



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

**HIPERBOLICIDAD UNIFORME DEL
COMPLEJO DE CURVAS**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

Lic. ISRAEL MORALES JIMÉNEZ

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. JOSÉ FERRÁN VALDEZ LORENZO

MORELIA MICHOACÁN, ENERO 2016.

Agradecimientos

En primer lugar agradezco al Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH por haberme aceptado en sus filas y poder ser parte de esta comunidad. Con especial mención a todos mis profesores, que son parte fundamental en mi formación, y en particular, tengo especial aprecio por los Dres. J. Muciño Raymundo y Pierre Bayard, quienes me mostraron el mundo de la geometría. También agradezco a L.A.E Morelia I. Álvarez Llanes por la gran atención a las cuestiones administrativas que facilitaron mi vida de estudiante.

En segundo lugar agradezco al Dr. J. Ferrán Valdez Lorenzo, mi asesor y director de tesis, por su incondicional apoyo y paciencia. Sobre todo aprecio sus consejos, no permitiendo que desvíe el camino. También agradezco a la Dra. Rita Jiménez Rolland por haber leído, corregido y hacer observaciones oportunas que mejoraron el escrito en gran medida.

Los amigos y compañeros fueron mi familia en este viaje, he aprendido mucho de ellos tanto académicamente como en las cuestiones de la vida. Un especial afecto lo tengo con Cenobio, César, Fredy, Ruben, Jhon, Berenice, Johanna, Karley y Liliana.

Mis estudios de maestría así como la realización de este trabajo para la obtención de grado de maestro fue financiado completamente por sistema de becas nacional CONACyT.

Índice general

Resumen	V
Introducción	VII
1 El Complejo de Curvas	1
1.1 Definición del complejo de curvas	1
1.2 Conexidad del complejo de curvas	5
1.3 Otros complejos simpliciales	9
2 El Diámetro del Complejo de Curvas	13
2.1 Definición y ejemplos	13
2.2 Acción del grupo modular sobre $C(S)$	16
3 Hiperbolicidad Uniforme del Complejo de Curvas	21
3.1 δ -hiperbolicidad	21
3.2 Hiperbolicidad uniforme	22
Bibliografía	35

Resumen

Resumen

Dada una superficie de tipo finito S , el complejo de curvas $C(S)$ es un complejo simplicial abstracto asociado a la superficie S donde los vértices son todas las clases de isotopía de curvas cerradas simples esenciales en S y los k -simplejos son colecciones de $k + 1$ vértices distintos que tienen representantes disjuntos a pares. El complejo de curvas ha sido utilizado en el estudio de muchos problemas de topología de dimensiones bajas y geometría, en la conjetura de laminaciones finales de Thurston para 3-variedades hiperbólicas y en el problema de la rigidez cuasi-isométrica del grupo modular $Mod(S)$. En esta tesis se realiza un estudio de las principales propiedades del complejo de curvas como lo es la conexidad, el diámetro infinito y la hiperbolicidad uniforme.

Abstract

Given a surface of finite type S , the complex curves $C(S)$ is an abstract simplicial complex associated to the surface S where the vertices are all isotopy class of essential simple closed curves and the k -simplex are collections of $k + 1$ distinct vertices that have pairwise disjoint representatives. The complex curves have been used in many problems in low-dimensional topology and geometry, in the ending laminations conjecture of Thurston for 3-dimensional hyperbolic manifolds and in the quasi-isometric rigidity problem of the modular group $Mod(S)$. In this thesis the main properties of the complex curves as the connexity, the infinite diameter and the uniform hyperbolicity are studied.

Palabras Clave

Superficie, curvas, complejo, conexidad, hiperbolicidad.

Introducción

El complejo de curvas $C(S)$ es un complejo simplicial abstracto asociado a una superficie S , los vértices son clases de isotopía de curvas cerradas simples esenciales y los k -simplejos son colecciones de $k + 1$ clases de isotopía de curvas cerradas simples disjuntas por pares.

Este objeto, que es puramente combinatorio, fue introducido por Harvey en [16] para superficies compactas orientables S_g en el estudio del espacio de Teichmüller T_g . Desde entonces el complejo de curvas se ha usado en el estudio de problemas de topología de dimensiones bajas, en la conjetura de laminaciones finales para 3-variedades hiperbólicas y en la rigidez cuasi-isométrica del grupo modular¹ $Mod(S)$ (véase [10]). Algunas maneras en que se ha usado el complejo de curvas son:

- a) El complejo de curvas describe la geometría al infinito de espacios de Teichmüller y de espacios moduli de superficies de Riemann.
- b) El complejo de curvas provee un espacio combinatorio y métrico donde el grupo modular actúa, y estructuras y representaciones del grupo modular se pueden entender y construir de esas acciones.
- c) Superficies y curvas cerradas aparecen de forma natural en el estudio de 3-variedades y así el complejo de curvas se puede usar para comprender la geometría y topología de 3-variedades.

Lo anterior pone de manifiesto la importancia que tiene el complejo de curvas en el estudio de temas actuales en matemáticas.

En esta tesina exponemos tres hechos importantes sobre el complejo de curvas para superficies de tipo finito $S_{g,b,n}$ ²:

1. El complejo de curvas es conexo.
2. El complejo de curvas es de diámetro infinito.
3. El complejo de curvas es δ -hiperbólico en el sentido de Gromov.

los cuales dividen el escrito en tres capítulos para su estudio.

¹o grupo modular de Teichmüller. En Inglés conocido como “mapping class group”.

² $S_{g,b,n}$ denota a la superficie conexa y orientable de género $g \geq 0$, con $b \geq 0$ componentes de frontera y $n \geq 0$ punchaduras.

En el primer capítulo definimos con mayor precisión el complejo de curvas y mostramos que este tiene dimensión finita como complejo simplicial abstracto. Luego, usando curvas orientadas, demostramos que el complejo de curvas de superficies no esporádicas es conexo. Finalizamos este capítulo presentando otros complejos simpliciales abstractos que se pueden asociar a una superficie, poniendo particular interés en el complejo de arcos, y el complejo de arcos y curvas, ya que los usaremos en el tercer capítulo.

En el segundo capítulo definimos el grupo modular de una superficie y mostramos que este actúa de forma natural sobre el complejo de curvas. Posteriormente usamos este hecho y un Teorema de Masur y Minsky [Proposición 4.6, [6]] para demostrar que el complejo de curvas es de diámetro infinito.

La δ -hiperbolicidad es un concepto introducido por Gromov [5] que mide qué tan delgados son los triángulos geodésicos en un espacio métrico geodésico. La hiperbolicidad del complejo de curvas es un resultado que se le atribuye a Mazur y Minsky en [6]. En la demostración que presentaron la constante δ dependía a priori de la superficie. Recientemente, alrededor del año 2014, aparecieron diversas pruebas en las que la constante δ podía tomarse independiente de la topología de la superficie [7, 4, 14, 11]. A esto se le llama *hiperbolicidad uniforme del complejo de curvas*.

La aportación principal de esta tesis es la demostración detallada de la hiperbolicidad uniforme del complejo de curvas siguiendo a Hensel et al. en [11], la cual presentamos en el último capítulo. Este hecho de esta manera debido a que, a nuestro juicio, la demostración es relativamente elemental, sin embargo, no deja de ser delicada.

Capítulo 1

El Complejo de Curvas

A lo largo del escrito S denotará a una superficie de tipo finito¹. En este primer capítulo definiremos el complejo de curvas $C(S)$ de una superficie S e investigaremos algunas propiedades de este objeto como lo es la dimensión² y la conexidad³.

Con estos objetivos, en la primera sección demostramos usando descomposición en pares de pantalones que $C(S)$ tiene dimensión finita (como complejo simplicial abstracto). De esto podremos ver que hay pocas superficies en donde su complejo de curvas resulta ser vacío o una colección de puntos aislados (i.e., su complejo de curvas tiene dimensión cero); a estas superficies las llamamos esporádicas. En la segunda sección se prueba que el complejo de curvas $C(S)$ es conexo para superficies no esporádicas. Su demostración utiliza un análisis local de intersecciones consecutivas entre curvas orientadas. Finalmente, en la tercera sección exponemos otras formas de obtener complejos simpliciales abstractos a partir de una superficie y que algunos de ellos serán de utilidad en los siguientes capítulos.

1.1 Definición del complejo de curvas

Para definir el complejo de curvas de una superficie necesitamos de dos definiciones preliminares.

Definición 1.1.1. Sea α una curva cerrada simple⁴ en S . Se dice que α es esencial si no es isotópica a un punto, a una ponchadura o a una componente de frontera de S .

Definición 1.1.2. Sean a y b dos clases de isotopías de curvas cerradas simples en S . Se dice que a se puede realizar disjuntamente de b si existen representantes $\alpha \in a$ y $\beta \in b$ que son disjuntos.

El *Complejo de Curvas*, que denotamos por $C(S)$, de una superficie S es un complejo simplicial abstracto donde:

¹es decir, superficies conexas, orientables de la forma $S_{g,b,n}$ de género $g \geq 0$, con $b \geq 0$ componentes de frontera y con $n \geq 0$ ponchaduras.

²Como complejo simplicial abstracto.

³Cuando decimos conexidad del complejo de curvas nos estamos refiriendo a que el 1-esqueleto de $C(S)$ es conexo.

⁴Una curva cerrada simple es un encaje de S^1 en S .

- Los vértices de $C(S)$ son todas las clases de isotopía de curvas cerradas simples esenciales.
- Una colección finita (a_0, a_1, \dots, a_k) de vértices en $C(S)$ es un k -simplejo si las clases a_0, a_1, \dots, a_k se pueden realizar disjuntamente a pares.

Observación 1.1.1. Observe que al considerar sólo curvas cerradas simples en la superficie $S_{g,b,n}$ tenemos que $C(S_{g,b,n})$ coincide con $C(S_{g,b+n,0})$ y con $C(S_{g,0,b+n})$. En este sentido el complejo de curvas no distingue entre componentes de frontera y ponchaduras, considerando a ambas por igual. Por este motivo el estudio de $C(S_{g,b,n})$ se reduce al estudio de $C(S_{g,n})$, donde n es el número de ponchaduras (o componentes de frontera, según se requiera). Así que en lo siguiente nos restringimos al caso de superficies del tipo $S_{g,n}$.

El k -esqueleto de $C(S)$ es denotado por $C^{(k)}(S)$. Con esta notación, $C^{(0)}$ son los vértices de $C(S)$ y $C^{(1)}(S)$ representa una gráfica como objeto combinatorio abstracto.

Como complejo simplicial abstracto, el complejo de curvas tienen dimensión⁵ finita. Para ver esto, consideremos la siguiente definición:

Definición 1.1.3. Una colección $\Omega = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ de curvas cerradas simples en S es una descomposición en pares de pantalones de S si la superficie $S_\Omega = \overline{S \setminus \Omega}$ que se obtiene de cortar S largo de Ω es unión disjunta de pares de pantalones.

Aquí por un par de pantalón nos referimos a la superficie $S_{0,3}$ (véase Fig. 1.1).

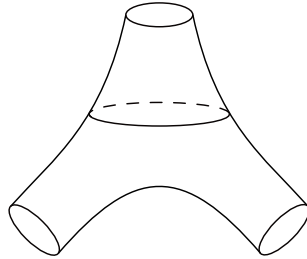


Figura 1.1: Par de pantalón.

Observe que por definición toda curva α que pertenece a una descomposición en pares de pantalones Ω de una superficie S es esencial, además cualquier par de curvas en Ω no son isotópicas y no se intersectan. Esto implica que Ω (en clase de isotopía) forma un k -simplejo en $C(S)$. Veamos ahora que una descomposición en pares de pantalones nos da el simplejo de máxima dimensión en $C(S)$.

Lema 1.1.1. Si $S_{g,n}$ es una superficie con característica de Euler $\chi(S_{g,n}) < 0$, excepto $S_{0,3}$, entonces $\dim(C(S_{g,n})) = 3g + n - 4$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $S = S_{g,n}$. Observe que toda descomposición en pares de pantalones de S es maximal, esto es así pues, toda curva cerrada simple en $S_{0,3}$ es isotópica a un punto o a una componente de frontera.

⁵La dimensión $\dim(\Delta)$ de un complejo simplicial abstracto Δ es la máxima dimensión de sus caras, o infinito si no tiene cota finita la dimensión de sus caras.

Ahora probemos que toda colección maximal de curvas cerradas simples esenciales disjuntas y no isotópicas a pares en S es una descomposición en pares de pantalones. Sea pues $\Omega = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ una colección maximal de curvas cerradas simples esenciales disjuntas y no isotópicas a pares en S . Puesto que $\chi(S) < 0$, al cortar S a lo largo de las curvas de Ω se obtienen una superficie S_Ω que es unión disjunta de superficies conexas con al menos una componente de frontera y con característica de Euler negativa. Si alguna de estas superficies tiene género mayor o igual a 1 o tiene más de tres componentes de frontera (pensar las ponchaduras como componentes de frontera), entonces se puede tomar una curva cerrada simple esencial en S que no es isotópica a ninguna de las curvas en Ω , lo que contradice que Ω sea maximal. Por lo tanto, Ω descompone a S en pares de pantalones.

