

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE  
HIDALGO  
INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS



TESIS  
para obtener el título de  
MAESTRO EN CIENCIAS EN EL AREA DE FÍSICA  
con el nombre:  
**ANÁLISIS PERTURBATIVO DEL VÉRTICE DE TRES GLUONES**

Presenta:  
**Carlos Isaac García Gutiérrez**

Director: **Dr. Adnan Bashir**

Morelia, Michoacán, a enero de 2018

---

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>5</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
<b>2. Conceptos Preliminares</b>	<b>10</b>
2.1. Cromodinámica Cuántica: una Teoría de Norma . . . . .	11
2.2. Reglas de Feynman en QCD . . . . .	18
2.3. Las ecuaciones de Schwinger-Dyson para vértice de tres gluones . . . . .	20
2.3.1. Diagramas para los lazos quark-gluón . . . . .	21
2.3.2. Diagramas para los lazos fantasma-gluón . . . . .	22
2.3.3. Diagrama del lazo de gluones . . . . .	23
2.3.4. Diagramas con el vértice de cuatro gluones . . . . .	25
2.4. La identidad de Ward-Slavnov-Taylor para el vértice de tres gluones . . . . .	26
2.4.1. Funciones auxiliares a la identidad WST . . . . .	28
2.4.2. Renormalización . . . . .	32
<b>3. El vértice de tres gluones</b>	<b>35</b>
3.1. Forma general del vértice de tres gluones . . . . .	36
3.2. Estructuras en el vértice de tres gluones . . . . .	38

---

3.3. Integraciones, funciones auxiliares en el vértice de tres gluones . . . . .	40
3.3.1. Integrales de dos puntos . . . . .	41
3.3.2. Integrales de tres puntos . . . . .	48
3.4. Funciones de estructura del vértice de tres gluones . . . . .	50
<b>4. El vértice de tres gluones en el límite simétrico</b>	<b>57</b>
4.1. Funciones de Estructura en el límite simétrico . . . . .	57
4.2. Renormalización . . . . .	62
<b>5. Resultados</b>	<b>65</b>
5.1. Funciones escalares del vértice en el límite simétrico . . . . .	65
<b>6. Conclusiones</b>	<b>77</b>

## **Resumen**

Este documento tiene objetivo analizar el límite simétrico de comportamiento en el vértice de tres gluones. En principio mostramos un marco teórico y los desarrollos necesarios para construir al vértice. Empleamos un modelo de quarks no-masivos y un truncamiento de las SDE a un lazo. Consideramos los ocho diagramas de partículas irreducibles que no tienen piernas externas. Como método de solución se desarrollan propuestas para las estructuras de Lorentz, así como argumentos de simetría. Los estudios en las funciones del vértice son verificados al realizar comparaciones con los resultados disponibles en la literatura.

## **Abstract**

This document aims to analyze the symmetric limit of behavior at the vertex of three gluons. In principle we show a theoretical framework and the necessary developments to build the vertex. We use a model of non-massive quarks and a truncation of SDEs to a loop. We consider the eight diagrams of irreducible particles that do not have external legs. As a solution method, proposals for Lorentz structures are developed, as well as symmetry arguments. The studies in the functions of the vertex are verified when making comparisons with the results available in the literature.

**Palabras clave:** vértice, límite simétrico, interacción de tres gluones, Schwinger-Dyson y teoría de campos cuánticos.

---

# Agradecimientos

La tesis esta dedicada a todas las personas que participaron de alguna forma en la elaboración de este documento o que fueron parte de la educación que he recibido. Quiero iniciar con la mención a mi asesor de tesis el DR. Adnan Bashir y los miembros de comité de titulación. Por último doy agradecimientos a todas las personas que hacen posible obtener el grado de Maestro en Ciencias, esto es, a los profesores, compañeros y amigos que han brindado su apoyo en los años que han pasado hasta el día de hoy en que he terminado este documento.

---

# Capítulo 1

## Introducción

Dentro del marco teórico de la Cromodinámica Cuántica (ó QCD de sus siglas en inglés), el vértice de tres gluones es el objeto que hace evidente las características no-abelianas de la interacción. Este vértice no solo contiene información sobre las auto-interacciones entre los gluones, sino que además puede ser el objeto clave en la comprensión del fenómeno del confinamiento del color. Este último argumento ha sido el motivo de estudio del vértice. También debe mencionarse la importancia que tiene este vértice en la física hadrónica, disciplina en la que es participe en cálculos de producción de jets en aceleradores de partículas, además de que es necesario para realizar desarrollos de orden superior en los otros vértices y propagadores.

Los estudios de límites cinemáticos en el vértice de tres gluones tienen como finalidad conocer el comportamiento de sus funciones de estructura con las masas de los campos de gluones. Los desarrollos del vértice por medio del formalismo SDE (Ecuaciones de Schwinger-Dyson de sus siglas en inglés) ha dado resultados en normas arbitrarias y co-variantes del objeto calculado en ciertas aproximaciones. Los métodos empleados en estos cálculos son principalmente la teoría de perturbaciones, la técnica pinch y lattice-QCD. W.

Celmaster y R. J Gonsalves [1] iniciaron los estudios del vértice presentando expresiones en normas covariantes para el límite simétrico. La siguiente contribución fue dada por J.S. Ball y T.-W. Chiu [2] que lograron obtener el caso general fuera de la capa de masa en la norma de Feynman. En los años posteriores se obtuvieron resultados diversos sobre la capa de masa, autores como Brandt y Frenkel [3] realizaron un estudio sobre las divergencias infra-rojas del vértice, mientras que autores como Nowak, Praszalowicz y Słomiński [4] lograron calcular las partes finitas del mismo trabajando con gluones bajo la norma de Feynman. En el año de 1996 Davydychev, Osland y Tarasov lograron dar expresiones del vértice de triple gluón a un lazo en dimensiones arbitrarias y norma arbitraria covariante. También presentan límites en la capa de masa y fuera de ella [5]. Este vértice aún es un tema activo; en años recientes se han realizado diversos estudios con Lattice. En la referencia[6] del año 2014, Eichmann, Williams, Alkofer y Vujanovic presentan un estudio de las SDE del vértice que muestra la presencia del zero-crossing en los componentes de la función de Green a nivel de árbol para una escala de 1 GeV. En el año 2016 el artículo [7], con autores Boucaud, De Soto, Rodríguez-Quintero y Zafeiropoulos reportan un estudio del vértice realizado para la teoría de Yang-Mills  $SU(3)$  en cuatro dimensiones. En este realizan desarrollos sobre las configuraciones cinemáticas simétricas y asimétricas. También destaca el estudio comparativo que presentan, ya que hace evidente el acuerdo que existe con los resultados obtenidos por medio del formalismo SDE.

Este documento tiene como objetivo presentar y analizar los resultados conocidos sobre las expresiones del límite simétrico en el vértice de triple gluón. Las herramientas de estudio son el formalismo SDE; los quarks son considerados no-masivos. Las SDE del vértice desarrolladas contienen los diagramas correspondientes a la suma de partículas irreducibles que no incluyen piernas externas. La solución que se presenta se construye a través de propuestas para las estructuras tensoriales, mientras que las funciones de estructura se determinan

con las integrales que provienen de los diagramas de lazos. Cada uno de los resultados está en un número de dimensiones arbitrario y norma arbitraria covariante.

En el segundo capítulo de este documento se muestran brevemente los aspectos básicos de la teoría tales como la construcción de la Lagrangiana de una teoría de norma no-Abeliana y las reglas de Feynman en QCD. Mostramos algunas generalidades sobre el grupo de Lie  $SU(3)$  de color, tales como la representación de sus generadores con las matrices de Gell-Mann y las constantes de estructura. También incluimos los ocho diagramas de lazo correspondientes a las SDE utilizadas en el desarrollo de vértice. Finalizando con la presentación de la identidad de Ward-Slavnov-Taylor, que resulta muy importante tanto en la construcción del vértice como en su interpretación física.

En el tercer capítulo se tiene como tema central la forma del vértice. Se inicia con un análisis breve sobre la simetría de Bose, que nos permite definir la estructura general del vértice. Se toman como definiciones los tensores y funciones escalares dados en [2], que serán las definiciones base para los resultados de esta tesis. También presentamos un breve desarrollo relativo a las integraciones de dos puntos. En el caso de integrales de tres puntos, nos hemos limitado a tomar los resultados obtenidos en [5]. Estos últimos temas tienen la finalidad de presentar las funciones auxiliares que se han definido para presentar las expresiones de las funciones de estructura del vértice.

En el cuarto capítulo nos enfocamos en presentar las funciones de estructura evaluadas en el límite simétrico. Sus expresiones se muestran en normas arbitrarias y covariantes. Resaltan los cambios que produce este límite, pues anula todas las contribuciones anti-simétricas en el vértice. Finalizamos este capítulo con una breve referencia al proceso de renormalización empleado.

En el quinto capítulo se tiene como finalidad observar el comportamiento de las funciones escalares del vértice con la masa de los gluones y la norma. Se clasifican las singularidades



y polos, que indican las funciones y estructuras dominantes en las regiones infrarroja (IR) y ultravioleta (UV).

En el sexto capítulo se presentarán las conclusiones de este trabajo de tesis. En este se resumen todos los temas desarrollados y se resaltan los principales resultados que se han reproducido, dando una referencia a sus autores.

---

## Capítulo 2

### Conceptos Preliminares

Las teorías de interacciones fundamentales tales como la electrodinámica Cuántica (QED), las interacciones débiles (QWD) y la Cromodinámica Cuántica (QCD) son teorías de norma. Reciben este nombre debido a que las interacciones entran en la Lagrangiana en acuerdo con el Principio de Norma. En teorías de Campos Cuánticos, la densidad Lagrangiana es un objeto fundamental del formalismo. Toda la información sobre la teoría se encuentra en los términos que la componen.

Las lagrangianas poseen dos partes principales. La primera consiste de todas las partículas libres, mientras que la segunda incluye las interacciones y términos de norma. Las lagrangianas se construyen con base a argumentos de simetría tales como la invariancia bajo transformaciones de Lorentz (Poncairé), transformaciones de norma y transformaciones discretas como conjugación de carga, paridad e inversión de tiempo. Las simetrías que se imponen a una Lagrangiana corresponden a las observaciones fenomenológicas descritas por ella.

El procedimiento para construir una Lagrangiana de una teoría de norma es la siguiente.

Uno parte de una Lagrangiana de materia (fermiones) libre. La interacción materia-quanta (fermiones-bosones de norma) se introduce como consecuencia de imponer la invarianza

bajo transformaciones de fase locales, procedimiento que define la derivada covariante. La derivada covariante es de gran importancia en las teorías de norma debido a que este operador contiene el término de interacción. También nos ayuda a definir el tensor anti-simétrico de intensidad de la teoría (de la misma forma que en electromagnetismo). Este tensor corresponde a los términos libres para los bosones de norma y de interacción entre sí. Un hecho proveniente de la observación experimental es que un grupo de Lie define a las características observables de las interacciones fundamentales. En el caso electromagnético, es el grupo Abelian  $U(1)$ . En los casos de las teorías de interacciones nucleares débil y fuerte son respectivamente  $SU_L(2)$  de isospín débil y  $SU_C(3)$  de color.

## 2.1. Cromodinámica Cuántica: una Teoría de Norma

Como hemos mencionado anteriormente, para construir una teoría de norma se debe partir de una Lagrangiana asociada a fermiones libres de espín  $\frac{1}{2}$ . Definiendo a  $N_f$  como el número de sabores y  $\Psi$  a los campos de quarks, la Lagrangiana que describiría a los fermiones libres posee la forma:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_{0i} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_i) \psi_{0i}. \quad (2.1)$$

Posteriormente se definen las transformaciones de fase locales pertenecientes al grupo de Lie  $SU(N)$  en los campos fermiónicos:

$$\psi_{0j} \rightarrow \psi'_{0j} = U(\theta(x)) \psi_{0j}, \quad (2.2)$$

con los operadores  $U(\theta(x))$  compuestos por funciones de los generadores  $\tau_a$  del álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(N)$  y  $\theta_a$  como los parámetros de la transformación. Sus expresiones tienen la si-

guiente forma:

$$U(\theta(x)) = \exp(-i\theta_a(x)\tau_a), \quad (2.3)$$

con las matrices  $\tau_a$ , con  $a = 1, 2, 3, \dots, N$  satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[\tau_a, \tau_b] = if^{abc}\tau_c, \quad (2.4)$$

donde  $f^{abc}$  son las constantes de estructura que definen al grupo. Son completamente anti-simétricas en el intercambio de dos índices cualesquiera. Imponer la invarianza de la Lagrangiana bajo estas transformaciones es equivalente a la condición:

$$D_\mu\psi'_{0j} = U(\theta(x))D_\mu\psi_{0j}. \quad (2.5)$$

Para lograr este propósito, hay que introducir los campos de norma, tantos como el número de generadores:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_0\tau_a A_\mu^a(x), \quad (2.6)$$

y requerir que estos campos también transformen bajo las transformaciones locales de norma, de la siguiente manera:

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu'^a(x) = A_\mu^a(x) + i\partial_\mu\theta_a(x), \quad (2.7)$$

simultáneamente con los campos fermiónicos, asegurando la invarianza local de norma en la Lagrangiana a través de la introducción de las interacciones en la teoría. Aquí  $g_0$  es el acoplamiento, que determina la fuerza de interacción entre todas las partículas.

Como mencionamos anteriormente, la importancia de la derivada covariante se encuentra en la bien conocida relación que posee con el tensor anti-simétrico de intensidad pertenecien-

te a la teoría, al que define por medio de la siguiente relación de conmutación:

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig_0\tau_a F_{\mu\nu}^a. \quad (2.8)$$

Así, el tensor anti-simétrico de intensidad perteneciente al grupo de Lie SU(N) queda definido por:

$$F_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_\nu^a - \partial^\nu A_\mu^a + g_0 f^{abc} A_b^\mu A_c^\nu. \quad (2.9)$$

Tal como en la electrodinámica cuántica, con el tensor de intensidad anti-simétrico, se puede definir la lagrangiana de los campos de norma como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2g_0^2} \text{Tr} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}), \quad (2.10)$$

también conocida como lagrangiana de Yang-Mills. Aquí hemos usado la siguiente notación:

$$F^{\mu\nu} = \tau_a F_a^{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

El término que corresponde a la extensión de la Lagrangiana de fermiones libres con invarianza bajo las transformaciones de fase locales define el término de interacción entre fermiones y los campos de norma:

$$\mathcal{L}_{int} = -ig_0 \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_{0i} (\tau_a) \gamma^\mu \psi_{0i} A_\mu^a. \quad (2.12)$$

La adición de las lagrangianas de fermiones más la de los campos de norma definen a la

Lagrangiana para una teoría de norma SU(N):

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_{0i} (i\gamma^\mu D_\mu - m_i) \psi_{0i} - \frac{1}{2g_0^2} \text{Tr} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) . \quad (2.13)$$

En particular, para definir la Lagrangiana de la Cromodinámica Clásica se impone la simetría  $SU_C(3)$  de color, grupo de Lie que posee ocho generadores  $\tau_a$ , con  $a = 1, 2, 3, \dots, 8$ , que dan origen a las constantes de estructura del grupo al ser los coeficientes de las relaciones de conmutación:  $[\tau_a, \tau_b] = if^{abc}\tau_c$ .  $f_{abc} = \epsilon_{abc}$  cuando todos los índices son  $\leq 3$ , y  $f_{abc} = 0$  cuando  $a, b \leq 3, c > 3$ . Además, se tiene  $f_{458} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ,  $f_{453} = \frac{1}{2}$ ,  $f_{678} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ,  $f_{673} = -\frac{1}{2}$ .  $f_{147} = \frac{1}{2}$ ,  $f_{246} = f_{257} = \frac{1}{2}$ ,  $f_{156} = -\frac{1}{2}$ . Las demás constantes se obtienen por anti-simetría total o son exactamente cero. La Lagrangiana se puede escribir como:

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N_f} \bar{q}_{0j} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig_0\tau_a A_\mu^a(x)) - m_j] q_{0j} - \frac{1}{2g_0^2} \text{Tr} (\tau_a F_a^{\mu\nu} \tau_b F_{\mu\nu}^b) . \quad (2.14)$$

Los campos fermionicos  $q_{0i}$  son los quarks de sabores  $i = u, d, s, c, b, t$ , así mismo cada sabor de quark posee tres cargas de colores, por ejemplo, R,G,B. Las funciones  $A_\mu^a$  definen los campos de gluones y  $a$  son las étiquetas de los ocho generadores del grupo de lie su (3). Estas características definen a la Lagrangiana clásica de las interacciones fuertes.

La representación más usual para los generadores del grupo de Lie  $SU_C(3)$  son las matrices de Gell-Mann  $\lambda_a$  que guardan una relación con las matrices  $\tau_a$  por:

$$\tau_a = \frac{1}{2}\lambda_a . \quad (2.15)$$

Las Matrices de Gell-Mann son matrices hermitianas  $3 \times 3$  de traza nula.  $SU(3)$  es de rango 2. Por lo tanto, solo existen dos matrices ( $\lambda_3$  y  $\lambda_8$  en este caso) que son diagonales. Las

podemos escoger de la siguiente manera:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Para poder obtener las reglas de Feynman en QCD, se debe cuantizar la teoría, proceso que implica la adición de términos que fijan la norma y aseguran la unitariedad. Como parte del formalismo en el método de Faddeev-Popov (que puede ser consultado en [16], [17], [21]) es necesario modificar la Lagrangiana. Esto se consigue agregando los términos, de Norma:

$$\mathcal{L}_N = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (2.16)$$

y los campos de fantasmas:

$$\mathcal{L}_f = \partial_\mu \bar{c}_a D^\mu c_a, \quad (2.17)$$

entonces, se define la Lagrangiana de la Cromodinámica Cuántica por:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{q}_{0i} (i\gamma^\mu D_\mu - m)_{ji} q_{0j} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \partial_\mu \bar{c}_a D^\mu c_a - \frac{1}{2g_0^2} \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) . \quad (2.18)$$

La inclusión de estos términos permite determinar las reglas de Feynman para la teoría así como realizar cálculos con una norma arbitraria y covariante.

Para calcular el vértice de tres gluones dentro del formalismo SDE es necesario conocer los diagramas que lo componen y las reglas de Feynman. Las reglas de Feynman son las expresiones que corresponden a los propagadores y vértices a nivel de árbol, mismos que se utilizan para determinar estas funciones en los distintos ordenes por medio de lazos. El número y forma de los diagramas a evaluar se determinara con la densidad lagrangiana.

Con el fin de clasificar los propagadores y vértices por su término de origen dentro de la Lagrangiana, les asignaremos los etiquetas de quarks, Yang-Mills, interacción y de fantasmas:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{fg} + \mathcal{L}_f . \quad (2.19)$$

Para los gluones en normas covariantes se tiene la Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_a^\mu) (\partial_\nu A_a^\nu) . \quad (2.20)$$

La Lagrangiana de Yang-Mills contiene la información sobre los gluones libres y sus auto-interacciones, en este sentido podemos asignar una parte de tal Lagrangiana que este en correspondencia con uno de los propagadores ó vértices:

$$\mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{3G} + \mathcal{L}_{4G} . \quad (2.21)$$

Para los gluones libres:

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_a^\mu) (\partial_\nu A_a^\nu) , \quad (2.22)$$



las interacciones de tres gluones:

$$\mathcal{L}_{3G} = -g_0 f^{abc} A_a^\mu A_b^\nu \partial_\mu A_\nu^c, \quad (2.23)$$

las correspondientes interacciones de cuatro gluones:

$$\mathcal{L}_{4G} = -\frac{1}{2} g_0^2 f^{abe} f^{cde} A_a^\mu A_b^\nu A_\mu^c A_\nu^d. \quad (2.24)$$

Para los quarks libres:

$$\mathcal{L}_q = \bar{q}_0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) q_0, \quad (2.25)$$

La Lagrangiana que contiene el término de interacciones entre quarks y gluones:

$$\mathcal{L}_{int} = ig_0 \bar{q}_0 \tau_b \gamma^\mu A_\mu^b q_0, \quad (2.26)$$

la interacción de gluones con fantasmas:

$$\mathcal{L}_{fg} = ig_0 \tau_b \partial_\mu \bar{c}_a A_b^\mu c_a, \quad (2.27)$$

y por último, los campos de fantasmas:

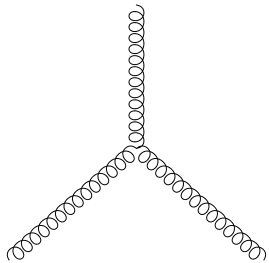
$$\mathcal{L}_f = \partial_\mu \bar{c}_a \partial^\mu c_a. \quad (2.28)$$

Con la Lagrangiana definida e identificando cada uno de sus términos con los componentes materiales y de la interacción dentro de la teoría, nuestro nuevo objetivo será el de presentar las reglas de Feynman.

