



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Instituto de Física y Matemáticas

TESIS

Puntos críticos en el modelo de Nambu-Jona-Lasinio

Puntos críticos en el modelo de Nambu-Jona-Lasinio

TESIS

Para obtener el título de Maestro en Ciencias en el Área de Física

Presenta: Ángelo Martínez

Asesor: Alfredo Raya Montaña

FEBRERO 2017



Asesor

Dr. Alfredo Raya Montaño

Sinodales

Dr. José Alejandro Ayala Mercado

Dr. Juan Carlos Arteaga Velázquez

Índice general

Introducción	3
A. El modelo NJL y la ecuación de gap	5
A.1. El modelo de NJL	5
A.2. Ecuación de gap	6
A.3. Regularización con corte 3D	7
A.4. Regularización con corte 4D	9
A.5. Regularización de Pauli-Villars	9
A.6. Regularización por tiempo propio	11
B. Ecuación de gap para fermiones en el vacío	13
B.1. Parámetros críticos	13
B.2. Forma adimensional de la ecuación de gap	15
B.3. Iteraciones y puntos fijos	16
B.4. Iterando la ecuación de gap	17
B.4.1. Gap 3D	18
B.4.2. Gap 4D	19
B.4.3. Gap PV	19
B.4.4. Gap tiempo propio	21
B.4.5. Comparaciones	22
C. Medio magnetizado y a temperatura finita	26
C.1. Medio con campo magnético	26
C.2. Ecuación de gap con campo magnético a temperatura finita	30
C.3. Iteraciones caso magnético	32
C.4. Iteraciones caso magnético con temperatura	34
D. Discusión y perspectivas	37
A. Apéndice	45
Bibliografía	57

Resumen

En este trabajo, se estudio la dinámica de las soluciones a la ecuación de gap en el modelo de Nambu-Jona-Lasinio usando diferentes esquemas de regularización para quarks en el vacío y quarks en un medio magnetizado y a temperatura finita, utilizando un método iterativo. Se encontró, que en las regularizaciones de Pauli-Villars y de tiempo propio existe un rango para la constante de acoplamiento G , el parámetro de corte Λ , y la temperatura T en el que las soluciones son inestables y por ende, estos dos esquemas de regularización dejan de tener validez. También, se encontró la condición a la que estan sujetos G y Λ para generar masa en cada una de las regularizaciones utilizadas.

Abstract

In this work, we explore the dynamics of the solutions to the gap equation in the Nambu-Jona-Lasinio model using various regularizations schemes for quarks in vacuum and quarks inside a magnetized medium with temperature. We found a range of values for the coupling constant G , the regularization parameter Λ , and temperature T for which the solution of the gap equations are unstable and hence, the regularization schemes are invalid. We found, too, the condition for which G and Λ start to generate dynamic mass.

Introducción

La generación dinámica de masa es el mecanismo con el cual se explica el por qué la masa del protón es $m_p \approx 1$ GeV siendo que la masa de los quarks up y down es $m_u \approx 2.3$ MeV y $m_d \approx 4.8$ MeV, respectivamente. La idea consiste en que las interacciones entre los quarks constituyentes son las responsables de generar la masa del protón o neutrón y, por ende la de todo el universo visible. Sin embargo, debido a que QCD es una teoría altamente no-lineal a bajas energías ≈ 1 GeV, es sumamente difícil extraer información. Es por eso que se recurre a modelos efectivos más simples, que son válidos en un cierto rango de energías y nos permiten extraer información de las interacciones fuertes y su papel en la estructura del espectro hadrónico.

Uno de los primeros modelos efectivos de QCD es el de Nambu-Jona-Lasinio (NJL), que fue propuesto por Nambu y Jona-Lasinio en 1961 [NJL61a, NJL61b]. En un principio, el modelo NJL se propuso como una teoría de las interacciones fuertes, pero con el descubrimiento de los quarks, ahora sabemos que es una aproximación a QCD, ya que no contempla confinamiento. Uno de los aspectos más importantes del modelo NJL, es que fue el primero en incorporar generación dinámica de masa a través del rompimiento espontáneo de la simetría quiral. Es debido a su simplicidad que este modelo sigue siendo de relevancia para ciertos escenarios de QCD, en donde la característica a explorar sea la simetría quiral y no el confinamiento.

Una de las grandes preguntas en torno a las interacciones fuertes es precisamente dilucidar cómo han ocurrido las diferentes fases de la materia hadrónica durante la evolución del universo. En particular, el tránsito entre la “sopa primordial”, compuesta por el plasma de quarks y gluones, a mesones y bariones, como los conocemos en nuestro entorno, involucra saber la manera en que se da la transición quiral.

Un ambiente natural para recrear las condiciones prevalecientes en el universo temprano es durante una colisión de iones pesados relativistas, donde el medio, caracterizado por una temperatura y una densidad finitas, impacta en la manera en que se da la transición quiral. Además, en dichos escenarios, se ha identificado la generación de los campos magnéticos más intensos del universo, que también modifican la forma en que dicha transición toma lugar.

En esta tesis, estudiamos el fenómeno de generación dinámica de masa, empleando el modelo de Nambu-Jona-Lasinio de la siguiente manera: en el Capítulo 1, obtenemos la ecuación de gap para diferentes esquemas de regularización empleados en la

literatura: en el Capítulo 2, obtenemos las condiciones sobre el acoplamiento para que se dé la generación de masa e introduciremos un método iterativo con el que exploramos la dinámica de las soluciones a la ecuación de gap y encontramos que, para algunas regularizaciones, esta puede llegar a ser caótica; en el Capítulo 3, nuevamente obtenemos la ecuación de gap, pero esta vez para un medio magnetizado y a temperatura finita; de igual manera, aplicamos el método iterativo del Capítulo 2 para explorar la dinámica de sus soluciones; finalmente, en el Capítulo 4 se discuten los resultados obtenidos y el trabajo a futuro. El trabajo se complementa con un apéndice que presenta los detalles para obtener el propagador del quark en presencia de un campo magnético externo.

A. El modelo NJL y la ecuación de gap

En este capítulo hablaremos brevemente acerca de las características y simetrías del modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL). Después, obtendremos la ecuación de gap para diferentes esquemas de regularización. Discutiremos las generalidades del rompimiento espontáneo de simetría del modelo y su conexión con el fenómeno de generación dinámica de masas.

A.1. El modelo de NJL

El modelo NJL, fue propuesto en 1961 por Nambu y Jona-Lasinio [NJL61a, NJL61b] como un modelo de interacción de nucleones, que emula la formación de pares de Cooper en la teoría BCS de superconductividad. El Lagrangiano que propusieron Nambu y Jona-Lasinio es:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_q)\psi + G \left\{ (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\vec{\tau}\psi)^2 \right\}, \quad (\text{A.1})$$

en donde ψ es el campo del nucleón, m_q es la masa explícita de estas partículas, $\vec{\tau}$ son las matrices de Pauli actuando en el espacio de isoespín y G es la constante de acoplamiento. Actualmente, el modelo ha sido reinterpretado como un modelo efectivo de interacciones entre quarks, por lo que los campos que aparecen en la Ec. (A.1) ahora son campos de quarks. Se usa para escenarios en que la simetría quiral sea la característica a explorar y no el confinamiento, aunque se han sugerido formas para inducir débilmente confinamiento removiendo los polos del propagador [Gut10, RBGG⁺11, BCMB15].

Como se puede observar, este modelo sólo contempla interacciones puntuales en el espacio de coordenadas. Entre sus características más importantes se encuentra la generación dinámica de masa, la cual rompe la simetría quiral aún en el caso $m_q = 0$. Además, no contempla confinamiento debido, quizás, a que el modelo fué propuesto antes del descubrimiento de los quarks. Otra cosa que hay que recalcar es que el modelo no es renormalizable, por lo que se tiene que introducir un regulador para que las integrales converjan y el modelo sea predictivo. Esto hace del modelo de NJL una teoría efectiva con un cierto rango de validez $E \approx 1 - 2 \text{ GeV}$.

<i>Simetría</i>	<i>Transformación</i>	<i>Carga conservada</i>
$U(1)$	$\psi \rightarrow \exp(-i\alpha)\psi, \quad \alpha \in \mathbb{R},$	Número bariónico
$SU_V(2)$	$\psi \rightarrow \exp\left(-i\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}}{2}\right)\psi, \quad \theta \in \mathbb{R}^3,$	Isoespín
$SU_A(2)$	$\psi \rightarrow \exp\left(-i\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}}{2}\gamma^5\right)\psi, \quad \theta \in \mathbb{R}^3 \text{ y } m_q = 0$	Quiralidad

Cuadro A.1.: Simetrías del modelo NJL.

Las simetrías del modelo se presentan en la Tabla A.1.

Como mencionamos, una de las principales características del modelo de NJL es la generación dinámica de masa para quarks, que surge mediante el rompimiento espontáneo de la simetría quiral. Esto se puede entender como el efecto de la autoenergía inducida por las interacciones lo anterior genera una masa efectiva m , la cual puede ser más grande que m_q para los quarks ligeros, y no desaparece aún cuando se toma el límite quiral $m_q \rightarrow 0$.

A.2. Ecuación de gap

Si tomamos la aproximación de Hartree-Fock al Lagrangiano (A.1), llegamos a la ecuación de gap, que contiene toda la información de las autointeracciones [Bub05]. Como mencionamos, éstas son las responsables de la generación dinámica de masa. La ecuación de Schwinger-Dyson en la aproximación de Hartree-Fock se ve como en la Fig. A.1, que es equivalente a la ecuación:

$$m = m_q - 2G \langle \bar{\psi}\psi \rangle, \quad (\text{A.2})$$

donde, m es la masa dinámicamente generada, m_q es la masa de corriente del quark, G es la constante de acoplamiento, y $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ es el condensado quiral, definido como:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[iS(k)], \quad (\text{A.3})$$

y $S(k)$ es el propagador vestido del quark. Como habíamos mencionado, el modelo de NJL no es renormalizable por lo que, para que la teoría sea finita y se puedan tener predicciones físicas, se agrega un parámetro regulador Λ a través de alguno de los esquemas de regularización, con lo que el propagador depende también de este parámetro.

Ya que el propagador $S(k)$ es vestido y contiene a la masa dinámica m , la ecuación de gap es una ecuación autoconsistente para m , que para el caso $m_q = 0$, siempre tiene como solución la trivial $m = 0$. Sin embargo, existe otra solución no trivial $m \neq 0$ para un conjunto de valores de G y Λ . En este trabajo asumiremos la masa

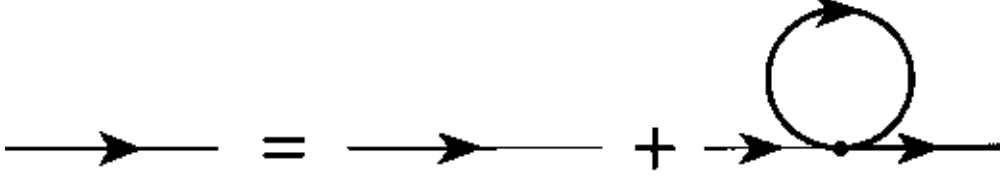


Figura A.1.: Ecuación de Schwinger-Dyson en la aproximación Hartree-Fock. El propagador vestido (desnudo) está denotado con línea gruesa (delgada).

de corriente $m_q = 0$, esto con el fin de estudiar con más facilidad la dinámica de las soluciones de la ecuación de gap.

Para obtener una forma explícita para $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, es necesario calcular el propagador. Esto lo haremos a continuación para varios esquemas de regularización encontrados frecuentemente en la literatura especializada. En la siguiente referencia se hace un recuento de los esquemas de regularización que usamos, además del esquema de regularización dimensional [KKI15]. Asimismo, en este trabajo fijaremos el número de fermiones en dos, $N_f = 2$ correspondientes a los quarks up y down, y el número de colores en 3, $N_c = 3$.

A.3. Regularización con corte 3D

La idea de este esquema de regularización es agregar un corte Λ_{3D} en el trimomento a las integrales que aparecen en $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ para hacerlas finitas. Primero, iniciamos con el propagador fermiónico¹:

$$iS(k) = i \frac{(\not{k} + m)}{k^2 - m^2}. \quad (\text{A.4})$$

Sustituyendo (A.4) en (A.3) se tiene

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[iS(k)] \\ &= -4N_f N_c i m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2}, \\ &\equiv -4N_f N_c i m I(m), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

donde los factores N_f y N_c son resultado de tomar la traza sobre el propagador y corresponden al número de quarks y el número de colores considerados; 2 y 3

¹En general, el propagador fermionico involucra una renormalización de la función de onda y una función de masa. Sin embargo, por su estructura, el modelo de NJL solamente nos genera masa independiente del momentum, por lo cual podemos usar el propagador (A.4).

respectivamente. Entonces, sustituyendo (A.5) en (A.2) y tomando el límite quiral, $m_q \rightarrow 0$, tenemos

$$m = -2G \langle \bar{\psi}\psi \rangle = 8GN_f N_c i m I(m). \quad (\text{A.6})$$

Ahora, para hacer la integral $I(m)$, primero integramos sobre k_0 usando el teorema del residuo con el contorno de integración de la Fig. A.2.

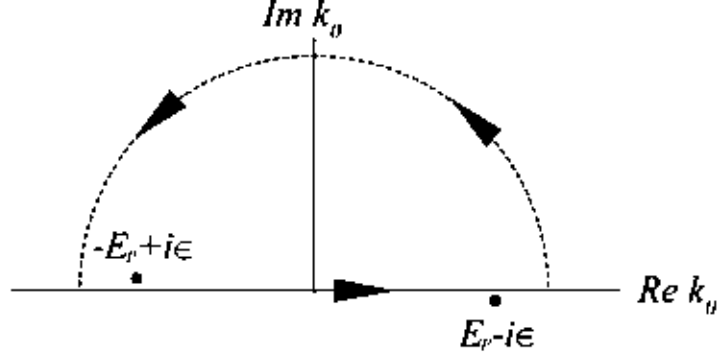


Figura A.2.: Contorno de integración usado para llevar a cabo la integral sobre k_0 en $I(m)$.

Después, hacemos la integral sobre $\vec{k}$ en coordenadas esféricas. De la primera integral obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{1}{k_0^2 - E_p^2} = -\frac{i\pi}{E_p}, \quad (\text{A.7})$$

donde $E_p = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. Lo siguiente es pasar a coordenadas esféricas y hacer la integral introduciendo el corte Λ_{3D} en el radio de integración, es decir,

$$\frac{-i\pi}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda_{3D}} d^3k \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} = \frac{-i4\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \left[\Lambda_{3D} \sqrt{\Lambda_{3D}^2 + m^2} - m^2 \ln \left(\frac{\Lambda_{3D} + \sqrt{\Lambda_{3D}^2 + m^2}}{m} \right) \right], \quad (\text{A.8})$$

por lo que la ecuación de gap toma la forma

$$m = \frac{GN_f N_c}{\pi^2} m \left[\Lambda_{3D} \sqrt{\Lambda_{3D}^2 + m^2} - m^2 \ln \left(\frac{\Lambda_{3D} + \sqrt{\Lambda_{3D}^2 + m^2}}{m} \right) \right]. \quad (\text{A.9})$$

Podemos notar, efectivamente, que la ecuación resultante es autoconsistente, ya que aparece m en ambos lados de la igualdad. Veamos las expresiones de la ecuación de gap para los otros esquemas de regularización.

A.4. Regularización con corte 4D

Para esta regularización, la idea es hacer una rotación de Wick al espacio Euclideo $k_0 \rightarrow ik_0$, para después hacer la integral en coordenadas hipersféricas. En este caso, el corte se hace sobre el cuádrimomento.

Nuevamente, queremos hacer la integral $I(m)$. Hacemos una rotación de Wick, con lo que nos queda:

$$I_E(m) = -i \int_0^\infty dk_0 d^3k \frac{1}{k_0^2 + \vec{k}^2 + m^2}. \quad (\text{A.10})$$

Ahora, cambiamos a coordenadas esféricas en $4D$ y agregamos el corte Λ_{4D} en el radio

$$I_E(m) = -i \int_0^{\Lambda_{4D}} \frac{k^3 \sin^2(\theta_1) \sin(\theta_2) dk d\theta_1 d\theta_2 d\phi}{k^2 + m^2}. \quad (\text{A.11})$$

Haciendo las integrales angulares se obtiene:

$$I_E(m) = -2\pi^2 i \int_0^{\Lambda_{4D}} dk \frac{k^3}{k^2 + m^2}. \quad (\text{A.12})$$

Finalmente, haciendo esta integral, tenemos que

$$I_E(m) = -\pi^2 i \left[\Lambda_{4D}^2 - m^2 \ln \left(\frac{\Lambda_{4D}^2 + m^2}{m^2} \right) \right], \quad (\text{A.13})$$

y la ecuación de gap toma la forma

$$m = \frac{GN_f N_c}{2\pi^2} m \left[\Lambda_{4D}^2 - m^2 \ln \left(\frac{\Lambda_{4D}^2 + m^2}{m^2} \right) \right]. \quad (\text{A.14})$$

Nuevamente obtuvimos una ecuación autoconsistente para m y podemos notar que esta expresión (A.14) tiene algunas similitudes con la encontrada en la sección anterior (A.9) con el corte 3D.