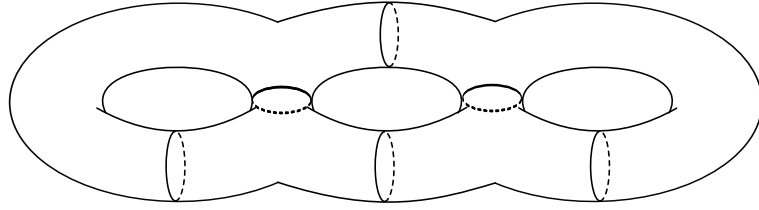


Figura 1.2: Descomposición en pares de pantalones

Si $\chi(S) < 0$, entonces existen $3g + n - 3$ curvas cerradas simples esenciales que descomponen a S en $2g + n - 2$ pares de pantalones (excepto el par de pantalón mismo). Lo cual muestra que la dimensión de $C(S)$ es $3g + n - 4$ (véase Fig. 1.2). \square

Teorema 1.1.2. *El complejo de curvas $C(S_{g,n})$ tiene dimensión finita.*

DEMOSTRACIÓN: Observe que por el Lema 1.1.1, sólo nos resta verificar el teorema para las superficies S con $\chi(S) \geq 0$.

Si $\chi(S) = 0$, entonces S es homeomorfa al cilindro $S_{0,2}$ o al toro $S_{1,0}$. Suponga que $S = S_{0,2}$. Luego, como toda curva cerrada simple en $S_{0,2}$ es isotópica a un punto o a una componente de frontera se concluye que $C(S_{0,2})$ es vacío. Ahora, suponga que $S = S_{1,0}$ y que existen α y β dos curvas esenciales no isotópicas en $S_{1,0}$ disjuntas entre sí. Por el Teorema de Clasificación de superficies, al cortar $S_{1,0}$ a lo largo de α se obtiene una superficie S_α que es homeomorfa a un cilindro. Luego, como α y β no se intersectan, β es una curva cerrada simple completamente contenida en S_α . Como $C(S_\alpha) = \emptyset$, se tiene que β es isotópica a un punto o es isotópica a α , lo cual es una contradicción. Por lo tanto $C(S_{1,0})$ es totalmente desconexo.

Si $\chi(S) = 1$, entonces S es homeomorfa $S_{0,1}$. Como $S_{0,1}$ es homeomorfa al plano y el plano es simplemente conexo se obtiene que $C(S) = \emptyset$.

Si $\chi(S) = 2$, entonces S es homeomorfa a la esfera $S_{0,0}$. Similarmente, como la esfera es simplemente conexa $C(S) = \emptyset$. \square

Superficies esporádicas

Ya que hemos asociado el objeto $C(S)$ a la superficie S , quisieramos que este fuera suficientemente rico en estructura; con esto queremos decir que no estaremos interesados en aquellas superficies en las cuales su complejo de curvas es vacío o totalmente desconexo (consta de sólo vértices). Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.1.4. Se dice que S es esporádica si su complejo de curvas $C(S)$ es vacío o totalmente desconexo.

Del Lema 1.1.1, podemos observar que son pocas las superficies esporádicas en realidad, para convencernos de esto basta ver qué superficies con característica de Euler negativa, excepto $S_{0,3}$, satisfacen que $3g + n - 4 > 0$. Más aún, tenemos el siguiente corolario que se sigue del Lema 1.1.1 y de la demostración del Teorema 1.1.2.

Corolario 1.1.3. Una superficie $S_{g,n}$ es esporádica si y solo si $\xi(S_{g,n}) := 3g + n - 4 \leq 0$.

Al número entero $\xi(S_{g,n}) := 3g + n - 4$ le llamamos *complejidad* de la superficie $S_{g,n}$. En la siguiente tabla enlistamos todas las superficies esporádicas.

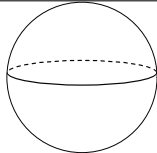
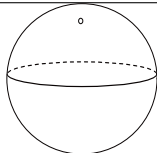

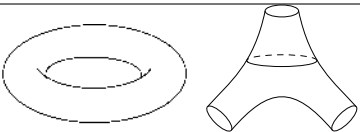
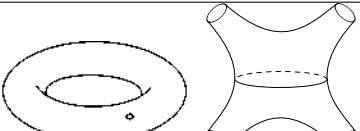
$\xi(S)$	Superficies
$\xi(S) = -4$	
$\xi(S) = -3$	
$\xi(S) = -2$	
$\xi(S) = -1$	
$\xi(S) = 0$	

Tabla 1.1: Superficies esporádicas.

1.2 Conexidad del complejo de curvas

En esta sección probaremos que el complejo de curvas de superficies no esporádicas es conexo⁶. La prueba necesita del *criterio del bígono* que nos ayuda a decidir cuando dos curvas esenciales realizan el mínimo número de intersecciones en las clases de isotopía. El criterio del bígono es una herramienta esencial ya que lo usaremos exhaustivamente durante todo el trabajo.

Definición 1.2.1. Sean $a, b \in C^{(0)}(S)$. Se define el número de intersección geométrica de las clases a y b , que se denota por $i(a, b)$, como:

$$i(a, b) := \inf\{\alpha \cap \beta \mid \alpha \in a, \beta \in b\}. \quad (1.1)$$

De nuestro interés es saber cuando dos clases de isotopía de curvas cerradas simples se pueden realizar con el mínimo número de intersecciones posible. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.2.2. Sean α y β dos curvas cerradas simples en S . Se dice que las curvas α y β están en posición mínima si $i([\alpha], [\beta]) = \#\alpha \cap \beta$.

Observe que si dos curvas cerradas simples encierran un disco acotado por subarcos de las curvas, estas no están en posición mínima, ya que podemos eliminar tal disco por medio de una isotopía. Así, consideremos la siguiente definición.

Definición 1.2.3. Sean α y β dos curvas cerradas simples en S . Se dice que α y β forman un bígono si existe un disco encajado en S cuya frontera es la unión de un arco de α y un arco de β que se intersectan en exactamente dos puntos (véase Fig. 1.3).

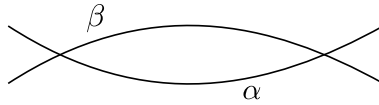


Figura 1.3: Bígono formado entre α y β .

Para ver que dos curvas están en posición mínima basta con ver que estas curvas no formen bígono. Esto nos lo asegura el criterio del bígono.

Teorema 1.2.1 (Proposición 1.7, [2]). [*Criterio del Bígono*] *Dos curvas cerradas simples transversales en una superficie S están en posición mínima si y sólo si estas no forman bígono.*

Gracias al criterio del bígono, dadas dos curvas cerradas simples en S podemos deshacer los bígono con isotopías hasta que eventualmente tengamos dos curvas cerradas simples en posición mínima. El siguiente corolario del criterio del bígono será útil para la prueba de la conexidad del complejo de curvas.

Corolario 1.2.2. *Sean α y β son dos curvas cerradas simples en S que se intersectan transversalmente. Entonces*

1. Si α y β se intersectan en exactamente un punto entonces $i([\alpha], [\beta]) = 1$.

⁶cuando decimos conexidad del complejo de curvas nos referimos a la conexidad de su 1-esqueleto.

2. Si $i([\alpha], [\beta]) > 0$, entonces α y β son curvas esenciales.

DEMOSTRACIÓN:

1. Las curvas α y β no forman bígonos. Por el Criterio del Bígono 1.2.1, están en posición mínima.
2. Si alguna de las curvas es no esencial, entonces con una isotopía se pueden separar las curvas, lo que contradice que $i(\alpha, \beta)$ sea no cero.

□

Ahora definimos una métrica sobre $C^{(1)}$. Se dice que dos vértices de $C^{(1)}$ están a distancia uno si están conectados por una arista. Luego definimos una métrica en $C^{(1)}$ como:

$$d_S(a, b) := \min\{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid (c_0 = a, c_1, \dots, c_m = b) \text{ es un camino en } C^{(1)}(S) \text{ que une a } a \text{ con } b\}. \quad (1.2)$$

Por convención, si no existe camino que una a a con b hacemos $d_S(a, b) = \infty$.

Teorema 1.2.3 (Conexidad del $C^{(1)}(S)$). *Si S es una superficie no esporádica i.e $\xi(S) = 3g + n - 4 > 0$, entonces $C^{(1)}(S)$ es conexo. Más aún, si $a, b \in C^{(0)}(S)$ son tales que $i(a, b) \neq 0$, entonces*

$$d_S(a, b) \leq 2 \log_2(i(a, b)) + 2. \quad (1.3)$$

Este teorema se le atribuye a Lickorish [15]. La demostración que presentamos es tomada de las notas de Schleimer [12].

DEMOSTRACIÓN:

Observe que basta verificar la ecuación (1.3), pues esta nos dice que entre dos vértices de $C(S)$ siempre hay un camino que los conecta.

La prueba se hace aplicando inducción sobre la intersección geométrica y la idea principal es tomar en cuenta que podemos usar la orientación de las curvas para analizar el sentido en que una curva simple atraviesa a otra curva simple a través de intersecciones consecutivas. Por lo tanto trabajaremos de ahora en adelante con curvas orientadas.

Sean α y β curvas esenciales en S no isotópicas y en posición mínima.

Caso base: Suponga que $i(\alpha, \beta) = 1^7$. Sea N una vecindad regular de $\alpha \cup \beta$ y considérese $\gamma = \partial N$ (véase Fig. 1.4). Observe que como α no es isotópica a β , entonces γ no es isotópica ni a α ni a β .

Veamos que γ es una curva esencial en S . Supóngase lo contrario. Entonces al cortar S a lo largo de γ se obtiene que $S_\gamma = N \sqcup T_1$, donde T_1 es una superficie homeomorfa a un disco

⁷esto es un abuso de notación, sin embargo se entiende pues α y β están en posición mínima.

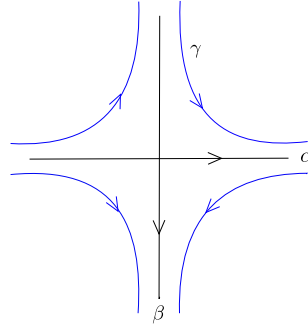


Figura 1.4: Caso base $i(\alpha, \beta) = 1$.

o a un disco agujerado. Así, S es homeomorfa al toro o al toro punchado, respectivamente, lo cual contradice que $\xi(S) > 0$.

Por lo tanto, (α, γ, β) es un camino en $C^{(1)}(S)$ que conecta a α con β y se cumple que $2 = d_S(\alpha, \beta) \leq 2 \log_2(1) + 2 = 2$.

Hipótesis de inducción: Suponga que $i(\alpha, \beta) \geq 2$. Sean π y π' intersecciones consecutivas de α con β a lo largo de β . Entonces hay dos casos según el sentido en que α interseca a β ilustrados en la Fig. 1.5.

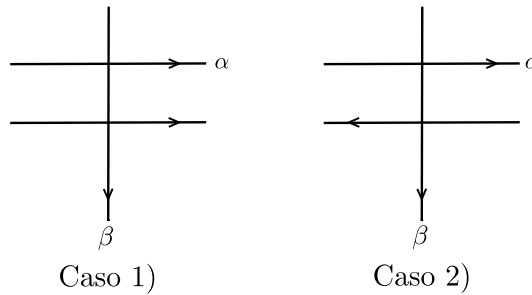


Figura 1.5: α interseca a β de dos maneras.

Caso 1) Considérese las curvas cerradas simples α' y α'' como se muestra en la Fig. 1.6.

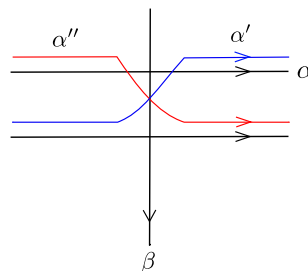


Figura 1.6: Construcción de las curvas α' y α'' .

Observe que α interseca exactamente en un punto a α' y α'' . Por el Corolario 1.2.2, $i(\alpha, \alpha') = i(\alpha, \alpha'') = 1$ y las curvas α' y α'' son esenciales.

Por otro lado, $i(\alpha', \beta) + i(\alpha'', \beta) \leq i(\alpha, \beta)$. Entonces al menos unas de las curvas α' o α'' tienen intersección geométrica con β menor o igual a $\frac{i(\alpha, \beta)}{2}$. Suponga que esta curva es α' . Luego,

$$\begin{aligned}
 d_S(\alpha, \beta) &\leq d_S(\alpha, \alpha') + d_S(\alpha', \beta) \\
 &\leq 2 + 2 \log_2(i(\alpha', \beta)) + 2; \text{ caso base e hipótesis de inducción} \\
 &\leq 2 + 2(\log_2(i(\alpha, \beta) - 1) + 2) \\
 &= 2 \log_2(i(\alpha, \beta)) + 2.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Caso 2) Este caso lo dividimos a su vez en dos subcasos: cuando $i(\alpha, \beta) = 2$ y cuando $i(\alpha, \beta) > 2$.

