



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS
DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

Simulación de la difracción de Fresnel
usando Matlab

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICO

Presenta:

Flor Anahi Cerna Aguilar

Asesor:

Dr. Mauricio Ortiz Gutiérrez

MORELIA, MICHOACÁN

Diciembre 2022

Dedicatoria

A mi madre Azucena A.F. y mi hermana Celeste por su cariño, apoyo y consejos. Sin ustedes no lo habría logrado.

A mi novio, Mauricio I.J. nadie a recibido un afecto ni apoyo incondicional como el que tu me has dado.

Agradecimientos

A la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y todos los que la conforman. Al laboratorio de óptica y en especial a mi asesor de tesis el Dr. Mauricio Ortiz Gutiérrez que con su paciencia y apoyo se pudo realizar este trabajo de tesis.

A mi familia por sus consejos y apoyo a lo largo de mis estudios. A mi tía Teresa por todo su cariño, confianza y siempre estar al pendiente de mi a pesar de la distancia.

A mis amigos: Griss, Daniela, Juan, Alejandro, Norma, Yashar, Victor, Dania y muchos otros más que formaron parte de mi vida, apoyaron en todo momento y dejaron valiosos recuerdos en mi.

Simulación de la difracción de Fresnel usando Matlab

Presenta: **Flor Anahi Cerna Aguilar**

Resumen

Un importante fenómeno en la óptica es la difracción de campos. En este trabajo se estudia la difracción de Fresnel o de campo cercano que se genera por una apertura iluminada por una onda esférica.

Para ello, se estudia la teoría escalar que permite obtener la integral de difracción de Fresnel. Para resolver la integral de Fresnel se sigue un procedimiento práctico que consiste en calcular la transformada de Fourier de dos funciones, siendo una de ellas la función de respuesta al impulso cuya transformada de Fourier es la función de transferencia y la otra es la transformada de la función de apertura.

Se elabora un programa en MATLAB, utilizando la integral de difracción de Fresnel y el algoritmo Fast Fourier Transform (FFT), para calcular numéricamente el patrón de difracción de campo cercano a través de algunas aperturas. Finalmente, se comparan los resultados obtenidos de la simulación con los resultados experimentales.

Palabras clave: Difracción de Fresnel, Transformada de Fourier, respuesta al impulso.

Abstract

The Field Diffraction is an important phenomenon inside optics field. This work studies Fresnel's diffraction or near field generated by an illuminated opening crated by a spherical wave.

For this purpose, scale theory it is employed to obtain the integral of Fresnel's Diffraction. In order to solve Fresnel's Integral we follow a practical procedure which consists in calculate Fourier's translocate of two functions, being one of them the answer function to the impulse whose Fourier transform related to its transfer function, and the other one is the transform of the aperture function.

MATLAB program is elaborated using Fresnel's integral of Diffraction and Fast Fourier Transform (FFT) Algorithm, to numerical calculate the pattern of the near diffraction field through some openings. At last, Results obtained from program's simulation are compared with experimental results.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes históricos	1
1.2. Objetivos	2
1.2.1. Objetivo general	2
1.2.2. Objetivos específicos	2
1.3. Estructura de la tesis	2
2. Conceptos Básicos	3
2.1. Transformada de Fourier	3
2.1.1. Transformada de Fourier bidimensional	3
2.1.2. Teoremas de la transformada de Fourier	4
2.1.3. Convolución de funciones	5
2.2. Funciones básicas	6
2.2.1. Apertura rectangular	6
2.2.2. Rendija	7
2.2.3. Rejilla cosenoidal	7
2.2.4. Rejilla binaria	8
2.3. Ecuación de Helmholtz	8
2.4. Teorema de Green	9
3. Difracción de Fresnel	10
3.1. Teorema integral de Helmholtz y Kirchhoff	10
3.2. Formulación de Kirchhoff de difracción por una pantalla plana	13
3.2.1. Condiciones de frontera de Kirchhoff	14
3.2.2. Fórmula de difracción de Fresnel - Kirchhoff	15
3.2.3. Teoría de difracción de Rayleigh - Sommerfeld	16
3.3. Difracción de Fresnel	18
3.4. Función de respuesta al impulso	20
4. Simulación de la Difracción de Fresnel	21
4.1. Conceptos básicos de MATLAB	21
4.2. Algoritmo de la difracción de Fresnel	21

5. Resultados	25
5.1. Arreglo experimental	25
5.2. Efecto Talbot	26
5.3. Difracción de una rendija	28
5.4. Objetos binarios	30
5.4.1. Difracción de un cuadrado	30
5.5. Reconocimiento de patrones	37
6. Conclusiones	44
A. Simulación del reconocimiento de patrones	45
Referencias	47

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes históricos

Desde la época de los griegos se han elaborado diversas teorías en el intento de responder a la incógnita sobre qué es la luz [1]. Así nace una rama de la física llamada ÓPTICA la cual tiene como objetivo estudiar el comportamiento de la luz, sus propiedades y los dispositivos e instrumentos que hacen uso de ella [2]. Dentro de la óptica se encuentra el fenómeno de difracción, el cual se define como la desviación de los rayos de luz de su trayectoria rectilínea que no se pueden interpretar como reflexión o refracción [3].

La primera referencia a los fenómenos de difracción aparece en la obra de Leonardo Da Vinci [4]. Tales fenómenos fueron descritos con precisión por primera vez por Francesco Maria Grimaldi quien acuñó la palabra “difracción”. Grimaldi observó en algunos experimentos que la orilla de la sombra de algunos objetos en lugar de estar bien definida muestra algunas franjas claras y oscuras. Grimaldi supuso que el fenómeno estaba relacionado en cierta forma con un movimiento ondulatorio [5].

Robert Hooke más tarde también observó efectos de difracción. Propuso la idea de que la luz era un movimiento vibratorio rápido del medio propagándose a una gran velocidad. Siendo el comienzo de la teoría ondulatoria [6].

Christian Huygens desarrolló la teoría ondulatoria de la luz en 1678. Isaac Newton propuso una contrateoría basada en una visión de partículas de la luz [7]. Huygens propuso en los Países Bajos la regla de que “cada punto de un frente de onda se considere como una nueva fuente de ondas esféricas”, éste es el llamado principio de Huygens [5].

Thomas Young, postuló en 1801 un principio que permitiría comprender los fenómenos de la difracción. Añadió a la teoría ondulatoria un nuevo concepto fundamental llamado principio de interferencia. El concepto de interferencia luminosa surgió entonces como una hipótesis que trataba de explicar el fenómeno denominado difracción [1].

Augustin Jean Fresnel utilizó experimentos para demostrar la interferencia y la difracción de la luz donde pudo calcular los patrones de difracción generados por varios obstáculos y aperturas presentando una explicación en términos de teoría ondulatoria y explicó la propagación rectilínea [7, 6].

Las ideas de Huygens y Fresnel fueron puestas sobre una base matemática más firme por Gustav Kirchhoff, quien logró demostrar que las amplitudes y fases atribuidas a las fuentes secundarias por Fresnel eran de hecho consecuencias lógicas de la naturaleza ondulatoria de la luz [8]. La teoría de Kirchhoff también fue modificada por Sommerfeld, quien hizo uso del Teorema de Green. Fue llamada teoría de la difracción de Rayleigh-Sommerfeld [4].

Usando las soluciones de Sommerfeld se lograron encontrar las integrales de difracción de Fresnel y Fraunhofer [9]. Estas integrales permiten explicar la propagación de campos ópticos a través de aperturas u obstáculos. Se tienen dos tipos de regiones que se conocen como el campo cercano o integral de Fresnel y campo lejano o integral de Fraunhofer [10].

En este trabajo de tesis se elaboró un programa en Matlab para calcular numéricamente el campo óptico difractado a través de una apertura. Este programa se basa en la integral de difracción de Fresnel y se usó el algoritmo de Fast Fourier Transform (FFT).

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Elaborar un programa en MATLAB que permita calcular numéricamente el campo óptico difractado que pasa a través de diferentes aperturas.

1.2.2. Objetivos específicos

- Estudiar la teoría que permite obtener la integral de difracción de Fresnel.
- Elaborar un programa en MATLAB, que está basado en la integral de difracción de Fresnel y el algoritmo Fast Fourier Transform.

1.3. Estructura de la tesis

Esta tesis se divide en 6 capítulos, en el capítulo 2 se definen los conceptos básicos de la transformada de Fourier, las funciones básicas que son los diferentes tipos de aperturas, la ecuación de Helmholtz y el teorema de Green.

El capítulo 3 comprende desde las suposiciones de Kirchhoff, pasando por las soluciones de Rayleigh - Sommerfeld, hasta obtener la integral de difracción de Fresnel, también se analiza la función respuesta al impulso.

En el capítulo 4 se da una breve explicación del uso de MATLAB. Se muestra el proceso de los códigos realizados en MATLAB de la función respuesta al impulso y de las diferentes aperturas.

El capítulo 5 se describe el arreglo experimental. Se muestran los resultados obtenidos de la simulación y de manera experimental.

Finalmente, se dan las conclusiones del trabajo en el capítulo 6.

Capítulo 2

Conceptos Básicos

En este capítulo se describen los conceptos básicos de la transformada de Fourier, las funciones básicas, la ecuación de Helmholtz y el teorema de Green que son necesarios para obtener la integral de difracción de Fresnel.

2.1. Transformada de Fourier

Las series de Fourier se utilizan como una herramienta para encontrar el valor de una función periódica como una suma infinita de valores reales. Para funciones no periódicas o funciones periódicas con periodo infinito se tienen las siguientes ecuaciones

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i(2\pi wt)] dt, \quad (2.1)$$

y

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \exp[i(2\pi wt)] dw. \quad (2.2)$$

Estas ecuaciones se conocen como integrales de Fourier.

La primera integral (ecuación (2.1)) viene directamente de la fórmula para los coeficientes de Fourier para una función periódica, mientras que la segunda (ecuación (2.2)) viene directamente de la fórmula para reconstruir una función periódica a partir de sus coeficientes de Fourier.

2.1.1. Transformada de Fourier bidimensional

La transformada de Fourier también llamada espectro de Fourier o espectro de Frecuencias de una función $g(x, y)$ con x y y dos variables independientes se definen como

$$G(\nu, \mu) = \mathcal{F}\{g(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[-i2\pi(\nu x + \mu y)] dx dy. \quad (2.3)$$

La transformada así definida es una función de valores complejos de dos variables independientes ν y μ llamadas frecuencias espaciales.

La transformada inversa de Fourier de la función $G(\nu, \mu)$ se representa por $\mathcal{F}^{-1}\{G(\nu, \mu)\}$ y se define como

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\nu, \mu)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(\nu, \mu) \exp[i2\pi(\nu x + \mu y)] d\nu d\mu. \quad (2.4)$$

2.1.2. Teoremas de la transformada de Fourier

En los siguientes casos se considera que las transformadas de Fourier de las funciones $g(x, y)$ y $h(x, y)$ están dadas por $G(\nu, \mu) = \mathcal{F}\{g(x, y)\}$ y $H(\nu, \mu) = \mathcal{F}\{h(x, y)\}$ respectivamente; además, se considera que α y β son constantes. Los teoremas de las transformadas de Fourier son:

Teorema de Linealidad. Establece que la transformada de Fourier de una suma de dos o más funciones es idéntica a la suma de sus transformadas individuales y está dada por

$$\mathcal{F}\{\alpha g(x, y) + \beta h(x, y)\} = \alpha G(\nu, \mu) + \beta H(\nu, \mu). \quad (2.5)$$

Teorema de Similitud. Este teorema establece que una amplificación en el dominio espacial (x, y) induce una contracción en el dominio frecuencial (ν, μ) y viceversa además de cambio en la amplitud del espectro.

$$\mathcal{F}\{g(\alpha x, \beta y)\} = \frac{1}{|\alpha\beta|} G\left(\frac{\nu}{\alpha}, \frac{\mu}{\beta}\right). \quad (2.6)$$

Teorema del Desplazamiento. La transformada de Fourier de una función desplazada lateralmente es idéntica a la transformada de Fourier de la función sin desplazamiento multiplicada por un cambio de fase

$$\mathcal{F}\{g(x - \alpha, y - \beta)\} = G(\nu, \mu) \exp[-2i\pi(\nu\alpha + \mu\beta)]. \quad (2.7)$$

Teorema de Rayleigh o de Parseval. Este teorema es también conocido como el principio de conservación de energía debido a que iguala la energía en el dominio espacial con la energía en el dominio frecuencial. Es decir:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|^2 dx dy = \iint_{-\infty}^{\infty} |G(\nu, \mu)|^2 d\nu d\mu. \quad (2.8)$$

Teorema de Convolución. Este teorema es muy útil porque simplifica la operación de multiplicación de funciones. Es decir, la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones en el dominio espacial es equivalente al producto de sus transformadas de Fourier individuales. Esto se establece claramente mediante la siguiente ecuación

$$\mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta\right\} = G(\nu, \mu) H(\nu, \mu). \quad (2.9)$$

Teorema de Autocorrelación. Este es un caso especial del teorema de convolución en el cual se convolucionan las funciones $g(x, y)$ con $g^*(-x, -y)$. Se establece que

$$\mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) g^*(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta\right\} = |G(\nu, \mu)|^2, \quad (2.10)$$

similarmente,

$$\mathcal{F}\{|g(x, y)|^2\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \eta)G^*(\xi - \nu, \eta - \mu)d\xi d\eta. \quad (2.11)$$

Teorema Integral de Fourier. Este teorema es importante para sistemas ópticos. Establece que

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}[g(x, y)]\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[g(x, y)]\} = g(x, y), \quad (2.12)$$

donde \mathcal{F}^{-1} representa a la transformada inversa de Fourier.

2.1.3. Convolución de funciones

La operación de convolución se emplea para escribir la forma de la intersección matemática de dos objetos de manera simple que permita utilizar el teorema de Fourier de manera eficiente.

Una convolución es un operador que transforma dos funciones f y g en una tercera función que representa la magnitud en la que se superponen f y una versión trasladada e invertida de la función g (figura 2.1).