A.5. Regularización de Pauli-Villars

En esta regularización, la idea central es suprimir las divergencias agregando partículas virtuales pesadas. Esto se logra mediante el reemplazo:

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{k^2 - m^2} - \sum_i \frac{a_i}{k^2 - \Lambda_i^2}. \quad (\text{A.15})$$

Para la ecuación de gap, usaremos la substracción:

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{a_1}{k^2 - \Lambda_1^2} - \frac{a_2}{k^2 - \Lambda_2^2}, \quad (\text{A.16})$$

con

$$a_1 = \frac{m^2 - \Lambda_2^2}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2}, \quad a_2 = \frac{\Lambda_1^2 - m^2}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2}. \quad (\text{A.17})$$

Por tanto, la integral por realizar se transforma de la siguiente manera:

$$I(m) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{a_1}{k^2 - \Lambda_1^2} - \frac{a_2}{k^2 - \Lambda_2^2} \right]. \quad (\text{A.18})$$

Lo siguiente es hacer una rotación de Wick

$$I(m) \rightarrow I_E(m) = \frac{-2\pi^2 i}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dk \left[\frac{k^3}{k^2 + m^2} - \frac{a_1 k^3}{k^2 + \Lambda_1^2} - \frac{a_2 k^3}{k^2 + \Lambda_2^2} \right]. \quad (\text{A.19})$$

En esta última expresión, cambiamos a coordenadas esféricas e hicimos las integrales sobre los ángulos. Ahora, si hacemos la integral restante obtenemos

$$I_E(m) = \frac{-i}{8\pi^2} \left[\frac{\Lambda_1^2 m^2 \ln[\frac{m^2}{\Lambda_1^2}] - \Lambda_2^2 m^2 \ln[\frac{m^2}{\Lambda_2^2}] + \Lambda_1^2 \Lambda_2^2 \ln[\frac{\Lambda_1^2}{\Lambda_2^2}]}{2(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2)} \right]_{\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2 = \Lambda_{PV}}. \quad (\text{A.20})$$

Finalmente consideraremos que las partículas que se introdujeron son del mismo tipo [Sch13], esto lo hacemos tomando el límite $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2 = \Lambda_{PV}$, con lo que resulta

$$I_E(m) = \frac{-i}{16\pi^2} \left[\Lambda_{PV}^2 - m^2 + m^2 \ln\left[\frac{m^2}{\Lambda_{PV}^2}\right] \right]. \quad (\text{A.21})$$

Por lo tanto, la ecuación de gap es:

$$m = \frac{GN_f N_c}{2\pi^2} m \left[\Lambda_{PV}^2 - m^2 + m^2 \ln\left[\frac{m^2}{\Lambda_{PV}^2}\right] \right]. \quad (\text{A.22})$$

Como podemos observar, la ecuación de gap que obtuvimos tiene ciertas similitudes con las obtenidas anteriormente en Ec. (A.9) y Ec. (A.14). Sin embargo, la dinámica de las soluciones tiene más parecido con la ecuación de gap que resulta si regularizamos con tiempo propio. Esto lo hacemos a continuación.

A.6. Regularización por tiempo propio

Para este tipo de regularización, aprovechamos la identidad:

$$\frac{1}{a+b} = \int_0^\infty ds e^{-(a+b)s}, \quad (\text{A.23})$$

y después agregamos un corte Λ_{TP} en el límite inferior. Para hacer el cálculo de la integral $iI(m)$, lo primero que se tiene que hacer es una rotación de Wick $k_0 \rightarrow ik_0$,

$$iI(m) \rightarrow iI_E(m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_0^2 + k^2 + m^2}. \quad (\text{A.24})$$

Usando (A.23), tenemos

$$I_E(m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds e^{-(k_0^2 + \vec{k}^2 + m^2)s}. \quad (\text{A.25})$$

Ahora, hacemos la integral para cada k . Con esto, obtendremos un factor $\left(\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\right)^4$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int ds \frac{\pi^2}{s^2} e^{-m^2s} = \frac{1}{16\pi^2} \int ds \frac{e^{-m^2s}}{s^2}. \quad (\text{A.26})$$

Con esto, la ecuación de gap es

$$m = \frac{GN_f N_c}{2\pi^2} m \int_0^\infty ds \frac{e^{-m^2s}}{s^2}. \quad (\text{A.27})$$

Ahora agregamos el corte Λ_{TP} al límite inferior, con lo que finalmente obtenemos la siguiente ecuación de gap:

$$m = \frac{GN_f N_c}{2\pi^2} m \int_{\Lambda_{TP}}^\infty ds \frac{e^{-m^2s}}{s^2}. \quad (\text{A.28})$$

Esta última ecuación, (A.28), se puede simplificar integrando por partes,

$$\int_{\Lambda_{TP}}^{\infty} ds \frac{e^{-m^2 s}}{s^2} = \frac{e^{-m^2 \Lambda_{TP}}}{\Lambda_{TP}} - m^2 \int_{m^2 \Lambda_{TP}}^{\infty} ds s^{-1} e^{-s} = \frac{e^{-m^2 \Lambda_{TP}}}{\Lambda_{TP}} - m^2 \Gamma(0, m^2 \Lambda), \quad (\text{A.29})$$

donde $\Gamma(a, z)$ es la función gamma incompleta, definida como [WW27]

$$\Gamma(a, z) = \int_z^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt. \quad (\text{A.30})$$

En el próximo capítulo, exploraremos la dinámica de las soluciones a las ecuaciones de gap que obtuvimos (A.9), (A.14), (A.22), (A.28) y cómo varían entre ellas cuando aplicamos un método iterativo para resolverlas. También, obtendremos los parámetros críticos Λ_c y G_c , a partir de los cuales se da la generación dinámica de masa.

B. Ecuación de gap para fermiones en el vacío

En el Capítulo anterior, encontramos que la ecuación de gap toma diferentes formas según el esquema de regularización usado. En este Capítulo, obtendremos expresiones para los parámetros críticos G_c y Λ_c a partir de los cuales se genera masa dinámicamente y exploraremos la dinámica de las soluciones a la ecuación de gap para las diferentes regularizaciones Ecs. (A.9), (A.14), (A.22) y (A.28), usando un método iterativo.

B.1. Parámetros críticos

En esta sección, obtendremos los parámetros críticos, a los que llamaremos Λ_c y G_c , i.e. dado un Λ , qué valor de G es necesario para comenzar a generar masa. Para esto, usando la Ec. (A.6) definimos:

$$y \equiv m, \quad (\text{B.1})$$

$$y \equiv 8GN_f N_c i m I(m). \quad (\text{B.2})$$

Ahora, si graficamos a manera de ejemplo las Ec. (B.1) y (B.2), para la ecuación de gap regularizada por tiempo propio, obtenemos un perfil como el que se observa en la Fig. B.1.

En este caso, el cruce de las gráficas representa la solución a la ecuación de gap. Entonces, podemos afirmar que existe un conjunto de valores para Λ y G para los cuales la gráfica continua sólo intersecta la punteada en $m = 0$; esta es la solución trivial. Por otro lado, también existe un conjunto de valores para Λ y G tales que la gráfica continua siempre cruza la punteada en $m \neq 0$, además de la solución trivial. Siguiendo el mismo orden de ideas, existen valores para Λ y G de tal forma que la curva continua es tangente a la punteada; estos serán los valores críticos que llamamos Λ_c y G_c que buscamos. La condición de tangencialidad en la ecuación de gap se traduce como:

$$\left. \frac{d}{dm} m \right|_{m=0} = 8N_f N_c G \left. \frac{d}{dm} m I(m) \right|_{m=0}, \quad (\text{B.3})$$

para Λ_c y G_c .

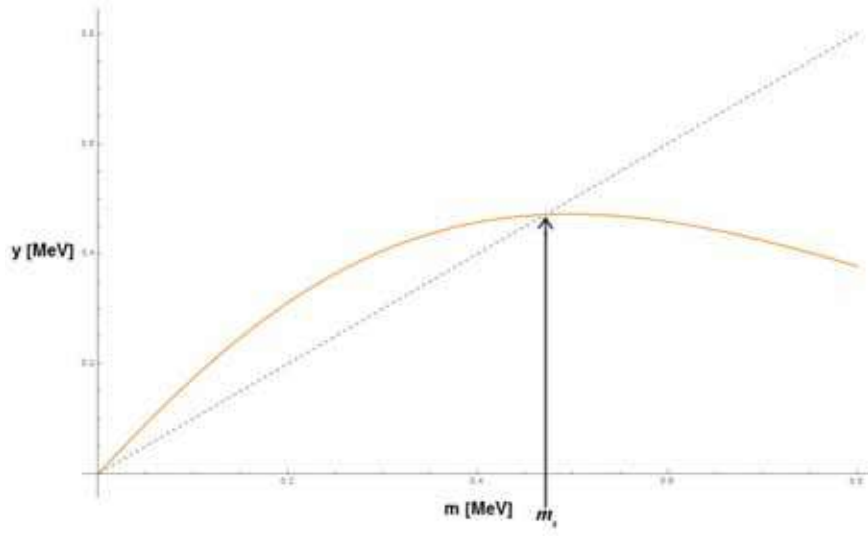


Figura B.1.: En azul (punteado) perfil de la Ec. (B.1), y en naranja (continuo) perfil de la Ec. (B.2) regularizada por tiempo propio.

Si aplicamos la condición (B.3) en todas las ecuaciones de gap encontradas en el Capítulo anterior, Eq. (A.9), Eq. (A.14), Eq. (A.22) y Eq. (A.28), obtenemos:

$$G_c = \frac{\pi^2}{N_f N_c} \frac{1}{\Lambda_{3D}^2}, \quad (\text{B.4})$$

$$G_c = \frac{2\pi^2}{N_f N_c} \frac{1}{\Lambda_{4D}^2}, \quad (\text{B.5})$$

$$G_c = \frac{2\pi^2}{N_f N_c} \frac{1}{\Lambda_{PV}^2}, \quad (\text{B.6})$$

$$G_c = \frac{2\pi^2}{N_f N_c} \Lambda_{TP}, \quad (\text{B.7})$$

respectivamente.

Como podemos observar, todas las regularizaciones dan G_c similares, a excepción de la regularización en tiempo propio. Si pedimos que G_c sea igual para todas las ecuaciones de gap, obtenemos las siguientes relaciones entre los parámetros de regularización Λ :

$$\frac{\Lambda_{3D}}{\sqrt{2}} = \Lambda_{4D} = \Lambda_{PV} = \frac{1}{\Lambda_{TP}^{1/2}}. \quad (\text{B.8})$$

Hay que hacer hincapié en que las expresiones en la Ec. (B.8) sólo dictan las relaciones que los parámetros de regularización tienen en el punto crítico, ya que como veremos a continuación, la dinámica de las soluciones a la ecuación de gap para los diferentes regularizadores varía mucho.

B.2. Forma adimensional de la ecuación de gap

Antes de comenzar a estudiar la dinámica de las ecuaciones de gap, necesitamos su forma adimensional, que se consigue haciendo la sustitución:

$$M = \frac{m}{\Lambda}, \quad (\text{B.9})$$

en las ecuaciones (A.9), (A.14) y (A.22). Entonces, obtenemos las siguientes ecuaciones de gap adimensionales

$$M = G' M \left\{ \sqrt{1 + M^2} - M^2 \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 + M^2}}{M^2} \right] \right\}, \quad (\text{corte } 3D) \quad (\text{B.10})$$

$$M = G' M \left\{ 1 - M^2 \ln [1 + M^{-2}] \right\}, \quad (\text{corte } 4D) \quad (\text{B.11})$$

$$M = G' M \left\{ 1 - M^2 + M^2 \ln [M^2] \right\}, \quad (\text{Pauli-Villars}) \quad (\text{B.12})$$

donde $G' = \frac{N_f N_c}{\pi^2} G \Lambda^2$ para $3D$ y $G' = \frac{N_f N_c}{2\pi^2} G \Lambda^2$ para las otras regularizaciones.

Para la regularización en tiempo propio, hacemos las sustituciones

$$M^2 = m^2 \Lambda, \quad s = \tau \Lambda, \quad (\text{B.13})$$

con lo que obtenemos

$$M = G' M \int_1^\infty d\tau \frac{e^{-M^2 \tau}}{\tau^2} = G' M \left[e^{-M^2} - M^2 \Gamma(0, M^2) \right], \quad (\text{tiempo propio}) \quad (\text{B.14})$$

donde $G' = \frac{N_f N_c}{2\pi^2} \frac{G}{\Lambda_{TP}}$.

Notemos que con estos cambios, todas las ecuaciones de gap predicen el mismo punto crítico $G'_c = 1$. Con estas ecuaciones, (B.10), (B.11), (B.12) y (B.14) el análisis de las siguientes secciones será un poco más simple.

Finalmente, definimos el sistema de ecuaciones equivalente a las ecuaciones de gap adimensionales

$$y \equiv I_s(M), \quad (\text{B.15})$$

$$y \equiv M, \quad (\text{B.16})$$

donde $I_s(M)$, es el miembro derecho de cualquiera de las Ec. (B.10), (B.11), (B.12) y (B.14).

B.3. Iteraciones y puntos fijos

Para entender un poco acerca de la dinámica de las soluciones a la ecuación de gap, utilizaremos un método iterativo. Hay dos formas de introducir esto, la primera es considerando las ecuaciones (B.1) y (B.2) como un sistema dinámico. En este caso, se itera la ecuación de gap dando un valor inicial m_0 y valores fijos de Λ_0 , G_0 y con suerte, después de un cierto número de iteraciones, se converge a un punto fijo m_s que coincide con la solución, ya que si m_s no cambia entre iteraciones, entonces se cumple

$$m_s = 8GN_f N_c i m_s I(m_s). \quad (\text{B.17})$$

Gráficamente, una sucesión de iteraciones se puede representar en una gráfica de telaraña (cobweb), como la de la Fig. B.2.

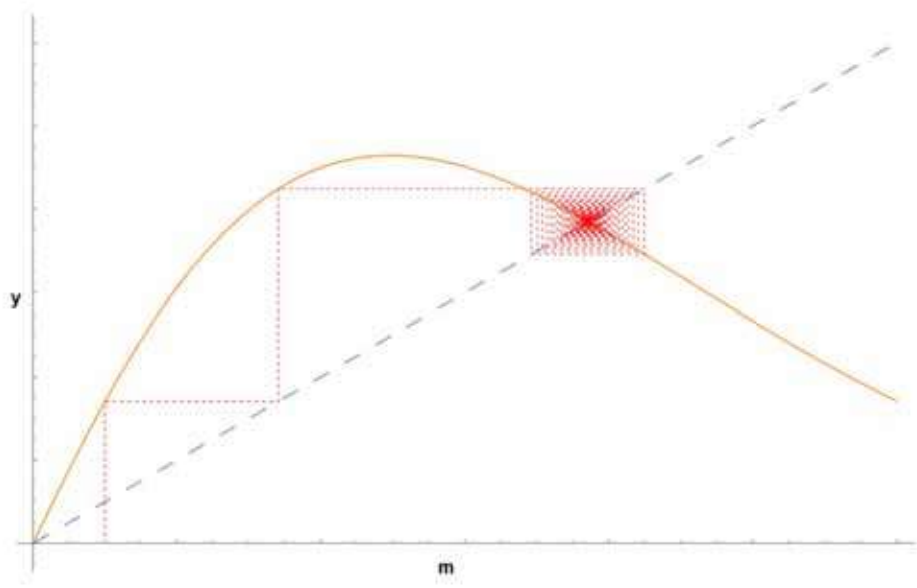


Figura B.2.: Representación de una sucesión de iteraciones. Tenemos una condición inicial m_0 que proyectamos sobre la curva continua $F(m)$; esto nos da $F(m_0) = F_1$. Ahora, se proyecta F_1 sobre la línea discontinua larga, con lo que obtenemos m_1 . Siguiendo este proceso es como construimos la sucesión F_n . En este caso, la sucesión eventualmente converge a la solución de la ecuación de gap.

La otra forma de introducir el método iterativo, es escribiendo la solución de la ecuación de gap como una sucesión infinita, donde cada término de la sucesión viene dado por una iteración. Para esto, comenzamos con un valor inicial

$$m = m_0 \equiv F_0. \quad (\text{B.18})$$

El siguiente término de la sucesión se obtiene introduciendo el valor inicial (B.18)

en la ecuación de gap Ec. (A.6)

$$m_1 = 8GN_f N_c i m_0 I(m_0) \equiv F_1. \quad (\text{B.19})$$

De la misma forma se obtienen el 3ro y 4to términos de la sucesión. Si seguimos con este proceso, llegamos a:

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n. \quad (\text{B.20})$$

Notemos que esta forma alternativa de definir la masa por medio del limite de una sucesión de iteraciones, Ec. B.20, es equivalente al método descrito en la Fig. B.2, ya que si en este último la sucesión converge para algún elemento F_n , entonces, para todos los elementos de la sucesión siguientes se cumple que

$$F_{n+1} = m_{n+1} = F_n, \quad (\text{B.21})$$

por lo que tambien se satisface la Ec. B.20.