## 2.2. Reglas de Feynman en QCD

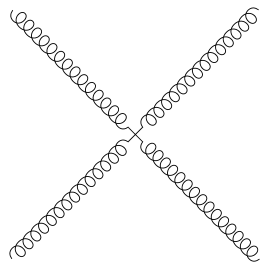
Como una teoría de campos cuánticos en QCD los observables están definidos por los propagadores y vértices. Las expresiones de estos vértices en su orden más bajo se les nombra funciones desnudas, así como funciones de vestimiento a sus correcciones a lazos. Las funciones desnudas ó reglas de Feynman en QCD son los vértices de quark-gluón, gluón-gluón, fantasma-gluón y los propagadores de cada uno de estos grados de libertad. Para los fines de este documento, se ha omitido la épsilon-prescripción.

Los vértices de tres y cuatro gluones están relacionados con la Lagrangiana de los campos de norma. En particular, la regla de Feynman que corresponde al vértice de tres gluones se asocia con la lagrangiana (2.23), y la expresión matemática de este vértice es:



$$\equiv -g_0 f^{abc} \left[ g^{\alpha\beta} (k_1 - k_2)^\gamma + g^{\beta\gamma} (k_2 - k_3)^\alpha + g^{\gamma\alpha} (k_3 - k_1)^\beta \right]. \quad (2.29)$$

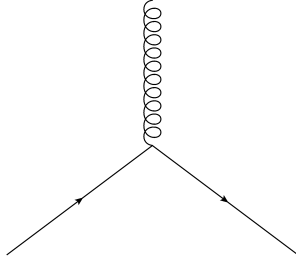
El siguiente objeto que representa las interacciones en QCD sería el vértice de cuatro gluones, que proveniente de la lagrangiana (2.24), la regla de Feynman que le corresponde es:



$$\equiv -g_0 \begin{bmatrix} f^{abe} f^{cde} (g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \\ + f^{ace} f^{bde} (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\gamma\beta}) \\ + f^{ade} f^{bce} (g^{\alpha\beta} g^{\delta\gamma} - g^{\alpha\gamma} g^{\delta\beta}) \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

La interacción entre los quarks y gluones de la teoría se encuentra en la Lagrangiana de in-

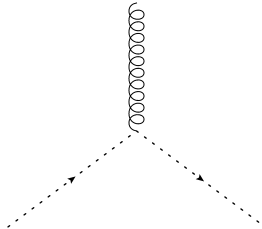
teracción (2.26) y la regla de Feynman para este vértice está dada por la expresión:



$$\equiv -ig_0 \gamma^\mu \times \delta_f^{f'} \times t^a. \quad (2.31)$$

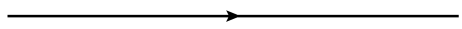
los índices  $f, f'$  refieren a los índices de sabor de los quarks.

Los términos que se introducen para cuantizar la teoría dan origen a partículas ficticias, mejor conocidas como fantasmas. Estos fantasmas solo poseen acoplamiento con los campos de norma y la interacción que existe entre tales se representa por medio del vértice fantasma-gluón. La función de Green en cuestión se obtiene de la Lagrangiana (2.27) del mismo nombre y la regla de Feynman correspondiente es:



$$\equiv -g_0 f^{abc} p'^\mu. \quad (2.32)$$

El momento  $p'_\mu$  corresponde al momentum final del fantasma. El propagador fermiónico se asocia con la Lagrangiana de quarks libres (2.25), la regla de Feynman de estos objetos es la que mostramos ahora:



$$\equiv \frac{i\delta_b^a \delta_{f'}^f}{\not{p}_f - m_f}, \quad (2.33)$$

donde los índices  $a, b$ , y  $f, f'$  son los respectivos colores y sabores entrantes y salientes de

los fantasmas. En la categoría bosónica se encuentra el propagador del gluón. El término de la lagrangiana que le da origen se encuentra en la expresión (2.22). La regla de Feynman para este caso es:

$$\text{Diagrama de un gluón} \equiv -i \frac{\delta^{ab}}{k^2} \left[ g^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right], \quad (2.34)$$

los índices de color  $a, b$  y de Lorentz  $\mu, \nu$  refieren al gluón entrante y saliente. El propagador de las partículas ficticias proviene de la Lagrangiana de fantasmas (2.28) y para tal función se tiene la regla de Feynman:

$$\text{Diagrama de un fantasma} \equiv \frac{i\delta_b^a}{k^2}, \quad (2.35)$$

de nuevo los índices  $a, b$  son los respectivos colores entrante y saliente del fantasma. Con las reglas de Feynman procederemos a mostrar las correcciones al vértice de triple gluón, todo esto en acuerdo a las SDE, tema de la siguiente sección.

### 2.3. Las ecuaciones de Schwinger-Dyson para vértice de tres gluones

En acuerdo al procedimiento estándar, las correcciones al vértice primario se calculan a partir de lazos. Para los desarrollos de esta tesis, hemos elegido realizar una aproximación a diagramas de un lazo en las SDE del vértice. Está consiste en tomar en cuenta ocho diagramas ([1], [5], [15]), mismos que ahora presentaremos.

Primero mostraremos los lazos que contienen quarks, posteriormente los de fantasmas y por último los que contienen a los vértices de tres y cuatro gluones.

### 2.3.1. Diagramas para los lazos quark-gluón

El primer diagrama de la figura 2.1, puede traducirse como integrales del tipo:

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \Gamma_{a_1}^{\mu_1} \mathcal{S}(k, p_1, p_2) \Gamma_{a_2}^{\mu_2} \mathcal{S}(k, p_2, p_3) \Gamma_{a_3}^{\mu_3} \mathcal{S}(k, p_1, p_3) , \quad (2.36)$$

donde  $\Gamma_{\mu_j}^{a_i}$  representa el vértice quark-gluón (2.31) y  $\mathcal{S}$  al propagador del quark (2.33).

Cuando se consideran quarks no-masivos en el contenido de este lazo, tanto el color como el sabor están presentes en el vértice por medio de las constantes de estructura del grupo en cuestión  $f^{a_1 a_2 a_3}$  y por los parámetros del sabor  $T_R, N_f$ . En este sentido, aportan al vértice por las integraciones:

$$\Gamma_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}^{a_1 a_2 a_3}(p_1, p_2, p_3) = -\frac{ig_0^2}{(2\pi)^n} T_R N_f f^{a_1 a_2 a_3} \int \frac{d^n k}{\left(k + \frac{p_2 - p_1}{3}\right)^2 \left(k + \frac{p_3 - p_2}{3}\right)^2 \left(k + \frac{p_1 - p_3}{3}\right)^2} \times \text{Tr} \left[ \gamma^{\mu_1} \left( \not{k} + \frac{\not{p}_2 - \not{p}_1}{3} \right) \gamma^{\mu_2} \left( \not{k} + \frac{\not{p}_3 - \not{p}_2}{3} \right) \gamma^{\mu_3} \left( \not{k} + \frac{\not{p}_1 - \not{p}_3}{3} \right) \right] . \quad (2.37)$$

Con el uso del álgebra de Dirac se obtienen integraciones con la forma (3.25). Las integraciones del segundo diagrama en (2.1) difieren solo por la parametrización y se pueden deducir de estos cálculos. Los resultados de estas integraciones aparecen en el siguiente capítulo.

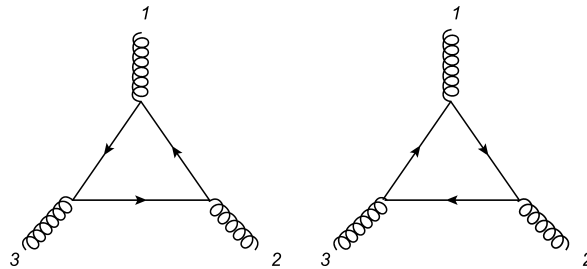


Figura 2.1: Diagramas para los lazos de quarks.

### 2.3.2. Diagramas para los lazos fantasma-gluón

Al observar la figura (2.2) que contiene los diagramas con las contribuciones de fantasmas y gluones al vértice para esta aproximación podemos establecer el tipo de objetos que componen las integraciones a evaluar. Como todo lazo cerrado contiene vértices y propagadores, que en este caso son de fantasmas y gluones:

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \Gamma_{\mu_1}^{a_1 b_1 c_1} D_{b_1 b_2}(k, p_1, p_2) \Gamma_{\mu_2}^{b_2 a_2 c_2} D_{a_2 c_3}(k, p_2, p_3) \Gamma_{\mu_3}^{b_3 c_3 a_3} D_{b_3 c_1}(k, p_2, p_3), \quad (2.38)$$

Debido a la presencia del vértice fantasma-gluón (2.32) y al propagador de fantasmas (2.35),

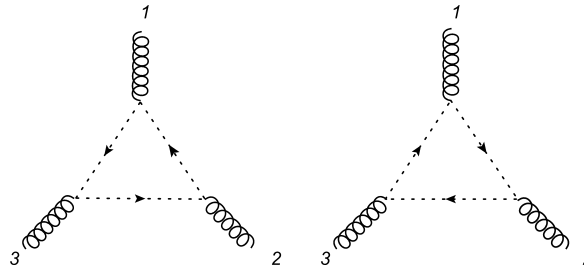


Figura 2.2: Diagramas para los lazos con fantasmas.

el color solo se encuentra por medio de las constantes de estructura  $f^{a_1 a_2 a_3}$  del grupo en cuestión y el factor  $C_A$  definido por la relación:

$$f_{abc} f_{dbc} = \frac{C_A}{2} \delta_{ab}. \quad (2.39)$$

Sí interpretamos los dos diagramas de la figura (2.2) considerando las reglas de Feynman (2.32), (2.35) y la parametrización dada en [15] obtenemos las integraciones:

$$\Gamma_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}^{a_1 a_2 a_3}(p_1, p_2, p_3) = -i \frac{g_0^2 C_A}{2 (2\pi)^n} f^{a_1 a_2 a_3} \int \frac{d^n k \left[ V_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}^{(1)} + V_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}^{(2)} \right]}{\left( k + \frac{p_1 - p_3}{3} \right)^2 \left( k + \frac{p_2 - p_1}{3} \right)^2 \left( k + \frac{p_3 - p_2}{3} \right)^2}, \quad (2.40)$$

con los tensores  $V_{\mu_1\mu_2\mu_3}$  definidos por:

$$V_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{(1)} = \left(k + \frac{p_1 - p_3}{3}\right)^{\mu_1} \left(k + \frac{p_2 - p_1}{3}\right)^{\mu_2} \left(k + \frac{p_3 - p_2}{3}\right)^{\mu_3}, \quad (2.41)$$

$$V_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{(2)} = \left(k + \frac{p_2 - p_1}{3}\right)^{\mu_1} \left(k + \frac{p_3 - p_2}{3}\right)^{\mu_2} \left(k + \frac{p_1 - p_3}{3}\right)^{\mu_3}, \quad (2.42)$$

que hacen evidente la necesidad de evaluar (3.25), de la que es posible obtener todas las integrales del documento.

### 2.3.3. Diagrama del lazo de gluones

En la figura 2.3 está el único lazo que es totalmente compuesto por vértices de triple gluón y propagador de gluones, diagrama que puede ser interpretado como la integral:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \Gamma_{a_1 b_1 c_1}^{\mu_1 \alpha_1 \beta_1} \left( p_1, k + \frac{p_2 - p_1}{3}, -k - \frac{p_1 - p_3}{3} \right) D_{\alpha_1 \beta_2}^{b_1 c_2}(k) \\ & \times \Gamma_{a_2 b_2 c_2}^{\mu_2 \alpha_2 \beta_2} \left( p_3, k + \frac{p_1 - p_3}{3}, -k - \frac{p_3 - p_2}{3} \right) D_{\alpha_2 \beta_3}^{b_2 c_3}(k) \\ & \times \Gamma_{a_3 b_3 c_3}^{\mu_3 \alpha_3 \beta_3} \left( p_2, k + \frac{p_3 - p_2}{3}, -k - \frac{p_2 - p_1}{3} \right) D_{\alpha_3 \beta_1}^{b_3 c_1}(k), \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde aparece el vértice desnudo de triple gluón  $\Gamma_{abc}^{\alpha\beta\gamma}$  y el propagador de gluón  $D_{\alpha\beta}^{ab}$ . Sí se incluyen las definiciones de las reglas de Feynman (2.29), (2.34) y se contraen los objetos con color usando la relación:

$$f_{ade} f_{bef} f_{cfd} = \frac{C_A}{2} f_{abc}, \quad (2.44)$$

podemos darnos cuenta que las constantes de estructura  $f^{a_1 a_2 a_3}$  y el factor  $\frac{C_A}{2}$  son las únicas manifestaciones del color en el vértice, mientras que para las estructuras covariantes tene-

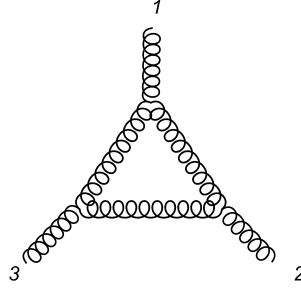


Figura 2.3: Diagrama para el lazo de gluones.

mos integraciones del tipo:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3}(p_1, p_2, p_3) &= -i\frac{C_A}{2}g_0^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2)^3} \\
 &\times V^{\mu_1\nu_1\mu}(p_1, k + \frac{p_2-p_1}{3}, -k - \frac{p_1-p_3}{3}) \left[ g_{\mu\nu_3} + \xi' \frac{k_\mu k_{\nu_3}}{k^2} \right] \\
 &\times V^{\mu_3\nu_3\alpha}(p_3, k + \frac{p_1-p_3}{3}, -k - \frac{p_3-p_2}{3}) \left[ g_{\alpha\nu_2} + \xi' \frac{k_\alpha k_{\nu_2}}{k^2} \right] \\
 &\times V^{\mu_3\nu_3\alpha}(p_2, k + \frac{p_3-p_2}{3}, -k - \frac{p_2-p_1}{3}) \left[ g_{\beta\nu_1} + \xi' \frac{k_\beta k_{\nu_1}}{k^2} \right], \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

a partir de esta expresión se usará la re-definición del parámetro de norma  $\xi' = \xi - 1$ . La estructura covariante del vértice desnudo de triple gluón se ha parametrizado de la forma siguiente:

$$V_{\alpha\beta\mu}(p, -k-p, k) = g_{\alpha\beta}(2k+p)_\mu - g_{\beta\mu}(k-p)_\alpha - g_{\mu\alpha}(k+2p)_\beta. \quad (2.46)$$

Estas integraciones son la aportación del lazo de gluones al vértice, mismas que contienen al objeto desnudo y por lo tanto aquí tenemos una de sus correcciones.



### 2.3.4. Diagramas con el vértice de cuatro gluones

Los 3 diagramas que contienen al vértice de cuatro y tres gluones de la figura 2.4 pueden interpretarse como integrales del tipo:

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \Gamma_{a_1 b_1 c_1}^{\mu_1 \alpha_1 \beta_1}(k, p_1) D_{\alpha_1 \alpha_2}^{b_1 d_2}(k) \Gamma_{d_1 d_2 a_2 a_3}^{\beta_2 \alpha_2 \mu_2 \mu_3} D_{\beta_2 \beta_1}^{d_1 c_1}(k), \quad (2.47)$$

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \Gamma_{a_1 b_1 b_2 a_3}^{\mu_1 \alpha_1 \alpha_2 \mu_3} D_{\alpha_1 \beta_2}^{b_1 c_2}(k) \Gamma_{a_2 c_1 c_2}^{\mu_2 \beta_1 \beta_2}(k, p_1) D_{\beta_1 \alpha_2}^{c_1 b_2}(k), \quad (2.48)$$

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \Gamma_{b_1 a_1 a_2 b_2}^{\alpha_1 \mu_1 \mu_2 \alpha_2} D_{\alpha_2 \beta_2}^{b_2 c_2}(k) \Gamma_{a_3 c_1 c_2}^{\mu_3 \beta_1 \beta_2}(k, p_1) D_{\beta_1 \alpha_1}^{c_1 b_1}(k). \quad (2.49)$$

aquí se han representado con  $\Gamma_{a,b,c}^{\alpha\beta\delta}$ ,  $\Gamma_{a,b,c,d}^{\alpha\beta\delta\gamma}$  y  $D_{\mu,\nu}^{ab}$  a los correspondientes vértices con tres y cuatro gluones así como al propagador del gluón cuyas reglas de Feynman están en (2.29), (2.30) y (2.34).

Desarrollaremos el primer diagrama y dado que los otros dos solo difieren en parametrización sus contribuciones se obtienen por sustitución. Las integrales correspondientes a (2.47) tienen como factor común al número de colores y las constantes de estructura:

$$\begin{aligned} \Gamma_{a_1 a_2 a_3}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(p_1) &= ig^3 C_A f^{a_1 a_2 a_3} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^4} V^{\mu_1 \alpha_1 \beta_1}(k, p_1) \left( g_{\alpha_1 \alpha_2} + \xi \frac{k_{\alpha_1} k_{\alpha_2}}{k^2} \right) \\ &\quad \times V^{\beta_2 \alpha_2 \mu_2 \mu_3} \left( g_{\beta_2 \beta_1} + \xi \frac{k_{\beta_2} k_{\beta_1}}{k^2} \right), \end{aligned} \quad (2.50)$$

para las estructuras covariantes del vértice de triple gluón se ha utilizado  $V^{\mu_1 \alpha_1 \beta_1}$  que hemos definido por:

$$V^{\mu_1 \alpha_1 \beta_1}(k, p_1) = g^{\mu_1 \alpha_1} \left( \frac{3}{2} p_1 - k \right)^{\beta_1} + 2g^{\alpha_1 \beta_1} k^{\mu_1} + g^{\beta_1 \mu_1} \left( -k - \frac{3}{2} p_1 \right)^{\alpha_1}. \quad (2.51)$$

Correspondientemente, la estructura covariante del vértice de 4 gluones  $V^{\beta_2 \alpha_2 \mu_2 \mu_3}$  que se ha

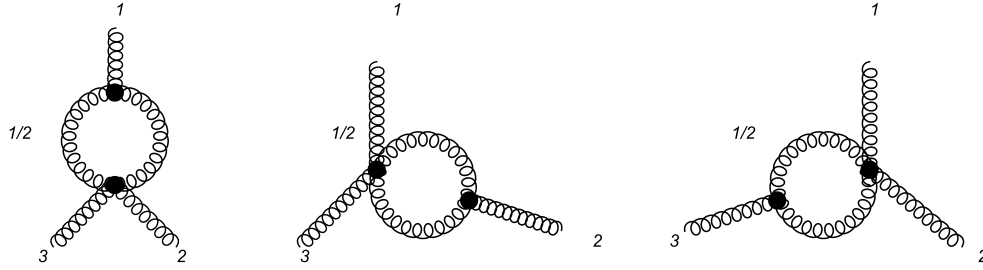


Figura 2.4: Diagramas para los lazos con forma de pez-espada.

usado es:

$$\begin{aligned}
 V^{\beta_2 \alpha_2 \mu_2 \mu_3} &= (g^{\beta_2 \mu_2} g^{\alpha_2 \mu_3} - g^{\beta_2 \mu_3} g^{\alpha_2 \mu_2}) + \frac{1}{2} (g^{\beta_2 \alpha_2} g^{\mu_2 \mu_3} - g^{\beta_2 \mu_3} g^{\alpha_2 \mu_2}) \\
 &+ \frac{1}{2} (g^{\beta_2 \mu_2} g^{\alpha_2 \mu_3} - g^{\beta_2 \alpha_2} g^{\mu_2 \mu_3}) .
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Los diagramas pez-espada dan las últimas contribuciones al vértice de triple gluón.