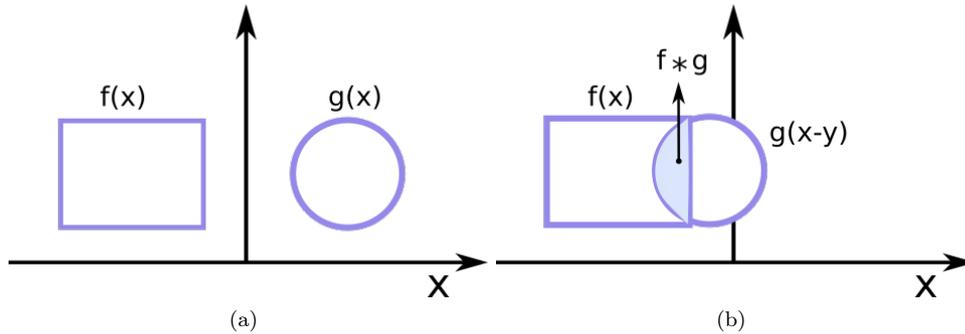


Figura 2.1: a) Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, b) la convolución es el área de traslape entre las funciones f y g .

Sean dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas transformadas de Fourier son $F(\nu)$ y $G(\nu)$ respectivamente. Se define la convolución de las funciones f y g como

$$f(x) * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy. \quad (2.13)$$

Utilizando las transformadas de Fourier de f y de g se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\exp[-it(x-y)]dtdy, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\exp(ity)dy \right] \exp(-itx)dt, \quad (2.14) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t)\exp(-itx)dt.
\end{aligned}$$

Se puede interpretar el resultado obtenido en la ecuación 2.14 como: La transformada inversa de Fourier de un producto de transformadas de Fourier es la convolución de las funciones originales f y g .

2.2. Funciones básicas

En esta sección se hace mención de las funciones básicas importantes para lograr el objetivo de este trabajo de tesis.

2.2.1. Apertura rectangular

El campo de una apertura rectangular de dimensiones a , b , cuya ecuación es

$$f(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right), \quad (2.15)$$

donde a es el ancho y b la altura de la apertura del rectángulo (figura 2.2) es representada por

$$\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{a}{2}, \\ 0, & \text{otro caso}, \end{cases} \quad (2.16)$$

y

$$\text{rect}\left(\frac{y}{b}\right) = \begin{cases} 1, & |y| \leq \frac{b}{2}, \\ 0, & \text{otro caso}. \end{cases} \quad (2.17)$$

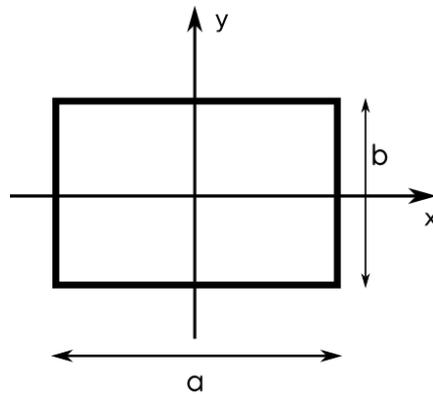


Figura 2.2: Diagrama de una apertura rectangular, a y b son el ancho y alto de la apertura que está centrada en el origen del sistema de referencia.

2.2.2. Rendija

La rendija es un caso especial de la función rectángulo descrita en la sección anterior, debido a que puede tener el mismo ancho, pero tiene una altura infinita, por lo que se puede representar matemáticamente como una función rectángulo unidimensional (figura 2.3), tal como se muestra en la ecuación siguiente

$$f(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot 1, \quad (2.18)$$

donde a es el ancho de la apertura.

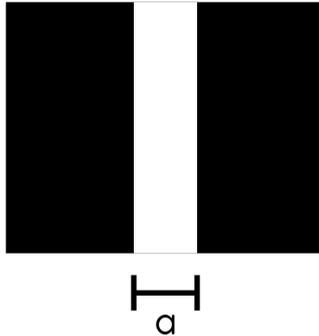


Figura 2.3: Representación esquemática de una rendija, a es el ancho de la apertura.

2.2.3. Rejilla cosenoidal

Una rejilla cosenoidal está formada por una colección de rendijas de fase o de amplitud paralelas separadas periódicamente, cuya ecuación es

$$f(x) = a + b \cos(2\pi fx), \quad (2.19)$$

donde $f = 1/p$ es la frecuencia espacial de la rejilla, a es la radiación de fondo y b el contraste (figura 2.4). El término $(2\pi fx)$ es el argumento de la función coseno y es conocido como fase.

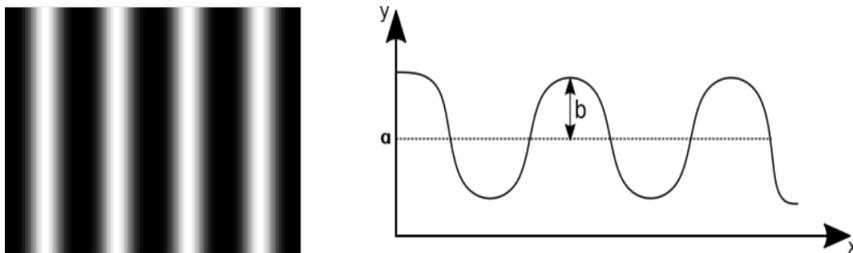


Figura 2.4: Representación de una rejilla cosenoidal, a es la radiación de fondo como puede observarse es constante y b es la altura máxima y mínima que se puede alcanzar, por lo que se le conoce como contraste.

2.2.4. Rejilla binaria

La rejilla binaria es una serie de franjas claras y oscuras que se utiliza para proyectar luz estructurada es conocida como rejilla de Ronchi, que esta representada por la figura 2.5 y cuya ecuación es

$$f(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \text{comb}(x), \quad (2.20)$$

donde $\text{comb}(x)$ es conocida como peine de Dirac (figura 2.6).

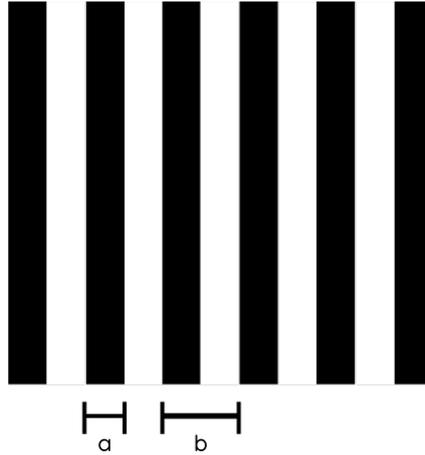


Figura 2.5: Representación de una rejilla binaria de apertura a y periodo $b = 2a$.

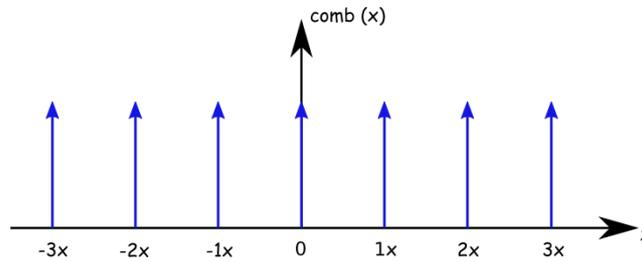


Figura 2.6: Diagrama de la función $\text{comb}(x)$ o peine de Dirac

2.3. Ecuación de Helmholtz

Una onda plana viajera de amplitud A se puede escribir como

$$u(\vec{r}, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt), \quad (2.21)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda y w es la frecuencia angular y además $w = 2\pi\nu$ es la frecuencia temporal medida en Hertz. Esta expresión también se puede escribir en forma compleja como

$$u(\vec{r}, t) = A \exp\left[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt)\right]. \quad (2.22)$$

La expresión dada en la ecuación (2.22) se puede escribir como

$$u(\vec{r}, t) = U(\vec{r})\exp(-i\omega t), \quad (2.23)$$

donde $U(\vec{r}) = A\exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r})]$ es conocido como fásor y también es llamada amplitud compleja. Por otra parte la ecuación de onda esta dada por

$$\nabla^2 u(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.24)$$

que al sustituir la ecuación (2.23) en la ecuación de onda (2.24) se tiene para la parte espacial

$$\nabla^2 U(\vec{r}, t) = \nabla^2 U(\vec{r})\exp(-i\omega t), \quad (2.25)$$

y para la parte temporal

$$\frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 U(\vec{r})\exp(-i\omega t), \quad (2.26)$$

por lo que sustituyendo las ecuaciones (2.25) y (2.26) en la ecuación (2.24) y agrupando términos se obtiene

$$(\nabla^2 + k^2) U(\vec{r}) = 0, \quad (2.27)$$

donde se utilizó el hecho que $k = \omega/c$. Esta ecuación es conocida como Ecuación de Helmholtz.

2.4. Teorema de Green

El teorema de Green es fundamental para el desarrollo de la difracción y envuelve dos funciones de valores complejos $U(\vec{r})$ y $G(\vec{r})$, ésta última llamada Función de Green, establece que si S es una superficie cerrada que encierra un volumen V (figura 2.7) y si $U(\vec{r})$ y $G(\vec{r})$, sus primeras y segundas derivadas parciales son univaluadas y continuas dentro y sobre S , entonces se cumple:

$$\iiint_V [G\nabla^2 U - U\nabla^2 G] dv = \iint_S \left[G \frac{\partial U}{\partial \nu} - U \frac{\partial G}{\partial \nu} \right] ds, \quad (2.28)$$

donde $\partial G/\partial \nu$ indica la derivada parcial en la dirección normal en cada punto sobre S conocida como derivada direccional.

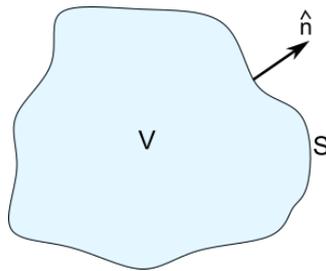


Figura 2.7: Una superficie cerrada S limitando una región de volumen V .

Este teorema es fundamental en la teoría escalar de difracción, solo si se escoge adecuadamente la función G y la superficie cerrada S se podrá aplicar correctamente al problema de difracción.

Capítulo 3

Difracción de Fresnel

El termino “**difracción**” se origina de la palabra latina “**diffringere**” que significa “*romperse en pedazos*” y se refiere a la fragmentación de ondas después de la interacción con objetos [11].

3.1. Teorema integral de Helmholtz y Kirchhoff

Considérese un punto de observación P_0 y una superficie cerrada S que rodea a éste punto como se muestra en la figura 3.1.

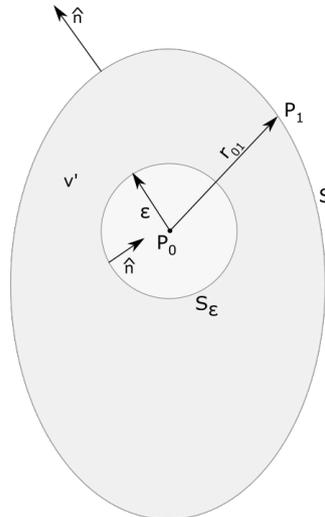


Figura 3.1: Superficie de integración.

El problema consiste en expresar la perturbación óptica en P_0 en términos de sus valores sobre la superficie S . Para resolver este problema, Kirchhoff utilizó la función de Green correspondiente a una onda esférica divergente expandiéndose de P_0 .

La función de Kirchhoff G en un punto P_1 sobre S está dada por

$$G(P_1) = \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}}, \quad (3.1)$$

donde r_{01} es la longitud del vector \vec{r}_{01} que apunta de P_0 a P_1 .

Para aplicar el teorema de Green, la función G (también su primera y segunda derivada parcial) debe ser continua dentro del volumen encerrado V . Para excluir la discontinuidad en P_0 se construye una superficie esférica S_ϵ de radio ϵ alrededor de P_0 . El teorema de Green se aplica entonces sobre el volumen V' que es formado por las superficies S y S_ϵ por lo que la superficie de integración es $S' = S + S_\epsilon$.

Dentro del volumen V' , la perturbación G es simplemente una onda esférica divergente que satisface la ecuación de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)G = 0. \quad (3.2)$$

Sustituyendo ambas ecuaciones de Helmholtz (ecuaciones (2.27) y (3.2)) en el término de la izquierda del teorema de Green (2.28) se tiene

$$\iiint_{V'} [G\nabla^2 U - U\nabla^2 G] dv = \iiint_{V'} [Gk^2 U - Uk^2 G] dv = 0 \quad (3.3)$$

por lo que el teorema de Green se reduce a sólo la integral de superficie sobre S' , es decir

$$\iint_{S'} \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds = 0, \quad (3.4)$$

pero como $S' = S + S_\epsilon$, entonces

$$-\iint_{S_\epsilon} \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds = \iint_S \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds. \quad (3.5)$$

Para un punto general P_1 sobre S tenemos que de la ecuación (3.1), la derivada direccional es

$$\frac{\partial G(P_1)}{\partial n} = \cos(\hat{n}, \vec{r}_{01}) \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}}. \quad (3.6)$$

La ecuación $\partial G(P_1)/\partial n$ es la derivada direccional de la función $G(P_1)$ en la dirección del vector unitario \hat{n} y por definición se establece que si $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y \vec{V} es el vector $\vec{V} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{V}} = \nabla f \cdot \vec{V}, \quad (3.7)$$

donde ∇f es gradiente de la función f dado por

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}. \quad (3.8)$$

Por tanto, considerando la simetría de la función G , el gradiente se puede expresar en coordenadas esféricas como

$$\nabla G = \frac{\partial G}{\partial r} \hat{r}, \quad (3.9)$$

y se obtiene, sustituyendo $G(P_1)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(P_1)}{\partial r_{01}} &= \frac{\partial}{\partial r_{01}} \left(\frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \right) \\ &= \frac{r_{01} i k \exp(ikr_{01}) - \exp(ikr_{01})}{r_{01}^2} \\ &= \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}},\end{aligned}\tag{3.10}$$

por tanto, el gradiente de la función G se obtiene considerando la ecuación anterior multiplicada por el vector unitario de la siguiente manera

$$\nabla(G) = \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \hat{r}_{01},\tag{3.11}$$

y entonces, la derivada direccional de G respecto del vector unitario \hat{n} está dada por

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \hat{n}} &= \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \hat{r}_{01} \cdot \hat{n} \\ &= \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos(\hat{n}, \hat{r}_{01}).\end{aligned}\tag{3.12}$$

Para el caso en que P_1 esté sobre la superficie S_ϵ se tiene

$$G(P_1) = \frac{\exp(ik\epsilon)}{\epsilon},\tag{3.13}$$

y además

$$\frac{\partial G(P_1)}{\partial \hat{n}} = - \left(ik - \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{\exp(ikr_{01})}{\epsilon},\tag{3.14}$$

en la anterior ecuación se utilizó el hecho que $\cos(\hat{n}, \hat{r}_{01}) = -1$ ya que \hat{r}_{01} y ϵ son antiparalelos.