Esta forma de obtener la masa por medio de una sucesión de iteraciones ya había sido usada con anterioridad [AOS14]. En dicho trabajo, los autores definen las iteraciones como se puede ver en la Fig. B.3. Sin embargo, en su análisis, ellos solamente contemplan la regularización por corte en $4D$, con lo que la sucesión siempre converge a la solución de la ecuación de gap, por lo que su resultado es algo aburrido si lo comparamos con lo que sucede en las otras regularizaciones que presentamos a continuación.

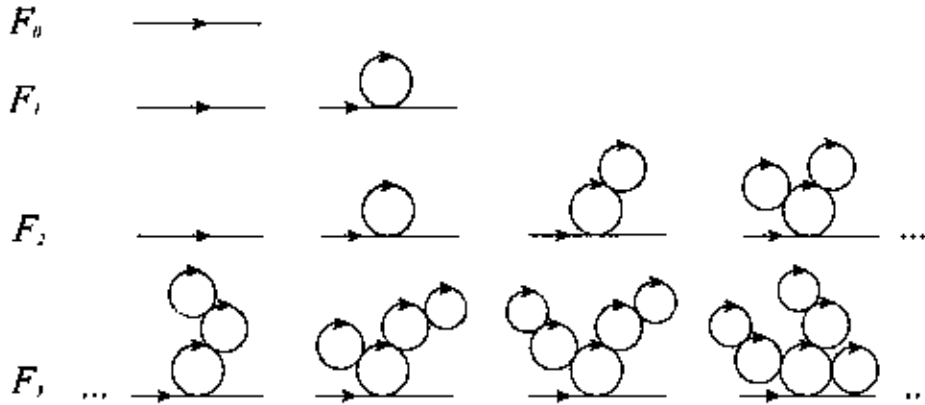


Figura B.3.: Definición de las iteraciones usadas por [AOS14]. F_j es la suma de los diagramas con hasta $j - 1$ inserciones de autoenergía.

B.4. Iterando la ecuación de gap

La forma en la que aplicamos las iteraciones a las ecuaciones (B.10), (B.11), (B.12) y (B.14) fue la siguiente:

- Con un valor fijo de G'_0 y con un valor inicial m_0 , iteramos la ecuación de gap correspondiente 500 veces y guardamos los últimos 200 valores de M_n , esto con la finalidad de dejar que el sistema se relaje.
- Repetimos el mismo proceso con el mismo valor inicial m_0 , pero con un valor diferente de G'_1 . Esto se hizo para un rango de valores de G' .
- Finalmente, graficamos todos los puntos guardados, con G' en el eje horizontal y M_n , el valor de las sucesiones 300 a la 500, en el eje vertical.

B.4.1. Gap 3D

Para la ecuación de gap (B.10), se obtiene la gráfica de telaraña mostrada en la Fig. B.4 para $G' = 7$ y en la Fig. B.5 podemos ver la gráfica de puntos fijos.

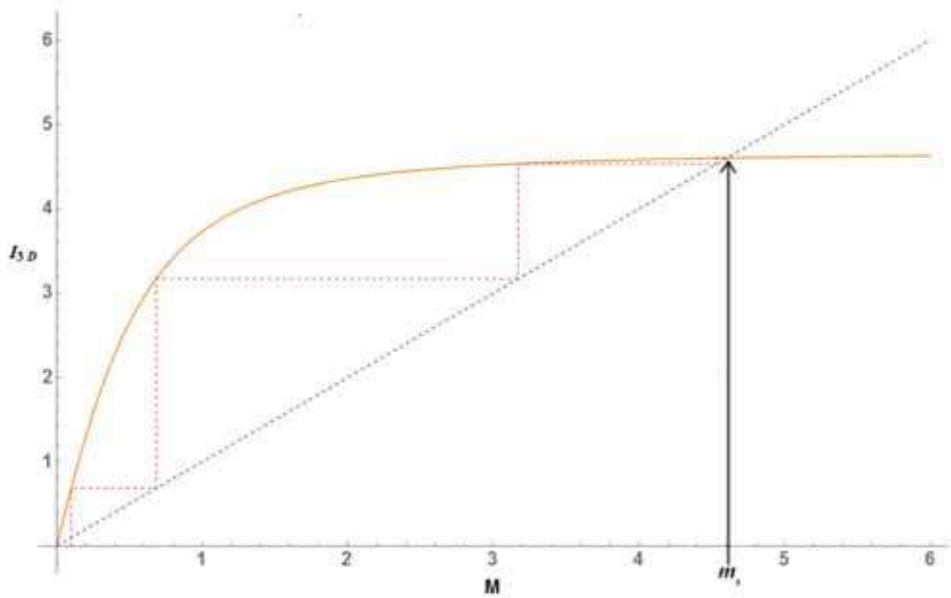


Figura B.4.: Gráfica de telaraña para la ecuación de gap regularizada por corte 3D con $G' = 7$. Se puede ver que la sucesión converge en 3 pasos a la solución de la ecuación de gap adimensional m_s .

De la Fig. B.5 se pueden apreciar varias cosas. La primera es que el número de iteraciones usadas es suficiente para encontrar los puntos fijos y con esto, las soluciones a la ecuación de gap. Otra cosa que podemos observar es que, como se había mencionado en la Sección 2.2, el valor crítico es $G'_c = 1$. Es aquí donde se puede ver claramente el fenómeno de generación dinámica de masa: antes de G'_c la masa generada es $m = 0$. Cuando se llega al valor crítico, la masa generada es diferente de cero.

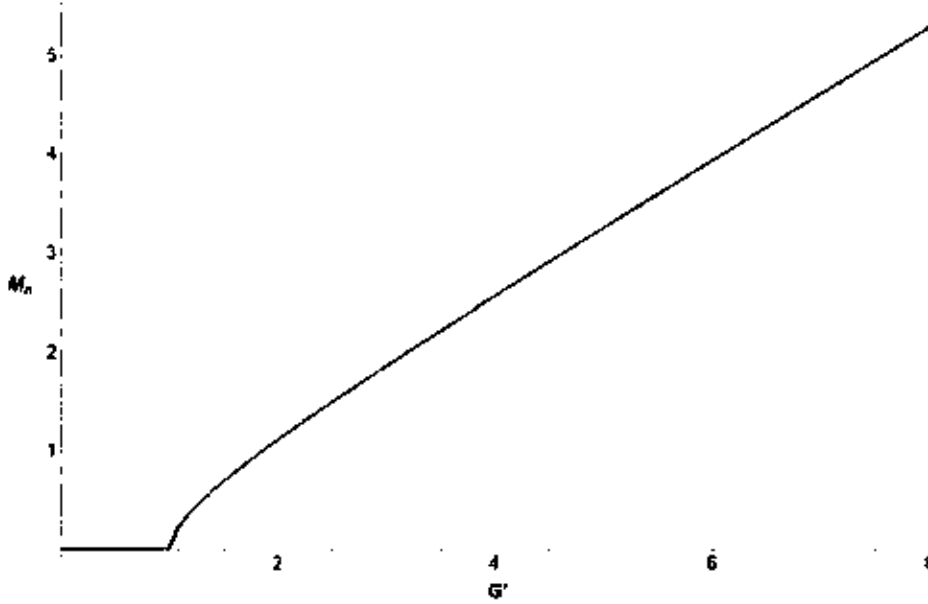


Figura B.5.: Gráfica de iteraciones para la Ec.(B.10). En el eje vertical, está el valor al cual converge la sucesión. En el eje horizontal se encuentra G' .

En este caso, el método iterativo nos arrojó la solución no trivial de la ecuación de gap y esta solución es única. Veamos lo que sucede para las demás ecuaciones de gap.

B.4.2. Gap 4D

Para este caso se encontró algo similar a la anterior. La Fig. B.6 muestra un ejemplo de la gráfica de telaraña para $G' = 8$ y en la Fig. B.7 se muestra la gráfica de puntos fijos. Volvemos a obtener una curva única que corresponde a la solución de la ecuación de gap. De la misma forma, se puede observar que para $G'_c = 1$ se comienza a generar masa. Algo que hay que notar es la diferencia entre las curvas Fig. B.5 y Fig. B.7. En la primera, después de pasar G'_c la función es aproximadamente lineal, $\sim G'$, mientras que en la segunda es de la forma $\sim \sqrt{\ln G}$.

B.4.3. Gap PV

Es en esta regularización en donde encontramos una diferencia radical con las regularizaciones anteriores. En la Fig. B.8 podemos ver la gráfica de telaraña para $G' = 3.8$, y como podemos apreciar, la sucesión de iteraciones no parece converger, y de hecho nunca lo hace, aún cuando la solución, que está dada por la intersección de las curvas continua y punteada, existe. En la Fig. B.9 tenemos la gráfica de puntos fijos.

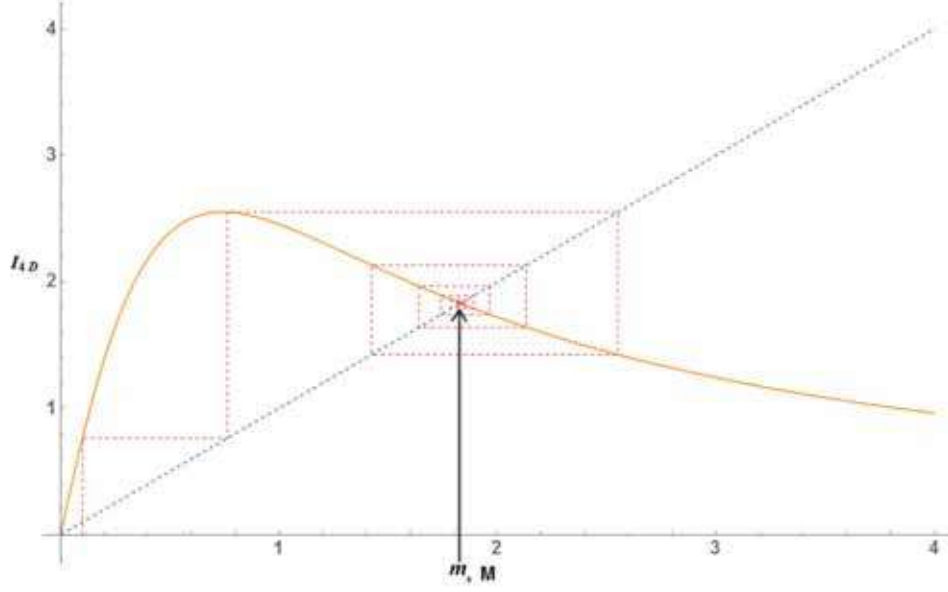


Figura B.6.: Gráfica de telaraña para la ecuación de gap con corte 4D para $G' = 8$. Como se puede ver, la sucesión de iteraciones converge a la solución m_s .

A diferencia de los casos anteriores, la dinámica que aparece aquí es muy compleja. Para $G' \approx 0$ y hasta $G' = G_c = 1$ obtenemos la solución trivial, como se esperaba. Después de esto, desde $G' = 1$ hasta $G' \approx 2.8$ la curva es muy parecida a la que se obtuvo en el caso 4D. Pasando $G' \approx 2.8$ es donde comienzan las diferencias a los casos anteriores, aquí se obtuvo una bifurcación de los puntos fijos. Concretamente, para cada iteración se tiene:

$$F_n = G' F_{n-1} \left\{ 1 - F_{n-1}^2 + F_{n-1}^2 \ln [F_{n-1}^2] \right\} = F_{n+2}. \quad (\text{B.22})$$

Entonces, los valores de M_n , se mantienen oscilando entre dos valores y la sucesión nunca converge. Esto nos dice que, si bien sabemos que existe solución a la ecuación de gap m_s , ésta no se comporta como un atractor. En términos físicos, la masa generada en este rango de valores de G' se vuelve inestable, y dado que el condensado quiral es proporcional a la masa generada, el condensado también sería inestable. Si hacemos crecer G' aún más, cada rama anterior se vuelve a bifurcar nuevamente y para cuando $G' \approx 3.6$, se llega a un régimen caótico, en donde la sucesión no tiene ningún tipo de periodicidad. La Fig. B.9 tiene una semejanza con un sistema caótico discreto conocido como mapeo logístico [May76] [DL15].

Finalmente, tenemos que mencionar que para $G' \gtrsim 5$, la sucesión diverge $F_n \rightarrow \infty$, con lo que la solución m_s se vuelve un repulsor.

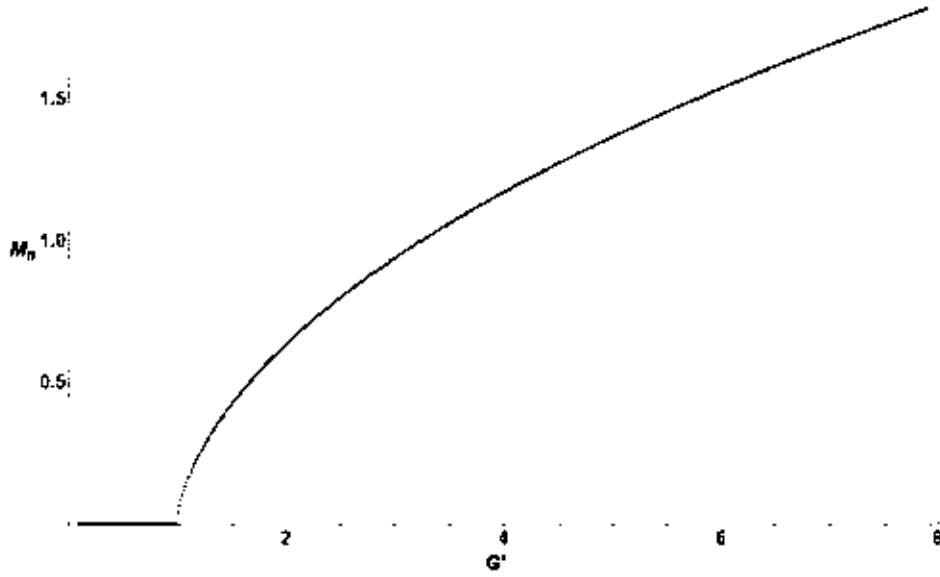


Figura B.7.: Curva generada por los puntos fijos para el corte $4D$, al igual que en el caso de la regularización por corte $3D$, la sucesión converge a la solución.

B.4.4. Gap tiempo propio

Para esta regularización, se obtuvo un comportamiento parecido al de la sección anterior. La Fig. B.10 muestra la gráfica de telaraña para $G' = 7$; nuevamente la sucesión no converge y en la Fig. B.11 están gráficos los puntos fijos.

La diferencia radica en que la región estable es más grande $G' \sim 1$ hasta $G' \sim 2.9$. Para $G' \gtrsim 2.9$ se vuelve a llegar a una bifurcación hasta llegar a $G' \sim 5.2$ y nuevamente para $G' \gtrsim 5.75$ se tiene la región caótica. Otra diferencia que hay entre (B.12) y (B.14) es que para $G' \gtrsim 590$, Fig. B.12, la solución trivial $m = 0$ se vuelve estable nuevamente, con lo que el condensado quiral desaparece.

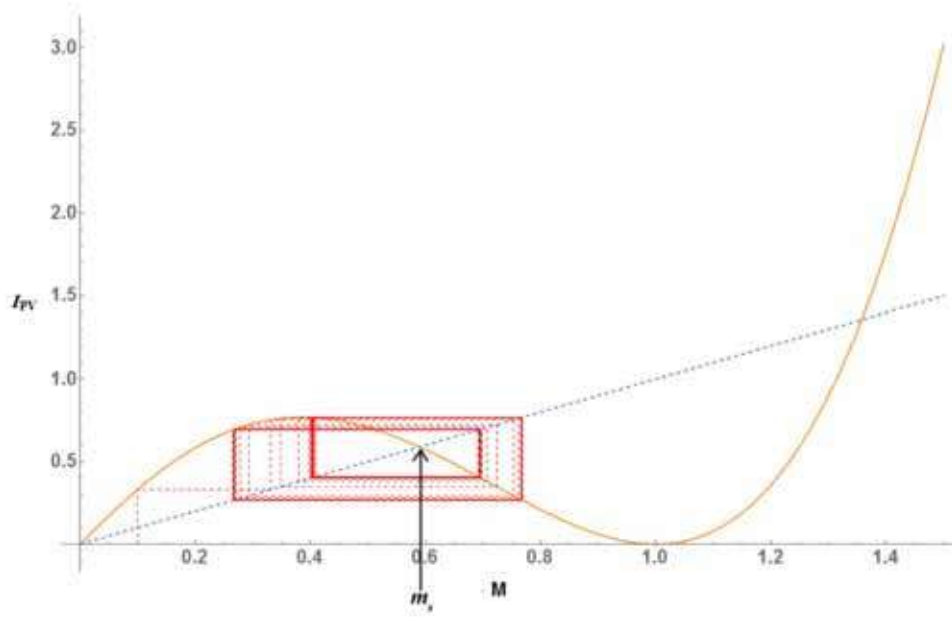


Figura B.8.: Gráfica de telaraña para $G' = 3.51$. Para este valor de G' la sucesión de iteraciones no converge y se mantiene orbitando.

