Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas unam-umsnh

Operadores cuánticos de diferenciación y multiplicación sobre una dimensión.

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas Presenta:

Fredy Diaz Garcia

Director

Dr. Elmar Wagner
Instituto de física y matemáticas umsnh

Morelia, Michoacán de enero de 2016.

Agradecimientos

Agradezco no sólo por este trabajo que es muy simbólico, si no a toda la gente que se vio involucrada directa o indirectamente para que yo terminara esta maestría. A todos mis profesores, al personal escolar y compañeros del posgrado. Agradezco a mi asesor y director de tesis Dr. Elmar Wagner, y a todos mis amigos. Y sobre todo y de manera muy especial agradezco a mi familia, a mi madre Elena García Hernandez, que sin su apoyo no lo hubiera logrado. Muchas Gracias.

Índice general

Abstract

We study differential operators and multiplication operators asociated to the momentum operator P and position operator Q of the quantum mechanics on 1 dimension. These operators are studied on the intervals $[a, b]$, $[0, +\infty)$ and $(-\infty, +\infty)$ and on different domains of definition. Important propieties of this operators such as adjoints,closure, self-adjointness, existence and uniqueness of self-adjoint extensions, eigenvalues and spectrum are analyzed in each above intervals. We also discuss the Heisenberg conmutator relation between P and Q as well as too the uncertainty principle.

Resumen

Estudiamos operadores de diferenciación y operadores de multiplicación asociados al operador de momento P y al operador de posición Q de la mecánica cuántica sobre 1 dimensión. Estos operadores son estudiados sobre los intervalos $[a, b]$, $[0, +\infty)$ y $(-\infty, +\infty)$ y sobre diferentes dominios de definición. Propiedades importantes de estos operadores tales como adjuntos, clausura, autoadjuntos, existencia y unicidad de extensiones autoadjuntos, eigenvalores y espectro son analizados en cada uno de los intervalos antes mencionados. También discutimos la relación del conmutador de Heisenberg entre P y Q así como también el principio de incertidumbre.

Palabras clave: Operadores Momento Posición Mecánica Cuántica.

INTRODUCCIÓN

Como sabemos en la teoría de operadores acotados sobre espacios de Banach o de Hilbert se establecen resultados importantes como lo son los teoremas clásicos: teorema del mapeo abierto, del gráfico cerrado, del inverso continuo, de Banach-Steinhaus y el toerema espectral para operadores normales compactos. Pero muchos operadores de gran interés en otras áreas como en ecuaciones diferenciales o en la física matemática son no acotados como lo es el operador de diferenciación $\frac{d}{dx}$ definido digamos sobre un dominio de funciones diferenciables como lo es $C^1([0,1]) \subset L^2([0,1])$. En efecto en este dominio yacen las funciones $f_n(x) = e^{inx}$ las cuales cumplen

$$\frac{d}{dx} f_n = n f_n \quad \text{y} \quad n = \left\| \frac{d}{dx} f_n \right\|_{L^2([0,1])}.$$

Para el espacio de Hilbert $L^2(J)$ donde J es un intervalo de $\mathbb{R}$, se definen los operadores

$$P\phi(x) = -i\frac{d}{dx}\phi(x), \quad Q\phi(x) = xf(x)$$

que son llamados los operadores de momento y posición de la mecánica cuántica, los cuales son ejemplos de tales operadores no acotados. Estos operadores satisfacen la siguiente relación

$$[P, Q] = PQ - QP = -i$$

sobre un dominio de funciones en el cual la evaluación pueda realizarse. En el capítulo 3 se aborda sobre el análisis de esta pareja de operadores para el caso J acotado. En la mecánica cuántica es importante que el dominio $D([P, Q])$ de $[P, Q]$ determine de forma única a los operadores P y Q, es decir, que estos operadores se puedan recuperar por medio de $D([P, Q])$ o dicho de otra manera que el dominio $D([P, Q])$ contenga toda la información de ambos operadores. Esta propiedad del dominio $D([P, Q])$ es llamada ser un *core* (núcleo) para ambos operadores. Veremos más adelante que el operador Q es siempre autoadjunto, sin embargo el operador P no siempre va a ser autoadjunto. La propiedad de ser autoadjunto como veremos más adelante va a depender de la elección del dominio $D(P)$ de P. En algunos casos resulta que P es un operador simétrico lo cual puede llevarnos a suponer que su cerradura $\overline{P}$ es autoadjunto, el cual no siempre es el caso. Este último hecho puede llevar a plantearnos la siguiente pregunta:¿Existen extensiones autoadjuntos del operador simétrico P de tal manera que la ecuación $[P, Q] = -i$ se cumpla sobre el dominio máximo $D[P, Q]$?. Para el caso J acotado la respuesta es afirmativa pero no se tiene unicidad, es decir, existen una cantidad infinita de extensiones autoadjuntos de P. Para el caso $J = \mathbb{R}$ la respuesta es también afirmativa, de hecho en este caso se tiene que $D[P, Q]$ es un core para los operadores P y Q. Sin embargo para el caso $J = (a, +\infty)$ el operador P no es autoadjunto y existe un dominio para el cual P es simétrico pero no van a existir extensiones autoadjuntos de P. Estos hechos nos llevan a concluir que trabajar con operadores no acotados autoadjuntos es delicado. Todo este análisis es dedicado en los capítulos 3 y 4. El capítulo 5 es dedicado al análisis espectral de los operadores P y Q en todos los casos del intervalo J.

En el desarrollo de este trabajo se consideran los siguientes espacios.

Notación: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ abierto no vacío.

- $C(\Omega)$ es el espacio de funciones continuas sobre Ω.
- $C^k(\Omega)$ es el espacio de funciones k veces continuamente diferenciables sobre $\Omega\,(k \geq 1$ es un entero).
- $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\leq 1} C^k(\Omega)$.
- $C_c(\Omega)$ es el espacio de funciones continuas sobre Ω de soporte compacto.
- $C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$.
- $C_c^\infty(\Omega) = C_c(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$.
- $C^k(\overline{\Omega})$ es el espacio de funciones sobre que son k veces continuamente diferenciables sobre Ω y cuyas derivadas f^m $(m \leq k)$ admiten una extensión continua a la clausura $\overline{\Omega}$ de Ω.
- $C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k\geq 1} C^k(\overline{\Omega})$.
- $L^p(\Omega)$ es el espacio normado $L^p(\Omega, \lambda)$ donde λ es la medida de Lebesgue.

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo se daran definiciones básicas de funciones absolutamente continuas en un intervalo I que viene siendo un espacio de funciones fundamental para el estudio de ciertos operadores de diferenciación no acotados definidos en ciertos subespacios de $L^2(I)$ con respecto a la medida de Lebesgue. Denotaremos c.t.p. $[\lambda]$ para significar que una propiedad se satisface casi en todas partes respecto a la medida de Lebesgue.

1. Funciones Absolutamente continuas y funciones de variacion acotada

Definición 1.1. Sea I un intervalo de los numeros reales $\mathbb{R}$ acotado o no acotado, decimos que una función $f : I \to \mathbb{C}$ es absolutamente continua si satisface la siguiente propiedad:

(AC) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que para toda sucesión finita de intervalos disjuntos $(a_k, b_k) \subset I$ tal que $\sum_k |b_k - a_k| < \delta$ implica $\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$.

El conjunto de funciones absolutamente continuas sobre $I = [a, b]$ es usualmente denotado por $AC(I)$. Notemos que cada función $f \in AC(I)$ es continua sobre I, lo cual se sigue directamente de la definición. Para el estudio de funciones absolutamente continuas surgen otros espacios de funciones continuas los cuales se definen a continuación.

Definición 1.2. Sea I un intervalo acotado o no acotado, decimos que una función $f : I \to \mathbb{C}$ es de variación acotada si satisface la siguiente propiedad:

(BV) $\exists$ constante $C > 0$ tal que $\sum_{i=0}^{k-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leq C$ para todo $t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ en I.

El conjunto de funciones de variación acotada sobre I es denotado por $BV(I)$. Notemos que $AC(I) \subset BV(I)$ cuando el intervalo I es acotado. Las funciones reales de variación acotada son también caracterizadas por la siguiente propiedad:

Estas son la diferencia de dos funciones no decrecientes (posiblemente discontinuas) sobre I.

Cuando el intervalo I es acotado sabemos que toda función absolutamente continua es de variación acotada y por lo tanto por el teorema de diferenciación de Lebesque esta es diferenciable c.t.p respecto a la medida de Lebesgue λ sobre I. En efecto, se tiene la siguiente generalización del teorema fundamental del cálculo.

Teorema 1.3. *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ es absolutamente continua si y sólo si existe una función $h \in L^1([a,b])$ tal que*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x h(t)\, d\lambda(t) \;\; \textit{para } x \in [a,b].$$

En esta caso, se tiene que f es diferenciable c.t.p. [λ], y $f'(x) = h(x)$ c.t.p. [λ] sobre $[a,b]$. La función h está únicamente determinada por f.

Demostración. Ver en [**2**, Teorema 3.30]. ❑

Teorema 1.4 (Regla de Leibniz). *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ absolutamente continuas sobre $[a,b]$ con derivadas f' y g' c.t.p. [λ] en $[a,b]$. Entonces fg es absolutamente continua y en particular diferenciable c.t.p. [λ] en $[a,b]$ y*

$$(fg)' = f'g + fg' \;\textit{en c.t.p.}[\lambda] \textit{ sobre } [a,b].$$

Demostración. Ver en [**2**]. ❑

También se tiene un resultado análogo a la formula de integración por partes para las funciones absolutamente continuas.

Teorema 1.5. *Para $f, g \in AC[a,b]$ la formula de integración por partes se cumple:*

$$\int_a^b f'(t)g(t)\, d\lambda(t) + \int_a^b f(t)g'(t)\, d\lambda(t) = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Demostración. Ver en [**2**, Corolario 3.37]. ❑

Sea I un intervalo abierto acotado o no acotado, el espacio $AC(I)$ de funciones absolutamente continuas está muy relacionado con el espacio de Sobolev $W^{1,1}(I)$:

Definición 1.6. El espacio de Sobolev $W^{1,1}(I)$ es definido como

$$W^{1,1}(I) = \left\{ u \in L^1(I) : \exists g \in L^1(I) \text{ tal que } \int_I u\phi' \, d\lambda = -\int_I g\phi \, d\lambda \;\; \forall\, \phi \in C_c^\infty(I) \right\}.$$

Para $u \in W^{1,1}(I)$ denotamos $u' = g$.

A la función g suele llamarse la derivada débil de u. Para el caso I acotado se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA 1.7. *Sea $I = (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $AC(I)$ coincide con $W^{1,1}(I)$.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración de este resultado puede verse en [**2**]. ❑

Para funciones absolutamente continuas también se tiene la regla de la cadena.

TEOREMA 1.8 (Regla de la cadena). *Sean I, $J \subset \mathbb{R}$ intervalos y sea $f : J \to \mathbb{R}$ absolutamente continua sobre cada intervalo $[a, b] \subset J$ y $u : I \to J$ monotona y absolutamente continua sobre cada intervalo $[a, b] \subset I$. Entonces $f \circ u$ es absolutamente continua sobre cada intervalo $[a, b] \subset I$ y se cumple*

$$(f \circ u)'(x) = f'(u(x))u'(x),$$

donde $f'(u(x))u'(x)$ es interpretado ser cero siempre que $u'(x) = 0$ (aún si f no es diferenciable en $u(x)$).

DEMOSTRACIÓN. Ver en [**2**]. ❑

TEOREMA 1.9 (Derivación bajo signo integral). *Sea (X, A, μ) un espacio de medida σ-finito y sea $[a, b]$ un intervalo acotado en $\mathbb{R}$. Sea $f : X \times [a, b] \to \mathbb{C}$ una función tal que para $a \leq t \leq b$, $x \mapsto f(x, t)$ es μ integrable, y definimos la función*

$$F(t) = \int_X f(x, t)\, d\mu(x).$$

Si para cada $x \in X$ la función $t \mapsto f(x, t)$ es diferenciable y existe $g \in L^1(X, \mu)$ con $|\partial f/\partial t(x, t)| \leq g(x)$ sobre X, entonces F es diferencible y

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, d\mu(x).$$

DEMOSTRACIÓN. Ver en [**8**]. ❑

DEFINICIÓN 1.10. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $1 \leq p \leq \infty$. Decimos que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ pertenece a $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f\chi_K \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo subconjunto compacto K de Ω. Notemos que si $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, entonces $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

TEOREMA 1.11 (Teorema fundamental del cálculo de variaciones). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)d\lambda(x) = 0 \ \ \textit{para todo } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Entonces $f = 0$ c.t.p. $[\lambda]$.

Demostración. Puede verse en [**4**]. ❑

Para el siguiente teorema se tiene la siguiente notación: si $f \in C^k(\Omega)$ donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es abierto y $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ es un multi-indice de longitud $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_N \leq k$ escribimos

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} f.$$

Teorema 1.12. *Sea $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ con $k \geq 1$ y sea $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Entonces la convolución $f \star g$ definida por*

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) d\lambda(y)$$

satisface

$$f \star g \in C^k(\mathbb{R}^N) \;\; y \;\; D^\alpha(f \star g) = D^\alpha f \star g \;\; \forall \alpha \; con \; |\alpha| \leq k.$$

En particular, si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, entonces $f \star g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Demostración. Puede verse en [**4**]. ❑

También necesitaremos el siguiente teorema conocido como el teorema de Stone-Weiertrass:

Teorema 1.13 (Teorema de Stone-Weierstrass). *Sea X un espacio métrico compacto y sea A una subálgebra cerrada de $C(X)$ tal que A satisfce las siguientes condiciones*

1. $1 \in A$, *es decir, la función constante* 1 *pertenece a* A.
2. *A separa los puntos de X, es decir, para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*
3. *A es cerrado bajo conjugación compleja.*

Entonces $A = C(X)$.

Demostración. Puede verse en [**8**]. ❑

2. Los espacios de Sobolev $H^n(I)$ y $H_0^n(I)$.

Sea $I = (a, b)$ un intervalo abierto acotado o no acotado, entonces se tiene la siguiente definición de espacios de Sobolev.

Definición 1.14. Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de Sobolev $W^{1,p}(I)$ es definido por

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u\phi' d\lambda = -\int_I g\phi \, d\lambda \;\; \forall \, \phi \in C_c^1(I) \right\}.$$

Para $u \in W^{1,p}(I)$ denotamos $u' = g$ (la derivada débil). Para el caso $p = 2$ denotamos $H^1(I) = W^{1,2}(I)$. El espacio $W^{1,p}(I)$ es equipado con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

o a veces, si $1 < p < \infty$, con la norma equivalente $(\|u\|_{L^p}^p\| + \|u'\|_{L^p}^p)^{1/p}$.

Observación 1.15. Notemos que $H^1(I)$ es un espacio con producto escalar

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \langle u', v'\rangle_{L^2} = \int_a^b (\overline{u}v + \overline{u'}v')\, d\lambda.$$

Teorema 1.16. *El espacio $W^{1,p}(I)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$ y separable para $1 \leq p < \infty$. En particular $H^1(I)$ es un espacio de Hilbert separable.*

Demostración. Ver en [**4**, Teorema 8.1]. ❑

Definición 1.17. Dado $1 \leq p < \infty$, definimos $W_0^{1,p}(I)$ como la clausura de $C_c^1(I)$ en $W^{1,p}(I)$.

Para el caso $p = 2$ denotamos $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.

Definición 1.18. Dado un entero $m \geq 2$ y un número p con $1 \leq p \leq \infty$ definimos por inducción el espacio de Sobolev

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I) : u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

También denotamos $H^m(I) = W^{m,2}(I)$.

Teorema 1.19. *Sea $u \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p \leq \infty$ donde I es un intervalo acotado o no acotado y $\overline{I}$ su cerradura, entonces existe $\tilde{u} \in C(\overline{I})$ tal que $\tilde{u} = u$ c.t.p. [λ] sobre I y*

$$\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) = \int_x^y u' d\lambda \quad \forall x, y \in \overline{I}.$$

Demostración. Puede verse en [**4**]. ❑

El teorema 1.19 afirma que todo $u \in W^{1,p}$ admite uno (y solo uno) representante continuo sobre $\overline{I}$.

Teorema 1.20. *Sea $u \in W^{1,p}(I)$. Entonces $u \in W_0^{1,p}(I)$ si y sólo si $u = 0$ sobre ∂I.*

Demostración. Puede verse en [**4**, Teorema 8.12]. ❑

Los espacios de Sobolev $H^n(a,b)$ y $H_0^n(a,b)$ con $-\infty < a < b < +\infty$ son expresados en términos de funciones absolutamente continuas, es decir,

$$H^1(a,b) = \{f \in AC[a,b] : f' \in L^2([a,b])\},$$

$$H^n(a,b) = \{f \in C^{n-1}([a,b]) : f^{(n-1)} \in H^1(a,b)\},$$

$$H_0^n(a,b) = \{f \in H^n(a,b) : f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(n-1)}(b) = 0\}.$$

Si J es un intervalo no acotado de $\mathbb{R}$, entonces también se define

$$H^1(J) = \{f \in L^2(J) : f \in AC([a,b]) \text{ para } [a,b] \subset \overline{J} \text{ y } f' \in L^2(J)\},$$

$$H^n(J) = \{f \in L^2(J) : f \in C^{n-1}(\overline{J}) \text{ y } f^{(n-1)} \in H^1(J)\},$$

$$H_0^n(a,+\infty) = \{f \in H^n(a,+\infty) : f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0\},$$

$$H_0^n(\mathbb{R}) = H^n(\mathbb{R}).$$

3. El espacio de Schwartz y la transformada de Fourier

Definición 1.21. Para $f \in L^1(\mathbb{R})$, definimos

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} d\lambda(x)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. La función $\widehat{f}$ es llamada la transformada de Fourier de f.

Las propiedades que serán de gran utilidad en capítulos posteriores son las siguientes.

Teorema 1.22. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$.*

1. $\lim_{|t|\to\infty} \widehat{f}(t) = 0$ *y* $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$.
2. $(\widehat{\tau_h f})(t) = \widehat{f} e^{ith}$ *donde* $\tau_h f(x) = f(x+h)$.
3. $(\widehat{f e^{ihx}})(t) = \widehat{f}(t-h)$.
4. $(\widehat{\frac{df}{dx}})(t) = it\widehat{f}(t)$.
5. $(\widehat{-ixf})(t) = \frac{d\widehat{f}}{dt}(t)$.

Demostración. Puede verse en [**8**] o en [**9**]. ❑

Definición 1.23. Una función Schwartz es una función infinitamente diferenciable ϕ sobre $\mathbb{R}$ tal que para todo $m, n \geq 0$

$$\sup\{|x^m \phi^{(n)}(x)| : x \in \mathbb{R}\} < \infty.$$

El conjunto de las funciones Schwartz sobre $\mathbb{R}$ es denotado por $S(\mathbb{R})$.

TEOREMA 1.24. *Si $\phi \in S(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{\phi}$ es infinitamente diferenciable y $\widehat{\phi} \in S(\mathbb{R})$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver en [**8**]. ❑

TEOREMA 1.25 (Teorema de inversión).

1. *Si $\phi \in S(\mathbb{R})$, entonces*
$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(t) e^{ixt} d\lambda(t).$$
2. *Si $F : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ es la transformada de Fourier, $F[\phi] = \widehat{\phi}$, entonces F es un mapeo lineal sobreyectivo de S en S que satisface $F^4 = F$.*
3. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que también $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces*
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) e^{ixt} d\lambda(t) \;\; c.t.p.\ [\lambda].$$

DEMOSTRACIÓN. Ver en [**8**]. ❑

TEOREMA 1.26 (Teorema de Plancherel.). *La transformada de Fourier $\phi \to \widehat{\phi}$ extiende a una isométria sobreyectiva de $L^2(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver en [**8**]. ❑

Capítulo 2

Operadores no acotados sobre espacios de Hilbert

En este capítulo se dará a conocer los teoremas básicos de operadores no acotados sobre espacios de Hilbert así como los operadores más importantes de esta téoria que son los operadores cerrados, cerrables, autoadjuntos y simétricos. En el desarrollo de este capítulo se suponen todos los espacios de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ a menos que se mencione lo contrario.

1. Operadores cerrados y cerrables

Definición 2.1. Un operador lineal de una espacio de Hilbert H_1 a un espacio de Hilbert H_2 es un mapeo lineal T de un subespacio lineal de H_1 llamado el dominio de T y denotado por $D(T)$ al espacio H_2.

EL subespacio lineal $R(T) = \{T(x) : x \in D(T)\}$ es llamado el rango de T y el subespacio $N(T) = \{x \in D(T) : T(x) = 0\}$ es llamado el núcleo de T. Decimos que un operador $S : H_1 \to H_2$ es una extensión de T usualmente denotado por $T \subseteq S$ si $D(T) \subseteq D(S)$ y $T(x) = S(x)$ para todo $x \in D(T)$. Si $R : H_2 \to H_3$ es un operador lineal entonces definimos la composición RT como el operador dado por

$$D(RT) = \{x \in D(T) : Tx \in D(S)\} \text{ y } (RT)x := R(Tx) \text{ para todo } x \in D(RT).$$

Si T es inyectivo, es decir, $N(T) = \{0\}$ definimos su inverso $T^{-1} : R(T) \subset H_2 \to H_1$ por $T^{-1}(Tx) = x$. Decimos que T es biyección si T es inyectivo y $R(T) = H_2$, en este caso $D(T^{-1}) = H_2$. Decimos que T es densamente definido si $D(T)$ es denso en H_1. Otro tipo de operadores también son los siguientes:

1. T es isométrico si $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in D(T)$.
2. T es unitario si T es biyectivo e isométrico.

Notemos que por la formula de polarización se tiene que (1) es equivalente a $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in D(T)$. Si H, K son espacios de Hilbert decimos que el operador $T : D(T) \subset H \to K$ es acotado si

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} < \infty.$$

Notemos que un operador T es acotado si y soló si T es continuo. Denotamos al espacio de operadores acotados con dominio igual H a K por $B(H, K)$.

Definición 2.2. El gráfico de un operador lineal $T : H \to K$ es definido por

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx) \in H \times K : x \in D(T)\}.$$

El siguiente lema caracteriza los subespacios $\Gamma \subset H \times K$ que son gráficos de un operador.

Lema 2.3. *Un subespacio lineal* $\Gamma \subset H \times K$ *es el gráfico de un operador* $T : D(T) \subset H \to K$ *si y sólo si* $(0, y) \in \Gamma$ *implica* $y = 0$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Se sigue de la definición de gráfico pues si $(0, y) \in \Gamma$, entonces $y = T(0) = 0$.
($\Leftarrow$) Definir $D(T) = \{x \in H : \exists y \in K \text{ tal que } (x, y) \in \Gamma\}$. Notemos que si existe tal y, este es único y por lo tanto podemos definir $T(x) = y$. ❑

Notemos que el operador del lema anterior si existe es único y que si S, T son operadores entonces $S \subset T$ si y sólo si $\Gamma(S) \subset \Gamma(T)$.

Definición 2.4 (*Operadores cerrados y cerrables*). Sean H y K espacios de Hilbert y $T : D(T) \subset H \to K$ un operador lineal. Decimos que T es cerrado si $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(T)$, es décir, $\Gamma(T)$ es un subespacio cerrado de $H \times K$. Decimos que T es cerrable si la cerradura $\overline{\Gamma(T)}$ es el gráfico de un operador lineal y definimos la cerradura $\overline{T}$ de T por $\Gamma(\overline{T}) := \overline{\Gamma(T)}$.

Los operadores cerrados se pueden caracterizar por el espacio normado $(D(T), \|\cdot\|_T)$ donde $\|\cdot\|_T$ es la norma del gráfico:

$$\|x\|_T = [\|x\|^2 + \|Tx\|^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 2.5. *Sea* $T : D(T) \subset H \to K$ *un operador lineal.*

1. T *es cerrado si y sólo si para toda sucesión* $(x_n)_{n\geq 1} \subset D(T)$ *tal que* $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ *tenemos* $x \in D(T)$, $y = Tx$.
2. T *es cerrable si y sólo si para toda* $(x_n)_{n\geq 1} \subset D(T)$ *tal que* $(x_n, Tx_n) \to (0, y)$ *tenemos* $y = 0$.
3. T *es cerrado si y sólo si* $(D(T), \|\cdot\|_T)$ *es un espacio de Hilbert.*
4. *Si* T *es cerrable, entonces* $D(\overline{T}) = \overline{D(T)}^{\|\cdot\|_{\overline{T}}}$.

