{2} \delta_\mu^\mu R + \delta_\mu^\mu \Lambda &= \kappa^2 T \end{aligned}$$

donde $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_\mu^\mu = R$ y δ_μ^μ es una suma sobre la delta de kronecker, entonces

$$R - \frac{1}{2}4R + 4\Lambda = \kappa^2 T$$

$$\Rightarrow R = -\kappa^2 T + 4\Lambda$$

sustituyendo este valor del escalar de Ricci en la ecuación de Einstein se tiene

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(-\kappa^2 T + 4\Lambda) + g_{\mu\nu}\Lambda = \kappa^2 T_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right)$$

que representa la ecuación de Einstein en su forma de Ricci. Si a esta ecuación le quitamos la materia para simplificarla, tendrá la forma

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \tag{3.3}$$

donde ec.(3.3) es la ecuación de Einstein en el vacío.

Una vez que se tiene ec.(3.3), se puede relacionar con la ecuación de onda y el tensor de Ricci en gravedad débil. Para esto se multiplica ec.(3.3) por 2

$$2R_{\mu\nu} - 2\Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

y sustituyendo con el tensor de Ricci ec.(2.2)

$$\square h_{\mu\nu} - 2\Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

y ya que

$$\square g_{\mu\nu} = \square(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = \square h_{\mu\nu}$$

se puede escribir

$$\square g_{\mu\nu} - 2\Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

si se compara esta ecuación con ec.(2.3) se puede ver que

$$2\Lambda = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \quad (3.4)$$

donde m representa la masa virtual del gravitón y $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, entonces usando la fórmula de compton $m = \frac{h}{\lambda c}$ se puede escribir Λ como:

$$\Lambda = \frac{2\pi^2}{\lambda^2} \quad (3.5)$$

donde λ es la longitud de onda del gravitón, por lo que se tiene a Λ en términos sencillos y que no requieren ningún tipo de ajuste.

Como ya se mencionó λ es la longitud de onda del gravitón y esta equivale al tamaño del horizonte del universo, es decir, la longitud de onda del gravitón es finita ya que el universo es finito. Pero además de ser finito se está expandiendo aceleradamente, entonces la longitud de onda se está expandiendo a la velocidad de la luz y si algo se mueve a la velocidad de la luz entonces cumple con

$$ds^2 = 0$$

Suponiendo que el gravitón ha recorrido una distancia R_H en su vida, entonces $\lambda = R_H$. Para calcular R_H hay que recordar que el gravitón se mueve a la velocidad de la luz, por lo tanto

$$0 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (3.6)$$

si se piensa en un espacio plano $k = 0$ y en que se esta midiendo la distancia de tal manera que $\theta = 0$ y $\phi = 0$, se tiene que

$$dr = \frac{c dt}{a(t)}$$

o bien

$$R_H = \int_0^{R_H} dr = c \int_0^{\text{hoy}} \frac{dt}{a}$$

$$\Rightarrow R_H = c \int_0^{\text{hoy}} \frac{dt}{a}$$

y con la única intención de que R_H sea adimensional se puede agregar el termino H_0 resultando

$$R_H = c H_0 \int_0^{\text{hoy}} \frac{dt}{a} \quad (3.7)$$

entonces se puede reescribir λ como

$$\lambda = \left(\frac{1}{H_0} \right) R_H \quad (3.8)$$

Para simplificar el manejo de R_H , se escribirá en términos e-folding que solo es $N = \ln\left(\frac{a}{a_0}\right)$, por lo tanto $e^N = \frac{a}{a_0}$, y $\frac{dN}{dt} = \frac{a_0}{a} \frac{\dot{a}}{a_0} = H$, es decir, $dt = \frac{dN}{H}$. Entonces R_H tendrá la forma

$$R_H = c H_0 \int_0^t \frac{dt}{a} = c \int_{-\infty}^N \frac{H_0}{H} e^{-N} dN \quad (3.9)$$

Sin embargo, existe una ambigüedad a la hora de calcular este R_H . Para la ec.(3.9) se ha situado al observador en un punto donde el gravitón viene desde el horizonte del universo y se acerca a él, pero, si se coloca a este observador, de tal manera que observe cómo el gravitón se aleja de él, al alejarse el gravitón del observador, este medirá un R_H diferente. La diferencia entre estos R_H radica en los límites de integración, es decir, se tendrá un R_H de la forma

$$R_H = c H_0 \int_t^0 \frac{dt}{a} = c \int_N^{-\infty} \frac{H_0}{H} e^{-N} dN \quad (3.10)$$

Entonces, ¿Cuál R_H es correcta? De acuerdo a lo planteado anteriormente, las ecuaciones (3.9) y (3.10) están bien justificadas, por lo tanto ambas son candidatas para el modelo CMaDE, a su vez, es necesario mencionar que solo una funcionará de manera adecuada para este modelo, por lo que cualquier cálculo que implique el uso de R_H se hará con ambas.

Por último al sustituir ec.(3.8) en ec.(3.5) se tiene

$$\Lambda = \frac{2\pi^2}{\lambda^2} = \frac{2\pi^2}{R_H^2} \frac{H_0^2}{c^2} \quad (3.11)$$

Por lo tanto, CMaDE dice que la “constante cosmológica” no es una constante, ya que varía con el tiempo, esto evitará los problemas que se presentaban al introducir esta constante en las ecuaciones de Einstein, además, de que no necesita ningún término para ajustar. Entonces, esta nueva Λ se puede introducir a las ecuaciones de Einstein representando a una energía oscura que depende del tamaño del universo observable.

3.2. Ecuaciones de campo del modelo CMaDE

Una nueva Λ implica que las ecuaciones de campo de la relatividad general también se modificarán un poco. Para conseguir estas nuevas ecuaciones de campo se parte de la ecuación de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + g^{\mu\nu}\Lambda = \kappa^2 T^{\mu\nu}$$

y derivando covariantemente

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)_{;\mu} + (g^{\mu\nu}\Lambda)_{;\mu} = \kappa^2 T^{\mu\nu}_{;\mu}$$

por construcción $(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)_{;\mu} = 0$ y si Λ fuera una constante $(g^{\mu\nu}\Lambda)_{;\mu}$ también sería cero, pero ya que en el modelo CMaDE se considera Λ como una variable que depende del tiempo, entonces la derivada de esta es diferente de cero, por lo que se tiene

$$g^{\mu\nu}\Lambda_{;\mu} = \kappa^2 T_{;\mu}^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow g^{\mu\nu}\Lambda_{,\mu} = \kappa^2 T_{;\mu}^{\mu\nu} \quad (3.13)$$

que es algo muy diferente a lo que convencionalmente se tenía en las ecuaciones de Einstein, ya que la derivada covariante del tensor de energía-momento será diferente de cero.

Si se considera el tensor de energía-momento para un fluido perfecto

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-kr^2)}{a^2}p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2r^2}p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}p \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

y la definición de derivada covariante

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = T_{,\mu}^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} T^{\alpha\mu}$$

si $\nu = 0$, la derivada covariante será

$$T_{;\mu}^{\mu 0} = T_{,\mu}^{\mu 0} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T^{\alpha 0} + \Gamma_{\alpha\mu}^0 T^{\alpha\mu} \quad (3.15)$$

en el primer término del lado derecho de ec.(3.15) para $\mu \neq 0$, $T^{\mu 0} = 0$, por lo tanto

$$T_{;\mu}^{\mu 0} = T_{,0}^{00} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T^{\alpha 0} + \Gamma_{\alpha\mu}^0 T^{\alpha\mu}$$

en el segundo término $T^{\alpha 0} \neq 0$ solo si $\alpha = 0$

$$T_{;\mu}^{\mu 0} = T_{,0}^{00} + \Gamma_{0\mu}^{\mu} T^{00} + \Gamma_{\alpha\mu}^0 T^{\alpha\mu}$$

y en el tercer término $T^{\alpha\mu} \neq 0$ solo si $\alpha = \mu$

$$T_{;\mu}^{\mu 0} = T_{,0}^{00} + \Gamma_{0\mu}^{\mu} T^{00} + \Gamma_{\mu\mu}^0 T^{\mu\mu}$$

haciendo las sumas correspondientes se tiene:

$$T_{;\mu}^{\mu 0} = T_{,0}^{00} + T^{00} [\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3] + \Gamma_{00}^0 T^{00} + \Gamma_{11}^0 T^{11} + \Gamma_{22}^0 T^{22} + \Gamma_{33}^0 T^{33}$$

donde los símbolos de Christoffel para la métrica Robertson-Walker tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \\ \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2 \\ \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 &= \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2} \\ \Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2) \\ \Gamma_{33}^1 &= -r(1-kr^2)\sin^2 \theta \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma_{23}^3 &= \cot\theta \\ \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \Gamma_{\nu\mu}^\alpha\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}T_{;\mu}^{\mu 0} &= T_{,0}^{00} + T^{00} [\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3] + \Gamma_{11}^0 T^{11} + \Gamma_{22}^0 T^{22} + \Gamma_{33}^0 T^{33} \\ &= \dot{\rho}_T + \rho_T \left(3\frac{\dot{a}}{a}\right) + \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \left(\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right) p_T + (a\dot{a}r^2) \left(\frac{p_T}{a^2 r^2}\right) + (a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta) \left(\frac{p_T}{a^2 r^2 \sin^2 \theta}\right) \\ \Rightarrow T_{;\mu}^{\mu 0} &= \dot{\rho}_T + \rho_T \left(3\frac{\dot{a}}{a}\right) + p_T \left(3\frac{\dot{a}}{a}\right)\end{aligned}\tag{3.16}$$

donde ρ_T y p_T son la densidad y presión total que equivale a la suma de las densidades y presiones de radiación, bariones y materia oscura.