B.4.5. Comparaciones

En la Fig. B.13 podemos ver una comparación de las iteraciones para las diferentes regularizaciones. Se puede notar que el corte $3D$ es el que predice, por mucho, la mayor masa para la misma G' . Por otra parte, Pauli-Villars es el que predice la menor masa generada. Sin embargo, pasando de $G' \gtrsim 5$ todas las iteraciones divergen, $M_n \rightarrow \infty$. En el intermedio se encuentran las regularizaciones por corte $4D$ y tiempo propio, siendo el primero el que predice soluciones estables para todo G' y en el segundo, los puntos fijos son inestables después de $G' \gtrsim 3.7$ y para $G' \gtrsim 590$, todas las iteraciones convergen a $M_n \rightarrow 0$. En el Capítulo 4 discutiremos a que se pueden deber estos comportamientos encontrados.

En el siguiente capítulo, agregaremos un campo magnético, con el cual los quarks interactuarán y obtendremos la ecuación de gap correspondiente. También agregaremos los efectos de la temperatura.

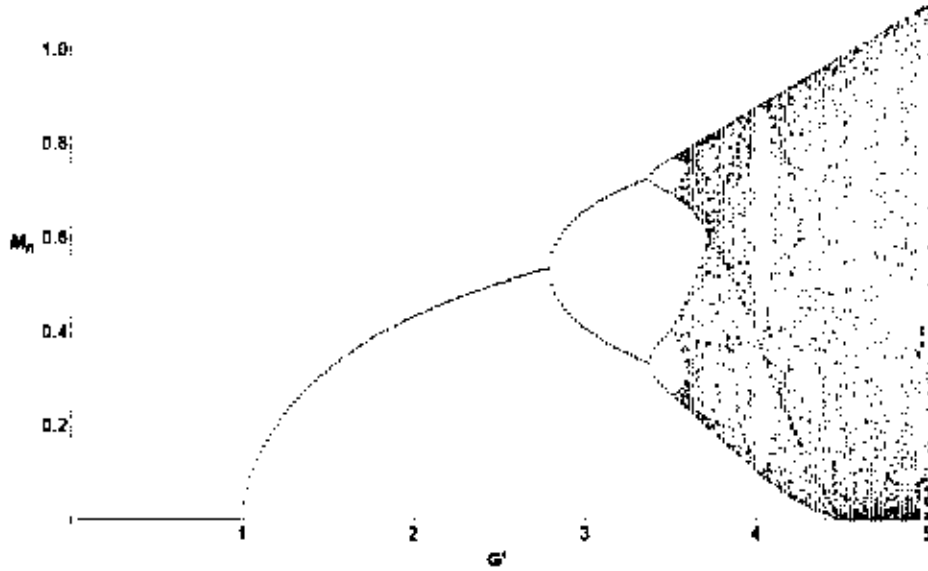


Figura B.9.: Gráfica que se obtiene al iterar la ecuación de gap regularizando con PV. Se puede ver que la dinámica de los puntos fijos comienza a volverse muy compleja para $G' \approx 3.5$.

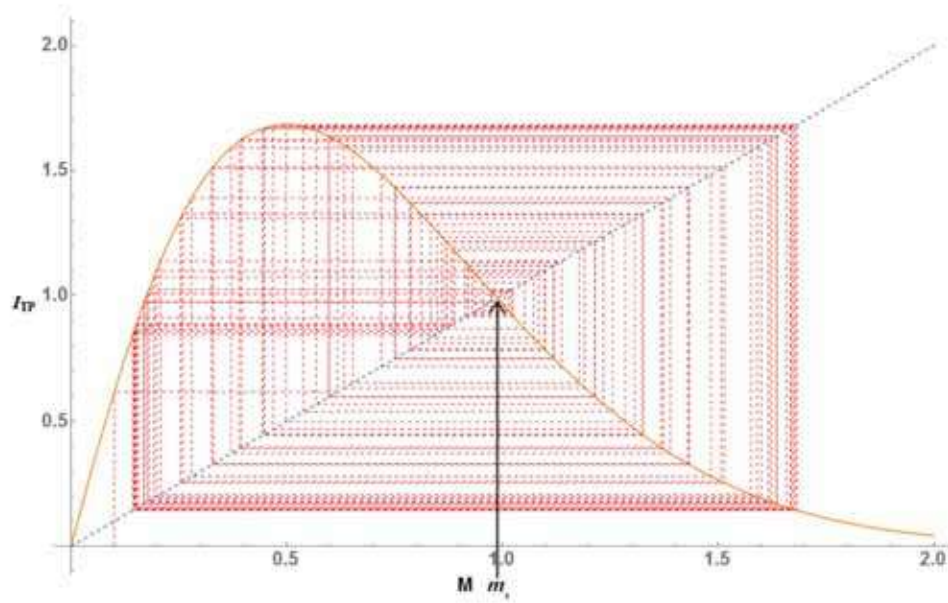


Figura B.10.: Gráfica de telaraña para $G' = 6.5$. Al igual que en el caso anterior, para este valor de G' la sucesión de iteraciones no converge y se mantiene orbitando.

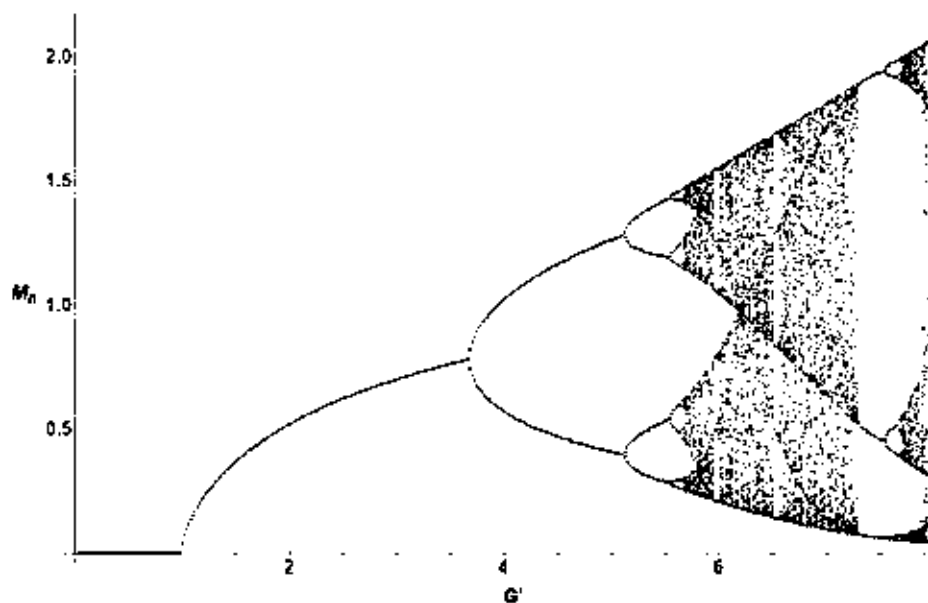


Figura B.11.: Gráfica de iteraciones para la regularización en tiempo propio.

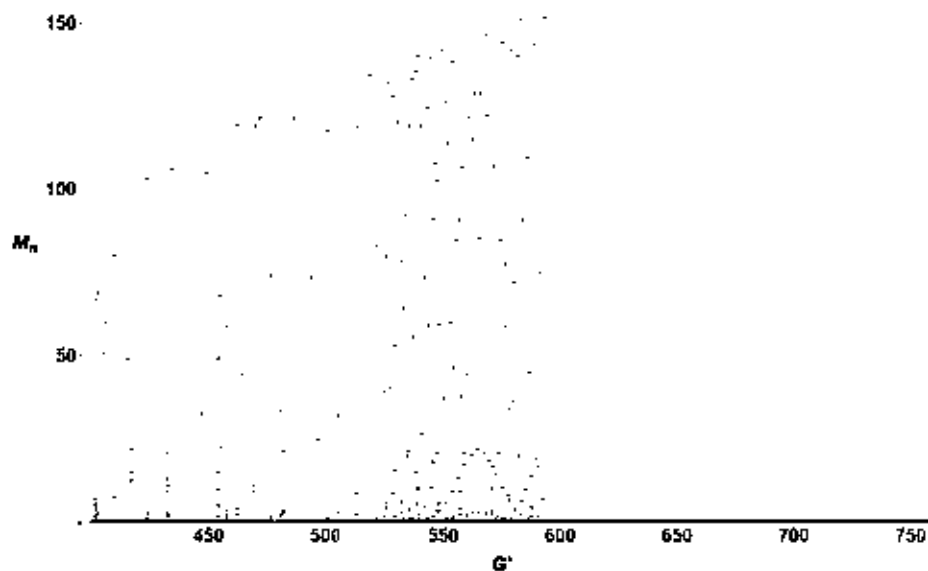


Figura B.12.: Gráfica de iteraciones para el rango $G' \sim 400 - 750$. A partir del punto $G' \gtrsim 590$, la solución trivial vuelve a ser estable. En este caso el condensado sería inestable y tendería a desaparecer.

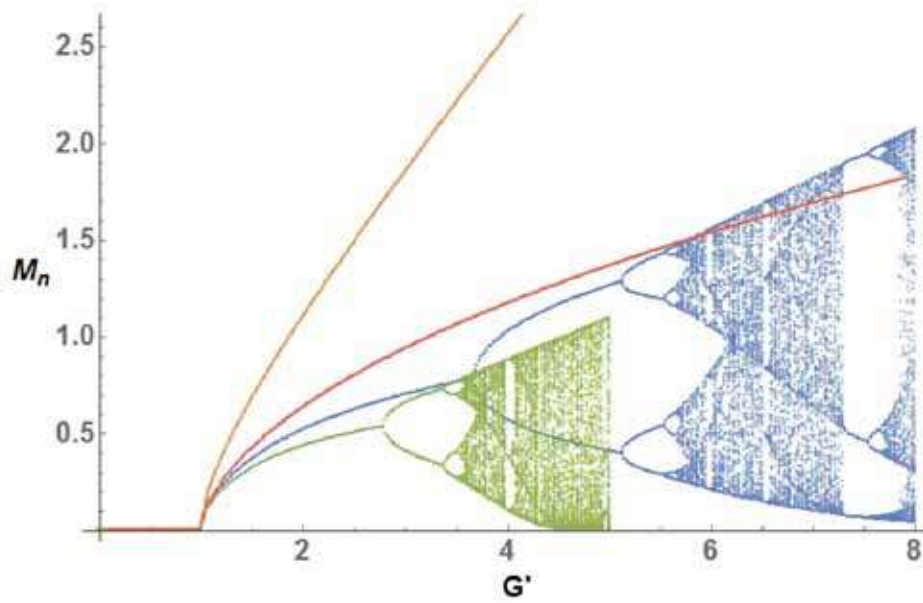


Figura B.13.: Comparación de las iteraciones para las diferentes regularizaciones. En naranja está representado el corte $3D$, en rojo el corte $4D$, en verde la regularización con Pauli-Villars y en azul el corte por tiempo propio.

C. Medio magnetizado y a temperatura finita

En este Capítulo, obtendremos la expresión para la ecuación de gap cuando se tiene un campo magnético extremadamente fuerte $\approx 5 - 6 \text{ MeV}^2$ con el que interactúan los quarks, como el que se genera en colisiones relativistas de iones pesados en Alice en el LHC, RHIC y otros laboratorios alrededor del mundo. En este caso, usaremos solamente el esquema de regularización de tiempo propio, ya que es uno de los más usados cuando se quieren introducir campos magnéticos en la dinámica. Después, a esto le agregaremos efectos de un baño térmico a una temperatura dada, utilizando el formalismo de tiempo imaginario de Matsubara y al igual que en el Capítulo anterior, aplicaremos el método iterativo para obtener los puntos fijos.

C.1. Medio con campo magnético

El propagador para un fermión que se propaga en un campo magnético en la dirección z en forma de niveles de Landau es (ver Apéndice A):

$$iS_B(k) = i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d_l(\frac{k_{\perp}^2}{eB})D + d'_l(\frac{k_{\perp}^2}{eB})\bar{D}}{k_{\parallel}^2 - 2leB - m^2} + \frac{\not{k}_{\perp}}{k_{\perp}^2}, \quad (\text{C.1})$$

donde: $k_{\perp}$ es la componente perpendicular del cuadrimomento, e es la carga del quark, B es el campo magnético externo y ℓ es el índice que suma sobre los niveles de Landau. También:

$$d_l(\alpha) = (-1)^n e^{-\alpha} L_l^{-1}(2\alpha), \quad (\text{C.2})$$

$$d'_n = \frac{\partial d_n}{\partial \alpha}, \quad (\text{C.3})$$

$$D = (m + \not{k}_{\parallel}) + k_{\perp} \frac{m^2 - k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2}, \quad (\text{C.4})$$

$$\bar{D} = \gamma^5 \not{b} (m + \not{k}_{\parallel}), \quad (\text{C.5})$$

y $L_l(x)$, $L_l^m(x)$ son los polinomios de Laguerre y asociados de Laguerre. Además,

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad \text{y} \quad b^\mu = (0, 0, 0, 1). \quad (\text{C.6})$$

En este trabajo, consideraremos que el campo magnético de fondo es muy grande, por lo que sólo se estudiará el caso $l = 0$, que corresponde al nivel más bajo de Landau (LLL). Hay que recalcar que debido a que estamos usando esta aproximación, no es posible sustraer la contribución del vacío a la dinámica; el caso del propagador completo se encuentra bajo estudio y los resultados se reportarán en otro lugar.

Usando el nivel más bajo de Landau, $l = 0$, entonces

$$iS_B(k) = i \frac{d_0(\frac{k_{\perp}^2}{eB})D + d'_0(\frac{k_{\perp}^2}{eB})\bar{D}}{k_{\parallel}^2 - m^2} + \frac{\not{k}_{\perp}}{k_{\perp}^2}, \quad (\text{C.7})$$

y

$$d_0(\alpha) = (-1)^0 e^{-\alpha} L_0^{-1}(2\alpha) = e^{-\alpha}, \quad (\text{C.8})$$

$$d'_0 = \frac{\partial d_0}{\partial \alpha} = -e^{-\alpha}, \quad (\text{C.9})$$

$$L_0(x) = 1, \quad (\text{C.10})$$

$$L_0^{-1}(x) = 1. \quad (\text{C.11})$$

Por lo tanto, el propagador queda como

$$iS_B(k) = i \frac{e^{-\frac{k_\perp^2}{eB}}(m + \not{k}_\parallel + \not{k}_\perp \frac{m^2 - k_\parallel^2}{k_\perp^2}) - e^{-\frac{k_\perp^2}{eB}}(\gamma^5 \not{y} \not{k}(m + \not{k}_\parallel))}{k_\parallel^2 - m^2} + \frac{\not{k}_\perp}{k_\perp^2}, \quad (\text{C.12})$$

con

$$(a \cdot b)_\parallel = a^0 b^0 - a^3 b^3 \quad (\text{C.13})$$

y

$$(a \cdot b)_\perp = a^1 b^1 + a^2 b^2. \quad (\text{C.14})$$

Necesitamos calcular $\text{Tr}[iS_B(k)]$. Usando las propiedades de las matrices de Dirac γ^μ tenemos que

$$\text{Tr}[\not{A}] = 0, \quad (\text{C.15})$$

$$\text{Tr}[\Gamma] = 0, \quad (\text{C.16})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu] = 0, \quad (\text{C.17})$$

para cualquier cuadvivector A^μ y Γ cualquier producto impar de matrices gamma.

Con todo esto, la traza del propagador queda:

$$\text{Tr}[iS_B(k)] = 4N_f N_c i \frac{m e^{-\frac{k_\perp^2}{eB}}}{k_\parallel^2 - m^2}, \quad (\text{C.18})$$

con $N_f = 2$ y $N_c = 3$.

Así,

$$iI(m, B) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^2 k_\perp d^2 k_\parallel 24i \left(\frac{m e^{-\frac{k_\perp^2}{e_u B}}}{k_\parallel^2 - m^2} + \frac{m e^{-\frac{k_\perp^2}{e_d B}}}{k_\parallel^2 - m^2} \right), \quad (\text{C.19})$$

con, e_u y e_d las cargas de quark up y down, respectivamente y

$$dk_{\parallel} = dk_0 dk_3, \quad (C.20)$$

$$dk_{\perp} = dk_1 dk_2, \quad (C.21)$$

$$k_{\parallel}^2 = k_0^2 - k_3^2, \quad (C.22)$$

$$k_{\perp}^2 = k_1^2 + k_2^2. \quad (C.23)$$

A continuación, integramos sobre las componentes perpendiculares

$$\int d^2 k_{\perp} e^{-\frac{k_{\perp}^2}{eB}} = \int d^2 k_{\perp} e^{-\frac{(k_1^2 + k_2^2)}{eB}} = eB\pi, \quad (C.24)$$

con lo que nos queda

$$iI(m, B) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^2 k_{\parallel} 24im\pi B(e_u + e_d) \frac{1}{k_{\parallel}^2 - m^2}. \quad (C.25)$$

Haciendo una rotación de Wick $k_0 \rightarrow ik_0$ en (C.25),

$$iI_E(m, B) = \frac{1}{(2\pi)^4} 24B\pi(e_u + e_d)m \int d^2 k_{\parallel} \frac{1}{k_0^2 + k_3^2 + m^2}. \quad (C.26)$$

Usando (A.23) en $iI_E(m, B)$, tenemos

$$iI_E(m, B) = \frac{1}{(2\pi)^4} 24B\pi(e_u + e_d)m \int_0^{\infty} ds \int d^2 k_{\parallel} e^{-(k_0^2 + k_3^2 + m^2)s}. \quad (C.27)$$

Haciendo las integrales sobre k_0 y k_3 nos da un término $\frac{\pi}{s}$, con lo que resulta

$$iI_E(m, B) = \frac{1}{(2\pi)^4} 24B\pi(e_u + e_d)m \int_0^{\infty} ds e^{-m^2 s} \frac{\pi}{s}. \quad (C.28)$$

Después de agregar el corte Λ_{TP} , finalmente nos queda la ecuación de gap

$$m = GB \frac{48\pi^2}{(2\pi)^4} (e_u + e_d) m \int_{\Lambda_{TP}}^{\infty} ds \frac{1}{s} e^{-m^2 s}. \quad (\text{C.29})$$

Para obtener la ecuación adimensional de gap para el caso magnético, hacemos las siguientes sustituciones:

$$\tau = \frac{s}{\Lambda_{TP}^2} \quad \text{y} \quad m^2 = \frac{M^2}{\Lambda_{TP}^2}, \quad (\text{C.30})$$

con lo que obtenemos la ecuación de gap adimensional:

$$M = G' M \int_1^{\infty} d\tau \frac{e^{-M^2 \tau}}{\tau}, \quad (\text{C.31})$$

donde $G' = GB \frac{48\pi^2}{(2\pi)^4} (e_u + e_d)$.