## 2.4. La identidad de Ward-Slavnov-Taylor para el vértice de tres gluones

En esta sección presentamos la relación entre el propagador del gluón, el vértice de triple gluón y el vértice fantasma-gluón que impone la identidad de Ward-Slavnov-Taylor (WST por sus siglas en inglés). Iniciaremos con las definiciones de los componentes en esta identidad. Finalizaremos el capítulo al mostrar el proceso y esquema de renormalización que hemos elegido.

Como se ha mencionado en la introducción, parte del criterio para determinar la forma del vértice de triple gluón es obtenido del análisis de simetrías (como el realizado en [2]). De los 14 tensores independientes en (3.5) (en acuerdo a la conservación del momento), los 10 de carácter longitudinal en (3.24) son restringidos por la identidad WST.

Sea  $\Pi_{\mu_1\mu_2}^{a_1a_2}$  el tensor de la Polarización de gluones:

$$\Pi_{\mu_1\mu_2}^{a_1a_2}(p) \equiv -\delta^{a_1a_2} (p^2 g_{\mu_1\mu_2} - p_{\mu_1} p_{\mu_2}) J(p^2), \quad (2.53)$$

y  $J(p^2)$  es la polarización escalar. Definimos las auto-energías de fantasmas por:

$$\tilde{\Pi}^{a_1a_2}(p^2) = \delta^{a_1a_2} p^2 G(p^2). \quad (2.54)$$

Sí representamos la parte covariante del vértice fantasma-gluón (en acuerdo a [5]) por los tensores:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu_3}^{a_1a_2a_3}(p_1, p_2; p_3) \equiv -igf^{a_1a_2a_3} p_1^\mu \tilde{\Gamma}_{\mu\mu_3}(p_1, p_2; p_3), \quad (2.55)$$

con los momentos externos  $p_1, p_2, p_3$  pertenecientes al fantasma entrante, saliente y al gluón de intercambio, con la estructura covariante  $\tilde{\Gamma}_{\mu\mu_3}$  compuesta por 5 tensores con la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\mu\mu_3}(p_1, p_2; p_3) &= g_{\mu\mu_3} a(p_3, p_2, p_1) - p_{3\mu} p_{2\mu_3} b(p_3, p_2, p_1) + p_{1\mu} p_{3\mu_3} c(p_3, p_2, p_1) \\ &+ p_{3\mu} p_{1\mu_3} d(p_3, p_2, p_1) + p_{1\mu} p_{1\mu_3} e(p_3, p_2, p_1). \end{aligned} \quad (2.56)$$

La identidad de Ward-Slavnov-Taylor da una relación entre los componentes longitudinales del vértice de triple gluón con los vértices fantasma-gluón, el operador de polarización y las auto-energías de fantasmas dada por la expresión:

$$\begin{aligned} p_3^{\mu_3} \Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}(p_1, p_2; p_3) &= -J(p_1^2) G(p_3^2) (g_{\mu_1}^{\mu_3} p_1^2 - p_{1\mu_1} p_1^{\mu_3}) \tilde{\Gamma}_{\mu_3\mu_2}(p_1, p_3; p_2) \\ &+ J(p_1^2) G(p_3^2) (g_{\mu_2}^{\mu_3} p_2^2 - p_{2\mu_2} p_2^{\mu_3}) \tilde{\Gamma}_{\mu_3\mu_1}(p_2, p_3; p_1), \end{aligned} \quad (2.57)$$

donde las funciones escalares son determinadas en teoría de perturbación. Cabe resaltar que

en su nivel más básico, las funciones escalares  $J$  y  $G$  son  $G^{(0)} = J^{(0)} = 1$ . Mientras que la estructura covariante del vértice fantasma-gluón a nivel de árbol es  $\tilde{\Gamma}_{\mu\mu_3}^0 = g_{\mu\mu_3}$ .

### 2.4.1. Funciones auxiliares a la identidad WST

En este apartado tenemos como objetivo presentar las funciones estructurales para el vértice fantasma-gluón, las funciones escalares de polarización de gluones y las auto-energías de fantasmas. A partir de este momento, distinguiremos a las funciones por su dependencia a la norma. Las funciones aparecen en un número arbitrario de dimensiones y normas covariantes. Iniciaremos con la definición de los componentes en el operador de polarización de gluones y de las auto-energías de fantasmas. Posteriormente, se mostrarán las expresiones de las funciones de estructura en el vértice fantasma-gluón. En el final de este capítulo se realiza un breve desarrollo del proceso de renormalización en estos objetos.

El operador de polarización de gluones y las auto-energías de fantasmas son unos de los objetos involucrados en la definición perturbativa de los propagadores del gluón y de fantasmas (un tratamiento de este tema se encuentra en [15], [16]). En la aproximación a un lazo, obedecen la ecuación asociada a los diagramas de las figuras 2.5 y 2.6. Continuando con la notación usada en este documento, se exalta la dependencia a la norma ó su origen en los lazos con quarks, por lo que se tienen las etiquetas  $\xi$  y  $q$  en el respectivo caso. Por razones de conveniencia se hace uso de las funciones  $\eta, \kappa, \mathcal{K}, \varphi$ . Que serán definidas más adelante en el documento. Los parámetros  $N_f, T_R$  y  $C_A$  son los numeros de sabores y de color.

Ahora presentaremos a las expresiones para las funciones  $J$  y  $G$  encontradas en [5]. En un

número arbitrario de dimensiones y normas covariantes, la función  $J$  se representa por:

$$J^{(1,\xi)}(p^2) = -\frac{g^2\eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{C_A}{8(n-1)} \{4(3n-2) + 4\xi(n-1)(2n-7) - \xi^2(n-1)(n-4)\} \kappa(p^2), \quad (2.58)$$

mientras que la función  $G$  tiene la siguiente forma:

$$G^{(1,\xi)}(p^2) = \frac{g^2\eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} 2N_f T_R \frac{n-2}{n-1} \kappa(p^2). \quad (2.59)$$

También debemos mostrar las funciones que involucran quarks en su definición. Los lazos de fermiones contribuyen con una función  $J$ , que se representa por la expresión:

$$J^{(1,a)}(p^2) = \frac{g^2\eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} 2N_f T_R \frac{n-2}{n-1} \kappa(p^2). \quad (2.60)$$

Las 5 funciones de estructura  $a, b, c, d$  y  $e$  son los componentes escalares del vértice fantasma-gluón. Consideramos las expresiones en el apéndice D en [5]. En el desarrollo a un lazo, las funciones escalares  $a, b, c, d$  y  $e$  norma-dependientes, tienen las expresiones:

$$\begin{aligned} a^{(1,\xi)}(p_3, p_2, p_1) = & -\frac{g^2\eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{C_A}{16\mathcal{K}} \{ [2\mathcal{K}(\xi(2n-5)+2) + \xi((n-3)\xi+2)p_2^2(p_1p_3) \\ & - \xi(\xi-2)p_3^2(p_1p_2)] ((p_2p_3)\varphi + \kappa_1) + [(\xi-2)(4\mathcal{K} - \xi p_2^3 p_3^2) + \xi((n-3)\xi+2) \\ & \times (p_2p_3)p_2^2] ((p_1p_3)\varphi + \kappa_2) + [(\xi-2)((\xi+2)\mathcal{K} - \xi p_3^2(p_2p_3)) + \xi((n-3)\xi+2) \\ & \times (p_2p_3)^2] ((p_1p_2)\varphi + \kappa_3) + \xi(p_2p_3)\varphi [(\xi-2)(\mathcal{K} + 2p_3^2(p_1p_2)) + ((n-3)\xi+2) \\ & \times (\mathcal{K} - 2(p_1p_2)(p_2p_3))] \}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

Por su parte  $b$  tiene la forma:

$$\begin{aligned}
b^{(1,\xi)}(p_3, p_2, p_1) = & -\frac{g^2\eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{C_A}{16\mathcal{K}^2 p_3^2} \{ [\xi ((n-4)\xi + 4)(n-3)(p_1 p_2)(p_2 p_3) \mathcal{K} \\
& + ((n-3)\xi + 2)p_1^2 p_3^2 (2(\xi - 2)\mathcal{K} - \xi(n-1)(p_1 p_2)(p_2 p_3)) + \xi(\xi - 2)p_3^2 ((n-1) \\
& \times p_1^2 p_3^2 (p_1 p_2) + \mathcal{K}(p_1^2 - 2(n-3)(p_1 p_2))) ] ((p_2 p_3)\varphi + \kappa_1) + [-\xi((n-4)\xi + 4) \\
& \times (n-3)(p_1 p_2)(p_2 p_3)\mathcal{K} + \xi(\xi - 2)p_3^2 ((n-1)p_1^2 p_2^2 p_3^2 + (n-2)\mathcal{K}\mathcal{Q}) + ((n-3) \\
& \times \xi + 2)p_3^2 (\mathcal{K}(\xi p_2^2 + (3\xi - 4)(p_1 p_2)) - \xi(n-1)(p_1 p_2)^2 (p_2 p_3))] ((p_1 p_3)\varphi + \kappa_2) \\
& + [-\xi((n-4)\xi + 4)(n-4)(p_1 p_3)(p_2 p_3)\mathcal{K} + ((n-3)\xi + 2)p_3^2 (\xi(p_2 p_3)(\mathcal{K} \\
& - (n-1)(p_1 p_2)(p_1 p_3)) + 2(\xi - 2)\mathcal{K}(p_1 p_3)) + \xi(\xi - 2)p_3^2 ((n-1)(p_2 p_3)(p_1 p_3)^2 \\
& - \mathcal{K}(p_2^2 + (p_1 p_3))) ] ((p_1 p_2)\varphi + \kappa_3) + \varphi [ 2\xi((n-4)\xi + 4)(n-3)(p_1 p_2)(p_1 p_3) \\
& \times (p_2 p_3)\mathcal{K} + ((n-3)\xi + 2)p_3^2 (2\xi(n-1)(p_1 p_2)^2 (p_1 p_3)(p_2 p_3) - 2\mathcal{K}(p_1 p_3)(2 \\
& \times (\xi - 2)(p_1 p_2) + \xi p_2^2) - \xi\mathcal{K}^2) + \xi(\xi - 2)p_3^2 (2(n-2)\mathcal{K}(p_1 p_2)(p_2 p_3) - 2(n-1) \\
& \times p_1^2 p_3^2 (p_1 p_2)(p_2 p_3) + \mathcal{K}^2) ] \}, \tag{2.62}
\end{aligned}$$

la siguiente función es  $c$ , expresada por:

$$\begin{aligned}
c^{(1,\xi)}(p_3, p_2, p_1) = & -\frac{g^2\eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{C_A}{16\mathcal{K}^2 p_1^2} \{ [ ((n-3)\xi + 2)(\xi(n-1)(p_1 p_2)^2 (p_1 p_3)^2 - \mathcal{K} \\
& \times (4(p_1^2)^2 + (p_1 p_3)((\xi + 2)p_1^2 + 3\xi(p_1 p_2)))) - \xi(\xi - 2)(p_1 p_3)((n-1)(p_1 p_2) \\
& \times (p_1 p_3)^2 + \mathcal{K}(2p_1^2 + 3(p_1 p_2))) ] ((p_2 p_3)\varphi + \kappa_1) + [ ((n-3)\xi + 2)(\xi(p_1 p_3)(p_2 p_3) \\
& \times ((n-1)(p_1 p_2)^2 + 2\mathcal{K}) + 2\mathcal{K}p_1^2 (p_2^2 - (p_1 p_2))) + \xi(\xi - 2)(p_1 p_3)(p_1^2 \mathcal{K} - (n-3) \\
& \times \mathcal{K}\mathcal{Q} - (n-1)p_1^2 p_2^2 p_3^2) ] ((p_1 p_3)\varphi + \kappa_2) + [ ((n-3)\xi + 2)(\xi(n-1)(p_1 p_2) \\
& \times (p_1 p_3)^2 (p_2 p_3) - \mathcal{K}((\xi - 2)p_1^2 (p_1^2 - p_2^2) + \xi(p_2 p_3)(2(p_1 p_3) - p_1^2))) + \xi(\xi - 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (p_1 p_3) (p_2 p_3) ((n-3) \mathcal{K} - (n-1) p_1^2 p_3^2) ((p_1 p_2) \varphi + \kappa_3) \\
& + 2\varphi[-((n-3) \xi + 2) (p_1 p_2) (2p_1^2 (p_1^2 - p_2^2) \mathcal{K} + \xi (n-1) (p_1 p_2) (p_1 p_3)^2 (p_2 p_3)) \\
& + \xi (p_1 p_3) (p_2 p_3) ((\xi - 2) (n-1) (p_1 p_2) (p_1 p_3)^2 + \xi (n-2) \mathcal{K} (p_3^2 - p_2^2))] \}, \quad (2.63)
\end{aligned}$$

la penúltima función es  $d$  y tiene la expresión:

$$\begin{aligned}
d^{(1,\xi)}(p_3, p_2, p_1) = & -\frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{C_A}{16\mathcal{K}^2 p_3^2} \{[\xi ((n-4) \xi + 4) (p_1 p_2) (p_1 p_3) ((n-3) (p_1 p_3) (p_2 p_3) \\
& + p_3^2 (p_1 p_2)) - ((n-3) \xi + 2) p_3^2 (\xi (p_2 p_3) (p_1^2 p_2^2 - (n-2) (p_1 p_2) (p_1 p_3)) + 6 (p_1 p_2) \mathcal{K}) \\
& + \xi (\xi - 2) p_3^2 (p_2 p_3) p_1^2 ((p_2 p_3) + p_3^2 - (n-2) (p_1 p_2)^2)] ((p_2 p_3) \varphi + \kappa_1) + [\xi (n-3) \\
& \times ((n-4) \xi + 4) (p_1 p_2) (p_1 p_3) (p_2 p_3)^2 + ((n-3) \xi + 2) p_3^2 (\xi (p_1 p_2) (p_2 p_3) \\
& \times ((n-3) (p_2 p_3) - 2p_2^2) - 4p_2^2 \mathcal{K}) - (\xi - 2) p_3^2 (\xi (p_2 p_3) (p_1^2 p_2^2 + (n-1) p_2^2 (p_1 p_2) + \\
& \times (p_1 p_2)^2) + (\xi - 2) p_2^2 \mathcal{K})] ((p_1 p_3) \varphi + \kappa_2) + [\xi ((n-4) \xi + 4) (n-4) (p_1 p_3) (p_2 p_3) \mathcal{K} \\
& + \xi (\xi - 2) p_3^2 (p_1 p_2) (n-1) (p_3^2 (p_2 p_3) - \mathcal{K}) - ((n-3) \xi + 2) p_3^2 (p_2 p_3) (\xi (n-1) p_2^2 \\
& \times (p_1 p_3) + (\xi + 6))] ((p_1 p_2) \varphi + \kappa_3) + 2\varphi[-((n-4) \xi + 4) (p_1 p_2) (p_2 p_3) \mathcal{K} (\xi (n-3) \\
& \times (p_1 p_3) + (\xi - 2) p_3^2) + ((n-3) \xi + 2) p_3^2 (\xi (p_1 p_2) (p_2 p_3) (2\mathcal{K} + n p_2^2 (p_1 p_3)) - 2 (p_2^2)^2 \\
& \times (p_1 p_3)^2) + (\xi - 2) p_3^2 (p_1 p_2) (p_1 p_3) (p_2 p_3) (\xi (n-1) (p_1 p_2) + 2 (\xi - 1) p_2^2)] \}, \quad (2.64)
\end{aligned}$$

por último, la función escalar  $e$  se expresa como sigue:

$$\begin{aligned}
e^{(1,\xi)}(p_3, p_2, p_1) = & -\frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{C_A}{16\mathcal{K}^2 p_1^2} \{[(n-3) \xi + 2] (-\xi (n-1) p_3^2 (p_1 p_2)^2 (p_1 p_3) + \mathcal{K} \\
& \times p_1^2 (2 (p_1 p_3) - \xi p_3^2)) + \xi (\xi - 2) (n-1) p_3^2 (p_1 p_2) (p_1 p_3)^2 + \xi^2 (n-2) \mathcal{K} p_3^2 (2p_1^2 + 3
\end{aligned}$$

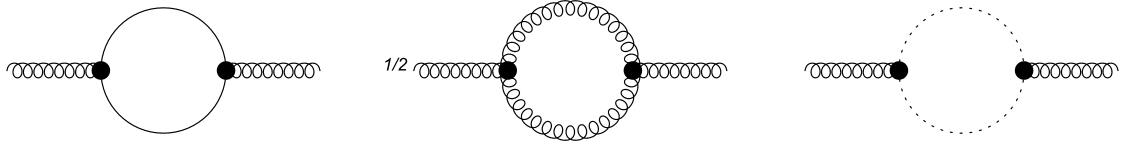


Figura 2.5: Diagramas para el tensor de la polarización de gluones.

$$\begin{aligned}
 & \times (p_1 p_2)] ((p_2 p_3) \varphi + \kappa_1) + [((n-3)\xi + 2)(p_2 p_3)(-\xi(n-1)p_1^2 p_2^2 p_3^2 + \mathcal{K}(\xi(n-3) \\
 & \times p_3^2 + 2p_1^2)) + \xi(\xi-2)p_3^2((n-1)p_1^2 p_2^2 p_3^2 + \mathcal{K}((n-3)\mathcal{Q} - p_1^2))] ((p_1 p_3) \varphi + \kappa_2) \\
 & + [((n-3)\xi + 2)(-\xi(n-1)p_1^2 p_2^2 p_3^2 + \mathcal{K}((\xi+2)p_1^2 - (n-3)\xi\mathcal{Q})) + \xi(\xi-2) \\
 & \times (p_2 p_3)((n-1)(p_1 p_3)^2 + 2\mathcal{K})] p_3^2 ((p_1 p_2) \varphi + \kappa_3) + 2(p_2 p_3) \varphi [((n-3)\xi + 2) \\
 & \times (p_1 p_3)(\xi(n-1)p_3^2 (p_1 p_2)^2 - 2\mathcal{K}p_1^2) - \xi(\xi-2)(n-1)p_3^2 (p_1 p_2)(p_1 p_3)^2 \\
 & - \xi^2(n-2)\mathcal{K}p_3^2 (p_3^2 - p_2^2)] \}. \tag{2.65}
 \end{aligned}$$

Como se hará notar en el siguiente apartado, estas funciones poseen divergencias cuando se evalúan en el límite  $n \rightarrow 4$  (equivalentemente  $\epsilon \rightarrow 0$ ). Por su forma, estas singularidades entran en los criterios de substracción.

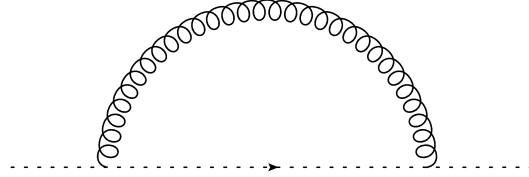


Figura 2.6: Diagrama para las auto-energías de fantasmas.

### 2.4.2. Renormalización

Para finalizar este capítulo se presentará un breve desarrollo del proceso de renormalización. Como es usual se presenta la expresión de la función en cuestión y se resalta la parte correspondiente a una divergencia ultravioleta sustraible. De esta última se deduce la función de



contra-término. Se presentan los resultados en el orden de la sección anterior.