Para $\nu = 1$ la derivada covariante tendrá la forma

$$T_{;\mu}^{\mu 1} = T_{,\mu}^{\mu 1} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T^{\alpha 1} + \Gamma_{\alpha\mu}^1 T^{\alpha\mu}$$

siguiendo los mismos pasos que se usaron con $\nu = 0$

$$\begin{aligned} T_{;\mu}^{\mu 1} &= T_{,1}^{11} + \Gamma_{1\mu}^{\mu} T^{11} + \Gamma_{\mu\mu}^1 T^{\mu\mu} \\ &= T_{,1}^{11} + T^{11} [\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3] + \Gamma_{00}^1 T^{00} + \Gamma_{11}^1 T^{11} + \Gamma_{22}^1 T^{22} + \Gamma_{33}^1 T^{33} \\ &= T_{,1}^{11} + 2T^{11}\Gamma_{11}^1 + T^{11}\Gamma_{12}^2 + T^{11}\Gamma_{13}^3 + T^{22}\Gamma_{22}^1 + T^{33}\Gamma_{33}^1 \end{aligned}$$

sustituyendo los símbolos de Christoffel y los valores del tensor energía-momento

$$\begin{aligned} T_{;\mu}^{\mu 1} &= \left(\frac{(1 - kr^2)}{a^2} p \right)_{,r} + 2 \frac{kr}{a^2} p + 2 \frac{(1 - kr^2)}{a^2 r} p - \frac{(1 - kr^2)}{a^2 r} p - \frac{(1 - kr^2)}{a^2 r} p \\ &\Rightarrow T_{;\mu}^{\mu 1} = \left(\frac{(1 - kr^2)}{a^2} p \right)_{,r} + 2 \frac{kr}{a^2} p \\ &\Rightarrow T_{;\mu}^{\mu 1} = 0 \end{aligned}$$

Cuando $\nu = 2$

$$T_{;\mu}^{\mu 2} = T_{,\mu}^{\mu 2} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T^{\alpha 2} + \Gamma_{\alpha\mu}^2 T^{\alpha\mu}$$

nuevamente si se siguen los pasos anteriores

$$\begin{aligned} T_{;\mu}^{\mu 2} &= T_{,2}^{22} + T^{22} [\Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3] + \Gamma_{00}^2 T^{00} + \Gamma_{11}^2 T^{11} + \Gamma_{22}^2 T^{22} + \Gamma_{33}^2 T^{33} \\ &= T^{22}\Gamma_{23}^3 + T^{33}\Gamma_{33}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p}{a^2 r^2} \cot \theta - \frac{p}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \sin \theta \cos \theta \\
&= \frac{p}{a^2 r^2} \cot \theta - \frac{p}{a^2 r^2} \cot \theta \\
&\Rightarrow T_{\mu}^{\mu 2} = 0
\end{aligned}$$

Por último, para $\nu = 3$

$$\begin{aligned}
T_{;\mu}^{\mu 3} &= T_{,\mu}^{\mu 3} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T^{\alpha 3} + \Gamma_{\alpha\mu}^3 T^{\alpha\mu} \\
&= T_{,3}^{33} + T^{33} [\Gamma_{30}^0 + \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3] + \Gamma_{00}^3 T^{00} + \Gamma_{11}^3 T^{11} + \Gamma_{22}^3 T^{22} + \Gamma_{33}^3 T^{33} \\
&\Rightarrow T_{;\mu}^{\mu 3} = 0
\end{aligned}$$

por lo tanto, $T_{;\mu}^{\mu\nu} \neq 0$ solo si $\nu = 0$.

En el lado izquierdo de ec.(3.13), Λ solo depende del tiempo, es decir, para $\mu \neq 0$ $\Lambda_{,\mu} = 0$ entonces,

$$g^{0\nu} \Lambda_{,0} = T_{;\mu}^{\mu 0}$$

ya que el tensor métrico tiene forma diagonal, $g^{0\nu} = 0$ para $\nu \neq 0$ entonces, la ecuación (3.13) tendrá la forma

$$g^{00} \Lambda_{,0} = T_{;\mu}^{\mu 0}$$

por lo tanto,

$$-\dot{\Lambda} = \kappa^2 \left[\dot{\rho}_T + \rho_T \left(3 \frac{\dot{a}}{a} \right) + p_T \left(3 \frac{\dot{a}}{a} \right) \right]$$

$$\Rightarrow -\dot{\Lambda} = \kappa^2 [\dot{\rho}_T + \rho_T 3H + p_T 3H] \quad (3.17)$$

Para continuar desarrollando ec.(3.17) es necesario definir lo que es la densidad crítica. La densidad crítica ρ_c , es la densidad requerida para que la geometría del espacio sea completamente plana, es decir, $k = 0$. Por lo que se puede escribir ρ_c como

$$\rho_c = \frac{3H^2}{\kappa^2}$$

Por definición, el parámetro de densidad Ω_x está dado por $\Omega_x = \frac{\rho_x}{\rho_c}$, pero si en lugar de usar la densidad crítica ρ_c se usa ρ_{0c} , que es la densidad crítica para un tiempo t_0 , se puede definir un nuevo parámetro de densidad

$$\Omega_x^0 = \frac{\kappa^2 \rho_x}{3H_0^2} = \frac{\rho_x}{\rho_{0c}}$$

Entonces, si se divide ec.(3.17) entre $3H_0^2$ se tiene

$$\begin{aligned} -\dot{\Omega}_\Lambda^0 &= \frac{1}{\rho_{0c}} [\dot{\rho}_T + 3H\rho_T + 3Hp_T] \\ &= \dot{\Omega}_T^0 + 3H\Omega_T^0 + 3H\frac{p_T}{\rho_c} \\ &= \dot{\Omega}_R^0 + \dot{\Omega}_B^0 + \dot{\Omega}_{DM}^0 + 3H\Omega_R^0 + 3H\Omega_B^0 + 3H\Omega_{DM}^0 + 3H\frac{p_R}{\rho_c} + 3H\frac{p_B}{\rho_c} + 3H\frac{p_{DM}}{\rho_c} \end{aligned}$$

donde, $P_R = \frac{1}{3}\rho_R$, $P_B = 0$ y $P_{DM} = 0$

$$\Rightarrow -\dot{\Omega}_\Lambda^0 = \dot{\Omega}_R^0 + \dot{\Omega}_B^0 + \dot{\Omega}_{DM}^0 + 3H\Omega_R^0 + 3H\Omega_B^0 + 3H\Omega_{DM}^0 + H\Omega_R^0$$

finalmente, si se agrupan términos, se tiene

$$-\dot{\Omega}_\Lambda^0 = \dot{\Omega}_R^0 + 4H\Omega_R^0 + \dot{\Omega}_B^0 + 3H\Omega_B^0 + \dot{\Omega}_{DM}^0 + 3H\Omega_{DM}^0 \quad (3.18)$$

y de la conservación de la masa y energía, se puede decir que la suma de los parámetros de densidad de radiación es igual a cero

$$\dot{\Omega}_R^0 + 4H\Omega_R^0 = 0$$

de igual forma, para los bariones

$$\dot{\Omega}_B^0 + 3H\Omega_B^0 = 0$$

Pero ya que se desconoce como se comporta la materia oscura, se puede suponer que esta no se conserva y con esta suposición se puede igualar la densidad de materia oscura con la densidad Ω_Λ , de tal forma que

$$-\Omega_\Lambda^0 = \dot{\Omega}_{DM}^0 + 3H\Omega_{DM}^0$$

y todo esto forma un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\Omega}_R^0 = -4H\Omega_R^0 \quad (3.19)$$

$$\dot{\Omega}_B^0 = -3H\Omega_B^0 \quad (3.20)$$

$$\dot{\Omega}_{DM}^0 = -3H\Omega_{DM}^0 - \dot{\Omega}_\Lambda^0 \quad (3.21)$$

que se puede reescribir en términos de los parámetros e-folding

$$\Omega_R^{0'} = -4\Omega_R^0 \quad (3.22)$$

$$\Omega_B^{0'} = -3\Omega_B^0 \quad (3.23)$$

$$\Omega_{DM}^{0'} = -3\Omega_{DM}^0 - \Omega_\Lambda^{0'} \quad (3.24)$$

donde la ecuación para radiación (3.22) y bariones (3.23) se resuelven fácilmente, por otro lado la ecuación diferencial para materia oscura requiere una ecuación diferencial adicional para conseguir los valores de Ω_Λ^0 y así poder conseguir los valores de la densidad de materia oscura (3.24).