1. Suponga que $i(\alpha, \beta) = 2$. Sea N una vecindad regular de $\alpha \cup \beta$ y haga $\gamma = \partial N$. Entonces γ es unión disjunta de cuatro curvas cerradas simples $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ y γ_4 , como se muestra en la figura 1.7.

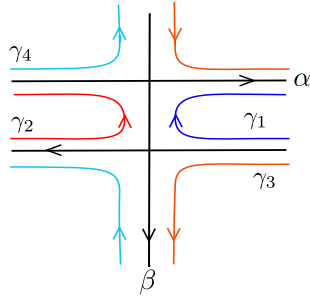


Figura 1.7: Construcción de curvas γ_i .

Probemos que al menos una de las curvas γ_i es esencial en S . Sea S_γ la superficie que se obtiene de cortar S a lo largo de γ . Entonces $S_\gamma = N \sqcup (\bigsqcup_{i=1}^4 T_i)$, con $\partial T_i = \gamma_i$. Observe que dado que α y β están en posición mínima, cada superficie T_i no es homeomorfa a un disco. Luego, si todo T_i es homeomorfo a un disco agujerado se tiene que $S \cong S_{0,4}$ y por consiguiente S es una superficie esporádica, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe al menos una γ_i que es una curva esencial. Así, $(\alpha, \gamma_i, \beta)$ es un camino que une a α con β en $C^{(1)}(S)$ y $2 = d_S(\alpha, \beta) \leq 2 \log_2(2) + 2 = 4$.

2. Suponga que $i(\alpha, \beta) > 2$. Sea π'' el siguiente punto después de π' que está en la intersección de α con β a lo largo de β y considere las curvas cerradas simples α' y α'' como se muestra en la figura 1.8.

Como α y β están en posición mínima, entonces α' y α'' también están en posición mínima respecto a α . Luego, $i(\alpha, \alpha') = i(\alpha, \alpha'') = 2$ y por el Corolario 1.2.2, α' y α'' son curvas esenciales.

Ahora nótese que $i(\alpha', \beta) + i(\alpha'', \beta) \leq i(\alpha, \beta)$ y además que la intersección de α' y α'' con α pertenecen al Caso 2. subcaso 1. Así, $d_S(\alpha, \alpha') = d_S(\alpha, \alpha'') = 2$. El resto de la prueba sigue el mismo desarrollo como en la ecuación (1.4).

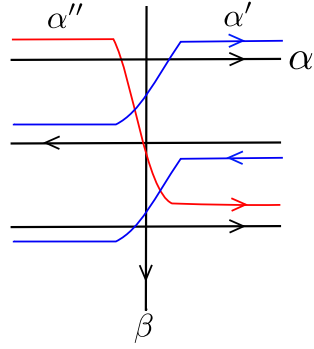


Figura 1.8: Tres intersecciones consecutivas.

□

1.3 Otros complejos simpliciales

En esta sección presentamos otros complejos simpliciales abstractos que le podemos asociar a una superficie dada. Debemos poner especial atención en el complejo de arcos $A(S)$, y el complejo de arcos y curvas $AC(S)$, pues los usaremos para probar la hiperbolicidad uniforme del complejo de curvas en el tercer capítulo.

- **Complejo de curvas no separantes $N(S)$:** La colección de curvas cerradas simples esenciales de una superficie se pueden dividir en dos clases.

Definición 1.3.1. Sea α una curva cerrada simple en S . Se dice que α es separante si al cortar S a lo largo de α se obtiene una superficie desconexa. De lo contrario α es una curva no separante.

El *Complejo de curvas no separantes*, denotado por $N(S)$, de una superficie S se define como el subcomplejo de $C(S)$ inducido por todas las clases de isotopía de curvas esenciales no separantes en S .

En el siguiente lema se muestra que $N(S_{1,0}) = C(S_{1,0})$ y $N(S_{1,1}) = C(S_{1,1})$.

Lema 1.3.1. Si S es el Toro o el Toro ponchado, entonces toda curva cerrada simple α en S es esencial si y sólo si α es no separante.

DEMOSTRACIÓN: Si α es una curva esencial en $S_{1,0}$, entonces por el Teorema de Clasificación de Superficies la superficie S_α que se obtiene de cortar $S_{1,0}$ a lo largo de α es un cilindro. De donde se sigue que α es no separante.

Recíprocamente, si α es una curva no separante, entonces existe un homeomorfismo que preserva la orientación de $S_{1,0}$ que lleva a α en un meridiano del toro [13]. Por lo tanto α es esencial.

De manera análoga se prueba cuando $S = S_{1,1}$. \square

En general no se cumple que $N(S)$ coincida con $C(S)$, por ejemplo, si S es una superficie que tiene género $g \geq 2$ podemos encontrar curvas separantes en S (véase Fig. 1.9).

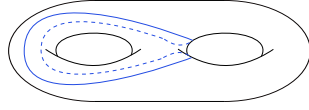


Figura 1.9: Curva separante en el bitoro.

- **Complejo de arcos $A(S)$:** Este complejo es de vital importancia para nosotros en el Capítulo 3. ya que para establecer la hiperbolicidad uniforme de $C(S)$ se necesita de un estudio minucioso del complejo de arcos $A(S)$. Ahora describimos la construcción de este complejo.

Definición 1.3.2. Sea α un arco simple⁸ en S . Decimos que α es esencial si no es isotópica a una componente de frontera o a un punto marcado de S (véase Fig. 1.10).

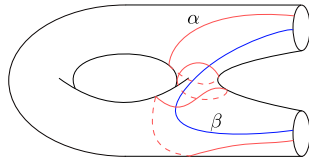


Figura 1.10: Arcos simples esenciales.

Aquí la isotopía de arcos simples es considerada de tal manera que los puntos finales que están en ∂S permanecen en ∂S y los puntos finales que son puntos marcados permanecen fijos a través de la isotopía. De esta manera, las clases de isotopía de arcos esenciales no distinguen entre componentes de frontera y ponchaduras.

Se define el *Complejo de Arcos* de una superficie S , denotado por $A(S)$, como el complejo simplicial abstracto dado por:

- Los vértices de $A(S)$ son clases de isotopía de arcos simples esenciales.
 - Una colección (a_0, \dots, a_k) de vértices en $A(S)$ forma un k -simplejo si se pueden realizar disjuntamente⁹ a pares.
- **Complejo de arcos y curvas $AC(S)$:** Este complejo simplicial tiene al complejo de curvas, al complejo de curvas no separantes y al complejo de arcos como subcomplejos simpliciales, el cual denotamos con $AC(S)$ y está definido por:
 - Los vértices en $AC(S)$ son todas las clases de isotopía de arcos o curvas esenciales en S .

⁸Un arco simple en S es una curva con puntos finales en $\partial S \cup P$, donde P denota el conjunto de puntos marcados de S , y tal que su interior está encajado en S .

⁹Véase Definición 1.1.2

- Los k -simplejos son colecciones de vértices en $AC(S)$, $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ que se pueden realizar disjuntamente a pares.

Obsérvese que si S es una superficie cerrada sin frontera, entonces $AC(S) = C(S)$ y $A(S) = \emptyset$.

- **Complejo de Schmutz $\hat{N}(S)$:** Este complejo difiere un poco de todos los mencionados anteriormente y resulta particularmente interesante por una razón: y es que para el caso del toro y el toro ponchado $\hat{N}^{(1)}(S)$ es una gráfica conexa, contrario con lo que pasa con el 1-esqueleto del complejo de curvas en estos casos. Además sus gráficas son una misma para ambas y sorprendentemente se pueden visualizar en un dibujo conocido como la *gráfica de Farey*. Es de las pocas ocasiones en el que podemos tener tal lujo.

Se define el *Complejo de Schmutz* de una superficie S , denotado por $\hat{N}(S)$, como:

- Los vértices son las clases de isotopía de curvas esenciales no separantes en S .
- Una colección de vértices (a_0, a_1, \dots, a_k) forma un k -simplejo en $\hat{N}(S)$ si $i(a_n, a_{n+1}) = 1$ y $i(a_n, a_m) = 0$ para $m \neq n + 1$.

Cabe mencionar que aunque pareciera que $\hat{N}(S)$ y $C(S)$ son completamente distintos, el estudio del primer complejo depende de las propiedades de $C(S)$ (véase [2]).

A continuación vamos a contruir una imagen para el 1-esqueleto de $\hat{N}(S_{1,0})$. Para ello primero probaremos que los vértices de $\hat{N}^{(1)}(S_{1,0})$ se pueden identificar de forma correcta con el conjunto $\mathbb{Q} \cup \{\infty\} \subsetneq S^1$. Usando la aplicación cubriente universal para el toro $\mathbb{R}^2 \rightarrow S_{1,0}$ y los teoremas de levantamiento (véase [9]) se puede mostrar que el conjunto de clases de isotopía de curvas cerradas del toro se puede identificar con los puntos (p, q) en \mathbb{Z}^2 . Con esto, las clases de isotopía de curvas esenciales son todos los elementos primitivos¹⁰ no triviales de \mathbb{Z}^2 , que en este caso corresponde con todas las parejas (p, q) tales que $\text{mcd}(p, q) = 1$. Así, los vértices de $\hat{N}(S_{1,0})$ están bien identificados con el conjunto $\mathbb{Q} \cup \infty \subsetneq S^1$.

Nótese que $i((1, 0), (p, q)) = |q|$. Ahora, sean $(p, q), (p', q')$ curvas esenciales en $S_{1,0}$. Como p y q son primos relativos, podemos definir la matriz

$$A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -q & p \end{pmatrix}$$

donde $\det(A) = pd - qb = 1$. Obsérvese que la matriz A envía el punto (p, q) en el punto $(1, 0)$ y el punto (p', q') en el punto $(dp' - bq', pq' - qp')$. Luego, como A es un homeomorfismo de \mathbb{R}^2 que preserva la orientación y preserva \mathbb{Z}^2 , la matriz A induce un homeomorfismo que preserva la orientación sobre $S_{1,0} = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$, que envía la curva (p, q) en la curva $(1, 0)$

¹⁰Un elemento g en un grupo G es primitivo si no existe $h \in G$ tal que $g = h^k$ para todo $|k| > 1$.

Capítulo 2

El Diámetro del Complejo de Curvas

En este capítulo probaremos que el complejo de curvas $C(S)$ de una superficie no esporádica S es de diámetro infinito. Para poder hacer esto usamos el hecho que el *grupo modular*¹ $Mod(S)$ de la superficie S actúa por isometrías sobre $C(S)$ y un teorema de Masur y Minsky (Teorema 2.2.2), que clasifica la dinámica de los elementos de $Mod(S)$ sobre un vértice fijo de $C(S)$. Con este objetivo, en la primera sección daremos la definición del grupo modular de una superficie y calcularemos el grupo modular del disco D^2 , del cilindro $S_{0,2}$ (superficie sin género y dos componentes de frontera) y del toro $S_{1,0}$ (véase segundo capítulo del libro [2] para saber más acerca de este tema). En la segunda sección mostramos que el grupo modular actúa por isometrías sobre $C^{(1)}(S)$ y utilizaremos un teorema de Masur y Minsky para probar que el complejo de curvas es de diámetro infinito (véase las notas de Schleimer [12]).

2.1 Definición y ejemplos

Al dotar con la topología compacto-abierta² al grupo de homeomorfismos $Homeo(S)$ de una superficie S se puede hablar de isotopías en este espacio.

Definición 2.1.1. El grupo modular de S , denotado por $Mod(S)$, se define como el grupo de clases de isotopía de homeomorfismos que preservan la orientación sobre S .

Las isotopías son tomadas en $(S, \partial S)$, es decir, deja fijos los puntos de la frontera de S . Si la superficie tiene un conjunto finito P de puntos marcados, los homeomorfismos de la isotopía son tomados de aquellos que permuta los elementos de P .

En la topología compacto-abierta, las componentes conexas por trayectoria de $Homeo^+(S)$ coinciden con las clases de isotopía de homeomorfismos que preservan la orientación en S . Con esto se tiene que

$$Mod(S) = Homeo^+(S)/Homeo_0(S)$$

donde $Homeo_0(S)$ denota la componente conexa del homeomorfismo identidad en $Homeo^+(S)$.

¹o grupo modular de Teichmüller

²La sub-base para esta topología está dada por $V(K, U) := \{f \in Homeo(S) \mid f(K) \subseteq U\}$, donde U es abierto y K compacto en S .

En general es difícil calcular el grupo modular de una superficie, como lo hacemos notar en los siguientes ejemplos.