Sí se realiza una expansión de las expresiones (2.58), (2.60) en  $\epsilon$ , se puede notar que las divergencias provienen de la función  $\kappa$ . La parte divergente de esas funciones tienen la forma:

$$J^{(1,UV)} = \frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \left[ -C_A \left( \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \xi \right) + \frac{4}{3} N_f T_R \right] \kappa^{UV}, \quad (2.66)$$

$$G^{(1,UV)} = \frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{2-\epsilon}} C_A \frac{1}{4} (2 + \xi) \kappa^{UV}. \quad (2.67)$$

donde  $\kappa^{UV} = \frac{1}{\epsilon} + \dots$ . Esto nos lleva a definir contra-términos con la forma:

$$\begin{aligned} J^{(1,CT)} &= -\frac{\bar{g}^2 \eta}{(4\pi)^2} \left[ C_A \left( \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \xi \right) - \frac{4}{3} N_f T_R \right] \left( \frac{1}{\epsilon} + R \right) \\ &= -\frac{g^2 \eta}{(4\pi)^2} \left[ C_A \left( \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \xi \right) - \frac{4}{3} N_f T_R \right] \left( \frac{1}{\epsilon} + R \right) + O(\epsilon), \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} G^{(1,CT)} &= -\frac{\bar{g}^2 \eta}{(4\pi)^2} \frac{C_A}{4} (2 + \xi) \left( \frac{1}{\epsilon} + R \right) \\ &= -\frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \frac{C_A}{4} (2 + \xi) \left( \frac{1}{\epsilon} + R \right) + O(\epsilon), \end{aligned} \quad (2.69)$$

donde  $\bar{g}^2 \equiv g^2 e^{-\gamma_E \epsilon} (4\pi)^\epsilon$ . El parámetro  $R$  es la constante que define el esquema de renormalización, que habitualmente se toma como  $R = 0$ , valor perteneciente al esquema  $\overline{\text{MS}}$ .

Al realizar expansiones para las funciones del vértice fantasma-gluón 2.61-2.65, podemos notar que en el límite  $n \rightarrow 4$  solo la función  $a$  posee divergencias. Observe la siguiente expansión para  $a$  ( $\kappa$  es definida en 3.42), función con una divergencia ultravioleta:

$$a^{(1,UV)} = \frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \frac{C_A}{2} (1 - \xi) \kappa^{(UV)}, \quad (2.70)$$

En este sentido definimos un contra-término que sustrae la singularidad:

$$\begin{aligned}
 a^{(1,CT)} &= -\frac{\bar{g}^2}{(4\pi)^2} \frac{C_A}{2} (1 - \xi) \left( \frac{1}{\epsilon} + R \right) \\
 &= -\frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \frac{C_A}{2} (1 - \xi) \left( \frac{1}{\epsilon} + R \right) + O(\epsilon) .
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Al observar las expresiones anteriores, podemos notar que el operador de polarización de gluones es finito con la elección:

$$\xi \equiv \xi_0 = \frac{2}{3} \left( \frac{4N_f T_R}{C_A} - 5 \right) , \tag{2.72}$$

del parámetro de norma. La función de auto-energía resulta finita al elegir  $n \rightarrow 4$ , incluso puede resultar finita en dimensiones extendidas, esto es, al elegir:

$$\xi \equiv \xi_0 = -\frac{2}{(n-3)} , \tag{2.73}$$

está función es nula. Por su parte las funciones del vértice fantasma-gluón son finitas con la norma de Landau  $\xi = 1$ , algo que se observa directamente de su expresión.

---

## Capítulo 3

### El vértice de tres gluones

El estudio del vértice de triple gluón debe realizarse en el formalismo de teoría cuántica de campos, dentro del cual se emplean las SDE. Este conjunto infinito de ecuaciones integrales es generalmente representado por diagramas de lazos. Como modelo a seguir en esta tesis se consideran quarks no-masivos. También se realiza una aproximación a un único lazo, que consiste en evaluar los ocho diagramas de las figuras (2.1), (2.2), (2.3), (2.4).

Estos 8 diagramas de lazos dan correcciones al vértice primario (2.29). Realizamos un análisis de las simetrías presentes en la teoría. Como resultado de este análisis podemos inferir la forma general del vértice. Por la simetría de norma se cuenta con las identidades de Ward-Slavnov-Taylor que restringen la parte longitudinal del vértice, tema en la sección 2.4.

En este capítulo se presentan las expresiones del vértice en esta forma:

$$X^m(p_1, p_2, p_3), X^{(m, \xi)}(p_1, p_2, p_3), X^{(m, q)}(p_1, p_2, p_3), \quad (3.1)$$

donde el superíndice  $m$  indica el orden perturbativo, mientras que  $\xi, q$  hacen referencia a las contribuciones fantasma-gluón (siendo  $\xi$  el parámetro de norma) y quarks respectivamente.

### 3.1. Forma general del vértice de tres gluones

El vértice de triple gluón primario depende de la constante de acoplamiento, las constantes de estructura como elementos del color y de los tensores de Lorentz con tres índices. Estos tensores se pueden construir de los momentos externos y la métrica. Por la conservación del momento, solo dos de los tres momentos externos pueden ser independientes:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0. \quad (3.2)$$

Debido a que el color es una característica independiente al momento de los gluones, las constantes de estructura (único objeto anti-simétrico de tres índices) resultan ser un factor común a toda su expresión. Por lo tanto, definimos:

$$\Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{a_1a_2a_3}(p_1p_2p_3) = f^{a_1a_2a_3}\Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}(p_1, p_2, p_3). \quad (3.3)$$

La estadística de Bose implica que el vértice completo debe ser simétrico, tomando en cuenta los momentos, índices de Lorentz y de color. Como la estructura de color  $f_{a_1a_2a_3}$  es totalmente anti-simétrica, la combinación de momentos y de índices de Lorentz también debe ser totalmente anti-simétrica [6]. Esto es:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}(p_1, p_2, p_3) &= -\Gamma_{\mu_2\mu_1\mu_3}(p_2, p_1, p_3) \\ &= \Gamma_{\mu_2\mu_3\mu_1}(p_2, p_3, p_1) = -\Gamma_{\mu_3\mu_2\mu_1}(p_3, p_2, p_1) = \Gamma_{\mu_3\mu_1\mu_2}(p_3, p_1, p_2) \\ &= -\Gamma_{\mu_1\mu_3\mu_2}(p_1, p_3, p_2) = \Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}(p_1, p_2, p_3). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Los únicos objetos covariantes de tres índices de Lorentz congruentes a estos argumentos resulta ser de 14. Sí definimos funciones escalares  $\Lambda_{ijk}$  para estos 14 tensores el vértice ob-

tiene una forma general:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}(p_1, p_2, p_3) = & g_{\mu_1\mu_2}p_{1\mu_3}\Lambda_{001} + g_{\mu_1\mu_3}p_{1\mu_2}\Lambda_{010} + g_{\mu_2\mu_3}p_{1\mu_1}\Lambda_{100} \\
 & + g_{\mu_1\mu_2}p_{2\mu_3}\Lambda_{002} + g_{\mu_1\mu_3}p_{2\mu_2}\Lambda_{020} + g_{\mu_2\mu_3}p_{2\mu_1}\Lambda_{200} \\
 & + p_{1\mu_1}p_{1\mu_2}p_{1\mu_3}\Lambda_{111} + p_{2\mu_1}p_{2\mu_2}p_{2\mu_3}\Lambda_{222} \\
 & + p_{1\mu_1}p_{1\mu_2}p_{2\mu_3}\Lambda_{112} + p_{1\mu_1}p_{2\mu_2}p_{1\mu_3}\Lambda_{121} + p_{2\mu_1}p_{1\mu_2}p_{1\mu_3}\Lambda_{211} \\
 & + p_{1\mu_1}p_{2\mu_2}p_{2\mu_3}\Lambda_{122} + p_{2\mu_1}p_{1\mu_2}p_{2\mu_3}\Lambda_{212} + p_{2\mu_1}p_{2\mu_2}p_{1\mu_3}\Lambda_{221}, \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

donde  $\Lambda_{ijk}$  son funciones de los invariantes  $p_1^2, p_2^2, p_1p_2$ . Cabe resaltar que los tensores de Lorentz del vértice (2.29) imponen los valores de  $\Lambda_{ijk}$  en el orden cero de perturbación.

Podemos verificar esto al desarrollar la regla de Feynman del vértice de triple gluón:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{(0)}(p_1, p_2, p_3) = & g_{\mu_1\mu_2}(p_1 - p_2)_{\mu_3} + g_{\mu_2\mu_3}(p_2 - p_3)_{\mu_1} + g_{\mu_3\mu_1}(p_3 - p_1)_{\mu_2} \\
 = & g_{\mu_1\mu_2}(p_1 - p_2)_{\mu_3} + g_{\mu_2\mu_3}(p_2 + p_1 + p_2)_{\mu_1} + g_{\mu_3\mu_1}(-p_1 - p_2 - p_1)_{\mu_2} \\
 = & g_{\mu_1\mu_2}p_{1\mu_3} + g_{\mu_2\mu_3}p_{1\mu_1} - 2g_{\mu_3\mu_1}p_{1\mu_2} \\
 - & g_{\mu_1\mu_2}p_{2\mu_3} + 2g_{\mu_2\mu_3}p_{2\mu_1} - g_{\mu_3\mu_1}p_{2\mu_2}. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Al comparar con (3.5) obtenemos que las funciones de estructura  $\Lambda_{ijk}$  a orden cero son:

$$\Lambda_{001} = 1, \quad \Lambda_{010} = -2, \quad \Lambda_{100} = 1, \quad \Lambda_{002} = -1, \quad \Lambda_{020} = -1, \quad \Lambda_{200} = 2. \quad (3.7)$$

En el primer orden en teoría de perturbación el vértice obtiene nuevas estructuras tensoriales. Pasando de seis a catorce tensores. Resultará práctico agrupar estos catorce tensores en el momento de evaluar el límite simétrico. En la siguiente sección presentamos algunas formas convenientes.

## 3.2. Estructuras en el vértice de tres gluones

Existen diversas convenciones sobre la forma en que deben agruparse las catorce estructuras de (3.5). La forma más general, práctica y usual es la definida en [2]. En acuerdo a ellos, podemos ordenar al vértice como seis tensores:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}(p_1, p_2, p_3) = & A(p_1^2, p_2^2; p_3^2) g_{\mu_1\mu_2}(p_1 - p_2)_{\mu_3} + B(p_1^2, p_2^2; p_3^2) g_{\mu_1\mu_2}(p_1 + p_2)_{\mu_3} \\
 & - C(p_1^2, p_2^2; p_3^2) [(p_1 p_2) g_{\mu_1\mu_2} - p_{1\mu_2} p_{2\mu_1}] (p_1 - p_2)_{\mu_3} \\
 & + \frac{1}{3} S(p_1^2, p_2^2; p_3^2) (p_{1\mu_3} p_{2\mu_1} p_{3\mu_2} + p_{1\mu_2} p_{2\mu_3} p_{3\mu_1}) \\
 & + F(p_1^2, p_2^2; p_3^2) [(p_1 p_2) g_{\mu_1\mu_2} - p_{1\mu_2} p_{2\mu_1}] [(p_2 p_3) p_{1\mu_3} - (p_1 p_3) p_{2\mu_3}] \\
 & + H(p_1^2, p_2^2; p_3^2) \{-g_{\mu_1\mu_2} [(p_2 p_3) p_{1\mu_3} - (p_1 p_3) p_{2\mu_3}] \\
 & + \frac{1}{3} (p_{1\mu_3} p_{2\mu_1} p_{3\mu_2} - p_{1\mu_2} p_{2\mu_3} p_{3\mu_1})\} \\
 & + \{\text{permutaciones cíclicas de } (p_1, \mu_1), (p_2, \mu_2), (p_3, \mu_3)\} . \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Esto quiere decir que en el orden cero las funciones de estructura  $B, C, F, H$  y  $S$  se anulan, mientras que  $A(p_1, p_2, p_3) = 1$ . De esta forma el vértice coincide con su definición primaria. Debemos hacer notar que las funciones de estructura  $\Lambda_{i,j,k}$  presentadas en 3.5 y las correspondientes funciones  $A, B, C, F, H, S$  de (3.8) se relacionan entre sí por medio de las expresiones:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{001} = & A(p_1^2, p_2^2; p_3^2) - (p_1 p_2) C(p_1^2, p_2^2; p_3^2) + B(p_1^2, p_2^2; p_3^2) + (p_1 p_2) (p_2 p_3) \\
 & \times F(p_1^2, p_2^2; p_3^2) - (p_2 p_3) H(p_1^2, p_2^2; p_3^2) , \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{002} = & -A(p_1^2, p_2^2; p_3^2) + (p_1 p_2) C(p_1^2, p_2^2; p_3^2) + B(p_1^2, p_2^2; p_3^2) - (p_1 p_2) (p_1 p_3) \\
 & \times F(p_1^2, p_2^2; p_3^2) + (p_1 p_3) H(p_1^2, p_2^2; p_3^2) , \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{100} = & A(p_2^2, p_3^2; p_1^2) - (p_2 p_3) C(p_2^2, p_3^2; p_1^2) - B(p_2^2, p_3^2; p_1^2) + (p_1 p_2)(p_2 p_3) \\ & \times F(p_2^2, p_3^2; p_1^2) - (p_1 p_2) H(p_1^2, p_2^2; p_3^2), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{200} = & 2A(p_2^2, p_3^2; p_1^2) - 2(p_2 p_3) C(p_2^2, p_3^2; p_1^2) - p_1^2(p_2 p_3) F(p_2^2, p_3^2; p_1^2) + p_1^2 \\ & \times H(p_1^2, p_2^2; p_3^2), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{010} = & -2A(p_3^2, p_1^2; p_2^2) + 2(p_1 p_3) C(p_3^2, p_1^2; p_2^2) + p_2^2(p_1 p_3) F(p_3^2, p_1^2; p_2^2) \\ & - p_2^2 H(p_1^2, p_2^2; p_3^2), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{020} = & -A(p_3^2, p_1^2; p_2^2) + (p_1 p_3) C(p_3^2, p_1^2; p_2^2) - B(p_3^2, p_1^2; p_2^2) - (p_1 p_2)(p_1 p_3) \\ & \times F(p_3^2, p_1^2; p_2^2) + (p_1 p_2) H(p_1^2, p_2^2; p_3^2), \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\Lambda_{111} = 2C(p_3^2, p_1^2; p_2^2) + p_2^2 F(p_3^2, p_1^2; p_2^2), \quad (3.15)$$

$$\Lambda_{222} = -2C(p_2^2, p_3^2; p_1^2) - p_1^2 F(p_2^2, p_3^2; p_1^2), \quad (3.16)$$

$$\Lambda_{112} = -C(p_2^2, p_3^2; p_1^2) + (p_1 p_2) F(p_2^2, p_3^2; p_1^2) + H(p_1^2, p_2^2; p_3^2) - S(p_1^2, p_2^2; p_3^2), \quad (3.17)$$

$$\Lambda_{121} = C(p_3^2, p_1^2; p_2^2) - (p_1 p_2) F(p_3^2, p_1^2; p_2^2), \quad (3.18)$$

$$\Lambda_{122} = -C(p_2^2, p_3^2; p_1^2) + (p_1 p_2) F(p_2^2, p_3^2; p_1^2), \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{211} = & C(p_1^2, p_2^2; p_3^2) + 2C(p_3^2, p_1^2; p_2^2) - (p_2 p_3) F(p_1^2, p_2^2; p_3^2) + p_2^2 F(p_3^2, p_1^2; p_2^2) \\ & - H(p_1^2, p_2^2; p_3^2) - S(p_1^2, p_2^2; p_3^2), \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{212} = & -C(p_1^2, p_2^2; p_3^2) - 2C(p_2^2, p_3^2; p_1^2) + (p_1 p_3) F(p_1^2, p_2^2; p_3^2) - p_1^2 F(p_2^2, p_3^2; p_1^2) \\ & + H(p_1^2, p_2^2; p_3^2) - S(p_1^2, p_2^2; p_3^2), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\Lambda_{221} = C(p_3^2, p_1^2; p_2^2) - (p_1 p_2) F(p_3^2, p_1^2; p_2^2) - H(p_1^2, p_2^2; p_3^2) - S(p_1^2, p_2^2; p_3^2). \quad (3.22)$$

Con la identidad de WST (2.4), podemos descomponer al vértice de tres gluones en dos partes. En este caso podemos escribir la parte transversa por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{(T)}(p_1, p_2, p_3) = & F(p_1^2, p_2^2; p_3^2) [(p_1 p_2) g_{\mu_1\mu_2} - p_{1\mu_2} p_{2\mu_1}] [(p_2 p_3) p_{1\mu_3} - (p_1 p_3) p_{2\mu_3}] \\ & + H(p_1^2, p_2^2; p_3^2) \{-g_{\mu_1\mu_2} [(p_2 p_3) p_{1\mu_3} - (p_1 p_3) p_{2\mu_3}] + \frac{1}{3} (p_{1\mu_3} p_{2\mu_1} p_{3\mu_2} - p_{1\mu_2} p_{2\mu_3} p_{3\mu_1})\} \\ & + \{\text{permutaciones cíclicas de } (p_1, \mu_1), (p_2, \mu_2), (p_3, \mu_3)\} . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Por otro lado, la parte longitudinal tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{(L)}(p_1, p_2, p_3) = & A(p_1^2, p_2^2; p_3^2) g_{\mu_1\mu_2} (p_1 - p_2)_{\mu_3} + B(p_1^2, p_2^2; p_3^2) g_{\mu_1\mu_2} (p_1 + p_2)_{\mu_3} \\ & - C(p_1^2, p_2^2; p_3^2) [(p_1 p_2) g_{\mu_1\mu_2} - p_{1\mu_2} p_{2\mu_1}] (p_1 - p_2)_{\mu_3} + \frac{1}{3} S(p_1^2, p_2^2, p_3^2) (p_{1\mu_3} p_{2\mu_1} p_{3\mu_2} \\ & + p_{1\mu_2} p_{2\mu_3} p_{3\mu_1}) + \{\text{permutaciones cíclicas de } (p_1, \mu_1), (p_2, \mu_2), (p_3, \mu_3)\} . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Los argumentos de simetría nos llevan a determinar únicamente las funciones escalares.  $A, B, C, F, H$  y  $S$  serán la referencia principal en este documento. El procedimiento para calcular estas funciones implican los lazos encontrados en la sección 2.3. En la siguiente sección se dará una breve referencia al cálculo de integrales de dos y tres puntos.

### 3.3. Integraciones, funciones auxiliares en el vértice de tres gluones

Como es habitual en estudios perturbativos de lazos, es necesario evaluar un conjunto de integrales escalares. Para el desarrollo del vértice de tres gluones a un lazo requerimos integrales de dos y tres puntos. Estas pueden obtenerse al evaluar integraciones escalares con la



forma general:

$$J(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \int \frac{d^n q}{[(p_2 - q)^2]^{\nu_1} [(p_1 + q)^2]^{\nu_2} (q^2)^{\nu_3}}, \quad (3.25)$$

los parámetros  $\nu_{1,2,3}$  son números enteros y  $n$  son las dimensiones del espacio-tiempo.  $p_1$  y  $p_2$  son momentos externos. Nuestro primer objetivo es el de abordar las correspondientes de dos puntos, donde uno de los parámetros  $\nu$  es cero.

### 3.3.1. Integrales de dos puntos

Algunas de las integrales que aparecen con mayor frecuencia en este documento son de dos puntos. Como veremos más adelante, estas definen a la función auxiliar  $\kappa_i$ .