Para conseguir una ecuación diferencial para Ω_Λ , se comienza por convertir Λ en Ω_Λ^0 . Para esto solo se tiene que dividir ec.(3.5) por $3H_0$

$$\Omega_\Lambda^0 = \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{H_0^2 \lambda^2} \quad (3.25)$$

al derivar con respecto a N

$$\begin{aligned} \Omega_\Lambda^{0'} &= -\frac{4}{3} \frac{\pi^2}{H_0^2 \lambda^3} \frac{d\lambda}{dN} \\ &= -\frac{4}{3} \frac{\pi^2}{H_0^2 \lambda^3} \frac{d}{dN} \left(\frac{c}{H_0} \int_{-\infty}^N \frac{H_0}{H} e^{-N} dN \right) \\ &= -\frac{4}{3} \frac{\pi^2}{H_0^2 \lambda^3} \left(\frac{c}{H_0} \frac{H_0}{H} e^{-N} \right) \\ &= -\frac{4}{3} \frac{\pi^2}{H_0^2 H^2 \lambda^3} e^{-N} \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde $c=1$ y se esta usando ec.(3.9) para la derivada λ . De ec.(3.25) se tiene $\lambda = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\pi^2}{\Omega_\Lambda^0 H_0^2}}$, por lo que, ec.(3.26) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \Omega_\Lambda^{0'} &= -\frac{4\pi^2}{3H_0^2 H} \frac{3^{\frac{3}{2}} (\Omega_\Lambda^0)^{\frac{3}{2}} (H_0^2)^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}} \pi^{\frac{3}{2}}} \\ &= -4 \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{2}} \pi} \frac{H_0}{H} (\Omega_\Lambda^0)^{\frac{3}{2}} e^{-N} \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{\pi} \frac{H_0}{H} (\Omega_\Lambda^0)^{\frac{3}{2}} e^{-N} \end{aligned}$$

entonces, la ecuación diferencial para Ω_Λ^0 es

$$\Omega_\Lambda^{0'} = -\frac{\sqrt{6}}{\pi} \frac{H_0}{H} (\Omega_\Lambda^0)^{\frac{3}{2}} e^{-N} \quad (3.27)$$

Si en la derivada de λ con respecto a N , se usa ec.(3.10) en lugar de ec.(3.9) se tendrá $-\frac{c}{H_0} \frac{H_0}{H} e^{-N}$, por lo tanto, la ecuación diferencial para Ω_λ^0 será

$$\Omega_\lambda^{0'} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \frac{H_0}{H} (\Omega_\lambda^0)^{\frac{3}{2}} e^{-N} \quad (3.28)$$

ya que el modelo CMaDE asocia Λ con la energía oscura, entonces, ec.(3.27) y ec.(3.28) representan la variación de densidad de energía oscura en el universo a través del tiempo.

Por lo tanto, las ecuaciones de campo para el modelo CMaDE están dadas por el sistema

$$\left. \begin{aligned} \Omega_R^{0'} &= -4\Omega_R^0 \\ \Omega_B^{0'} &= -3\Omega_B^0 \\ \Omega_{DM}^{0'} &= -3\Omega_{DM}^0 - \Omega_\Lambda^{0'} \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

y se complementa con ec.(3.27) y/o ec.(3.28).

3.3. Ecuación de Friedmann para el modelo CMaDE

Una vez que se tienen las ecuaciones de campo, es posible observar las implicaciones cosmológicas del modelo CMaDE. Para encontrar estas implicaciones, se requiere una ecuación de Friedmann adaptada a este nuevo modelo, para esto, se parte de la ecuación ya conocida de Friedmann

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.30)$$

si se dividen ambos lados de la ecuación por H_0

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\kappa^2}{3H_0^2}\rho - \frac{k}{H_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3H_0^2}$$

donde ρ es la suma de todas las densidades presentes del universo, es decir, densidades de radiación, bariones y materia oscura, entonces se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{H_0^2} &= \frac{\kappa^2}{3H_0^2}(\rho_R + \rho_B + \rho_{DM}) - \frac{k}{H_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3H_0^2} \\ &= \frac{1}{\rho_{0c}}(\rho_R + \rho_B + \rho_{DM}) - \frac{k}{H_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3H_0^2} \end{aligned}$$

donde, $\rho_{0c} = \frac{3H_0^2}{\kappa^2}$. Si se define el parámetro de densidad igual que en la página 16, es decir, $\Omega_x^0 = \frac{\rho_x}{\rho_{0x}}$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_R^0 + \Omega_B^0 + \Omega_{DM}^0 - \frac{k}{H_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3H_0^2}$$

y para que la ecuación esté conformada solo por parámetros de densidad conocidos y

una variable independiente, se puede definir $\Omega_\Lambda^0 = \frac{\Lambda}{3H_0^2}$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_R^0 + \Omega_B^0 + \Omega_{DM}^0 - \frac{k}{H_0^2 a^2} + \Omega_\Lambda^0$$

y $\Omega_k^0 = -\frac{k}{H_0^2}$ que es una constante conocida

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_R^0 + \Omega_B^0 + \Omega_{DM}^0 + \frac{\Omega_k^0}{a^2} + \Omega_\Lambda^0$$

por último, usando los parámetros e-folding se tiene

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_R^0 + \Omega_B^0 + \Omega_{DM}^0 + \Omega_k^0 e^{-2N} + \Omega_\Lambda^0 \quad (3.31)$$

donde ec.(3.31) es la ecuación de Friedmann modificada correspondientemente para el modelo CMaDE. Todos los parámetros de densidad, con excepción de Ω_k^0 que es una constante, están dados por las ecuaciones (3.22), (3.23), (3.24) y (3.26), resultantes de las ecuaciones de campo de Einstein.

3.4. Sistema de ecuaciones de CMaDE

Una vez que se tiene la ecuación de Friedmann, las ecuaciones de campo de Einstein y la ecuación diferencial de Ω_Λ^0 , se puede ver que para resolver la ecuación de Friedmann se necesitan las ecuaciones diferenciales de los parámetros de densidad, es decir, las ecuaciones de campo, pero para resolver la ecuación de materia oscura se necesita resolver la ecuación de Ω_Λ^0 y para resolver esta ecuación se necesita la ecuación de Friedmann, por lo que se forma un sistema de ecuaciones que contiene todas las implicaciones del modelo CMaDE.

$$\left. \begin{aligned}
\frac{H^2}{H_0^2} &= \Omega_R^0 + \Omega_B^0 + \Omega_{DM}^0 + \Omega_k^0 e^{-2N} + \Omega_\Lambda^0 \\
\Omega_\Lambda^{0'} &= -\frac{\sqrt{6}}{\pi} \frac{H_0}{H} (\Omega_\Lambda^0)^{\frac{3}{2}} e^{-N} \\
\Omega_R^{0'} &= -4\Omega_R^0 \\
\Omega_B^{0'} &= -3\Omega_B^0 \\
\Omega_{DM}^{0'} &= -3\Omega_{DM}^0 - \Omega_\Lambda^{0'}
\end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

$$\left. \begin{aligned}
\frac{H^2}{H_0^2} &= \Omega_R^0 + \Omega_B^0 + \Omega_{DM}^0 + \Omega_k^0 e^{-2N} + \Omega_\Lambda^0 \\
\Omega_\Lambda^{0'} &= \frac{\sqrt{6}}{\pi} \frac{H_0}{H} (\Omega_\Lambda^0)^{\frac{3}{2}} e^{-N} \\
\Omega_R^{0'} &= -4\Omega_R^0 \\
\Omega_B^{0'} &= -3\Omega_B^0 \\
\Omega_{DM}^{0'} &= -3\Omega_{DM}^0 - \Omega_\Lambda^{0'}
\end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Estos sistemas, dan como resultado una excelente curva de la expansión acelerada del universo en función de N (que depende del tiempo), también regresan soluciones de las diferentes densidades de materia en el universo y el cómo interactúa la materia oscura y la energía oscura, todo en función de N . En este sistema también se puede ver que las ecuaciones de radiación y bariones no interactúan mucho con el resto del sistema, solo con la ecuación de Friedmann, además, de que ambas tienen una solución analítica. Para resolver la ecuación de radiación se escribe

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_R^0}{dN} &= -4\Omega_R^0 \\
\Rightarrow \frac{d\Omega_R^0}{\Omega_R^0} &= -4dN
\end{aligned}$$

si se integra en ambos lados

$$\begin{aligned} \ln(\Omega_R^0) &= -4N + C \\ \Rightarrow \Omega_R^0 &= e^{-4N} C \end{aligned}$$

donde C es una constante. Para encontrar el valor de C, se hace $N=0$

$$\begin{aligned} \Omega_R^0(0) &= e^{-4(0)} C \\ \Rightarrow \Omega_{0R} &= C \end{aligned}$$

por lo tanto, para la ecuación de radiación se tiene la solución

$$\Omega_R^0 = \Omega_{0R} e^{-4N} \quad (3.34)$$

dónde $\Omega_{0x} = \frac{\rho_{0x}}{\rho_{0c}}$. De igual manera, se obtiene la solución para la ecuación de bariones

$$\Omega_B^0 = \Omega_{0B} e^{-3N} \quad (3.35)$$

Una vez resueltas las ecuaciones para radiación y bariones solo queda obtener de manera numérica las soluciones para las densidades de Λ , materia oscura y la ecuación de Friedmann.

Capítulo 4

Soluciones Numéricas del modelo CMaDE

4.1. Método Adams-Bashforth-Moulton (ABM)

Los métodos mas usados para ecuaciones diferenciales son los métodos de un solo paso, es decir, aquellos que solo necesitan de un punto (t_i, y_i) para conseguir el siguiente (t_{i+1}, y_{i+1}) , estos métodos son muy usados por su rápida forma de implementar, además, de que proporcionan muy buenos resultados para ecuaciones diferenciales sencillas. Algunos métodos como lo es el Runge-Kutta utilizan información en puntos interiores del intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, pero no conservan esta información para poder utilizarla directamente en las siguientes aproximaciones y dado que el error esta dado por $|w_i - y(t_i)|$ donde w_i es la solución exacta, entonces el error para este tipo de métodos tiende a crecer conforme se aumenta i .

Existen ecuaciones diferenciales cuyas soluciones crecen o decrecen muy rápido, lo que provoca que el error en métodos de un solo paso también tienda a ser demasiado grande; haciendo este tipo de métodos ineficientes. Este tipo de problemas se pueden solucionar con métodos multipaso que intentan obtener eficiencia utilizando la información de los pasos anteriores en lugar de descartarla, por lo que usan más de un punto $(y_i, y_{i-1}, y_{i-2} \dots)$ para poder calcular el siguiente (y_{i+1}) .