Demostración. 1. Se sigue de la definición de operador cerrado.
2. Notar que T es cerrable si y sólo si $\overline{\Gamma(T)}$ es grafico de un operador.
3. Notemos que el mapeo $x \mapsto (x, T(x))$ de $(D(T), \|\cdot\|_T)$ al subespacio $\Gamma(T)$ con la norma de Hilbert del espacio $H \times K$ es isométrico. Entonces $(D(T), \|\cdot\|_T)$ es completo si y sólo si $\Gamma(T)$ es completo

o equivalentemente si $\Gamma(T)$ es cerrado en $H \times K$.
4. Por (3), $\overline{D(T)}^{\|\cdot\|_{\overline{T}}} \subset D(\overline{T})$. Si $\overline{D(T)}^{\|\cdot\|_{\overline{T}}} \neq D(\overline{T})$, entonces $S := \overline{T}\restriction_{\overline{D(T)}^{\|\cdot\|_{\overline{T}}}}$ fuera un operador cerrado (por (3)) tal que $T \subset S \subsetneq \overline{T}$, por lo tanto $\overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S) \subsetneq \Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}$, una contradicción. ❑

Ahora podemos reformular el teorema del gráfico cerrado para operadores cerrados:

Teorema 2.6. *Sea $T : D(T) \subset H \to K$ un operador lineal cerrado y densamente definido, entonces T es acotado si y sólo $D(T) = H$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si T es acotado y $x \in H$, existe $(x_n) \in D(T)$ tal que $x_n \to x$, entonces $Tx_n \to y$ para algún $y \in K$, pues T es acotado y K es de Banach, entonces $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ y por (1) del teorema 2.5 se tiene que $x \in D(T)$, $y = T(x)$.
($\Leftarrow$) Si $D(T) = H$ entonces se sigue del teorema del gráfico cerrado del analisis funcional que T es acotado. ❑

También podemos reformular el teorema del inverso continuo para operadores cerrados:

Teorema 2.7. *Sean H y K espacios de Hilbert y $T : D(T) \subset H \to K$ un operador lineal cerrado. Si T es biyectivo, entonces T^{-1} es continuo.*

Demostración. Consideremos el operador $\widehat{T} : (D(T), \|\cdot\|_T) \to (K, \|\cdot\|)$ dado por $\widehat{T}(x) = T(x)$ que es continuo y biyectivo entre espacios de Banach. El teorema de la inversa continua del analisis funcional implica que $\widehat{T}^{-1} : (K, \|\cdot\|) \to (D(T), \|\cdot\|_T)$ es continuo. Además como $\|x\| \leq \|x\|_T$ la inclusión $i : (D(T), \|\cdot\|_T) \to (D(T), \|\cdot\|)$ es continua. Por lo tanto tenemos que

$$T^{-1} = i \circ \widehat{T}^{-1} : (K, \|\cdot\|) \to (D(T), \|\cdot\|)$$

es un operador acotado. ❑

Lema 2.8. *Si $T : D(T) \subset H \longrightarrow K$ un operador lineal cerrado y $S \in B(H, K)$, entonces $S + T$ es cerrado.*

Demostración. Notemos que $D(S+T) = D(S) \cap D(T) = D(T)$. Sea $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en $D(T)$ tal que $x_n \to x$ y $(S+T)x_n \to y$, entonces $Sx_n \to Sx$ pues S es acotado y por lo tanto $Tx_n \to y - Sx$. Por ser T cerrado implica $x \in D(T) = D(T+S)$ y $Tx = y - Sx$, es decir, $(T+S)x = y$, por lo tanto $(x, y) \in \Gamma(S+T)$. ❑

Ahora se dará una proposición con demostración que será de gran utilidad más adelante en capítulos posteriores.

Proposición 2.9. *Sea $T : D(T) \subset H \to K$ un operador lineal, densamente definido, cerrable y $B \in B(H,K)$. Entonces $T + B : D(T) \subset H \longrightarrow K$ es cerrable y $\overline{T+B} = \overline{T} + B$.*

Demostración. Primero mostremos que $T+B$ es cerrable: sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $D(T)$ tal que $(x_n, (T+B)x_n) \to (0, y)$, entonces $Bx_n \to 0$ pues $B \in B(H,K)$ y por lo tanto $(x_n, Tx_n) \to (0, y)$ y ya que T es cerrable se tiene que $y = 0$. Ya que $\overline{T}$ es cerrado se tiene que $\overline{T} + B$ es cerrado por lema 2.8 y entonces $\overline{T+B} \subset \overline{T} + B$. Para demostrar la otra contención mostremos que $D(\overline{T}+B) = D(\overline{T}) \subset D(\overline{T+B})$. Sea $x \in D(\overline{T})$ entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en $D(T)$ tal que $x_n \to x$ y $(Tx_n)_{n\geq 1}$ converge con $\overline{T}x = \lim_{n\to\infty} Tx_n$. Como B es acotado entonces $Bx_n \to Bx$ lo cual implica $(T+B)x_n$ converge y por lo tanto $x \in D(\overline{T+B})$ con

$$\overline{T+B}x = \lim_{n\to\infty}(Tx_n + Bx_n) = \overline{T}x + Bx,$$

es decir, $\overline{T} + B \subset \overline{T+B}$. ❏

Definición 2.10. Sea $T : D(T) \subset H \to K$ un operador cerrado. Un subespacio $D \subset D(T)$ es un *core* (nucleo) para T si $\overline{T\restriction_D} = T$, es decir, podemos recuperar al operador T por medio de D.

Observación 2.11. Notemos que en la definición anterior el operador $T\restriction_D$ es cerrable pues $T\restriction_D \subset T$. Si $T : D(T) \subset H \to K$ es cerrado, entonces $D(T)$ es trivialmente un core para T.

2. El adjunto de un operador

En esta sección se definirá el adjunto de un operador no acotado sobre un espacio de Hilbert y se darán algunos teoremas que serán de mucha utilidad para entender mejor a los operadores cerrados y cerrables definidos en la sección anterior.

Teorema 2.12. *Sean H, K espacios de Hilbert y $T : D(T) \subset H \to K$ un operador lineal densamente definido, entonces existe un operador lineal $T^* : D(T^*) \subset K \to H$ llamado el adjunto de T cuyo dominio está dado por*

$$D(T^*) = \{y \in K : \exists u \in H \text{ tal que } \langle Tx, y\rangle = \langle x, u\rangle \ \ \forall x \in D(T)\}.$$

El vector u es único y por lo tanto podemos definir $T^*y = u$.

Demostración. Sea $y \in D(T^*)$, entonces por la densidad de $D(T)$ en H se tiene que u es único. Además $D(T^*)$ es un subespacio lineal y T^* es un operador lineal: sean $y_1, y_2 \in D(T^*)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces para todo $x \in D(T)$

$$\langle Tx, \alpha y_1 + y_2\rangle = \alpha\langle Tx, y_1\rangle + \langle Tx, y_2\rangle = \alpha\langle x, T^*y_1\rangle + \langle x, T^*y_2\rangle = \langle x, \alpha T^*y_1 + T^*y_2\rangle$$

Ahora para $z = \alpha T^* y_1 + T^* y_2 \in H$ se tiene que

$$\langle Tx, \alpha y_1 + y_2 \rangle = \langle x, z \rangle \text{ para todo } x \in D(T).$$

Entonces $\alpha y_1 + y_2 \in D(T^*)$ y $z = T^*(\alpha y_1 + y_2) = \alpha T^* y_1 + T^* y_2$. Por lo tanto $D(T^*)$ y T^* son lineales. ❑

Definición 2.13. Sea $T : D(T) \subset H \to K$ un operador densamente definido. Al operador T^* del teorema anterior llamamos el adjunto de T.

Observación 2.14. Notemos que en la definición de $D(T^*)$ es suficiente pedir que el funcional $x \mapsto \langle y, Tx \rangle$ sea acotado pues la existencia de u se sigue del teorema de representación de Riesz.

De la definición de T^* se tiene que

$$\langle y, Tx \rangle = \langle T^* y, x \rangle \text{ para todo } y \in D(T^*),\ x \in D(T).$$

Una herramienta útil para el estudio de operadores no acotados y sus adjuntos son los operadores que se definen a continuación.

Definición 2.15. Sean H, K espacios de Hilbert. Definimos los operadores $U, V : H \times K \to K \times H$ por

$$U(x, y) = (-y, x) \text{ y } V(x, y) = (y, x) \text{ para } x \in H, y \in K,$$

que son operadores (acotados) unitarios, es decir, $U^* U = id_{H \times K}$ y $UU^* = id_{K \times H}$, etc. Con abuso de notación, $U^* = -U$.

Observación 2.16. Notemos que si $T : D(T) \subset H \longrightarrow K$ es invertible entonces $V(\Gamma(T)) = \Gamma(T^{-1})$. Por lo tanto, T es cerrado si y sólo si T^{-1} es cerrado.

Entonces tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.17. *Sea $T : D(T) \subset H \to K$ un operador. Entonces $\Gamma := (U(\Gamma(T))^\perp \subset K \times H$ es un gráfico de un operador si y sólo si $D(T) \subset H$ es denso, es decir, T es densamente definido. En este caso, $\Gamma = \Gamma(T^*) = U(\Gamma(T))^\perp$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $\Gamma = U(\Gamma(T))^\perp$ es el gráfico de un operador, entonces $D(T)^\perp = 0$. En efecto, $y \in D(T)^\perp$ si y sólo si $\langle y, x \rangle = 0$ para todo $x \in D(T)$, si y sólo si $\langle (0, y), (-Tx, x) \rangle = 0$ para todo $x \in D(T)$, es decir, $(0, y) \in \Gamma$ y entonces $y = 0$.
($\Leftarrow$) Si $D(T)$ es denso y $(0, y) \in \Gamma$ entonces $0 = \langle (0, y), (-Tx, x) \rangle = \langle y, x \rangle$ para todo $x \in D(T)$, implica $y \in D(T)^\perp = \{0\}$, es decir, Γ es el gráfico de un operador.

Ahora notemos que $(k,z) \in \Gamma$ si y sólo si $\langle (k,z), U(x,Tx)\rangle = 0$ para todo $x \in D(T)$, si y sólo si $\langle (k,z), (-Tx, x)\rangle = 0$ para todo $x \in D(T)$, si y sólo si $\langle k, Tx\rangle = \langle z, x\rangle$ para todo $x \in D(T)$, si y sólo si $k \in D(T^*)$ y $T^*k = z$, si y sólo si $(k,z) \in \Gamma(T^*)$. De esto se deduce que $\Gamma(T^*) = \Gamma = U(\Gamma(T))^\perp$.

❏

Proposición 2.18. *Sea $T : D(T) \subset H \to K$ un operador densamente definido inyectivo, tal que $T^{-1} : D(T^{-1}) \subset K \to H$ es densamente definido, es decir, $R(T) \subset H$ es denso. Entonces*

$$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}.$$

Demostración. Notemos que $UV = -VU$ con U y V definidos en definición 2.15. Por lo tanto

$$\Gamma((T^*)^{-1}) = V\Gamma(T^*) = V(U\Gamma(T))^\perp = (-UV(\Gamma(T)))^\perp = (-U\Gamma(T^{-1}))^\perp = (U\Gamma(T^{-1}))^\perp = \Gamma((T^{-1})^*).$$

❏

Corolario 2.19. *Si $T : D(T) \subset H \longrightarrow K$ es densamente definido, entonces $T^* : D(T^*) \subset K \to H$ es un operador cerrado.*

Demostración. Se deduce inmediatamente del teorema anterior pues $\Gamma(T^*) = U(\Gamma(T))^\perp$ es cerrado.

❏

Observación 2.20. Si T^* existe entonces para todo $x \in D(T)$ tenemos

$$\langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle \quad \forall y \in D(T^*),$$

es decir, existe $z = Tx$ tal que $\langle x, T^*y\rangle = \langle z, y\rangle$ lo cual implica que $x \in D(T^{**})$ si T^{**} existe y $z = T^{**}x = Tx$. Esto a su vez implica que $D(T) \subset D(T^{**})$ y por lo tanto $T \subset T^{**}$. Pero T^{**} existe si y sólo si T^* es densamente definido por teorema 2.12 el cual no siempre es el caso.

Ahora supongamos que $T : D(T) \subset H \to K$ es un operador densamente definido tal que $T^* : D(T^*) \subset K \to H$ es densamente definido, entonces por teorema 2.12 existe $T^{**} = (T^*)^* : D(T^{**}) \subset H \to K$ y por la observación anterior $T \subset T^{**}$ y $\Gamma(T) \subset \Gamma(T^{**})$. Pero $\Gamma(T^{**})$ es cerrado y es al gráfico de un operador lo cual implica que $\overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(T^{**})$ es el gráfico de un operador y por lo tanto T es cerrable. En efecto tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.21. *Sea $T : D(T) \subset H \to K$ un operador densamente definido. Entonces T es cerrable si y sólo si T^* es densamente definido. En este caso, $\overline{T} = T^{**}$.*

Demostración. Con U definido en definición 2.15 tenemos

$$\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)} = (U^*U\Gamma(T))^{\perp\perp} = -(U(U\Gamma(T))^{\perp})^{\perp} = U(\Gamma(T^*))^{\perp} = \Gamma(T^{**}).$$

❏

Proposición 2.22. *Sea $T : D(T) \subset H \longrightarrow K$ un operador lineal densamente definido y cerrable, entonces $\overline{T}^* = T^*$.*

Demostración. Por proposición anterior y corolario 2.19,

$$\overline{T}^* = T^{***} = \overline{T^*} = T^*.$$

❏

Cerramos esta sección con algunas propiedades algebraicas del adjunto de un operador.

Proposición 2.23. *Sean $S, T : H \to K$ operadores lineales tal que $D(T)$ es denso en H. Entonces*

1. *Si $T \subset S$ entonces $S^* \subset T^*$.*
2. *Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entonces $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$.*
3. *Si $D(S + T)$ es denso en H entonces $S^* + T^* \subset (S + T)^*$.*
4. *Si S es acotado y $D(S) = H$ entonces $S^* + T^* = (S + T)^*$.*

Demostración. Ver en [**3**, Teorema 1.6]. ❏

También se tienen afirmaciones analogas para el producto.

Proposición 2.24. *Sean $T : D(T) \subset H \to K$ y $S : D(S) \subset K \to W$ operadores lineales tales que $D(ST)$ es denso en H.*

1. *Si $D(S)$ es denso en K, entonces $T^*S^* \subset (ST)^*$.*
2. *Si S es acotado y $D(S) = K$, entonces $T^*S^* = (ST)^*$.*

Demostración. Ver en [**3**, Teorema 1.7]. ❏

3. Operadores autoadjuntos

En esta sección se definirán operadores autoadjuntos que son una clase de operadores muy importante en la teoría de los operadores no acotados.

DEFINICIÓN 2.25 (Operador autoadjunto). Sea H en espacio de Hilbert. Un operador autoadjunto es un operador $T : D(T) \subset H \to H$ tal que $T^* = T$.

OBSERVACIÓN 2.26. Notemos que si T es autoadjunto entonces T es necesariamente densamente definido, $D(T) = D(T^*)$ y $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ para todo $x, y \in D(T)$. Decimos que T es *simétrico* si $T \subset T^*$. Un operador T es *esencialmente autoadjunto* si $\overline{T}$ es autoadjunto, en este caso tenemos que $D(T)$ es un *core* para $\overline{T}$.

PROPOSICIÓN 2.27. *Sea $U : H \longrightarrow H$ un operador unitario, $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un operador autoadjunto. Entonces $UAU^* : U(D(A)) \subset H \longrightarrow H$ es autoadjunto.*

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición 2.24 tenemos que $(UAU^*)^* \supset U^{**}A^*U^* = UAU^*$, es decir, UAU^* es simétrico. Ahora sea $f \in D((UAU^*)^*)$, entonces para todo $g \in D(UAU^*) = D(AU^*) = UD(A)$ se tiene

$$\langle (UAU^*)^* f, g\rangle = \langle f, UAU^* g\rangle = \langle U^* f, AU^* g\rangle.$$

Como $D(A) = \{U^* g : g \in U(D(A))\}$, consideremos $h \in D(A)$ y sea $g = Uh$, entonces $g \in U(D(A)) = D(AU^*) = D(UAU^*)$ y

$$\langle U^* f, Ah\rangle = \langle f, UAU^* g\rangle = \langle (UAU^*)^* f, g\rangle = \langle U^*(UAU^*)^* f, h\rangle.$$

Por lo tanto $U^* f \in D(A^*) = D(A)$ y $AU^* f = U^*(UAU^*)^* f$. Ya que U es unitario se tiene que $f \in U(D(A)) = D(AU^*) = D(UAU^*)$ y $(UAU^*)^* f = UAU^* f$. Por lo tanto $(UAU^*)^* \subset UAU^*$. ❑

4. Extensiones autoadjuntas

DEFINICIÓN 2.28 (Extensiones autoadjuntas). Sea $S : D(S) \subset H \to H$ un operador simétrico. Decimos que T es una extensión autoadjunta de S si $T = T^*$ y $S \subset T$.

OBSERVACIÓN 2.29.

1. Notemos que si S tiene una extensión autoadjunto, entonces S es simétrico.
2. Si $\overline{S} = T$, entonces S es esencialmente autoadjunto y $D(S)$ es un core para T.
3. Aunque $S = \overline{S}$, S no necesariamente tiene extensión autoadjunto como veremos mas tarde.
4. Si S no es esencialmente autoadjunto puede tener diferentes extensiones autoadjuntos como veremos en capítulos posteriores.

PROPOSICIÓN 2.30. *Si T_1 y T_2 son extensiones autoadjuntos de S tal que $T_1 \subset T_2$, entonces $T_1 = T_2$, es decir, si T es una extensión autoadjunto de S, entonces no existe $T_1 \neq T$ autoadjunto tal que $T \subset T_1$ y no existe $S_1 \neq T$ autoadjunto tal que $S \subset S_1 \subset T$.*

Demostración. Sean $T_1^* = T_1$, $T_2^* = T_2$ y $T_1 \subset T_2$. Entonces $T_2 = T_2^* \subset T_1^* = T_1 \subset T_2$, por lo tanto $T_1 = T_2$. ❑

Proposición 2.31. *Sea $T : D(T) \subset H \to K$ densamente definido y cerrado. Entonces*

$$N(T) = R(T^*)^\perp \ \text{ y } \ N(T^*) = R(T)^\perp.$$

Demostración. Como T es cerrado, tenemos que $\overline{T} = T^{**} = T$, en particular $D(T^*)$ es denso en H. Ahora sea $v \in R(T^*)^\perp$, entonces para cada $y \in D(T^*)$ tenemos $\langle v, T^*y\rangle = 0 = \langle 0, y\rangle$, lo cual implica $v \in D(T^{**}) = D(T)$ y $Tv = T^{**}v = 0$, es decir, $v \in N(T)$. Ahora si $v \in N(T)$, entonces $v \in D(T) = D(T^{**})$. Entonces para todo $y \in D(T^*)$, $\langle v, T^*y\rangle = \langle T^{**}v, y\rangle = \langle Tv, y\rangle = 0$, es decir, $v \in R(T^*)^\perp$. Para la segunda afirmación tenemos que T^* existe y por ser T cerrado la proposición 2.21 implica T^* es densamente definido lo que a su vez implica que T^{**} existe. Aplicando la primera afirmación al operador T^* tenemos $N(T^*) = R(T^{**})^\perp = R(\overline{T})^\perp = R(T)^\perp$. ❑

Observación 2.32. Notemos que la proposición anterior implica en particular que $N(T)$ y $N(T^*)$ son subespacios cerrados de H siempre y cuando T es densamente definido y cerrado.

Corolario 2.33. *Si $T = T^*$, entonces $R(T) = H$ si y sólo si $N(T) = 0$ y T^{-1} es acotado. En tal caso T^{-1} es también autoadjunto.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $R(T) = H$, entonces por la proposición anterior $N(T) = R(T)^\perp = H^\perp = 0$. Como $T = T^*$ y $R(T) = H$ entonces T^{-1} es un operador cerrado entre espacios de Hilbert. Por el teorema 2.6 del gráfico cerrado T^{-1} es acotado.
($\Leftarrow$) Ahora si $N(T) = 0$ y T^{-1} es acotado, por la proposición 2.31 tenemos que $R(T)^\perp = N(T) = 0$, lo que a su vez implica que $R(T)$ es denso en H y entonces $T^{-1} : R(T) \subset H \longrightarrow H$ es densamente definido. Por la proposición 2.18 se tiene que $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1} = T^{-1}$, es decir, T^{-1} es autoadjunto y por lo tanto cerrado. Tenemos que T^{-1} es densamente definido, cerrado y acotado, por el teorema 2.6 se tiene que $D(T^{-1}) = R(T) = H$. ❑

Ejemplo 2.34. (El operador multiplicación T_f) Sea (X, Ω, μ) un espacio de medida σ-finito, $H = L^2(X, \mu)$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una función medible. Definimos el operador $T_f : D(T_f) \subset H \longrightarrow H$ por $D(T_f) = \{u \in L^2(X, \mu) : fu \in L^2(X, \mu)\}$ y $T_f u = fu$. Notemos que T no necesariamente es acotado como se vera en la observación 2.35 abajo.

- *T_f es densamente definido*: Sea $A_n = \{x \in I : |f(x)| \leq n\}$ y sea $h \in H$. Entonces la sucesión $h_n = h\chi_{A_n}$ donde χ_{A_n} es la función caracteristica de A_n converge a h puntualmente y $h_n \in D(T_f)$, pues

$$\int_X |fh_n|^2 d\mu = \int_X |f|^2|h|^2\chi_{A_n} d\mu \le n^2 \int_X |h|^2 d\mu.$$

Ya que $\|h_n\|_{L^2} \le \|h\|$, entonces por teorema de convergencia dominada $\|h - h_n\|_{L^2} \to 0$, es decir, $\lim_{n\to\infty} h_n = h$. Por lo tanto T_f es densamente definido y $(T_f)^*$ existe.

- $(T_f)^* = T_{\overline{f}}$: Notemos que para todo $u, v \in D(T_f) = D(T_{\overline{f}})$

$$\langle T_f u, v\rangle = \int_X \overline{fu} v d\mu = \int_X \overline{u}\overline{f} v d\mu = \langle u, T_{\overline{f}} v\rangle.$$

Entonces $T_{\overline{f}} \subset (T_f)^*$.

Consideremos

$$C = \{K \subset X : K \in \Omega,\ \mu(K) < \infty \text{ y } f \text{ es acotada en } K\}.$$

C es no vacío pues ya que el espacio de medida es σ-finito, existen $E_n \in \Omega$ con $\mu(E_n) < \infty$ tales que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ y por lo tanto $K_{mn} = E_n \cap A_m \in C$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Entonces para todo $K \in C$ y todo $u \in H$ tenemos $u\chi_K \in D(T_f) = D(T_{\overline{f}})$ pues

$$\int_X |fu\chi_K|^2 d\mu = \int_K |f|^2|u|^2 d\mu < \infty.$$

Sea ahora $v \in D(T_f^*)$ y $K \in C$. Por un lado tenemos

$$\langle T_f(u\chi_K), v\rangle = \int_X \overline{f}\chi_K \overline{u} v d\mu,$$

y por otro lado

$$\langle T_f(\chi_K u), v\rangle = \langle \chi_K u, T_f^* v\rangle = \int_X \chi_K \overline{u} T_f^* v d\mu = 0$$

para todo $u \in H$, entonces

$$0 = \int_X \overline{u}\chi_K(\overline{f}v - T_f^* v) d\mu$$

para todo $u \in H$.

Ya que $\overline{f}\chi_K v - \chi_K T_f^* v \in H$, entonces $\chi_K(\overline{f}v - T_f^* v) = 0$ para todo subconjunto $K \in C$. Notemos que $\bigcup_{K\in C} K = X$ pues $X = \bigcup_{m,n} K_{mn}$ con K_{mn} definido anteriormente. Por lo tanto $\overline{f}v = T_f^* v$, lo cual implica $v \in D(T_{\overline{f}})$ y $T_{\overline{f}} v = T_f^* v$, entonces $T_f^* = T_{\overline{f}}$.