1. El grupo modular de D^2 lo da el truco de Alexander.

Lema 2.1.1 (Lema de Alexander). *El grupo modular $Mod(D^2)$ es trivial.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\phi : D^2 \rightarrow D^2$ un homeomorfismo que preserva la orientación sobre D^2 y tal que $\phi|_{\partial D^2} = Id$. Entonces la función definida por

$$F(x, t) = \begin{cases} (1-t)\phi\left(\frac{x}{1-t}\right) & 0 \leq |x| < 1-t \\ x & 1-t \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

para todo $0 \leq t < 1$ y $F(\cdot, 1) = Id$ sobre D^2 es una isotopía de ϕ a Id . \square

2. Ahora vamos a calcular el grupo modular del cilindro $S_{0,2}$.

Teorema 2.1.2. *El grupo modular $Mod(S_{0,2})$ es isomorfo a \mathbb{Z} .*

DEMOSTRACIÓN: Definamos una función $\rho : Mod(S_{0,2}) \rightarrow \mathbb{Z}$ como sigue: Para cada $f \in Mod(S_{0,2})$, tomemos $\phi \in f$. Consideremos la función cubriente universal $\tilde{A} = \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow S_{0,2}$. Luego, sea $\tilde{\phi} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ el levantamiento de ϕ . Como $\phi|_{S^1 \times \{1\}} = Id$, entonces $\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}|_{\mathbb{R} \times \{1\}}$ es un levantamiento de la identidad y por lo tanto es una traslación entera. Definimos $\rho(f) = \tilde{\phi}_1 \in \mathbb{Z}$. Claramente ρ es un homeomorfismo de grupos. Veamos que ρ es isomorfismo.

Sobreyectividad: Sea $n \in \mathbb{Z}$. La transformación

$$M = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es un homeomorfismo que preserva la orientación sobre \tilde{A} . Observe que M preserva las transformaciones de cubierta. Entonces M induce un homeomorfismo ϕ que preserva la orientación sobre $S_{0,2}$ que fija la frontera. Además, $\rho([\phi]) = n$.

Inyectividad: Sea $f \in Mod(S_{0,2})$ tal que $\rho(f) = 0$. Entonces $\tilde{\phi} = Id$ sobre $\partial \tilde{A}$. Veamos que ϕ es isotópica a Id sobre $S_{0,2}$. Considere la isotopía $F_t = tId + (1-t)\tilde{\phi}$ de $\tilde{\phi}$ a Id sobre \tilde{A} . Observe que $F_t|_{\partial \tilde{A}} = Id$. Luego, se satisface que F_t es invariante bajo las transformaciones de cubierta y por lo tanto induce una isotopía sobre $S_{0,2}$ de ϕ en Id . \square

3. Calcular el grupo modular de $S_{1,0}$ requiere más herramienta. Sea $\phi \in f \in Mod(S_{1,0})$. Entonces ϕ induce un isomorfismo ϕ_* del primer grupo de homología $H_1(S_{1,0} : \mathbb{Z})$ en sí mismo

$$\begin{aligned} \phi_* : H_1(S_{1,0}; \mathbb{Z}) &\longrightarrow H_1(S_{1,0}; \mathbb{Z}) \\ [\alpha] &\longmapsto [\phi \circ \alpha]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

En grupos de homología, dos homeomorfismos isotópicos inducen el mismo isomorfismo sobre el primer grupo de homología de $S_{1,0}$, esto quiere decir que ϕ_* es el mismo sin importar que representante ϕ se tome en $f \in \text{Mod}(S_{1,0})$. Con esta observación se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.1.3. *El homomorfismo de grupos*

$$\begin{aligned} \sigma : \text{Mod}(S_{1,0}) &\longrightarrow SL(2, \mathbb{Z}) \\ \phi \in f &\longmapsto \phi_* \end{aligned} \quad (2.2)$$

inducido por la acción de $\text{Mod}(S_{1,0})$ sobre $H_1(S_{1,0}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ es un isomorfismo.

Hay varias cosas a probar en este teorema. Primero vamos a probar que la imagen de σ está contenida en el grupo $SL(2, \mathbb{Z})$. Para ver esto necesitamos de la siguiente definición.

Definición 2.1.2. Sean α y β dos curvas cerradas simples orientadas en una superficie S que se intersectan transversalmente. Etiqueté las intersecciones de α con β con 1 o -1 dependiendo si α intersecta a β de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, respectivamente. Definimos la intersección algebraica $\hat{i}(\alpha, \beta)$ de las curvas α y β como la suma de todas las etiquetas (véase Fig. 2.1).

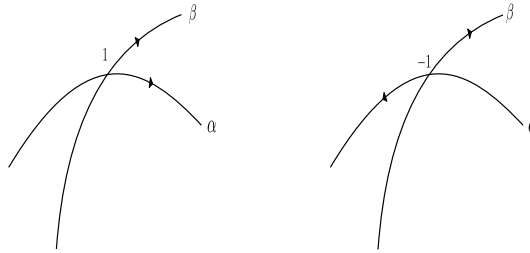


Figura 2.1: Intersección algebraica de curvas

Nótese que la intersección algebraica es más general que la intersección geométrica de curvas, ya que la primera toma en cuenta la dirección en que son recorridas las curvas. También cabe mencionar que la intersección algebraica se preserva bajo homeomorfismos que preservan la orientación de S , pero no siempre es así con los homeomorfismos que no preservan la orientación.

DEMOSTRACIÓN: Veamos primero que la imagen de σ está contenido en $SL(2, \mathbb{Z})$. De acuerdo a la identificación de las clases de isotopía de curvas cerradas de $S_{1,0}$ con los puntos $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ (véase la sección 1.3), una matriz en $GL(2, \mathbb{Z})$ que representa a ϕ_* está determinada por la imagen bajo ϕ de las curvas $(1, 0)$ y $(0, 1)$, esto es, $\phi_* = (\phi_*(1, 0), \phi_*(0, 1)) =$

$((p, q), (p', q'))$. Luego, la intersección algebraica entre (p, q) y (p', q') es igual al determinante de ϕ_* (vea final del Capítulo 1.); así $\det \phi_* = pq' - qp'$. Dado que ϕ es un homeomorfismo que preserva la orientación y la intersección algebraica de la curva $(1, 0)$ y $(0, 1)$ es uno, se concluye que $\det \phi_* = pq' - qp' = 1$. Por lo tanto ϕ_* está en $SL(2, \mathbb{Z})$.

Ahora resta probar que, en efecto, σ es un isomorfismo de grupos.

Sobreyectividad: Sea $A \in SL(2, \mathbb{Z})$. Como A es un homeomorfismo sobre \mathbb{R}^2 que preserva la orientación y preserva \mathbb{Z}^2 , esta induce un homeomorfismo ϕ que preserva la orientación sobre el toro $S_{1,0}$. Además se satisface que $\sigma(\phi) = A$.

Inyectividad: Sea $\phi \in f \in Mod(S_{1,0})$ tal que $\sigma(f) = Id \in SL(2, \mathbb{Z})$. Considere dos curvas cerradas simples esenciales α y β en $S_{1,0}$ en posición mínima con $i(\alpha, \beta) = 1$. Entonces se tiene que $\phi(\alpha)$ es isotópica a α y $\phi(\beta)$ es isotópica a β , pues $\phi_* = Id$. Luego, usando que $\phi \circ \alpha \simeq \alpha$, existe un homeomorfismo de $S_{1,0}$ que preserva la orientación y que es isotópico a ϕ y además deja fijos los puntos de α (véase Teorema 2.1.2). Así, sin pérdida de generalidad suponga que ϕ fija los puntos de α .

Ahora, sea S_α la superficie que se obtiene de cortar $S_{1,0}$ a lo largo de α . Entonces el homeomorfismo ϕ induce un homeomorfismo que preserva la orientación $\bar{\phi}$ sobre S_α que fija los puntos de la frontera. Luego, ya que S_α es homeomorfa al cilindro y $[\bar{\phi}] \in Mod(S_\alpha) \approx \mathbb{Z}$ tal que $\bar{\phi}(\beta) \simeq \beta$ se tiene que $\bar{\phi}$ es isotópica a la identidad en S_α (véase Teorema 2.1.2). Por lo tanto ϕ es isotópica a la identidad de $S_{1,0}$ \square

Todo elemento $B \in Mod(S_{1,0}) \approx SL(2, \mathbb{Z})$ se pueden clasificar de acuerdo a su traza $tr(B)$; y en esencia hay tres tipos de elementos dependiendo si $tr(B) = 2$, $tr(B) < 2$ o $tr(B) > 2$, en cuyo caso se dice que B es parabólico, elíptico o hiperbólico, respectivamente [1]. Este ejemplo es evidencia particular de un teorema más general y célebre en topología geométrica atribuido a Nielsen y Thurston, el cual nos dice que los elementos del Mapping Class Group $Mod(S)$ de una superficie S sólo son de tres tipos distintos y los cuales están clasificados de acuerdo a la dinámica que induce sobre las curvas cerradas simples en la superficie. Este teorema lo usaremos más adelante, por lo que lo enunciamos sin prueba pero el lector que esté interesado puede consultar [2].

Teorema 2.1.4 (Clasificación de Nielsen-Thurston). *Sea $f \in Mod(S)$. Entonces f es periódico, reducible o pseudo-Anosov.*

2.2 Acción del grupo modular sobre $C(S)$

Un homeomorfismo que preserva la orientación sobre una superficie S preserva curvas esenciales y la intersección de conjuntos, estos hechos permiten definir una acción de $Mod(S)$ sobre el complejo de curvas $C(S)$ de la siguiente manera: Dado $\phi \in f \in Mod(S)$ y (a_0, a_1, \dots, a_k) un k -simplejo en $C(S)$, se asigna el k -simplejo $([\phi(\alpha_0)], [\phi(\alpha_1)], \dots, [\phi(\alpha_k)])$ en $C(S)$, donde $\alpha_i \in a_i$ con $\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$.

Más aún, al restringirnos al 1-esqueleto de $C(S)$, $Mod(S)$ actúa por automorfismos sobre $C^{(1)}(S)$. De forma precisa, se tiene el siguiente homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned}\Phi : Mod(S) &\longrightarrow Aut(C^1(S)) \\ f &\longmapsto \Phi_f,\end{aligned}\tag{2.3}$$

donde Φ_f es el automorfismo de $C^1(S)$ inducido por la acción de $Mod(S)$ sobre $C(S)$, esto es:

$$\begin{aligned}\Phi_f : C^1(S) &\longrightarrow C^1(S) \\ \alpha \in a &\longmapsto [f \circ \alpha]\end{aligned}\tag{2.4}$$

para todo $a \in C^{(0)}(S)$.

Recordemos que $C^1(S)$ tiene estructura de espacio métrico, al tomar esto en cuenta se puede afirmar que $Mod(S)$ actúa por isometrías sobre $C^1(S)$.

Proposición 2.2.1. *Si S es una superficie no esporádica, entonces $Mod(S)$ actúa por isometrías sobre $C^1(S)$.*

DEMOSTRACIÓN: Usemos el hecho que $C^1(S)$ es un espacio métrico y probemos que Φ_f es una isometría. Sean $a, b \in C^{(0)}(S)$ y sea $G_{ab} = (a_0 = a, a_1, \dots, a_k = b)$ una geodésica en $C^1(S)$ que conecta a a con b . Entonces $d_S(a, b) = k$. Como $Mod(S)$ actúa sobre $C^1(S)$, se tiene que $d_S(\Phi_f(a), \Phi_f(b)) \leq k$, pues $\Phi_f(G_{ab}) = (\Phi_f(a_0) = \Phi_f(a), \Phi_f(a_1), \dots, \Phi_f(a_k) = \Phi_f(b))$ es un camino en $C^1(S)$ que conecta a $\Phi_f(a)$ con $\Phi_f(b)$. Usando $\Phi_f^{-1} = \Phi_{f^{-1}}$, se consigue que en efecto, $\Phi_f(G_{ab})$ es una geodésica. Por lo tanto Φ_f es una isometría de $(C^1(S), d_S)$. \square

Cuasi-isometrías

El concepto de cuasi-isometría es esencial en Teoría Geométrica de Grupos, y a nosotros en esta ocasión nos ayudará a comprender cómo son las órbitas de la acción

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} \times C^1(S) &\longrightarrow C^1(S) \\ (n, a) &\longmapsto \Phi_f^n(a).\end{aligned}$$

Así que veamos que es una cuasi-isometría.

Definición 2.2.1. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Se dice que una función $f : X \rightarrow Y$ es un encaje cuasi-isométrico si existen constantes $\lambda \geq 1$ y $k \geq 0$ tales que

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x, y) - k \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \lambda d_X(x, y) + k,\tag{2.5}$$

para cualesquiera $x, y \in X$.

Si además, Y coincide con la k -vecindad de la imagen de f , se dice que f es una cuasi-isometría y que X es cuasi-isométrico a Y .

Por ejemplo \mathbb{Z} es cuasi-isométrico a \mathbb{R} y en general \mathbb{Z}^n es cuasi-isométrico a \mathbb{R}^n . Un ejemplo menos obvio es que el árbol T_3 es cuasi-isométrico al árbol T_4 (véase las notas Teoría geométrica de grupos [3]).