Entonces, cuando $\epsilon \rightarrow 0$ la continuidad de U en P_0 permite escribir

$$\begin{aligned}\iint_{S_\epsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial \hat{n}} - G \frac{\partial U}{\partial \hat{n}} \right) ds &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\epsilon} \left[U(P_0) \left(\frac{1}{\epsilon} - ik \right) \frac{e^{(ik\epsilon)}}{\epsilon} - \frac{e^{(ik\epsilon)}}{\epsilon} \frac{\partial U(P_0)}{\partial \hat{n}} \right] ds \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[U(P_0) \left(\frac{1}{\epsilon} - ik \right) \frac{e^{(ik\epsilon)}}{\epsilon} - \frac{e^{(ik\epsilon)}}{\epsilon} \frac{\partial U(P_0)}{\partial \hat{n}} \right] 4\pi\epsilon^2 \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[U(P_0) e^{(ik\epsilon)} - U(P_0) ik e^{(ik\epsilon)} \epsilon - \epsilon e^{(ik\epsilon)} \frac{\partial U(P_0)}{\partial \hat{n}} \right] 4\pi \\ &= 4\pi U(P_0).\end{aligned}\tag{3.15}$$

Finalmente, se obtiene

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(G \frac{\partial U}{\partial \hat{n}} - U \frac{\partial G}{\partial \hat{n}} \right) ds.\tag{3.16}$$

Esta ecuación es conocida como el Teorema de Helmholtz y Kirchhoff.

3.2. Formulación de Kirchhoff de difracción por una pantalla plana

Considérese una apertura en una pantalla opaca infinita como se muestra en la figura 3.2.

En esta situación se considera que una onda incide sobre la pantalla opaca y la apertura Σ y se desea calcular el campo en el punto P_0 detrás de la apertura.

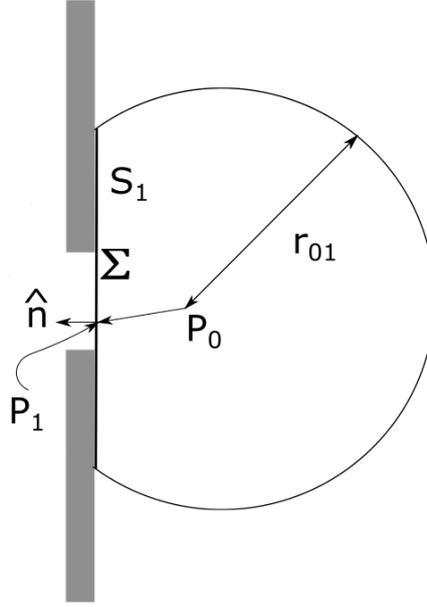


Figura 3.2: Superficie propuesta por Kirchhoff para la difracción por una pantalla plana.

Para encontrar el campo en el punto deseado se usa el teorema integral de Helmholtz y Kirchhoff usando la superficie de integración $S = S_1 + S_2$. La superficie S_2 tiene un radio R centrado en el punto de observación P_0 . Entonces,

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1+S_2} \left(G \frac{\partial U}{\partial \hat{n}} - U \frac{\partial G}{\partial \hat{n}} \right) ds. \quad (3.17)$$

Se considera nuevamente que la función de Green tiene la forma

$$G = \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}}, \quad (3.18)$$

y también

$$\frac{\partial G}{\partial \hat{n}} = \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos(\hat{n}, \hat{r}_{01}). \quad (3.19)$$

Primero se calculará la integral sobre la superficie S_2 . Es decir, se considera que el punto P_1 está sobre S_2 , por lo que las ecuaciones ((3.18) y (3.19)) se pueden reescribir como:

$$G = \frac{\exp(ikR)}{R}, \quad (3.20)$$

y

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} = \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{\exp(ikR)}{R} \cos(\hat{n}, \hat{R}). \quad (3.21)$$

La ecuación (3.21) se puede reducir si se supone que $R \rightarrow \infty$ y además, por simetría de la geometría se puede observar que los vectores \vec{R} y \vec{n} son paralelos, por lo que

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \approx ikG. \quad (3.22)$$

Entonces, la integral sobre la superficie S_2 se puede escribir, considerando las ecuaciones (3.20) y (3.22) como

$$\iint_{S_2} \left(G \frac{\partial U}{\partial \hat{n}} - U \frac{\partial G}{\partial \hat{n}} \right) ds = \iint_{S_2} G \left(\frac{\partial U}{\partial \hat{n}} - ikU \right) ds \quad (3.23)$$

para resolver esta integral es necesario recordar la definición de ángulo sólido, $\Omega = S/R^2$, y además

$$\iint ds = \int_{\Omega} R^2 d\Omega, \quad (3.24)$$

por tanto

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} G \left(\frac{\partial U}{\partial \hat{n}} - ikU \right) ds &= \int_{\Omega} GR^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \hat{n}} - ikU \right) d\Omega \\ &= \exp(ikR) \int_{\Omega} R \left(\frac{\partial U}{\partial \hat{n}} - ikU \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (3.25)$$

En el caso en que el límite cuando $R \rightarrow \infty$ se tiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial U}{\partial \hat{n}} - ikU \right) = 0 \quad (3.26)$$

La ecuación (3.26) es conocida como condición de radiación de Sommerfeld y se satisface si U desaparece tan rápido como una onda esférica divergente.

3.2.1. Condiciones de frontera de Kirchhoff

Una vez que se ha dispuesto de la integral sobre S_2 entonces el problema se reduce a calcular la integral sobre la superficie S_1 es decir

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left(G \frac{\partial U}{\partial \hat{n}} - U \frac{\partial G}{\partial \hat{n}} \right) ds. \quad (3.27)$$

La superficie S_1 está colocada detrás de la pantalla opaca y contiene a la apertura Σ que es la parte de la superficie que no es opaca, sino que es transparente, por lo que se intuye que las contribuciones al campo son únicamente debidas a la apertura Σ . Kirchhoff hizo las siguientes suposiciones:

- A través de la superficie de Σ , el campo U y sus derivadas parciales son exactamente las mismas como lo serían en la ausencia de la pantalla.

3.2. FORMULACIÓN DE KIRCHHOFF DE DIFRACCIÓN POR UNA PANTALLA PLANA 15

- Sobre la porción de S_1 que cae sobre la sombra geométrica de la pantalla, el campo U y sus derivadas parciales son cero.

Por tanto, la integral de la ecuación (3.27) se puede escribir como

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(G \frac{\partial U}{\partial \hat{n}} - U \frac{\partial G}{\partial \hat{n}} \right) ds. \quad (3.28)$$

3.2.2. Fórmula de difracción de Fresnel - Kirchhoff

La ecuación (3.28) se puede simplificar si se considera que r_{01} que es la distancia entre el punto de observación y la apertura es mucho mayor que la longitud de onda λ y como $r_{01} \gg \lambda$ entonces $k \gg 1/r_{01}$, por lo que la derivada direccional de la función de Green G se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \hat{n}} &= \cos(\hat{n}, \hat{r}_{01}) \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}}, \\ &\approx \cos(\hat{n}, \hat{r}_{01}) ik \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

por lo que sustituyendo en (3.28)

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \left[\frac{\partial U}{\partial \hat{n}} - ikU \cos(\hat{n}, \hat{r}_{01}) \right] ds. \quad (3.30)$$

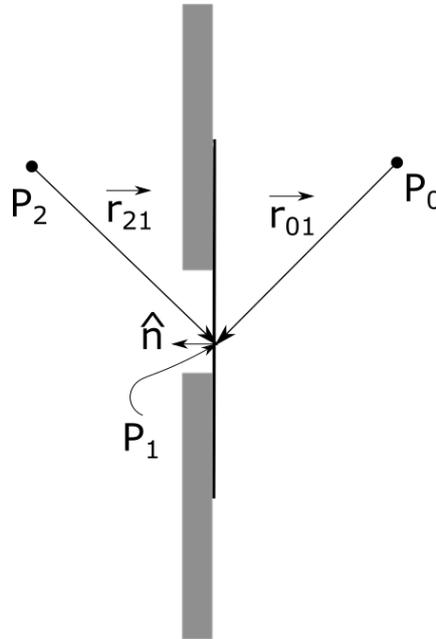


Figura 3.3: La apertura es iluminada por una fuente puntual colocada en P_2 .

Ahora supóngase que la apertura es iluminada por una onda esférica tal como se muestra en la figura 3.3 y que está dada por

$$U(P_1) = A \frac{\exp(ikr_{21})}{r_{21}}. \quad (3.31)$$

Nuevamente, si se supone que $r_{21} \gg \lambda$ se tiene

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \left[A \cos(\hat{n}, \hat{r}_{21}) ik \frac{\exp(ikr_{21})}{r_{21}} - ikA \cos(\hat{n}, \hat{r}_{01}) ik \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \right] ds. \quad (3.32)$$

Agrupando términos semejantes se puede reducir a

$$U(P_0) = \frac{A}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\exp[ik(r_{21} + r_{01})]}{r_{01}r_{21}} [\cos(\hat{n}, \hat{r}_{21}) - \cos(\hat{n}, \hat{r}_{01})] ik ds, \quad (3.33)$$

tomando en cuenta que $k = 2\pi/\lambda$ y multiplicando y dividiendo por i se obtiene

$$U(P_0) = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp[ik(r_{21} + r_{01})]}{r_{01}r_{21}} \frac{\cos(\hat{n}, \hat{r}_{21}) - \cos(\hat{n}, \hat{r}_{01})}{2} ik ds. \quad (3.34)$$

La ecuación (3.34) es conocida como Fórmula de difracción de Fresnel - Kirchhoff.

Este resultado es similar si ahora se analiza el campo difractado en P_2 si se ilumina con una onda esférica centrada en P_0 . Este principio de reciprocidad es conocido como teorema de reciprocidad de Helmholtz.

3.2.3. Teoría de difracción de Rayleigh - Sommerfeld

Sommerfeld propuso el uso de una función de Green diferente a la propuesta por Kirchhoff para evitar las condiciones de frontera. Sommerfeld propuso una función de Green G que no es generada solo por una fuente puntual colocada en P_0 , si no también se genera simultáneamente por una segunda fuente puntual en la posición P'_0 la cual es la imagen espejo de P_0 en el lado opuesto a la pantalla, tal como se muestra en la figura 3.4. Sea la fuente en P'_0 de la misma longitud de onda λ que la fuente P_0 y supóngase también que las fuentes están desfasadas 180° . Sommerfeld propuso la siguiente función de Green

$$G_2(\vec{r}) = \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} - \frac{\exp(ikr'_{01})}{r'_{01}}, \quad (3.35)$$

donde r'_{01} es la distancia de P'_0 a P_1 y P'_0 es la imagen espejo de P_0 .

Entonces sustituyendo la nueva función de Green en la ecuación (3.27) se obtiene

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial U}{\partial \hat{n}} \left(\frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} - \frac{\exp(ikr'_{01})}{r'_{01}} \right) - U \frac{\partial G_2}{\partial \hat{n}} \right] ds. \quad (3.36)$$

Si P_0 y P'_0 son puntos espejo, entonces se observa que $|r_{01}| = |r'_{01}|$ por lo que se puede reducir a

$$U(P_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} U \frac{\partial G_2}{\partial \hat{n}} ds. \quad (3.37)$$

La ecuación (3.37) es conocida como Primera Solución de Rayleigh - Sommerfeld.

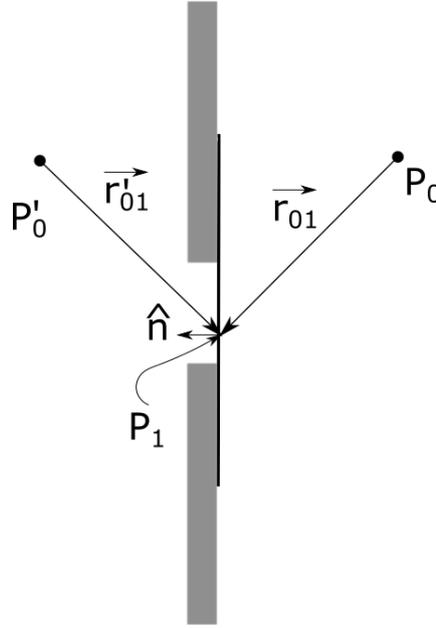


Figura 3.4: Formulación de la difracción por una pantalla plana según Rayleigh - Sommerfeld.

Considerando la derivada direccional de la nueva función de Green se observa que

$$\frac{\partial G_2}{\partial \hat{n}} = \cos(\hat{n}, \hat{r}_{01}) \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{e(ikr_{01})}{r_{01}} - \cos(\hat{n}, \hat{r}'_{01}) \left(ik - \frac{1}{r'_{01}} \right) \frac{e(ikr'_{01})}{r'_{01}}. \quad (3.38)$$

Ahora para un punto P_1 sobre la superficie S_1 se tiene que $r_{01} = r'_{01}$ y además $\cos(\hat{n}, \hat{r}'_{01}) = -\cos(\hat{n}, \hat{r}_{01})$ por lo que la ecuación (3.38) se reduce a

$$\frac{\partial G_2(r)}{\partial \hat{n}} = 2 \cos(\hat{n}, \hat{r}_{01}) \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}}, \quad (3.39)$$

y además, se observa que

$$\frac{\partial G_2(r)}{\partial \hat{n}} = 2 \frac{\partial G}{\partial \hat{n}}, \quad (3.40)$$

sustituyendo la ecuación (3.40) en la ecuación (3.37) se obtiene que

$$U(P_0) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} U \frac{\partial G}{\partial \hat{n}} ds, \quad (3.41)$$

considerando el resultado conocido de la derivada direccional de la función G (ecuación (3.29)) se tiene

$$U(P_0) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} U \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos \theta ds, \quad (3.42)$$

donde θ es el ángulo que se forma entre \hat{n} y r_{01} . Además, suponiendo que $r_{01} \gg \lambda$ la ecuación (3.42) se reduce a

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos \theta ds, \quad (3.43)$$

donde se consideró que $k = 2\pi/\lambda$.