Como podemos ver, la ecuación de gap que obtuvimos es muy parecida a la de quarks en el vacío (A.28). Sin embargo, la principal diferencia radica en la potencia de τ en el denominador dentro de la integral. Como veremos más adelante, esta pequeña diferencia cambia la forma de la gráfica de puntos fijos, que en términos físicos se traduce como el fenómeno de catálisis magnética, en el cual, el campo magnético externo propicia la formación del condensado quiral y por ende la generación de masa dinámica [Sho13].

C.2. Ecuación de gap con campo magnético a temperatura finita

Lo siguiente es pasar a temperatura finita, para esto usaremos el formalismo de tiempo imaginario de Matsubara [KG06][Das97]. Existen otros formalismos como el de tiempo real o thermo field dynamics [Das97], sin embargo utilizaremos el formalismo de tiempo imaginario debido a su simplicidad. Para pasar al formalismo de tiempo imaginario de Matsubara hacemos las sustituciones

$$k \rightarrow (w_n, \vec{k}) \quad (\text{C.32})$$

y

$$\int dk_0 \rightarrow T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \quad (\text{C.33})$$

en (C.26) y obtenemos

$$I_E(m, B, T) = \frac{1}{(2\pi)^4} T \sum_n \int dk_3 24mB\pi \cdot (e_u + e_d) \frac{1}{w_n^2 + k_3^2 + m^2}, \quad (\text{C.34})$$

donde T es la temperatura y $w_n = (2n+1)\pi T$, esto ya que solo estamos considerando campos fermiónicos, por lo que se tienen que cumplir las condiciones de antisimetría de las funciones de onda.

Usando nuevamente la identidad (A.23), tenemos

$$I_E(m, B, T) = \frac{1}{(2\pi)^4} T \sum_n \int ds \int dk_3 24mB\pi \cdot (e_u + e_d) e^{-(w_n^2 + k_3^2 + m^2)s}. \quad (\text{C.35})$$

Integrando sobre k_3 , esto nos dará un factor $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$ que multiplicará a toda la expresión,

$$I_E(m, B, T) = \frac{1}{(2\pi)^4} T \sum_n \int ds 24mB\pi \cdot [e_u + e_d] \sqrt{\frac{\pi}{s}} e^{-(w_n^2 + m^2)s}, \quad (\text{C.36})$$

que podemos escribir como

$$I_E(m, B, T) = \frac{1}{(2\pi)^4} 24m(e_u + e_d) B \pi^{\frac{3}{2}} \int ds \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-m^2 s} T \sum_n e^{-w_n^2 s} \quad (\text{C.37})$$

Podemos identificar la sumatoria con la función theta elíptica del segundo tipo, definida como [WW27]

$$\vartheta_2(z, q) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \cos[(2n+1)z]. \quad (\text{C.38})$$

Para nuestro caso, $z = 0$ y $q = e^{-4\pi^2 T^2 s}$, con lo que tenemos

$$\sum e^{-[(n+\frac{1}{2})2\pi T]^2 s} = \frac{1}{2} \vartheta_2(0, e^{-4\pi^2 T^2 s}). \quad (\text{C.39})$$

Regresando a la integral $I_E(m, B, T)$, se tiene entonces

$$I_E(m, B, T) = \frac{1}{(2\pi)^4} 24m(e_u + e_d) B \pi^{\frac{3}{2}} T \int ds \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-m^2 s} \frac{1}{2} \vartheta_2(0, e^{-4\pi^2 T^2 s}). \quad (\text{C.40})$$

Sustituyendo (C.40) en (A.6) tenemos la ecuación de gap:

$$m = G \left[\frac{1}{(2\pi)^4} 24m B \pi^{\frac{3}{2}} T (e_u + e_d) \int_{\Lambda_{TP}}^\infty ds \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-m^2 s} \vartheta_2(0, e^{-4\pi^2 T^2 s}) \right]. \quad (\text{C.41})$$

Finalmente, pasamos a la versión adimensional por medio de las sustituciones

$$s = \tau \Lambda_{TP}, \quad M^2 = m^2 \Lambda_{TP} \quad \text{y} \quad T'^2 = T^2 \Lambda_{TP}, \quad (\text{C.42})$$

y nos queda

$$M = M G' \int_1^\infty d\tau \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-M^2 \tau} \vartheta_2(0, e^{-4\pi^2 T'^2 \tau}), \quad (\text{C.43})$$

con $G' = G \frac{24}{(2\pi)^4} B \pi^{\frac{3}{2}} T (e_u + e_d) \Lambda_{TP}^{\frac{1}{2}}$.

Nuevamente, uno de los cambios más notables es la potencia de τ en el denominador dentro de la integral en (C.43); ahora es $\frac{1}{2}$ en comparación al caso puramente magnético (C.31) y en el vacío (B.14), donde es 1 y 2, respectivamente. También se tiene la función theta elíptica del segundo tipo, debido a la suma sobre frecuencias de Matsubara.

C.3. Iteraciones caso magnético

Ahora aplicaremos el método iterativo a nuestras ecuaciones de gap, obtenidas para encontrar los puntos fijos. Comenzamos con la ecuación de gap con campo magnético solamente Ec. (C.31). En la Fig. C.1, podemos observar la gráfica de telaraña. Los puntos fijos se pueden ver en la Fig. C.2.

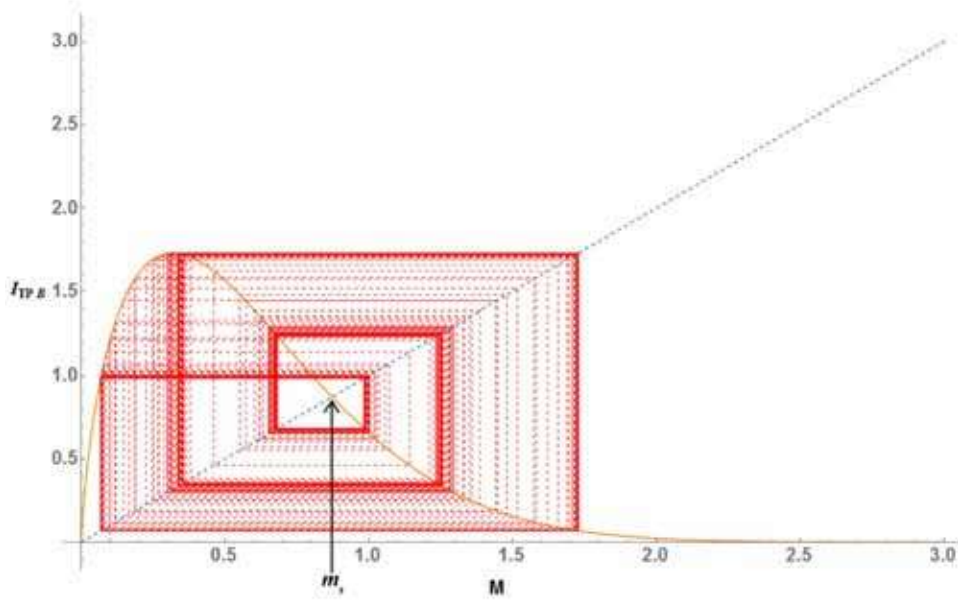


Figura C.1.: Gráfica de telaraña para la ecuación de gap con medio magnetizado. Para este valor particular del acoplamiento, $G' = 3$, la sucesión no converge.

Sorprendentemente, obtuvimos una gráfica de puntos fijos muy parecida a la obtenida en el caso del vacío, aunque con una diferencia muy importante. Como se puede observar, para valores de $G' \sim 0$, la pendiente de la curva de puntos fijos es diferente de cero a diferencia del caso en el vacío Fig. B.11. Esto se debe principalmente al exponente que tiene τ en la integral de la Ec. (C.29) y que difiere de la Ec. (B.14). En términos físicos, este aumento de la pendiente se traduce en el fenómeno de catálisis magnética, en donde la formación del condensado quiral se ve favorecido por el campo magnético, por lo que en este caso, para cualquier valor $G' > 0$ se genera masa. Esto lo podemos ver, aplicando la condición (B.3) a (C.31) con lo que obtenemos:

$$1 = G'_c \int_1^\infty \frac{1}{\tau} d\tau = G'_c \ln \tau \Big|_1^\infty \rightarrow \infty, \quad (\text{C.44})$$

como podemos ver de la relación anterior, llegamos a una contradicción, por lo que el valor de G'_c no está definido. Esto nos sugiere que no hay punto crítico en esta ecuación de gap. Ahora, si observamos la gráfica de puntos fijos Fig. C.2, podemos notar que para cualquier valor de $G' > 0$ se genera masa. Notemos que, aunque estamos en nivel más bajo de Landau, podemos considerar valores de $G' \sim 0$ ya que como $G' \propto GB$, si bien el campo magnético es muy grande, podemos pensar que el acoplamiento G es extremadamente pequeño. De cualquier manera, en este régimen hay que ser cuidadosos.

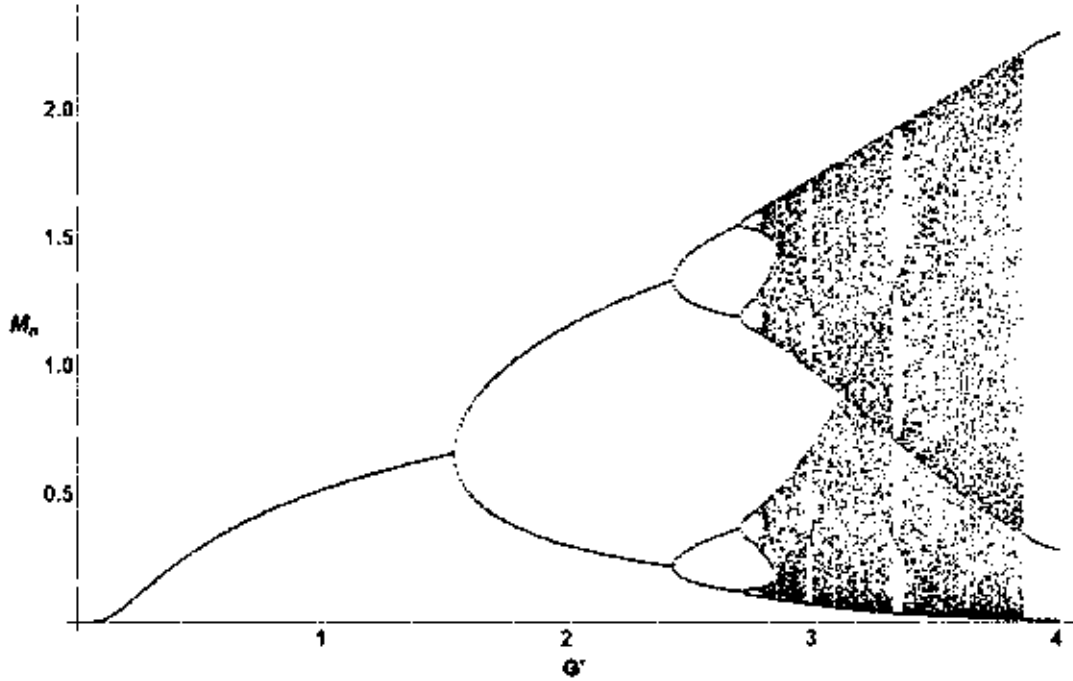


Figura C.2.: Gráfica de puntos fijos para la ecuación de gap con campo magnético. Si observamos, la curva cerca de $G' = 0$, podemos notar que para casi todo $G' \neq 0$ se genera masa. Esto es un reflejo del fenómeno de catálisis magnética, en donde la formación del condensado se ve favorecida debido al campo magnético.

C.4. Iteraciones caso magnético con temperatura

Cuando agregamos un baño térmico al medio magnetizado y aplicamos nuestro método iterativo, obtenemos la Fig. C.3 con $G' = 13$ y $T = 0.02$ para la gráfica de telaraña, y la Fig. C.4 muestra los puntos fijos.

De la Fig. C.4, lo primero que se nota es que nuevamente tenemos un acoplamiento crítico en $G' \sim 0.5$, lo que concuerda con las expectativas, pues se sabe que el campo magnético intenta formar el condensado (recordemos que $G' \propto GB$), mientras la temperatura genera fluctuaciones que intentan destruirlo. En nuestra gráfica de puntos fijos, esto se traduce como una translación de todos los puntos, a la derecha cuando la temperatura crece y a la izquierda cuando el campo magnético o el acoplamiento crecen, haciendo que $G'_c \rightarrow 0$. Por otro lado, para $G' \sim 10$ empezamos con la zona caótica, lo que nos dice que las soluciones son inestables, al igual que en el caso del vacío Fig. B.11 y con el medio magnetizado Fig. C.2.

En el siguiente Capítulo se discutiremos las posibles implicaciones y el trabajo que falta por hacer para entender estos resultados.

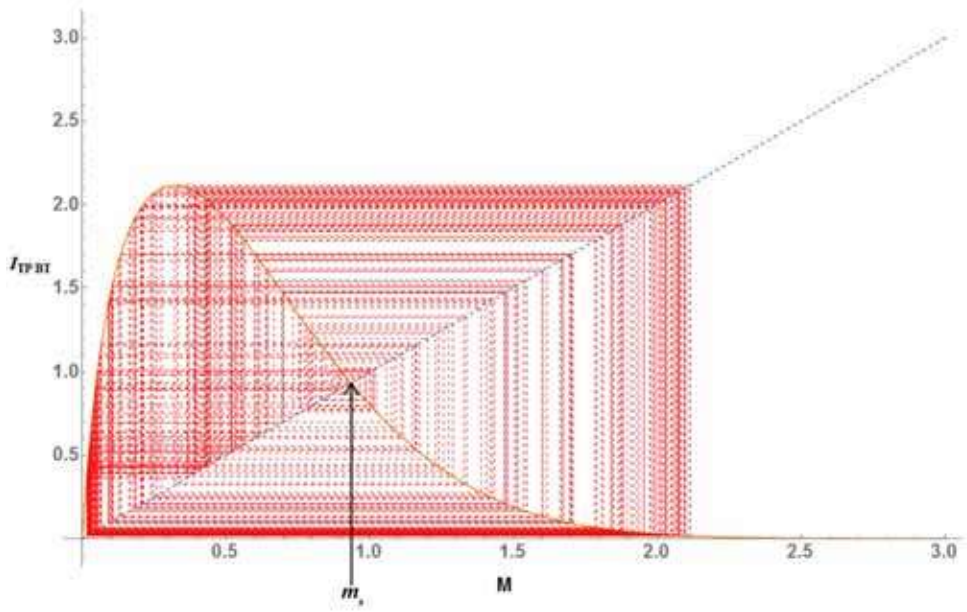


Figura C.3.: Gráfica de telaraña para la ecuación de gap con un medio magnetizado y con temperatura. Al igual que en el caso anterior, la sucesión no converge para los siguientes valores del acoplamiento y temperatura, $G' = 13$ y $T = 0.02$, respectivamente.