El método Adams-Bashforth-Moulton (ABM) es del tipo predictor-corrector y multipaso, ya que emplea los puntos (t_{i-3}, y_{i-3}) , (t_{i-2}, y_{i-2}) , (t_{i-1}, y_{i-1}) y (t_i, y_i) , es

decir, usa cuatro puntos para calcular con mayor precisión (t_{i+1}, y_{i+1}) . El que este método sea del tipo predictor-corrector implica que primero calcula una aproximación para el punto actual (predictor) y luego la mejora haciendo un segundo cálculo, donde utiliza el valor predictor ya calculado (corrector). El proceso predictivo se llama Adams-Bashforth y esta dado por

$$p_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}[-9g(t_{i-3}, y_{i-3}) + 37g(t_{i-2}, y_{i-2}) + g(t_{i-2}, y_{i-1}) + 55g(t_i, y_i)] \quad (4.1)$$

y el proceso correctivo del método está dado por la ecuación Adams-Moulton

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}[g(t_{i-2}, y_{i-2}) - 5g(t_{i-1}, y_{i-1}) + 19g(t_i, y_i) + 9g(t_{i+1}, p_{i+1})] \quad (4.2)$$

donde por su puesto y_i es la solución a la ecuación diferencial que se esté trabajando

$$y'(t) = g(t, y) \quad (4.3)$$

y h es el tamaño de paso ($h = \Delta t$).

De la ecuación (4.1) se puede ver que hay que calcular $g(x_{i-3}, y_{i-3})$, pero las interacciones van desde $i = 0$ hasta $i = m$, eso quiere decir, que para poder usar el método ABM hay que tener calculados con anterioridad y_1, y_2 , y y_3 con algún otro método, por ejemplo, el método Runge Kutta de orden 4 (RK4). Entonces, dado

$$y'(t) = g(t, y), \quad y_0 = f(t_0), \quad h = \Delta x \quad y \quad m$$

el algoritmo ABM tendrá la siguiente forma:

1.- Usar el método RK4 con las iteraciones de $i = 0$ hasta $i = 2$ para calcular y_1, y_2 y y_3 .

2.- Para las iteraciones desde $i = 3$ hasta $i = m$.

2.1 se calculan las $g(x, y)$ para la iteración i correspondiente.

2.2 Se calcula p_{i+1} ecuación (4.1).

2.3 se calcula y_{i+1} ecuación (4.2).

3.- $t_i = t_i + h$.

4.- si $i = m$. Fin del método.

4.2. Resultados numéricos usando el método ABM

El método ABM calcula los valores del sistema (3.32) desde un punto dado, N , hasta $N = m$. Pero en este caso el intervalo de interés es de $N = -m$ hasta $N = 0$, donde el punto dado es en $N = 0$ ($\frac{H^2}{H_0^2} = 1$). Entonces, si se aplica

$$N \rightarrow -N \quad (4.4)$$

se podrá usar el método ABM para ir desde $N=0$ hasta $N=-m$ y así poderlo aplicar a los sistemas (3.32) y (3.33)

4.2.1. Soluciones numéricas para el sistema 3.32

Al aplicar (4.4) al sistema de ecuaciones (3.32), se consigue un nuevo sistema (que solo se utiliza para resolver el sistema de ecuaciones de manera numérica).

$$\left. \begin{aligned} \frac{H^2}{H_0^2} &= \Omega_R^0 + \Omega_B^0 + \Omega_{DM}^0 + \Omega_k^0 e^{2N} + \Omega_\Lambda^0 \\ \Omega_\Lambda^{0'} &= \frac{\sqrt{6}}{\pi} \frac{H_0}{H} (\Omega_\Lambda^0)^{\frac{3}{2}} e^N \\ \Omega_{DM}^{0'} &= 3\Omega_{DM}^0 - \Omega_\Lambda^{0'} \\ \Omega_R^{0'} &= 4\Omega_R^0 \\ \Omega_B^{0'} &= 3\Omega_B^0 \end{aligned} \right\}$$

donde las ecuaciones de bariones y radiación ya tienen solución y con la nueva N se tienen la forma $\Omega_B^0 = \Omega_{0B} e^{3N}$ y $\Omega_R^0 = \Omega_{0R} e^{4N}$. Por lo que el sistema que se tiene que resolver de manera numérica tendrá la forma

$$\left. \begin{aligned}
\frac{H^2}{H_0^2} &= \Omega_R^0 + \Omega_B^0 + \Omega_{DM}^0 + \Omega_k^0 e^{2N} + \Omega_\Lambda^0 \\
\Omega_\Lambda^{0'} &= \frac{\sqrt{6}}{\pi} \frac{H_0}{H} (\Omega_\Lambda^0)^{\frac{3}{2}} e^N \\
\Omega_{DM}^{0'} &= 3\Omega_{DM}^0 - \Omega_\Lambda^{0'}
\end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Entonces el sistema (4.5), es en si, el mismo que el sistema (3.32), pero adaptado para poder usar el método ABM en un rango negativo. A pesar de que este sistema proporciona soluciones para distintas ecuaciones de densidad, los resultados numéricos solo se enfocarán en la ecuación de Friedmann, que se muestra en la figura 4.1

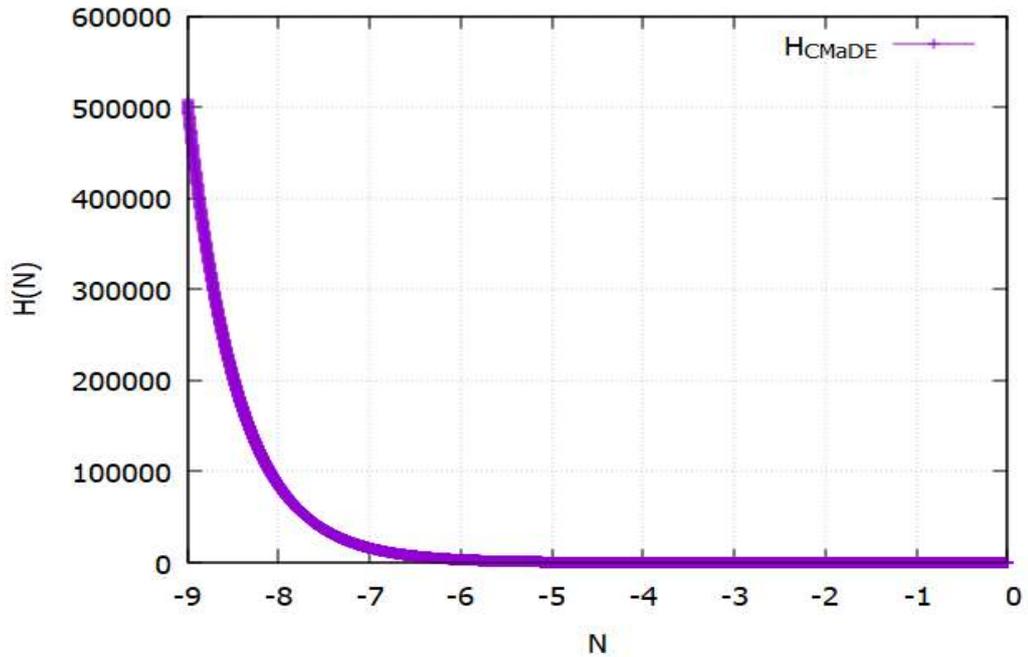


Figura 4.1: Solución a la ecuación de Friedmann con el modelo CMaDE (usando el sistema (3.32)), con condiciones iniciales $\Omega_{0R} = 1 \times 10^{-4}$, $\Omega_{0B} = 0,315$, $\Omega_{0DM} = 0,26$, $\Omega_{0\Lambda} = 0,684$ y $\Omega_k^0 = 0,001$.

esta curva tiene un comportamiento parecido al que proporciona la solución dada por el modelo Λ CDM, si se comparan las curvas de Λ CDM y CMaDE, figura 4.2, se puede notar aún más esta similitud.

En la figura 4.2, se puede ver que aunque ambas curvas se comportan de una manera muy parecida, estas no son iguales, se puede notar una clara diferencia entre las dos

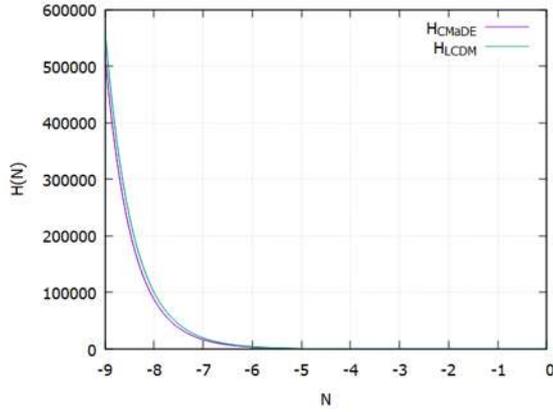


Figura 4.2: Comparación de la solución a la ecuación de Friedmann usando el modelo CMaDE (usando el sistema (3.32)) y el modelo Λ CDM.

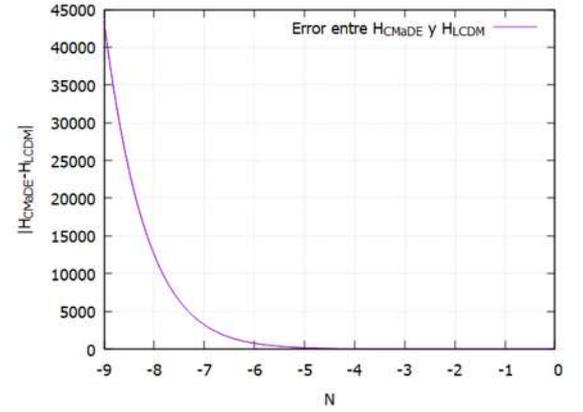


Figura 4.3: Error absoluto entre las soluciones generadas para la ecuación de Friedmann por el modelo CMaDE (usando el sistema (3.32)) y Λ CDM. $|H_{CMaDE} - H_{\Lambda CDM}|$.