3.3. Difracción de Fresnel

Estableciendo un sistema de referencias rectangular que permita utilizar adecuadamente la integral dada en la ecuación 3.43 se utilizará la figura 3.5.

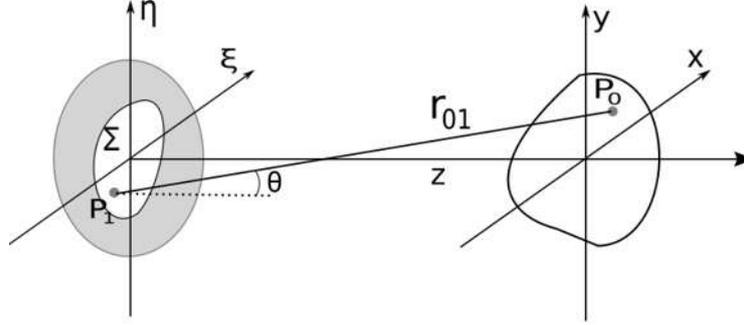


Figura 3.5: Sistema de coordenadas rectangulares utilizado para simplificar la integral de difracción

La apertura Σ está sobre el plano (ξ, η) y se ilumina desde la dirección positiva de z y se quiere calcular el campo en un punto P_0 localizando en el plano (x, y) paralelo al plano (ξ, η) normal a la distancia z . En la figura 3.5 se observa que θ es el ángulo entre la normal \hat{n} al plano (ξ, η) y el vector \hat{r}_{01} apuntando de P_1 a P_0 , por lo que el término del coseno de la ecuación (3.43) es entonces:

$$\cos(\theta) = \frac{z}{r_{01}}, \quad (3.44)$$

por lo que sustituyendo en la ecuación (3.43) se tiene

$$U(P_0) = \frac{z}{i\lambda} \int \int_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}^2} d\xi d\eta, \quad (3.45)$$

donde la distancia r_{01} viene dada exactamente por

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad (3.46)$$

o expresado de otra manera

$$r_{01} = z \sqrt{1 + \left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2}, \quad (3.47)$$

suponiendo que $z \gg (x - \xi)$ debido a que se analizan puntos P_1 con coordenadas (ξ, η) y P_0 con coordenadas (x, y) cercanos al origen de los sistemas de referencias, se tiene que

$$\left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2 \ll 1, \quad (3.48)$$

utilizando la expansión binomial y manteniendo los dos primeros términos se obtiene

$$r_{01} \approx z \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2 \right] \right\}. \quad (3.49)$$

El resultado obtenido en la ecuación (3.49) se sustituye en la ecuación (3.45) considerando lo siguiente. El término entre corchetes de la ecuación (3.49) es muy pequeño porque las diferencias $(x - \xi)$ y $(y - \eta)$ son mucho menores que z esto es porque sólo se consideran las posiciones de P_1 y P_0 cercanas al origen de su respectivo sistema de coordenadas. En base a lo anterior, el término r_{01}^2 en el denominador de la ecuación (3.45) se sustituye sólo por z^2 ya que los demás términos se hacen aún más pequeños al elevarlos al cuadrado. Esto no ocurre en el exponente de la función exponencial porque r_{01} está multiplicando por k que es un número muy grande debido que su valor está dado por $k = 2\pi/\lambda$ y el término entre corchetes de la ecuación (3.49) ya no puede ser despreciable porque adquiere un valor importante. Por tanto, sustituyendo adecuadamente las aproximaciones en la ecuación (3.45) se tiene

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda z} \iint_{\Sigma} U(P_1) \exp \left\{ ik \left[z + \frac{1}{2}z \left[\left(\frac{x - \xi}{z} \right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{z} \right)^2 \right] \right] \right\} d\xi d\eta, \quad (3.50)$$

lo cual se puede reescribir

$$U(P_0) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \iint_{\Sigma} U(P_1) \exp \left\{ i \frac{k}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta, \quad (3.51)$$

Esta expresión puede verse como una convolución de dos funciones, es decir

$$U(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (3.52)$$

donde

$$h(x, y) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp \left[i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right], \quad (3.53)$$

es la función de respuesta al impulso. La integral de Fresnel dada en la ecuación (3.51) es útil para resolver problemas de difracción de campo cercano porque se expresa de una manera sencilla como la convolución de la función de respuesta al impulso y el campo óptico que se desea difractar dada por $U(\xi, \eta)$. Para encontrar la solución se puede utilizar la propiedad de la transformada de Fourier relacionada con el teorema de convolución, que expresa que la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones es el producto de sus transformadas de Fourier individuales.

Otra forma de ver la integral de difracción es desarrollado los cuadros de la siguiente manera

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz} e^{i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi, \eta) \exp \left[i \frac{k}{2z} (\xi^2 + \eta^2) \right] \right\} \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda z} (x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta. \quad (3.54)$$

La ecuación (3.54) excepto por factores de fase se puede identificar como la transformada de Fourier del producto del campo complejo justo a la derecha de la apertura y un factor de fase cuadrático.

Las ecuaciones (3.50), (3.51) y (3.54) son expresiones diferentes del mismo resultado que se conocen como Integral de Difracción de Fresnel. Cuando esta aproximación es válida se dice que el observador está en la región de Fresnel o en el campo cercano de la apertura.

3.4. Función de respuesta al impulso

La integral de difracción esta expresada en la ecuación (3.52) que puede reescribirse utilizando el teorema de convolución (ecuación (2.9)) como

$$\begin{aligned} U(\nu, \mu) &= \mathcal{F}\{U(x, y)\}, \\ &= \mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta)h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta\right\}, \\ &= G(\nu, \mu)H(\nu, \mu), \end{aligned} \quad (3.55)$$

donde $G(\nu, \mu)$ y $H(\nu, \mu)$ representan las transformadas de Fourier de U y de la función de respuesta al impulso respectivamente.

Considérese la función de respuesta al impulso dada en la ecuación (3.53) cuya transformada de Fourier es conocida como la función de transferencia y está dada por

$$\begin{aligned} H(\nu, \mu) &= \mathcal{F}\left\{\frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda}z(x^2 + y^2)\right]\right\}, \\ &= e^{ikz} \exp[-i\pi\lambda z(\nu^2 + \mu^2)] \end{aligned} \quad (3.56)$$

y para encontrar el campo óptico difractado se debe obtener la transformada inversa de Fourier de la ecuación (3.55) cuyo resultado es

$$U(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{U(\nu, \mu)\}. \quad (3.57)$$

Capítulo 4

Simulación de la Difracción de Fresnel

4.1. Conceptos básicos de MATLAB

MATLAB es un lenguaje informático para la computación científica y visualización de datos creado a un entorno de programación interactivo. El nombre *MATLAB* proviene de Matrix Laboratory, dado que el tipo de dato básico que gestiona es una matriz [12, 13].

Las integrales de difracción son difíciles de resolver analíticamente, por ello se elabora un programa en MATLAB que calcule el campo óptico difractado que pasa a través de una apertura.

4.2. Algoritmo de la difracción de Fresnel

En la sección 3.4 se explicó sobre la transformada de Fourier de dos funciones, siendo una de ellas la función respuesta al impulso. Actualmente MATLAB cuenta con un algoritmo llamado Fast Fourier Transform (FFT) que permite realizar dicha función.

Se genera una subrutina en MATLAB (figura 4.1), que es un código fuera del programa principal y será llamada más adelante. En esta subrutina se emplean los algoritmos de la transformada de Fourier y la transformada de Fourier inversa.

En el renglón 1 nos especifica la función de salida u_2 y sus cuatro variables de entrada: u_1 es el campo de entrada, L es la longitud de la cuadrícula, λ es la longitud de onda y z es la distancia de propagación desde la apertura.

En el renglón 3 se encuentran las dimensiones para el campo de entrada u_1 , se calcula el número de muestras y el número de onda en los renglones 4 y 5 respectivamente. Las coordenadas en el espacio de frecuencia se generan en el renglón 7. Una vez generada la matriz de vectores del renglón 8, procede a realizar la operación descrita en la sección 3.4.

En el renglón 10 se genera la función de respuesta al impulso para después en el renglón 11 la función de transferencia H , se hace la transformada de Fourier del campo incidente en

```

1 function[u2]=propIR(u1,L,lambda,z)
2
3 [M,~]=size(u1);
4 dx=L/M; %intervalo de muestra
5 k=2*pi/lambda; %número de onda
6
7 x=-L/2:dx:L/2-dx; %coordenadas espaciales
8 [X,Y]=meshgrid(x,x);
9
10 h=1/(j*lambda*z)*exp(j*k/(2*z)*(X.^2+Y.^2)); %respuesta al impulso
11 H=fft2(fftshift(h))*dx^2;
12 U1=fft2(fftshift(u1)); % función de FFT
13 U2=H.*U1;
14 u2=ifftshift(ifft2(U2)); %Función inversa de la FFT
15 end

```

Figura 4.1: Código para la función de respuesta al impulso

el renglón 12 y finalmente se obtiene u_2 al sacar la inversa del producto de la transformada de Fourier.

El programa principal (figura 4.2) consta de tres partes. La primera (renglón 6 al 11) son las constantes iniciales necesarias para el programa como son la longitud de la cuadrícula, el número de muestras, espaciado, número de onda y la distancia de propagación.

La segunda parte (renglón 14 al 62) se define el campo de entrada. Por ello, se utiliza `switch` y `case` para elegir alguna de las diferentes aperturas que son: rectangular, rejilla cosenoidal, rejilla binaria, rendija o figura, de las cuales se hicieron mención en la sección 2.2. Usando estas funciones o ingresando la figura deseada muestra la imagen de dicha apertura.

Ahora ya se tienen todos los elementos para simular la difracción. La tercera parte (renglón 65 al 74) se toma la imagen de la apertura deseada y se utiliza la subrutina del propagador ya mencionada anteriormente para encontrar el campo difractado de dicha apertura a la distancia z y después muestra la imagen del patrón de difracción.

```
1 %Difracción de Fresnel
2
3 clc; close all; clear;
4
5 %Constantes iniciales%
6 L1=0.01;           %Longitud de la cuadrícula
7 M=350;            %Número de muestras
8 dx1=L1/M;        %Intervalo de muestreo
9 lambda=0.543*10^-6; %Longitud de onda
10 k=2*pi/lambda;   %Número de onda
11 z=1.34;          %Distancia de propagación
12
13 %Aperturas%
14 x1=-L1/2:dx1:L1/2-dx1;
15 y1=x1;
16 [X1,Y1]= meshgrid(x1,y1);
17
18 disp('Aperturas: 1 Cuadrada, 2 Cosenoidal, 3 Binaria, 4 Rendija y 5 Figura');
19 n = input('Escoge una Apertura: ');
20 switch n
21     case 1 %Cuadrada
22         w=0.0001;
23         u1=rectangularPulse(X1/(2*w)).*rectangularPulse(Y1/(2*w));
24
25     case 2 %Cosenoidal
26         a=1;
27         b=1;
28         p=0.000169;
29
30         u1=zeros(M,M);
31
32         for r=1:M
33             for t=1:M
34                 u1(r,t)=a+(b*cos(2*(t/p)*pi));
35             end
36         end
37
```

```

39 case 3 %Binaria
40     A=2;
41     B=2*A;
42     u1=zeros(M,M);
43
44     for s=1:M/B
45         u1(:,1+(s-1)*B+A:A+(s-1)*B)=1;
46     end
47
48 case 4 %Rendija
49     w=0.0001;
50     u1=rectangularPulse(x1/(2*w));
51
52 case 5 %Figura
53     u1=imread('circs.png','png');
54     u1=u1(:,:,1);
55 end
56
57 I1=500*abs(u1.^2);
58 figure(1) %Grafica de la apertura
59 imagesc(x1,y1,I1);
60 colormap('gray'); xlabel('x (m)'); ylabel('y (m)');
61 title('z=0 m');
62
63 %Propagación%
64 u2=propIR(u1,L1,lambda,z);
65
66 x2=x1;
67 y2=x2;
68 I2=500*abs(u2.^2);
69
70 figure(2) %Patrón de difracción
71 imagesc(x2,y2,I2);
72 colormap('gray'); xlabel('x (m)'); ylabel('y (m)');
73 title(['z= ',num2str(z), 'm']);
74

```

Figura 4.2: Código principal

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo se describe el arreglo experimental utilizado para la difracción de Fresnel. Se dan a conocer los resultados obtenidos del programa (figura 4.2) y de manera experimental para diferentes distancias.

5.1. Arreglo experimental

En la figura 5.1 se muestra la fotografía del arreglo experimental empleado. Consiste en un haz de luz inicial proveniente del láser con línea de emisión en 543.5 nm correspondientes al color verde pasa por un sistema de atenuadores, el haz es filtrado generando una onda esférica que ilumina el objeto y se dirige hacia la pantalla que es una cámara CCD o cámara digital dependiendo del tamaño del objeto.

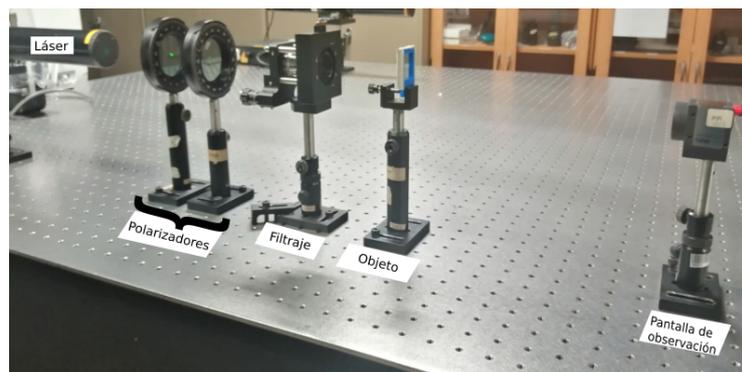


Figura 5.1: Arreglo experimental montado para la difracción de Fresnel. Se muestra : láser con línea de emisión en 543.5 nm, atenuadores, filtro, objeto y pantalla.

5.2. Efecto Talbot

El efecto Talbot es un fenómeno de difracción, se forma por propagación libre, una réplica llamada autoimagen del campo óptico que se encuentra en el plano $z=0$, como se muestra en la figura 5.2. Este efecto en una rejilla de fase finita se investiga teórica, computacional y experimentalmente.