Sea (X, d_X) un espacio métrico. Recordemos que dados dos puntos $x, y \in X$, un camino que conecta a x con y es una función continua $G : [a, b] \rightarrow X$ tal que $G(a) = x$ y $G(b) = y$. Decimos que G es una geodésica que conecta a x con y , que denotamos por G_{xy} , si $d_X(G(t'), G(t)) = |t' - t|$ para todo $t', t \in [a, b]$, es decir, la imagen de G_{xy} es isométrico al intervalo $[a, b]$. Y decimos que (X, d_X) es un espacio métrico geodésico si cualesquiera par de puntos en X están conectados por una geodésica.

Ejemplo 2.2.1 ($C^{(1)}(S)$ es un espacio métrico geodésico). Recordemos que en el capítulo anterior se dijo que si S es una superficie no esporádica entonces $C^{(1)}$ es una gráfica conexa [Teorema 1.2.3]. Más aún, éste espacio es métrico; la métrica que denotamos por d_S (véase la ecuación 1.2) la construimos de forma que dos vértices $a, b \in C^{(0)}(S)$ están a distancia uno si $(a, b) \in C^{(1)}(S)$ es un 1-simplejo en $C(S)$, es decir, (a, b) es una arista. Luego, la distancia entre cualesquiera dos vértices la definimos como la longitud del camino más pequeño en $C^{(1)}(S)$ que los une. Por la forma en que está definida la métrica d_S , el camino más pequeño que une dos vértices es una geodésica, resulta así que $(C^{(1)}(S), d_S)$ es un espacio métrico geodésico.

Definición 2.2.2. Sea (X, d_X) un espacio métrico geodésico y sea $g : X \rightarrow X$ una isometría. Se dice que g es:

1. Elíptica: si toda órbita de g está acotada.
2. Hiperbólica: si toda órbita de g es un encaje cuasi-isométrico de \mathbb{Z} .
3. Parabólica: si g no es elíptica ni hiperbólica.

Aquí, por órbita de g nos referimos al conjunto $\{g^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, donde $x \in X$ está fijo.

Teorema 2.2.2 (Masur y Minsky, Proposición 4.6, [6]). *Sea S una superficie no esporádica. Entonces los elementos periódicos y reducibles de $Mod(S)$ actúan elípticamente sobre $C^{(1)}(S)$ y los elementos pseudo-Anosov actúan hiperbólicamente.*

Como corolario de éste Teorema de Masur y Minsky y del hecho que si S es no esporádica entonces $Mod(S)$ tiene elementos pseudo-Anosov tenemos que la gráfica $C^{(1)}(S)$ tiene diámetro infinito.

Corolario 2.2.3. *Si S es una superficie no esporádica, entonces $C^{(1)}(S)$ tiene diámetro infinito.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f \in Mod(S)$ un elemento pseudo-Anosov. Por el Teorema de Masur y Minsky 2.2.2, Φ_f actúa hiperbólicamente sobre $C^{(1)}(S)$. Esto quiere decir que dado $a \in C^{(0)}(S)$,

$$\begin{aligned} h : \mathbb{Z} &\longrightarrow C^{(1)}(S) \\ n &\longmapsto \Phi_f^n(a) \end{aligned}$$

es un encaje cuasi-isométrico. Entonces existen $\lambda \geq 1$ y $k \geq 0$ tales que

$$\frac{1}{\lambda}|m - n| - k \leq d_S(\Phi_f^m(a), \Phi_f^n(a)) \leq \lambda|m - n| + k,$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z}$. De la desigualdad izquierda se concluye que $C^{(1)}(S)$ tiene diámetro infinito. \square

Capítulo 3

Hiperbolicidad Uniforme del Complejo de Curvas

En este capítulo introducimos el concepto de δ -hiperbolicidad en espacios métricos geodésicos y probamos que el complejo de curvas de una superficie no esporádica cumple con esta propiedad. Más aún, se probará que la constante δ no depende de la topología de la superficie y a esto llamamos *hiperbolicidad uniforme del complejo de curvas*. En las líneas que restan de este escrito damos la demostración detallada de la hiperbolicidad uniforme del complejo de curvas siguiendo a Hensel et al. en [11].

3.1 δ -hiperbolicidad

Definición 3.1.1. Sea (X, d_X) un espacio métrico geodésico. Se dice que X es δ -hiperbólico con constante $\delta \geq 0$ si para todo triángulo geodésico xyz en X está δ -centrado, es decir, existe $\omega \in X$ que está a distancia menor o igual a δ a cualquiera de los lados del triángulo xyz .

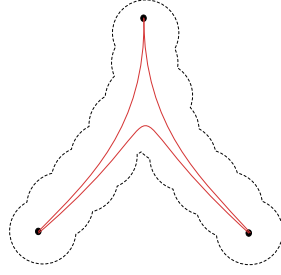
Por triángulo geodésico entendemos que sus vértices están conectados por geodésicas.

En el primer capítulo del libro [8] se pueden encontrar nociones equivalentes (salvo un reescalamiento de la constante δ) de δ -hiperbolicidad. Una definición equivalente de δ -hiperbolicidad que nos ayuda a tener una idea más familiar e intuitiva es la siguiente:

Definición 3.1.2. Un espacio métrico geodésico (X, d_X) es δ -hiperbólico si para todo triángulo geodésico xyz en X , cualquiera de sus lados está contenido en una δ -vecindad cerrada de los otros dos lados (véase Fig. 3.1).

En este sentido, se puede pensar que la δ -hiperbolicidad mide qué tan delgados son los triángulos geodésicos en un espacio métrico geodésico. El plano superior con la métrica hiperbólica es $\log(3)$ -hiperbólico, este ejemplo le hace justicia al nombre de δ -hiperbolicidad. Otro ejemplo es el árbol T_k el cual es 0-hiperbólico.

Nosotros usaremos la noción de la Definición 3.1.1 para la hiperbolicidad.

Figura 3.1: δ -hiperbolicidad

3.2 Hiperbolicidad uniforme

Hemos dicho en el Ejemplo 2.2.1 que $C^{(1)}(S)$ es un espacio métrico geodésico, ahora nos enfocamos en probar la hiperbolicidad uniforme de este espacio. La prueba básicamente consta de tres pasos los cuales bosquejamos a continuación.

1. Dados dos vértices $a, b \in A^{(0)}(S)$ y dos puntos finales ν y η de a y b respectivamente, existe un camino en $A^{(1)}(S)$ que conecta a a con b . Este camino consta de arcos esenciales construidos a partir de subarcos de representantes en posición mínima de a y b , y completamente determinados por las intersecciones de estos. Este camino se llama *camino unicornio* y está denotado por $P(a^\nu, b^\eta)$. Cabe mencionar que el camino unicornio depende de los puntos finales elegidos. Al tomar en consideración las diferentes configuraciones en que se pueden tomar los puntos finales, dos vértices en $A(S)$ tiene cuatro caminos unicornio que los conectan y se denota con $P(a, b)$ a la unión de estos caminos unicornio.

Usando caminos unicornio probaremos que:

- a) El 1-esqueleto $A^{(1)}(S)$ de $A(S)$ es conexo (Corolario 3.2.3).
- b) Dados tres vértices $a, b, d \in A^{(0)}(S)$, existe un vértice en cada uno de los caminos unicornio $P(a, b)$, $P(a, d)$ y $P(d, b)$ tales que están conectados a pares (véase Proposición 3.2.4)(véase Fig. 3.2). Esto es a lo que Hensel et al. llaman “1-Slim triangles”.

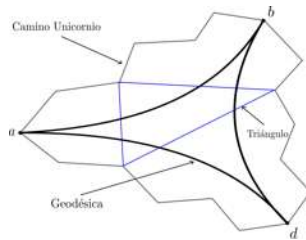


Figura 3.2: Triángulo formado con vértices de caminos unicornio.

- c) Todo camino unicornio $P(a^\nu, b^\eta)$ está a distancia menor o igual que seis de cualquier geodésica entre a y b en $A^{(1)}(S)$ (véase Proposición 3.2.7) (véase Fig. 3.3).

Tanto en la construcción de los caminos unicornio como en la estimación del inciso c) no

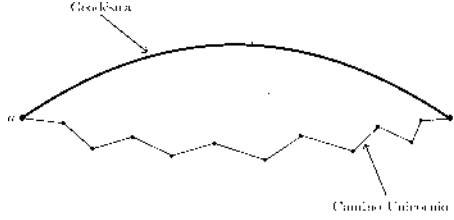


Figura 3.3: Proximidad de los caminos unicornio a geodésicas.

depende de la topología de la superficie. Luego, de los incisos b) y c), obtenemos que todo triángulo geodésico en $A^{(1)}(S)$ está 7-centrado y por lo tanto $A^{(1)}(S)$ es 7-hiperbólico.

2. Construimos una retracción 2-Lipschitz $r : AC^{(0)}(S) \rightarrow C^{(0)}(S)$, esto quiere decir que $d_S(r(a), r(b)) \leq 2|a, b|$ para cualesquiera $a, b \in AC^{(0)}(S)$, donde $| \cdot |$ denota la distancia en $AC^{(1)}(S)$ (véase Lema 3.2.9).

Esta retracción nos da una manera de pasar las propiedades métricas, en este caso la δ -hiperbolicidad, del complejo de arcos y curvas al complejo de arcos.

3. Demostramos la hiperbolicidad uniforme del complejo de curvas para superficies con frontera. Esto se hace así, pues en este caso el complejo de arcos es no vacío. Luego usando la hiperbolicidad uniforme del complejo de arcos obtenemos, gracias a la conexión del paso 2., la hiperbolicidad uniforme del complejo de curvas. Veamos a grandes rasgos la prueba.

Sean $a, b \in C^{(0)}(S)$ y sean $\bar{a}, \bar{b} \in A^{(0)}(S)$ adyacentes a a y b respectivamente, en $AC^{(1)}(S)$ (véase Fig. 3.4). Tome $P \in P(\bar{a}, \bar{b})$ cualquier camino unicornio entre \bar{a} y \bar{b} . Luego, el camino en $AC^{(1)}(S)$ formado por $(a, \bar{a}, P, \bar{b}, b)$ está a distancia a lo más 8 de cualquier geodésica que conecta a a con b en $C^{(1)}(S)$ (véase Teorema 3.2.13).

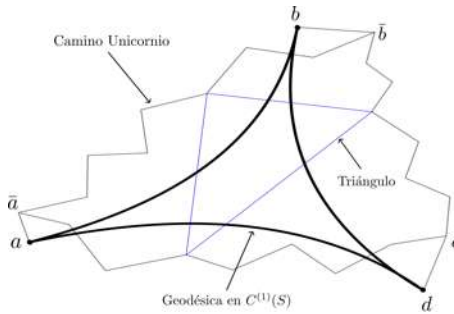


Figura 3.4: Triángulo abd en $C^{(1)}(S)$ 17-centrado.

Por el paso 2. los vértices a y b en $C^{(1)}(S)$ están a distancia a lo más 16. Finalmente, por el inciso c) del paso 1. todo triángulo en $C^{(1)}(S)$ está 17-centrado y por lo tanto se concluye que $C^{(1)}(S)$ es 17-hiperbólico.

4. La hiperbolicidad uniforme para superficies sin frontera se sigue de la construcción de una retracción 1-Lipschitz $f : C^{(1)}(S') \rightarrow C^{(1)}(S)$, donde S es una superficie cerrada sin frontera y S' es la superficie que se obtiene de S al marcar un punto en su interior (véase Lema 3.2.10).

En las siguientes secciones damos la prueba con todo rigor de los pasos descritos anteriormente.

Complejo de arcos

El complejo de arcos $A(S)$ de una superficie S la hemos definido como el complejo simplicial donde los vértices son arcos simples esenciales y los k -simplejos son colecciones de $k + 1$ arcos esenciales que se pueden realizar disjuntamente a pares (véase sección 1.3).

Recordemos del Capítulo 2 que dos curvas cerradas simples α y β en una superficie S están en posición mínima si estas curvas son representantes de sus clases de isotopía donde se alcanza la realización geométrica, es decir, $i([\alpha], [\beta]) = \#(\alpha \cap \beta)$. Este concepto se puede llevar al caso de arcos simples sin problemas. También, dijimos que dos curvas cerradas simples que se intersectan transversalmente están en posición mínima si y sólo si estas no forman bígono (véase Teorema 1.2.1). Este criterio se puede extender al caso de arcos simples.

Proposición 3.2.1. *Dos arcos simples en una superficie S que se cortan transversalmente están en posición mínima si y sólo si no forman bígono ni medios bígono.*

Aquí dos arcos simples α y β forman un medio bígono si existen subarcos de α , β y ∂S que acotan una región en S homeomorfa a un triángulo (véase Fig. 3.5).

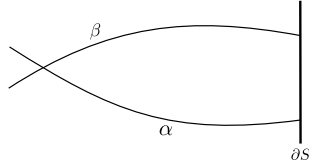


Figura 3.5: Medio bígono formado por α y β .