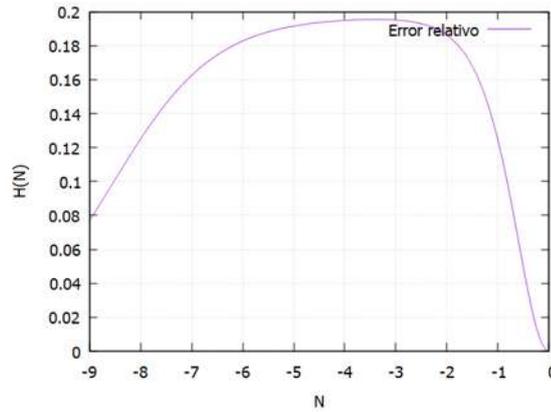


Figura 4.4: Error relativo entre las soluciones generadas para la ecuación de Friedmann por el modelo CMaDE (usando el sistema (3.32)) y Λ CDM. $\frac{|H_{CMaDE} - H_{\Lambda CDM}|}{H_{\Lambda CDM}}$.

curvas. En la figura 4.3 se muestra el error absoluto entre estas curvas y es claramente demasiado amplio, pero ya que los valores para $H(N)$ son extremadamente grandes se puede ver que el error relativo, figura 4.4, es bueno.

Hasta ahora, la comparación de estos modelos ha sido usando una misma constante de Hubble para ambos, pero ¿Que sucede, si para cada modelo se usa una constante de Hubble diferente? se podrían usar distintos valores de H_0 , aunque curiosamente, los mejores resultados se consiguen al usar $H_0 = 0,73$ en el modelo CMaDE y $H_0 = 0,66$ en el modelo Λ CDM. Los valores de las constantes de Hubble usadas, son

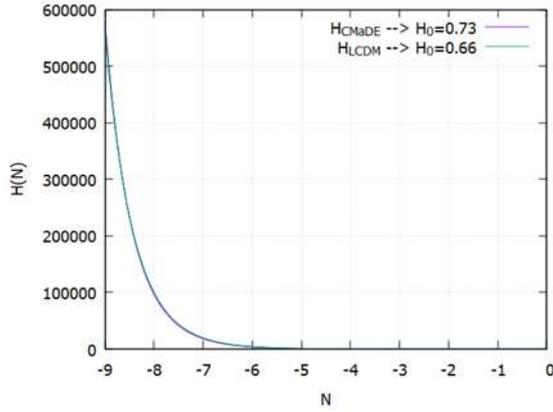


Figura 4.5: Comparación de la solución a la ecuación de Friedmann usando el modelo CMaDE (usando el sistema (3.32)) y el modelo Λ CDM. Con las mismas condiciones iniciales pero diferentes constantes de Hubble para cada modelo, $H_0 = 0,73$ para el modelo CMaDE y $H_0 = 0,66$ para el modelo Λ CDM.

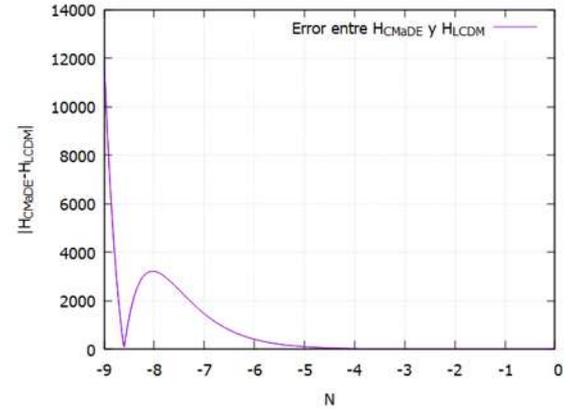


Figura 4.6: Error absoluto entre las soluciones generadas para la ecuación de Friedmann por el modelo CMaDE (usando el sistema (3.32)) y Λ CDM. Con las mismas condiciones iniciales pero diferentes constantes de Hubble para cada modelo, $H_0 = 0,73$ para el modelo CMaDE y $H_0 = 0,66$ para el modelo Λ CDM. $|H_{CMaDE} - H_{\Lambda CDM}|$.

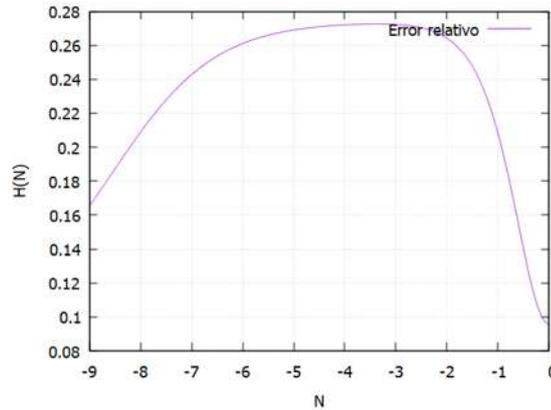


Figura 4.7: Error relativo entre las soluciones generadas para la ecuación de Friedmann por el modelo CMaDE (usando el sistema (3.32)) y Λ CDM. Con las mismas condiciones iniciales pero diferentes constantes de Hubble para cada modelo, $H_0 = 0,73$ para el modelo CMaDE y $H_0 = 0,66$ para el modelo Λ CDM. $\frac{|H_{CMaDE} - H_{\Lambda CDM}|}{H_{\Lambda CDM}}$.

una gran coincidencia, ya que estos valores de H_0 son los que se han conseguido gracias a observaciones locales y a la radiación de fondo de microondas (CMB) respectivamente.

En la figura 4.5 se muestran las soluciones que proporciona cada modelo usando

las distintas constantes de Hubble y se nota con claridad que la comparación es mucho mejor que la que se mostró en la figura 4.2. De la figura 4.5 se podría pensar que el error entre estas curvas es casi despreciable, pero no es así, ya que en la figura 4.6 se puede ver que el error absoluto sigue siendo enorme, aunque en comparación al error mostrado en la figura 4.3 este se ha reducido significativamente, sin embargo, el error relativo que se muestra en la figura 4.7 creció algunas centésimas.

La diferencia entre estos modelos sigue siendo demasiado grande, pero no se debe olvidar que aunque el modelo Λ CDM es el más aceptado hasta hoy, no significa que este sea el modelo correcto. Las soluciones proporcionadas por el modelo CMaDE, a pesar del error entre CMaDE y Λ CDM, siguen teniendo un comportamiento muy parecido, sin olvidar que si las soluciones de CMaDE fueran iguales a las de Λ CDM, se tendrían las mismas problemáticas que genera este modelo.

4.2.2. Soluciones numéricas para el sistema 3.33

Si ahora se aplica (4.4) al sistema (3.33), resultará en un sistema casi idéntico al sistema (4.5), con la única diferencia de un signo en la ecuación de diferencial de Ω_Λ^0

$$\left. \begin{aligned} \frac{H^2}{H_0^2} &= \Omega_R^0 + \Omega_B^0 + \Omega_{DM}^0 + \Omega_k^0 e^{2N} + \Omega_\Lambda^0 \\ \Omega_\Lambda^{0'} &= -\frac{\sqrt{6}}{\pi} \frac{H_0}{H} (\Omega_\Lambda^0)^{\frac{3}{2}} e^N \\ \Omega_{DM}^{0'} &= 3\Omega_{DM}^0 - \Omega_\Lambda^{0'} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

para este sistema a simple vista, la solución a la ecuación de Friedmann sigue siendo muy parecida, figura 4.8

Si se compara H_{CMaDE} (usando el sistema (3.33)) y $H_{\Lambda CDM}$, el error entre estas, apenas se puede percibir a simple vista y este se ve más prometedor que lo conseguido usando el sistema (3.32), figura 4.9. A pesar de que el error parece ser considerablemente mejor que el conseguido anteriormente con el sistema (3.32), este sigue siendo demasiado grande, en la figura 4.10 se muestra como el error sigue creciendo de una manera exponencial, mientras que el error relativo, figura 4.11, ha mejorado bastante, pues ya se mantiene por debajo de lo que se podría considerar un error decente.

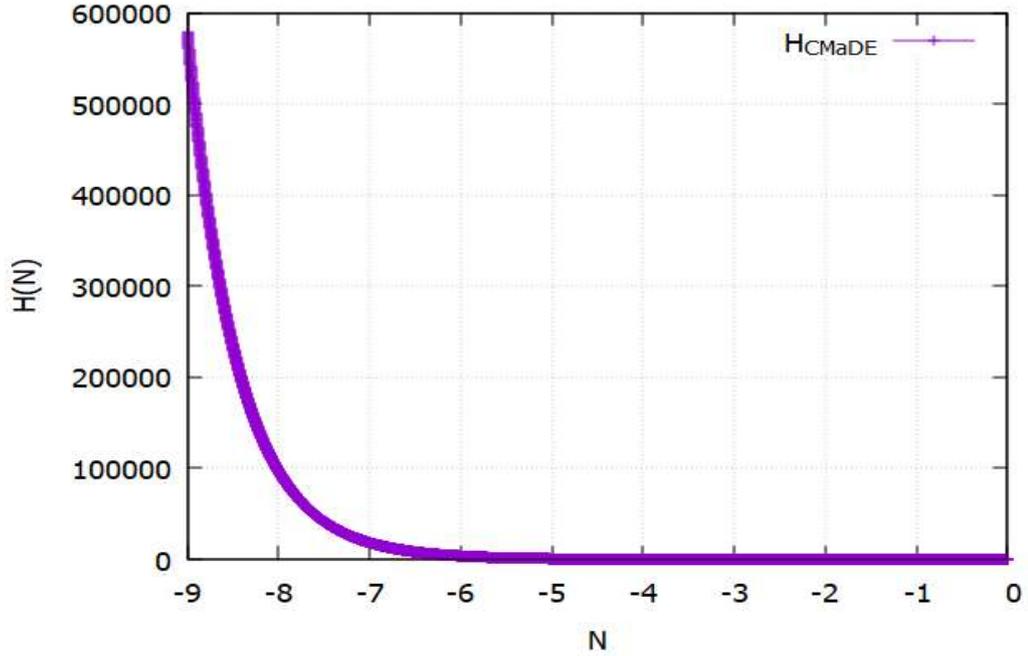


Figura 4.8: Solución a la ecuación de Friedmann con el modelo CMaDE (usando el sistema (3.33)) con condiciones iniciales $\Omega_{0R} = 1 \times 10^{-4}$, $\Omega_{0B} = 0,315$, $\Omega_{0DM} = 0,26$, $\Omega_{0\Lambda} = 0,684$ y $\Omega_k^0 = 0,001$.