En particular tenemos que $T_f = (T_{\overline{f}})^*$ es cerrado, y es autoadjunto, $T_f = T_f^*$, cuando f es una función real.

Observación 2.35. Notemos que por ser T_f cerrado y densamente definido se tiene que T_f es acotado si y sólo si $D(T_f) = H$ si y sólo si $f \in L^\infty(I)$.

Demostración. El primer "si y sólo si" se sigue del teorema del gráfico cerrado (teorema 2.6). Ahora si $f \in L^\infty(X,\mu)$ entonces $D(T_f) = L^2(X,\mu)$ pues

$$\int_X |fu|^2 d\mu \leq \|f\|_{L^\infty}^2 \int_X |u|^2 d\mu = \|f\|_{L^\infty}^2 \|u\|_{L^2}^2 < \infty \quad \text{para todo } u \in L^2(X,\mu).$$

Por otro lado si $f \notin L^\infty(X,\mu)$, entonces una cantidad infinita de conjuntos $A_n = \{x \in X : n \leq |f(x)| \leq n+1\}$ tiene medida > 0, pues en otro caso f seria esencialmente acotada. Supongamos que $(n_k)_{k\geq 1}$ es una subsucesión tal que $\mu(A_{n_k}) > 0$. Ya que el espacio de medida es σ-finito $X = \bigcup_{m\geq 1} X_m$, entonces $A_{n_k} = \bigcup_m A_{n_k} \cap X_m$ y por lo tanto debe existir m_k tal que $0 < \mu(A_{n_k} \cap X_{m_k}) < +\infty$. Si $B_k := A_{n_k} \cap X_{m_k}$, entonces $\chi_{B_k} \in D(T_f)$ y

$$\|T_f \chi_{B_k}\|_{L^2}^2 = \int_X |f|^2 |\chi_{B_k}|^2 d\mu \geq n_k^2 \int_X |\chi_{B_k}|^2 d\mu = n_k^2 \|\chi_{B_k}\|_{L^2}^2$$

implica $\frac{\|T_f \chi_{B_k}\|}{\|\chi_{B_k}\|} \geq n_k$, es decir, T_f es no acotado, lo cual es una contradicción. Por lo tanto T_f acotado implica $f \in L^\infty(X,\mu)$. ❑

5. El espectro de un operador cerrado

En esta sección se definirá lo que es el espectro de un operador $T : D(T) \subset H \to H$ el cual necesariamente es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$ como se verá a continuación. Para operadores autoadjuntos que son considerados como observables físicos, el espectro corresponde a los posibles valores de mediciones.

Definición 2.36. Sea H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subset H \to H$ un operador densamente definido y cerrado. Definimos el conjunto resolvente de A por $\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A-\lambda)^{-1} \in B(H)\}$ y el espectro de A por $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Observación 2.37. Notemos que si $(A-\lambda)^{-1} \in B(H)$, entonces $(A-\lambda)^{-1}$ es cerrado y como $\Gamma((A-\lambda)^{-1}) = V(\Gamma(A-\lambda))$ donde $V(x,y) = (y,x)$ es un operador unitario, tenemos que $A-\lambda$ es cerrado. Luego por el lema 2.8 tenemos $A = A - \lambda + \lambda$ es cerrado. Por lo tanto la definición de espectro tiene sentido solo para operadores cerrados.

Lema 2.38 (Serie de Neumann). *Sea H un espacio de Hilbert y sea $A \in B(H)$ con $\|1 - A\| < 1$, entonces A es invertible.*

Demostración. Si $\|1 - A\| < 1$ entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(1-A)^n$ converge en la norma $\|\cdot\|$ de $B(H)$. Además

$$\begin{aligned} A\sum_{n=0}^{\infty}(1-A)^n &= \lim_{N\to\infty}[1-(1-A)]\sum_{n=0}^{N}(1-A)^n = \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{N}(1-A)^n - \sum_{n=0}^{N}(1-A)^{n+1}\right] \\ &= \lim_{N\to\infty}[1-(1-A)^{N+1}] = 1, \end{aligned}$$

pues $\lim_{n\to\infty}\|1-A\|^n = 0$. Entonces $A\sum_{n=0}^{\infty}(1-A)^n = I$. Analogamente

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-A)^n A = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(1-A)^n A = \lim_{N\to\infty} A\sum_{n=0}^{N}(1-A)^n = 1.$$

Por lo tanto A es invertible y $A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-A)^n \in B(H)$. ❑

Proposición 2.39. *Sea $T : D(T) \subset H \to H$ un operador densamente definido y cerrado. Entonces $\rho(T)$ es abierto y por lo tanto $\sigma(T)$ es cerrado.*

Demostración. Como $\sigma(A) = \mathbb{C}\setminus\rho(A)$, es suficiente demostrar que $\rho(A)$ es abierto. Sea $\lambda\in\rho(A)$. Para cada $z\in\mathbb{C}$ con $|z| < \|(A-\lambda)^{-1}\|^{-1}$ tenemos $A-(\lambda+z) = (1-z(A-\lambda)^{-1})(A-\lambda)$. Ahora $\|z(A-\lambda)^{-1}\| = |z|\,\|(A-\lambda)^{-1}\| < 1$. Por la serie de Neumann $(1-z(A-\lambda)^{-1})^{-1}\in B(H)$. Como $(A-\lambda)^{-1}\in B(H)$, tenemos $(A-(\lambda+z))^{-1} = (A-\lambda)^{-1}(1-z(A-\lambda)^{-1})^{-1}\in B(H)$ que implica $z\in\rho(A)$. Por lo tanto $\rho(A)$ es abierto. ❑

Proposición 2.40. *Si $A : D(A)\subset H\to H$ es un operador simétrico y cerrado, entonces para $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ tenemos*

$$\|(A-\lambda)h\|^2 \geq \beta^2\|h\|^2. \tag{5.1}$$

Además $R(A-\lambda)\subset H$ es cerrado.

Demostración. Sea $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\beta\neq 0$. Entonces para cada $h\in D(A)$,

$$\begin{aligned} \|(A-\lambda)h\|^2 &= \langle (A-\alpha)h - i\beta h, (A-\alpha)h - i\beta h\rangle, \\ &= \langle (A-\alpha)h, (A-\alpha)h\rangle - i\beta\langle (A-\alpha)h, h\rangle + i\beta\langle h, (A-\alpha)h\rangle + \overline{(-i\beta)}(-i\beta)\|h\|^2, \\ &= \|(A-\alpha)h\|^2 - i\beta\langle h, (A-\alpha)h\rangle + i\beta\langle h, (A-\alpha)h\rangle + \beta^2\|h\|^2 \geq \beta^2\|h\|^2. \end{aligned}$$

Ahora sea $(f_n := (A-\lambda)x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $R(A-\lambda)$ tal que $f_n\to f\in H$. Por (5.1) tenemos $\|(A-\lambda)(x_n-x_m)\|\geq\beta\|x_n-x_m\|$ para todo $n>m$, entonces $(x_n)_{n\geq1}$ es una sucesión de Cauchy en $D(A-\lambda) = D(A)$ tal que $x_n\to x\in H$ y $(A-\lambda)x_n = f_n\to f$. Como A es cerrado, entonces $A-\lambda$ es cerrado y por lo tanto $x\in D(A) = D(A-\lambda)$ y $f = (A-\lambda)x\in R(A-\lambda)$. ❑

Corolario 2.41. *Si $A : D(A) \subset H \to H$ un operador simétrico y cerrado. Entonces $R(A - \lambda) = N(A^* - \overline{\lambda})^\perp$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

Demostración. Se sabe que para un operador $T : D(T) \subset H \to H$ densamente definido y cerrado se tiene $N(T^*) = R(T)^\perp$. Como A es cerrado también $A - \lambda$ es cerrado. Ya que por la proposición anterior $R(A - \lambda)$ es cerrado, entonces $R(A - \lambda) = \overline{R(A - \lambda)} = R(A - \lambda)^{\perp\perp} = N(A^* - \overline{\lambda})^\perp$. ❑

Corolario 2.42. *Sea $A : D(A) \subset H \to H$ autoadjunto. Entonces $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$. Como $\|(A - (\alpha + i\beta))h\| \geq |\beta|\|h\|$ tenemos $h \in N(A - \lambda)$ si y sólo si $h = 0$. Esto implica que $A - \lambda$ es inyectivo para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Además por el corolario anterior $R(A - \lambda) = N(A^* - \overline{\lambda})^\perp = N(A - \overline{\lambda})^\perp = \{0\}^\perp = H$. Por el teorema del gráfico cerrado $(A - \lambda)^{-1} : H \to H$ es acotado. Por lo tanto $\lambda \in \rho(A)$. ❑

El siguiente lema será de gran utilidad para capítulos posteriores.

Lema 2.43. *Sea $A : D(A) \subset H \to H$ un operador densamente definido y cerrado y $U : H \to K$ un operador unitario. Entonces $\sigma(A) = \sigma(UAU^*)$.*

Demostración. Como $(A - \lambda)^{-1} \in B(H)$ existe, entonces $(UAU^* - \lambda)^{-1} = (U(A - \lambda)U^*)^{-1} = U(A-\lambda)^{-1}U^* \in B(H)$ existe y por lo tanto $\rho(A) \subset \rho(UAU^*)$. Analogamente se tiene que $\rho(UAU^*) \subset \rho(U^*(UAU^*)U)) = \rho(A)$ y por lo tanto $\rho(A) = \rho(UAU^*)$. ❑

Proposición 2.44. *Sea H un espacio de Hilbert separable con base ortonormal $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $A : D(A) \subset H \to H$ un operador que satisface: $D(A) = \mathrm{gen}\,\{\mathrm{e_n : n \in \mathbb{N}}\}$ y existe una sucesión $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ tal que $Ae_n = \lambda_n e_n$. Entonces A es esencialmente autoadjunto y $A^* = \overline{A}$. Además*

$$D(\overline{A}) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in H : \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 |\lambda_n|^2 < \infty \right\}.$$

Demostración. Sea $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in H$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2|\lambda_n|^2 < \infty$, entonces $z := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n e_n \in H$ y para todo $v = \sum_{n=1}^{N} \beta_n e_n \in D(A)$ tenemos

$$\langle x, Av \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \sum_{n=1}^{N} \beta_k \lambda_k e_k \right\rangle = \sum_{n=1}^{N} \overline{\alpha_n} \beta_n \lambda_n = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n e_n, \sum_{n=1}^{N} \beta_k e_k \right\rangle = \langle z, v \rangle.$$

Entonces $x \in D(A^*)$ y $A^* x = z$, es decir, $A^*(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n e_n$.

Ahora sea $y \in D(A^*)$ y $z = A^* y \in H$. Definimos $P_N : H \to H$ por $P_N(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n$. Entonces P_N es acotado y $P_N = P_N^2 = P_N^*$. Mostremos que $P_N A^* y = AP_N y$ para cada N: Si

$y = \sum_{n=1}^{\infty} s_n e_n \in D(A^*)$ y $v = \sum_{i=1}^{k} \beta_i e_i \in D(A)$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle P_N A^* y, v\rangle &= \langle A^* y, P_N v\rangle = \left\langle A^* y, \sum_{i=1}^{min\{k,N\}} \beta_i e_i \right\rangle = \left\langle y, A \sum_{i=1}^{min\{k,N\}} \beta_i e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} s_n e_n, \sum_{i=1}^{min\{k,N\}} \beta_i \lambda_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{min\{k,N\}} \overline{s_i} \lambda_i \beta_i = \left\langle \sum_{n=1}^{N} s_n \lambda_n e_n, \sum_{i=1}^{k} \beta_i e_i \right\rangle \\
&= \langle A P_N y, v\rangle.
\end{aligned}$$

Ya que $D(A)$ es denso en H, se tiene que $P_N A^* y = A P_N y$ para todo $y \in D(A^*)$. De esto deducimos que para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} |s_n|^2 |\lambda_n|^2 = \langle A P_N y, A P_N y\rangle = \langle P_N A^* y, P_N A^* y\rangle = \|P_N A^* y\|^2 \leq \|A^* y\|^2,$$

lo cual implica $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^2 |\lambda_n|^2 < \infty$.

Hemos demostrado que

$$D(A^*) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in H : \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 |\lambda_n|^2 < \infty \right\} \quad \text{y} \quad A^* \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n e_n.$$

En particular tenemos que $A \subset A^*$ y por lo tanto $A^{**} \subset A^*$. Afirmamos ahora que A^* es simétrico, es decir, $A^* \subset A^{**}$. En efecto si $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ y $y = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i$ pertenencen a $D(A^*)$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\langle A^* \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i \right\rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n e_n, \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha_n} \lambda_n \beta_n \\
&= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \lambda_i e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, A^* \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i \right\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $A^* = A^{**} = \overline{A}$ y $\overline{A}$ es autoadjunto. ❏

Proposición 2.45. *Sea $A : D(A) \subset H \to H$ un operador cerrado y $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset D(A)$ una base ortonormal de H tal que $Ae_n = \lambda_n e_n$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos además que* gen$\{\mathrm{e_n} : \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$ *es un core para A. Entonces $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset \mathbb{C}$.*

Demostración. Es obvio que $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(A)$. Como $\sigma(A)$ es cerrado, entonces $\overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset \sigma(A)$. Es suficiente mostrar que $\mathbb{C} \setminus \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset \rho(A)$. Supongamos que $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}}$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $|z-\lambda_n| \geq \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos $T_z : \mathrm{gen}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H \to H$ por $T_z e_n = (\lambda_n - z)^{-1} e_n$, entonces para cada $\sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \in D(T_z)$ tenemos

$$\left\| T_z \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right) \right\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n - z} \alpha_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N \left| \frac{1}{\lambda_n - z} \right|^2 |\alpha_n|^2 \leq \delta^{-2} \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 = \delta^{-2} \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\|^2 ,$$

lo cual implica T_z densamente definido y acotado, por lo tanto $\overline{T_z} \in B(H)$. Además $\overline{T_z}(A - z)e_n = (\lambda_n - z)T_z e_n = (\lambda_n - z)(\lambda_n - z)^{-1} e_n = e_n$ implica

$$\overline{T_z}(A - z)\restriction_{\mathrm{gen}\{e_n : n\in\mathbb{N}\}} = \mathrm{Id}\restriction_{\mathrm{gen}\{e_n : n\in\mathbb{N}\}} .$$

Luego, $\overline{T_z} e_n = (\lambda_n - z)^{-1} e_n \in D(A)$ y $(A - z)\overline{T_z} e_n = e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$(A - z)\overline{T_z}\restriction_{\mathrm{gen}\{e_n : n\in\mathbb{N}\}} = \mathrm{Id}\restriction_{\mathrm{gen}\{e_n : n\in\mathbb{N}\}} .$$

Como A es cerrado tenemos $(A - z)\overline{T_z} = \mathrm{Id}$. En efecto sea $x = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n$ un elemento arbitrario de H, entonces $\overline{T_z}(x) = \overline{T_z}(\sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n(\lambda_n - z)^{-1} e_n$. Por otro lado tenemos que $(A - z)(\sum_{n=1}^N \alpha_n(\lambda_n - z)^{-1} e_n) = \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n$ converge a $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n = x$. Como A es cerrado y entonces $A - z$ es cerrado, tenemos que $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n(\lambda_n - z)^{-1} e_n \in D(A - z)$ y $(A - z)(\sum_{n=1}^\infty \alpha_n(\lambda_n - z)^{-1} e_n) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n$, es decir, $(A - z)\overline{T_z}(x) = x$.

Ahora como $(\overline{T_z})$ es acotado y $\mathrm{gen}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un core para A tenemos que

$$\overline{(A - z)\restriction_{\mathrm{gen}\{e_n : n\in\mathbb{N}\}}} = A - z \implies \overline{T_z}(A - z) = \mathrm{Id}\restriction_{D(A-z)} .$$

En efecto si $x \in D(A - z) = D(A)$, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathrm{gen}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que x_n converge a x y $(A - z)(x_n)$ converge a $(A - z)(x)$. Entonces $\overline{T_z}(A - z)x = \overline{T_z}(\lim_{n\to\infty}(A - z)x_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{T_z}(A - z)x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x$. Hemos obtenido que $(A - z)\overline{T_z} = \mathrm{Id}$ y $\overline{T_z}(A - z) = \mathrm{Id}\restriction_{D(A-z)}$. Pero $D(\overline{T_z}) = H$ implica $(A - z)^{-1} = \overline{T_z} \in B(H)$ y por lo tanto $z \in \rho(A)$. ❏

Observación 2.46. La hipótesis de que $\mathrm{gen}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es core para A es importante para tener la conclusión de la proposición anterior asi como lo muestra el siguiente ejemplo: en el siguiente capítulo se mostrará que $H = L^2([0, 1])$ tiene base ortonormal $\{e_n(x) = e^{2\pi i n x} : n \in \mathbb{Z}\}$ y que el operador diferenciación $A = T_{max}$ satisface

1. T_{max} es cerrado.
2. $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset D(T_{max})$.
3. $T_{max} e_n = 2\pi n e_n$.

Sin embargo en el capítulo 5 se demuestra que $\sigma(T_{max}) = \mathbb{C}$.

También notemos que si en la proposición anterior el operador A es autoadjunto, entonces por la proposición 2.42 cada $\lambda_n \in \mathbb{R}$ y si $A_0 = A\restriction_{\mathrm{gen}\{\mathrm{e_n}:\mathrm{n}\in\mathbb{N}\}}$, por la proposición 2.44 aplicada a A_0 se tiene que $A = A^* \subset A_0^* = \overline{A_0} \subset \overline{A} = A$, es decir, el subespacio gen$\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un core para $A = \overline{A_0}$.

Capítulo 3

El operador de momento $-i\frac{d}{dx}$ sobre el intervalo acotado $[a, b]$

En este capítulo se estudiará y hará un análisis del operador de momento $-i\frac{d}{dx}$ sobre ciertos dominios en $L^2(I)$, sus adjuntos, así como sus propieades espectrales y su relación con el operador de multiplicación Q definido al final del capítulo anterior. Se analiza también la existencia de operadores de diferenciación autoadjuntos, en este caso del intervalo acotado. Al final de este capítulo se demuestra que existe operador simétrico T tal que $[T, Q] = -i$, el cual tiene extensión autoadjunto pero no único.

1. Operadores de diferenciación -$i\frac{d}{dx}$ sobre $[a, b]$ y sus adjuntos

Sin perder generalidad supongamos que $[a, b] = [0, 1]$, pues $L^2([a, b]) \cong L^2([0, 1])$ con isometría $f \mapsto F(t) := (b-a)^{-1/2} f(a + t(b-a))$(en el capitulo 4 se considera nuevamente esta isometría).

Definición 3.1. Definimos los siguientes operadores (no acotados) de derivación "débiles"

1. $D(T_0^\infty) = C_0^\infty([0, 1]) = \{f \in C^\infty([0, 1]) : f(0) = f(1) = 0\} \subset L^2([0, 1])$,
$$T_0^\infty f = -if' = -i\frac{df}{dx}.$$
2. $D(T_0) = \{f \in L^2([0, 1]) : f' \in L^2([0, 1]),\ f(0) = f(1) = 0\} = H_0^1(0, 1)$,
$$T_0 f = -if'.$$
3. $D(T_{max}^\infty) = C^\infty([0, 1]) \subset L^2([0, 1])$,
$$T_{max}^\infty f = -if' = -i\frac{df}{dx}.$$
4. $D(T_{max}) = \{f \in L^2([0, 1]) : f' \in L^2([0, 1])\} = H^1(0, 1)$,
$$T_{max} f = -if'.$$

De la definición 3.1 tenemos de inmediato el siguiente lema.

Lema 3.2. *Los operadores no acotados $T_0^\infty, T_0, T_{max}^\infty, T_{max}$ son densamente definidos.*

Demostración. Se sigue de que $C_c^\infty(0,1) \subset D(T_0^\infty) \subset D(T_0)$, $C_c^\infty(0,1) \subset D(T_{max}^\infty) \subset D(T_{max})$ y $C_c^\infty(0,1)$ es denso en $L^2([0,1])$. Aquí el encaje de $C_c^\infty(0,1)$ en $D(T_0^\infty)$ es natural, extendiendo funciones de $C_c^\infty(0,1)$ a la frontera asignando el valor cero. ❏

Corolario 3.3. *$(T_0^\infty)^*, T_0^*, (T_{max}^\infty)^*, T_{max}^*$ existen. Además $T_0^\infty \subset T_0 \subset T_{max}$ implica $T_{max}^* \subset (T_{max}^\infty)^* \subset T_0^*$ y $T_0^\infty \subset T_{max}^\infty \subset T_{max}$ implica $T_{max}^* \subset (T_{max}^\infty)^* \subset (T_0^\infty)^*$.*

Lema 3.4. *$T_0^\infty \subset T_{max}^*$.*

Demostración. Denotemos $I = [0,1]$. Para todo $f \in D(T_0^\infty)$ y para todo $g \in D(T_{max})$ tenemos de la formula de integración por partes

$$\begin{aligned}\langle T_0^\infty f, g\rangle &= \langle -if', g\rangle = i\int_I \overline{f'} g d\lambda = -i\int_I \overline{f} g' d\lambda + i[\overline{f(1)}g(1) - \overline{f(0)}g(0)] \\ &= \int_I \overline{f}(-ig')d\lambda = \langle f, T_{max}(g)\rangle.\end{aligned}$$

Entonces $f \in D(T_{max}^*)$ y $T_{max}^* f = T_0^\infty f$ lo cual implica $T_0^\infty \subset T_{max}^*$. ❏

Corolario 3.5. *Los operadores $T_{max}^*, (T_{max}^\infty)^*, T_0^*, (T_0^\infty)^*$ son densamente definidos y por lo tanto $T_0^\infty, T_0, T_{max}^\infty, T_{max}$ son cerrables.*

Demostración. Se sigue de los dos lemas anteriores pues $D(T_0^\infty)$ es denso. Que son cerrables se sigue de la proposición 2.21. ❏

Del corolario anterior y proposición 2.22 se tiene en particular que $\overline{T} = T^{**}$ y $(\overline{T})^* = T^*$ para T cada uno de los operadores de la definición 3.1. Recordemos que si T es un operador no acotado densamente definido, decimos que T es simétrico si $T \subset T^*$.

Proposición 3.6. *Los operadores T_0^∞ y T_0 son simétricos, pero T_{max}^∞ y T_{max} no lo son.*

Demostración. Para todo $f, g \in D(T_0)$ tenemos de la formula de integración por partes

$$\begin{aligned}\langle -if', g\rangle &= i\int_I \overline{f'} g d\lambda = -i\int_I \overline{f} g' d\lambda + i[\overline{f(1)}g(1) - \overline{f(0)}g(0)] \\ &= \int_I \overline{f}(-ig')d\lambda = \langle f, -ig'\rangle.\end{aligned}$$

Entonces para todo $f, g \in D(T_0)$ tenemos $\langle T_0 f, g\rangle = \langle f, T_0 g\rangle$, y para todo $\phi, \psi \in D(T_0^\infty)$ tenemos $\langle T_0^\infty \phi, \psi\rangle = \langle \phi, T_0^\infty \psi\rangle$. Entonces T_0 y T_0^∞ son simétricos.

Ahora sean $f(x) = x$ y $\chi = \chi_I$ la función constante 1, entonces $f,\chi \in D(T^{\infty}_{max}) \subset D(T_{max})$. Entonces

$$\langle T_{max}f,\chi\rangle = \langle T^{\infty}_{max}f,\chi\rangle = i\langle f',\chi\rangle = i\langle \chi,\chi\rangle = i \quad \text{y} \quad \langle f, T_{max}(\chi)\rangle = \langle f, T^{\infty}_{max}(\chi)\rangle = \langle f, 0\rangle = 0,$$

de donde obtenemos que $\langle f, T_{max}\chi\rangle = 0 \neq i = \langle T_{max}f,\chi\rangle$ y $\langle f, T^{\infty}_{max}\rangle = 0 \neq i = \langle T^{\infty}_{max}f,\chi\rangle$. Por lo tanto T_{max} y T^{∞}_{max} no son simétricos. ❑

A continuación se enunciará un teorema elemental del análisis de Fourier que será de gran importancia para estudiar el adjunto de el operador T^{∞}_0.