Sí partimos de (3.25), cada integral de dos puntos se obtiene de la elección particular del valor de dos índices. Como ejemplo de esto tenemos a  $J(0, \nu_2, \nu_3)$ ,  $J(\nu_1, 0, \nu_3)$ ,  $J(\nu_1, \nu_2, 0)$ :

$$J(0, \nu_2, \nu_3) = \int \frac{d^n q}{[(p_1 + q)^2]^{\nu_2} (q^2)^{\nu_3}} \equiv I_1(p_1; \nu_2, \nu_3), \quad (3.26)$$

$$J(\nu_1, 0, \nu_3) = \int \frac{d^n q}{[(p_2 - q)^2]^{\nu_1} (q^2)^{\nu_3}} \equiv I_2(p_2; \nu_1, \nu_3), \quad (3.27)$$

$$J(\nu_1, \nu_2, 0) = \int \frac{d^n q}{[(p_2 - q)^2]^{\nu_1} [(p_1 + q)^2]^{\nu_2}} \equiv I_3(p_1 + p_2; \nu_1, \nu_2). \quad (3.28)$$

Vamos a mostrar que  $J(\nu_1, \nu_2, 0)$ ,  $J(\nu_1, 0, \nu_3)$  y  $J(0, \nu_2, \nu_3)$  solo difieren en el argumento.

El cambio  $q \rightarrow -q$  en (3.27) tiene como resultado:

$$I_2(p_2; \nu_1, \nu_3) = I_1(p_2; \nu_1, \nu_3). \quad (3.29)$$

Por su parte, el cambio  $q \rightarrow -p_1 - q$  en (3.28) hace que las integraciones:

$$I_3(p_1 + p_2; \nu_1, \nu_2) = I_1(p_1 + p_2; \nu_1, \nu_2) . \quad (3.30)$$

En este sentido, con toda generalidad basta con evaluar:

$$J(0, \nu_2, \nu_3) = \int \frac{d^n q}{[(p+q)^2]^{\nu_2} (q^2)^{\nu_3}} . \quad (3.31)$$

Utilizamos la representación de Schwinger de los factores en el denominador:

$$\prod_{i=1}^N \frac{1}{[(a_i)^2]^{\nu_i}} = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\Gamma(\nu_i)} \int_0^\infty d\alpha_i \alpha_i^{\nu_i-1} \exp(-\alpha_i a_i^2) , \quad (3.32)$$

también una rotación de Wick:

$$q_0 \rightarrow iq_0 , \quad (3.33)$$

en este caso, el cuadrado del momento externo es:

$$q^2 = -q_0^2 - \vec{q}^2 = -q_E^2 , \quad (3.34)$$

al sustituir en (3.40) obtenemos (por simplicidad no cambiaremos la notación):

$$\begin{aligned} J(0, \nu_2, \nu_3) &= i \int \frac{d^n q}{[-(p+q)^2]^{\nu_2} [-(q^2)]^{\nu_3}} \\ &= \frac{i(-1)^{\nu_2+\nu_3}}{\Gamma(\nu_2)\Gamma(\nu_3)} \int d^n q d\alpha_1 d\alpha_2 e^{-\alpha_1(p+q)^2 - \alpha_2 q^2} \alpha_1^{\nu_2-1} \alpha_2^{\nu_3-1} \\ &= \frac{i(-1)^{\nu_2+\nu_3}}{\Gamma(\nu_2)\Gamma(\nu_3)} \int d^n q d\alpha_1 d\alpha_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)[p+\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}p]^2 - \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}p^2} \alpha_1^{\nu_2-1} \alpha_2^{\nu_3-1} . \end{aligned} \quad (3.35)$$

Resulta conveniente hacer cambios de variables:

$$\begin{aligned} q' &= q + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} p, & \alpha_1 &= u(1-v), & \alpha_2 &= uv, \\ u &= \alpha_1 + \alpha_2, & v &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde  $u$  y  $v$  están definidos en  $0 < u < \infty, 0 < v < 1$ . El determinante Jacobiano es:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u(1-v) + uv = u. \quad (3.37)$$

Después de la integración por el momento interno del lazo:

$$J(0, \nu_2, \nu_3) = \frac{i(-1)^{\nu_2+\nu_3} \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\nu_2) \Gamma(\nu_3)} \int_0^1 dv v^{\nu_2-1} (1-v)^{\nu_3-1} \int_0^\infty du e^{-uv(1-v)p^2} u^{\nu_2+\nu_3-\frac{n}{2}-1}, \quad (3.38)$$

entonces, serán necesarias las funciones especiales gamma y beta:

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty du e^{-u} u^{z-1}, \quad B(z_1, z_2) \equiv \int_0^1 du u^{z_1-1} (1-u)^{z_2-1} = \frac{\Gamma(z_1) \Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1 + z_2)}.$$

La primera integración de (3.38) está en términos de la función gamma:

$$\int_0^\infty du e^{-uv(1-v)p^2} u^{\nu_2+\nu_3-\frac{n}{2}-1} = \frac{\Gamma(\nu_2 + \nu_3 - \frac{n}{2})}{(p^2)^{\nu_2+\nu_3-\frac{n}{2}} [v(1-v)]^{\nu_2+\nu_3-\frac{n}{2}}}.$$

Al considerar el resultado de está integración, (3.3.1) obtiene la forma:

$$J(0, \nu_2, \nu_3) = i\pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\nu_2 + \nu_3 - \frac{n}{2})}{\Gamma(\nu_2) \Gamma(\nu_3)} \frac{(-1)^{\nu_2+\nu_3}}{(p^2)^{\nu_2+\nu_3-\frac{n}{2}}} \int_0^1 dv \frac{v^{\nu_2-1} (1-v)^{\nu_3-1}}{[v(1-v)]^{\nu_2+\nu_3-\frac{n}{2}}}. \quad (3.39)$$

La integral en la variable  $v$  involucra a la función especial beta:

$$\int_0^1 dv \frac{v^{\nu_2-1} (1-v)^{\nu_3-1}}{[v(1-v)]^{\nu_2+\nu_3-\frac{n}{2}}} = \int_0^1 dv v^{\frac{n}{2}-\nu_3-1} (1-v)^{\frac{n}{2}-\nu_2-1} = B\left(\frac{n}{2}-\nu_3, \frac{n}{2}-\nu_2\right).$$

Entonces, la integración (3.3.1) tiene como resultado:

$$J(0, \nu_2, \nu_3) = (-1)^{\nu_2+\nu_3} i\pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\nu_2 + \nu_3 - \frac{n}{2})}{\Gamma(\nu_2)\Gamma(\nu_3)} B\left(\frac{n}{2}-\nu_3, \frac{n}{2}-\nu_2\right) \frac{1}{p^{2(\nu_2+\nu_3-\frac{n}{2})}}. \quad (3.40)$$

En particular, para los valores  $\nu_1 = \nu_2 = 1$  (3.3.1) tiene una expresión, cuyos resultados contienen las funciones  $\kappa$  y  $\eta$  definidas en [5]:

$$J(0, 1, 1) = i\pi^{\frac{n}{2}} \eta \kappa(p^2), \quad (3.41)$$

funciones que se han definido como:

$$\kappa(p^2) \equiv -\frac{2}{(n-3)(n-4)} (-p^2)^{\frac{n-4}{2}}, \quad \eta \equiv \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma(n-3)} \Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right). \quad (3.42)$$

Nuestro desarrollo del vértice requiere integraciones de tensores con uno y dos índices:

$$T_{\mu_1}(a) = \int \frac{d^n q q_{\mu_1}}{(q+a)^2 (q)^2}, \quad T_{\mu_1 \mu_2}(a) = \int \frac{d^n q q_{\mu_1} q_{\mu_2}}{(q+a)^2 (q)^2}. \quad (3.43)$$

Consideremos la de un índice, que debe tener como resultado:

$$T_{\mu_1}(a) = a_{\mu_1} G(a^2). \quad (3.44)$$

La función escalar  $G$  se determina al contraer por  $a^{\mu_1}$ :

$$G(a^2) = \frac{1}{a^2} \int \frac{d^n q (aq)}{(q+a)^2 (q)^2}, \quad (3.45)$$

el producto en el numerador se debe expresar como una diferencia de cuadrados:

$$(aq) = \frac{1}{2} [(q+a)^2 - q^2 - a^2]. \quad (3.46)$$

Obteniendo tres integraciones escalares. En la regularización dimensional, integrales del tipo tad-pole son nulas:

$$\int \frac{dq^n}{(q+a)^2} = \int \frac{dq^n}{q^2} = 0. \quad (3.47)$$

Al reunir las propiedades (3.46), (3.47) podemos dar una expresión para  $G$ :

$$G(a^2) = -I(a; 1, 1), \quad (3.48)$$

entonces, la integración  $T_{\mu_1}$  de (3.43) es:

$$T_{\mu_1}(a) = -i\pi^{\frac{n}{2}} \eta \kappa(a^2) a_{\mu_1}. \quad (3.49)$$

Consideremos ahora el caso a dos índices de (3.43). Con toda generalidad, podemos proponer una descomposición con dos tensores para el lado izquierdo:

$$\int \frac{d^n q (q_{\mu_1} q_{\mu_2})}{[(q+a)^2]^{\nu_2} [(q)^2]^{\nu_3}} = A \left( \frac{p_{\mu_1} p_{\mu_2}}{p^2} - \frac{g_{\mu_1 \mu_2}}{n} \right) + B g_{\mu_1 \mu_2}, \quad (3.50)$$

misma que nos permite determinar las funciones escalares  $A, B$  al contraer por  $a^{\mu_1} a^{\mu_2}$  y

$g^{\mu_1\mu_2}$ . Consideremos la contracción por el tensor métrico  $g^{\mu_1\mu_2}$  en 3.50:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^n q g^{\mu_1\mu_2} (q_{\mu_1} q_{\mu_2})}{[(q+a)^2]^{\nu_2} [(q)^2]^{\nu_3}} &= \int \frac{d^n q (q^2)}{[(q+a)^2]^{\nu_2} [(q)^2]^{\nu_3}} \\ &= \int \frac{d^n q}{[(q+a)^2]^{\nu_2} [(q)^2]^{\nu_3-1}}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

que es una integral de tipo (3.40), por lo tanto:

$$\int \frac{d^n q g^{\mu_1\mu_2} (q_{\mu_1} q_{\mu_2})}{[(q+a)^2]^{\nu_2} [(q)^2]^{\nu_3}} = J(0, \nu_2, \nu_3 - 1), \quad (3.52)$$

Por su parte, el lado derecho de esta igualdad es:

$$A \left[ g^{\mu_1\mu_2} \left( \frac{a_{\mu_1} a_{\mu_2}}{a^2} - \frac{g_{\mu_1\mu_2}}{n} \right) \right] + B (g^{\mu_1\mu_2} g_{\mu_1\mu_2}) = A \left( \frac{a^2}{a^2} - \frac{n}{n} \right) + nB = nB. \quad (3.53)$$

En acuerdo a (3.51) podemos afirmar que la función escalar  $B$  es:

$$B(a; \nu_2, \nu_3) = \frac{1}{n} J(0, \nu_2, \nu_3 - 1). \quad (3.54)$$

Ahora, realizaremos la contracción por  $a^{\mu_1} a^{\mu_2}$  en el lado izquierdo de 3.50:

$$\begin{aligned} &A (a^{\mu_1} a^{\mu_2}) \left( \frac{a_{\mu_1} a_{\mu_2}}{a^2} - \frac{g_{\mu_1\mu_2}}{n} \right) + B (a^{\mu_1} a^{\mu_2}) g_{\mu_1\mu_2} \\ &= A \left( \frac{a^{\mu_1} a_{\mu_1} a^{\mu_2} a_{\mu_2}}{a^2} - \frac{g_{\mu_1\mu_2} a^{\mu_1} a^{\mu_2}}{n} \right) + B (a^{\mu_1} a^{\mu_2}) g_{\mu_1\mu_2} \\ &= A \left( \frac{(a^2)^2}{a^2} - \frac{a^2}{n} \right) + B (a^2) = A \left( \frac{n-1}{n} \right) a^2 + B (a^2), \end{aligned} \quad (3.55)$$

mientras que en el lado derecho de esta igualdad tenemos:

$$\int \frac{d^n q (a^{\mu_1} a^{\mu_2}) (q_{\mu_1} q_{\mu_2})}{[(q+a)^2]^{\nu_2} [(q)^2]^{\nu_3}} = \int \frac{d^n q (a^{\mu_1} q_{\mu_1} a^{\mu_2} q_{\mu_2})}{[(q+a)^2]^{\nu_2} [(q)^2]^{\nu_3}} = \int \frac{d^n q (aq)^2}{[(q+a)^2]^{\nu_2} [(q)^2]^{\nu_3}}, \quad (3.56)$$

el producto de los tensores en el denominador se puede expresar como una diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} (aq)^2 &= \frac{1}{2} [(q+a)^2 - (q)^2 - (a)^2]^2 = \frac{1}{2} [(q+a)^2]^2 + \frac{1}{2} [(q)^2]^2 + \frac{1}{2} [(a)^2]^2 \\ &\quad - (q+a)^2 (q)^2 - (q+a)^2 (a)^2 - (q)^2 (a)^2, \end{aligned} \quad (3.57)$$

en este sentido el lado derecho de (3.56) tiene como resultado seis integrales:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^n q (aq)^2}{[(q+a)^2]^{\nu_2} [(q)^2]^{\nu_3}} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^n q \{ [(q+a)^2]^2 + [(q)^2]^2 + [(a)^2]^2 \}}{[(q+a)^2]^{\nu_2} [(q)^2]^{\nu_3}} \\ &\quad - \int \frac{d^n q \{ (q+a)^2 (q)^2 + (q+a)^2 (a)^2 + (q)^2 (a)^2 \}}{[(q+a)^2]^{\nu_2} [(q)^2]^{\nu_3}}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

al considerar (3.40) podemos establecer que el lado derecho de 3.56 es:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^n q (aq)^2}{[(q+a)^2]^{\nu_2} [(q)^2]^{\nu_3}} &= \frac{1}{2} J(0, \nu_2 - 2, \nu_3) + \frac{1}{2} J(0, \nu_2, \nu_3 - 2) + \frac{1}{2} (a^2)^2 J(0, \nu_2, \nu_3) \\ &\quad - J(0, \nu_2 - 1, \nu_3 - 1) - (a^2) J(0, \nu_2 - 1, \nu_3 - 2) \\ &\quad - (a^2) J(0, \nu_2, \nu_3 - 1). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Con los desarrollos (3.55), (3.57) y (3.54) podemos establecer que la función escalar  $A$  es:

$$\begin{aligned} A(a; \nu_2, \nu_3) = & \frac{1}{2a^2} \frac{n}{n-1} \{ J(0, \nu_2 - 2, \nu_3) + J(0, \nu_2, \nu_3 - 2) + (a^2)^2 J(0, \nu_2, \nu_3) \\ & - 2J(0, \nu_2 - 1, \nu_3 - 1) - 2(a^2) J(0, \nu_2 - 1, \nu_3 - 2) \\ & - 2(a^2) J(0, \nu_2, \nu_3 - 1) - \left(\frac{a^2}{n}\right) J(0, \nu_2, \nu_3 - 1) \}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

En resumen, las integrales de dos puntos e índices tienen como resultado:

$$T_{\mu_1\mu_2}(a) = A(a; \nu_2, \nu_3) \left( \frac{a_{\mu_1} a_{\mu_2}}{a^2} - \frac{g_{\mu_1\mu_2}}{n} \right) + B(a; \nu_2, \nu_3) g_{\mu_1\mu_2}, \quad (3.61)$$

con  $A(a; \nu_2, \nu_3)$ ,  $B(a; \nu_2, \nu_3)$  dados por 3.60 y 3.54 respectivamente. En este sentido cada integral de dos puntos necesaria se puede obtener del resultado general dado en (3.40).

### 3.3.2. Integrales de tres puntos

Las integraciones de tres puntos se caracterizan por ser divergentes. Son de interés las que aparecen por las dimensiones del espacio-tiempo y las cinemáticas. Diversos artículos proveen resultados de las integraciones necesarias en este documento, [5, 8, 11, 12, 23–27].

En esta tesis no hemos evaluado estas integraciones, en su lugar hemos tomado los resultados presentados en [5]. En el cálculo de las funciones escalares del vértice aparecen integrales con alguno de los parámetros  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  en valores negativos.

Existen equivalencias entre integrales de dos puntos y de tres con un índice negativo. Integrales como  $J(1, 1, -1)$ ,  $J(1, 1, -2)$  y  $J(1, 1, -3)$  resultan proporcionales a  $J(1, 1, 0)$ :

$$J(1, 1, -1) = -(p_1 p_2) J(1, 1, 0), \quad (3.62)$$



$$J(1, 1, -1) = -(p_1 p_2) J(1, 1, 0), \quad (3.63)$$

$$J(1, 1, -2) = \frac{1}{n-1} [n(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2] J(1, 1, 0), \quad (3.64)$$

$$J(1, 1, -3) = -\frac{1}{n-1} [(n+2)(p_1 p_2)^2 - 3p_1^2 p_2^2] (p_1 p_2) J(1, 1, 0). \quad (3.65)$$

La integración de mayor dificultad es (3.25). En los artículos [5, 8, 11, 12] se muestra que estas integrales escalares siempre se reducen a  $J(1, 1, 1)$  haciendo uso del Método de Davydychev. En estos mismos se presenta a la función  $\varphi$  que proviene de la integral de Clausen:

$$\begin{aligned} \varphi(p_1^2, p_2^2, p_3^2) |_{n=4} = & \frac{1}{p_3^2 \lambda} \{ 2 [L_{i_2}(-\rho x) + L_{i_2}(-\rho y)] + \ln\left(\frac{y}{x}\right) \ln\left(\frac{1+\rho y}{1+\rho x}\right) \\ & \times + \ln(\rho x) \ln(\rho y) + \frac{\pi^2}{3} \}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

donde  $\lambda$  y  $\rho$  se definen como funciones compuestas, que tienen la forma:

$$\lambda(x, y) = \sqrt{(1-x-y)^2 - 4xy}, \quad \rho(x, y) = \frac{1}{1-x-y+\lambda}, \quad (3.67)$$

los parámetros de la integración están implícitos en las funciones  $x, y$ , que son cocientes de los invariantes cinemáticos:

$$x = \frac{p_1^2}{p_3^2}, \quad y = \frac{p_2^2}{p_3^2}. \quad (3.68)$$

Esta función  $\varphi$  es definida por la integración  $J(1, 1, 1)$ :

$$J(1, 1, 1) |_{p_3^2=0}^{n=4-2\epsilon} = i\pi^{\frac{n}{2}} \eta \varphi(p_1^2, p_2^2, p_3^2). \quad (3.69)$$

También se presentan los resultados de la mismas al evaluar los distintos límites cinemáti-

cos; para los números  $n = 4$  y  $n = 4 - 2\epsilon$  como dimensiones del espacio-tiempo:

$$J(1, 1, 1) \Big|_{p_1^2=p_2^2=p_3^2=p^2}^{n=4} = i\pi^2 \varphi(p^2, p^2, p^2) = i \frac{\pi^2}{p^2} \frac{4}{\sqrt{3}} Cl_2\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad (3.70)$$

$$J(1, 1, 1) \Big|_{p_3^2=0}^{n=4-2\epsilon} = i\pi^{2-\epsilon} \eta \varphi(p_1^2, p_2^2, 0) = i\pi^{2-\epsilon} \eta \frac{1}{\epsilon^2} \frac{(-p_1^2)^{-\epsilon} - (-p_2^2)^{-\epsilon}}{p_1^2 - p_2^2}, \quad (3.71)$$

$$J(1, 1, 1) \Big|_{p_3^2=0}^{n=4-2\epsilon} = i\pi^{2-\epsilon} \eta \varphi(p^2, p^2, 0) = i\pi^{2-\epsilon} \eta \frac{1}{\epsilon} (-p^2)^{-1-\epsilon}, \quad (3.72)$$

$$J(1, 1, 1) \Big|_{p_1^2=p_2^2=0}^{n=4-2\epsilon} = i\pi^{2-\epsilon} \eta \varphi(0, 0, p^2) = -i\pi^{2-\epsilon} \eta \frac{1}{\epsilon^2} (-p^2)^{-1-\epsilon}. \quad (3.73)$$

Estas funciones aparecen dentro de los resultados de las integrales de tres puntos:

$$T_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \int \frac{d^n q (q_{\mu_1} q_{\mu_2} q_{\mu_3})}{[(p_2 - q)^2]^{\nu_1} [(p_1 + q)^2]^{\nu_2} (q^2)^{\nu_3}}. \quad (3.74)$$

Estas integraciones son de alta complejidad y su evaluación requiere el uso de técnicas de computo. En este sentido hemos elegido omitir este procedimiento. En lugar de ello hemos tomado los resultados de las funciones de estructura en acuerdo a [5].