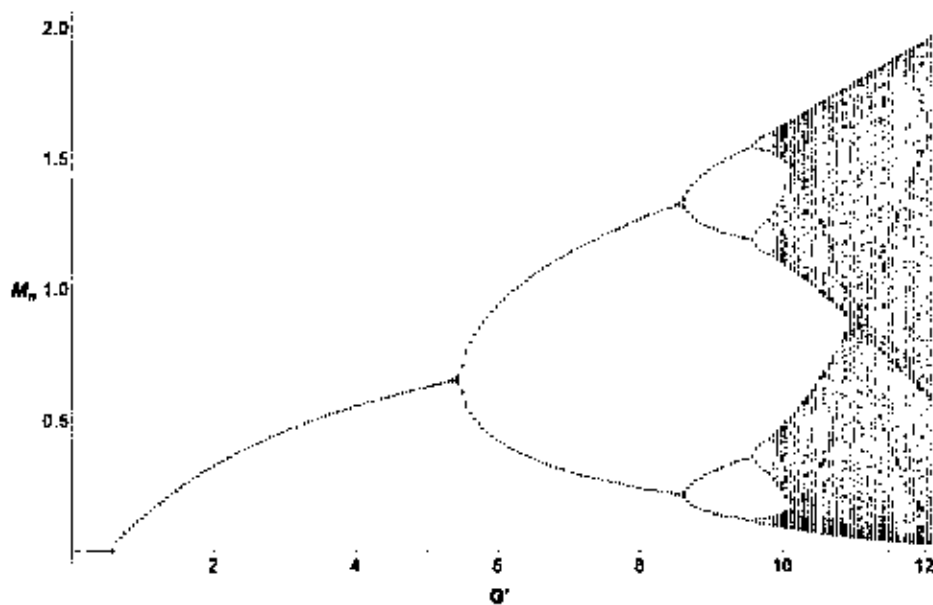


Figura C.4.: Gráfica de puntos fijos para la ecuación de gap con un medio magnetizado y con temperatura. Al igual que en el vacío y en el caso magnético, tenemos la formación de una estructura caótica para $G' \gtrsim 10$. Notemos, además, que con el agregado de la temperatura obtenemos nuevamente un punto crítico en $G'_c \sim 0.5$, esto debido a que el campo magnético compite con la temperatura para formar o disolver el condensado respectivamente.

D. Discusión y perspectivas

En este Capítulo discutimos las dinámicas encontradas en los Capítulos 2 y 3, y como éstas estructuras matemáticas se relacionan con la física del fenómeno de generación dinámica de masa.

Lo primero que discutiremos serán las diferencias entre las gráficas de puntos fijos (B.5), (B.7), (B.9) y (B.11). Para entender el por qué de estas diferencias, comparemos los perfiles de las ecuaciones de gap que las generan. Si graficamos la Ec. (B.2) para cada regularización, obtenemos la Fig. D.1. Notemos la forma en la que se comportan cuando m se hace grande, mientras que el corte $3D$ crece, las otras regularizaciones decrecen y esta disminución es la causante de las bifurcaciones en las gráficas de puntos fijos.

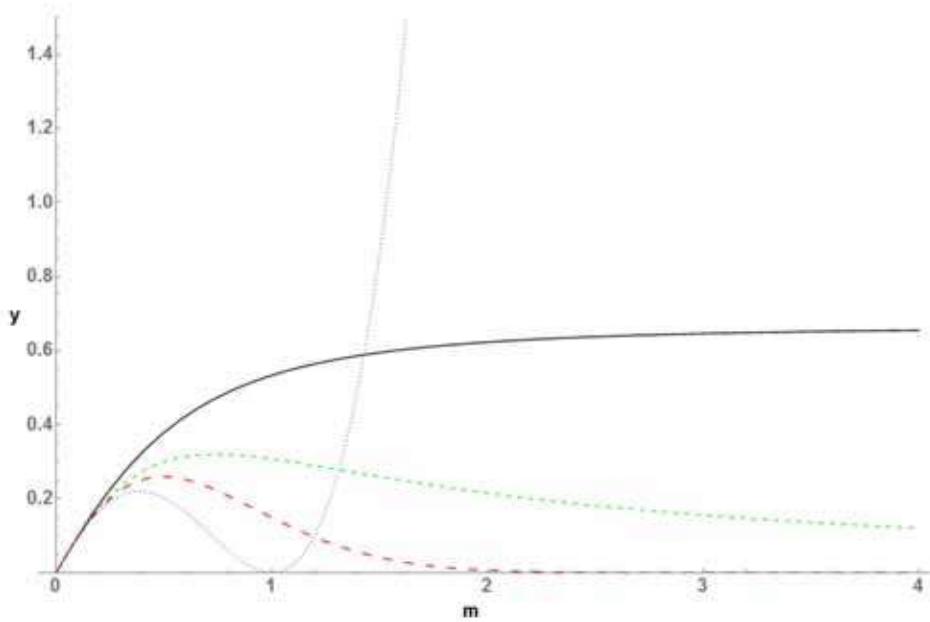


Figura D.1.: Comparación de las Ec. (B.2) para las diferentes regularizaciones con $G' = 1$. En negro (sólido) corte $3D$, en verde (discontinua corta) $4D$, en azul Pauli-Villars (punteada) y en rojo tiempo propio (discontinua larga).

Para ver esto, comparemos la dinámica de las iteraciones en las regularizaciones por corte $3D$ y por tiempo propio Fig. D.2. Podemos observar como en $G' = 1$ y $G' = 3$ ambas sucesiones convergen a la solución de la ecuación de gap correspondiente.

Sin embargo, para $G' = 5$, en el caso de la ecuación de gap regularizada por tiempo propio, la sucesión se mantiene orbitando. Esto corresponde a la primera bifurcación en la gráfica de puntos fijos, Fig. B.11. Para $G' = 7$, la sucesión de iteraciones para el corte en tiempo propio entra en régimen caótico. Finalmente, para tiempo propio, a partir de $G' \gtrsim 590$ la región caótica termina y la sucesión converge a la solución trivial $M_n = 0$, Fig. B.12. Para corte $3D$ la sucesión converge siempre a la solución m_s .

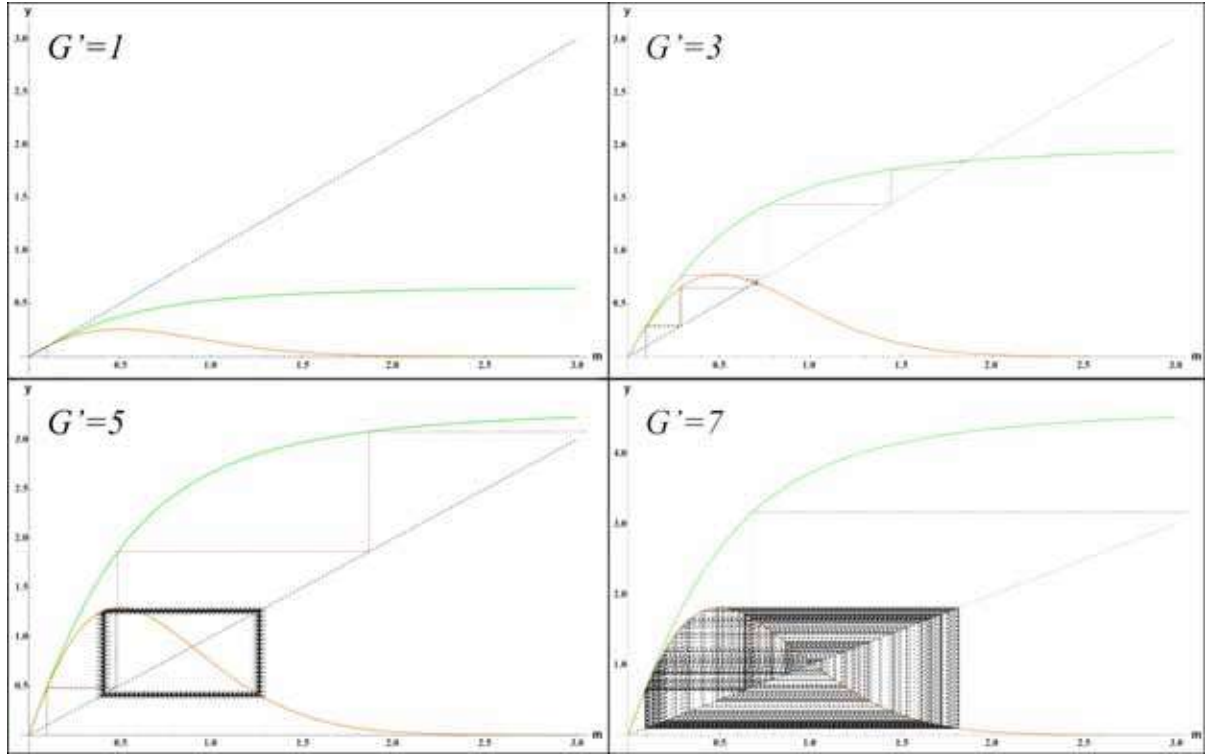


Figura D.2.: Ec. (B.2) para corte $3D$ en verde, en azul para tiempo propio y en negro la Ec. (B.1). Sabemos que la solución a la ecuación de gap está dada por la intersección de la recta $y = m$ con la Ec. (B.2) correspondiente a cada regularización. Podemos ver como la sucesión en el caso de corte $3D$ y tiempo propio convergen a la solución para $G' = 1$ y $G' = 3$. En $G' = 5$, mientras que para corte $3D$ la sucesión continua convergiendo, para tiempo propio aparece una bifurcación y la sucesión no converge. Finalmente, para $G' = 7$ las iteraciones en tiempo propio entran en régimen caótico.

Como mencionamos, la forma en la que decae el perfil de la Ec. (B.2) en cada regularización es la responsable de la dinámica de la sucesión de iteraciones, ya que cuando la pendiente de la Ec. (B.2) es -1 aparece la primera bifurcación, esto sucede para las regularizaciones con Pauli-Villars y con tiempo propio. Notemos que, aunque $4D$ también decae, no lo hace tan drásticamente como para que su pendiente llegue a ser -1 y aparezcan bifurcaciones ¹.

¹Si bien no aparece una bifurcación, esta forma de decaer hace que la sucesión converga

Pero ¿qué significan estas bifurcaciones?. Si consideramos a la ecuación de gap como un sistema dinámico, las bifurcaciones nos indican que la solución de la ecuación de gap no son estables, i.e. si m_s es la solución a la ecuación de gap, entonces, si hacemos una pequeña perturbación $m_s + \epsilon$, el sistema tenderá a alejarse de m_s u orbitará alrededor de este valor. Hay que tener cuidado con la interpretación de la gráfica de puntos fijos más allá del régimen estable, debido a que los puntos que aparecen en la gráfica, son los que corresponden a un valor de la sucesión M_n , y si esta converge, podemos hablar de la solución. En términos físicos, la masa generada se vuelve inestable cuando pasamos a la región de bifurcaciones en la gráfica de puntos fijos, lo cual se puede deber a que estamos en un rango de parámetros en el cual los esquemas de regularización de Pauli-Villars y tiempo propio dejan de ser validos ya que producen inestabilidades en las soluciones a la ecuación de gap. Por otro lado, si consideramos lo que encontramos en el Capítulo 3, aún cuando agregamos un campo magnético al vacío, el cual ayuda a que el condensado se forme y estabiliza el medio, nos topamos con el mismo tipo de dinámica caótica. Esto nos inclina a pensar que la explicación más factible para estos comportamientos caóticos es que estamos fuera del rango de parámetros donde no son validos los esquemas de regularización de Pauli-Villars y tiempo propio. Aunque en el caso magnético y térmico se debe ser cauteloso, debido a que sólo consideramos el nivel más bajo de Landau y cabe la posibilidad de que los otros niveles estabilicen al sistema y supriman la parte caótica. Aún así, esto no explica el comportamiento en el caso del vacío.

Una cosa que se puede notar es que los métodos de regularización de Pauli-Villars y de tiempo propio son invariantes ante traslaciones, a diferencia de los métodos de regularización por corte en el 3-momento y 4-momento. Suponemos, entonces, que esta invariancia traslacional es la responsable de las inestabilidades encontradas en las soluciones a la ecuación de gap, y lo que es más, todos los métodos de regularización que son invariantes ante traslaciones generan inestabilidades en las soluciones de la ecuación de gap.

Por otro lado cabe mencionar, que en la literatura no hay mucha información disponible acerca de la dinámica de las soluciones a la ecuación de gap, esto se debe principalmente, a que el método tradicional para obtener predicciones de la ecuación de gap se basa en hacer un ajuste de los parámetros G , Λ y $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ usando la masa del pión y su constante de decaimiento [KKI15],

$$m_\pi = 135 \text{ MeV}, \quad (\text{D.1})$$

$$f_\pi = 94 \text{ MeV}. \quad (\text{D.2})$$

Tomando algunos valores ajustados en [KKI15] para el parámetro de regularización Λ , Tabla D.1, y regresando a las versiones originales de la ecuación de gap Ec. (A.9), (A.14), (A.22) y (A.28), obtenemos las siguientes gráficas de puntos fijos Fig. D.3,

lentamente.

Fig. D.4, Fig. D.5 y Fig. D.6. Podemos observar, que las predicciones obtenidas por nuestro método, concuerdan con los ajustes obtenidos por [KKI15] para un valor fijo del parámetro de regularización.

Regularización	$\Lambda(\text{MeV})$	$G \cdot 10^{-6} (\text{MeV}^{-2})$	$m^* (\text{MeV})$
3D	942	2.00	220
4D	1397	1.80	198
PV	1420	1.77	195
TP	1464	1.61	178

Cuadro D.1.: Se muestran algunos de los valores ajustados por [KKI15] para Λ , G . m^* es la masa dinámica que obtuvieron utilizando estos valores.

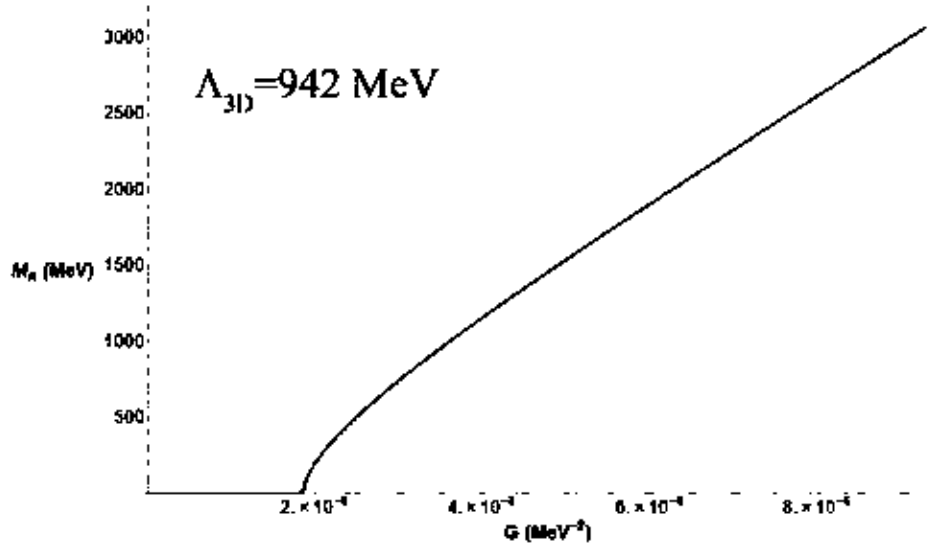


Figura D.3.: Gráfica de puntos fijos para uno de los valores sugeridos por [KKI15]. La predicción dada por el método de iteraciones, $m \sim 220 \text{ MeV}$ para $G = 2.00 \times 10^{-6} \text{ MeV}^{-2}$, concuerda con los valores obtenidos por [KKI15] de $m^* = 220 \text{ MeV}$.

Por otro lado, en el trabajo [ADH⁺16], para entender el fenómeno de catalisis magnética inversa, se buscó la manera en la que el acoplamiento depende del campo y la temperatura fijando al comportamiento del condensado dictado por lattice QCD. Dicho trabajo, en el cual se utilizó el esquema de regularización de tiempo propio, esboza valores del acoplamiento y el corte del modelo NJL donde, en principio, no es posible definir una masa de los quarks y se opta por una masa promedio. En nuestro caso, adoptando este procedimiento, vemos que la curva del promedio asemeja a una continuación de la rama estable como se muestra en la Fig. D.7.

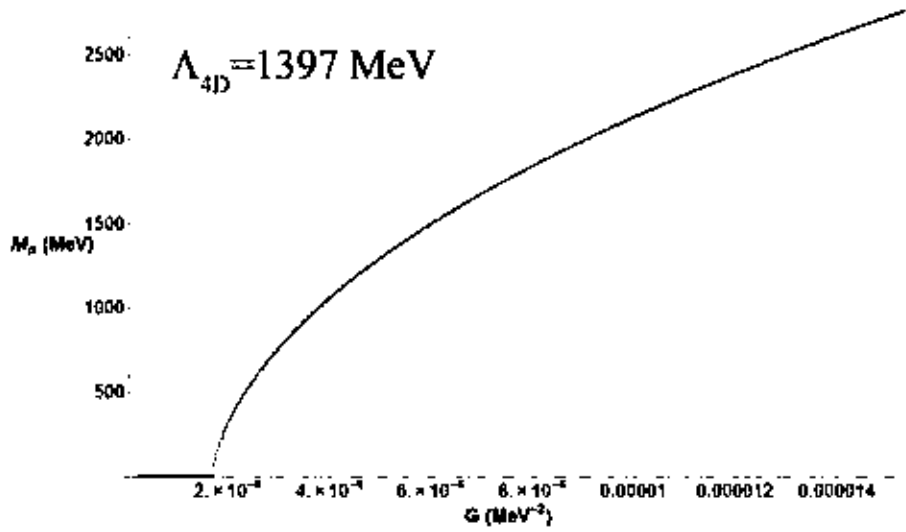


Figura D.4.: Gráfica de puntos fijos para uno de los valores sugeridos por [KKI15]. La predicción dada por el método de iteraciones, $m \sim 200$ MeV para $G = 1.80 \times 10^{-6} \text{ MeV}^{-2}$, concuerda con los valores obtenidos por [KKI15] de $m^* = 198$ MeV.