Camino Unicornio¹

Sean a y b arcos simples esenciales en una superficie S en posición mínima². Ahora, construiremos un camino entre a y b en $A^{(1)}(S)$: escoja ν y η puntos finales de a y b , respectivamente. Luego, tome $\pi \in a \cap b$ y considere los subarcos $a' \subseteq a$ y $b' \subseteq b$ que contienen al punto final ν y η respectivamente y a π como punto final en común.

Suponga que el arco $a' \cup b'$ es un arco simple en S . Observe que como a y b están en posición mínima, el arco $a' \cup b'$ es esencial. En este caso se dice que $a' \cup b'$ es un *arco unicornio* obtenido de a' y b' determinado por $\pi \in a \cap b$.

Se debe notar que no todo punto en $a \cap b$ determina un arco simple.

Ahora, defina el orden lineal entre arcos unicornio por: $a' \cup b' \leq a'' \cup b''$ si $a'' \subseteq a'$ (equivalentemente $b' \subseteq b''$) y denote con $P(a', b'') := (c_0 = a, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n = b)$ la colección de clases de isotopía de arcos unicornio obtenidos de a' y b'' ordenados linealmente. Veamos que $P(a', b'')$ es un camino entre a y b (véase Fig. 3.6).

¹Traducción del inglés de la palabra “unicorn”, que está formado por “uni” que indica uno y por “corn” que abrevia rincón.

²la notación con letras minúsculas se usa indistintamente para arcos y clases de arcos

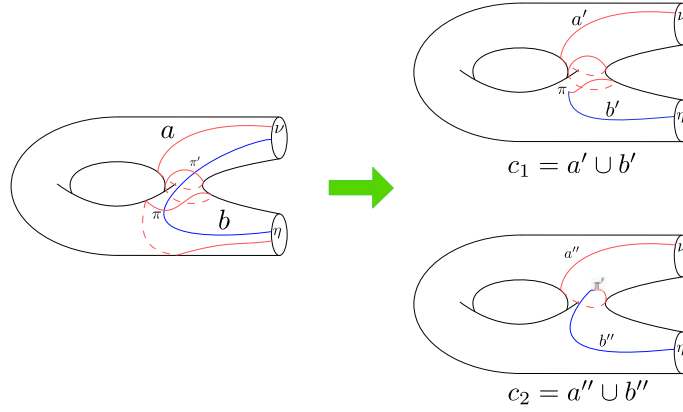


Figura 3.6: Camino unicornio obtenido de a^ν y b^η .

Proposición 3.2.2. *Dos arcos unicornio consecutivos c_i, c_{i+1} en $P(a^\nu, b^\eta)$ forman una arista en $A(S)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $1 \leq i < n - 1$ y sean $c_i = a' \cup b', c_{i+1} = a'' \cup b'' \in P(a^\nu, b^\eta)$ dos arcos unicornio determinados por π y π' en $a \cap b$, respectivamente (véase Fig. 3.7). Luego, c_i y c_{i+1} no son isotópicas, pues de lo contrario los subarcos $\pi\pi' \subsetneq a$ y $\pi\pi' \subsetneq b$ formarían un bígono, lo que es una contradicción ya que hemos tomado a a y b en posición mínima. Por lo tanto c_i y c_{i+1} son vértices distintos en $A(S)$. Al tomar una pequeña isotopía de a'' y b'' fuera de a' y b' respectivamente se obtiene que c_i se puede realizar disjuntamente de c_{i+1} , resultando así que (c_i, c_{i+1}) es una arista en $A^{(1)}(S)$.

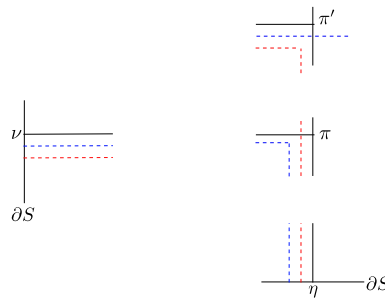


Figura 3.7: Arcos unicornio consecutivo c_i y c_{i+1} .

Mostremos que $c_0 = a$ y $c_1 = a' \cup b'$ forman una arista en $A^{(1)}(S)$. Como el interior de b' no intersecta a a , se tiene que al tomar una pequeña isotopía de a' fuera de a , los vértices a y c_1 se pueden realizar disjuntamente y por lo tanto forman una arista en $A^{(1)}(S)$.

De forma análoga se prueba que los arcos unicornio c_{n-1} y b forman una arista en $A^{(1)}(S)$. □

El siguiente corolario es inmediato de la proposición anterior.

Corolario 3.2.3. *Si $\partial S \neq \emptyset$, entonces la gráfica $A^{(1)}(S)$ es conexa.*

Gracias a la Proposición 3.2.2, decimos que $P(a^\nu, b^\eta)$ es el camino unicornio obtenido de a^ν y b^η . Dado que el camino unicornio depende de los puntos finales, existen cuatro caminos

unicornio que conectan a a con b : sean ν_+, ν_- y η_+, η_- los puntos finales de a y b , respectivamente. Denotemos con $P(a, b)$ al conjunto de caminos unicornio obtenidos de a y b , esto es, $P(a, b) = \{P(a^{\nu_+}, b^{\eta_+}), P(a^{\nu_+}, b^{\eta_-}), P(a^{\nu_-}, b^{\eta_+}), P(a^{\nu_-}, b^{\eta_-})\}$.

La siguiente proposición corresponde al inciso b) del paso 1. descrito en la introducción de este capítulo.

Proposición 3.2.4 (1-slim triangle³). *Sean a, b y d vértices en $A(S)$ con puntos finales ν, η y τ respectivamente, mutuamente en posición mínima. Entonces existen vértices adyacentes a pares en $P(a^\nu, b^\eta)$, $P(a^\nu, d^\tau)$ y $P(d^\tau, b^\eta)$.*

DEMOSTRACIÓN: Es evidente que si a, b y d no se intersectan a pares no hay nada que probar.

Suponga que a y b se intersectan en al menos un punto. Entonces podemos tomar dos arcos unicornio consecutivos $c_i = a' \cup b'$ y $c_{i+1} = a'' \cup b''$ en $P(a^\nu, b^\eta) \in P(a, b)$. Identificamos tres casos posibles respecto de la intersección de c_i y c_{i+1} con d :

Caso 1. $c_i \cap d = \emptyset$ y $c_{i+1} \cap d = \emptyset$. Por la Proposición 3.2.2, c_i, c_{i+1} y d forman el triángulo buscado.

Caso 2. $c_i \cap d \neq \emptyset$ y $c_{i+1} \cap d = \emptyset$. Sea $\sigma \in c_i \cap d$ más cercano a τ a lo largo de d (véase Fig. 3.8). Entonces $\sigma \in a'$ o $\sigma \in b'$. Luego, como $b' \subsetneq b''$ y $c_{i+1} \cap d = \emptyset$, $\sigma \notin b'$ y por consiguiente $\sigma \in a'$. Sea $\pi \in a \cap d$ más cercano a ν a lo largo de a . Nuevamente, como $a'' \cap d = \emptyset$, se tiene que σ está contenido en el interior del arco $\sigma\pi \subsetneq a$. Ahora sea d' el subarco de d que contiene a τ y a π como puntos finales y sea a''' el subarco de a' que contiene a ν y π como puntos finales y definamos $c = a''' \cup d'$. Por construcción $c \in P(a^\nu, d^\tau)$ determinado por π . Tomando una pequeña isotopía de a''' fuera de a'' se tiene que c y c_{i+1} se pueden realizar disjuntamente. También, c y d se pueden realizar disjuntamente al hacer una pequeña isotopía de d' fuera de d . Por lo tanto, c_{i+1}, c y d son vértices adyacentes a pares en $A^{(1)}(S)$.

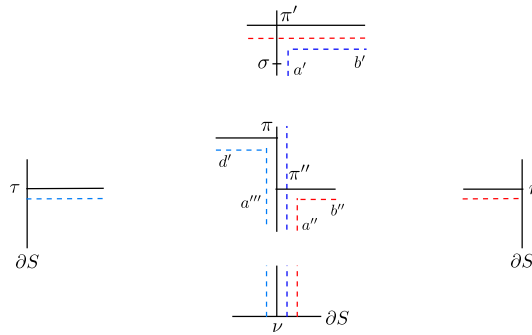


Figura 3.8: Caso 2. $c_i \cap d \neq \emptyset$ y $c_{i+1} \cap d = \emptyset$.

El caso $c_i \cap d = \emptyset$ y $c_{i+1} \cap d \neq \emptyset$ sigue argumentos similares.

Caso 3. $c_i \cap d \neq \emptyset$ y $c_{i+1} \cap d \neq \emptyset$. Sean σ y γ los puntos de intersección de c_i y c_{i+1} con d respectivamente más cercanos a τ a lo largo de d (véase Fig. 3.9).

³es decir, que existe un 2-simplejo en $A(S)$ de tal manera que cada uno de sus vértices están exactamente en uno de los caminos unicornio.

Luego, podemos tomar $1 \leq i \leq n - 1$ de tal manera que $\sigma \in a'$ y $\gamma \in b''$. Para este efecto se aplica el siguiente algoritmo: si se satisface $(\sigma \in a', \gamma \in b'')$ parar, de lo contrario haga $c_i = c_{i+1}$ y $c_{i+1} = c_{i+2}$.

Ahora, sin pérdida de generalidad suponga que σ no está más lejos de τ que γ a lo largo de d . Sea π el punto de intersección del subarco $\sigma\gamma \subsetneq d$ con a más cercano a ν a lo largo de a . Observe que π está contenido en el subarco $\sigma\pi''$, pues si π está en a'' , se contradice que γ sea el más cercano a τ .

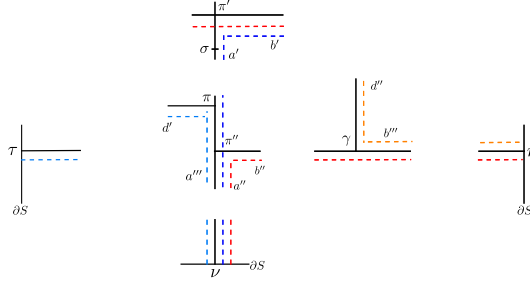


Figura 3.9: Caso 3. $c_i \cap d \neq \emptyset$ y $c_{i+1} \cap d \neq \emptyset$.

Sea $c = a''' \cup d'$, donde $a''' \subseteq a'$ con puntos finales ν y π ; y sea $d' \subsetneq d$ con puntos finales τ y π . Sea también, $d'' \subsetneq d$ con puntos finales τ, γ ; y sea $b''' \subsetneq b$ con puntos finales η, γ y definamos $h = d'' \cup b'''$. Por construcción c y h son arcos simples y por tanto son arcos unicornio en $P(a', d^\tau)$ y $P(d^\tau, b^\eta)$ respectivamente.

Nótese que $d' \subseteq d''$ y por construcción el interior de d' no intersecta a c_{i+1} , entonces tomando una pequeña isotopía de a''' fuera de a' y otra de b''' fuera de b'' se tiene que los pares de vértices c_{i+1}, c y c_{i+1}, h se pueden realizar disjuntamente y por lo tanto son adyacentes.

Por último, tomando una isotopía de d' fuera de d'' , los vértices c y h se realizan disjuntamente. De todo lo anterior, los vértices c_{i+1}, c y h forman un triángulo en $A^{(1)}(S)$.

□

Para probar en inciso c) del paso 1. necesitamos del siguiente lema técnico seguido de la proposición 3.2.6.

Lema 3.2.5. *Sean a, b vértices en $A(S)$ con puntos finales ν, η respectivamente mutuamente en posición mínima. Sea $c = c_{n-1} = a' \cup b'$ y sea \tilde{c} el arco homotópico a c que se obtiene de una pequeña homotopía de a' fuera de a de manera que $a' \cap \tilde{c} = \emptyset$. Entonces ó \tilde{c} y a están en posición mínima o bien acotan un medio bígono, en cuyo caso, si \bar{c} se obtiene de \tilde{c} al deshacer el medio bígono con una homotopía, se tiene que \bar{c} y a están en posición mínima.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\tilde{\nu}$ el punto final de \tilde{c} que proviene de ν después de la homotopía de a' fuera de a (véase Fig. 3.10).

Suponga que \tilde{c} y a no está en posición mínima. Como a y b están en posición mínima, \tilde{c} y a no forman bígono y por consiguiente \tilde{c} y a forman un medio bígono $\tilde{c}'a''$, donde $\tilde{c}' \subsetneq \tilde{c}$ y $a'' \subsetneq a'$.

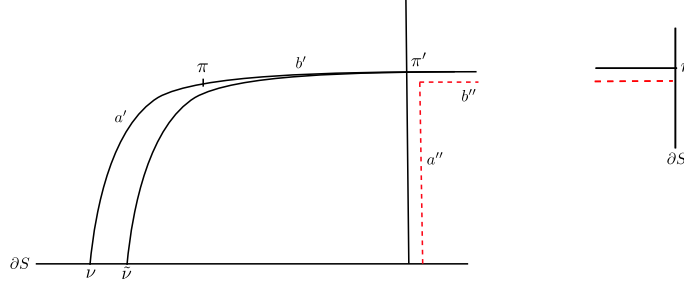


Figura 3.10: Existencia de un único medio bígono

Sea $\pi' \in \tilde{c}' \cap a''$. Entonces \tilde{c}' contiene a $\tilde{\nu}$, de lo contrario a y b formarían un medio bígono, lo cual contradice que a y b están en posición mínima.