### 3.4. Funciones de estructura del vértice de tres gluones

Como se ha visto en el capítulo anterior determinar el vértice consiste en calcular las funciones  $A, B, C, F, H$  y  $S$ . Para realizar esto se deben evaluar los ocho diagramas presentados en la sección 2.3 ordenando los resultados en acuerdo a (3.8).

Los resultados de las integraciones escalares en los lazos definen las funciones  $\eta, \kappa, \varphi, \mathcal{Q}$  y  $\mathcal{K}$ . Las dependientes a las dimensiones del espacio tienen la forma:

$$\eta \equiv \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{\Gamma(n - 3)} \Gamma\left(3 - \frac{n}{2}\right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{4-2\epsilon}{2} - 1\right)}{\Gamma(4 - 2\epsilon - 3)} \Gamma\left(3 - \frac{4 - 2\epsilon}{2}\right) = \frac{\Gamma^2(1 - \epsilon)}{\Gamma(1 - 2\epsilon)} \Gamma(1 + \epsilon), \quad (3.75)$$

$$\kappa \equiv \kappa_i = -\frac{2}{(n-3)(n-4)} (-p_i^2)^{\frac{n-4}{2}} = -\frac{2}{\epsilon(1-2\epsilon)} (-p_i^2)^{-\epsilon}, \quad (3.76)$$

observe que el factor  $\eta$  es finito y que  $\kappa$  contiene una divergencia sustraible. Las funciones  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{K}$  son dependientes a los invariantes cinemáticos. La primera de ellas es:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &\equiv (p_1 p_2) + (p_1 p_3) + (p_2 p_3) = (p_1 p_2) - (p_1 + p_2)(p_1 + p_2) \\ &= (p_1 p_2) - p_1^2 - 2(p_1 p_2) - p_2^2 = -p_1^2 - p_2^2 - (p_1 p_2). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Podemos desarrollar la suma de cuadrados en los momentos y así observar que corresponde con la definición de la función  $\mathcal{Q}$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) &= -\frac{1}{2}[p_1^2 + p_2^2 + (p_1 + p_2)^2] = -\frac{1}{2}[2p_1^2 + 2p_2^2 + 2(p_1 p_2)] \\ &= -p_1^2 - p_2^2 - (p_1 p_2). \end{aligned} \quad (3.78)$$

La función  $\mathcal{K}$  es conocida como función de Källen y posee la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &\equiv p_1^2 p_3^2 - (p_1 p_3)^2 = p_1^2 (p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2) - (p_1 (p_1 + p_2))^2 \\ &= p_1^4 + p_1^2 p_2^2 + 2p_1^2 p_1 p_2 - (p_1^2 + p_1 p_2)^2 \\ &= p_1^2 p_2^2 + p_1^4 + 2p_1^2 p_1 p_2 - p_1^4 - (p_1 p_2)^2 - 2p_1^2 p_1 p_2 \\ &= p_1^2 p_2^2 - (p_1 p_2)^2. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Ahora podemos presentar las funciones de estructura (obtenidas en [5]). Será habitual la distinción por los lazos de origen. Iniciaremos con las aportaciones que provienen de gluo-

nes y fantasmas (etiquetadas con el parámetro de norma  $\xi$  en el superíndice):

$$\begin{aligned}
 A^{(1,\xi)}(p_1^2, p_2^2; p_3^2) &= \frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{C_A}{32\mathcal{K}^2 p_1^2 p_2^2} \{ [p_1^2 p_2^2 \mathcal{K}([8 - 4\xi - (n-2)(n-3)\xi^2] p_3^2 + 2 \\
 &\quad \times [12 + 4(n-3)\xi + (n-3)\xi^2] (p_1 p_2)) + \xi((n-4)\xi + 4) \mathcal{K} \mathcal{Q} \\
 &\quad \times ((n-3)(p_1 p_2) \mathcal{Q} - (n-4)\mathcal{K}) + \xi((n-3)\xi + 2)(n-1) p_1^2 p_2^2 p_3^2 (p_1 p_2) \mathcal{Q}] \\
 &\quad \times [p_3^2 (p_1 p_2) \varphi + (p_1 p_3) \kappa_1 + (p_2 p_3) \kappa_2 + p_3^2 \kappa_3] \\
 &\quad - \mathcal{K} [((n-4)\xi + 4) \mathcal{K} (((n-4)\xi - 8) p_1^2 p_2^2 + \xi \mathcal{Q} ((n-2) p_3^2 - 2(n-3)(p_1 p_2)))] \\
 &\quad - \xi((n-3)\xi + 2)(n-2) p_1^2 p_2^2 p_3^2 \mathcal{Q} [(p_1 p_2) \varphi + \kappa_3] \\
 &\quad + \mathcal{K} \varphi [\xi((n-4)\xi + 4) \mathcal{K} ((2n-7) p_1^2 p_2^2 p_3^2 + \mathcal{Q} (p_1^2 (p_1 p_3) + p_2^2 (p_2 p_3)))] \\
 &\quad + \xi((n-3)\xi + 2) p_1^2 p_2^2 p_3^2 (p_3^2 \mathcal{Q} - 2(n-4)\mathcal{K})] \\
 &\quad - \frac{\mathcal{K}}{n-1} [p_1^2 p_2^2 \mathcal{K} (8(3n-2) + 4(n-1)(5n-17)\xi - 3(n-1)(n-4)\xi^2) \\
 &\quad + \xi((n-4)\xi + 4)(n-1) \mathcal{K} \mathcal{Q}^2 + \xi((n-3)\xi + 2)(n-1) p_1^2 p_2^2 p_3^2 \mathcal{Q} (\kappa_1 + \kappa_2)] \}, \\
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

función que es de carácter simétrico en los primeros dos argumentos. La función  $B$  es:

$$\begin{aligned}
 B^{(1,\xi)}(p_1^2, p_2; p_3^2) &= \frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{C_A}{32\mathcal{K}^2 p_1^2 p_2^2 p_3^2} (p_1^2 - p_2^2) \{ [-p_1^2 p_2^2 p_3^2 \mathcal{K} (8 - 12\xi - (n+2) \\
 &\quad \times (n-3)\xi^2) + \xi((n-4)\xi + 4) \mathcal{K} \mathcal{Q} ((n-2)\mathcal{K} + (n-3)(p_1 p_2) (p_3^2 + (p_1 p_2)))] \\
 &\quad + \xi((n-3)\xi + 2) p_1^2 p_2^2 (2\mathcal{K} \mathcal{Q} + (n-1) p_3^2 (p_1 p_2) (p_3^2 + (p_1 p_2)))] [p_3^2 (p_1 p_2) \varphi \\
 &\quad + (p_1 p_3) \kappa_1 + (p_2 p_3) \kappa_2 + p_3^2 \kappa_3] + (n-4) \mathcal{K} [\xi((n-4)\xi + 4) \mathcal{K} (p_3^2 \mathcal{Q} + p_1^2 p_2^2) \\
 &\quad + \xi((n-3)\xi + 2) p_1^2 p_2^2 p_3^2 (p_3^2 + (p_1 p_2))] - \mathcal{K} p_3^2 \varphi [p_1^2 p_2^2 \mathcal{K} (8 + 4(n-5)\xi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (3n - 10) \xi^2) + \xi ((n - 4) \xi + 4) \mathcal{K} \mathcal{Q}^2 - \xi ((n - 3) \xi + 2) p_1^2 p_2^2 p_3^2 (p_3^2 + (p_1 p_2)) \\
 & - \frac{\mathcal{K}}{n - 1} \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{p_1^2 - p_2^2} [p_1^2 p_2^2 p_3^2 \mathcal{K} (8(4n - 3) + 4(n - 1)(5n - 19) \xi - (n - 1)(5n - 18) \xi^2) \\
 & + \xi ((n - 4) \xi + 4) (n - 1) \mathcal{K} \mathcal{Q} (p_1^2 (p_1 p_3) + p_2^2 (p_2 p_3)) - \xi ((n - 3) \xi + 2) (n - 1) p_1^2 p_2^2 \\
 & \times (p_1^2 - p_2^2)^2 (p_3^2 + (p_1 p_2))] \}, \tag{3.81}
 \end{aligned}$$

resulta anti-simétrica en los dos primeros argumentos. La función  $C$  es:

$$\begin{aligned}
 C^{(1,\xi)}(p_1^2, p_2^2; p_3^2) &= \frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{C_A}{16 \mathcal{K}^2 p_1^2 p_2^2 p_3^2} \{ [2p_1^2 p_2^2 p_3^2 \mathcal{K} (6 + (2n - 5) \xi + (n - 3) \xi^2) + \xi \\
 & \times ((n - 4) \xi + 4) \mathcal{K} \mathcal{Q} (\mathcal{K} + (n - 3) p_3^2 (p_1 p_2)) + \xi ((n - 3) \xi + 2) (n - 1) p_1^2 p_2^2 (p_3^2)^2 \\
 & \times (p_1 p_2)] [p_3^2 (p_1 p_2) \varphi + (p_1 p_3) \kappa_1 + (p_2 p_3) \kappa_2 + p_3^2 \kappa_3] + (n - 4) \mathcal{K} p_3^2 (\xi ((n - 4) \xi + 4) \\
 & \times \xi \mathcal{K} \mathcal{Q} + \xi ((n - 3) \xi + 2) p_1^2 p_2^2 p_3^2 [(p_1 p_2) \varphi + \kappa_3] + \mathcal{K} p_3^2 \varphi [\xi ((n - 4) \xi + 4) \mathcal{K} \\
 & \times (p_1^2 p_2^2 - \mathcal{Q}^2) + \xi ((n - 3) \xi + 2) p_1^2 p_2^2 (p_3^2)^2] - \frac{\mathcal{K}}{n - 1} \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{p_1^2 - p_2^2} [2p_1^2 p_2^2 p_3^2 \mathcal{K} (4(4n - 3) \\
 & + 2(n - 1)(5n - 18) \xi - (n - 1)(2n - 7) \xi^2) + \xi ((n - 4) \xi + 4) (n - 1) \mathcal{K} \mathcal{Q} \\
 & \times (p_1^2 (p_1 p_3) + p_2^2 (p_2 p_3)) - \xi ((n - 3) \xi + 2) (n - 1) p_1^2 p_2^2 p_3^2 (p_1^2 - p_2^2)^2] \}, \tag{3.82}
 \end{aligned}$$

que también es simétrica en los dos primeros argumentos. La función  $F$  es:

$$\begin{aligned}
 F^{(1,\xi)}(p_1^2, p_2^2; p_3^2) &= \frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{C_A}{32(n - 1) \mathcal{K}^3 p_1^2 p_2^2 p_3^2} \{ 2[p_1^2 p_2^2 p_3^2 [(p_1 p_2) (p_1 p_3) (p_2 p_3) (n - 1) \\
 & \times (8(n + 1) + 8(n - 3) \xi + (3n^2 - 38n + 63) \xi^2 - (n - 3)(7n - 13) \xi^3) - 2\mathcal{K} \mathcal{Q} \\
 & \times (8(n - 2) + 8(n - 1) \xi + (n - 1)(3n - 14) \xi^2 - 2(n - 1)(n - 3) \xi^3) + \mathcal{K} (p_1 p_2) \\
 & \times (8(n + 3) - (n - 1)(n^2 - 4n + 23) \xi^2 - 7(n - 1)(n - 3) \xi^3)] - \xi ((n - 4) \xi + 4) \\
 & \times (n - 1) [((n - 3) \xi + 2) (n - 3) (p_1 p_2)^2 (p_1 p_3)^2 (p_2 p_3)^2 + ((n - 3) \xi + n - 1) \mathcal{K}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times (p_1 p_2)^2 (p_1 p_3) (p_2 p_3) - ((n-3)\xi + 3n-7) \mathcal{K}^2 p_1^2 p_2^2 + 3(n-4) \mathcal{K}^3] \\
 & \times [p_3^2 (p_1 p_2) \varphi + (p_1 p_3) \kappa_1 + (p_2 p_3) \kappa_2 + p_3^2 \kappa_3] + 2\mathcal{K}[p_1^2 p_2^2 p_3^2 [(p_1 p_3) (p_2 p_3) (n-4) \\
 & \times (8(n+1) + 8(n-1)\xi + (n-1)(3n-23)\xi^2 - 5(n-1)(n-3)\xi^3) - \mathcal{K} \\
 & \times (8(5n-11) + 4(n-1)(5n-11)\xi + (n-1)(n^2+4n-10)\xi^2 + n(n-1) \\
 & \times (n-3)\xi^3]] - \xi((n-4)\xi+4)(n-1)(n-4)[((n-3)\xi+2)(p_1 p_2)(p_1 p_3)^2 (p_2 p_3)^2 \\
 & \times + \mathcal{K}(p_1 p_2)(p_1 p_3)(p_2 p_3) - 3\mathcal{K}^2(p_1 p_2)] [(p_1 p_2) \varphi + \kappa_3] + 2\mathcal{K} \varphi [p_1^2 p_2^2 (p_3^2)^2 [\mathcal{K}(n-1) \\
 & \times (16+16\xi + (5n-32)\xi^2 - 6(n-3)\xi^3) + p_3^2 (p_1 p_2) (8(n+1) + 8(n-1)\xi \\
 & + (n+1)(3n-23)\xi^2 - 5(n-1)(n-3)\xi^3)] - \xi((n-4)\xi+4)(n-1)(p_1 p_3)(p_2 p_3) \\
 & \times [((n-3)\xi+2)p_3^2 (p_1 p_2)(p_1 p_3)(p_2 p_3) + ((n-3)\xi+3)\mathcal{K}p_3^2 (p_1 p_2) + \xi(n-4)\mathcal{K}^2] \\
 & + \mathcal{K}^2 p_1^2 p_2^2 p_3^2 (8(4n-7) + (4n+1)(5n-11)\xi + (n-1)(13n-30)\xi^2 + 2(n-1) \\
 & \times (n-2)(n-3)\xi^3)(\kappa_1 + \kappa_2) + \mathcal{K} \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{p_1^2 - p_2^2} [p_1^2 p_2^2 p_3^2 [\mathcal{K}(p_3^2 - 4(p_1 p_2)) (8(4n-3) + 4 \\
 & \times (n-1)(5n-17)\xi - (n-1)(3n-10)\xi^2) + 2(p_1 p_2)(p_1^2 - p_2^2)^2 (n+1)(8 \\
 & - (n-1)\xi^2((n-3)\xi+3))] - 2\xi((n-4)\xi+4)(n-1)\mathcal{K}[\mathcal{K}(p_1^2(p_1 p_3) + p_2^2(p_2 p_3)) \\
 & - ((n-3)\xi+2)(p_1 p_3)(p_2 p_3)(p_1^2 - p_2^2)^2]] \}. \tag{3.83}
 \end{aligned}$$

Esta función es simétrica en los primeros dos argumentos y pertenece a la parte totalmente transversa del vértice. La penúltima función estructural  $H$  esta expresada por:

$$\begin{aligned}
 H^{(1,\xi)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= \frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{C_A}{16\mathcal{K}^3 p_1^2 p_2^2 p_3^2} \{ [p_1^2 p_2^2 p_3^2 [(p_1 p_2)(p_1 p_3)(p_2 p_3) (8(n+1) + 14 \\
 & \times (n-1)\xi + 4(n-1)(n-7)\xi^2 - 5(n-1)(n-3)\xi^3) - \xi((n-4)\xi+4) \\
 & \times [(n-1)((n-3)\xi+3)(p_1 p_2)^2 (p_1 p_3)^2 (p_2 p_3)^2 + 3(n-4)\mathcal{K}^3] - (n-1)\xi \\
 & \times (2-\xi)(p_1^2)^2 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2] [(p_1 p_2)(p_1 p_3)(p_2 p_3) \varphi + (p_1 p_2)(p_1 p_3) \kappa_1 + (p_1 p_2)(p_2 p_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \kappa_2 + (p_1 p_3) (p_2 p_3) \kappa_3] + \mathcal{K}[-p_1^2 p_2^2 p_3^2 (p_1 p_2) (p_1 p_3) (p_2 p_3) (24 + 38\xi + 4(3n - 16) \xi^2 \\
 & \quad - 9(n - 3) \xi^3) + 3\xi ((n - 4) \xi + 4) ((n - 3) \xi + 3) (p_1 p_2)^2 (p_1 p_3)^2 (p_2 p_3)^2 \\
 & + \xi (2 - \xi) (p_1^2)^2 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2] [\mathcal{Q}\varphi + \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3] + \mathcal{K}^3 \varphi [p_1^2 p_2^2 p_3^2 (16 + 4(3n - 8) \xi \\
 & \quad - (n - 2) \xi^2 - (n - 2) \xi^3) - \xi^2 ((n - 4) \xi + 4) (n - 4) (p_1 p_2) (p_1 p_3) (p_2 p_3)] \\
 & + \frac{\mathcal{K}}{n - 1} [2p_1^2 p_2^2 p_3^2 (4(n - 2) + 6(n - 1) \xi + (n - 1)(2n - 9) \xi^2 - (n - 1)(n - 3) \xi^3) \\
 & \quad - \xi ((n - 4) \xi + 4) ((n - 3) \xi + 3) (n - 1) (p_1 p_2) (p_1 p_3) (p_2 p_3)] \\
 & \times [p_1^2 (p_1^2 (p_2 p_3) + (p_1 p_2) (p_1 p_3)) \kappa_1 + p_2^2 (p_2^2 (p_1 p_3) + (p_1 p_2) (p_2 p_3)) \kappa_2 + p_3^2 (p_3^2 \\
 & \quad \times (p_1 p_2) + (p_1 p_3) (p_2 p_3)) \kappa_3] \}. \tag{3.84}
 \end{aligned}$$

Esta función se caracteriza por ser totalmente simétrica y pertenecer a la parte totalmente transversa del vértice. Por último, mostramos la función de estructura  $S$  que resulta nula en cualesquiera de las condiciones cinemáticas:

$$S^{(1,\xi)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = 0. \tag{3.85}$$

Ahora se presentan las funciones estructurales que provienen de los lazos con quarks no-masivos. Mismas que se encuentran en un número arbitrario de dimensiones:

$$A^{(1,q)}(p_1^2, p_2^2; p_3^2) = \frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} N_f T_R \frac{n - 2}{n - 1} [\kappa_1 + \kappa_2], \tag{3.86}$$

$$B^{(1,q)}(p_1^2, p_2^2; p_3^2) = \frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} N_f T_R \frac{n - 2}{n - 1} [\kappa_1 - \kappa_2], \tag{3.87}$$

$$C^{(1,q)}(p_1^2, p_2^2; p_3^2) = \frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} 2N_f T_R \frac{n - 2}{n - 1} \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{p_1^2 - p_2^2}, \tag{3.88}$$

$$S^{(1,q)}(p_1^2, p_2^2; p_3^2) = 0. \tag{3.89}$$

Las funciones  $F$  y  $H$  que poseen expresiones con un mayor número de términos:

$$\begin{aligned}
 F^{(1,q)}(p_1^2, p_2^2; p_3^2) &= -\frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{N_f T_R}{(n-1)(n-2) \mathcal{K}^3} \{2[(n^2-1)(p_1 p_2)(p_1 p_3)(p_2 p_3) \\
 &+ 2(n-2)p_3^2 \mathcal{K} - (n-7)(p_1 p_2) \mathcal{K}] [p_3^2(p_1 p_2) \varphi + (p_1 p_3) \kappa_1 + (p_2 p_3) \kappa_2 + p_3^2 \kappa_3] \\
 &+ 2(n+1)(n-4) \mathcal{K} p_3^2 (p_1 p_2) [(p_1 p_2) \varphi + \kappa_3] + 2p_3^2 \mathcal{K} \varphi [(n+1)(p_1 p_3)(p_2 p_3) \\
 &+ (n-3) \mathcal{K}] + n(n-4) \mathcal{K}^2 [\kappa_1 + \kappa_2] + \mathcal{K} \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{p_1^2 - p_2^2} [2(n+1)(p_1 p_2)(p_1^2 - p_2^2)^2 \\
 &+ (n-2)^2 \mathcal{K} (p_1^2 + p_2^2 - 2(p_1 p_2))] \}, \tag{3.90}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H^{(1,q)}(p_1^2, p_2^2; p_3^2) &= -\frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{2N_f T_R}{(n-1)(n-2) \mathcal{K}^3} \{ (n^2-1)(p_1 p_2)(p_1 p_3)(p_2 p_3) \\
 &\times [(p_1 p_2)(p_1 p_3)(p_2 p_3) \varphi + (p_1 p_2)(p_1 p_3) \kappa_1 + (p_1 p_2)(p_2 p_3) \kappa_2 + (p_1 p_3)(p_2 p_3) \kappa_3] \\
 &- 3(n-1)(p_1 p_2)(p_1 p_3)(p_2 p_3) \mathcal{K} [\mathcal{Q} \varphi + \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3] + (n-1)(n-2) \mathcal{K}^3 \varphi \\
 &+ (n-2) \mathcal{K} [p_1^2 (p_1^2 (p_2 p_3) + (p_1 p_2)(p_1 p_3)) \kappa_1 + p_2^2 (p_2^2 (p_1 p_3) + (p_1 p_2)(p_2 p_3)) \kappa_2 \\
 &+ p_3^2 (p_3^2 (p_1 p_2) + (p_1 p_3)(p_2 p_3)) \kappa_3] \}. \tag{3.91}
 \end{aligned}$$

Las contribuciones a las funciones estructurales del vértice que provienen de los lazos de quarks poseen las mismas características que las correspondientes a los lazos con fantasmas y gluones. Una vez que se han presentado las funciones escalares debemos evaluar el límite simétrico, tema del siguiente capítulo.