Teorema 3.7. *Los conjuntos* $\{\sqrt{2}\operatorname{sen}(\pi nx) : n \in \mathbb{N}\}$ *y* $\{\sqrt{2}\cos(\pi nx) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$ *son bases ortonormales de* $L^2([0,1])$.

Demostración. Puede verse en [**6**]. ❑

Teorema 3.8. $(T^{\infty}_0)^* = T_{max}$.

Demostración. Primero mostremos que $T_{max} \subset (T^{\infty}_0)^*$. Para todo $f \in D(T^{\infty}_0)$ y para todo $g \in D(T_{max})$ tenemos que

$$\begin{aligned}\langle g, T^{\infty}_0 f\rangle &= \langle g, -if'\rangle = -i\int_0^1 \overline{g}f'd\lambda = i\int_0^1 \overline{g'}fd\lambda - i[\overline{g(1)}f(1) - \overline{g(0)}f(0)] \\ &= \int_0^1 \overline{(-ig')}fd\lambda = \langle -ig', f\rangle = \langle T_{max}g, f\rangle.\end{aligned}$$

Entonces $g \in D((T^{\infty}_0)^*)$ y $(T^{\infty}_0)^*g = T_{max}g$, es decir, $T_{max} \subset (T^{\infty}_0)^*$. Para demostrar $(T^{\infty}_0)^* \subset T_{max}$, consideremos $g \in D((T^{\infty}_0)^*)$ y sea $h := i(T^{\infty}_0)^*g \in L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$, entonces

$$G(x) := \int_0^x h(t)d\lambda(t) \quad \Longrightarrow \quad G \in AC([0,1]) \quad \text{y} \quad G' = h \in L^2([0,1]) \quad \text{(por teorema 1.3).}$$

Por lo tanto $G \in D(T_{max}) \subset D((T^{\infty}_0)^*)$ y $T_{max}G = -ih = -i^2(T^{\infty}_0)^*g = (T^{\infty}_0)^*g$. Ya que $G \in D(T_{max})$ y $g \in D((T^{\infty}_0)^*)$, para todo $f \in D(T^{\infty}_0)$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle G - g, T^{\infty}_0 f\rangle &= \langle G, T^{\infty}_0 f\rangle - \langle g, T^{\infty}_0 f\rangle = \langle T_{max}G, f\rangle - \langle (T^{\infty}_0)^*g, f\rangle \\ &= \langle (T^{\infty}_0)^*g, f\rangle - \langle (T^{\infty}_0)^*g, f\rangle = 0.\end{aligned}$$

Entonces $\langle G - g, T^{\infty}_0 f\rangle = 0$ para todo $f \in D(T^{\infty}_0)$, es decir,

$$G - g \perp R(T^{\infty}_0) = \{\phi' : \phi \in C^{\infty}_0([0,1])\}.$$

Afirmamos que $R(T^{\infty}_0)^{\perp} \subset \mathbb{C}\cdot 1$. Para esto notemos primero que $\{\sqrt{2}\operatorname{sen}(\pi nx) : n \in \mathbb{N}\} \subset D(T^{\infty}_0)$ lo que a su vez implica que $\operatorname{gen}\{T^{\infty}_0(\operatorname{sen}(\pi nx)) : n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{gen}\{\cos(\pi nx) : n \in \mathbb{N}\} \subset R(T^{\infty}_0)$. Por lo tanto $\overline{\text{gen}\{\cos(\pi nx) : n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{R(T_0^\infty)}$ y como $\{\sqrt{2}\cos(\pi nx) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$ es una base ortonormal de $L^2([0,1])$,

$$L^2([0,1]) = \overline{\text{gen}\{\cos(\pi nx) : n \in \mathbb{N}\}} \oplus \mathbb{C} \cdot 1.$$

Entonces $(\mathbb{C} \cdot 1)^\perp = \overline{\text{gen}\{\cos(\pi nx) : n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{R(T_0^\infty)}$ y por lo tanto $R(T_0^\infty)^\perp \subset \mathbb{C} \cdot 1$. Ahora ya que $G - g \in R(T_0^\infty)^\perp$, entonces existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $g = G - c \cdot 1 \in D(T_{max})$. Finalmente, para todo $f \in D(T_0^\infty)$ tenemos

$$\langle (T_0^\infty)^* g, f\rangle = \langle g, T_0^\infty f\rangle = \langle G - c \cdot 1, T_0^\infty f\rangle = \langle T_{max}(G - c), f\rangle = \langle T_{max} g, f\rangle,$$

es decir, $\langle (T_0^\infty)^* g - T_{max} g, f\rangle = 0$ para todo $f \in D(T_0^\infty)$ y como $D(T_0^\infty)$ es denso se tiene que $(T_0^\infty)^* g = T_{max} g$. Entonces $(T_0^\infty)^* \subset T_{max}$. Como $T_{max} \subset (T_0^\infty)^*$, entonces $T_{max} = (T_0^\infty)^*$. ❑

Recordemos que T_{max} no es un operador simétrico sin embargo se tiene el siguiente lema.

Lema 3.9. $T_{max}^* \subset T_{max}$

Demostración. $T_0^\infty \subset T_{max}$ implica $T_{max}^* \subset (T_0^\infty)^* = T_{max}$. ❑

Proposición 3.10. $T_{max}^* = T_0$.

Demostración. Mostremos primero que $T_0 \subset T_{max}^*$. Para esto consideremos $g \in D(T_0)$, entonces para cada $f \in D(T_{max})$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle g, T_{max} f\rangle &= -i\langle g, f'\rangle = -i\int_0^1 \overline{g} f' d\lambda = i\int_0^1 \overline{g'} f d\lambda - i[\overline{g(1)}f(1) - \overline{g(0)}f(0)] \\ &= \int_0^1 \overline{-ig'} f d\lambda = \langle T_0 g, f\rangle, \quad \text{ya que } g(0) = g(1) = 0. \end{aligned}$$

Entonces $g \in D(T_{max}^*)$ y $T_{max}^* g = T_0 g$.

Ahora mostremos que $T_{max}^* \subset T_0$. Como $T_{max}^* \subset T_{max}$, entonces

$$T_{max}^* g = T_{max} g = -ig' \text{ para todo } g \in D(T_{max}^*).$$

Entonces para todo $g \in D(T_{max}^*)$ y $f \in D(T_{max})$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle g, T_{max} f\rangle &= \langle T_{max}^* g, f\rangle = \langle -ig', f\rangle = \int_0^1 \overline{-ig'} f d\lambda = i\int_0^1 \overline{g'} f d\lambda, \\ \langle g, T_{max} f\rangle &= -i\int_0^1 \overline{g} f' d\lambda = i\int_0^1 \overline{g'} f d\lambda - [\overline{g(1)}f(1) - \overline{g(0)}f(0)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$i[\overline{g(1)}f(1) - \overline{g(0)}f(0)] = 0 \text{ para todo } g \in D(T_{max}^*) \text{ y } f \in D(T_{max}). \tag{1.1}$$

Ahora si $f \in D(T_{max})$ es la función $f(x) = x$, entonces $0 = i[\overline{g(1)} \cdot 1 - \overline{g(0)} \cdot 0] = i\overline{g}(1)$ implica $g(1) = 0$. Por otro lado si $f(x) = 1 - x$, entonces $i[\overline{g(1)}0 - \overline{g(0)}1] = -i\overline{g(0)}$ implica $g(0) = 0$. Por lo tanto $g \in D(T^*_{max})$ implica $g \in D(T_0)$. Además $T^*_{max}g = T_{max}g = -ig' = T_0 g$ implica $T^*_{max} \subset T_0$. ❑

Corolario 3.11. $\overline{T_0^\infty} = T_0$.

Demostración. Se sigue del teorema 3.8 y de la proposición anterior: $\overline{T_0^\infty} = (T_0^\infty)^{**} = T^*_{max} = T_0$.
❑

Proposición 3.12. $(T^\infty_{max})^* = T_0$.

Demostración. Mostremos primero que $T_0 \subset (T^\infty_{max})^*$; para todo $f \in D(T^\infty_{max})$ y para todo $g \in D(T_0)$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle g, T^\infty_{max} f\rangle &= \langle g, -if'\rangle = -i\int_0^1 \overline{g} f' d\lambda = i\int_0^1 \overline{g'} f d\lambda - i[\overline{g(1)}f(1) - \overline{g(0)}f(0)] \\ &= \int_0^1 \overline{-ig'} f d\lambda = \langle T_0 g, f\rangle.\end{aligned}$$

Entonces $g \in D((T^\infty_{max})^*)$ y $(T^\infty_{max})^* g = T_0 g$ y por lo tanto $T_0 \subset (T^\infty_{max})^*$.

Ahora ya que $T_0^\infty \subset T^\infty_{max}$, entonces $(T^\infty_{max})^* \subset (T_0^\infty)^* = T_{max}$ por lo que para todo $f \in D(T^\infty_{max})$ y $g \in D((T^\infty_{max})^*)$ se tiene

$$\begin{aligned}0 &= \langle g, T^\infty_{max} f\rangle - \langle g, T^\infty_{max} f\rangle = \langle (T^\infty_{max})^* g, f\rangle - \langle g, T^\infty_{max} g\rangle = \langle T_{max} g, f\rangle - \langle g, T_{max} f\rangle \\ &= \langle -ig', f\rangle - \langle g, -if'\rangle = i\int_0^1 \overline{g'} f d\lambda + i\int_0^1 \overline{g} f' d\lambda \\ &= -i\int_0^1 \overline{g} f' d\lambda + i[\overline{g(1)}f(1) - \overline{g(0)}f(0)] + i\int_0^1 \overline{g} f' d\lambda \\ &= i[\overline{g(1)}f(1) - \overline{g(0)}f(0)].\end{aligned}$$

Entonces hemos obtenido que para todo $g \in D((T^\infty_{max})^*)$ y para todo $f \in D((T^\infty_{max}))$

$$i[\overline{g(1)}f(1) - \overline{g(0)}f(0)] = 0. \tag{1.2}$$

Ahora si $f(x) = x$, entonces $f \in D(T^\infty_{max})$ y sustituyendo en (1.2) se tiene que $i\overline{g(1)} = 0$ implica $g(1) = 0$. Por otro lado sea $f(x) = 1 - x$, entonces $f \in D(T^\infty_{max})$ y sustituyendo en (1.2) se tiene que $-i\overline{g(0)} = 0$ implica $g(0) = 0$. Como $g \in D((T^\infty_{max})^*) \subset D(T_{max})$, entonces $g \in L^2([0, 1])$ con $g' \in L^2([0, 1])$ y $g(0) = g(1) = 0$, es decir, $g \in D(T_0)$ y además $(T^\infty_{max})^* g = T_{max} g = -ig' = T_0 g$. Por lo tanto $(T^\infty_{max})^* \subset T_0$. ❑

Corolario 3.13. $T_0^* = T_{max}$.

Demostración. Por la proposición 3.10 tenemos $T_0 = T_{max}^*$ lo cual implica $T_0^* = T_{max}^{**} = \overline{T_{max}} = T_{max}$, pues T_{max} es cerrado por ser el adjunto de un operador: $T_{max} = (T_0^\infty)^*$. ❑

Corolario 3.14. $\overline{T_{max}^\infty} = T_{max}$.

Demostración. De la proposición y el corolario anterior se tiene $\overline{T_{max}^\infty} = (T_{max}^\infty)^{**} = T_0^* = T_{max}$. ❑

Observación 3.15. En resumen hemos obtenido los siguientes resultados:

- $T_0 = (T_{max}^\infty)^* = T_{max}^*$ y $T_{max} = (T_0^\infty)^* = T_0^*$ son cerrados.
- T_0^∞ y T_{max}^∞ no son cerrados: $T_0 = \overline{T_0^\infty}$ y $T_{max} = \overline{T_{max}^\infty}$.
- T_0 es simétrico pero no autoadjunto: $T_0 \subset T_{max} = T_0^*$ y $T_0^* = T_{max} \neq T_0$.
- T_0^∞ es simétrico pero no esencialmente autoadjunto: $T_0^\infty \subset T_{max} = (T_0^\infty)^*$ y $(\overline{T_0^\infty})^* = T_0^* = T_{max} \neq T_0 = \overline{T_0^\infty}$.
- T_{max} no es simétrico y por lo tanto no es autoadjunto: la función $f(x) = x$ cumple $f \in D(T_{max})$ y $f \notin D(T_0) = D(T_{max}^*)$.
- T_{max}^∞ no es simétrico y no es esencialmete autoadjunto: $(\overline{T_{max}^\infty})^* = T_{max}^* = T_0 \neq T_{max} = \overline{T_{max}^\infty}$.

Por lo tanto ninguno de los operadores T_0, T_0^∞, T_{max}^∞ y T_{max} es autoadjunto.

2. Extensiones autoadjuntos del operador $T = -i\frac{d}{dx}$

Como vimos en la última observación de la sección anterior ninguno de los operadores considerados es autoadjunto. Entonces buscamos extenciones autoadjuntos de estos operadores ya que la física considera a los operadores autoadjuntos como observables. Además, a los operadores autoadjuntos se puede aplicar la teoría espectral.

Lema 3.16. *Si un operador densamente definido tiene una extensión autoadjunto, entonces es simétrico.*

Demostración. Sea $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ densamente definido y $B : D(B) \subset H \longrightarrow H$ autoadjunto ($B = B^*$) tal que $A \subset B$, entonces $A \subset B = B^* \subset A^*$. ❑

Observación 3.17. T_{max}, T_{max}^∞ no tienen extensiones autoadjuntos.

Lema 3.18. *Todas las extensiones autoadjuntas de T_0^∞ son extensiones autoadjuntas de $T_0 = \overline{T_0^\infty}$.*

Demostración. Si B es una extensión autoadjunto de T_0^∞, es decir, $T_0^\infty \subset B$, entonces $B = B^* \subset (T_0^\infty)^*$ implica $\overline{T_0^\infty} = (T_0^\infty)^{**} \subset B^* = B$. ❑

Lema 3.19. *Sea $A \subset A^*$ un operador simétrico y $B = B^*$ una extensión autoadjunto de A, es decir, $A \subset B$. Entonces $B \subset A^*$.*

Demostración. $A \subset B$ implica $B = B^* \subset A^*$. ❑

Observación 3.20. Para toda extensión autoadjunto B de T_0 se tiene que $B \subset T_0^* = T_{max}$. En particular $D(B) \subset \{f \in AC([0,1]) : f' \in L^2([0,1])\}$ y $Bf = -if'$ para todo $f \in D(B)$.

Lema 3.21. *Sea $B \subset T_{max}$ una extensión autoadjunta de $T_0 \subset T_{max}$, es decir, $B = B^*$ y $T_0 \subset B \subset T_{max}$. Entonces $B \neq T_0$ y $B \neq T_{max}$.*

Demostración. $T_0^* = T_{max} \neq T_0$ y $B = B^*$ implican $B \neq T_0$. Análogamente $T_{max}^* = T_0 \neq T_{max}$ implica $B \neq T_{max}$. ❑

Proposición 3.22. *Con las funciones $1, x \in L^2([0,1])$, tenemos*

$$D(T_{max}) = D(T_0) \dotplus \mathbb{C} \cdot 1 \dotplus \mathbb{C} \cdot x,$$

$$dim\ (D(T_{max})/D(T_0)) = 2.$$

Demostración. Notemos que las funciones $1, x$ no pertecen a $D(T_0)$ y son linealmente independientes; observemos que estas son linealmente dependientes si y sólo si $|\langle 1, x\rangle| = \|1\|\,\|x\|$, pero

$$\|1\|\,\|x\| = \left(\int_0^1 1 d\lambda(x)\right)^{1/2}\left(\int_0^1 x^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} \neq \frac{1}{2} = \int_0^1 1 \cdot x d\lambda(x) = |\langle 1, x\rangle|.$$

Por lo tanto $\dim(\mathbb{C}\cdot 1 + \mathbb{C}\cdot x) = 2$ con base $\{1, x\}$. Ahora supongamos que $f = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot x \in D(T_0)$, entonces $0 = f(0) = \alpha$ y $0 = f(1) = \beta$ y por lo tanto $D(T_0) \cap (\mathbb{C} \cdot 1 + \mathbb{C} \cdot x) = 0$. Como $1' = 0 \in L^2([0,1])$ y $x' = 1 \in L^2([0,1])$, entonces $D(T_0) + \mathbb{C} \cdot 1 + \mathbb{C} \cdot x \subset D(T_{max})$. Para la otra contención consideremos $f \in D(T_{max})$ con $f(0) = a$ y $f(1) = b$. Definimos $h(x) = a \cdot 1 + (b-a)x$ y $g = f - h$. Entonces $g \in D(T_{max})$, $g(0) = 0$ y $g(1) = 0$, lo cual implica $g \in D(T_0)$. Ahora como $f = g + h = g + a \cdot 1 + (b-a)x \in D(T_0) \dotplus \mathbb{C}\cdot 1 \dotplus \mathbb{C}\cdot x$, entonces $D(T_{max}) = D(T_0) \dotplus \mathbb{C}\cdot 1 \dotplus \mathbb{C}\cdot x$. ❑

Corolario 3.23. *Si $B = B^*$ es una extensión autoadjunto de T_0, entonces existen α_B, $\beta_B \in \mathbb{C}$ (no ambos iguales a cero) tal que*

$$D(B) = D(T_0) \dotplus \mathbb{C}(\alpha_B \cdot 1 + \beta_B \cdot x).$$

Demostración. Ya que $T_0 \subsetneq B \subsetneq T_{max}$ se tiene que $D(B) \subsetneq D(T_{max})$, entonces existe a lo máximo un vector $\alpha_B \cdot 1 + \beta_B \cdot x \in D(T_{max})$ tal que $D(B) = D(T_0) \dotplus \mathbb{C}(\alpha_B \cdot 1 + \beta_B \cdot x)$. Por otro lado $\alpha_B = \beta_B = 0$ es imposible pues $D(T_0) \neq D(B)$. ❑

El objetivo ahora es caracterizar los dominios de las extensiones autoadjuntos de T_0, es decir, de que tipo de funciones consiste el dominio $D(B)$ de una extensión autoadjunta B de T_0.

Proposición 3.24. *(Condiciones de frontera) B es una extensión de T_0 con dominio $D(B) = D(T_0) \dotplus \mathbb{C}f_B$, si y sólo si existe $\theta \in [0,1)$ tal que $f_B(1) = e^{2\pi i\theta} f_B(0)$.*

Demostración. Sea B una extensión autoadjunto de T_0, entonces del corolario anterior tenemos que $D(B) = D(T_0) + \mathbb{C} \cdot f_B$ tal que $f_B = \alpha_B \cdot 1 + \beta_B \cdot x \neq 0$. Usando $T_{max}^* = T_0$ y $T_0^* = T_{max}$, para $g_1 + c_1 f_B, g_2 + c_2 f_B \in D(B)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \langle B(g_1 + c_1 f_B), g_2 + c_2 f_B\rangle - \langle g_1 + c_1 f_B, B(g_2 + c_2 f_B)\rangle \\
&= \langle T_{max}(g_1 + c_1 f_B), g_2 + c_2 f_B\rangle - \langle g_1 + c_1 f_B, T_{max}(g_2 + c_2 f_B)\rangle \\
&= \langle T_0 g_1, g_2 + c_2 f_B\rangle + \overline{c_1}\langle T_{max} f_B, g_2\rangle + \overline{c_1} c_2 \langle T_{max} f_B, f_B\rangle \\
&- \langle g_1, T_{max}(g_2 + c_2 f_B) - \overline{c_1}\langle f_B, T_0 g_2\rangle - \overline{c_1} c_2 \langle f_B, T_{max} f_B\rangle \\
&= \langle g_1, T_{max}(g_2 + c_2 f_B)\rangle + \overline{c_1}\langle f_B, T_0 g_2\rangle + \overline{c_1} c_2 \langle T_{max} f_B, f_B\rangle \\
&- \langle g_1, T_{max}(g_2 + c_2 f_B)\rangle - \overline{c_1}\langle f_B, T_0 g_2\rangle - \overline{c_1} c_2 \langle f_B, T_{max} f_B\rangle \\
&= i\overline{c_1} c_2 (\langle f_B', f_B\rangle + \langle f_B, f_B'\rangle) \\
&= i\overline{c_1} c_2 \left(\int_0^1 \overline{f_B'} f_B d\lambda + \int_0^1 \overline{f_B} f_B' d\lambda \right) \\
&= i\overline{c_1} c_2 \left(\int_0^1 \overline{f_B'} f_B d\lambda - \int_0^1 \overline{f_B'} f_B d\lambda + [\overline{f_B(1)} f_B(1) - \overline{f_B(0)} f_B(0)] \right) \\
&= i\overline{c_1} c_2 (|f_B(1)|^2 - |f_B(0)|^2).
\end{aligned}$$

Hemos obtenido que $i\overline{c_1} c_2(|f_B(1)|^2 - |f_B(0)|^2) = 0$ para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ y esto pasa si y sólo si $|f_B(1)| = |f_B(0)|$, es decir, $f_B(1) = e^{2\pi i\theta} f_B(0)$ para algún $\theta \in [0,1)$. ❑

Observación 3.25. Notemos que $T_0 \neq B_0$ cuando $\theta = 0$, es decir,

$$D(B_0) = \{f \in H^1(0,1) : f(1) = f(0)\} \neq D(T_0).$$

Teorema 3.26. *Todas las extensiones autoadjuntos de T_0 están dadas por $D(B_\theta) = D(T_0) \dotplus \mathbb{C} \cdot h_\theta$, donde $h_\theta = 1 + (e^{2\pi i\theta} - 1)x \in \mathbb{C} \cdot 1 + \mathbb{C} \cdot x$ es tal que $h_\theta(1) = e^{2\pi i\theta} h_\theta(0) \neq 0$, con $\theta \in [0,1)$.*

Demostración. De lo anterior tenemos que si B es una extensión autoadjunto de T_0, entonces $D(B) = D(T_0) + \mathbb{C} \cdot f_B$ con $f_B = \alpha_B \cdot 1 + \beta_B \cdot x$ y $f_B(1) = e^{2\pi i\theta} f_B(0)$. Pero $f_B(1) = \alpha_B + \beta_B = e^{2\pi i\theta}\alpha_B = e^{2\pi i\theta} f_B(0)$ implica $\beta_B = \alpha_B(e^{2\pi i\theta} - 1)$, entonces $f_B = \alpha_B(1 + (e^{2\pi i\theta} - 1)x)$. Notemos que $\alpha_B \neq 0$, pues si $\alpha_B = 0$ entonces β_B=0, lo cual contradice el corolario 3.23. Por lo tanto $D(B_\theta) = D(T_0) + \mathbb{C} \cdot \alpha_B(1 + (e^{2\pi i\theta} - 1)x) = D(T_0) + \mathbb{C} \cdot h_\theta$, además $h_\theta(1) = e^{2\pi i\theta} h(0) = e^{2\pi i\theta} \neq 0$. ❑

Proposición 3.27. *Para el operador autoadjunto $B_\theta = B_\theta^*$ con $\theta \in [0, 1)$ y con dominio $D(B_\theta) = D(T_0) + \mathbb{C}(1 + (e^{2\pi i\theta} - 1)x)$ tenemos $D(B_\theta) = \{f \in D(T_{max}) : f(1) = e^{2\pi i\theta} f(0)\}$.*

Demostración. Sea $E_\theta = \{f \in D(T_{max}) : f(1) = e^{2\pi i\theta} f(0)\}$, entonces la contención $D(B_\theta) \subset E_\theta$ es obvia. Consideremos $h \in E_\theta$ y sea $g(x) = h(x) - h(0)(1 + (e^{2\pi i\theta} - 1)x)$, entonces $g \in D(T_{max})$ y $g(0) = h(0) - h(0) = 0$, $g(1) = h(1) - h(0)e^{2\pi i\theta} = h(0)e^{2\pi i\theta} - h(0)e^{2\pi i\theta} = 0$, lo cual implica que $g \in D(T_0)$. Entonces $h = g + h(0)(1 + (e^{2\pi i\theta} - 1)x) \in D(B_\theta)$ y por lo tanto $E_\theta \subset D(B_\theta)$. ❑

3. El espectro puntual del operador B_θ

Ya que se tienen identificados todos las extensiones autoadjuntos de T_0, ahora surge el problema de como decidir si B_{θ_1} y B_{θ_2} son esencialmente diferentes o son equivalentes en el sentido de que uno se obtenga del otro por un cambio de base (el cual es realizado por un operador unitario).