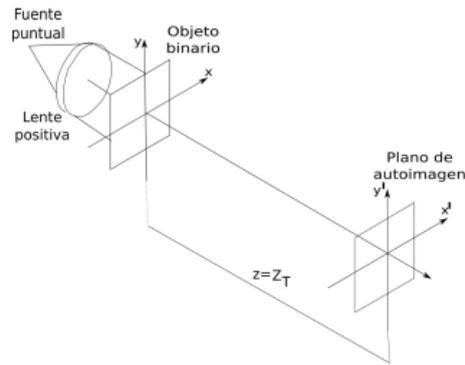


Figura 5.2: Efecto Talbot

Uno de los objetos utilizados es una rejilla binaria tipo Rochi (figura 5.3), en el inciso b) de manera experimental de 150 líneas/pulgadas que equivale a un periodo de 170 micras., en el inciso b) se muestra una rejilla binaria generada en el programa matlab con valores arbitrarios para obtener resultados mas nítidos.

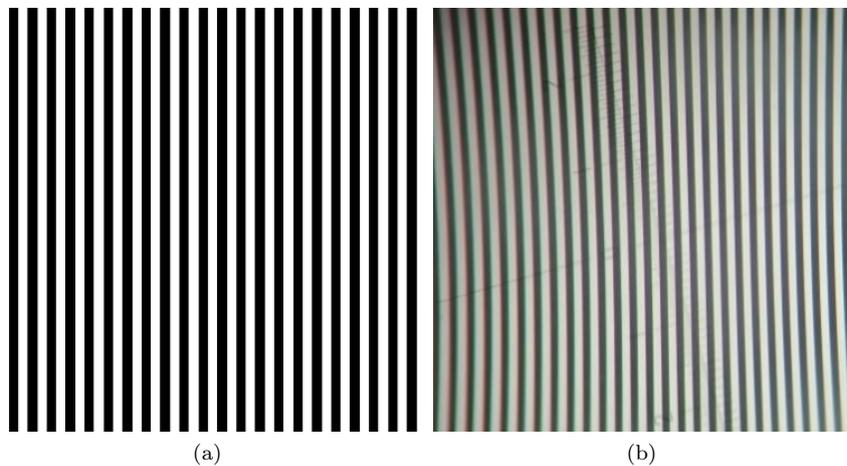


Figura 5.3: Rendija tipo Rochi: a) imagen generada por Matlab usando su función para la simulación y b) imagen experimental.

En el caso experimental a una distancia de 10 cm del objeto a la pantalla (cámara CCD) se encontró la imagen a un cuarto de la distancia de Talbot y en base al resultado

experimental se hizo la simulación a esa misma distancia. Estas dos imágenes se muestran la figura 5.4.

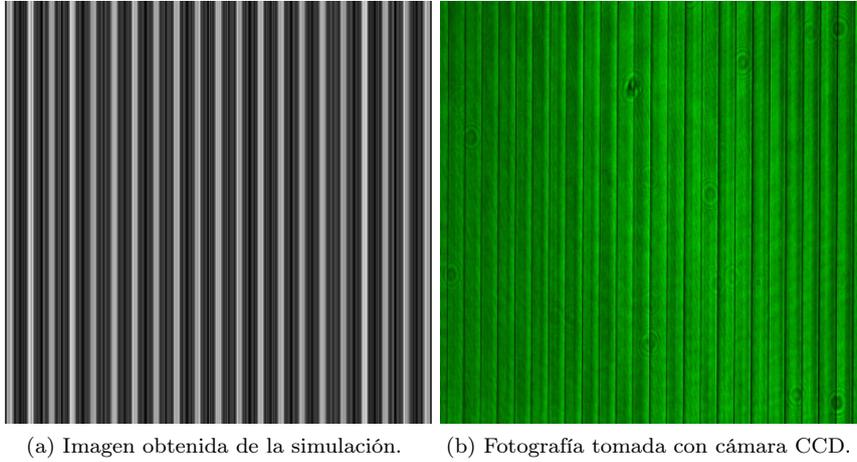


Figura 5.4: Campo difractado de una rejilla de 150 líneas/pulgada con un periodo de 170 micras a una distancia de 10 cm. a) Simulada y b) experimental, haciéndole zoom.

De la misma manera alejando la pantalla del objeto a una distancia de 67 cm se encontró la autoimagen inciso a) y se realizó la simulación a esa misma distancia inciso b) haciendo zoom a dicha imagen. Ambas imágenes se muestran en la figura 5.5.

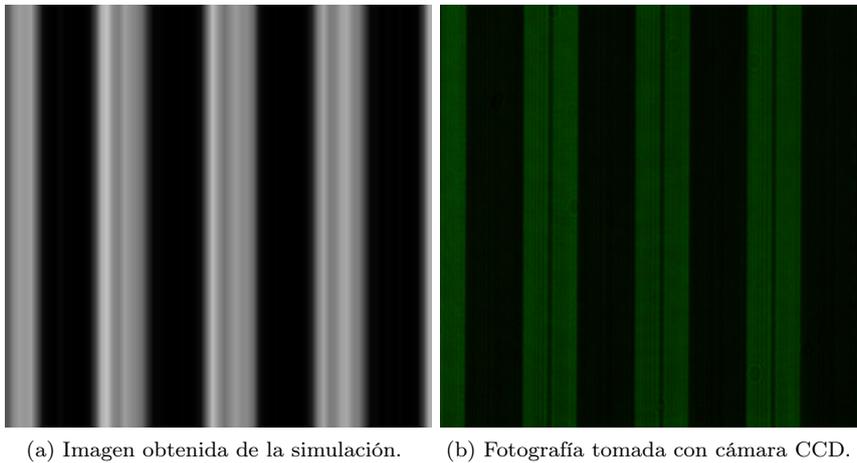


Figura 5.5: Campo difractado de una rejilla de 150 líneas/pulgada con un periodo de 170 micras a una distancia de 67 cm. a) Simulada y b) experimental.

5.3. Difracción de una rendija

De manera experimental la rendija tiene un ancho de 0.5mm, mientras que la simulación se realizó con un valor arbitrario como se muestra en la figura 5.6 para tener resultados más nítidos.

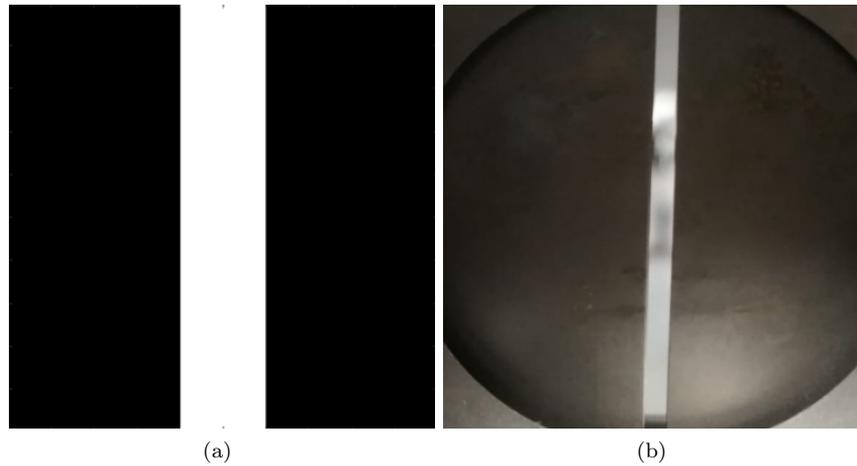


Figura 5.6: Rendija: a) imagen generada por Matlab usando su función para la simulación y b) imagen experimental.

Se consideraron 3 distancias arbitrarias. La primer distancia para observar el campo difractado es a 34 cm donde el inciso a) es la imagen simulada obtenida del programa y el inciso b) es la fotografía tomada con una cámara digital.

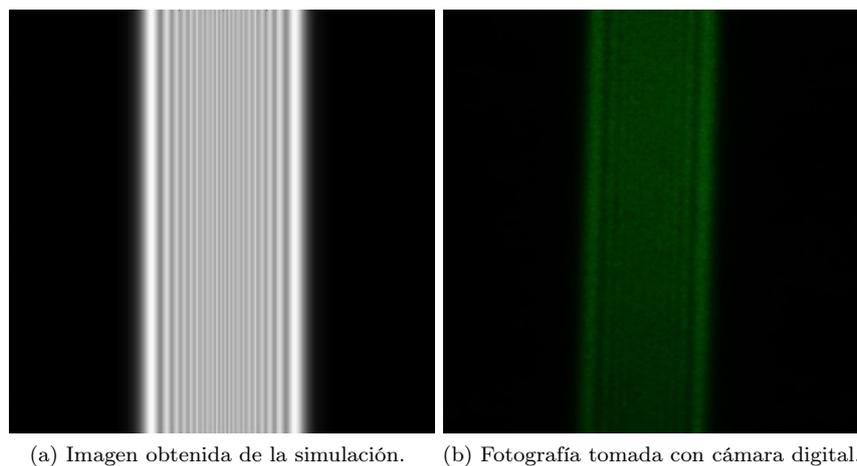
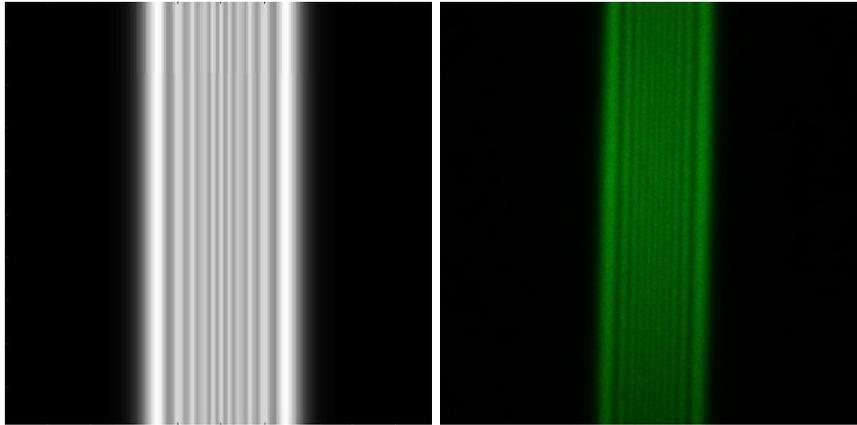


Figura 5.7: Campo difractado por una rendija a una distancia de 34 cm. a) Simulada y b) experimental.

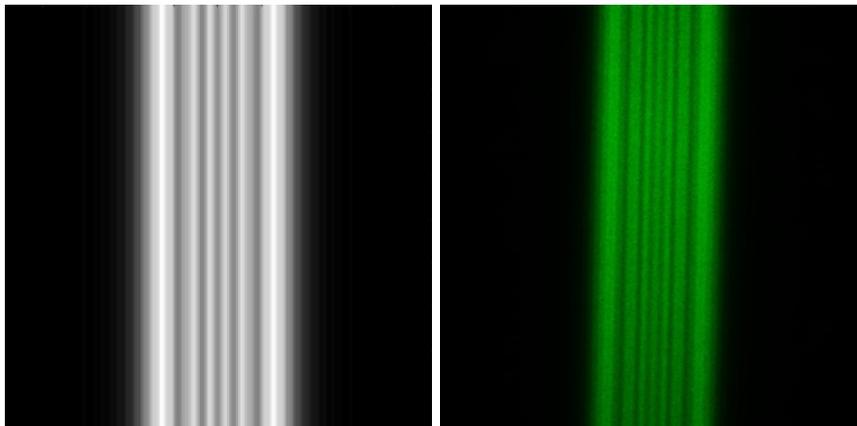
La segunda distancia es 69 cm del mismo modo el campo difractado del inciso a) es la imagen simulada obtenida del programa y el inciso b) es la fotografía tomada con una cámara digital.



(a) Imagen obtenida de la simulación. (b) Fotografía tomada con cámara digital.

Figura 5.8: Campo difractado por una rendija a una distancia de 69 cm. a) Simulada y b) experimental.

La tercer distancia es a 134 cm del mismo modo el campo difractado del inciso a) es la imagen simulada obtenida del programa y el inciso b) es la fotografía tomada con una cámara digital.



(a) Imagen obtenida de la simulación. (b) Fotografía tomada con cámara digital.

Figura 5.9: Campo difractado por una rendija a una distancia de 134 cm. a) Simulada y b) experimental.

5.4. Objetos binarios

En esta sección se presentan 3 diferentes aperturas que son: cuadrada, circular y tangente. Para cada una de las aperturas se consideraron 3 distancias arbitrarias.

5.4.1. Difracción de un cuadrado

En la figura 5.10 se muestra en el inciso a) la simulación de un cuadrado con ancho y largo de valor arbitrario que se utilizó para la propagación y mientras de manera experimental inciso b) se hizo uso de la rendija y con cinta aislante se obtuvo un cuadrado de 0.6 mm x 0.6 mm.

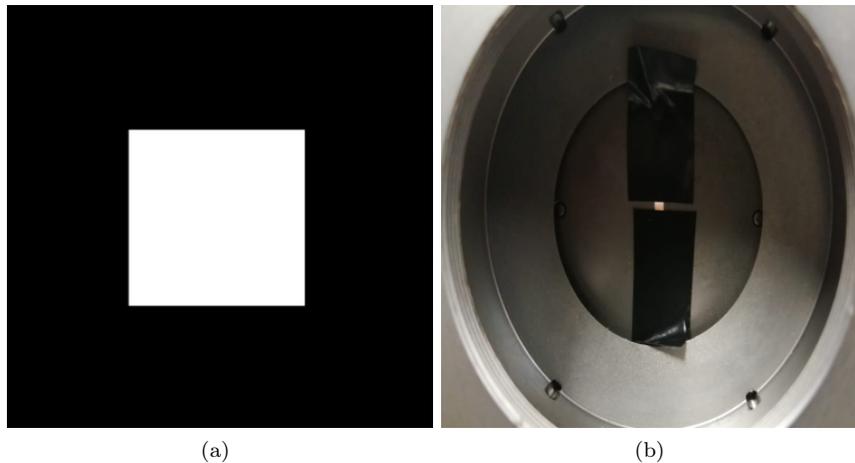
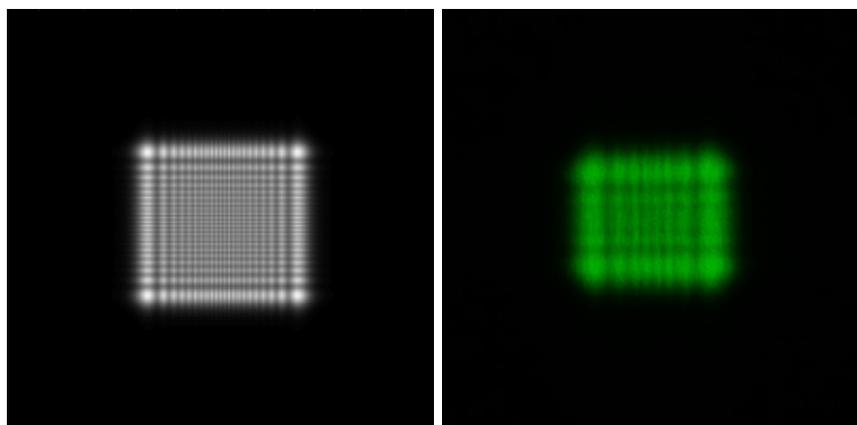


Figura 5.10: Cuadrado: a) imagen generada por Matlab usando su función para la simulación y b) imagen experimental.