---

## Capítulo 4

# El vértice de tres gluones en el límite simétrico

El límite simétrico es importante por la física que describe, además de ser necesario en el proceso de renormalización. Para este propósito presentaremos a las funciones de estructura evaluando los momentos externos fuera de la capa de masa.

Iniciaremos este capítulo presentando las funciones de estructura en este límite. Mismas que aparecen en un número de dimensiones arbitrarias y normas covariantes. Posteriormente se considera a  $n \rightarrow 4 - 2\epsilon$  como número de dimensiones del espacio, que dará paso al proceso de renormalización.

### 4.1. Funciones de Estructura en el límite simétrico

En esta situación imponemos una masa común a los tres campos de gluones:

$$p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p^2 = -m^2, \quad (4.1)$$

los productos mixtos de los momentos externos difieren a ella por un factor:

$$(p_1 p_2) = (p_1 p_3) = (p_2 p_3) = -\frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} m^2, \quad (4.2)$$

las funciones auxiliares  $\kappa$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{Q}$  de (3.76)-(3.79) también dependen de esta masa ficticia, pues sus expresiones son:

$$\mathcal{K} = \frac{3}{4} (p^2)^2, \quad \mathcal{Q} = \frac{3}{2} (p^2), \quad \kappa = \frac{1}{\epsilon(1-2\epsilon)} (-p^2)^{-\epsilon}. \quad (4.3)$$

La función  $\varphi$  (definida en (3.66)) toma el valor máximo de la integral de Clausen. Su valor es la constante,  $Cl_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1,0149417\dots$ . Las funciones  $B$  de este límite (3.81),(3.87) se anulan, pues son proporcionales a la diferencia de momentos al cuadrado. La función que proviene de lazos de quarks contiene a las funciones  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ :

$$B^{(1,q)}(p^2, p^2; p^2) \propto \lim_{p_1^2, p_2^2 \rightarrow p^2} [\kappa(p_1^2) - \kappa(p_2^2)] = 0, \quad (4.4)$$

mientras que la de fantasmas y gluones contiene explícitamente la diferencia  $p_1^2 - p_2^2$ :

$$B^{(1,\xi)}(p^2, p^2; p^2) \propto \lim_{p_1^2, p_2^2 \rightarrow p^2} \frac{1}{\mathcal{K}^2 p_1^2 p_2^2 p_3^2} (p_1^2 - p_2^2) \{\text{términos no divergentes}\} = 0. \quad (4.5)$$

En este sentido persisten las funciones  $A$ ,  $C$ ,  $F$  y  $H$ . Las funciones provenientes de lazos de fantasmas y gluones son:

$$\begin{aligned} A^{(1,\xi)}(p^2, p^2; p^2) = & -\frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left\{ \frac{1}{48} (20 + (n-12)\xi) p^2 \varphi(p^2, p^2, p^2) \right. \\ & \left. + (-p^2)^{\frac{n-4}{2}} \frac{-4n - (n-1)(7n-22)\xi + (n-4)(n-1)\xi^2}{4(n-1)(n-3)(n-4)} \right\}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
 C^{(1,\xi)}(p^2, p^2; p^2) &= -\frac{g^2\eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} C_A \left\{ \frac{1}{576} [-288 + \xi (208 + 48\xi + n [-76 + (n-4)\xi])] \right. \\
 &\times \varphi(p^2, p^2, p^2) + (-p^2)^{\frac{n-6}{2}} \frac{12(3-4n) - (n-1)(30n-89)\xi}{24(n-1)(n-3)} \\
 &\left. + (-p^2)^{\frac{n-6}{2}} \frac{(n-1)(13n-24)\xi^2}{96(n-1)(n-3)} \right\}, \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F^{(1,\xi)}(p^2, p^2; p^2) &= -\frac{g^2\eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{C_A}{1721(n-1)(n-3)(p^2)^4} \{12(-p^2)^{\frac{n}{2}} [80(8n-7) + 12 \\
 &\times (n-1) + (-101 + 30n)\xi - 3(n-1)(21n-52)\xi^2 + (n-1)(n-3)(n-20)\xi^3] \\
 &+ (n-1)(n-3)(p^2)^3 [64(n-47) + 24(208-61n)\xi - 6(152+n(3n-68))\xi^2 \\
 &+ (-384 + n(200 + n(n-24)))\xi^3] \varphi(p^2, p^2, p^2)\}, \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H^{(1,\xi)}(p^2, p^2; p^2) &= \frac{g^2\eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{C_A}{3456(n-1)(n-3)(p^2)^3} \{12(-p^2)^{\frac{n}{2}} [64(n+1) + 576 \\
 &\times (n-1)\xi + 12(n-1)(10n-53)\xi^2 + (n-44)(n-3)(n-1)\xi^3] + (n-3) \\
 &\times (n-1)(p^2)^3 [64(n+28) + 3168(n-4)\xi + 120(62+n(n-18))\xi^2 \\
 &+ (-1536 + n(584 + n(n-48)))\xi^3] \varphi(p^2, p^2, p^2)\}, \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

mientras que las provenientes de los lazos de quarks son:

$$A^{(1,q)}(p^2, p^2; p^2) = -\frac{g^2\eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{n-2}{n-1} \frac{2N_f T_R}{(n-3)(n-4)} (-p^2)^{\frac{n-4}{2}}, \tag{4.10}$$

$$C^{(1,q)}(p^2, p^2; p^2) = \frac{g^2\eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} 2N_f T_R \frac{(n-2)}{(n-1)(n-3)} (-p^2)^{\frac{n-6}{2}}, \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
 F^{(1,q)}(p^2, p^2; p^2) &= \frac{g^2\eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} N_f T_R \left\{ \frac{4(9n-14)}{9(n-1)(n-3)} (-p^2)^{\frac{n-8}{2}} \right. \\
 &\left. - \frac{32}{27p^2} \varphi(p^2, p^2, p^2) \right\}, \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H^{(1,q)}(p^2, p^2; p^2) &= \frac{g^2\eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{8N_f T_R}{27(n-2)} \left\{ \frac{3(n+1)}{(n-1)(n-3)} (-p^2)^{\frac{n-6}{2}} \right. \\
 &\left. + (20-7n) \varphi(p^2, p^2, p^2) \right\}. \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

Esto nos permite formar un nuevo arreglo de las estructuras del vértice. Considere la anti-simetría de la función  $C$  con  $p_3^2$ , esto es:

$$C(p_2^2, p_3^2; p_1^2) = C(p_3^2, p_1^2; p_2^2) = -C(p_1^2, p_2^2; p_3^2) .$$

Al evaluar el límite simétrico en las funciones  $\Lambda_{i,j,k}$  de (3.22) se obtienen expresiones que se relacionan entre sí por:

$$\begin{aligned} \Lambda_{001} &= -\Lambda_{002} = \Lambda_{100} = \frac{1}{2}\Lambda_{200} = -\frac{1}{2}\Lambda_{010} = -\Lambda_{020} , \\ \frac{1}{2}\Lambda_{111} &= -\frac{1}{2}\Lambda_{222} = \Lambda_{121} = -\Lambda_{122} , \\ \Lambda_{112} &= -\Lambda_{211} = \Lambda_{212} = -\Lambda_{221} . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Resulta conveniente definir nuevas funciones de estructura:

$$\Lambda_{001}(p^2, p^2; p^2) = G_0(p^2) , \quad \Lambda_{121}(p^2, p^2; p^2) = G_1(p^2) , \quad \Lambda_{112}(p^2, p^2; p^2) = G_2(p^2) , \quad (4.15)$$

que re-ordenan las estructuras de Lorentz en el vértice (3.5):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}(p_1, p_2, p_3) &= G_0(p^2) [g_{\mu_1\mu_2}(p_1 - p_2)_{\mu_3} + g_{\mu_2\mu_3}(p_1 - p_2)_{\mu_1} + g_{\mu_3\mu_1}(p_1 - p_2)_{\mu_2}] \\ &\quad - G_1(p^2) (p_2 - p_3)_{\mu_1} (p_3 - p_1)_{\mu_2} (p_1 - p_2)_{\mu_3} \\ &\quad + G_2(p^2) (p_{1\mu_3}p_{2\mu_1}p_{3\mu_2} - p_{1\mu_2}p_{2\mu_3}p_{3\mu_1}) . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Las funciones de estructura  $G_i$  de (4.16) representan a las aportaciones de fantasmas, gluones y quarks. Están compuestas por combinaciones de las funciones de estructura totales

$A, C, F$  y  $H$ , que tienen las expresiones:

$$\begin{aligned}
 G_0(p^2) &= A(p^2, p^2; p^2) + \frac{1}{2}p^2 C(p^2, p^2; p^2) + \frac{1}{4}(p^2)^2 F(p^2, p^2; p^2) + \frac{1}{2}p^2 H(p^2, p^2, p^2), \\
 G_1(p^2) &= C(p^2, p^2; p^2) + \frac{1}{2}p^2 F(p^2, p^2; p^2), \\
 G_2(p^2) &= C(p^2, p^2; p^2) + \frac{1}{2}p^2 F(p^2, p^2; p^2) + H(p^2, p^2, p^2).
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Tal como se presentan en [5], las funciones de estructura debido a gluones y fantasmas (en normas covariantes y un número arbitrario de dimensiones) son:

$$\begin{aligned}
 G_0^{(1,\xi)}(p^2) &= \frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{C_A}{288} \{p^2 \varphi [8 + 12\xi(14n - 51) + 6\xi^2(n^2 - 18n + 60) - \xi^3(n - 4) \\
 &\quad \times (n - 12)] - 6\kappa [32 + 36\xi(2n - 7) + 6\xi^2(n - 4)(n - 6) - \xi^3(n - 4)(n - 3)]\},
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
 G_1^{(1,\xi)}(p^2) &= -\frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{C_A}{3456p^2} \{p^2 \varphi [64(n - 20) - 144\xi(7n - 26) - 24\xi^2 \\
 &\quad \times (n^2 - 18n + 50) + \xi^3(n^3 - 24n^2 + 200n - 384)] - 6\kappa \frac{n - 4}{n - 1} [64(n - 2) \\
 &\quad - 144\xi(n - 1) - 12\xi^2(n - 1)(2n - 7) + \xi^3(n - 1)(n - 3)(n - 20)]\},
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
 G_2^{(1,\xi)}(p^2) &= \frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{C_A}{144p^2} \{p^2 \varphi [128 + 6\xi(29n - 114) + 6\xi^2(n^2 - 18n + 60) \\
 &\quad - \xi^3(n - 4)(n - 12)] - 6\kappa \frac{n - 4}{n - 1} [8 + 30\xi(n - 1) + 6\xi^2(n - 1)(n - 5) \\
 &\quad - \xi^3(n - 1)(n - 3)]\}.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Asimismo, las funciones de estructura debido a los lazos de quarks son:

$$G_0^{(1,q)}(p^2) = -\frac{g^2\eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} N_f T_R \frac{2(3n-8)}{9(n-2)} \{2p^2\varphi - 3\kappa\}, \quad (4.21)$$

$$G_1^{(1,q)}(p^2) = -\frac{g^2\eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} N_f T_R \frac{4}{27p^2} \left\{ 4p^2\varphi + 3\kappa \frac{n-4}{n-1} \right\}, \quad (4.22)$$

$$G_2^{(1,q)}(p^2) = -\frac{g^2\eta}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} N_f T_R \frac{4}{9(n-2)p^2} \left\{ 2p^2\varphi(3n-8) - 3\kappa \frac{n-4}{n-1} \right\}. \quad (4.23)$$

Esto nos da paso al proceso de renormalización que es el tema de la siguiente sección.

## 4.2. Renormalización

Como es usual en la regularización dimensional, las integrales poseen singularidades en las dimensiones del espacio y(ó) en la dependencia cinemática. Generalmente se elige a  $n = 4 - 2\epsilon$  como número de dimensiones. Las divergencias que aparecen por el parámetro  $\epsilon$  del regulador carecen de significado físico. Un tratamiento de estas singularidades se encuentra en los esquemas de sustracción, para los fines de esta tesis elegimos definir contra-términos dentro del esquema  $\overline{\text{MS}}$ .

Considere series de potencias en  $\epsilon$  para las funciones de estructura (3.80)-(3.85), (3.86)-(3.91). De estas puede observarse que solo las funciones  $A$ , tanto de fantasmas y gluones como quarks exhiben una divergencia. Estas singularidades provienen de la función  $\kappa$ :

$$\kappa(p^2) = \frac{1}{\epsilon} + (2 - \log(-p^2)) + (4 - 2\log(-p^2) + \log^2(-p^2))\epsilon + O(\epsilon^2), \quad (4.24)$$

mientras que  $\eta$  tiene una expansión:

$$\eta = e^{-\gamma_E \epsilon} \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} \epsilon^2 + O(\epsilon^2) \right). \quad (4.25)$$

La expresión de  $A^{(1,\xi)}$  en el orden cero resulta ser:

$$A^{(1,\xi)}(p^2, p^2; p^2) = \frac{g^2 C_A}{(4\pi)^2} \left\{ \left[ -\frac{13}{9} - \frac{1}{4}\xi(\xi - 1) + \frac{1}{12}(2\xi - 5)p^2\varphi(p^2, p^2, p^2) \right] - \left( \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\xi \right) \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi) - \log(-p^2) \right) + O(\epsilon) \right\}, \quad (4.26)$$

la correspondiente expansión de  $A^{(1,q)}$ :

$$A^{(1,q)}(p^2, p^2; p^2) = \frac{g^2}{(4\pi)^2} N_f T_R \left\{ \frac{4}{3} \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi) - \log(-p^2) \right) + \frac{20}{9} + O(\epsilon) \right\}, \quad (4.27)$$

( $C$ ,  $F$  y  $H$  aparecen en el siguiente capítulo) los términos singulares de la función de estructura total  $A$  corresponden a una divergencia del tipo ultravioleta:

$$A_{UV} = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left[ \frac{4}{3} N_f T_R - C_A \left( \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\xi \right) \right] \frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon). \quad (4.28)$$

Entonces la parte divergente del contra-término debe contribuir con una cantidad negativa a la expresión (4.28), esto es:

$$\begin{aligned} A_{CT} &= \frac{\bar{g}^2}{(4\pi)^2} \left[ C_A \left( \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\xi \right) - \frac{4}{3} N_f T_R \right] \left( \frac{1}{\epsilon} + R \right) \\ &= \frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \left[ C_A \left( \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\xi \right) - \frac{4}{3} N_f T_R \right] \left( \frac{1}{\epsilon} + R \right) + O(\epsilon), \end{aligned} \quad (4.29)$$

con la constante  $R$  en correspondencia a la elección del esquema de renormalización, así mismo considere como la constante de acoplamiento re-escalada, esto es  $\bar{g}^2 \equiv g^2 e^{-\gamma_E \epsilon} (4\pi)^\epsilon = g^2 e^{\epsilon(-\gamma_E + \ln(4\pi))}$ . Tal re-definición de  $g^2$  es usualmente realizada en el contexto del esquema  $\bar{MS}$  de renormalización, en cuyo caso se elige que  $R = 0$ . Observando la expresión (4.29) podemos notar que existe un particular valor del parámetro de norma  $\xi$  en  $n \rightarrow 4$

como número de dimensiones para el cual podemos formar la relación:

$$\xi|_{n \rightarrow 4} = \xi_0 = \frac{8}{9} \left( \frac{2N_f T_R}{C_A} - 1 \right), \quad (4.30)$$

observe que (4.26) con este valor del parámetro de norma  $A^{(1,\xi)}$  es una constante (debido a que  $p^2 \varphi(p^2, p^2, p^2) \propto Cl_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ). Por su parte 4.27 es una función logarítmica de  $p^2$ . Si se substituyen los valores de los parámetros de sabor y color  $N_f = 6, C_A = 3$  y  $T_R = \frac{1}{2}$  obtenemos el valor de  $\xi_0 = \frac{8}{9}$ . Se debe considerar que en todas las integraciones se ha omitido la escala de renormalización,  $\mu_R = 1$ .

Ahora que se conocen las funciones de estructura renormalizadas se puede hacer uso de este vértice.



---

# Capítulo 5

## Resultados

Durante el desarrollo de esta tesis se ha observado que las propiedades del color y sabor aparecen únicamente por las constantes de estructura y las referentes al número de sabores. Por argumentos de simetría la estructura covariante es anti-simétrica en permutaciones de los índices y momentos externos. Bajo estos mismos términos, el comportamiento del vértice queda determinado por las funciones escalares  $A, B, C, F$  y  $H$ .

Este capítulo se enfoca en las funciones escalares del límite simétrico. Se analiza su dependencia a la masa del campo de gluones y la norma. Para coincidir con los resultados obtenidos en [1] se ha utilizado el esquema de renormalización  $\overline{\text{MS}}$ . En las gráficas presentadas se tomaron los valores habituales de los parámetros de sabor y color,  $N_f = 6, T_R = \frac{1}{2}$  y  $C_A = 3$ , la constante de acoplamiento tendrá el valor numérico,  $g = 1$ .