Definición 3.28. Sea $T : D(T) \subset H \to H$ un operador. El conjunto $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : N(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$ es llamado el punto espectro o el espectro puntual de T. A un elemento $\lambda \in \sigma_p(T)$ llamamos un eigenvalor de T y a la dimensión de $N(T - \lambda I)$ la multiplicidad de λ.

Definición 3.29 (Equivalencia unitaria). Sean H, K espacios de Hilbert. Decimos que dos operadores $T : D(T) \subset H \to H$, $S : D(S) \subset K \to K$ son unitariamente equivalentes si existe un operador unitario $U : H \to K$ tal que $UTU^* = S$. En particular tenemos $D(T) = U^*(D(S))$ y $D(S) = U(D(T))$.

La siguiente proposición sera muy útil para poder hacer la distinción de las extensiones autoadjuntos de T_0.

Proposición 3.30. *Supongamos que el operador $T : D(T) \subset H \to H$ es tal que $D(T)$ contiene una base ortonormal de eigenvectores de T, es decir, existe $\{e_i : i \in \Lambda\}$ base ortonormal de H tal que $Te_i = \lambda_i e_i$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Si $S : D(S) \subset K \to K$ es unitariamente equivalente a T, entonces $D(S)$ contiene una base ortonormal $\{f_i : i \in \Lambda\}$ de K que consiste de eigenvectores de S. Además S tiene los mismos eigenvalores de T con la misma multiplicidad.*

Demostración. Supongamos que U es tal que $T = U^*SU$ y consideremos $f_i = Ue_i$, entonces $Sf_i = SUe_i = UTe_i = \lambda_i Ue_i = \lambda_i f_i$. Ya que U es unitario $\{f_i : i \in \Lambda\}$ es una base ortonormal de K. Para cada valor propio λ de T sea $V_\lambda = \{v \in D(T) : Tv = \lambda v\}$ el correspondiente espacio de vectores propios y consideremos $W_\lambda = UV_\lambda \subset D(S)$. Mostremos que W_λ es el espacio de vectores propios de S correspondientes al valor propio λ y $\dim(W_\lambda) = \dim(V_\lambda)$. Para cada $w \in W_\lambda$ se tiene $U^*w \in V_\lambda$ y $Sw = UTU^*w = \lambda UU^*w = \lambda w$, lo cual implica que todo $w \in W_\lambda \setminus \{0\}$ es un vector propio de S con valor propio λ. Supongamos que existe $v \in D(S) \setminus W_\lambda$ tal que $Sv = \lambda v$, $v \neq 0$, entonces $U^*v \notin U^*W_\lambda = V_\lambda$. Pero $TU^*v = U^*UTU^*v = U^*Sv = \lambda U^*v$, entonces $0 \neq U^*v \notin V_\lambda$ es un vector propio de T con valor propio λ, lo cual está en contradicción con la definición de V_λ. De esto concluimos que $W_\lambda = \{w \in D(S) : Sw = \lambda w\}$. Ahora como $W_\lambda = UV_\lambda$ y U es unitario, entonces $\dim(W_\lambda) = \dim(V_\lambda)$. Por lo tanto el valor propio λ tiene la misma multiplicidad para S y T. ❑

Teorema 3.31. *Sea $\theta \in [0,1)$ y $D(B_\theta) = \{f \in L^2([0,1]) : f' \in L^2([0,1]), f(1) = e^{2\pi i\theta} f(0)\}$ con $B_\theta f = -if'$. Entonces existe una base ortonormal de $L^2([0,1])$ de eigenvectores*

$$\{e_n^\theta : n \in \mathbb{Z}\} \subset D(B_\theta), \quad B_\theta(e_n^\theta) = 2\pi(n+\theta)e_n^\theta.$$

En particular los eigenvalores de B_θ son $\{2\pi(n+\theta) : n \in \mathbb{Z}\}$ con cada uno de multiplicidad 1.

Demostración. Consideremos primero el caso $\theta = 0$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ sea $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$, entonces $\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{mn}$. Por el teorema 1.13 (teorema de Stone-Weierstrass) se tiene

$$\overline{\text{gen}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}} = \{f \in C([0,1]) : f(0) = f(1)\} \quad (\text{con la norma } \|\cdot\|_\infty)$$

por que $\overline{\text{gen}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}}$ es un álgebra cerrada bajo conjugación compleja que separa puntos de $\mathbb{S}^1 \approx [0,1]/\sim$, donde $0 \sim 1$ y $x \sim x$ para todo $x \in [0,1]$, y $1 \in A$. Entonces $\text{gen}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $(C([0,1]/\sim, \|\cdot\|_\infty))$. Pero $C_c^\infty(0,1) \subset C([0,1]/\sim)$ y $C_c^\infty(0,1)$ es denso en $L^2([0,1])$, entonces $C([0,1]/\sim)$ es un subconjunto denso de $L^2([0,1])$. Ahora como $\text{gen}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $C([0,1]/\sim, \|\cdot\|_\infty)$ y $\|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_\infty$, entonces $\text{gen}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un subconjunto denso de $L^2([0,1])$. Por lo tanto $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2([0,1])$. Por otro lado notemos que $e_n \in C^\infty([0,1]) \subset D(T_{max})$ y $e_n(1) = e_n(0)$ lo cual implica $e_n \in D(B_0)$ y además $B_0 e_n(x) = -i\frac{d}{dx}(e^{2\pi i n x}) = 2\pi n e_n(x)$. Se sigue que $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset D(B_0)$ es una base ortonormal de $L^2([0,1])$ que consiste de eigenvectores de B_0 con eigenvalores $\lambda_n = 2\pi n$. Además notemos que $\lambda_n \neq \lambda_m$ si $n \neq m$ y por lo tanto cada λ_n tiene multiplicidad 1.

Ahora supongamos que $\theta \in (0,1)$ y sea $V_\theta : L^2([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$ el operador unitario dado por $(V_\theta f)(x) = e^{2\pi i\theta x} f(x)$, entonces $V_\theta^{-1} = V_{-\theta} = V_\theta^*$. Como $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2([0,1])$, entonces $\{V_\theta e_n : n \in \mathbb{Z}\} = \{e^{2\pi i(n+\theta)x} : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2([0,1])$.

Si $e_n^\theta(x) = V_\theta e_n(x) = e^{2\pi i(n+\theta)x}$, entonces $e_n^\theta(1) = e^{2\pi i(n+\theta)} = e^{2\pi i\theta}e_n^\theta(0)$ y se sigue que $\{e_n^\theta : n \in \mathbb{Z}\} \subset D(B_\theta)$ y $B_\theta e_n^\theta(x) = -i\frac{d}{dx}(e^{2\pi i(n+\theta)x}) = 2\pi(n+\theta)e_n^\theta(x)$. Por lo tanto se concluye que $\{e_n^\theta : n \in \mathbb{Z}\} \subset D(B_\theta)$ es una base ortonormal de $L^2([0,1])$ que consiste de eigenvectores con eigenvalores $\lambda_n^\theta = 2\pi(n+\theta)$ cada uno con multiplicidad 1. ❏

Corolario 3.32. *Se tiene la siguiente caracterización de $D(B_\theta)$:*

$$\begin{aligned} D(B_\theta) &= \{f \in L^2([0,1]) : f' \in L^2([0,1]), f(1) = e^{2\pi i\theta}f(0)\} \\ &= \left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n^\theta \in L^2([0,1]) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 n^2 < \infty\right\} \end{aligned}$$

Además se tiene la siguiente caracterización de $D(T_{max})$

$$\begin{aligned} D(T_{max}) &= \{f \in L^2([0,1]) : f' \in L^2([0,1])\} \\ &= \left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n^\theta \in L^2([0,1]) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 n^2 < \infty\right\} \dot{+} \mathbb{C}\cdot x \\ &= \left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n^\theta \in L^2([0,1]) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 n^2 < \infty\right\} \dot{+} \mathbb{C}\cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e_n^\theta}{n}. \end{aligned}$$

Demostración. La primera igualdad se sigue de la proposición 3.27. Del teorema anterior y de la proposición 2.44 se tiene que

$$D(B_\theta) = \left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n^\theta \in L^2([0,1]) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |2\pi(n+\theta)|^2|\alpha_n|^2 < \infty\right\}.$$

Pero $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |2\pi(n+\theta)|^2|\alpha_n|^2 < \infty$ si y sólo si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 n^2 < \infty$, y entonces la primera afirmación se cumple. Por proposición 3.22 y corolario 3.23 tenemos $\dim(D(T_{max}/D(B_\theta)) = 1$. Como $x \notin D(B_\theta)$, obtenemos $D(T_{max}) = D(B_\theta) \dot{+} \mathbb{C}\cdot x$. Ahora la afirmación sobre $D(T_{max})$ se sigue de lo anterior y de la definición de T_{max}. Para $\theta \neq 0$ la expresión de la función x en terminos de la base ortonormal $\{e_n^\theta : n \in \mathbb{Z}\}$ es

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle e_n^\theta, x\rangle e_n^\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\int_0^1 te^{-2\pi i(n+\theta)t} d\lambda(t)\right] e_n^\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{e^{-2\pi i(n+\theta)}}{2\pi i(n+\theta)} + \int_0^1 \frac{e^{-2\pi i(n+\theta)t}}{2\pi i(n+\theta)} d\lambda(t)\right] e_n^\theta \\ &= -\frac{e^{-2\pi i\theta}}{2\pi i} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n+\theta}\, e_n^\theta + \frac{e^{-2\pi i\theta}-1}{4\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\theta)^2}\, e_n^\theta. \end{aligned}$$

Analogamente para $\theta = 0$,

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e_n^0}{n}.$$

Como

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\theta)^2}\, e_n^\theta \in D(B_\theta), \quad e_0^\theta \in D(B_\theta)$$

y

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{n+\theta} - \frac{1}{n}\right) e_n^\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{-\theta}{n(n+\theta)}\, e_n^\theta \in D(B_\theta)$$

por lo anterior, se tiene

$$D(T_{max}) = D(B_\theta) \dotplus \mathbb{C}\cdot x = D(B_\theta) \dotplus \mathbb{C}\cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e_n^\theta}{n}.$$

❑

Corolario 3.33. *Si $\theta_1 \neq \theta_2$, entonces B_{θ_1} y B_{θ_2} no son unitariamente equivalentes.*

Demostración. Sin perdida de generalidad supongamos que $1 > \theta_2 > \theta_1 > 0$ y $2\pi(n+\theta_2) = 2\pi(m+\theta_1)$, entonces $\theta_2 - \theta_1 = m - n \in \mathbb{Z}$, lo cual es una contradicción a $1 > \theta_2 - \theta_1 > 0$. Entonces los conjuntos $\{2\pi(n+\theta_2)\}$ y $\{2\pi(m+\theta_1)\}$ son ajenos y por lo tanto B_{θ_1} y B_{θ_2} no tienen eigenvalores comunes. Se sigue por proposición 3.30 que B_{θ_1} y B_{θ_2} no pueden ser unitariamente equivalentes.

❑

Hemos obtenido que para cada $\theta \in [0, 1)$ se tienen diferentes (bajo equivalencia unitaria) extensiones autoadjuntos de T_0 con diferentes espectros (ver proposición 2.45).

4. Relación canonica del conmutador

El objetivo ahora es encontrar dos operadores autoadjuntos Q y P tales que $[P, Q] = -i\,\mathrm{Id}\restriction_D$ donde $[P, Q] = PQ - QP$ y $D := D(PQ - QP)$. Consideremos el operador $(Qf)(x) = xf(x)$ sobre $L^2([0, 1])$, entonces $Q \in B(L^2([0, 1]))$ y $Q^* = Q$. Además $P = B_\theta : D(B_\theta) \subset L^2([0, 1]) \longrightarrow L^2([0, 1])$ satisface $B_\theta^* = B_\theta$.

Lema 3.34. *Si $P : D(P) \subset H \longrightarrow H$ y $Q : D(Q) \subset H \longrightarrow H$ son dos operadores autoadjuntos tales que $[P, Q] = -i\,\mathrm{Id}\restriction_{\mathrm{D([P,Q])}}$. Entonces uno de los operadores P o Q debe ser no acotado.*

Demostración. Supongamos que ambos operadores son acotados, entonces por el teorema del gráfico cerrado (teorema 2.6) se tiene que $D(P) = D(Q) = H$. Por inducción se tiene $[P, Q^n] = -inQ^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$[P, Q^n] = (PQ - QP)Q^{n-1} + Q(PQ^{n-1} - Q^{n-1}P) = -iQ^{n-1} - i(n-1)Q^{n-1} = -inQ^{n-1}, \tag{4.1}$$

entonces

$$n\|Q^{n-1}\| = \|[P, Q^n]\| \leq 2\|P\|\,\|Q^n\| \leq 2\|P\|\,\|Q\|\,\|Q^{n-1}\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Además, $Q^{n-1} \neq 0$ implica $Q^n \neq 0$ por (4.1), entonces $Q^n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces (4.2) implica $2\|P\|\,\|Q\| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción. ❑

Observación 3.35. Si Q es acotado, entonces P es no acotado y entonces $D(P) \neq H$ (por el teorema del gráfico cerrado). Por lo tanto $D = D(PQ - QP) \subset D(P) \cap D(Q) \subset D(P) \neq H$. Por lo tanto nunca se puede tener $[P, Q] = -i\,\mathrm{Id}_H$.

La siguiente proposición nos da una restricción: los operadores P y Q no contienen eigenvectores en el dominio $D = D(PQ - QP)$.

Proposición 3.36. *No existe $e_\lambda \in D \setminus \{0\}$ tal que $Pe_\lambda = \lambda e_\lambda$ (o $Qe_\lambda = \lambda e_\lambda$).*

Demostración. Si tal e_λ existe, entonces

$$\begin{aligned} 0 \neq -i\langle e_\lambda, e_\lambda\rangle &= \langle e_\lambda, [P, Q]e_\lambda\rangle = \langle e_\lambda, PQe_\lambda\rangle - \langle e_\lambda, QPe_\lambda\rangle \\ &= \langle Pe_\lambda, Qe_\lambda\rangle - \langle e_\lambda, QPe_\lambda\rangle = \lambda\langle e_\lambda, Qe_\lambda\rangle - \lambda\langle e_\lambda, Qe_\lambda\rangle = 0, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. ❑

Una solución a este problema es la pareja $P = B_\theta$ y Q el operador de multiplicación con x sobre $H = L^2([0, 1])$. En este caso $Q \in B(L^2([0, 1]))$, $D(Q) = H$ y $D(PQ - QP) = D(PQ) \cap D(QP) = D(PQ) \cap D(P) = \{f \in D(P) : Qf \in D(P)\}$. Recordemos que para $P = B_\theta$,

$$D(B_\theta) = \{f \in L^2([0, 1]) : f' \in L^2([0, 1]), f(1) = e^{2\pi i\theta} f(0)\},$$

entonces para todo $f \in D(P)$ tenemos $(Qf(x))' = (xf(x))' = x'f(x) + xf'(x) = f(x) + ix(-if'(x)) = f(x) + iQT_{max}f(x)$, lo cual implica que $(Qf)' \in L^2([0, 1])$. Entonces $Qf \in T_{max}$ y por lo tanto $Qf \in D(B_\theta)$ si y sólo si $Qf(1) = e^{2\pi i\theta}Qf(0)$. Ahora $f(1) = Qf(1) = e^{2\pi i\theta}Qf(0) = 0$ lo que a su vez implica que $f(0) = 0$, es decir, $f \in D(T_0)$. Hemos obtenido que $D(B_\theta Q - QB_\theta) = D(T_0)$ para cada $\theta \in [0, 1)$ y además para cada $f \in D(T_0)$

$$\begin{aligned} ((B_\theta Q - QB_\theta)f)(x) &= (T_{max}(Qf) - Q(T_{max}f))(x) = -i(xf(x))' - x(-if'(x)) \\ &= -i(x'f(x) + xf'(x)) + ixf'(x) = -if(x) - ixf'(x) + ixf'(x) = -if(x) \\ &= (-i\,\mathrm{Id}\restriction_{D(T_0)} f)(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto $[B_\theta, Q] = -i\,\mathrm{Id}\restriction_{D([B_\theta, Q])}$.

Observación 3.37. Notemos que $Q(D(T_0)) \subset D(T_0)$, lo cual implica $D(T_0Q - QT_0) = D(T_0)$ y de forma analoga a las calculaciones anteriores se tiene

$$[T_0, Q] = -i\,\mathrm{Id}\restriction_{D(T_0)} .$$

Pero T_0 no es autoadjunto ($T_0^* = T_{max} \neq T_0$) aunque T_0 es simétrico: $T_0 \subset T_0^*$.

De la sección anterior tenemos que B_θ tiene una base ortonormal de $L^2([0, 1])$ que consiste de eigenvectores, de lo cual surge la pregunta si contradice la proposición 3.36. La respuesta es no por que ningún eigenvector de B_θ es un el elemento de $D([B_\theta, Q])$.

Proposición 3.38. *Si $Q = Q^* \in B(H)$ y $P = P^*$ tiene al menos un eigenvector, entonces $D([P, Q])$ no es un core para P, donde $[P, Q] = -i\,\mathrm{Id}\restriction_{\mathrm{D[P,Q]}}$.*

Demostración. Supongamos que e_λ es un eigenvector de P con $\|e_\lambda\| = 1$ y que $D = D([P, Q])$ es un core para P. Ya que P es cerrado se tiene por teorema 2.5

$$\overline{D}^{\|\cdot\|_P} = D(P),$$

donde $\|\cdot\|_P = [\|\cdot\|^2 + \|P(\cdot)\|^2]^{\frac{1}{2}}$ es la norma del gráfico. Entonces existe una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ en D tal que $\|e_\lambda - f_n\|\|_P \to 0$, entonces $\mathrm{lím}_n \|e_\lambda - f_n\| = 0$ y $\mathrm{lím}_n \|P(e_\lambda - f_n)\| = \mathrm{lím}_n \|\lambda e_\lambda - Pf_n\| = 0$. Como Q es continua tenemos $\mathrm{lím}_n Qf_n = Qe_\lambda$ y además por lo anterior $\mathrm{lím}_n Pf_n = \lambda e_\lambda$. Entonces

$$\begin{aligned}
1 &= \langle e_\lambda, e_\lambda\rangle = \lim_n \langle f_n, f_n\rangle = i \lim_n \langle f_n, -if_n\rangle = i \lim_n \langle f_n, [P, Q]f_n\rangle = i \lim_n [\langle f_n, PQf_n\rangle - \langle f_n, QPf_n\rangle] \\
&= i \lim_n [\langle Pf_n, Qf_n\rangle - \langle Qf_n, Pf_n\rangle] = i[\langle \lambda e_\lambda, Qe_\lambda\rangle - \langle Qe_\lambda, \lambda e_\lambda\rangle] \\
&= i\lambda[\langle e_\lambda, Qe_\lambda\rangle - \langle e_\lambda, Qe_\lambda\rangle] = 0,
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. ❏

Observación 3.39. De lo anterior concluimos que es posible que $[P, Q] = -i\,\mathrm{Id}\restriction_{D([P,Q])}$, pero $D([P, Q])$ no es un core para el operador $P = P^*$, es decir, $P\restriction_{D([P,Q])}$ es simétrico pero no esencialmente autoadjunto. En particular, no se puede reconstruir P por tomar la cerradura de la restricción de P al dominio $D([P, Q])$, es decir, $P \neq \overline{P\restriction_{D([P,Q])}}$.

Observación 3.40. Para cada θ el operador B_θ es una extensión autoadjunto del operador simétrico $T_0 = B_\theta\restriction_{D(B_{\theta_0}Q - QB_{\theta_0})}$ pero todas estas extensiones tienen diferente conjunto de eigenvalores por el teorema 3.31, es decir, diferente punto espectro.

Capítulo 4

El operador de momento $-i\frac{d}{dx}$ sobre el intervalo $[a,+\infty)$ y sobre $\mathbb{R}$

En este capítulo se hará un análisis del operador de momento $-i\frac{d}{dx}$ sobre la semieje $[a,+\infty)$ y sobre $\mathbb{R}$ en el cual se obtiene que este operador posee propiedades muy diferentes que en el caso de el intervalo acotado. Además se demostrará la existencia de una pareja de Schrödinger de operadores P, Q los cuales deben satisfacer la ecuación $[P,Q] = -i$ sobre un dominio D en el cual se puedan recuperar los operadores P y Q, es decir, D es un core para ambos operadores.

En la sección que está a continuación se define el operador T_c^∞ el cual es útil como operador auxiliar para estudiar al operador de diferenciación $-i\frac{d}{dx}$ sobre el intervalo $[a,+\infty)$ y sobre $\mathbb{R}$.

1. EL operador diferenciación T_c^∞ sobre $C_c^\infty(0,1)$

Recalquemos que $C_c^\infty(a,b)$ denota al conjunto de las funciones f infinitamente diferenciables sobre (a,b) con soporte $\operatorname{supp} f \subset (a,b)$ compacto.

Definición 4.1. Definimos el operador $T_c^\infty : C_c^\infty(0,1) \longrightarrow L^2([0,1])$ por $T_c^\infty f = -i\frac{df}{dx}$.

Observación 4.2. De ahora en adelante podemos considerar a $C_c^\infty(a,b)$ como subespacio de $C_0^\infty([a,b])$ por extendiendo las funciones de $C_c^\infty(a,b)$ a la frontera, es decir, asignandoles el valor cero en la frontera $\{a,b\}$. Entonces T_c^∞ es la restricción de T_0^∞ a $C_c^\infty(0,1) \subset C_0^\infty([0,1])$ y que es densamente definido pues $C_c^\infty(0,1)$ es denso en $L^2([0,1])$. Además $T_c^\infty \subset T_0^\infty \subset T_0$ lo cúal implica $T_{max} = (T_0^\infty)^* = T_0^* \subset (T_c^\infty)^*$. Entonces $T_c^\infty \subset T_0^* \subset (T_c^\infty)^*$ implica que T_c^∞ es simétrico. Por lo tanto T_c^∞ es cerrable y $\overline{T_c^\infty} \subset \overline{T_0^\infty} = \overline{T_0} = T_0$.

Lema 4.3. *Sea $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $(0,\frac{1}{4})$ tal que $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$. Entonces existe sucesión de funciones $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ con $\zeta_n \in C^\infty([0,1])$ tal que*

1. $0 \leq \zeta_n \leq 1$ *para todo* $n \geq 1$,
2. $\zeta_n(x) = 0$ *para* $x \in [0,\epsilon_n]$,
3. $\zeta_n(x) = 1$ *para* $x \in [1-\epsilon_n, 1]$,
4. $\zeta_n' \to 1$ *en* $L^2([0,1])$.