El campo difractado que se muestra en la figura 5.11 es a una distancia de 34 cm. El inciso a) muestra la imagen simulada, mientras que el inciso b) se encuentra la imagen experimental tomada con una cámara digital.

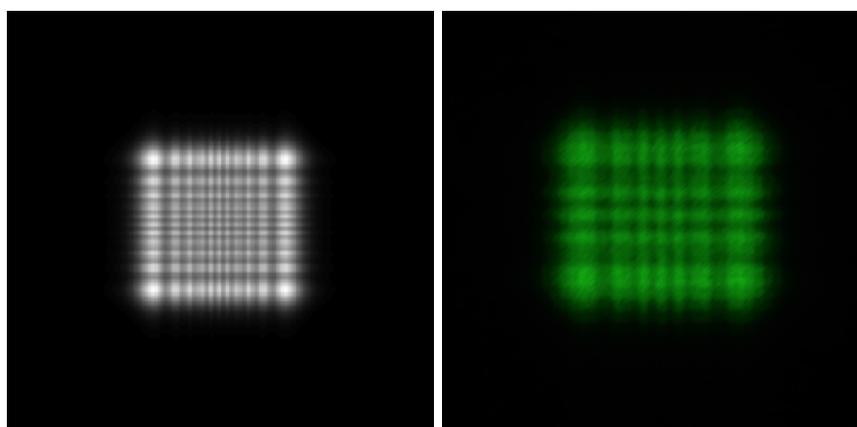
De igual manera a la distancia de 69 cm que se muestra en la figura 5.12. El inciso a) muestra la imagen simulada, mientras que el inciso b) se encuentra la imagen experimental tomada con una cámara digital.

La ultima distancia a 134 cm que se muestra en la figura 5.13. El inciso a) muestra la imagen simulada, mientras que el inciso b) se encuentra la imagen experimental tomada con una cámara digital.



(a) Imagen obtenida de la simulación. (b) Fotografía tomada con cámara digital.

Figura 5.11: Campo difractado por un cuadrado a una distancia de 34 cm. a) Simulada y b) experimental.



(a) Imagen obtenida de la simulación. (b) Fotografía tomada con cámara digital.

Figura 5.12: Campo difractado por un cuadrado a distancia de 69 cm. a) Simulada y b) experimental.

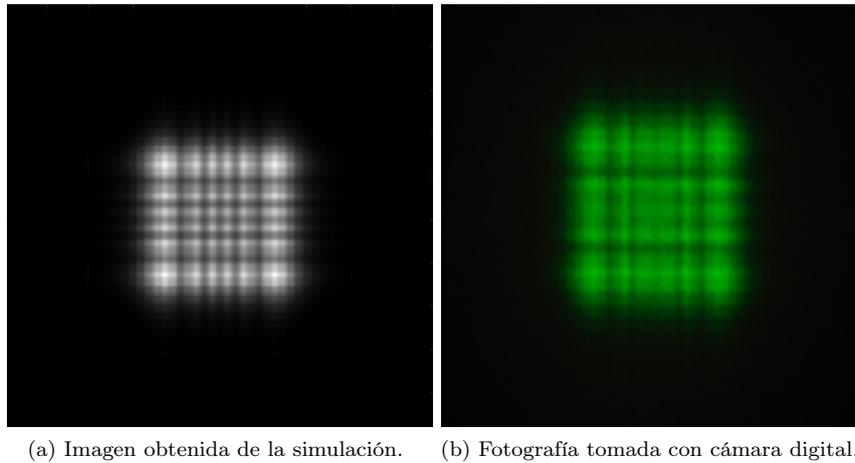


Figura 5.13: Campo difractado por un cuadrado a una distancia de 134 cm. a) Simulada y b) experimental.

Difracción de dos círculos

Como se muestra en la figura 5.14 en el caso experimental inciso a) se tienen dos círculos de 0.35 mm de diámetro con una separación entre ellos de 1.9 mm y de manera simulada inciso b) se ingresó un dibujo hecho en inkscape con valores arbitrario, dicho dibujo fue ingresado al programa para poder obtener el patrón de difracción.

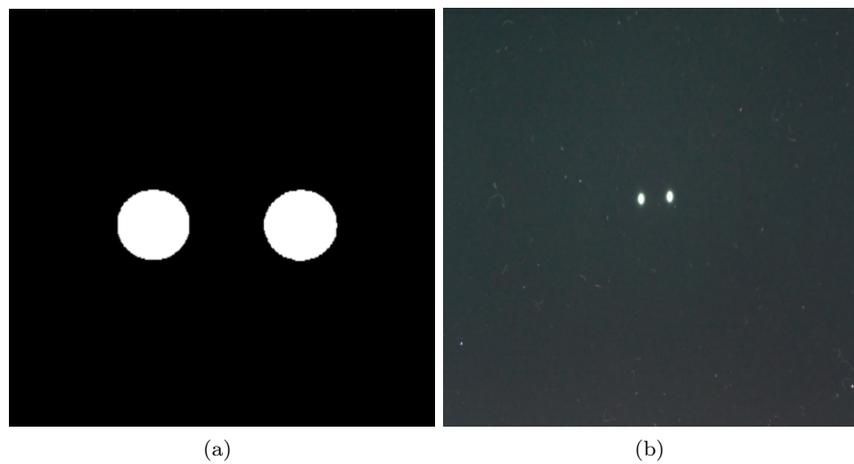
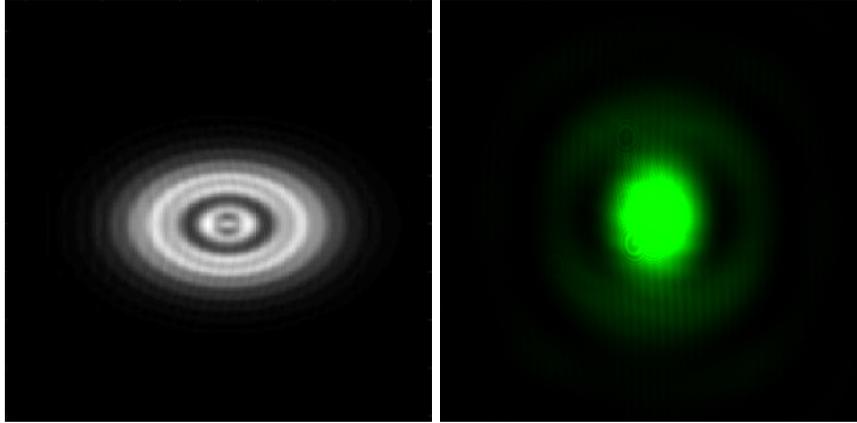


Figura 5.14: Círculos: a) imagen hecha para la simulación y b) imagen experimental.

En la figura 5.15 el campo difractado a una distancia de 34 cm de manera experimental inciso b) la imagen fue tomada con una cámara CCD y solo se pudo observar un círculo, no

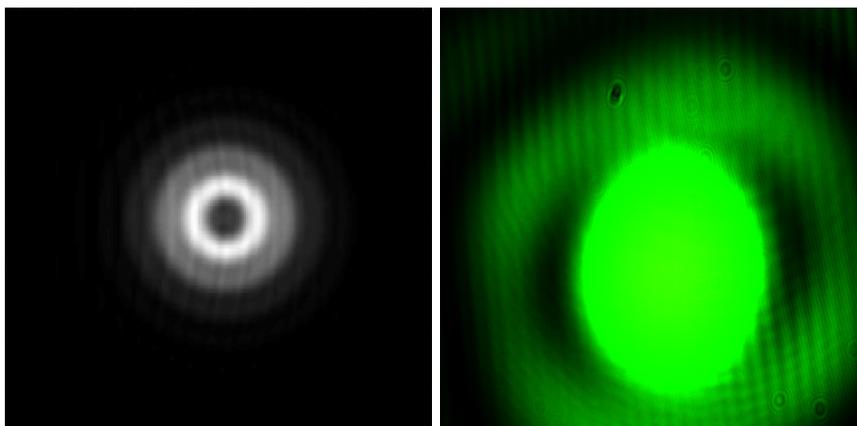
se tomó con cámara digital ya que no se percibían los anillos que se forman alrededor del círculo por lo que de manera simulada inciso a) se ajustó haciendo zoom a la imagen.



(a) Imagen obtenida de la simulación. (b) Fotografía tomada con cámara CCD.

Figura 5.15: Campo difractado por dos círculo una distancia de 34cm. a) Simulada y b) experimental.

En la figura 5.16 el campo difractado a una distancia de 69 cm de la misma manera de forma experimental inciso b) la imagen fue tomada con una cámara CCD y solo se pudo observar un círculo aún más grande que el anterior por lo que no se tomó con cámara digital ya que no se percibían los anillos que se forman alrededor del círculo y de manera simulada inciso a) se ajustó haciendo zoom a la imagen.



(a) Imagen obtenida de la simulación. (b) Fotografía tomada con cámara CCD.

Figura 5.16: Campo difractado por un círculo a una distancia de 69 cm. a) Simulada y b) experimental.

En la figura 5.17 el campo difractado a una distancia de 134 cm. De manera experimental que es el inciso b) fue tomada con una cámara CCD, solo se puede observar un círculo y el inciso d) es otra manera de observar el patrón de difracción que es la imagen tomada con una cámara digital donde se pueden observar ambos círculos. De manera simulada inciso a) se ajustó haciendo zoom a la imagen e inciso c) se observan los dos círculos sin hacer ningún ajuste.

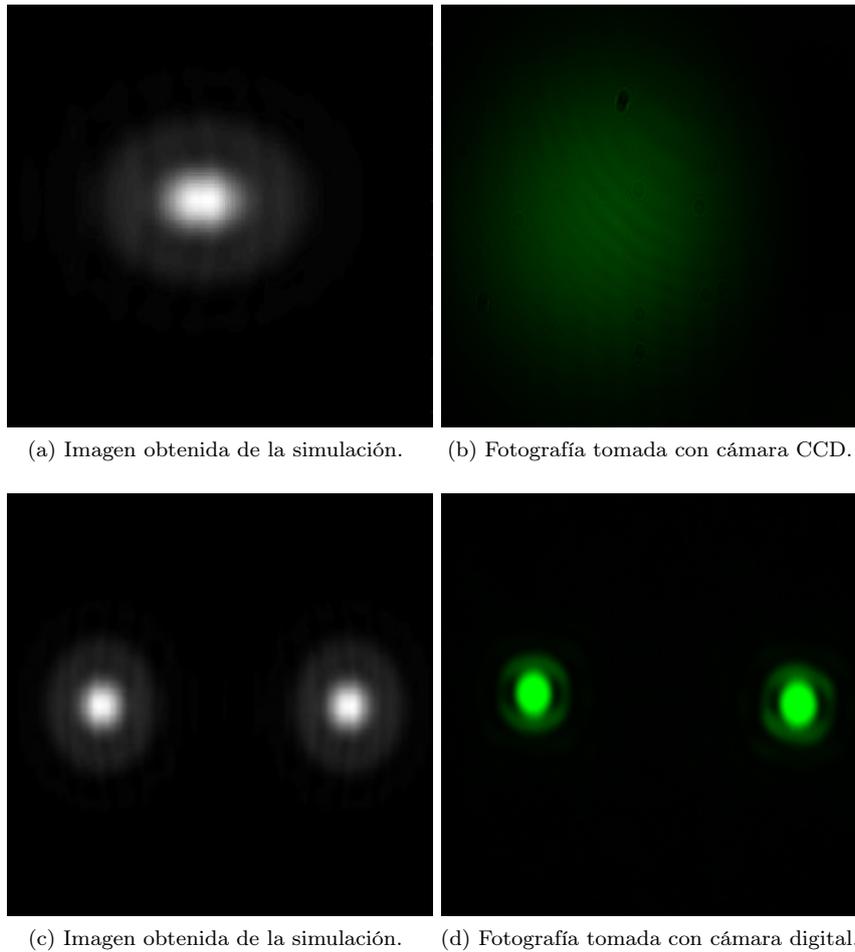


Figura 5.17: Campo difractado por dos círculos a una distancia de 134 cm. a) Simulación haciendo zoom a un solo círculo, b) fotografía experimental tomada con cámara CCD, c) simulación de ambos círculos y d) fotografía experimental tomada con cámara digital.

Difracción de una tangente

Se tiene una apertura de una tangente (figura 5.18) de 0.05 mm de ancho experimentalmente inciso b) y de manera simulada se ingresó un dibujo que fue hecho en inkscape inciso a) con valor arbitrario dicho dibujo fue ingresado al programa para poder obtener el patrón

de difracción.

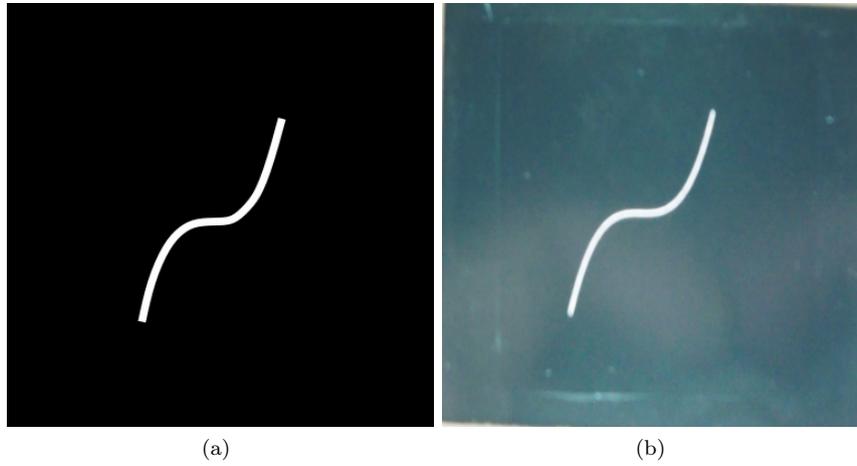


Figura 5.18: Tangente: a) dibujo hecho para la simulación y b) imagen experimental.