A diferencia de lo que se observa usando el sistema (3.32) el usar una H_0 diferente para cada modelo, no funciona igual. Para este sistema, el cambiar las constantes de Hubble genera una diferencia mayor a la que se tiene cuando se usa solo un H_0 para ambos modelos, figura 4.12. Y por lo tanto, el error absoluto entre ambos modelos crece demasiado, incluso mas que el que se tiene cuando se usa la misma H_0 en el sistema (3.32), figura 4.13.

Hay que recordar que no se esta buscando que ambos modelos sean idénticos, por lo tanto, el hecho de que al usar algún sistema el modelo CMaDE se aproxime mas al modelo Λ CDM no significa que este sistema sea el adecuado para el modelo CMaDE. El comparar ambos modelos es solo para lograr ver que el modelo CMaDE tiene un comportamiento bastante parecido al modelo mas aceptado hasta hoy en día en la cosmología, es decir, para verificar que los primeros pasos del modelo CMaDE son muy prometedores.

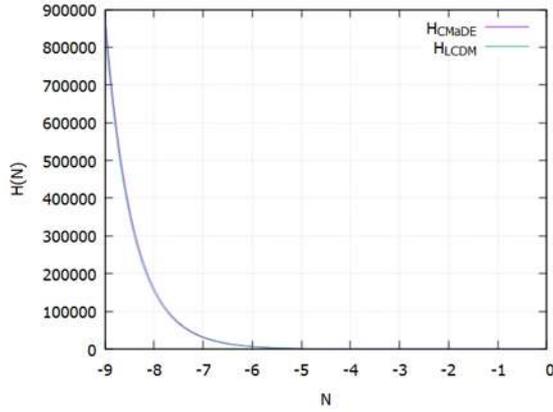


Figura 4.9: Comparación de la solución a la ecuación de Friedmann usando el modelo CMADE (usando el sistema (3.32)) y el modelo Λ CDM.

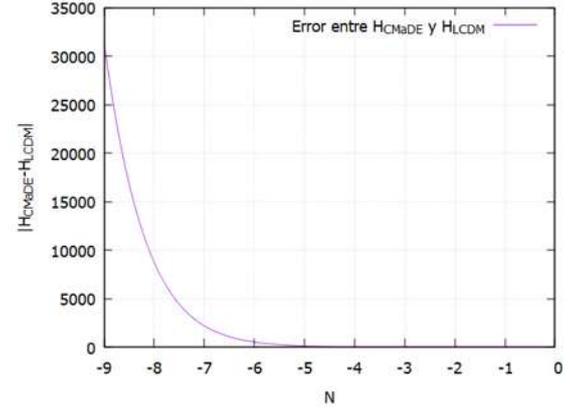


Figura 4.10: Error absoluto entre las soluciones generadas para la ecuación de Friedmann por el modelo CMADE (usando el sistema (3.32)) y Λ CDM. $|H_{CMaDE} - H_{\Lambda CDM}|$.

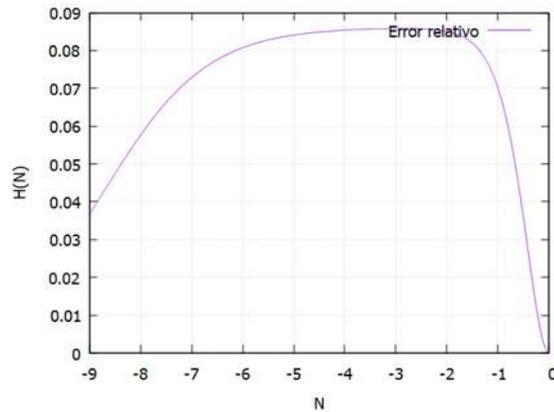


Figura 4.11: Error relativo entre las soluciones generadas para la ecuación de Friedmann por el modelo CMADE (usando el sistema (3.33)) y Λ CDM. $\frac{|H_{CMaDE} - H_{\Lambda CDM}|}{H_{\Lambda CDM}}$.

4.3. Réplica de resultados con RK4

La intención de replicar los resultados con el método Runge Kutta de orden 4, es de alguna manera darle más validez a los resultados generados por el método ABM. Runge Kutta, es un método muy fiable por lo que tiene que arrojar resultados muy similares.

En la figura 4.15, se muestra la solución a la ecuación de Friedmann usando una constante de Hubble de 73 km/s/Mpc y en la figura 4.16, se replicó el error entre el

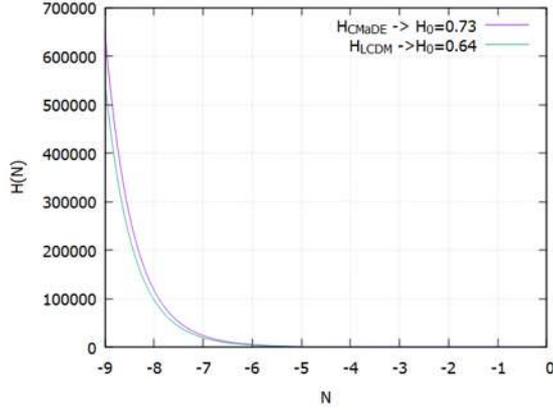


Figura 4.12: Comparación de la solución a la ecuación de Friedmann usando el modelo CMaDE (usando el sistema (3.32)) y el modelo Λ CDM. Con las mismas condiciones iniciales pero diferentes constantes de Hubble para cada modelo, $H_0 = 0,73$ para el modelo CMaDE y $H_0 = 0,66$ para el modelo Λ CDM.

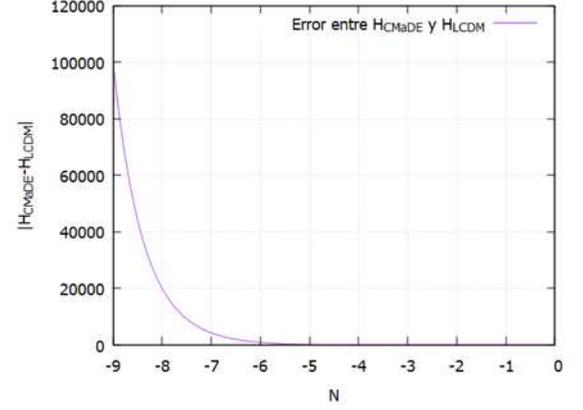


Figura 4.13: Error absoluto entre las soluciones generadas para la ecuación de Friedmann por el modelo CMaDE (usando el sistema (3.32)) y Λ CDM. Con las mismas condiciones iniciales pero diferentes constantes de Hubble para cada modelo, $H_0 = 0,73$ para el modelo CMaDE y $H_0 = 0,66$ para el modelo Λ CDM. $|H_{CMaDE} - H_{\Lambda CDM}|$.

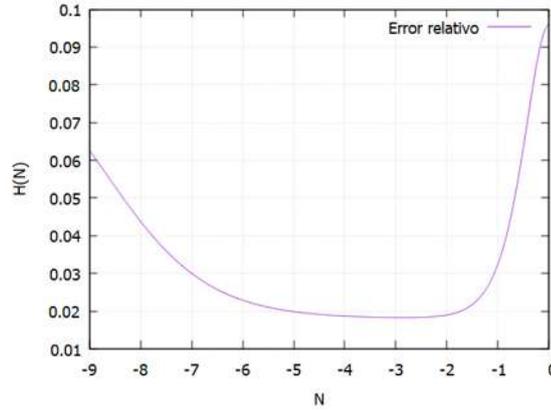


Figura 4.14: Error relativo entre las soluciones generadas para la ecuación de Friedmann por el modelo CMaDE (usando el sistema (3.33)) y Λ CDM. Con las mismas condiciones iniciales pero diferentes constantes de Hubble para cada modelo, $H_0 = 0,73$ para el modelo CMaDE y $H_0 = 0,66$ para el modelo Λ CDM. $\frac{|H_{CMaDE} - H_{\Lambda CDM}|}{H_{\Lambda CDM}}$.

modelo CMaDE y Λ CDM usando una constante de Hubble diferente para cada modelo.

Con solo replicar dos de las gráficas generadas con el método ABM, se puede ver que los resultados con RK4 son casi idénticos. La razón por la cual se prefirió usar el método ABM sobre RK4, es por que al ser ABM predictor-corrector y multipaso,

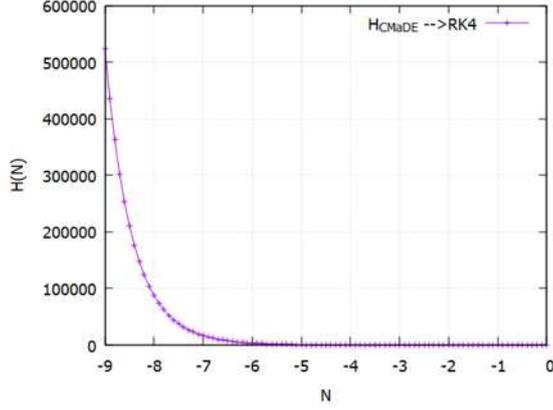


Figura 4.15: Solución a la ecuación de Friedmann, con el modelo *CMaDE* con condiciones iniciales $\Omega_{0R} = 1 \times 10^{-4}$, $\Omega_{0B} = 0,315$, $\Omega_{0DM} = 0,26$, $\Omega_{0\Lambda} = 0,684$ y $\Omega_k^0 = 0,001$. Soluciones generadas con el método numérico *RK4*.