Luego, el interior de a'' no intersecta a b , pues en caso contrario, dado que a'' y \tilde{c}' forman un medio bígono, se tendría que a y b no están en posición mínima. También, a'' no contiene a ν , pues si esto pasara, $a' \subset a''$ y por lo tanto $\pi \in b$ estaría en el interior de a'' , lo cual hemos dicho no puede suceder por estar a y b en posición mínima. Además, el interior de \tilde{c}' no intersecta a a , pues de ser así, a y b no estarían en posición mínima. Por lo tanto π y π' son intersecciones consecutivas de a con b a lo largo de b .

Ahora, se probará que $\tilde{c}'a''$ es el único medio bígono que forman \tilde{c} y a . Sea b'' el subarco de b que contiene a η y π' como puntos finales y sea \bar{c} el arco que se obtiene al tomar una isotopía de $a'' \cup b''$ fuera de a'' . Observe que lo anterior es lo mismo que haber tomado la isotopía que deshace el medio bígono formado por \tilde{c} y a .

Suponga que \bar{c} no está en posición mínima con a . Como el interior de a'' no intersecta a b , se puede aplicar el mismo argumento anterior ahora al arco \bar{c} con los puntos finales de a cambiados. Así, se tiene que \bar{c} y a forman un medio bígono $\bar{c}'a'''$. Luego, a''' contiene a ν y por consiguiente $\pi \in a' \subsetneq a'''$. Pero lo anterior contradice que el interior de a''' no intersecta a b . \square

Proposición 3.2.6. *Para cada par de índices $0 \leq i < j \leq n$ o bien $P(c_i^\nu, c_j^\eta)$ es subgráfica de $P(a^\nu, b^\eta)$ ó $j = i + 2$ y c_i, c_j son vértices adyacentes en $A^{(1)}(S)$.*

DEMOSTRACIÓN: Asuma los siguientes dos casos:

Caso 1. $P(c_1^\nu, b^\eta)$ es subgráfica de $P(a^\nu, b^\eta)$.

Caso 2. $P(a^\nu, c_{n-1}^\eta)$ es subgráfica de $P(a^\nu, b^\eta)$ o bien $n - 1 = 2$ y los vértices a y c_2 son adyacentes en $A^{(1)}(S)$.

Aplicando un proceso inductivo hacia adelante del caso 1. se deduce que $P(c_i^\nu, b^\eta)$ es subgráfica de $P(a^\nu, b^\eta)$ para todo $1 \leq i \leq n - 1$. Similarmente, aplicando ahora un proceso inductivo hacia atrás se tiene que para cada $1 \leq i \leq n - 1$, $P(a^\nu, c_i^\eta)$ es subgráfica de $P(a^\nu, b^\eta)$ o bien $i = 2$ y los vértices a y c_2 son adyacentes.

De lo anterior, podemos obtener la afirmación de la proposición aplicando los casos 1. y 2. simultáneamente.

Dicho esto, procedamos a dar la prueba.

Caso 1. Sea $c_1 = a' \cup b'$. Por el orden lineal para los arcos unicornio, el interior de b' no interseca a a . Esto implica que todo punto en la intersección de c_1 con b está en a' . Por lo tanto, los puntos en $(a' \cap b) \setminus \pi$ que determinen arcos unicornio obtenidos de a^ν y b^η coinciden con los arcos unicornio obtenidos de c_1^ν y b^η .

Caso 2. Sea $c = c_{n-1} = a' \cup b'$ y sea \bar{c} obtenido de c como en el Lema 3.2.5. Si \bar{c} y a están en posición mínima, entonces los puntos en $(a \cap b) \setminus \pi$ que determinan arcos unicornio obtenidos de a^ν y b^η coinciden con los arcos unicornio obtenidos de a^ν y \bar{c}^η .

Si \bar{c} y a no están en posición mínima, sea \bar{c} como en el Lema 3.2.5. Entonces los puntos en $a \cap b \setminus \{\pi, \pi'\}$ que determinan arcos unicornio obtenidos de a^ν y b^η coinciden con los arcos unicornio obtenidos de a^ν y \bar{c}^η , pues a y \bar{c} están en posición mínima.

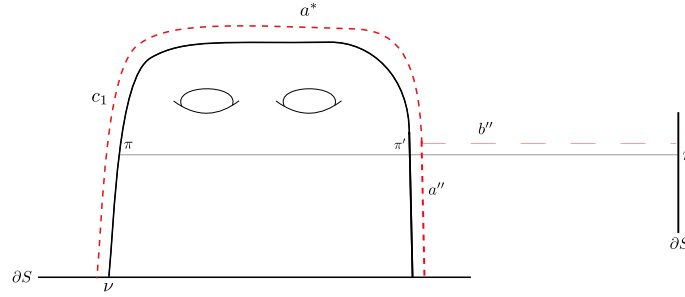


Figura 3.11: Si π' determina un arco unicornio en $P(a^\nu, c_{n-1}^\eta)$, entonces $c_{n-1} = c_2$.

Si π' no determina un arco unicornio obtenidos de a^ν y b^η obtenemos el caso del párrafo anterior.

Suponga que π' determina un arco unicornio obtenidos de a^ν y b^η . Sea $a^* = a - a''$ y suponga que $a^* \cup b'' \in P(a^\nu, b^\eta)$ determinado por π' (véase Fig. 3.11). Entonces el interior de b'' no interseca al interior de a^* . También por el Lema 3.2.5 se tiene que el interior de b'' no interseca a a'' . Como $a = a^* \cup a''$, el interior de b'' no interseca a a y por consiguiente π' es la última intersección de a con b a lo largo de a , es decir, $c_1 = a^* \cup b''$. Por otra parte, el interior de a^* interseca a b solo en π , así π y π' son intersecciones consecutivas de a con b a lo largo de a . Por lo tanto $c = c_{n-1} = c_2$. Además, a y c_2 están conectados por una arista.

□

La siguiente proposición corresponde al inciso c) del paso 1.

Proposición 3.2.7. Sean a y b vértices en $A^{(1)}(S)$ y sea G_{ab} una geodésica que los conecta. Entonces cualquier vértice $c \in P \in P(a, b)$ está a distancia a lo más seis de G_{ab} .

DEMOSTRACIÓN: Sea $c \in P \in P(a, b)$ que está a distancia máxima k de G_{ab} y tal que P es el máximo camino unicornio obtenido de a y b que contiene a c (véase Fig. 3.12). Suponga que $k > 1$ y considere $P' \subseteq P$ el camino que contiene a c en su interior y con vértices finales a' y b' a distancia $\leq 2k$ de c .

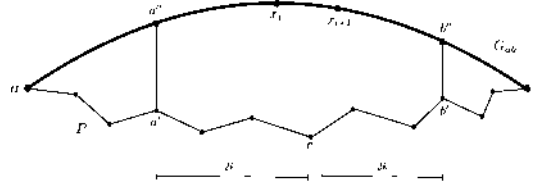


Figura 3.12: Los caminos unicornio son próximos a la geodésicas.

Entonces $d_A(a', c) = 2k$ o $a' = a$. Similarmente $d_A(b', c) = 2k$ o $b' = b$. Como $k > 1$, por la Proposición 3.2.6, P' es subgráfica de $P(a', b')$.

Luego, sean $a'', b'' \in G_{ab}$ que están más cercanos a a' y b' respectivamente. Por la desigualdad del triángulo, $d_A(a'', b'') \leq d_A(a'', a') + d_A(a', b') + d_A(b', b'') \leq k + 4k + k = 6k$.

Por otro lado, sea $(x_i)_{i=0}^m$ el camino en $A^{(1)}(S)$ que une a a' con b' que se obtiene de la concatenación de las geodésicas $G_{a'a''}$, $G_{a''b''}$ y $G_{b''b'}$. Nuevamente, por la desigualdad del triángulo, $m = d_A(a', b') \leq 8k$. Puesto que $c \in P' \in P(a', b')$, por el Lema 3.2.12, existe $c^* \in P(x_i, x_{i+1})$ a distancia menor o igual que $\lceil \log_2(8k) \rceil^4$ de c para alguna $1 \leq i < m$. Como x_i y x_{i+1} son vértices adyacentes, $P(x_i, x_{i+1}) = \{(x_i, x_{i+1})\}$ y por lo tanto $c^* = x_i$ o $c^* = x_{i+1}$.

Si $c^* \in G_{a''b''}$, entonces $k \leq \lceil \log_2(8k) \rceil$. Si $c^* \in G_{a'a''} \setminus a''$, entonces $\lceil \log_2(8k) \rceil \geq d_A(c, c^*) \geq d_A(c, a') - d_A(a', c^*) = 2k - k = k$. De manera análoga, si $c^* \in G_{b''b'} \setminus b''$, entonces $\lceil \log_2(8k) \rceil \geq k$.

De lo anterior, se obtiene que $k \leq 6$. □

Hemos llegado al momento de estar en condiciones de probar la hiperbolicidad uniforme del complejo de arcos.

Teorema 3.2.8. *Si $\partial S \neq \emptyset$, entonces $A^{(1)}(S)$ es 7-hiperbólico.*

DEMOSTRACIÓN: Sean a, b y d vértices en $A^{(1)}(S)$ (véase Fig. 3.13). Por la Proposición 3.2.4, existen vértices $c_{ab} \in P(a, b)$, $c_{ad} \in P(a, d)$ y $c_{db} \in P(d, b)$ que forman un triángulo en $A^{(1)}(S)$, es decir, (c_{ab}, c_{ad}) , (c_{ab}, c_{db}) y (c_{ad}, c_{db}) son aristas de $A^{(1)}(S)$.

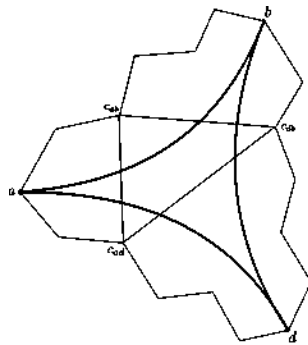


Figura 3.13: Triángulo 7-centrado

Por la Proposición 3.2.7, los vértices c_{ab} , c_{ad} y c_{db} están a distancia a lo más seis de las geodésicas G_{ab} , G_{ad} y G_{db} respectivamente. Por lo tanto, el triángulo geodésico abd está 7-centrado en c_{ab} . □

⁴menor entero mayor o igual que $\log_2(8k)$.

Complejo de curvas

Ya que sabemos que el complejo de arcos $A(S)$ es 7–hiperbólico, vamos a construir una retracción 2–Lipschitz $r : AC^{(0)}(S) \rightarrow C^{(0)}(S)$ del complejo de arcos y curvas $AC(S)$ sobre el complejo de curvas $C(S)$ para establecer que $C(S)$ es 17–hiperbólico. En este sentido podemos decir que la retracción r al ser Lipschitz (con constante dos) preserva la hiperbolicidad (la cual es una propiedad métrica). Definamos pues la retracción r como sigue. Sea $a \in AC^{(0)}(S)$. Si a es una curva, haga $r(a) = a$. Si a un vértice en $A^{(1)}(S)$, considere N una vecindad regular de la unión de a con las componentes de frontera de S donde están sus puntos finales y defina $r(a)$ igual a una componente esencial de ∂N .

La función r está bien definida cuando $\xi(S) > 0$, pues la frontera de N es una curva o la unión de dos curvas cerradas simples (véase Fig. 3.14), en donde al menos una de ellas es esencial, pues, de no ser así, S sería un disco punchado, un anillo o $S_{0,3}$, las cuales no satisfacen $\xi(S) > 0$.

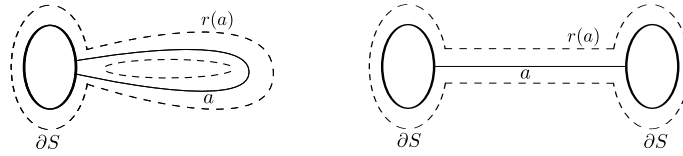


Figura 3.14: Retracción r

Denotemos con $|\cdot|$ a la distancia en $AC(S)$. La retracción r satisface la siguiente propiedad:

Lema 3.2.9 (Lema 2.2, [6]). *Sea S una superficie no esporádica con $\partial S \neq \emptyset$. Entonces la retracción r es 2–Lipschitz, es decir, $d_S(r(a), r(b)) \leq 2|a, b|$ para cualesquiera par de vértices $a, b \in AC^{(0)}(S)$.*

El lema anterior corresponde al paso 2. de nuestro bosquejo de la prueba.