En cada una de las diferentes distancias las figuras de manera simulada se tienen los incisos a) y de manera experimental los incisos b) la imagen fue tomada con una cámara digital ya que se podía apreciar mejor el campo difractado.

El campo difractado se encuentra; en la figura 5.19 a una distancia de 34 cm, en la figura 5.20 a una distancia de 69 cm y en la figura 5.21 a una distancia de 134 cm.

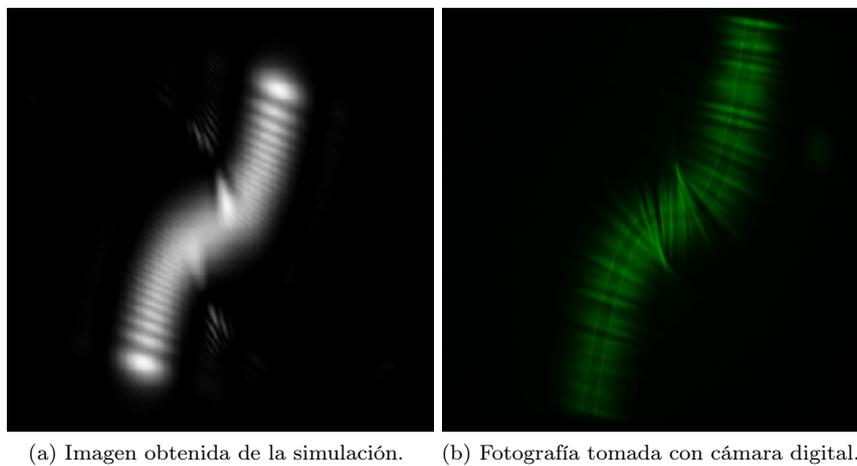
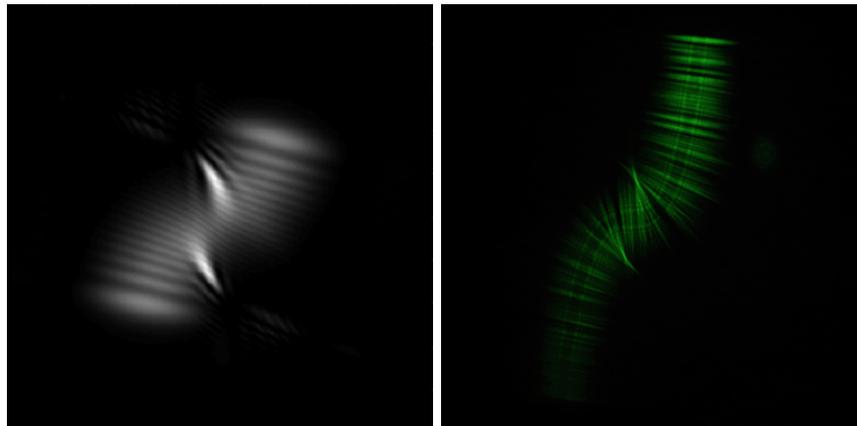
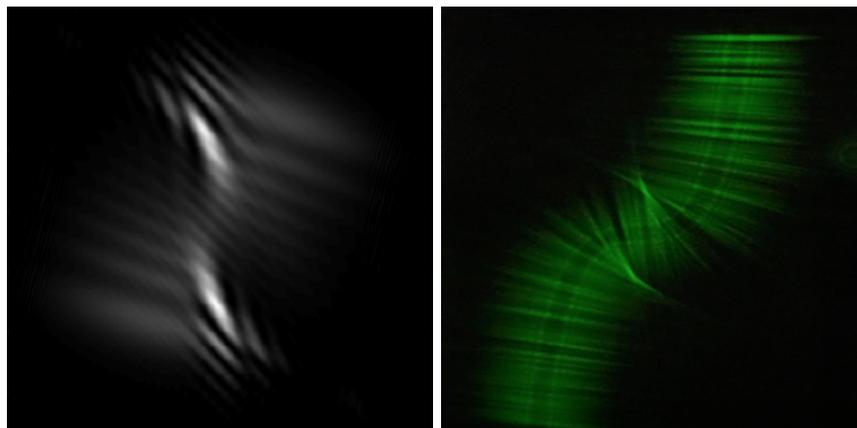


Figura 5.19: Campo difractado por una tangente a una distancia de 34 cm. a) Simulada y b) experimental.



(a) Imagen obtenida de la simulación. (b) Fotografía tomada con cámara digital.

Figura 5.20: Campo difractado por una tangente a una distancia de 69 cm. a) Simulada y b) experimental.



(a) Imagen obtenida de la simulación. (b) Fotografía tomada con cámara digital.

Figura 5.21: Campo difractado por una tangente a una distancia de 134 cm. a) Simulada y b) experimental.

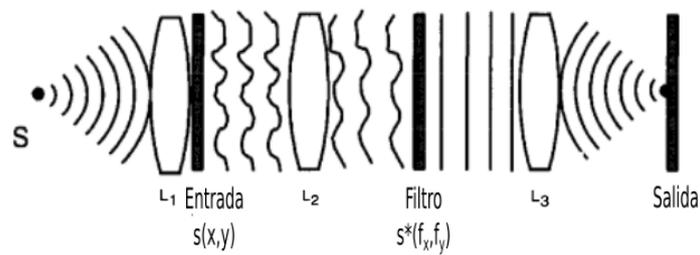


Figura 5.22: Interpretación óptica del filtrado combinado.

5.5. Reconocimiento de patrones

En esta sección se muestran las gráficas de los resultados obtenidos al comparar las imágenes simuladas con las experimentales de la sección anterior.

La manera de comparar imágenes es a través del reconocimiento de patrones. Una manera sencilla es con una onda plana que pasa por una lente y el objeto patrón s , pasa por otra lente y el filtro que es adaptado al objeto de entrada s , si ambos patrones son iguales nuestra salida será una onda plana como se muestra en la figura 5.22.

Se realizó un código en matlab que se muestra en el apéndice A. En este código se ingresa la primer imagen se obtiene su transformada de Fourier, para después calcular su complejo conjugado y del mismo modo se ingresa la segunda imagen se saca su transformada de Fourier. Se multiplican ambos resultados y se saca su transformada inversa de Fourier. Por último, se multiplica la transformada inversa de Fourier por su conjugado, si se parecen las imágenes dará como resultado una delta de Dirac como se muestra en la figura 5.23.

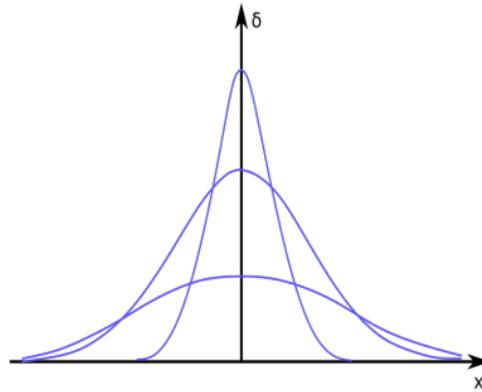


Figura 5.23: Ilustración de la función delta de Dirac.

Como se muestra en la figura 5.24 se toma como ejemplo de este código con un cuadrado donde en el inciso a) esta la primera imagen ingresada, el inciso b) se tiene el complejo conjugado de la transformada de Fourier, en el inciso c) se tiene la segunda imagen ingresada para después en el inciso d) tener su transformada de Fourier, luego se muestra el producto de b)y d), el el inciso f) se muestra la transformada inversa de Fourier y por ultimo la gráfica de la irradiancia en el inciso g).

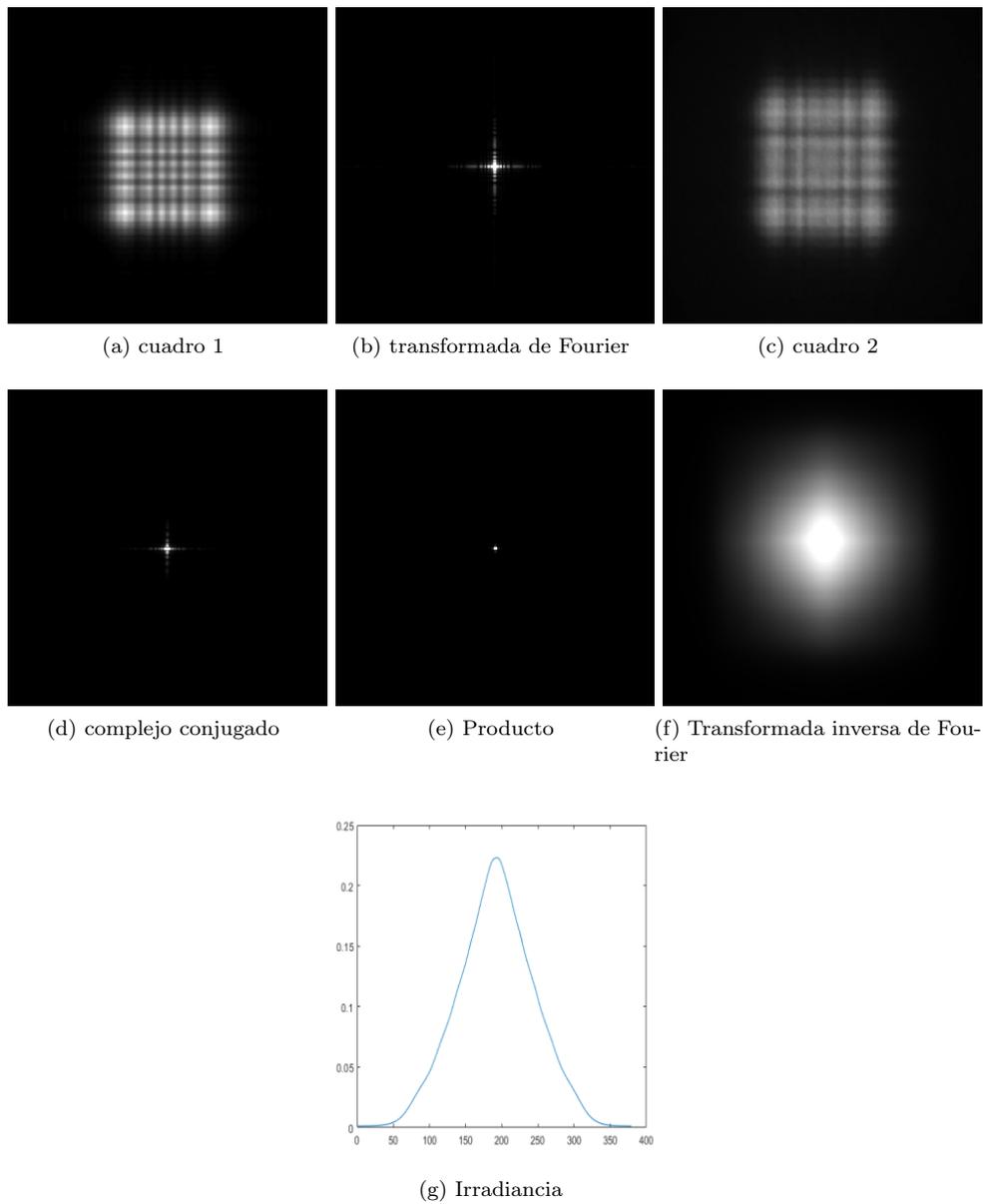


Figura 5.24: Ejemplo de la reconocimiento de patrones.

Todas las imágenes experimentales para poder hacer la comparación se modifico su color a una escala a grises.

Como se puede observar la comparación de imágenes de la rejilla que se muestra en la tabla 5.1 a la distancia de 10 cm se tiene un resultado no favorable, a comparación de la distancia de 67 cm que se asemejan pero de igual forma no son totalmente iguales.

En la tabla 5.2 se muestra el caso de la comparación de imágenes de la rendija. Se observa que las imágenes son semejantes ya que en las gráficas se tiene una delta de Dirac.

Al igual que la rendija, las imágenes del cuadrado tienen semejanza ya que las gráficas que se muestran en la tabla 5.3 se tiene una delta de Dirac.

En las gráficas de comparación de imágenes de los dos círculos que se muestra en la tabla 5.5 se observa que en la distancia de 10 cm tiene una pequeña perturbación en la curvatura, sin embargo podemos decir que tienen una semejanza favorable, en la distancia de 134 cm con ambos círculos se tienen perturbación a los lados pero del mismo modo se asemejan, en las dos restantes se tiene una delta de Dirac por los que son iguales.

La comparación de imágenes de la tangente se encuentra en la tabla 5.5 se observa que son gráficas favorables y se obtuvo una delta de Dirac, entonces las imágenes se asemejan.

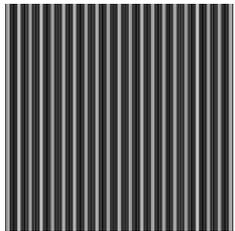
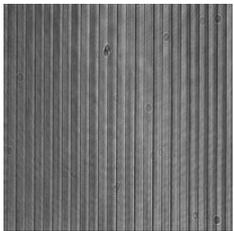
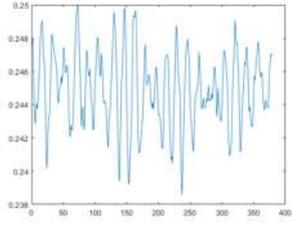
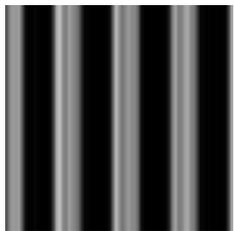
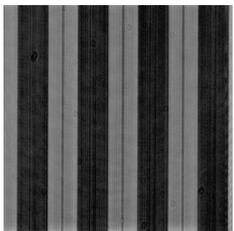
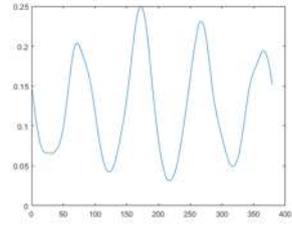
Efecto Talbot			
Distancia	Simulación	Experimental	Comparación
10 cm			
67 cm			

Tabla 5.1: Comparación de imágenes del efecto Talbot.