Ahora, si recordamos la segunda interpretación que se le dio a las iteraciones, en donde la masa está dada por el límite de una sucesión infinita de iteraciones (B.20), entonces, que la sucesión no converga, nos dice que apartir de ese punto no hay una masa definida para el sistema como en la rama estable. Este segundo caso es más radical, ya que sabemos que la solución existe aunque la sucesión no converge, por lo que este método iterativo no es siempre confiable para obtener la solución a la ecuación de gap.

Como mencionamos, no existe mucha literatura acerca de la dinámica de las soluciones a la ecuación de gap. Es por eso que un siguiente paso es el cálculo de la ecuación de gap con un medio magnetizado pero utilizando el propagador completo. Otra cosa que hay que esperar en un futuro, son los resultados de lattice, que hasta hoy no tienen mucha información acerca de las soluciones para una constante de acoplamiento grande $G \sim 6 \times 10^{-6} \text{ MeV}^{-2}$ o campos magnéticos extremos $B \approx 1 \text{ GeV}^2$.

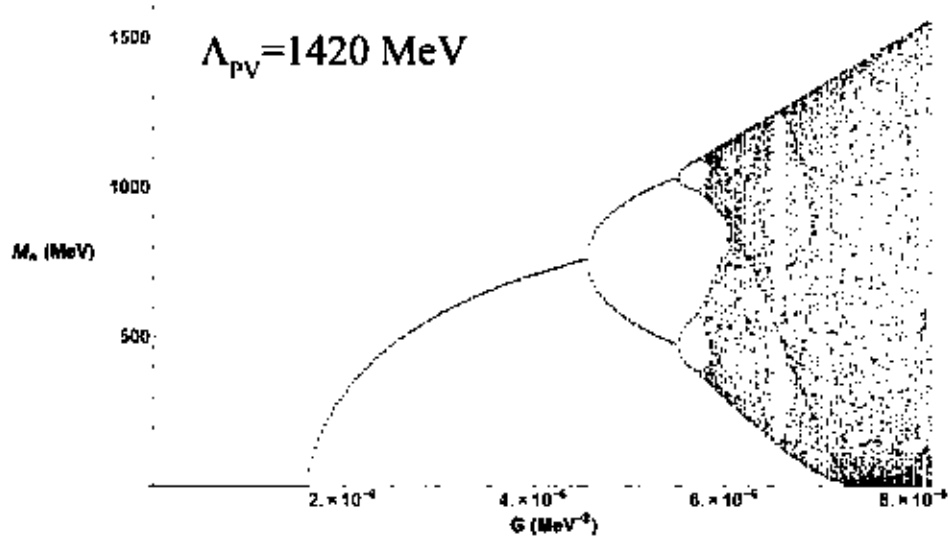


Figura D.5.: Gráfica de puntos fijos para uno de los valores sugeridos por [KKI15]. La predicción dada por el método de iteraciones, $m \sim 200$ MeV para $G = 1.77 \times 10^{-6} \text{ MeV}^{-2}$, concuerda con los valores obtenidos por [KKI15] de $m^* = 195$ MeV.

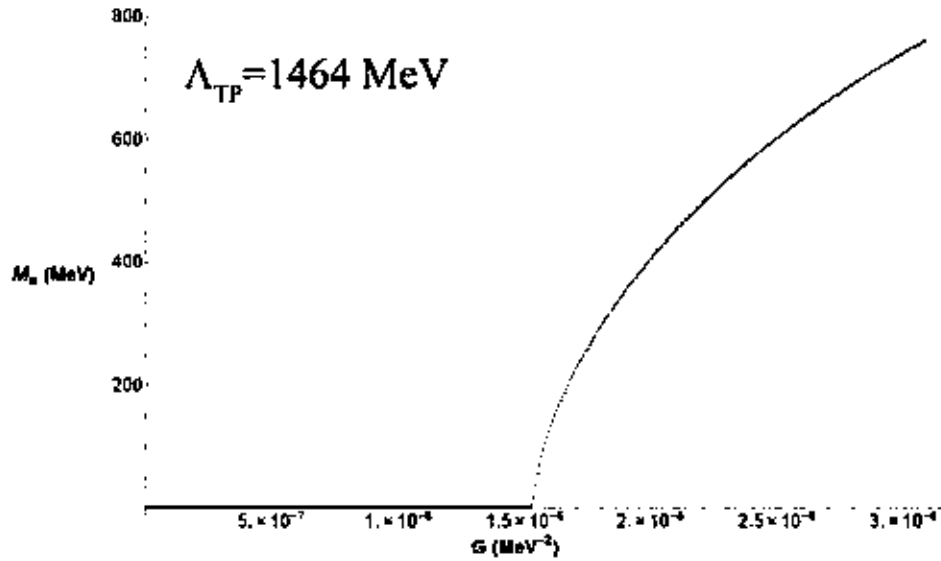


Figura D.6.: Gráfica de puntos fijos para uno de los valores sugeridos por [KKI15]. La predicción dada por el método de iteraciones, $m \sim 180$ MeV para $G = 1.61 \times 10^{-6} \text{ MeV}^{-2}$, concuerda con los valores obtenidos por [KKI15] de $m^* = 178$ MeV.

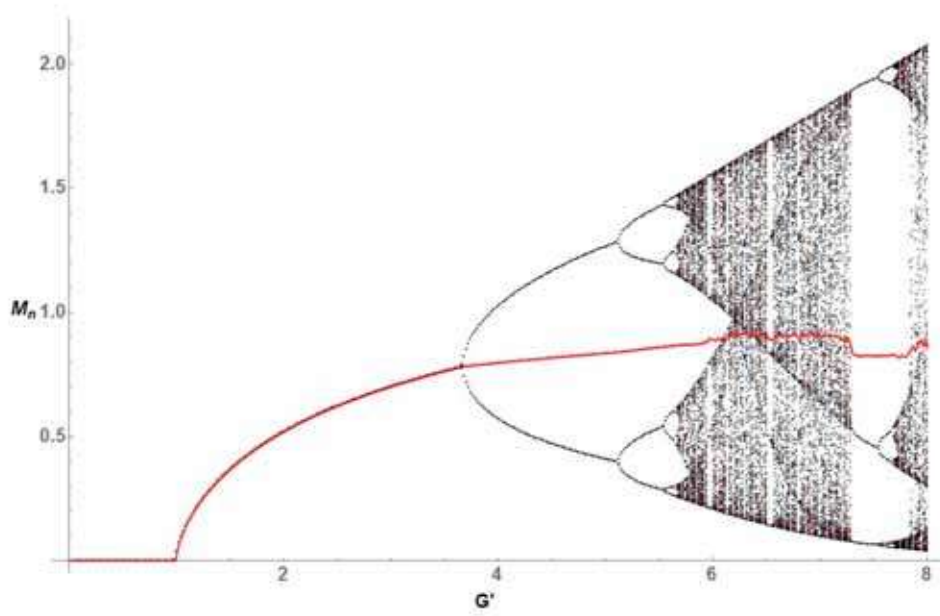


Figura D.7.: Comparación de la curva de promedios (rojo, línea continua), con la gráfica de puntos fijos obtenida por iteraciones (negro) para regularización con tiempo propio.

A. Apéndice

Método de Schwinger para el cálculo de propagadores

En este apéndice, calcularemos el propagador de un fermión en un campo magnético utilizando el método de Schwinger [Sch51] para después escribirlo en términos de niveles de Landau [CHK⁺00].

La función de Green de una partícula de Dirac en presencia de un campo externo $A(x)$ satisface la ecuación:

$$[\gamma^\mu (-i\partial_\mu - eA_\mu(x)) + m] G(x, x') = \delta^4(x - x'). \quad (\text{A.1})$$

Es útil identificar $G(x, x')$ como el elemento de matriz de un operador G , esto es

$$G(x, x') = \langle x' | G | x \rangle. \quad (\text{A.2})$$

Entonces, las ecuaciones diferenciales para la función de Green, se consideran como un elemento de la matriz de la ecuación de operadores

$$(\gamma^\mu \Pi_\mu + m) G = 1, \quad (\text{A.3})$$

donde

$$\Pi_\mu = p_\mu - eA_\mu. \quad (\text{A.4})$$

La ecuación anterior se puede resolver simbólicamente escribiendo

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{\not{I} + m} = i \int_0^\infty ds e^{-(\not{I} + m)s} \\ &= (-\not{I} + m) i \int_0^\infty ds e^{-i(m^2 - \not{I}^2)s} \\ &= i \int_0^\infty ds e^{-i(m^2 - \not{I}^2)s} (-\not{I} + m). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Esta representación integral para G , implica

$$G(x, x') = i \int_0^\infty ds e^{-im^2 s} \langle x' | (-\not{H} + m) U(s) | x \rangle, \quad (\text{A.6})$$

donde podemos definir el operador de “evolución” en tiempo propio $U(s)$

$$U(s) = e^{-iHs}, \quad (\text{A.7})$$

con

$$\hat{H} = -(\hat{p}^\mu - eA^\mu(\hat{x}))^2 - \frac{e}{2} F_{\mu\nu}(\hat{x}) \sigma^{\mu\nu}. \quad (\text{A.8})$$

Aquí, $F_{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético y $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$.

Ahora podemos escribir G como

$$G(x, x') = i \int_0^\infty ds e^{-im^2 s} \left[-\langle x'(0) | \not{H}(s) | x(s) \rangle + m \langle x'(0) | x(s) \rangle \right]. \quad (\text{A.9})$$

Como podemos ver, la construcción de la función de Green, depende de la evaluación del elemento de matriz

$$\langle x' | U(s) | x \rangle = \langle x'(0) | x(s) \rangle \quad (\text{A.10})$$

y de la condición de frontera

$$\langle x'(0) | x(s) \rangle \rightarrow \delta^4(x - x'), \quad (\text{A.11})$$

para $s \rightarrow 0$.

Queremos escribir el hamiltoniano $\hat{H} = -(\hat{p}^\mu - eA^\mu(\hat{x}))^2 - \frac{e}{2} F_{\mu\nu}(\hat{x}) \sigma^{\mu\nu}$ en términos de los operadores de posición para poder aplicarlos sobre los estados de posición. Para esto, consideremos lo siguiente:

Estados como $|x\rangle$ son eigenestados de un operador $\hat{x}^\mu$ en el espacio de Hilbert. Los operadores $\hat{x}^\mu$, son operadores en la representación de Schrödinger. Estos se relacionan con la representación de Heisenberg con la transformación

$$\hat{x}^\mu = e^{-i\hat{H}s} \hat{x} e^{i\hat{H}s}. \quad (\text{A.12})$$

Ahora, si usamos la definición

$$|x(s)\rangle = e^{-i\hat{H}s} |x(0)\rangle, \quad (\text{A.13})$$

y si derivamos la amplitud de transición $\langle x'(0)|x(s)\rangle$, se tiene que

$$i\partial_s \langle x'(0)|x(s)\rangle = i\partial_s \langle x'| e^{-i\hat{H}s} |x\rangle = \langle x'| e^{-i\hat{H}s} \hat{H} |x\rangle = \langle x'(0)| \hat{H} |x(s)\rangle. \quad (\text{A.14})$$

Por lo tanto, si podemos escribir el hamiltoniano $\hat{H}$ en términos de los operadores de posición $\hat{x}(s)$ y $\hat{x}(0)$, podremos transformar la ecuación (A.14) en una ecuación diferencial ordinaria cuya solución nos de $\langle x'(0)|x(s)\rangle$.

En la mecánica cuántica, los operadores de posición y momento satisfacen $[\hat{x}, \hat{p}] = i$. En el caso relativista, esta relación se generaliza a $[\hat{x}^\mu(s), \hat{p}^\nu(s)] = -ig^{\mu\nu}$, con la conmutación aplicada al mismo tiempo propio s . Para este cálculo necesitaremos las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\hat{x}^\mu(s), \hat{\Pi}^\mu(s)] &= \hat{x}^\mu(s)\hat{p}^\nu(s) - e\hat{x}^\mu(s)A^\nu(\hat{x}) - \hat{p}^\nu(s)\hat{x}^\mu(s) + eA^\nu(\hat{x})\hat{x}^\mu(s) \\ &= [\hat{x}^\mu(s), \hat{p}^\nu(s)] + e(A^\nu(\hat{x})\hat{x}^\mu(s) - \hat{x}^\mu(s)A^\nu(\hat{x})) \\ &= -ig^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

y

$$\begin{aligned} [\hat{\Pi}^\mu(s), \hat{\Pi}^\nu(s)] &= e(\hat{p}^\nu A^\mu - A^\mu \hat{p}^\nu) + e(A^\nu \hat{p}^\mu - \hat{p}^\mu A^\nu) \\ &= e(-i\partial_\nu A^\mu - A^\mu(-i\partial_\nu)) + e(A^\nu(-i\partial_\mu) - (-i\partial_\mu)A^\nu) \\ &= e(-i\partial_\nu A^\mu + i\partial_\mu A^\nu) + e(iA^\mu \partial_\nu - iA^\nu \partial_\mu) \\ &= ieF_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Con esto, podemos escribir el hamiltoniano como

$$\hat{H}(s) = -\Pi^2 = -(\Pi_\mu(s)\Pi^\mu(s) - \frac{e}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}). \quad (\text{A.17})$$

Ahora, usaremos la siguiente notación matricial:

$$\begin{aligned}
 x^\mu &\rightarrow x, \\
 \Pi^\mu &\rightarrow \Pi, \\
 F^{\mu\nu} &\rightarrow F, \\
 \sigma^{\mu\nu} &\rightarrow \sigma, \\
 tr(\sigma F) &= -\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu},
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

por lo que ahora nuestras operaciones serán del tipo matriz vector.

En esta nueva notación, la evolución del sistema respecto al tiempo propio s está dada por la ecuación de Heisenberg

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Pi_\mu(s)}{ds} &= -i [\Pi_\mu, \hat{H}] \\
 &= -e(F_{\mu\nu}\Pi^\nu + \Pi^\nu F_{\mu\nu}) + i(1/2e\sigma_{\lambda s}F^{\lambda s}\Pi_\mu - 1/2e\Pi_\mu\sigma_{\lambda s}F^{\lambda s}).
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

Usando que $[\Pi_\nu, F^{\mu\nu}] = -i\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$, tenemos

$$\begin{aligned}
 -i(1/2e\sigma_{\lambda s}F^{\lambda s}\Pi_\mu - 1/2e\Pi_\mu\sigma_{\lambda s}F^{\lambda s}) &= -i\frac{1}{2}e\sigma_{\lambda s}(F^{\lambda s}\Pi_\mu + i\frac{\partial F_{\lambda s}}{\partial x_\mu} - F^{\lambda s}\Pi_\mu) \\
 &= \frac{1}{2}e\sigma_{\lambda s}\frac{\partial F_{\lambda s}}{\partial x_\mu},
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

y de igual manera,

$$-e(F_{\mu\nu}\Pi^\nu + \Pi^\nu F_{\mu\nu}) = -e(F_{\mu\nu}\Pi^\nu - i\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + F_{\mu\nu}\Pi^\nu) + \frac{1}{2}e\sigma_{\lambda s}\frac{\partial F_{\lambda s}}{\partial x_\mu}. \tag{A.21}$$

Así,

$$\frac{d\Pi_\mu(s)}{ds} = -i [\Pi_\mu, \hat{H}] = 2eF_{\mu\nu}\Pi^\nu + \frac{1}{2}e\sigma_{\lambda s}\frac{\partial F_{\lambda s}}{\partial x_\mu} + ie\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}. \tag{A.22}$$

Si $F_{\mu\nu}$ es constante, se tiene

$$\frac{d\Pi_\mu(s)}{ds} = -i [\Pi_\mu, \hat{H}] = -2eF_{\mu\nu}\Pi^\nu. \quad (\text{A.23})$$

Esta última es sólo una ecuación diferencial, cuya solución es $\Pi(s) = e^{-2esF}\Pi(0)$.

De igual manera, la ecuación de evolución para x^μ es

$$\begin{aligned} \frac{dx^\nu}{ds} &= -i [x^\nu, \hat{H}] \\ &= i \left(-\Pi_\mu \Pi^\mu x^\nu + \frac{e}{2} F_{\mu\lambda} \sigma_{\mu\lambda} x^\nu + x^\nu \Pi_\mu \Pi^\mu - \frac{e}{2} x^\nu F_{\mu\lambda} \sigma_{\mu\lambda} \right) \\ &= i \{ \Pi_\mu (x^\nu \Pi^\mu + i g^{\mu\nu}) + (-i g^{\mu\nu} + \Pi^\mu x^\nu) \Pi^\mu \} \\ &= i (-\Pi_\mu i g^{\mu\nu} - i g^{\mu\nu} \Pi^\mu) = 2\Pi_\mu g^{\mu\nu} = 2\Pi^\nu. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

La ecuación anterior tiene como solución

$$x(s) = x(0) + 2e^{-esF} \frac{\sin(esF)}{esF} \Pi(0). \quad (\text{A.25})$$

Con esta última ecuación, podemos escribir $\Pi(s)$ y $\Pi(0)$ en términos de $x(s)$ y $x(0)$, con lo que nos queda

$$\Pi(s) = e^{-esF} \frac{eF}{2 \sinh(esF)} [x(s) - x(0)], \quad (\text{A.26})$$

$$\Pi(0) = e^{esF} \frac{eF}{2 \sinh(esF)} [x(s) - x(0)]. \quad (\text{A.27})$$

Así, el hamiltoniano se vuelve

$$\hat{H} = -\Pi(s)^T \Pi(s) + \frac{e}{2} \text{tr}(\sigma F) = -[x(s) - x(0)] K [x(s) - x(0)] + \frac{e}{2} \text{tr}(\sigma F), \quad (\text{A.28})$$

donde

$$K = \frac{e^2 F^2}{4 \sinh^2(esF)}. \quad (\text{A.29})$$

En esta última expresión, notemos que el término exponencial de $\Pi(s)$ se elimina, ya que cuando se obtiene $\Pi(s)^T$, sale un signo "−" en la exponencial.