Para poder finalizar nuestro trabajo necesitamos de tres lemas adicionales. Recordemos del capítulo 1) que bajo nuestro interés de estudiar curvas cerradas simples esenciales, solo consideramos superficies conexas con punchaduras dejando de lado las que tienen frontera, pues teníamos que $C(S_{g,b,n})$ coincide con $C(S_{g,0,b+n})$ y con $C(S_{g,b+n,0})$. Esto quiere decir que el complejo de curvas no ve las componentes de frontera y las punchaduras, tratando a ambas por igual. Con esto en mente, veamos como podemos llevar la hiperbolicidad uniforme de superficies con frontera a aquellas sin frontera.

Sea S una superficie cerrada sin frontera y denote con S' a la superficie obtenida de S al marcar un punto en S . Entonces tenemos el siguiente lema.

Lema 3.2.10. *Sea S una superficie no esporádica cerrada sin frontera. Si $C^{(1)}(S')$ es δ –hiperbólico entonces $C^{(1)}(S)$ también es δ –hiperbólico.*

DEMOSTRACIÓN:

La idea de la prueba radica en que es posible definir una función 1–Lipschitz $f : C^{(0)}(S') \rightarrow C^{(0)}(S)$. Como habíamos dicho, las funciones Lipschitz preservan la δ –hiperbolicidad (salvo un reescalamineto en la constante).

Sea π el punto marcado en S y consideremos la función $f : C^{(0)}(S') \rightarrow C^{(0)}(S)$ que olvida el punto marcado en S (función olvidadiza). Luego, la función f es 1-Lipschitz, pues si dos vértices $a, b \in C^{(0)}(S')$ se pueden realizar disjuntamente, entonces $f(a)$ y $f(b)$ o son isotópicas o se pueden realizar disjuntamente, es decir, $d_S(f(a), f(b)) \leq d_{S'}(a, b) \leq 1$.

Ahora vamos a construir una función $s : C^{(0)}(S) \rightarrow C^{(0)}(S')$ tal que $f \circ s = Id_{C^{(0)}(S)}$. Como S es una superficie no esporádica, es decir, $\xi(S) = 3g - 4 > 0$, entonces S es una superficie hiperbólica, esto quiere decir, que existe una métrica Riemanniana en S completa de área finita y de curvatura constante -1 [Teorema 1.2, [2]]. En este tipo de superficies se cumple que todo vértice a en $C^{(1)}(S)$ tiene un único representante geodésico [Proposición 1.3, [2]]. Así, podemos tomar π en el complemento de la unión de todos los representantes geodésicos de vértices en $C^{(1)}(S)$. Lo anterior define una función $s : C^{(0)}(S) \rightarrow C^{(0)}(S')$ que satisface $f \circ s = Id_{C^{(0)}(S)}$.

Sea abd un triángulo geodésico en $C^{(1)}(S)$. Como $f \circ s = Id_{C^{(0)}(S)}$, $s(abd)$ es también un triángulo geodésico en $C^{(1)}(S')$. Dado que $C^{(1)}(S')$ es δ -hiperbólico, $s(abd)$ está δ -centrado en $C^{(1)}(S')$. Nuevamente, como $f \circ s = Id_{C^{(0)}(S)}$, abd está δ -centrado. \square

Lema 3.2.11. *Sean a, b y d vértices en $A^{(1)}(S)$ con puntos finales ν, η y τ respectivamente mutuamente en posición mínima. Entonces para cada $c \in P(a^\nu, b^\eta)$, existe $c^* \in P(a^\nu, d^\tau) \cup P(d^\tau, b^\eta)$ tal que c y c^* son vértices adyacentes en $A^{(1)}(S)$.*

DEMOSTRACIÓN: Observe que dado que a, b y d están mutuamente en posición mínima, entonces el interior de los caminos unicornio $P(a^\nu, b^\eta)$, $P(a^\nu, d^\tau)$ y $P(d^\tau, b^\eta)$ son disjuntos a pares.

Sea $c = a' \cup b' \in P(a^\nu, b^\eta)$. Si c no interseca a d , termina la prueba.

Suponga que $c \cap d \neq \emptyset$. Sea $d' \subsetneq d$ subarco máximo de d que contiene a τ con interior disjunto de c . Sea σ el otro punto final de d' . Entonces $\sigma \in a'$ ó $\sigma \in b'$.

Suponga que $\sigma \in a'$ y hágase $d' = a'' \cup d'$, donde a'' es el subarco de a' determinado por σ que contiene al punto ν . Obsérvese que por construcción d' es un arco simple en S y por lo tanto $d' \in P(a^\nu, d^\tau)$. Al tomar una pequeña isotopía de a'' fuera de a' , se concluye que c y d' se pueden realizar disjuntamente. El caso $\sigma \in b'$ sigue una construcción similar. \square

Lema 3.2.12. *Sea x_0, x_1, \dots, x_m una sucesión de vértices en $A^{(1)}(S)$ con $m \leq 2^k$. Entonces para cualquier $c \in P(x_0, x_m)$ existe $c^* \in P(x_i, x_{i+1})$ para alguna $1 \leq i < m$ a distancia menor o igual que k de c .*

DEMOSTRACIÓN: Sea $c \in P(x_0, x_m)$. Por el Lema 3.2.11, existe $c^* \in P(x_0, x_{\lceil \frac{m}{2} \rceil}) \cup P(x_{\lceil \frac{m}{2} \rceil}, x_m)$ tal que c y c^* son vértices adyacentes. Repita el argumento anterior a lo más $k - 1$ veces hasta que se obtenga la conclusión. \square

Teorema 3.2.13. *Si S es una superficie no esporádica, entonces $C^{(1)}(S)$ es 17-hiperbólico.*

DEMOSTRACIÓN: Note que por el Lema 3.2.10, basta probar el teorema cuando $\partial S \neq \emptyset$.

Sean a, b vértices en $C^{(1)}(S)$ y sea G_{ab} una geodésica que los conecta (véase Fig. 3.15). Luego, existen \bar{a}, \bar{b} vértices en $A^{(1)}(S)$ que son adyacentes a a y b respectivamente.

Ahora, se mostrará que cualquier vértice $c \in P \in P(\bar{a}, \bar{b})$ está a distancia ≤ 8 de G_{ab} en $AC(S)$.

Sea $c \in P \in P(\bar{a}, \bar{b})$ que está a distancia máxima k de G_{ab} , donde P es el camino unicornio en $P(\bar{a}, \bar{b})$ que contiene a c .

Sea P' la subgráfica de P que contiene a c y cuyos puntos finales a', b' están a distancia menor o igual que $2k$ de c . Por la Proposición 3.2.6, P' es subgráfica de $P(a', b')$. Entonces $|c, a'| = 2k$ o $a' = \bar{a}$. Similarmente, $|c, b'| = 2k$ o $b' = \bar{b}$.

Sean a'' y b'' en G_{ab} que están a distancia mínima de a' y b' respectivamente en $AC(S)$. Luego, por la desigualdad del triángulo, $|a'', b''| \leq |a'', a'| + |a', b'| + |b', b''| \leq 6k$. Considere el camino $(x_i)_{i=0}^m$ en $AC(S)$ que une a a' con b' obtenido de la concatenación de las geodésicas $G_{a', a''}$, $G_{a'', b''}$ y $G_{b'', b'}$. Entonces, por el Lema 3.2.9, $m = |a', b'| \leq |a', a''| + d_S(a'', b'') + |b'', b'| \leq 2k + 2|a'', b''| \leq 14k$.

Ahora, como para cada $0 < i < m$, los vértices x_i y x_{i+1} en $C^{(1)}(S)$ se pueden realizar disjuntamente, existe $\bar{x}_i \in A^{(0)}(S)$ adyacente a x_i y x_{i+1} en $AC^{(1)}(S)$. Luego, por el Lema 3.2.12, existe $c^* \in P(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$ para alguna $0 \leq i \leq 14k$ que está a distancia $\leq \lceil \log_2(14k) \rceil$ de c .

También note que los vértices \bar{x}_i y \bar{x}_{i+1} son adyacentes y por lo tanto $c^* = \bar{x}_i$ o $c^* = \bar{x}_{i+1}$.

Si $x_i \in G_{a''b''}$, entonces $k \leq |x_i, c| \leq |x_i, c^*| + |c^*, c| \leq 1 + \lceil \log_2(14k) \rceil$. Si $x_i \in G_{a', a''}$ y $a' = \bar{a}$, tenemos el caso de la línea anterior. De lo contrario, $1 + \lceil \log_2(14k) \rceil \geq |x_i, c| \geq |c, a'| - |a', x_i| \geq 2k - k = k$.

Así, $k \leq 1 + \lceil \log_2(14k) \rceil$ y por lo tanto $k \leq 8$.

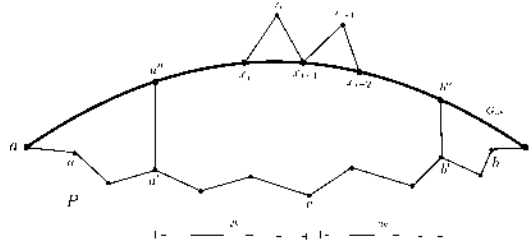


Figura 3.15: Construcción de camino próximo a la geodésica G_{ab}

Usando todo lo dicho antes, probemos la hiperbolicidad uniforme de $C^{(1)}(S)$. Sea $T = abd$ un triángulo geodésico en $C(S)$ y sean \bar{a}, \bar{b} y \bar{d} arcos adyacentes a a, b y d respectivamente (véase Fig. 3.16). Por la Proposición 3.2.4 existen vértices $c_{\bar{a}\bar{b}} \in P(\bar{a}, \bar{b})$, $c_{\bar{a}\bar{d}} \in P(\bar{a}, \bar{d})$ y $c_{\bar{b}\bar{d}} \in P(\bar{b}, \bar{d})$ adyacentes a pares. Luego, por lo probado anteriormente se tiene que $|c_{\bar{a}\bar{b}}, G_{ab}|, |c_{\bar{a}\bar{d}}, G_{ad}|, |c_{\bar{b}\bar{d}}, G_{db}| \leq 8$.

Ahora, por el Lema 3.2.9, $|r(c_{\bar{a}\bar{b}}), G_{ad}| \leq d_S(r(c_{\bar{a}\bar{b}}), r(c_{\bar{a}\bar{d}})) + d_S(r(c_{\bar{a}\bar{d}}), G_{ad}) \leq 1 + 2|c_{\bar{a}\bar{d}}, G_{ad}| \leq 17$. De igual manera, $|r(c_{\bar{a}\bar{b}}), G_{db}| \leq 17$ y por lo tanto el triángulo abd está 17-centrado. \square

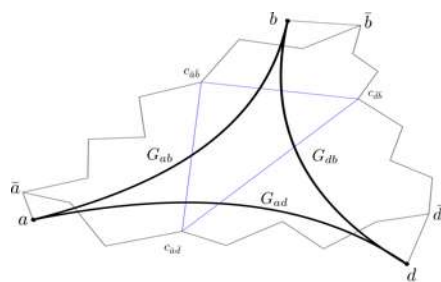


Figura 3.16: Triángulo abd en $C^{(1)}(S)$ está 17-centrado

Bibliografía

- [1] J. Aramayona. Hyperbolic structures on surfaces. *Lecture Note Series, IMS, NUS*, Septiembre 2011.
- [2] B. Farb y D. Margalit. *A primer on mapping class groups*. 49. Princeton Mathematical, Princeton, NJ, 2012.
- [3] B. H. Bowditch. *A course on geometric group theory*. School of Mathematics, University of Southampton, Highfield, Southampton SO17 1BJ, Great Britain.
- [4] B. H. Bowditch (4-WARW-MI). Uniform hyperbolicity of the curve graphs. *Pacific J. Math.*, 269(2):269–280, 2014.
- [5] S. M. Gersten, editor. *Essays in Group Theory*, volume 8. Mathematical Sciences Research Institute Publications, 1987.
- [6] H. A. Mazurd y Y. N. Minsky. Geometry of the complex of the curves I: Hyperbolicity. *Invent. Math.*, (138):103–149, 1999.
- [7] M. Clay, K. Rafi y S. Schleimer. Uniform hyperbolicity of the curve graph via surgery sequences. *Algebr. Geom. Topol.*, 14(6):3325–3344, 2014.
- [8] M. Coornaert, T. Delzant y A. Papadopoulos. *Géométrie et théorie des groupes*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [9] W. S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer, 1991.
- [10] A. Papadopoulos, editor. *Handbook of Teichmüller Theory*, volume IV. European Mathematical Society Publishing House, 2014.
- [11] S. Hensel, P. Przytycki y R. C. H. Webb. 1-slim triangles and uniform hyperbolicity for arc graphs and curve graphs. *European Mathematical Society*, (17):755–762, 2015.
- [12] S. Schleimer. Notes on the complex of curves.
- [13] J. Stillwell. *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*. Springer, 2 edition, 1993.
- [14] T. Aougab. Uniform hyperbolicity of the graphs of curves. *Geom. Topol.*, 17:2855–2875, 2013. MR3190300.

- [15] W. B. R. Lickorish. A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, (60):769–778, 1964.
- [16] W. J. Harvey. Boundary structure of the modular group, Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 stony brook conference. *Ann. of Math*, pages 245–251, 1981.