Demostración. Consideremos $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \le \phi \le 1$,

$$\operatorname{supp}\phi \subset (-1,1), \quad \int_{\mathbb{R}} \phi(x)d\lambda(x) = \int_{-1}^{1}\phi(x)d\lambda(x) = 1 \ \text{ y } \ \phi(0) \neq 0.$$

Para $\epsilon > 0$ definimos $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\phi(\frac{x}{\epsilon})$ y notemos que

$$\operatorname{supp}\phi_\epsilon \subset (-\epsilon,\epsilon), \quad \int_{\mathbb{R}} \phi_\epsilon(x)d\lambda(x) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon}\phi_\epsilon(x)d\lambda(x) = 1.$$

Ahora sea $\eta_{\epsilon_n} \in C(\mathbb{R})$ definido por

$$\eta_{\epsilon_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 2\epsilon_n, \\ \frac{1}{1-4\epsilon_n}(x-2\epsilon_n) & \text{si} \quad x \in [2\epsilon_n, 1-2\epsilon_n], \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 1-2\epsilon_n. \end{cases}$$

Definimos $\tilde{\zeta}_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \eta_{\epsilon_n}(t)\phi_{\epsilon_n}(x-t)d\lambda(t) = \phi_{\epsilon_n} \star \eta_{\epsilon_n}$ y sea $\zeta_n = \tilde{\zeta}_n\restriction_{[0,1]}$. Notemos que $\eta_{\epsilon_n} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y $\phi_{\epsilon_n} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ implica $\tilde{\zeta} \in C^\infty(\mathbb{R})$ (por teorema 1.12) y por lo tanto $\zeta_n \in C^\infty([0,1])$. Mostremos que ζ_n satisface las otras condiciones del lema. Para $0 \le x \le \epsilon_n$ tenemos $\operatorname{supp}(\eta_{\epsilon_n}) \cap [x-\epsilon_n, x+\epsilon_n] = \emptyset$, por lo tanto

$$\tilde{\zeta}_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \eta_{\epsilon_n}(t)\phi_{\epsilon_n}(x-t)d\lambda(t) = \int_{x-\epsilon_n}^{x+\epsilon_n} \eta_{\epsilon_n}(t)\phi_{\epsilon_n}(x-t)d\lambda(t) = 0.$$

Para $1-\epsilon_n \le x \le 1$ tenemos

$$\tilde{\zeta}_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \eta_{\epsilon_n}(t)\phi_{\epsilon_n}(x-t)d\lambda(t) = \int_{x-\epsilon_n}^{x+\epsilon_n} \eta_{\epsilon_n}(t)\phi_{\epsilon_n}(x-t)d\lambda(t) = \int_{x-\epsilon_n}^{x+\epsilon_n} \phi_{\epsilon_n}(x-t)d\lambda(t) = 1.$$

Además, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$0 \le \zeta_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \eta_{\epsilon_n}(t)\phi_{\epsilon_n}(x-t)d\lambda(t) \le \int_{\mathbb{R}} \phi_{\epsilon_n}(x-t)d\lambda(t) = 1. \tag{1.1}$$

Ahora por teorema 1.9 e integración por partes tenemos para cada $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\zeta_n'(x) &= \tilde{\zeta}_n{}'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\mathbb{R}} \eta_{\epsilon_n}(t)\,\phi_{\epsilon_n}(x-t)d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} \eta_{\epsilon_n}(t)\,\frac{d}{dx}\phi_{\epsilon_n}(x-t)d\lambda(t) \\
&= \int_{2\epsilon_n}^{1-2\epsilon_n} \eta_{\epsilon_n}(t)\left[-\frac{d}{dt}\phi_{\epsilon_n}(x-t)\right]d\lambda(t) + \int_{1-2\epsilon_n}^{\infty} 1\cdot\left[-\frac{d}{dt}\phi_{\epsilon_n}(x-t)\right]d\lambda(t) \\
&= \int_{2\epsilon_n}^{1-2\epsilon_n} \eta'_{\epsilon_n}(t)\,\phi_{\epsilon_n}(x-t)d\lambda(t) - [\eta_{\epsilon_n}(1-2\epsilon_n)\,\phi_{\epsilon_n}(x-(1-2\epsilon_n)) - \eta_{\epsilon_n}(2\epsilon_n)\,\phi_{\epsilon_n}(x-2\epsilon_n)] \\
&- [\lim_{t\to\infty}\phi_{\epsilon_n}(x-t) - \phi_{\epsilon_n}(x-(1-2\epsilon_n))] \\
&= \frac{1}{1-4\epsilon_n}\int_{2\epsilon_n}^{1-2\epsilon_n} \phi_{\epsilon_n}(x-t)d\lambda(t) - \phi_{\epsilon_n}(x-(1-2\epsilon_n)) - [0 - \phi_\epsilon(x-(1-2\epsilon_n))] \\
&= \frac{1}{1-4\epsilon_n}\int_{2\epsilon_n}^{1-2\epsilon_n} \phi_{\epsilon_n}(x-t)d\lambda(t).
\end{aligned}$$

Entonces para cada $x \in [0,1]$

$$|\zeta_n'(x)| = \frac{1}{1-4\epsilon_n}\int_{2\epsilon_n}^{1-2\epsilon_n} \phi_{\epsilon_n}(x-t)d\lambda(t) \leq \frac{1}{1-4\epsilon_n}\int_{\mathbb{R}} \phi_{\epsilon_n}(x-t)d\lambda(t) = \frac{1}{1-4\epsilon_n}.$$

Además se tiene

1. $\zeta_n'(x) = 0$ si $x \in [0,\epsilon_n]$ pues $\operatorname{supp} \phi_{\epsilon_n}(x-(\cdot)) \subset [x-\epsilon_n, x+\epsilon_n]$,
2. $\zeta_n'(x) = 0$ si $x \in [1-\epsilon_n, 1]$, pues $\operatorname{supp} \phi_{\epsilon_n}(x-(\cdot)) \subset [x-\epsilon_n, x+\epsilon_n]$,
3. $\zeta_n'(x) = \frac{1}{1-4\epsilon_n}$ si $x \in [3\epsilon_n, 1-3\epsilon_n]$ pues $\operatorname{supp} \phi_{\epsilon_n}(x-(\cdot)) \subset [x-\epsilon_n, x+\epsilon_n] \subset [2\epsilon_n, 1-2\epsilon_n]$ y

$$\zeta_n'(x) = \frac{1}{1-4\epsilon_n}\int_{2\epsilon_n}^{1-2\epsilon_n} \phi_{\epsilon_n}(x-t)d\lambda(t) = \frac{1}{1-4\epsilon_n}\int_{x-\epsilon_n}^{x+\epsilon_n} \phi_{\epsilon_n}(x-t)d\lambda(t) = \frac{1}{1-4\epsilon_n}.$$

Por último tenemos que existe n_0 tal que $|\zeta_n'(x)| \leq \frac{1}{1-4\epsilon_n} \leq 2$ para todo $n \geq n_0$ y para todo $x \in [0,1]$. Entonces para $n \geq n_0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|\zeta_n' - 1\|_2^2 &= \int_0^1 |\zeta_n' - 1|^2 d\lambda(x) \\
&= \int_0^{3\epsilon_n} |\zeta_n' - 1|^2 d\lambda(x) + \int_{1-3\epsilon_n}^1 |\zeta_n' - 1|^2 d\lambda(x) + \int_{3\epsilon_n}^{1-3\epsilon_n} \left|\frac{1}{1-4\epsilon_n} - 1\right|^2 d\lambda(x) \\
&\leq \int_0^{3\epsilon_n} (|\zeta_n'| + 1)^2 d\lambda(x) + \int_{1-3\epsilon_n}^1 (|\zeta_n'| + 1)^2 d\lambda(x) + \int_0^1 \left(\frac{4\epsilon_n}{1-4\epsilon_n}\right)^2 d\lambda(x) \\
&\leq 9(3\epsilon_n + 1 - (1-3\epsilon_n)) + 64\epsilon_n^2 \\
&\leq C\epsilon_n, \quad \text{para una constante } C > 0 \text{ adecuada.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\zeta_n' \to 1$ en $L^2([0,1])$. ❑

Proposición 4.4. $\overline{T_c^\infty} = T_0$.

Demostración. Sabemos que $T_c^\infty \subset T_0 = \overline{T_0}$. Para demostrar que $\overline{T_c^\infty} = T_0$ basta demostrar que $\overline{\Gamma(T_c^\infty)} = \Gamma(T_0)$ o equivalentemente

$$\overline{C_c^\infty(0,1)}^{\|\cdot\|_{T_0}} = D(T_0).$$

Sabemos que $C_c^\infty(0,1)$ es denso en $L^2([0,1])$. Sea $f \in D(T_0)$, entonces $f' \in L^2([0,1])$ y por lo tanto existe sucesión en $C_c^\infty(0,1)$ tal que $g_n \to f'$ en $\|\cdot\|_{L^2}$. Definimos $G_n(x) = \int_0^x g_n(t)d\lambda(t)$. Como $g_n \in C_c^\infty(0,1)$ existe $\delta_n > 0$ tal que $g_n(x) = 0$ en $[0,\delta_n)$, entonces $G_n(x) = 0$ en $[0,\delta_n)$. Además

$G_n \in C^\infty([0,1])$. Como $f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)d\lambda(t)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|f - G_n\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 \left| \int_0^x f'(t)d\lambda(t) - \int_0^x g_n(t)d\lambda(t) \right|^2 d\lambda(x) \leq \int_0^1 \left[\int_0^1 |f'(t) - g_n(t)| d\lambda(t) \right]^2 d\lambda(x) \\
&\leq \left[\int_0^1 |f'(t) - g_n(t)| d\lambda(t) \right]^2 \leq \|1\|_{L^2}^2 \|f' - g_n\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

la última desigualdad se obtiene por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|f - G_n\|_{T_0} = \lim_{n\to\infty} [\|f - G_n\|_{L^2}^2 + \| - if' - (-iG_n')\|_{L^2}^2]^{1/2} = \lim_{n\to\infty} [\|f - G_n\|_{L^2}^2 + \|f' - g_n\|_{L^2}^2] = 0.$$

Notemos que G_n no necesariamente cumple $\operatorname{supp}(G_n) \subset (0,1)$. Como $g_n \in C_c^\infty(0,1)$, existe $\epsilon_n > 0$ tal que $g_n(x) = 0$ en $(1-\epsilon_n, 1]$, entonces $G_n(x) = G_n(1)$ en $(1-\epsilon_n, 1]$. Ahora por el lema anterior existe sucesión $\zeta_n \in C^\infty([0,1])$ tal que $0 \leq \zeta_n \leq 1$, $\zeta_n(x) = 0$ en $[0, \epsilon_n]$, $\zeta_n(x) = 1$ en $[1-\epsilon_n, 1]$ y $\lim_{n\to\infty} \zeta_n' = 1$ en $L^2([0,1])$. Consideremos $F_n(x) := G_n(x) - \zeta_n(x)G_n(1)$, entonces

1. $F_n \in C^\infty([0,1])$,
2. $F_n(x) = G_n(x) - \zeta_n(x)G_n(1) = 0$ para todo $x \in [0, \gamma_n]$, $\gamma_n := \min\{\epsilon_n, \delta_n\}$,
3. $F_n(x) = G_n(1) - 1 \cdot G_n(1) = 0$ para todo $x \in [1-\epsilon_n, 1]$.

De donde concluimos que $F_n \in C_c^\infty(0,1)$. Ahora notemos que $g_n - F_n' = G_n(1)\zeta_n'$. Mostremos que $\lim_{n\to\infty} \|G_n(1)\zeta_n'\|_{L^2} = 0$. Para esto usamos $f(1) = f(0) = 0$ para $f \in D(T_0)$ y notemos que

$$\begin{aligned}
|G_n(1)| &= |G_n(1) - (f(1) - f(0))| = \left| \int_0^1 g_n(t)d\lambda(t) - \int_0^1 f'(t)d\lambda(t) \right| \leq \int_0^1 |g_n(t) - f'(t)|\, d\lambda(t) \\
&\leq \|1\|_{L^2} \|g_n - f'\|_{L^2}
\end{aligned}$$

implica $\lim_{n\to\infty} |G_n(1)| = 0$, lo que a su vez implica

$$\lim_{n\to\infty} \|G_n(1)\zeta_n'\|_{L^2} = \lim_{n\to\infty} |G_n(1)| \|\zeta_n'\|_{L^2} = 0,$$

pues $\lim_{n\to\infty} \|\zeta_n'\|_{L^2} = 1$. Analogamente como $\|\zeta_n\|_{L^2} \leq 1$ por (1.1) tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \|G_n(1)\zeta_n\|_{L^2} = \lim_{n\to\infty} |G_n(1)|\, \|\zeta_n\|_{L^2} = 0.$$

Finalmente tenemos $F_n \in C_c^\infty(0,1)$ y

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|f - F_n\|_{T_0} &= \lim_{n\to\infty} [\|f - F_n\|_{L^2}^2 + \|f' - F_n'\|_{L^2}^2]^{1/2} \\
&= \lim_{n\to\infty} [\|f - G_n + G_n(1)\zeta_n\|_{L^2}^2 + \|f' - G_n' + G_n(1)\zeta_n'\|_{L^2}^2]^{1/2} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} [(\|f - G_n\|_{L^2} + \|G_n(1)\zeta_n\|_{L^2})^2 + (\|f' - g_n\|_{L^2} + \|G_n(1)\zeta_n'\|_{L^2})^2]^{1/2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ya que $f \in D(T_0)$ es arbitrario se tiene que $\overline{C_c^\infty(0,1)}^{\|\cdot\|_{T_0}} = D(T_0)$ y por lo tanto $\overline{T_c^\infty} = T_0$ por teorema 2.5 (4). ❑

Corolario 4.5. $(T_c^\infty)^* = T_{max}$.

Demostración. De la proposición 2.22 y de la proposición anterior tenemos $(T_c^\infty)^* = (\overline{T_c^\infty})^* = T_0^* = T_{max}$. ❏

1.1. Consideraciones generales del operador diferenciación $-i\frac{d}{dx}$ sobre $L^2([a,b])$.

Lema 4.6. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Entonces $L^2([a,b]) \simeq L^2([0,1])$ donde*

$$U : L^2([a,b]) \to L^2([0,1]), \quad (Uf)(x) = \sqrt{b-a}\, f(a + x(b-a))$$

es una isométria cuyo inverso es

$$U^* : L^2([0,1]) \to L^2([a,b]), \quad (U^*f)(y) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} f\left(\frac{y-a}{b-a}\right).$$

Demostración. Calculación directa. ❏

Podemos definir operadores análogos a T_c^∞, T_0 y T_{max} sobre el espacio $L^2([a,b])$.

Definición 4.7. Definimos $\tilde{T}_c^\infty : C_c^\infty(a,b) \subset L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ por $(\tilde{T}_c^\infty f)(x) = -if'(x)$. Analogamente $D(\tilde{T}_0) = \{f \in L^2([a,b]) : f' \in L^2([a,b]), f(a) = f(b) = 0\} = H_0^1(a,b)$, $\tilde{T}_0 f = -if'$. También definimos $D(\tilde{T}_{max}) = \{f \in L^2([a,b]) : f' \in L^2([a,b])\} = H^1(a,b)$, $\tilde{T}_{max} f = -if'$.

Lema 4.8. *Sea $T : D(T) \subset H \to H$ un operador densamente definido y $V : H \to H$ unitario. Entonces VAV^* es densamente definido y*

$$(VAV^*)^* = VA^*V^*.$$

Demostración. Una demostración es utilizar la técnica del gráfico.

$$\begin{aligned} \Gamma(VTV^*) &= \{(f, VTV^*f) : f \in VD(T)\} = \{(Vg, VTg) : g \in D(T)\} \\ &= (V \oplus V)(\{(g, Tg) : g \in D(T)\}) = (V \oplus V)(\Gamma(T)). \end{aligned}$$

Recordemos que el operador unitario $U : H \oplus H \to H \oplus H$ definido por $U(x,y) = (-y,x)$, satisface $(V \oplus V)U(x,y) = (-Vy, Vx) = U(V \oplus V)(x,y)$, es decir, $U(V \oplus V) = (V \oplus V)U$. Entonces, por el teorema 2.17

$$\begin{aligned}
\Gamma((VTV^*)^*) &= \left(U\Gamma(VTV^*)\right)^{\perp} \\
&= \left(U(V\oplus V)(\Gamma(T))\right)^{\perp} \\
&= \left((V\oplus V)U(\Gamma(T))\right)^{\perp} \\
&= (V\oplus V)[(U(\Gamma(T)))^{\perp}] \\
&= (V\oplus V)(\Gamma(T^*)) \\
&= \Gamma(VT^*V^*).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(VTV^*)^* = VT^*V^*$. ❑

Teorema 4.9. *Para los operadores de la definición anterior tenemos*

1. $U\tilde{T}_{max}U^* = (b-a)^{-1}T_{max}$,
2. $U\tilde{T}_c^{\infty}U^* = (b-a)^{-1}T_c^{\infty}$,
3. $U\tilde{T}_0U^* = (b-a)^{-1}T_0$.

En particular, $\overline{\tilde{T}_c^{\infty}} = \tilde{T}_0 = \tilde{T}_{max}^*$ *y* $(\tilde{T}_c^{\infty})^* = (\overline{\tilde{T}_c^{\infty}})^* = \tilde{T}_0^* = \tilde{T}_{max}$.

Demostración. Supongamos $f \in D(T_{max})$, por la regla de la cadena para la derivada débil tenemos que para casi todo $x \in [a,b]$

$$(U^*f)'(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{b-a}}f\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]' = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{\sqrt{b-a}}f'\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right] = \frac{1}{b-a}U^*f'(x).$$

Sea $g \in D(\tilde{T}_{max})$, analogamente se tiene que para casi todo $y \in [0,1]$:

$$(Ug)'(y) = \sqrt{b-a}g'(a+(b-a)y)(a+(b-a)y)' = (b-a)(\sqrt{b-a}g'(a+(b-a)y)) = (b-a)Ug'(y).$$

Sea $f \in D(T_{max})$.

$$\begin{aligned}
&(U^*f)'(x) = (b-a)^{-1}U^*f'(x) \text{ para casi todo } x \implies (U^*f)' = (b-a)^{-1}U^*f' \in L^2([a,b]) \\
&\implies U^*f \in D(\tilde{T}_{max}) \implies f \in D(\tilde{T}_{max}U^*) = D(U\tilde{T}_{max}U^*).
\end{aligned}$$

Que $U^*f \in AC[a,b]$ puede verse directamente de la definición 1.1. Además

$$U\tilde{T}_{max}U^*f = -iU(U^*f)' = -i(b-a)^{-1}UU^*f' = (b-a)^{-1}T_{max}f \implies (b-a)^{-1}T_{max} \subset U\tilde{T}_{max}U^*.$$

Sea ahora $f \in D(U\tilde{T}_{max}U^*) = D(\tilde{T}_{max}U^*) = \{f \in L^2([0,1]) : U^*f \in D(\tilde{T}_{max})\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
&U\tilde{T}_{max}U^*f = -iU(U^*f)' = -i(b-a)^{-1}(UU^*f)' = -i(b-a)^{-1}f' \\
&\implies f \in D(T_{max}) \text{ y } U\tilde{T}_{max}U^*f = (b-a)^{-1}T_{max}f \implies U\tilde{T}_{max}U^* \subset (b-a)^{-1}T_{max}.
\end{aligned}$$

Que $f \in AC[a,b]$ también puede verse usando la definición 1.1. Junto a lo anterior, $U\tilde{T}_{max}U^* = (b-a)^{-1}T_{max}$.

Ahora $f \in D(T_0)$ si y sólo si $f \in D(T_{max})$ y $f(0) = f(1) = 0$ si y sólo si $U^*f \in D(T_{max})$ y $U^*f(a) = U^*f(b) = 0$. Por lo tanto $U^*(D(T_0)) = D(\tilde{T}_0)$ y

$$(U\tilde{T}_0U^*f)(y) = (U\tilde{T}_{max}U^*f)(y) = \left(\frac{1}{b-a}T_{max}f\right)(y) = \left(\frac{1}{b-a}T_0f\right)(y).$$

Analogamente, $f \in C_c^\infty(0,1)$ si y sólo si $U^*f \in C_c^\infty(a,b)$. Entonces $U^*(D(T_c^\infty)) = D(\tilde{T}_c^\infty)$ y $U\tilde{T}_c^\infty U^*f = U\tilde{T}_{max}U^*f = (b-a)^{-1}T_{max}f = (b-a)^{-1}T_c^\infty f$. Por otro lado aplicando el lema 4.8 tenemos $\tilde{T}_{max}^* = ((b-a)^{-1}U^*T_{max}U)^* = (b-a)^{-1}U^*T_{max}^*U = (b-a)^{-1}U^*T_0U = \tilde{T}_0$. Analogamente se tiene $(\tilde{T}_c^\infty)^* = \tilde{T}_{max}$ y $\tilde{T}_0^* = \tilde{T}_{max}$. ❑

Observación 4.10. Notemos que se tienen afirmaciones analogas a las del teorema anterior para los operadores T_{max}^∞ y T_0^∞ las cuales fueron omitidas pues no se utilizaran en teoremas posteriores. Por otro lado notemos que si definimos el operador $\tilde{B}_\theta$ con $D(\tilde{B}_\theta) := \{f \in L^2([a,b]) : f' \in L^2([a,b]), f(b) = e^{2\pi i\theta}f(a)\}$, $\tilde{B}_\theta f = -if'$ entonces $U^*B_\theta U = (b-a)\tilde{B}_\theta$ y lema 4.8 implica que $\tilde{B}_\theta$ es autoadjunto, $\tilde{B}_\theta = (b-a)^{-1}U^*B_\theta U$ y $\sigma_p(\tilde{B}_\theta) = \sigma_p((b-a)^{-1}U^*B_\theta U) = (b-a)^{-1}\sigma_p(B_\theta)$ por proposición 3.30.

2. El operador de diferenciación $-i\frac{d}{dx}$ sobre $L^2(\mathbb{R})$

Definición 4.11. Definimos $P_c^\infty : C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ por

$$P_c^\infty f(x) = -i\frac{d}{dx}f(x).$$

Recordemos que el espacio de Schwartz

$$S(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{|x|\to\infty} |x^n f^{(m)}(x)| = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y todo } m \geq 0\}$$

es el conjunto de funciones f sobre $\mathbb{R}$ infinitamente diferenciables tal que f y todas sus derivadas son de decrecimiento rápido. Notemos que $S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$.

Definición 4.12. Definimos $P_S : S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ por

$$P_S f(x) = -i\frac{d}{dx}f(x)$$

y sea $P : H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ dado por

$$Pf = -if',$$

donde $H^1(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f' \in L^2(\mathbb{R})\}$.

Por integración por partes se demuestra que P_c^∞ y P_S son simétricos. Por ejemplo para P: Si $f,g \in D(P)$, entonces

$$\langle f, Pg\rangle = -i\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}g'(x)d\lambda(x) = i\int_{\mathbb{R}} \overline{f'(x)}g(x)d\lambda(x) - i[\lim_{x\to+\infty} \overline{f(x)}g(x) - \lim_{x\to-\infty} \overline{f(x)}g(x)] = \langle Pf, g\rangle.$$

Notemos además que $P_S(S(\mathbb{R})) \subset S(\mathbb{R})$. Analogamente se tiene el operador multiplicación sobre el espacio de Schwartz:

Definición 4.13. Definimos $Q_S : S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ por $Q_S f(x) = xf(x)$ y sea $D(Q) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 d\lambda(x) < \infty\}$, $Q : D(Q) \subset L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ dado por $Qf(x) = xf(x)$.

Como en el ejemplo 2.34 se tiene la siguiente proposición.

Proposición 4.14. *$Q = Q^*$ y $Q_S^* = Q$. En particular Q es autoadjunto y Q_S es esencialmente autoadjunto con $\overline{Q}_S = Q_S^{**} = Q$.*

Demostración. Del ejemplo 2.34 sabemos que $Q = Q^*$ y notemos que $Q_S \subset Q$ implica $Q = Q^* \subset Q_S^*$. Mostremos que $Q_S^* \subset Q$. Sea $f \in D(Q_S^*)$, entonces para todo $\phi \in D(Q_S)$ tenemos $\langle Q_S^* f, \phi\rangle = \langle f, Q_S\phi\rangle$. En particular para todo $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{(Q_S f)(x)}\psi(x)d\lambda(x) = \langle Q_S^* f, \psi\rangle = \langle f, Q_S\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} x\overline{f(x)}\psi(x)d\lambda(x)$$

implica que

$$\int_{\mathbb{R}} (\overline{Q_S f(x) - xf(x)})\psi(x)d\lambda(x) = 0, \text{ para todo } \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Ya que $G(x) = Q_S^* f(x) - xf(x)$ pertenece a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, por el teorema fundamental del cálculo de variaciones tenemos $Q_S^* f(x) = xf(x)$ en casi todas partes $[\lambda]$, lo cual implica $\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 d\lambda(x) = \|Q_S^* f\|^2_{L^2} < \infty$, es decir, $f \in D(Q)$. Por lo tanto $f \in D(Q)$ y $Q_S^* f = xf = Qf$, es decir, $Q_S^* \subset Q$. $\square$

Ahora nuestro siguiente objetivo es mostrar que el operador P_S es esencialmente autoadjunto. Para esto utilizaremos algunos hechos importantes sobre la transformada de Fourier sobre $S(\mathbb{R})$ que es definida por $F_S : S(\mathbb{R}) \longrightarrow S(\mathbb{R})$

$$F_S[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy}d\lambda(x)$$

con inverso

$$F_S^{-1}[g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(y)e^{ixy}d\lambda(y).$$

Se sabe que F_S y F_S^{-1} son isométricos y entonces su extensión $F : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ es unitario (teorema 1.26), $\overline{F_S} = F$ y $F^*\upharpoonright_{S(\mathbb{R})} = F_S^{-1}$.