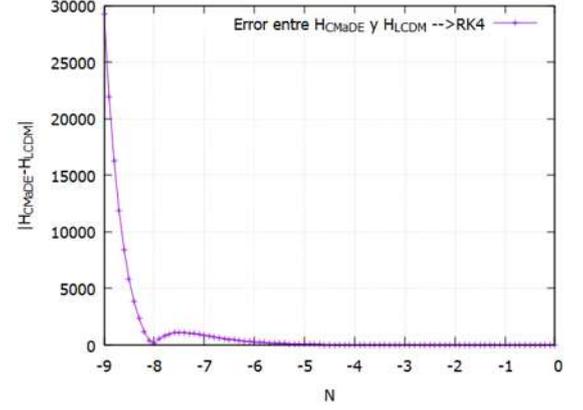


Figura 4.16: Error absoluto entre las soluciones generadas para la ecuación de Friedmann por el modelo *CMaDE* (usando el sistema (3.32)) y Λ CDM. Con las mismas condiciones iniciales pero diferentes constantes de Hubble para cada modelo, $H_0 = 0,73$ para el modelo *CMaDE* y $H_0 = 0,66$ para el modelo. Usando el método *RK4*.

genera más confianza cuando se trabaja con soluciones que crecen demasiado rápido.

4.4. Aproximaciones analíticas

Para verificar más implicaciones cosmológicas con este modelo se tendría que estar trabajando numéricamente, debido a que los sistemas de ecuaciones diferenciales que representan al modelo, no tienen soluciones analíticas. Por lo tanto, tener aproximaciones analíticas de estos sistemas facilitaría los cálculos en futuras pruebas de la veracidad de este modelo.

Para los sistemas (3.32) y (3.33) las únicas ecuaciones que necesitan de una aproximación analítica son la ecuación diferencial de energía oscura y materia oscura. Y ya que el proceso para conseguir estas aproximaciones fue solo prueba y error, se colocarán directamente las ecuaciones analíticas y sus gráficas de error en comparación con los resultados numéricos.

4.4.1. Ecuaciones analíticas para el sistema 3.32

Para la ecuación diferencial de energía oscura, se tiene

$$\Omega_{\Lambda}^0 = \frac{-(N + 0,01)^3}{5} - 0,586N + \Omega_{\Lambda}^0 \quad (4.7)$$

que funciona muy bien desde $N = -5$ hasta $N = 0$. En la figura 4.17 se puede ver que el error es indistinguible a simple vista y al calcular el error absoluto, figura 4.18, este está por debajo de 9×10^{-2} lo que lo hace un error lo suficientemente bueno.

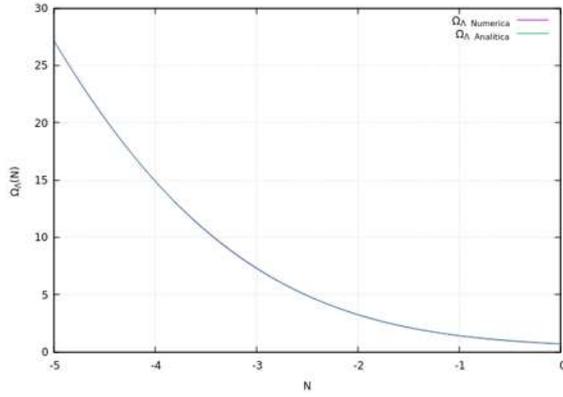


Figura 4.17: Comparación entre las soluciones de densidad de energía oscura (Ω_{Λ}^0), numérica y analítica (4.7) usando el sistema 3.32.

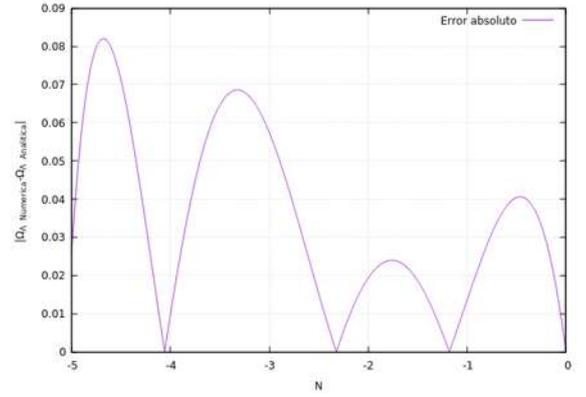


Figura 4.18: Error absoluto entre la aproximación analítica (4.7) y la solución numérica de la densidad de energía oscura para el sistema (3.32), $|\Omega_{\Lambda}^0_{Num} - \Omega_{\Lambda}^0_A|$.

Esta aproximación, es lo suficientemente buena, para poderse usar en lugar de las ecuaciones diferenciales, por lo que se podrá utilizar sin problemas para cualquier cálculo futuro.

La mejor aproximación para la ecuación de materia oscura tiene la forma

$$\Omega_{DM}^0 = \frac{0,205\Omega_{0DM}e^{-3,01N} - e^{-N^2}}{1 + 0,004699} + 1,17 \quad (4.8)$$

Nuevamente, a simple vista, la diferencia entre la solución numérica y la aproximación (4.8) es indistinguible, figura 4.19.

Sin embargo, para la densidad de materia oscura, los valores son demasiado grandes y el error absoluto conseguido no es nada pequeño, figura 4.20. Pero el error relativo,

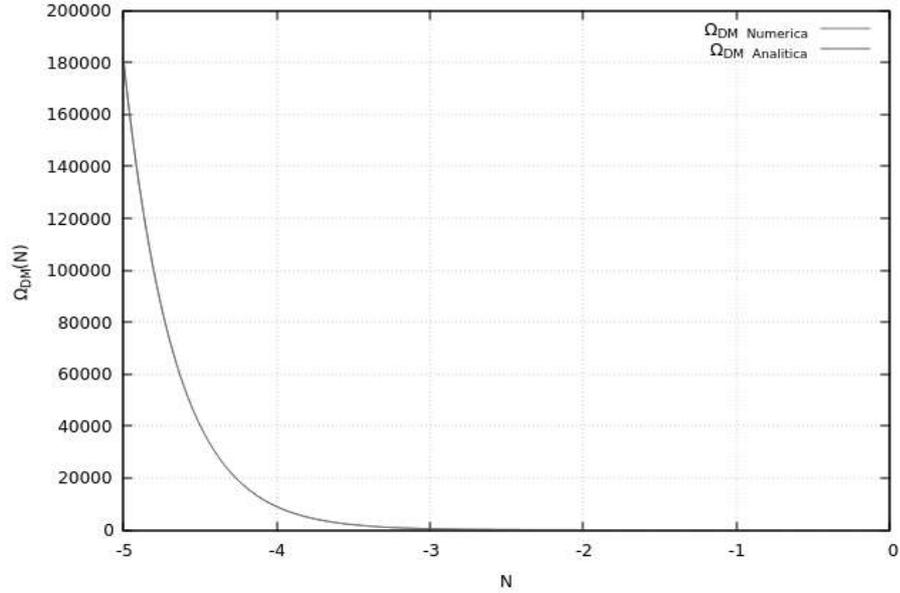


Figura 4.19: Comparación entre las soluciones de densidad de materia oscura (Ω_{DM}^0), numérica y analítica (4.8) usando el sistema 3.32.

figura 4.21, es muy bueno, aunque sube un poco más de lo deseado entre $[-1.2:0]$, este error sigue siendo considerablemente bueno.

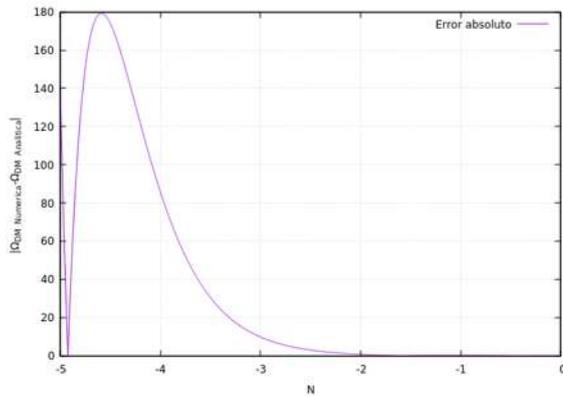


Figura 4.20: Error absoluto entre la aproximación analítica (4.8) y la solución numérica de la densidad de materia oscura para el sistema (3.32), $|\Omega_{DM}^0_{Num} - \Omega_{DM}^0_A|$.

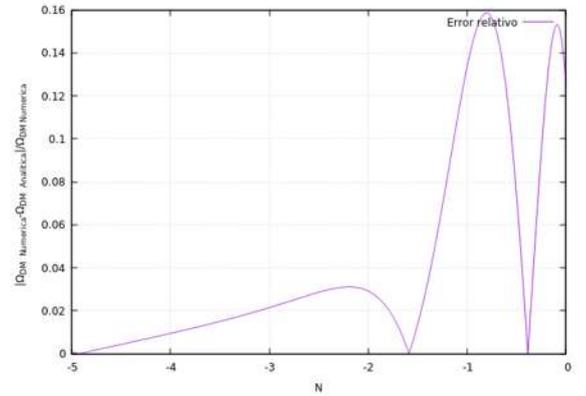


Figura 4.21: Error relativo entre la aproximación analítica (4.8) y la solución numérica de la densidad de materia oscura para el sistema (3.32), $\frac{|\Omega_{DM}^0_{Num} - \Omega_{DM}^0_A|}{\Omega_{DM}^0_{num}}$.