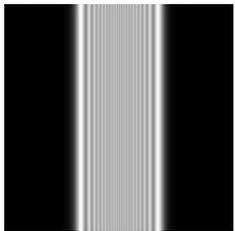
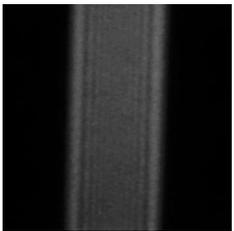
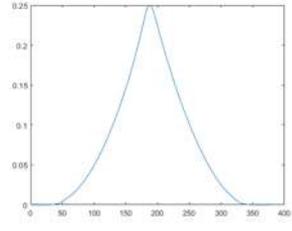
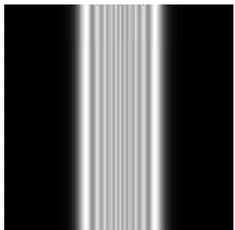
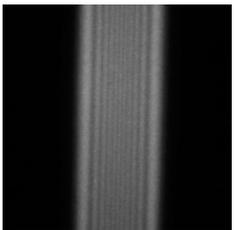
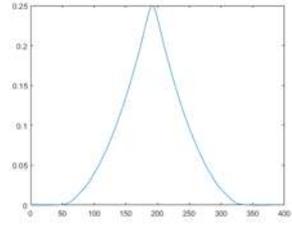
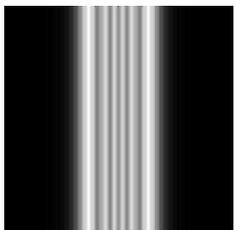
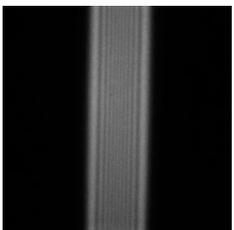
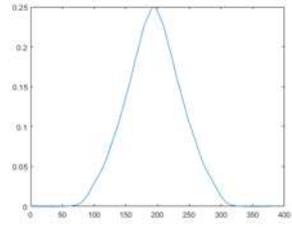
Rendija			
Distancia	Simulación	Experimental	Comparación
34 cm			
69 cm			
134 cm			

Tabla 5.2: Comparación de imágenes de la rendija.

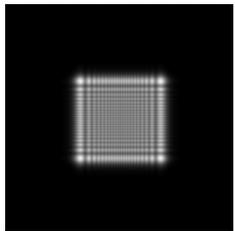
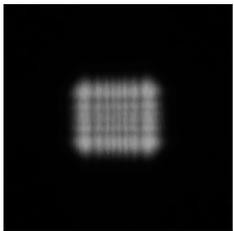
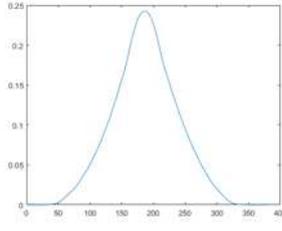
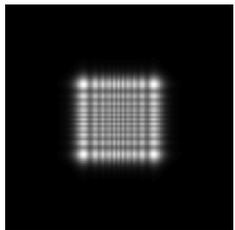
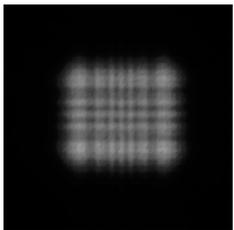
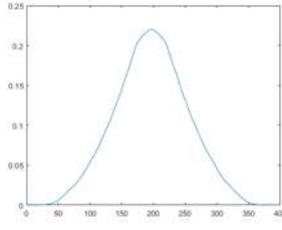
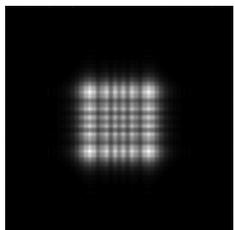
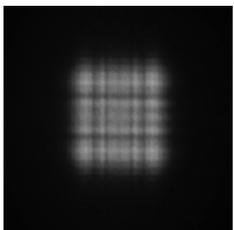
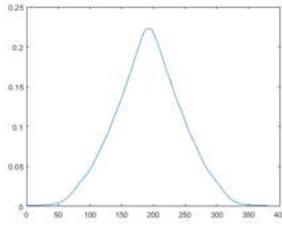
Cuadrado			
Distancia	Simulación	Experimental	Comparación
34 cm			
69 cm			
134 cm			

Tabla 5.3: Comparación de imágenes del cuadrado.

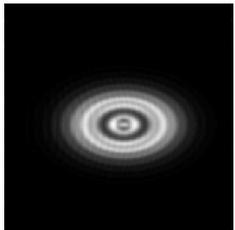
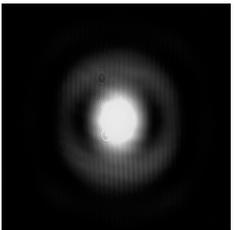
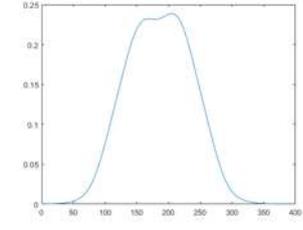
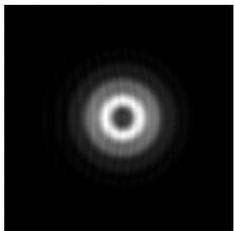
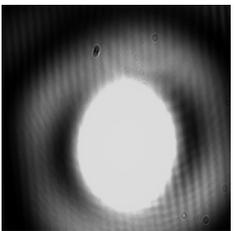
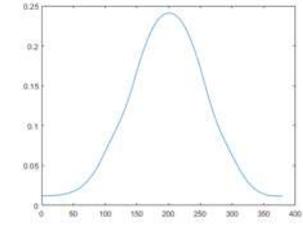
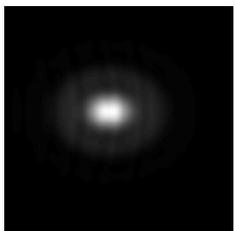
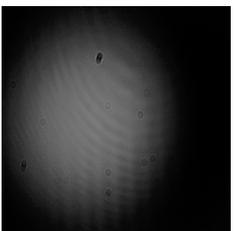
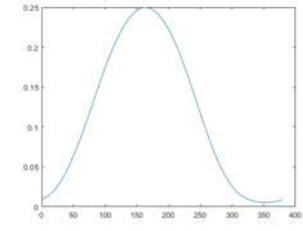
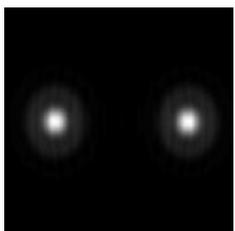
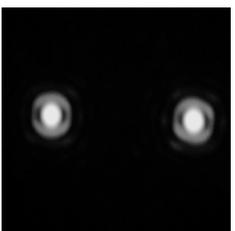
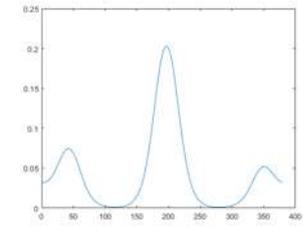
Círculos			
Distancia	Simulación	Experimental	Comparación
34 cm			
69 cm			
134 cm			
134 cm			

Tabla 5.4: Comparación de imágenes del círculo.

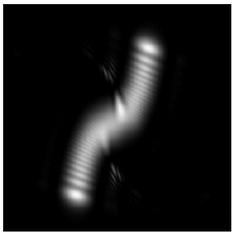
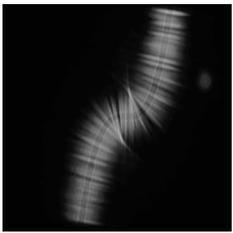
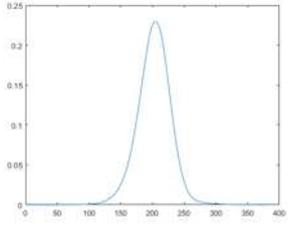
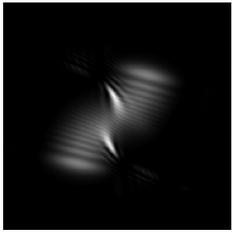
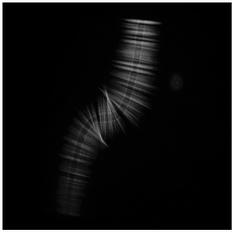
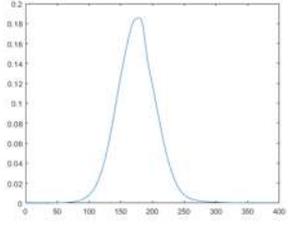
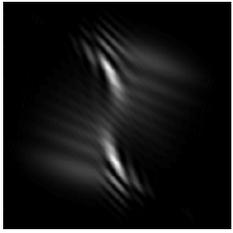
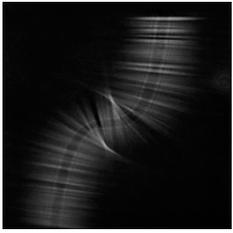
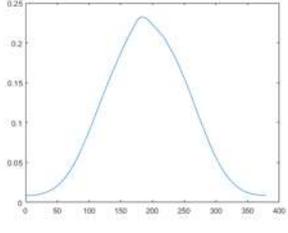
Distancia	Tangente		
	Simulación	Experimental	Comparación
34 cm			
69 cm			
134 cm			

Tabla 5.5: Comparación de imágenes de la tangente.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se estudió la ecuación de Helmholtz, el teorema de Green, la teoría escalar desde las suposiciones de Kirchhoff pasando por las soluciones de Rayleigh - Sommerfeld. Esto con el fin de encontrar la integral de difracción de Fresnel.

Se utilizó el Software Matlab por su facilidad de manejo y es un lenguaje para la computación científica. Se realizó un código que permite visualizar el patrón de difracción de un objeto que puede ser mediante su función de transmitancia o un dibujo.

Haciendo uso del algoritmo Fast Fourier Transform y tomando como base la integral de difracción de Fresnel se genera una subrutina donde se implementó el método de propagación de la función respuesta al impulso.

En el programa se consideró un plano con dimensiones de 0.01 m x 0.01 m ($L_1 = 0,01$), con 1400 números de muestras y una longitud de onda de 543×10^{-6} m que corresponde al láser verde. Este método nos proporcionó el resultado adecuado.

Por otro lado se buscaba obtener resultados del patrón de difracción de cada una de las aperturas de manera experimental, así que se montó un arreglo en el laboratorio de fácil manejo. Una vez obtenidos los resultados del programa y experimental se hace la comparación.

Se pudo observar que comparando los resultados obtenidos de la simulación y experimentalmente a través del reconocimiento de patrones son bastantes similares pese a que se utilizaron valores arbitrarios en la simulación.

Las aplicaciones de la difracción son variadas e importantes en la industria, entretenimiento, etc.

Apéndice A

Simulación del reconocimiento de patrones

```
1 %Reconocimiento de Patrones
2 clc; close all; clear;
3
4 %Imagen e
5 e=imread('cus134.png','png');
6 e=e(:,:,1);
7 %%color de imagen
8 figure(1)
9 colormap(gray(255));
10 image(e);
11 title('imagen original de e')
12 axis off
13
14 %Transformada de Fourier de e
15 E=fft2(e);
16 E=fftshift(E);
17 max1=max(max(E));
18 scale=1.0/max1;
19 E=E.*scale;
20 %Conjugado de e
21 H=conj(E);
22 %Imagen de H
23 figure(2)
24 colormap(gray(255));
25 image(10*(abs(255*H)));
26 title('imagen del conjugado de e')
27 axis off
28
29 %Imagen s
30 s=imread('cu134 (2).png','png');
31 s=s(:,:,1);
32 %color de imagen
33 figure(3)
34 colormap(gray(255));
35 image(s);
36 title('imagen original de s')
37 axis off
```

```
38
39 % Transformada de Fourier de s
40 S=fft2(s);
41 S=fftshift(S);
42 max2=max(max(S));
43 scale=1.0/max2;
44 S=S.*scale;
45 %Imagen de la transformada de fourier
46 figure(4)
47 colormap(gray(255));
48 image(10*(abs(255*S)));
49 title('imagen transformada de s')
50 axis on
51
52 %Producto de S*H
53 P=S.*H;
54 %Imagen
55 figure(5)
56 colormap(gray(255));
57 image(10*(abs(255*P)));
58 title('Imagen del producto')
59 axis on
60
61 %Transformada inversa
62 IFT=ifft2(P);
63 IFT=fftshift(IFT);
64 max1=max(max(IFT));
65 scale=0.5/max1;
66 IFT=IFT.*scale;
67 IFTg=abs(IFT);
68 IFTg=IFT.*conj(IFT);
69 %figura de la transformada inversa
70 figure(6)
71 colormap(gray(255));
72 image(20*(abs(60*IFTg)));
73 title('transformada inversa')
74 axis on
75
76 %irradiancia
77 x=1:379;
78 p=IFTg(200,:);
79 figure
80 plot(x,p)
```

Figura A.1: Código para el reconocimiento de patrones.

Referencias

- [1] Bravo S. y Pesa M. “EL FENÓMENO DE LA DIFRACCIÓN EN LA HISTORIA DE LA ÓPTICA Y EN LOS LIBROS DE TEXTO REFLEXIONES SOBRE SUS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE.” En: *Investigações em Ensino de Ciências*. Vol. 20.no. 2 (2015).
- [2] Kirkland K. *Light and optics*. Infobase Publishing, 2007.
- [3] Sommerfeld A. *Optics: Lectures on Theoretical Physics*. Academic Press, 1954.
- [4] Born M. y Wolf E. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Cambridge University Press, 1999.
- [5] Malacara D. *Óptica básica*. Fondo de cultura económica, 2015.
- [6] Hecht E. *Optics 4th edition*. Addison Wesley, 2002.
- [7] Guenther R. D. *Modern optics*. OUP Oxford, 2015.
- [8] Goodman J. W. *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill, 1968.
- [9] Ersoy O. K. *Diffraction, Fourier optics and imaging*. John Wiley y Sons, 2006.
- [10] Gaskill J. D. *Linear systems, Fourier transforms, and optics*. Wiley-Interscience, 1978.
- [11] Soskind Y. *Field Guide to Diffractive Optics*. SPIE Press, 2011.
- [12] Kiusalaas J. *Numerical methods in engineering with MATLAB®*. Cambridge university press, 2005.
- [13] Gilat A. *Matlab: Una introducción con ejemplos prácticos*. Reverté Editorial, 2006.