Lema 4.15. *$FP_S F^* = Q_S$.*

Demostración. Para cada $f \in S(\mathbb{R})$ por teorema 1.9 tenemos

$$\begin{aligned}
[FP_S F^*](f)(x) &= FP_S\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{iyx}d\lambda(y)\right] = F\left[\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{iyx}d\lambda(y)\right]\\
&= F\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} -i\frac{d}{dx}(f(y)e^{ixy})d\lambda(y)\right] = F\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} yf(y)e^{iyx}d\lambda(y)\right]\\
&= F\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(Q_S f)(y)e^{iyx}d\lambda(y)\right] = F[F^{-1}(Q_S f)](x)\\
&= Q_S f(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $Q_S = FP_S F^*$ sobre $S(\mathbb{R})$. ❑

Proposición 4.16. *El operador P_S es esencialmente autoadjunto y $(\overline{P_S})^* = \overline{P_S} = FQF^*$.*

Demostración. Notemos que por ser P_S un operador simétrico es por lo tanto cerrable. Del lema anterior tenemos que $P_S = F^*Q_S F$ con F unitario, entonces por lema 4.8 y proposición 4.14 tenemos $\overline{P_S} = \overline{F^*Q_S F} = F^*\overline{Q_S}F = F^*QF$. Por otro lado por la proposición 2.27 se tiene que $(\overline{P_S})^* = (FQF^*)^* = FQ^*F^* = FQF^* = \overline{P_S}$. ❑

Definición 4.17. Sea H un espacio de Hilbert. Una pareja de Schrödinger son dos operadores autoadjuntos $Q : D(Q) \subset H \to H$, $P : D(P) \subset H \to H$, tal que $Q = Q^*$, $P = P^*$, $[P, Q] = -i\,\mathrm{Id}_{D([P,Q])}$ y $D([P, Q])$ es un core para P y Q.

Proposición 4.18 (Pareja de Schrödinger). *Los operadores $Q = \overline{Q_S}$ y $\overline{P_S}$ son una pareja de Schrödinger, es decir, $Q^* = Q$, $(\overline{P_S})^* = \overline{P_S}$ y sobre $S(\mathbb{R})$ tenemos $[\overline{P_S}, Q]f = -if$ para todo $f \in S(\mathbb{R})$ y $S(\mathbb{R})$ es un core para Q y $\overline{P_S}$.*

Demostración. Como vimos antes para todo $f \in S(\mathbb{R})$, $Qf \in S(\mathbb{R})$, $\overline{P_S}f = P_S f = -if' \in S(\mathbb{R})$. Entonces por la regla de Leibniz para el producto (teorema 1.8) tenemos

$$[\overline{P_S}, Q]f(x) = -i(xf(x))' - Q(-if')(x) = -if(x) - ixf'(x) + ixf'(x) = -if(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Además $\overline{Q\restriction_{S(\mathbb{R})}} = \overline{Q_S} = Q$ y $\overline{\overline{P_S}\restriction_{S(\mathbb{R})}} = \overline{P_S}$. Hemos demostrado que $[\overline{P_S}, Q]f = -if$ para todo $f \in S(\mathbb{R})$ pero no sabemos si esto se satisface para $f \in D([\overline{P_S}, Q]) \setminus S(\mathbb{R})$. Para esto mostremos que $[\overline{P_S}, Q]$ es un operador cerrable. Para todo $f, g \in D([\overline{P_S}, Q]) = D(\overline{P_S}Q) \cap D(Q\overline{P_S})$ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle[\overline{P_S}, Q]f, g\rangle &= \langle\overline{P_S}Qf - Q\overline{P_S}f, g\rangle = \langle\overline{P_S}Qf, g\rangle - \langle Q\overline{P_S}f, g\rangle\\
&= \langle Qf, \overline{P_S}g\rangle - \langle\overline{P_S}f, Qg\rangle = \langle f, Q\overline{P_S}g\rangle - \langle f, \overline{P_S}Qg\rangle\\
&= \langle f, Q\overline{P_S}g - \overline{P_S}Qg\rangle = -\langle f, (\overline{P_S}Q - Q\overline{P_S})g\rangle\\
&= -\langle f, [\overline{P_S}, Q]g\rangle,
\end{aligned}$$

entonces $-[\overline{P_S}, Q] \subset [\overline{P}, Q]^*$ y por lo tanto $[\overline{P_S}, Q]^*$ es densamente definido y $[\overline{P_S}, Q]$ es cerrable. Ahora como $[P_S, Q_S] \subset [\overline{P_S}, Q]$, obtenemos

$$-i\,\mathrm{Id}_H = \overline{-i\,\mathrm{Id}_{S(\mathbb{R})}} = \overline{[P_S, Q_S]} \subset \overline{[\overline{P_S}, \overline{Q_S}]} = \overline{[\overline{P_S}, Q]} \quad (\text{aqui } H = L^2(\mathbb{R})),$$

entonces $\overline{[\overline{P_S}, Q]} = -i\,\mathrm{Id}_H$, en particular $[\overline{P_S}, \overline{Q_S}] = -i\,\mathrm{Id}\restriction_{D[\overline{P_S},\overline{Q_S}]}$. Además, como $S(\mathbb{R}) = D(P_S) \subset D([\overline{P_S}, \overline{Q_S}]) \subset D(\overline{P_S})$ y $S(\mathbb{R}) = D(Q_S) \subset D([\overline{P_S}, \overline{Q_S}]) \subset D(\overline{Q_S})$, tenemos que $D([\overline{P_S}, \overline{Q_S}])$ es un core para $\overline{P_S}$ y $\overline{Q_S}$. ❏

Observación 4.19. Notemos que en la proposición anterior es importante tener que el operador $[\overline{P_S}, \overline{Q_S}]$ sea cerrable, pues si $\mathrm{Id}\restriction_D \subset T$ con D denso en H, no necesariamente se tiene que $T = \mathrm{Id}\restriction_{D(T)}$. Por ejemplo si H con $\dim(H) = \infty$ es separable y $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de H definimos $D := \mathrm{gen}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, $D(T) := D \dotplus \mathbb{C}\,e$ donde $e \notin D$, $Te_n = e_n$ y $Te = \lambda e$ con $\lambda \neq 1$ el cual se extiende por linealidad a $D(T)$, entonces $T \neq \mathrm{Id}\restriction_{D(T)}$.

El siguiente objetivo ahora es investigar de que tipo de funciones consiste $D((P_c^\infty)^*)$ y saber como actua $(P_c^\infty)^*$ sobre su dominio. Para esto comencemos con la siguiente proposición.

Proposición 4.20. *Sea I un intervalo con extremos $A \in [-\infty, +\infty)$, $B \in (-\infty, +\infty]$ con $A < B$ y sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $A < a < b < B$. Sea $T : D(T) \subset L^2(I) \longrightarrow L^2(I)$ un operador de diferenciación densamente definido tal que*

$$C_c^\infty(a, b) \subset D(T) \subset \{f \in L^2(I) : f' \in L^2(I)\}$$

y $Tf = -if'$ para todo $f \in D(T)$. Entonces para todo $g \in D(T^*)$ tenemos $g\restriction_{[a,b]} \in \{h \in L^2([a, b]) : h' \in L^2([a, b])\}$ y $(T^*g)\restriction_{[a,b]} = (-ig\restriction_{[a,b]})'$.

Demostración. Primero observemos que $C_c^\infty(a, b) \subset L^2(I)$ y $T\restriction_{C_c^\infty(a,b)} = T_c^\infty$ donde $\tilde{T}_c^\infty$ fue definido en definición 4.7. Entonces para todo $g \in D(T^*)$ y para todo $h \in C_c^\infty(a, b)$ tenemos

$$\langle T^*g, h\rangle_{L^2(I)} = \langle g, Th\rangle_{L^2(I)} = \int_a^b \overline{g(x)}(-ih'(x))d\lambda(x) = \langle g\restriction_{[a,b]}, \tilde{T}_c^\infty h\rangle_{L^2([a,b])},$$

y

$$\langle T^*g, h\rangle_{L^2(I)} = \int_a^b \overline{T^*g(x)}h(x)d\lambda(x) = \langle T^*g\restriction_{[a,b]}, h\rangle_{L^2([a,b])}.$$

Entonces

$$\langle T^*g\restriction_{[a,b]}, h\rangle_{L^2([a,b])} = \langle g\restriction_{[a,b]}, \tilde{T}_c^\infty h\rangle_{L^2([a,b])} \quad \text{para todo } h \in D(\tilde{T}_c^\infty) = C_c^\infty(a, b).$$

Por teorema 4.9 tenemos $g\restriction_{[a,b]} \in D((\tilde{T}_c^\infty)^*) = D(\tilde{T}_{max}) = \{f \in L^2([a, b]) : f' \in L^2([a, b])\}$ y $T^*g\restriction_{[a,b]} = \tilde{T}_{max}(g\restriction_{[a,b]}) = -i(g\restriction_{[a,b]})'$, es decir, $T^*g = -ig'$ en $[a, b]$. ❏

Observación 4.21. Observemos que en la demostración de la proposición anterior utilizamos el hecho de que $(\tilde{T}_c^\infty)^* = \tilde{T}_{max}$ para mostrar que $T^*g\restriction_{[a,b]} = (-ig\restriction_{[a,b]})'$, pero surge la pregunta si podemos utilizar que $\tilde{T}_0^* = \tilde{T}_{max}$ en la demostración. En tal caso debe tenerse que cada $h \in D(\tilde{T}_0)$ admite una extensión a una función $\tilde{h} \in D(T)$ con $\tilde{h}' \in L^2(I)$ el cual no siempre es el caso (por ejemplo $I = \mathbb{R}$ y $D(T) = C_c^\infty(\mathbb{R})$).

Lema 4.22. *Sea $I = (-\infty, +\infty)$, $I = [A, +\infty)$ o $I = (-\infty, B]$ y $f \in L^2(I)$ tal que $f' \in L^2(I)$. Entonces f es continua y* $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$.

Demostración. Ya que f es absolutamente continua, en particular es continua. Sea $x_0 \in I$, notemos que, por integración por partes,

$$\int_{x_0}^{x} [\overline{f'(t)}f(t) + \overline{f(t)}f'(t)]d\lambda(t) = \int_{x_0}^{x} (\overline{f(t)}f(t))'d\lambda(t) = |f(x)|^2 - |f(x_0)|^2.$$

Como $f, f' \in L^2(I)$ entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que $\overline{f}f' \in L^1(I)$. Por lo tanto sin perdidad de generalidad hacemos $x \to +\infty$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{x_0}^{x} [\overline{f'(t)}f(t) + \overline{f(t)}f'(t)]d\lambda(t) = \lim_{x\to+\infty} |f(x)|^2 - |f(x_0)|^2$$

existe. Ahora como $f \in L^2(I)$, entonces $\lim_{x\to+\infty} |f(x)|^2 = 0$. Analogamente se tiene el mismo resultado para $x \to -\infty$. ❑

En el siguiente teorema se recalcan nuevamente dos de las definiciones que se hicieron al principio de esta sección.

Teorema 4.23. *Sea $D(P) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f' \in L^2(\mathbb{R})\} = H^1(\mathbb{R})$, $P : D(P) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ dado por*

$$Pf = -if',$$

y $D(P_c^\infty) = C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, $P_c^\infty : C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ dado por

$$P_c^\infty f(x) = -i\frac{d}{dx}f(x).$$

Entonces

$$(P_c^\infty)^* = P.$$

Demostración. Primero observemos que para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tenemos $C_c^\infty(a,b) \subset D(P_c^\infty)$ y $P_c^\infty\restriction_{C_c^\infty(a,b)} = \tilde{T}_c^{\infty}$. Sea $g \in D((P_c^\infty)^*)$, entonces por la proposición 4.20 para todo a, b con $a < b$ tenemos

$$g\restriction_{[a,b]} \in \{h \in L^2([a,b]) : h' \in L^2([a,b])\} \text{ y } ((P_c^\infty)^*g)\restriction_{[a,b]} = (-ig\restriction_{[a,b]})'.$$

En particular $g' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Luego para todo $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tal que $\text{supp}(h) \subset (a,b)$ y entonces

$$\langle (P_c^\infty)^* g + ig', h\rangle = \langle (P_c^\infty)^* g\restriction_{[a,b]}, h\rangle + \langle ig'\restriction_{[a,b]}, h\rangle = \langle -ig'\restriction_{[a,b]}, h\rangle + \langle ig'\restriction_{[a,b]}, h\rangle = 0.$$

Por el teorema fundamental del calculo de variaciones $(P_c^\infty)^* g = -ig'$ en c.t.p. $[\lambda]$, en particular $g' \in L^2(\mathbb{R})$, luego $g \in D(P)$ y $(P_c^\infty)^* g = -ig' = Pg$, lo cual implica que $(P_c^\infty)^* \subset P$. Por otro lado para todo $g \in D(P)$ y todo $h \in D(P_c^\infty)$, tenemos por el lema 4.22

$$\langle g, P_c^\infty h\rangle = -i\int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} h'(x) d\lambda(x) = i\int_{\mathbb{R}} \overline{g'(x)} h(x) d\lambda(x) - i[\lim_{x\to+\infty} \overline{g(x)} h(x) - \lim_{x\to-\infty} \overline{g(x)} h(x)] = \langle Pg, h\rangle,$$

que implica $g \in D((P_c^\infty)^*)$ y $(P_c^\infty)^* g = Pg$, es decir, $P \subset (P_c^\infty)^*$. Por lo tanto $P = (P_c^\infty)^*$. ❑

Corolario 4.24. *P es autoadjunto y $\overline{P_c^\infty} = \overline{P_S} = P$. En particular P_c^∞ y P_S son esencialmente autoadjuntos.*

Demostración. Recordemos que el operador P es simétrico, es decir, $P \subset P^*$. Además $P_c^\infty \subset P_S \subset P$, $P = (P_c^\infty)^*$ y $P \subset P^*$ implican

$$P^* \subset P_S^* \subset (P_c^\infty)^* = P \subset P^* \implies P^* = P = (P_c^\infty)^* = P_S^*.$$

Luego

$$P = P^{**} = (P_c^\infty)^{**} = P_S^{**} \implies P = \overline{P_c^\infty} = \overline{P_S}.$$

❑

Observación 4.25. Como se vio en el proposición 4.18 la pareja $P = \overline{P_S}$, $Q = \overline{Q_S}$ sobre $H = L^2(\mathbb{R})$ es una pareja de Schrödinger donde $D(P_S) = D(Q_S) = S(\mathbb{R}) \subset D([P,Q])$. Por otro lado B_θ ($\theta \in [0,1)$) y Q sobre $H = L^2([0,1])$ es una pareja de operadores autoadjuntos tal que $[B_\theta, Q] = -i\,\text{Id}\restriction_{D[B_\theta,Q]}$, pero no es una pareja de Schrödinger por que $D([B_\theta, Q])$ no es un core para B_θ.

Ahora enunciaremos un teorema conocido en la física como el principio de incertidumbre en el cual intervienen los operadores P y Q. Se necesitará la siguiente terminología y notación: en fisica un observable es un operador autoadjunto A sobre un espacio de Hilbert H, un estado es elemento $\phi \in H$ con $\|\phi\| = 1$, y $\mu := \langle P_\hbar\phi, \phi\rangle \in \mathbb{R}$ y $\lambda := \langle Q\phi, \phi\rangle \in \mathbb{R}$ denotan respectivamente los valores de expectación del momento y de posición, donde $P_\hbar := \hbar P$ y $\hbar$ es la constante de Planck. Las desviaciones estandar (cuadradas) son definidas por

$$(\Delta P_\hbar)^2 = \langle (P_\hbar - \mu)^2\phi, \phi\rangle, \quad (\Delta Q)^2 = \langle (Q-\lambda)^2\phi, \phi\rangle.$$

Teorema 4.26 (Principio de incertidumbre). *Si $Q = x$ es el operador posición y $P_\hbar = \hbar P = -i\hbar\frac{d}{dx}$ el operador de momento definidos como antes, es decir, $D(Q) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : xf \in L^2(\mathbb{R})\}$ y $D(P_\hbar) = H^1(\mathbb{R})$ y supongamos que $\phi \in D([P_\hbar, Q]) = D(P_\hbar Q) \cap D(QP_\hbar)$, entonces*

$$\hbar\|\phi\|^2 \leq 2\|(P_\hbar - \mu)\phi\|\,\|(Q - \lambda)\phi\|, \tag{2.1}$$

y por lo tanto $(\Delta P_\hbar)^2(\Delta Q)^2 \geq \hbar^2/4$.

Demostración. Primero notemos que para $\phi \in D([P_\hbar, Q])$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y usando el hecho de que $P_\hbar$ y Q son autoadjuntos (y por lo tanto simétricos) tenemos que

$$\begin{aligned}
-i\hbar\|\phi\|^2 &= \langle [P_\hbar, Q]\phi, \phi\rangle = \langle P_\hbar Q - QP_\hbar\phi, \phi\rangle = \langle P_\hbar Q\phi, \phi\rangle - \langle QP_\hbar\phi, \phi\rangle \\
&= \langle Q\phi, P_\hbar\phi\rangle - \langle P_\hbar\phi, Q\phi\rangle = \overline{\langle P_\hbar\phi, Q\phi\rangle} - \langle P_\hbar\phi, Q\phi\rangle \\
&= -2i\,\mathrm{Im}\langle P_\hbar\phi, Q\phi\rangle.
\end{aligned}$$

Como $-\lambda\langle P_\hbar\phi, \phi\rangle - \mu\langle\phi, Q\phi\rangle + \lambda\mu\|\phi\|^2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
-i\hbar\|\phi\|^2 &= -2i\,\mathrm{Im}\langle P_\hbar\phi, Q\phi\rangle \\
&= -2i\,\mathrm{Im}(\langle P_\hbar\phi, Q\phi\rangle - \lambda\langle P_\hbar\phi, \phi\rangle - \mu\langle\phi, Q\phi\rangle + \mu\lambda\|\phi\|^2) \\
&= -2i\,\mathrm{Im}\langle (P_\hbar - \mu)\phi, (Q - \lambda)\phi\rangle.
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz deducimos la desigualdad (2.1). Por otra parte ya que $P_\hbar - \mu$ y $Q - \lambda$ son autoadjuntos tenemos que

$$(\Delta P_\hbar)^2 = \langle (P_\hbar - \mu)^2\phi, \phi\rangle = \langle (P_\hbar - \mu)\phi, (P_\hbar - \mu)\phi\rangle = \|(P_\hbar - \mu)\phi\|^2$$

y

$$(\Delta Q)^2 = \langle (Q - \lambda)^2\phi, \phi\rangle = \langle (Q - \lambda)\phi, (Q - \lambda)\phi\rangle = \|(Q - \lambda)\phi\|^2.$$

lo cual junto con (2.1) nos da la segunda afirmación. ❑

Por último tenemos un teorema debido a Marshall H. Stone y John von Neumann que muestra en esencia que toda pareja de Schrödinger consiste de una suma directa de copias del operador diferenciación y una suma directa de copias del operador multiplicación. Sin embargo su demostración está fuera del alcanze de este trabajo.

Teorema 4.27 (Stone-von Neumann). *Sea H un espacio de Hilbert separable. Sean $\tilde{P}$ y $\tilde{Q}$ una pareja de Schrödinger sobre H. Entonces $\tilde{P}$ y $\tilde{Q}$ son unitariamente equivalentes a una suma directa de P y Q sobre $L^2(\mathbb{R})$, es decir, $H = \oplus_{j\in J}L^2(\mathbb{R})$,*

$$\tilde{P} = \oplus_{j\in J}P \ \text{ y } \ \tilde{Q} = \oplus_{j\in J}Q,$$

donde $D(\oplus_{j\in J}P) = \oplus_{j\in J}D(P)$, $D(\oplus_{j\in J}Q) = \oplus_{j\in J}D(Q)$ *y además*

$$[\oplus_{j\in J}P](\oplus_{j\in J}f_j) = \oplus_{j\in J}(-if_j') \ \ y \ \ [\oplus_{j\in J}Q](\oplus_{j\in J}g_j) = \oplus_{j\in J}xg_j.$$

Demostración. Puede verse en [**10**]. ❑

3. Los operadores $-i\frac{d}{dx}$ y Q sobre la semirecta $[0,+\infty)$

Definición 4.28. Sea $H = L^2([0,+\infty))$. Definimos los siguientes operadores:

1. $D(L_c^\infty) = C_c^\infty(0,+\infty) \subset L^2([0,+\infty))$ y $L_c^\infty : D(L_c^\infty) \subset H \to H$ dado por
$$L_c^\infty f(x) = -i\frac{df}{dx}(x).$$
2. $D(L_0) = \{f \in L^2([0,+\infty)) : f' \in L^2([0,+\infty)),\ f(0) = 0\} = H_0^1(0,+\infty)$ y $L_0 : D(L_0) \subset H \to H$ dado por
$$L_0 f = -if'.$$
3. $D(L_{max}) = \{f \in L^2([0,+\infty)) : f' \in L^2([0,+\infty))\} = H^1(0,+\infty)$ y $L_{max} : D(L_{max}) \subset H \to H$ dado por
$$Lf = -if'.$$

Observación 4.29. Notemos que $L_c^\infty \subset L_0 \subset L_{max}$ implica $L_{max}^* \subset L_0^* \subset (L_c^\infty)^*$. Además si $f \in H^1([0,+\infty))$, entonces $f' \in L^1_{loc}([0,+\infty))$, $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \in \mathbb{C}$ existe por continuidad y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ por el lema 4.22.

Proposición 4.30. *Los operadores L_c^∞ y L_0 son simétricos pero L_{max} no lo es.*

Demostración. Para todo $f, g \in D(L_0) \subset D(L_{max})$, la igualdad

$$\langle -if', g\rangle = i\int_0^{+\infty} \overline{f'(x)}g(x)d\lambda(x) = -i\int_0^{+\infty} \overline{f(x)}g'(x)d\lambda(x) + i[\lim_{x\to+\infty} \overline{f(x)}g(x) - \overline{f(0)}g(0)] = \langle f, -ig'\rangle$$

implica $\langle L_0 f, g\rangle = \langle f, L_0 g\rangle$, es decir, $L_0 \subset L_0^*$. Además $L_c^\infty \subset L_0 \subset L_0^* \subset (L_c^\infty)^*$. Por otro lado sea $f \in D(L_{max})$ tal que $f(0) \neq 0$, por ejemplo $f(x) = e^{-x}$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle L_{max}f, f\rangle - \langle f, L_{max}f\rangle &= i\int_0^\infty \overline{f'(x)}f(x)d\lambda(x) + i\int_0^\infty \overline{f(x)}f'(x)d\lambda(x)\\
&= i\int_0^\infty \overline{f'(x)}f(x)d\lambda(x) - i\int_0^\infty \overline{f'(x)}f(x)d\lambda(x)\\
&+ i[\lim_{x\to+\infty} \overline{f(x)}f(x) - \overline{f(0)}f(0)]\\
&= -i|f(0)|^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto L_{max} no puede ser simétrico. $\square$

TEOREMA 4.31. $(L_c^\infty)^* = L_0^* = L_{max}$ y $L_{max}^* = L_0$.