Para esta aproximación se puede apreciar un contraste entre los errores, ya que para el error absoluto, figura 4.20, se puede ver que crece entre $N = -5$ y $N = -3$ mientras que en el error relativo se puede ver como crece entre $N = -1,2$ y $N = 0$. Pero aunque estos picos un tanto altos en los errores se salen de lo deseado, esta aproximación se puede usar sin tantos problemas.

4.4.2. Ecuaciones analíticas para el sistema 3.33

Para el sistema (3.33) también se tienen excelentes aproximaciones. En ecuación de energía oscura, se tiene una buena aproximación con la función error y algunos parámetros extras

$$\Omega_{\Lambda}^0 = 0,2\sqrt{\pi}erf(N) + 0,69 \quad (4.9)$$

donde erf es la función de error. Para la densidad de energía oscura, se puede notar una diferencia demasiado grande entre las soluciones, figura 4.22, pero esto se debe a que los valores de estas soluciones son muy bajos, por lo tanto, el error absoluto entre las soluciones puede ser bueno. Este error sigue por debajo de 10^{-1} , por lo tanto, sigue siendo un error aceptable, figura 4.23.

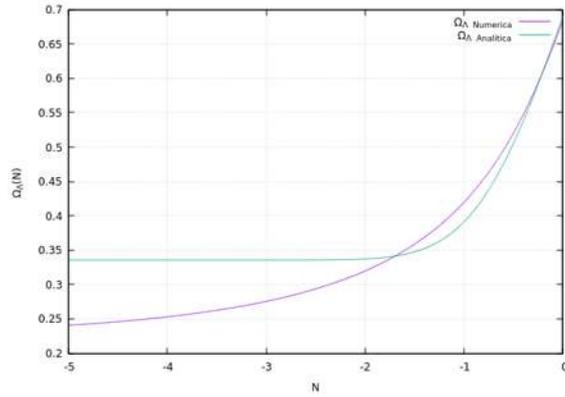


Figura 4.22: Comparación entre las soluciones de densidad de energía oscura (Ω_{Λ}^0), numérica y analítica (4.9) usando el sistema 3.33.

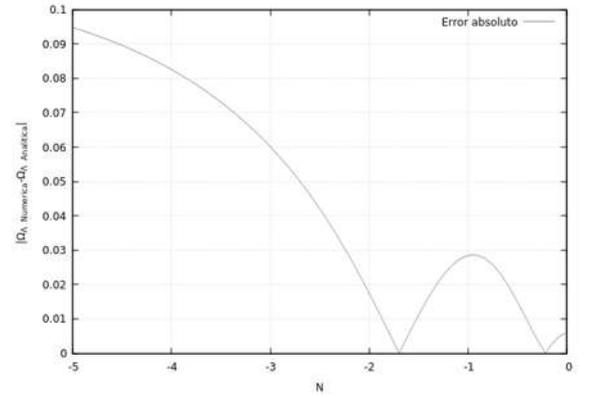


Figura 4.23: Error absoluto entre la aproximación analítica (4.9) y la solución numérica de la densidad de energía oscura para el sistema (3.33), $|\Omega_{\Lambda}^0_{Num} - \Omega_{\Lambda}^0_{A}|$.

Para la ecuación de materia oscura, se tiene

$$\Omega_{DM}^0 = \frac{1,43\Omega_{DM}e^{-3,0N} - 0,108e^{-N^2}}{1 + 0,004698} \quad (4.10)$$

Por lo tanto, nuevamente para la aproximación (4.10), como los valores crecen demasiado a simple vista es indistinguible el error entre las dos soluciones, figura 4.24. Y aunque el error absoluto crece demasiado, muy por encima de lo deseado, el error relativo es excelente, figura 4.25.

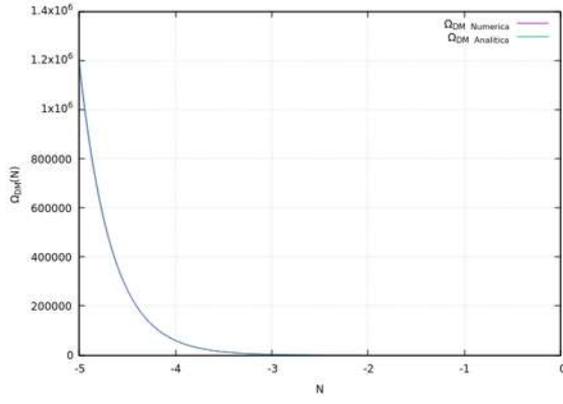


Figura 4.24: Comparación entre las soluciones de densidad de materia oscura (Ω_{DM}^0), numérica y analítica (4.10) usando el sistema 3.33.

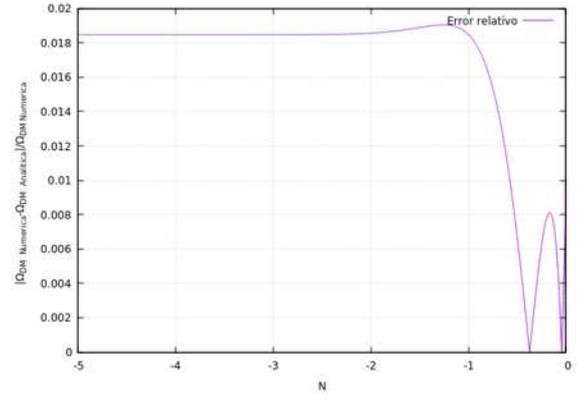


Figura 4.25: Error relativo entre la aproximación analítica (4.10) y la solución numérica de la densidad de materia oscura para el sistema (3.33), $\frac{|\Omega_{DM}^0_{Num} - \Omega_{DM}^0_A|}{\Omega_{DM}^0_{num}}$.

Teniendo así 4 aproximaciones analíticas para las ecuaciones diferenciales de materia y energía oscura, que servirán para facilitar futuros cálculos que ayudarán a verificar si este modelo puede resolver ciertos problemas que se presentan en Λ CDM.

Capítulo 5

Conclusiones

El modelo compton mass as dark energy muestra como la mecánica cuántica, además de explicar perfectamente el mundo cuántico, también podría ayudar a entender el macromundo, es decir, el universo. Y se puede decir que la fiabilidad de este modelo comienza de manera excelente debido a las comparaciones entre CMaDE y Λ CDM, ya que el comportamiento de estos modelos no son tan distintos, por lo que se podría considerar al modelo CMaDE al menos igual de bueno que Λ CDM. Además, con la ayuda de las aproximaciones analíticas se podrá saber si este nuevo modelo podría solucionar el problema de la constante cosmológica en Λ CDM, así como el problema de coincidencia, ya que la densidad de energía oscura para este modelo depende del tamaño del universo. También se pueden corroborar las especulaciones sobre una solución al problema de las discrepancias entre los valores obtenidos de las constantes de Hubble con el modelo Λ CDM. Esta pequeña especulación es gracias a la coincidencia que se tiene cuando se grafica el parámetro de Hubble usando constantes de Hubble diferentes para cada modelo.

Y lo más importante del modelo CMaDE; la energía oscura podría no existir, ya que si $\Lambda = \frac{2\pi^2}{\lambda^2}$, entonces, la energía oscura no sería otra cosa mas, que la consecuencia del carácter cuántico del gravitón.

Capítulo 6

Perspectivas

Ya que las aproximaciones analíticas de energía y materia oscura llegan a $N = -5$, o bien $z = 147,41$, se podrán estudiar perfectamente las observaciones cosmológicas locales. Entonces, estas ecuaciones analíticas se podrán usar en conjunto con codigos usados en cosmología, como lo son; Monte python, Class, Camp, entre otros, para comprobar si el modelo CMaDE predice las observaciones locales que se tienen de resultados como Planck18. Al igual que en las observaciones locales, estas aproximaciones podrían servir para analizar ciertas partes del CMB y así, haciendo uso de códigos como los ya mencionados, poder comparar los resultados observacionales del CMB con los predichos por este modelo.

Si para el rango de z en estas aproximaciones se consiguen buenos resultados, se espera que las aproximaciones obtenidas aquí, funcionen como base para que se pueda ampliar el rango de z , ya sea modificando apropiadamente estas aproximaciones o bien convirtiéndolas en ecuaciones por partes al agregar funciones nuevas que funcionen bien en otros rangos de z , siempre y cuando no se vuelvan discontinuas.

Bibliografía

- [1] WEINBERG S., *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, Estados Unidos de América, Wiley.
- [2] GRØN, Ø. y HERVIK S., *Einstein's General Theory of Relativity*, Estados Unidos de América, (9ª ed.), Springer.
- [3] DEVEREUX, C., *Cosmological clues evidence for the big bang, dark matter and dark energy*, Broken Sound Parkway NW, (2ª ed.), CRC Press.
- [4] LIDDLE, A., *An introduction to modern cosmology*, United Kingdom, (3ª ed.), Wiley.
- [5] SCHUTZ, B., *A first course in general relativity*, (2ª ed.), Cambridge University Press.
- [6] M. CARROLL S., *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Cambridge University Press.
- [7] MATOS, T. y PARRILLA, L., *The graviton Compton mass as dark energy*, CDMC, México, (JULY-AUGUST 2021), *Revista Mexicana de Física*.
<https://www.scielo.org.mx/pdf/rmf/v67n4/0035-001X-rmf-67-04-e040703.pdf>
- [8] N. ZETTLI, *Quantum Mechanics: Concepts and applications*, U.S.A, (3ª ed.), Wiley.
- [9] D. GRIFFITHS, *Introduction to Quantum Mechanics*, U.S.A, (3ª ed.), Cambridge University Press
- [10] S. SALLEH, A. Y. ZOMAYA y S. A. BAKAR, *Computing for Numerical Methods Using Visual C++*, U.S.A, Wiley.