Para evaluar $\langle x' | e^{-i\hat{H}s} \hat{H} | x \rangle$ en (A.14) usando $\hat{H}$ encontrado, es útil reescribir $\hat{H}$ tal que $x(s)$ este a la izquierda y $x(0)$ a la derecha de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Pi(s)^T \Pi(s) &= x(s)Kx(s) - x(s)Kx(0) - x(0)Kx(s) + x(0)Kx(0) \\ &= x(s)Kx(s) - x(s)Kx(0) - K(x(s)x(0) - [x(s), x(0)]) + x(0)Kx(0) \\ &= x(s)Kx(s) - 2x(s)Kx(0) + K[x(s), x(0)] + x(0)Kx(0), \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

con

$$\begin{aligned} K[x(s), x(0)] &= K_{\mu\nu}[x(s), x(0)] \\ &= -tr \left[\frac{e^2 F^2}{2 \sinh^2(esF)} \left(\frac{2ie^{esF} \sinh(esF)}{eF} \right) \right] \\ &= -tr \left[\frac{eFi}{2 \sinh(esF)} e^{esF} \right] \\ &= \frac{i}{2} tr [eF \coth(esF) + eF] \\ &= \frac{i}{2} tr [eF \coth(esF)], \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

donde para calcular el conmutador entre $x(s)$ y $x(0)$ utilizamos A.25 y A.16.

Entonces, tenemos

$$\hat{H} = -x(s)Kx(s) + 2x(s)Kx(0) - x(0)Kx(0) \quad (\text{A.32})$$

$$- \frac{i}{2} tr [eF \coth(esF)] + \frac{e}{2} tr(\sigma F). \quad (\text{A.33})$$

En esta forma, $\hat{H}$ puede ser evaluado en los eigenestados de posición. Así, la ecuación (A.14) se convierte en:

$$i\partial_s \langle x'(0)|x(s)\rangle = \{-(x-x')K(x-x') - \frac{i}{2}tr[eF \coth(esF)] + \frac{e}{2}tr(\sigma F)\} \langle x'(0)|x(s)\rangle \quad (\text{A.34})$$

Esta última es sólo una ecuación diferencial, cuya solución es:

$$\begin{aligned} \langle x'(0)|x(s)\rangle &= C(x, x') \cdot s^{-2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}tr \ln[(esF)^{-1} \sinh(esF)]\right\} \\ &\cdot \exp\left\{-\frac{i}{4}(x-x')eF \coth(esF)(x-x')\right\} \\ &\cdot \exp\left\{-\frac{i}{2}es \operatorname{tr}(\sigma F)\right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Para encontrar la constante $C(x, x')$ notamos que si sacamos los valores de expectación de $\Pi(s)$ y $\Pi(0)$, tenemos

$$\langle x'(0)|\Pi(s)|x(s)\rangle = \frac{1}{2} \sinh^{-1}(esF)e^{-esF}eF(x-x') \langle x'(0)|x(s)\rangle \quad (\text{A.36})$$

y

$$\langle x'(0)|\Pi(0)|x(s)\rangle = \frac{1}{2} \sinh^{-1}(esF)e^{esF}eF(x-x') \langle x'(0)|x(s)\rangle. \quad (\text{A.37})$$

Por otro lado,

$$\langle x'(0)|\Pi_\mu(s)|x(s)\rangle = \left(i\partial_\mu^x + eA_\mu(x)\right) \langle x'(0)|x(s)\rangle, \quad (\text{A.38})$$

$$\langle x'(0)|\Pi_\mu(0)|x(s)\rangle = \left(-i\partial_\mu^{x'} + eA_\mu(x')\right) \langle x'(0)|x(s)\rangle. \quad (\text{A.39})$$

Igualando (A.36) con (A.38) y (A.37) con (A.39) y sustituyendo la expresión que se encontró para $\langle x'(0)|x(s)\rangle$, se tienen las siguientes ecuaciones diferenciales para $C(x, x')$

$$\left[i\partial_\mu^x + eA_\mu - 1/2eF(x - x') \right] C(x, x') = 0, \quad (\text{A.40})$$

$$\left[-i\partial_\mu^{x'} + eA_\mu(x') + 1/2eF(x - x') \right] C(x, x') = 0. \quad (\text{A.41})$$

La solución a la ecuación (A.40), tiene la forma

$$C(x, x') = C \exp \left[ie \int_x^{x'} (A_\mu(z) + 1/2F_{\mu\nu}(z - x')^\nu) dz \right]. \quad (\text{A.42})$$

Finalmente, para encontrar la constante C , demandamos que $\langle x'(0)|x(s)\rangle \rightarrow \delta^4(x - x')$ cuando $s \rightarrow 0$, con lo que se tiene

$$C = -i(4\pi)^{-2}. \quad (\text{A.43})$$

Usando (A.35), (A.36), (A.42) y (A.43) podemos escribir la función de Green como:

$$\begin{aligned} G(x, x') &= i \int_0^\infty ds e^{-im^2 s} \left[\gamma \cdot \langle x'(0) | \not{M}(s) | x(s) \rangle + m \langle x'(0) | x(s) \rangle \right] \\ &= -(4\pi)^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \left[m + 1/2 \gamma \cdot \sinh^{-1}(esF) e^{-esF} eF(x - x') \right] \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -im^2 s - \frac{i}{2} es \operatorname{tr}(\sigma F) \right\} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln \left[(esF)^{-1} \sinh^{-1}(esF) \right] - \frac{i}{4} (x - x') eF \coth(esF) (x - x') \right\} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ ie \int_x^{x'} dz [A_\mu(z) - 1/2F_{\mu\nu}(z - x')^\nu] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Notemos que el factor que contiene la integral se anula cuando ésta se lleva a cabo en una línea recta. Además, si el campo magnético es homogéneo tal que $F_{12} = -F_{21} = B$, se puede mostrar que:

$$\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2F_{12}\sigma_3 = 2F_{12} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.45})$$

de forma tal que

$$\exp\left[-\frac{1}{4}\text{tr} \ln \left[(esF)^{-1} \sinh(esF)\right]\right] = \frac{eBs}{\sin(eBs)}, \quad (\text{A.46})$$

$$\gamma \cdot (eF \coth(esF) - eFs) = (\gamma \cdot x)_{\parallel} - \frac{eBs}{\sin(eBs)} (\gamma \cdot x)_{\perp} e^{iB\sigma_3}, \quad (\text{A.47})$$

$$x(esF \coth(esF))x = x_{\parallel}^2 - eBs \cot(eBs) x_{\perp}^2, \quad (\text{A.48})$$

con $(x \cdot y)_{\parallel} = x^0 y^0 - x^3 y^3$ y $(x \cdot y)_{\perp} = x^1 y^1 + x^2 y^2$ para dos cuadvectores cualesquiera. Usando las expresiones (A.46), (A.47) y (A.48) se puede escribir la función de Green como:

$$\begin{aligned} G(x) = & -(4\pi)^{-2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^2} \frac{eBs}{\sin(eBs)} \exp(-im^2 s + ieBs\sigma_3) \\ & \cdot \exp\left\{-\frac{i}{4s}(x_{\parallel}^2 - eBs \cot(eBs) x_{\perp}^2)\right\} \\ & \cdot \left[m + \frac{1}{2s} \left(\gamma \cdot x_{\parallel} - \frac{eBs}{\sin(eBs)} \exp(-ieBs\sigma_3) \gamma \cdot x_{\perp}\right)\right]. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Para nuestro fin, es más conveniente reescribir (A.49) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} G(p) = & \int d^4 x G(x) \\ = & -i \int_0^{\infty} \frac{ds}{\cos(eBs)} \exp\left[-is \left(m^2 - p_{\parallel}^2 + \frac{\tan(eBs)}{eBs} p_{\perp}^2\right)\right] \\ & \cdot \left[\exp(ieBs\sigma_3)(m + \gamma \cdot p_{\parallel}) - \frac{\gamma \cdot p_{\perp}}{\cos(eBs)}\right] \\ = & -i \int_0^{\infty} \frac{ds}{\cos(eBs)} \exp\left[-is \left(m^2 - p_{\parallel}^2 + \frac{\tan(eBs)}{eBs} p_{\perp}^2\right)\right] \\ & \cdot \left[\cos(eBs) + \gamma_1 \gamma_2 \sin(eBs)\right] (m + \gamma \cdot p_{\parallel}) - \frac{\gamma \cdot p_{\perp}}{\cos(eBs)}. \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Esta última forma se obtiene usando las identidades

$$e^{iz\sigma_3} = \cos(z) I + i \sin(z) \sigma_3, \quad (\text{A.51})$$

$$\sigma_3 = i\gamma_1 \gamma_2. \quad (\text{A.52})$$

Si definimos la variable $v = eBs$, entonces (A.50) puede ser reescrita como

$$G(p) = -i \int_0^{\infty} \frac{dv}{eBs} \exp(-iv\rho) \quad (\text{A.53})$$

$$\cdot \left[(m + \gamma \cdot p_{\parallel})I_1 + \gamma_1 \gamma_2 (m + \gamma \cdot p_{\parallel})I_2 - (\gamma \cdot p_{\perp})I_3\right], \quad (\text{A.54})$$

donde

$$I_1 = e^{-i\alpha \tan v}, \quad (\text{A.55})$$

$$I_2 = e^{-i\alpha \tan v} \tan v, \quad (\text{A.56})$$

$$I_3 = e^{-i\alpha \tan v} \frac{1}{\cos^2 v}, \quad (\text{A.57})$$

y

$$\rho = \frac{(m^2 - p_{\parallel}^2)}{eB}, \quad (\text{A.58})$$

$$\alpha = \frac{p_{\perp}^2}{eB}. \quad (\text{A.59})$$

Ahora, ya que $I_j(v) = I_j(v + n\pi)$ para $j = 1, 2, 3$ se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dv e^{-iv\rho} I_j &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\rho n\pi} \int_0^{\pi} dv e^{-i\rho v} I_j, \\ &= \frac{1}{1 - e^{-i\rho\pi}} \int_0^{\pi} dv e^{-i\rho v} I_j, \\ &\equiv \frac{1}{1 - e^{-i\rho\pi}} A_j. \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

De estas tres integrales, sólo se tiene que evaluar A_1 , esto ya que se pueden conseguir A_2 y A_3 con las siguientes relaciones

$$A_2 = i \frac{\partial}{\partial \alpha} A_1, \quad (\text{A.61})$$

$$A_3 = \frac{-i}{\alpha} (1 - e^{-i\rho\pi}) - \frac{\rho}{\alpha} A_1. \quad (\text{A.62})$$

(A.61) se obtiene de manera directa, (A.62) se obtiene de integrar por partes A_1 .

Para evaluar A_1 usaremos la relación

$$\exp[-i\alpha \tan v] = \exp\left[\alpha \frac{-e^{-2iv} + 1}{-e^{-2iv} - 1}\right], \quad (\text{A.63})$$

y consideremos la función generatriz de los polinomios de Laguerre

$$\frac{\exp\left[\frac{-xZ}{1-Z}\right]}{1-Z} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) Z^n, \quad (\text{A.64})$$

para $|Z| \leq 1$. Multiplicando ambos lados de (A.64) por Z y restándosela a (A.64) se tiene

$$\exp\left[\frac{-xZ}{1-Z}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (L_n(x) - L_{n-1}(x)) Z^n, \quad (\text{A.65})$$

donde se fija $L_{-1}(x) = 0$. Ahora, usando la identidad

$$\exp\left[\frac{x}{2} \frac{Z+1}{Z-1}\right] = \exp\left[-\frac{xZ}{1-Z}\right] \cdot \exp\left[-\frac{x}{2}\right], \quad (\text{A.66})$$

y haciendo las identificaciones $Z = -e^{-2iv}$, $x = 2\alpha$, y combinando (A.60), (A.63) y (A.65) se obtiene

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^\pi dv e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (L_n(2\alpha) - L_{n-1}(2\alpha)) e^{-2in v} (-1)^n e^{-i\rho v}, \\ &= e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} C_n(2\alpha) (-1)^n \int_0^\pi \exp[-i(\rho + 2n)v] dv, \\ &= -ie^\alpha (1 - e^{-i\rho\pi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n C_n(2\alpha)}{\rho + 2n}. \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Con las expresiones (A.53), (A.61), (A.62) y (A.67), se puede reescribir el propagador $iG(p)$ de la siguiente forma

$$iG(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-id_n(\alpha)D + d'_n(\alpha)D}{p_L^2 + 2neB} + i \frac{\gamma \cdot p_\perp}{p_\perp^2}, \quad (\text{A.68})$$

donde

$$d_n(\alpha) = (-1)^n e^{-\alpha} L_n(2\alpha), \quad (\text{A.69})$$

$$d'_n = \partial d_n / \partial \alpha, \quad p_L^2 = m^2 - p_\parallel^2, \quad (\text{A.70})$$

$$D = (m + \gamma \cdot p_\parallel) + \gamma \cdot p_\perp \frac{m^2 - p_\parallel^2}{p_\perp^2}, \quad (\text{A.71})$$

$$\overline{D} = \gamma_1 \gamma_2 (m + \gamma \cdot p_\parallel). \quad (\text{A.72})$$

Bibliografía

- [ADH⁺16] Alejandro Ayala, C. A. Dominguez, L. A. Hernández, M. Loewe, Alfredo Raya, J. C. Rojas, and C. Villavicencio. *Thermomagnetic properties of the strong coupling in the local Nambu–Jona-Lasinio model*. *Phys. Rev. D*, 94: 054019, Sep 2016, <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.054019>.
- [AOS14] Ken-Ichi Aoki, Shinnosuke Onai, and Daisuke Sato. *Analysis of Spontaneous Mass Generation by Iterative Method in the Nambu–Jona-Lasinio Model and Gauge Theories*. In *Proceedings, KMI-GCOE Workshop on Strong Coupling Gauge Theories in the LHC Perspective (SCGT 12): Nagoya, Japan, December 4-7, 2012*, pages 439–442, 2014, <https://inspirehep.net/record/1227827/files/arXiv:1304.2848.pdf>.
- [BCMB15] Marco A. Bedolla, J. J. Cobos-Martínez, and Adnan Bashir. *Charmonia in a contact interaction*. *Phys. Rev. D*, 92: 054031, Sep 2015, <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.054031>.
- [Bub05] Michael Buballa. *NJL model analysis of quark matter at large density*. *Phys. Rept.*, 407: 205–376, 2005.
- [CHK⁺00] Tzuu-Kang Chyi, Chien-Wen Hwang, W. F. Kao, Guey-Lin Lin, Kin-Wang Ng, and Jie-Jun Tseng. *The weak field expansion for processes in a homogeneous background magnetic field*. *Phys. Rev.*, D62: 105014, 2000.
- [Das97] Ashok K. Das. *Finite Temperature Field Theory*. World Scientific, New York, 1997.
- [DL15] Jefferson King Dávalos and Héctor Méndez Lango. *Sistemas dinámicos discretos*. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, 2015.
- [Gut10] Gutiérrez-Guerrero, L. X. and Bashir, A. and Cloët, I. C. and Roberts, C. D. *Pion form factor from a contact interaction*. *Phys. Rev. C*, 81: 065202, Jun 2010, <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.81.065202>.
- [KG06] Joseph I. Kapusta and Charles Gale. *Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2 edition, 002 2006.

-
- [KKI15] H. Kohyama, D. Kimura, and T. Inagaki. *Regularization dependence on phase diagram in Nambu–Jona-Lasinio model*. *Nucl. Phys.*, B896: 682–715, 2015.
- [May76] R. M. May. *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. , 261: 459–467, June 1976.
- [NJL61a] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I*. *Phys. Rev.*, 122: 345–358, Apr 1961, <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.122.345>.
- [NJL61b] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II*. *Phys. Rev.*, 124: 246–254, Oct 1961, <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.246>.
- [RBGG⁺11] H. L. L. Roberts, A. Bashir, L. X. Gutiérrez-Guerrero, C. D. Roberts, and D. J. Wilson. *π and ρ mesons, and their diquark partners, from a contact interaction*. *Phys. Rev. C*, 83: 065206, Jun 2011, <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.83.065206>.
- [Sch51] Julian Schwinger. *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization*. *Phys. Rev.*, 82: 664–679, Jun 1951, <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.82.664>.
- [Sch13] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. 2013.
- [Sho13] Igor A. Shovkovy. *Magnetic Catalysis: A Review*. *Lect. Notes Phys.*, 871: 13–49, 2013.
- [WW27] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, fourth edition, 1927. Reprinted 1990.