DEMOSTRACIÓN. Mostremos que $(L_c^\infty)^* = L_{max}$. Sea $f \in D((L_c^\infty)^*)$, entonces para toda $\phi \in C_c^\infty(a,b)$ donde $(a,b) \subset [0,+\infty)$ tenemos

$$\langle (L_c^\infty)^* f\restriction_{[a,b]}, \phi\rangle_{L^2([a,b])} = \langle (L_c^\infty)^* f, \phi\rangle = \langle f, L_c^\infty \phi\rangle = \langle f\restriction_{[a,b]}, \tilde{T}_c^\infty \phi\rangle_{L^2([a,b])}.$$

Entonces $f\restriction_{[a,b]} \in D((\tilde{T}_c^\infty)^*) = D(\tilde{T}_{max}) = \{g \in L^2([a,b]) : g' \in L^2([a,b])\}$ y $(L_c^\infty)^* f\restriction_{[a,b]} = \tilde{T}_{max}(f\restriction_{[a,b]}) = -i(f\restriction_{[a,b]})'$. En particular f' existe c.t.p. $[\lambda]$ sobre $[0,+\infty)$ y $f' \in L^1_{loc}([0,+\infty))$. Ahora sea $\phi \in C_c^\infty(0,+\infty) = D(L_c^\infty)$ arbitrario, entonces existen $a,b \in [0,+\infty)$ tales que $a < b$ y $\operatorname{supp}\phi \subset (a,b)$, entonces

$$\langle (L_c^\infty)^* f\restriction_{[a,b]} + i(f\restriction_{[a,b]})', \phi\rangle = \langle (L_c^\infty)^* f, \phi\rangle - \langle \tilde{T}_{max}(f\restriction_{[a,b]}), \phi\rangle = \langle f\restriction_{[a,b]}, -i\phi'\rangle - \langle f\restriction_{[a,b]}, -i\phi'\rangle = 0.$$

Entonces para este ϕ tenemos

$$\int_0^\infty \overline{((L_c^\infty)^* f(x) + if'(x))}\phi(x)d\lambda(x) = \langle (L_c^\infty)^* f\restriction_{[a,b]} + i(f\restriction_{[a,b]})', \phi\rangle = 0.$$

Como $\phi \in C_c^\infty(0,+\infty)$ es arbitrario, por el teorema fundamental del cálculo de variaciones (teorema 1.11) tenemos

$$(L_c^\infty)^* f = -if' \text{ en c.t.p. } [\lambda] \text{ sobre } [0,+\infty).$$

En particular $f' \in L^2([0,+\infty))$ lo cual implica que $f \in D(L_{max}) = H^1(0,+\infty)$ y $(L_c^\infty)^* \subset L_{max}$.

Por otra parte para todo $f \in D(L_{max})$ y para todo $\phi \in C_c^\infty(0,+\infty) = D(L_c^\infty)$ tenemos

$$\langle L_{max} f, \phi\rangle = i\int_0^\infty \overline{f'(x)}\phi(x)d\lambda(x) = -i\int_0^\infty \overline{f(x)}\phi'(x)d\lambda(x) + i[\lim_{x\to\infty} \overline{f(x)}\phi(x) - \overline{f(0)}\phi(0)] = \langle f, L_c^\infty\phi\rangle.$$

Entonces $f \in D((L_c^\infty)^*)$ y $(L_c^\infty)^* f = L_{max} f$, es decir, $L_{max} \subset (L_c^\infty)^*$. Por lo tanto $L_{max} = (L_c^\infty)^*$.

Ahora ya que $L_{max}^* \subset L_0^* \subset (L_c^\infty)^* = L_{max}$ tenemos $D(L_{max}^*) \subset D(L_{max}) = H^1(0,+\infty)$ y $D(L_0^*) \subset H^1(0,+\infty)$. Sea $f \in D(L_{max}^*)$, entonces para todo $g \in D(L_{max})$ se tiene

$$\begin{aligned}
0 &= \langle L_{max}^* f, g\rangle - \langle f, L_{max} g\rangle = \langle L_{max} f, g\rangle - \langle f, L_{max} g\rangle \\
&= i\int_0^\infty \overline{f'(x)}g(x)d\lambda(x) + i\int_0^\infty \overline{f(x)}g'(x)d\lambda(x) \\
&= i\int_0^\infty \overline{f'(x)}g(x)d\lambda(x) - i\int_0^\infty \overline{f'(x)}g(x)d\lambda(x) + i[\lim_{x\to+\infty} \overline{f(x)}g(x) - \overline{f(0)}g(0)] \\
&= -i\overline{f(0)}g(0), \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

por lema 4.22. Si consideramos $g \in D(L_{max})$ con $g(0) = 1$, entonces $0 = -if(0)g(0) = -if(0)$ lo cual implica $f \in D(L_0) = \{f \in H^1(0,+\infty) : f(0) = 0\}$. Por lo tanto $L_{max}^* \subset L_0$. Reemplazando en

(3.1) L_{max} por L_0 y eligiendo $f \in D(L_0)$, se tiene $L_0 \subset L_{max}^*$. Por lo tanto $L_{max}^* = L_0$. Por último tenemos que $L_{max} = (L_c^\infty)^*$ es cerrado, por lo tanto $L_{max}^* = L_0$ implica $L_0^* = L_{max}^{**} = \overline{L_{max}} = L_{max}$. ❑

Corolario 4.32. *L_0 y L_{max} son operadores cerrados y $\overline{L_c^\infty} = L_0$.*

Demostración. Por el teorema anterior $L_0 = L_{max}^*$ y $L_{max} = L_0^*$ son cerrados por ser adjuntos. Además $\overline{L_c^\infty} = (L_c^\infty)^{**} = L_{max}^* = L_0$. ❑

En este caso de la semirecta $[0,+\infty)$ no tiene sentido hablar de pareja de Schrödinger pues ninguno de los operadores mencionados es autoadjunto, pero el operador de multiplicación Q si es autoadjunto y no acotado por el ejemplo 2.34. Sin embargo se tiene la relación del conmutador $[L_{max}, Q] = -i$ sobre $D([L_{max}, Q])$.

4. No existencia de extensiones autoadjuntos de $-i\frac{d}{dx}$ sobre $L^2([0,+\infty))$

Como en la sección 2 del capítulo 3 en esta sección se hará un análisis sobre la existencia de extensiones autoadjuntos de los operadores L_c^∞ y L_0.

Observación 4.33. Como $\overline{L_c^\infty} = L_0$, cada extensión autoadjunto de L_0^∞ es una extensión autoadjunto de L_0 y cada extensión autoadjunto de L_0 es una extensión autoadjunto de L_0^∞. Ya que L_0^∞ y L_0 tienen las mismas extensiones autoadjuntos basta considerar a L_0, compárese lema 3.18.

En el capítulo 3 obtuvimos que las extensiones B_θ de T_0 tienen una descomposición de la forma

$$D(B_\theta) = D(T_0) \dotplus \mathbb{C}\cdot e^{(2\pi+\theta)ix} = D(T_0) \dotplus \mathbb{C}((1-x) + e^{i\theta}x).$$

Para el operador L sobre el intervalo $[0,+\infty)$ se tiene una descomposición similar.

Lema 4.34. *Para toda $g \in D(L_{max})$ con $g(0) \neq 0$ tenemos $D(L_{max}) = D(L_0) \dotplus \mathbb{C}\cdot g$.*

Demostración. Sea $f \in D(L_{max})$ y escribimos $f = f - \frac{f(0)}{g(0)}g + \frac{f(0)}{g(0)}g$. Como $g \in D(L_{max})$ se tiene que $f - \frac{f(0)}{g(0)}g \in D(L_0)$, lo cual implica $f \in D(L_0) + \mathbb{C}\cdot g$. Sea ahora $f \in D(L_0) \cap \mathbb{C}\cdot g$, entonces $f = cg$ para algún $c \in \mathbb{C}$ y entonces $f(0) = cg(0) = 0$ implica $c = 0$, es decir, $f = 0$. Por lo tanto $D(L_0) \cap \mathbb{C}\cdot g = \{0\}$. ❑

Proposición 4.35. *Los operadores simétricos L_c^∞ y L_0 no admiten extensiones autoadjuntos.*

Demostración. Supongamos que A es una extensión autoadjunto de L_0, entonces $A = A^* \subset L_0^* = L_{max}$. Como $L_0^* \neq L_0$, tenemos $L_0 \subsetneq A \subset L_{max} = L_0^*$, entonces podemos considerar $g \in D(A)\setminus D(L_0)$.

Como $D(A) \subset D(L_{max})$ tenemos $g \in D(L_{max})$ y $g(0) \neq 0$. Ahora para todo $f \in D(L_{max})$ podemos escribir

$$f = f - \frac{f(0)}{g(0)}g + \frac{f(0)}{g(0)}g,$$

entonces $f - \frac{f(0)}{g(0)}g \in D(L_0) \subset D(A)$. Además $g \in D(A)$ implica

$$f = f - \frac{f(0)}{g(0)}g + \frac{f(0)}{g(0)}g \in D(A) \Rightarrow D(L_{max}) \subset D(A) \subset D(L_{max}) \Rightarrow D(L_{max}) = D(A).$$

Además $A \subset L_{max}$ implica $A = L_{max}$, entonces $A^* = L^*_{max} = L_0 \neq A$, lo cual contradice que $A = A^*$. Por lo tanto no existe una extensión autoadjunta de L_0. ❏

Capítulo 5

Análisis espectral del operador de diferenciación y multiplicación

En este último capítulo se hará un análisis del espectro de los operadores diferenciación y multiplicación ya mencionados en los capítulos anteriores. Recordemos que la definición de espectro de un operador tiene sentido solo para operadores cerrados. Por lo tanto solo se hará un análisis del espectro de los operadores T_{max}, T_0, P, L_0, L_{max}, Q y B_θ con $\theta \in [0, 1]$.

1. Espectro del operador multiplicación y operadores autoadjuntos de diferenciación

Como en el ejemplo 2.34 sea (X, Ω, μ) un espacio de medida σ-finito y sea $f : X \to \mathbb{C}$ una función Ω-medible. Definimos el rango esencial de f por el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\mu(\{x \in X : |f(x) - \lambda| < \epsilon\}) > 0$ para todo $\epsilon > 0$. El rango esencial de f es denotado por $\mathrm{Sp}(f)$.

Teorema 5.1. *Sea (X, Ω, μ) un espacio de medida σ-finito. Sea $f : X \to \mathbb{C}$ una función Ω-medible. Definimos el operador multiplicación $T_f : D(M_f) \subset L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$ por $D(T_f) = \{\phi \in L^2(X, \mu) : f\phi \in L^2(X, \mu)\}$ y $T_f\phi = f\phi$. Entonces $\sigma(T_f) = Sp(f)$.*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\mu(\{x \in X : |f(x) - \lambda| < n^{-1}\}) > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos $K_n = \{x \in X : |f(x) - \lambda| < n^{-1}\}$. Como el espacio de medida es σ-finito existe $E_n \subset K_n$ tal que $0 < \mu(E_n) < \infty$. Ya que f es acotada sobre E_n tenemos que $\chi_{E_n} \in D(T_f) \setminus \{0\}$ y

$$\|(T_f - \lambda)\chi_{E_n}\|_{L^2}^2 = \int_{E_n} |f - \lambda|^2 d\mu \leq \frac{1}{n^2}\|\chi_{E_n}\|_{L^2}^2 \Rightarrow n\|(T_f - \lambda)\chi_{E_n}\|_{L^2} \leq \|\chi_{E_n}\|_{L^2}.$$

Si $N(T_f - \lambda) \neq \{0\}$, $(T_f - \lambda)^{-1}$ no existe. Si $N(T_f - \lambda) = \{0\}$, entonces

$$\frac{\|(T_f - \lambda)^{-1}(T_f - \lambda)\chi_{E_n}\|}{\|(T_f - \lambda)\chi_{E_n}\|} = \frac{\|\chi_{E_n}\|}{\|(T_f - \lambda)\chi_{E_n}\|} \geq n,$$

lo cual significa que $(T_f - \lambda)^{-1}$ no puede ser acotado. Por lo tanto $\lambda \in \sigma(T_f)$.

Ahora si denotamos $K_{\lambda,\epsilon} = \{x \in X : |f(x) - \lambda| < \epsilon\}$ y consideramos $\lambda \notin \mathrm{Sp}(f)$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\mu(K_{\lambda,\epsilon}) = \mu(\{x \in X : |f(x) - \lambda| < \epsilon\}) = 0$. Definimos ψ por 0 sobre $K_{\lambda,\epsilon}$ y $\psi(x) = (f(x) - \lambda)^{-1}$ para $x \in X \setminus K_{\lambda,\epsilon}$. Entonces ψ es esencialmente acotado y por la observación 2.35 el operador multiplicación T_ψ es acotado. Además $T_\psi = (T_f - \lambda)^{-1}$, pues si $x \notin K_\epsilon$ tenemos $T_\psi(T_f - \lambda)\phi(x) = (f(x) - \lambda)^{-1}(f(x) - \lambda)\phi(x) = \phi(x) = (f(x) - \lambda)(f(x) - \lambda)^{-1}\phi(x) = (T_f - \lambda)T_\psi\phi(x)$.

Como $\mu(K_{\lambda,\epsilon}) = 0$ concluimos $T_\psi(T_f - \lambda)\phi = (T_f - \lambda)T_\psi\phi = \phi$ en c.t.p. $[\mu]$. De esto obtenemos que $\lambda \in \rho(T_f)$, es decir, $\lambda \notin \sigma(T_f)$. ❑

Observación 5.2. Notemos que el operador T_f no tiene eigenvectores si $\mu(\{x \in X : f(x) = \lambda\}) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, pues en tal caso existe $\phi \in D(T_f)$ no cero y $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T_f\phi = f\phi = \lambda\phi$. Entonces $(f(x) - \lambda)\phi(x) = 0$ c.t.p. $[\mu]$ y $f(x) - \lambda \neq 0$ c.t.p. $[\mu]$ implica $\phi(x) = 0$ c.t.p. $[\lambda]$.

Corolario 5.3. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no vacio y $f : I \to \mathbb{C}$ continua. Entonces el operador multiplicación $T_f : D(T_f) \subset L^2(I) \to L^2(I)$ tiene espectro $\sigma(T_f) = \overline{\{f(x) : x \in I\}} = \overline{f(I)}$.*

Demostración. Por el teorema anterior es suficiente demostrar que $\mathrm{Sp}(f) = \overline{f(I)}$. Notemos que $\mathrm{Sp}(f) \subset \overline{f(I)}$, pues si $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(f)$, entonces $\lambda(K_{\lambda,\epsilon}) > 0$, en particular es no vacío para todo $\epsilon > 0$. Por otra parte si $\lambda_0 \in \overline{f(I)}$, entonces para cada $\epsilon > 0$ el conjunto $\{x \in I : |f(x) - \lambda_0| < \epsilon\}$ es abierto y no vacío, en particular contiene un intervalo de la forma (a, b) con $a < b$, y por lo tanto $\lambda(\{x \in I : |f(x) - \lambda| < \epsilon\}) \geq \lambda((a, b)) > 0$. Esto implica $\overline{f(I)} \subset \mathrm{Sp}(f)$ y por lo tanto $\mathrm{Sp}(f) = \overline{f(I)}$. ❑

Del corolario anterior, del ejemplo 2.34 y de la observación 2.35 obtenemos inmediatemente la siguiente proposición.

Proposición 5.4. *El operador de posición $Q = T_x : D(Q) \subset L^2([0, 1]) \to L^2([0, 1])$ definido por $(Qf)(x) = xf(x)$ es acotado y $\|Q\| \leq 1$. Además $Q = Q^*$ y $\sigma(Q) = [0, 1]$. Para el caso de todo el eje $\mathbb{R}$ tenemos que $Q : D(Q) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $Q = Q^*$ y $\sigma(Q) = \mathbb{R}$.*

Corolario 5.5. *El operador diferenciación $P : H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ satisface $\sigma(P) = \sigma(Q) = \mathbb{R}$.*

Demostración. Recordemos que $P = \overline{P_S} = \overline{FQ_SF^*} = F\overline{Q_S}F^* = FQF^*$ y entonces por el lema 2.43 el corolario se sigue. ❑

Proposición 5.6. *El operador autoadjunto $B_\theta : D(B_\theta) \subset L^2([0, 1]) \to L^2([0, 1])$ tiene espectro $\sigma(B_\theta) = \{2\pi(n + \theta) : n \in \mathbb{Z}\}$, $\theta \in [0, 1]$.*

Demostración. Como B_θ es autoadjunto tenemos por la proposición 2.44 (o por el corolario 3.32) que $\mathrm{gen}\{e_n^\theta : n \in \mathbb{N}\}$ es un core para B_θ, entonces la proposición se sigue de la proposición 2.45. ❑

2. Espectro de los operadores diferenciación no autoadjuntos

Consideremos primero el operador T_{max} cuyo dominio es $H^1(0,1)$.

Proposición 5.7. *El operador* $T_{max} : D(T_{max}) = H^1(0,1) \subset L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ *definido por* $T_{max}f = -if'$ *tiene espectro* $\sigma(T_{max}) = \mathbb{C}$ *y* $\sigma_p(T_{max}) = \mathbb{C}$.

Demostración. Primero consideremos la ecuación $(T_{max} - \lambda)f = 0$ o equivalentemente $f' = \lambda i f$. Sea $f_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$ la cual pertenece a $C^\infty([0,1])$ y $(T_{max} - \lambda)f_\lambda = 0$. Como $f_\lambda \neq 0$, esto implica que $T_{max} - \lambda$ no es inyectivo para $\lambda \in \mathbb{C}$. Por lo tanto $\sigma(T_{max}) = \mathbb{C}$. ❑

Proposición 5.8. *El operador* $T_0 : D(T_0) = H_0^1(0,1) \subset L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ *definido por* $T_0 f = -if'$ *tiene espectro* $\sigma(T_0) = \mathbb{C}$ *y* $\sigma_p(T_0) = \emptyset$.

Demostración. En este caso consideremos la ecuación diferencial $(T_0 - \lambda)f = 0$ con condiciones de frontera $f(0) = f(1) = 0$. La solución general de esta ecuación es $f_\lambda(x) = ce^{i\lambda x}$ con $c \in \mathbb{C}$. Por las condiciones de frontera tenemos que $f_\lambda(0) = c = 0$. Esto implica que $N(T_0 - \lambda) = \{0\}$. Como T_0 es simétrico, entonces para cada $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tenemos por corolario 2.41 que $R(T_0 - \lambda) = N(T_0^* - \overline{\lambda})^\perp = N(T_{max} - \overline{\lambda})^\perp$. Por la demostración de la proposición anterior tenemos que la función $f_{\overline{\lambda}}(x) = e^{i\overline{\lambda}x}$ pertenece a $N(T_{max} - \overline{\lambda})$, lo cual implica $R(T_0 - \lambda) = N(T_{max} - \overline{\lambda})^\perp \subset \{f_{\overline{\lambda}}\}^\perp \neq L^2([0,1])$. Entonces para cada $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ el operador $(T_0 - \lambda)^{-1} \notin B(H)$ por que no está densamente definido. Entonces $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \sigma(T_0)$. Como $\sigma(T_0)$ es cerrado, entonces $\mathbb{C} = \sigma(T_0)$. ❑

Lema 5.9.

1. $\mathrm{Im}(\mu) \leq 0 \;\Rightarrow\; N(L_{max} - \mu) = \{0\}$,
2. $\mathrm{Im}(\mu) > 0 \;\Rightarrow\; N(L_{max} - \mu) = \mathbb{C} \cdot e^{i\mu t}$.

Demostración. Sea $f \in N(L_{max} - \mu)$. Utilizando el teorema 1.3 puede demostrarse que f es diferenciable en todos los puntos de $(0, +\infty)$ y por lo tanto $f' = i\mu f$ es continua en $(0, +\infty)$. Por el teorema de existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria $f' = i\mu f$ sobre el intervalo $[0, +\infty)$ se tiene $f(x) = ce^{i\mu x}$, $c \in \mathbb{C}$. Como $|f(x)| = |c|e^{-Im(\mu)x}$ se tiene $f \in L^2([0, +\infty))$ si $Im(\mu) > 0$. Para $Im(\mu) \leq 0$ tenemos $f \in L^2([0, \infty))$, si y sólo si $c = 0$, si y sólo si $f \equiv 0$. ❑

Proposición 5.10. *El operador* $L_0 : D(L_0) \subset L^2([0, +\infty)) \to L^2([0, +\infty))$ *definido por* $L_0 f = -if'$ *tiene espectro* $\sigma(L_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\lambda) \leq 0\}$ *y* $\sigma_p(L_0) = \emptyset$.

Demostración. $N(L_0 - \mu) = \{0\}$ cumple por la unicidad de la solución de $f' = i\mu f$ con valor inicial $f(0) = 0$. Como L_0 es cerrado y simétrico, entonces $R(L_0 - \lambda)$ es cerrado para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ y luego $R(L_0 - \lambda) = N(L_0^* - \overline{\lambda})^\perp = N(L_{max} - \overline{\lambda})^\perp$ por corolario 2.41. Por lo tanto para todo $\mu \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Im}(\mu) < 0$ se tiene por lema anterior $R(L_0 - \mu) = N(L_{max} - \overline{\mu})^\perp = \{e^{i\overline{\mu}t}\}^\perp \neq H$ que implica $\mu \in \sigma(L_0)$ por que no está densamente definido. Como $\sigma(L_0)$ es cerrado, entonces $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\lambda) \leq 0\} = \overline{\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\lambda) < 0\}} \subset \sigma(L_0)$.

Por otro lado para $\mu \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Im}(\mu) > 0$ tenemos por el lema anterior que $R(L_0 - \mu) = N(L_0^* - \overline{\mu})^\perp = N(L_{max} - \overline{\mu})^\perp = \{0\}^\perp = H$. Entonces por observación 2.16 y proposición 2.9 y ya que $N(L_0 - \mu) = \{0\}$ tenemos que $(L_0 - \mu)^{-1} : H \to H$ es un operador cerrado entre espacios de Hilbert. Por el teorema del gráfico cerrado (teorema 2.6) tenemos que $(L_0 - \mu)^{-1} \in B(H)$ y por lo tanto $\mu \in \rho(L_0)$. Esto implica que $\sigma(L_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\lambda) \leq 0\}$. Por lo anterior $\sigma(L_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\lambda) \leq 0\}$.

❏

Para un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ sea $\Omega^* = \{\overline{z} : z \in \Omega\}$.

Lema 5.11. *Sea $T : D(T) \subset H \to H$ un operador densamente definido y cerrado. Entonces $\sigma(T^*) = \sigma(T)^*$.*

Demostración. Es suficiente demostrar que $\lambda \in \rho(T)$ si y sólo si $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$. Por la proposición 2.23 (4) y la proposición 2.18 concluimos que $\lambda \in \rho(T)$ si y sólo si $(T - \lambda)^{-1} \in B(H)$ si y sólo si $((T - \lambda)^{-1})^* = (T^* - \overline{\lambda})^{-1} \in B(H)$ si y sólo si $\overline{\lambda} \ni \rho(T^*)$. ❏

Proposición 5.12. *El operador $L : D(L_{max}) = H^1(0, +\infty) \subset L^2([0, +\infty)) \to L^2([0, +\infty))$ definido por $L_{max} f = -if'$ tiene espectro $\sigma(L_{max}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\lambda) \geq 0\}$ y $\sigma_p(L_{max}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Im(\lambda) > 0\}$.*

Demostración. Se sigue del lema 5.9, de la proposición 5.10 y el lema anterior pues $L_{max} = L_0^*$. ❏

Bibliografía

[1] Eberhard Zeidler: *Applied functional analysis: applications to mathematical physics.* Applied Mathematical Sciences 108. Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] Giovanni Leoni: *A first course in Sobolev spaces*. Graduate Studies in Mathematics, 105. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[3] Konrad Schmuedgen: *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert spaces*. Graduate Texts in Mathematics 265. Springer Verlag, New York, 2012.

[4] Haim Brezis *Functional analysis, Sobolev spaces and differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.

[5] Robert A. Adams, John Fournier: *Sobolev spaces.* Pure and Applied Mathematics 140. Academic Press, Elsevier Science, Amsterdam, 2003.

[6] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin: *Elements of the theory of functions and of the functional analysis*. Sixth edition, Moscow, 1989.

[7] John B. Conway: *A course in functional analysis.* 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics 96. Springer-Verlag, New York, 1990.

[8] John B. Conway: *A first course of abstrac analysis.* Graduate Studies in Mathematics 141. American Mathematical Society. Providence, RI, 2012.

[9] Javier Duoandikoetxea; *Fourier analysis.* Gradute Studies in Mathematics 29. American Mathematical Society, Madrid, 1995.

[10] Brian C. Hall; *Quantum theory for mathematicians.* Graduate Texts in Mathematics 267. Springer-Verlag, New York, 2013.