### 5.1. Funciones escalares del vértice en el límite simétrico

Como se hizo notar en el capítulo anterior, cada función del vértice depende de la masa del campo de gluones. Cabe destacar que el término  $p^2\varphi(p^2, p^2, p^2) = \frac{4}{\sqrt{3}}Cl_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ , es una cons-

tante. Está es nombrada  $I(p^2)$  en [1]. Después del proceso de renormalización, las funciones norma dependientes  $A^{(1,\xi)}$ ,  $C^{(1,\xi)}$ ,  $F^{(1,\xi)}$  y  $H^{(1,\xi)}$  del límite simétrico tienen las expresiones:

$$A^{(1,\xi)}(p^2) = \frac{g^2 C_A}{(4\pi)^2} \left\{ \left[ -\frac{13}{9} - \frac{1}{4}\xi(\xi - 1) + \frac{1}{12}(2\xi - 5)p^2\varphi(p^2, p^2, p^2) \right] - \left( \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\xi \right) [-\gamma_E + \log(4\pi) - \log(-p^2)] \right\}, \quad (5.1)$$

$$C^{(1,\xi)}(p^2) = \frac{g^2 C_A}{(4\pi)^2} \frac{1}{12p^2} \left\{ \frac{1}{2}(52 + 31\xi - 7\xi^2) + (-6 - 2\xi + \xi^2)p^2\varphi(p^2, p^2, p^2) \right\}, \quad (5.2)$$

$$F^{(1,\xi)}(p^2) = \frac{g^2 C_A}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2)^2} \left\{ -\frac{125}{27} + \frac{1}{36}\xi(-57 + 4\xi(6 + \xi)) + \left[ \frac{43}{27} - \frac{1}{36}\xi(\xi + 6)(2\xi - 3) \right] p^2\varphi(p^2, p^2, p^2) \right\}, \quad (5.3)$$

$$H^{(1,\xi)}(p^2) = \frac{g^2 C_A}{(4\pi)^2} \frac{1}{p^2} \left\{ \frac{10}{27} - \frac{1}{72}\xi(-144 + \xi(39 + 10\xi)) + \left[ \frac{16}{27} + \xi^2 \left( \frac{5}{24} + \frac{1}{36}\xi \right) \right] p^2\varphi(p^2, p^2, p^2) \right\}. \quad (5.4)$$

Las correspondientes funciones  $A^{(1,q)}$ ,  $C^{(1,q)}$ ,  $F^{(1,q)}$  y  $H^{(1,q)}$  son:

$$A^{(1,q)}(p^2) = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} N_f T_R \left\{ \frac{5}{3} - \gamma_E + \log(4\pi) - \log(-p^2) \right\}, \quad (5.5)$$

$$C^{(1,q)}(p^2) = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} N_f T_R \left( \frac{1}{p^2} \right), \quad (5.6)$$

$$F^{(1,q)}(p^2) = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{8N_f T_R}{27(p^2)^2} \left\{ -11 + 4p^2\varphi(p^2, p^2, p^2) \right\}, \quad (5.7)$$

$$H^{(1,q)}(p^2) = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{4N_f T_R}{27p^2} \left\{ 5 + 8p^2\varphi(p^2, p^2, p^2) \right\}. \quad (5.8)$$

Como se mencionó en la sección de renormalización, la función  $A^{(1,\xi)}$  de 5.1 es constante al elegir qué  $\xi = -\frac{8}{9}$ . Esto implica que las singularidades en las regiones IR y UV prove-

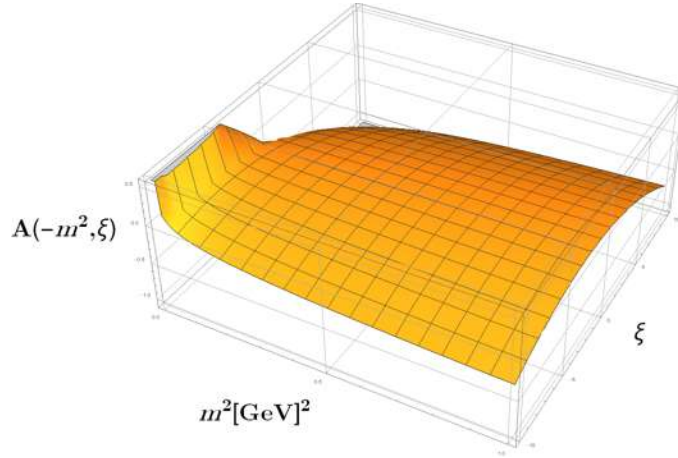


Figura 5.1: Función de estructura  $A^{(1,\xi)}$  del límite simétrico.

nientes de la función logarítmica, carecen de significado físico. En la figura 5.1 se puede observar el comportamiento IR de esta función. La superficie  $A(-m^2, \xi)$  tiene comportamiento logarítmico y la dependencia al parámetro de norma genera una forma convexa. El signo de la divergencia en la región IR cambia con los valores de  $\xi$ , tal como se observa en la gráfica. La función  $C$  de (5.2) posee un polo con el invariante  $p^2$ . Este denominador es

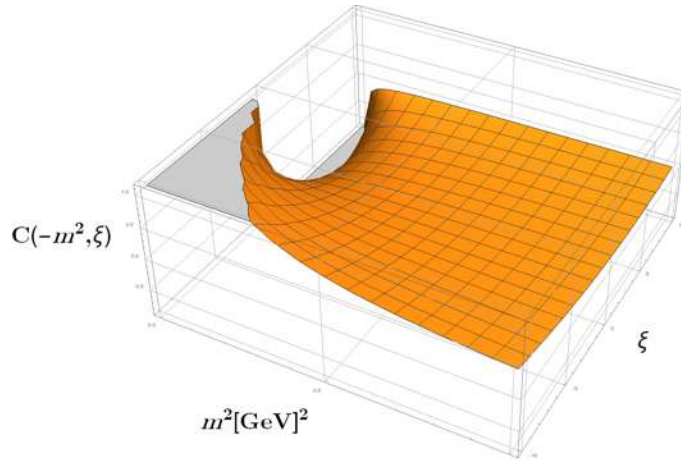


Figura 5.2: Función de estructura  $C^{(1,\xi)}$  del límite simétrico.

referente de su comportamiento, además de colocar a  $C$  como la función dominante en la parte longitudinal del vértice. La superficie  $C(-m^2, \xi)$  de la figura 5.2 obtiene su forma

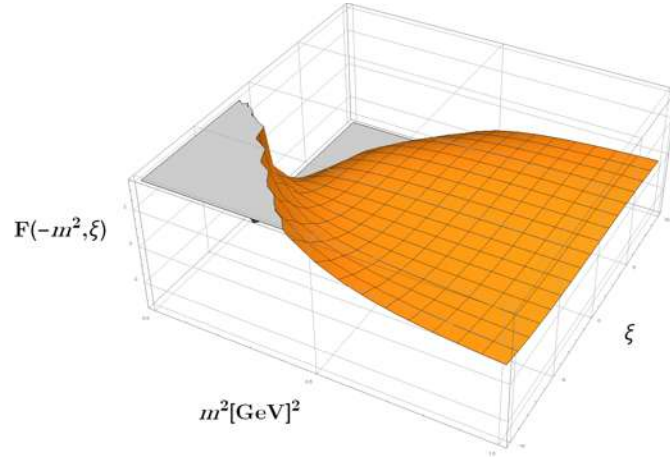


Figura 5.3: Función de estructura  $F^{(1,\xi)}$  del límite simétrico.

por el factor  $(m^2)^{-1}$ . Diverge en la región IR donde el signo cambia con los valores de  $\xi$ . La función  $F$  de (5.3) posee un polo de segundo orden con el invariante  $p^2$ . Mismo que establece a  $F$  y por tanto a las estructuras transversales del vértice como dominantes. La superficie  $F(-m^2, \xi)$  obtiene por la dependecnia a la masa, mientras que  $\xi$  controla los signos en la region IR. Podemos observar este comportamiento en la figura 5.3. La función  $H$  de (5.4) también posee un polo de primer orden con  $p^2$ . En diferencia a la función  $C$  de (5.2),  $H$

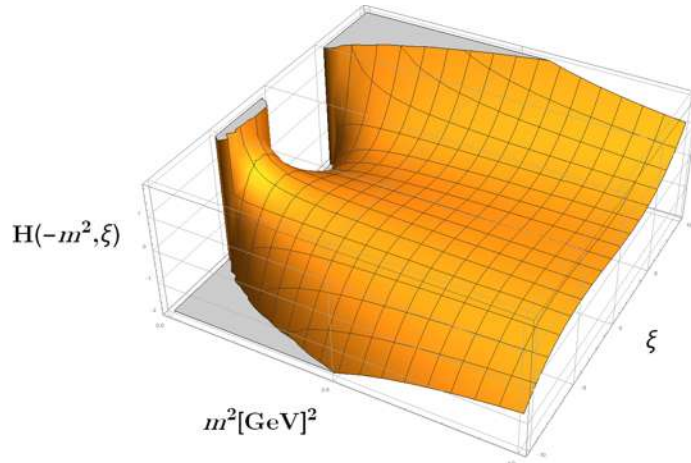


Figura 5.4: Función de estructura  $H^{(1,\xi)}$  del límite simétrico.

es una función de tercer grado con la norma, misma que le da un comportamiento IR mas

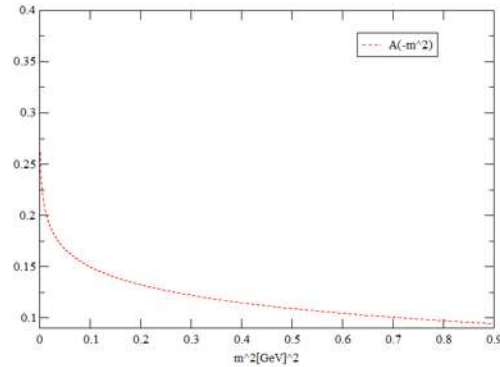


Figura 5.5: Función de estructura  $A^{(1,q)}$  del límite simétrico.

complejo y valores más grandes. Estas características reafirman el dominio de las funciones transversales del vértice.

Las función  $A$  de lazos de quarks (5.5) también poseen las divergencias IR y UV con un término logarítmico. Son relevantes físicamente ya que no involucran directamente a la elección de la norma. En la figura 5.5 se encuentra la curva de esta función, que es un logaritmo negativo con la masa de los gluones. La función  $C$  de quarks (5.6) también tiene el polo

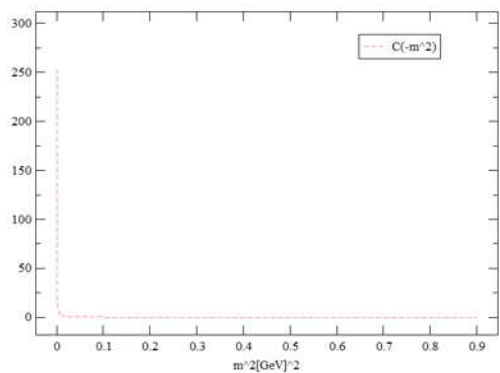


Figura 5.6: Función de estructura  $C^{(1,q)}$  del límite simétrico.

con  $p^2$ , mismo que está presente en (5.2). Esta característica confirma el dominio de  $C$  en la

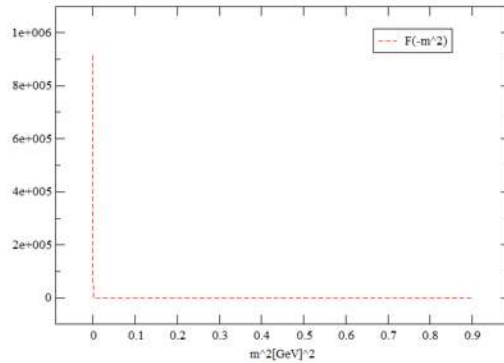


Figura 5.7: Función de estructura  $F^{(1,q)}$  del límite simétrico.

parte longitudinal del vértice. A diferencia de la función de fantasmas y gluones el denominador solo está acompañado por un signo global y las constantes de sabor. En la figura 5.6 se encuentra la curva que forma  $C$  con la masa. La función  $F$  de (5.7) también tiene el polo de segundo orden con  $p^2$  que se encuentra en (5.3). Difiere a esta última función en un signo global y las constantes del sabor. Este denominador confirma a  $F$  como dominante entre las funciones de los lazos quarks. Con la función  $H$  se confirma la tendencia de mostrar simi-

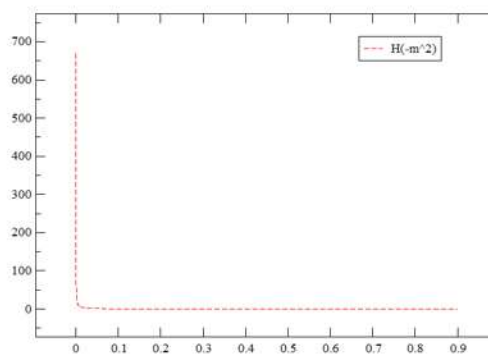


Figura 5.8: Función de estructura  $H^{(1,q)}$  del límite simétrico.

tudes entre funciones de quarks con las de fantasmas y gluones. Al igual que (5.4) posee un

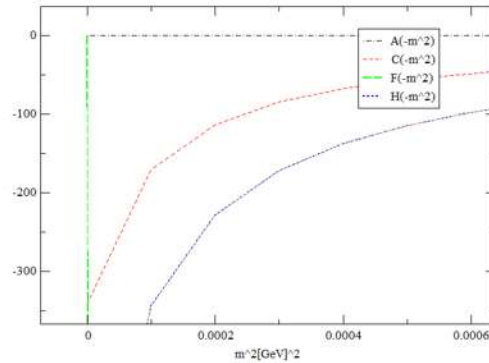


Figura 5.9: Funciones de estructura  $A^{(1,1)}$ ,  $C^{(1,1)}$ ,  $F^{(1,1)}$  y  $H^{(1,1)}$  del límite simétrico.

polo de orden uno en  $p^2$ , difiere a ella por un signo global y las constantes del sabor. Su gráfica se encuentra en la figura 5.8. Por la dependencia a la norma, las funciones de fantasmas y gluones alcanzan valores más altos que las de quarks. Podemos confirmar esta afirmación

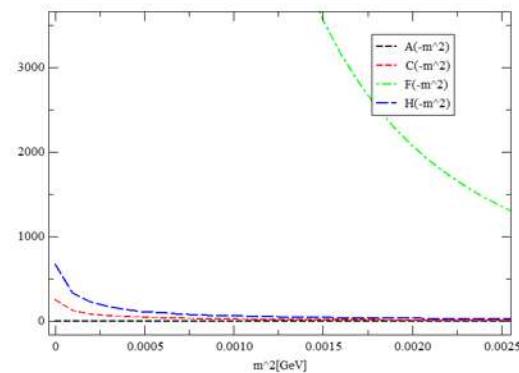


Figura 5.10: Funciones de estructura  $A^{(1,q)}$ ,  $C^{(1,q)}$ ,  $F^{(1,q)}$  y  $H^{(1,q)}$  del límite simétrico.

en la gráfica 5.9, que muestra las curvas de cada función de estructura. Las de fantasmas y gluones se encuentran bajo la norma de Landau. En 5.10 mostramos todas las curvas de las funciones de quarks.

Mencionado en el cuarto capítulo, se tienen tres estructuras de Lorentz (4.16) en este límite.

Sus funciones de escalares  $G_1, G_2, G_3$  son mostradas en (4.17). Con una expansión alrededor de  $n = 4$ , las funciones de fantasmas y gluones tienen la expresión:

$$G_0^{(1,\xi)}(p^2) = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} C_A \left\{ \left( \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\xi \right) \left[ \frac{1}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma_E - \log(-p^2) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{24} [32 + \xi(-36 + \xi(12 + \xi))] - \frac{1}{72} [2 + 3\xi(5 + 2\xi)] p^2 \varphi(p^2, p^2, p^2) \right\}, \quad (5.9)$$

$$G_1^{(1,\xi)}(p^2) = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{C_A}{8p^2} \left\{ \frac{1}{27} [32 - 3\xi(36 + \xi(3 + 4\xi))] \right. \\ \left. + \frac{1}{27} [-64 + 3\xi(-6 + \xi(3 + 2\xi))] p^2 \varphi(p^2, p^2, p^2) \right\}, \quad (5.10)$$

$$G_2^{(1,\xi)}(p^2) = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{C_A}{36p^2} \left\{ [8 - 3\xi(-30 + \xi(6 + \xi))] \right. \\ \left. + [32 + 3\xi(1 + 2\xi)] p^2 \varphi(p^2, p^2, p^2) \right\}. \quad (5.11)$$

Las expansiones correspondientes a las funciones de quarks son:

$$G_0^{(1,q)}(p^2) = \frac{g^2}{(4\pi)^2} N_f T_R \left\{ \frac{4}{3} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma_E - \log(-p^2) \right] \right. \\ \left. + 2 - \frac{8}{9} p^2 \varphi(p^2, p^2, p^2) \right\}, \quad (5.12)$$

$$G_1^{(1,q)}(p^2) = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{N_f T_R}{p^2} \left\{ \frac{8}{27} - \frac{16}{27} p^2 \varphi(p^2, p^2, p^2) \right\}, \quad (5.13)$$

$$G_2^{(1,q)}(p^2) = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{N_f T_R}{p^2} \left\{ \frac{4}{9} + \frac{16}{9} p^2 \varphi(p^2, p^2, p^2) \right\}. \quad (5.14)$$

Observe que las divergencias  $\frac{1}{\epsilon}$  provienen de las funciones  $A$ , mismas que están expresadas como (4.28) en el capítulo cuatro. Para coincidir con lo obtenido en [1] evaluamos la norma de Landau en las funciones de fantasmas y gluones (5.9)-(5.11). Consideramos la masa del campo de gluones  $p^2 = -m^2$ . Adicionamos las funciones de quarks (5.12)-(5.14). Por



último ordenamos las expresiones en acuerdo a 14a, 14b y 14c del artículo [1]:

$$G_0(-m^2) = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left\{ C_A \left[ -\frac{3}{8} + \frac{23}{72} p^2 \varphi(p^2, p^2, p^2) + \frac{171}{6} \frac{1}{\tilde{\epsilon}} \right] + N_f T_R \left[ 2 - \frac{8}{9} p^2 \varphi(p^2, p^2, p^2) - \frac{81}{3} \frac{1}{\tilde{\epsilon}} \right] \right\}, \quad (5.15)$$

$$m^2 G_1(-m^2) = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left\{ C_A \left[ -\frac{97}{216} - \frac{67}{216} p^2 \varphi(p^2, p^2, p^2) \right] + N_f T_R \left[ \frac{8}{27} - \frac{16}{27} p^2 \varphi(p^2, p^2, p^2) \right] \right\}, \quad (5.16)$$

$$m^2 G_2(-m^2) = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left\{ C_A \left[ \frac{77}{36} - \frac{41}{36} p^2 \varphi(p^2, p^2, p^2) \right] \right\} \quad (5.17)$$

$$+ N_f T_R \left[ \frac{4}{9} + \frac{16}{9} p^2 \varphi(p^2, p^2, p^2) \right] \}, \quad (5.18)$$

Debido al esquema de renormalización que hemos adoptado (siguiendo [5]), nuestra defini-

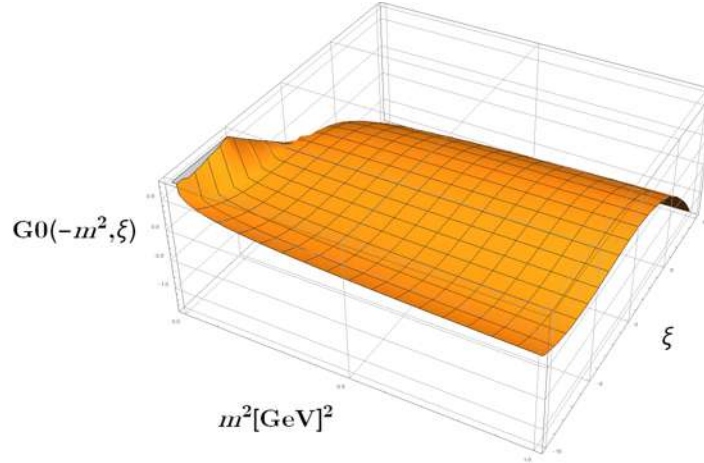


Figura 5.11: Función de estructura  $G_0^{(1,\xi)}$  del límite simétrico.

ción del término:

$$\frac{1}{\tilde{\epsilon}} \equiv -\frac{1}{2\epsilon} + \frac{1}{2} [\gamma_E - \log(4\pi) + \log(-p^2)], \quad (5.19)$$

difiere en un factor  $-\frac{1}{2}$  al utilizado en [1], sin dejar a un lado el hecho de que hemos consi-

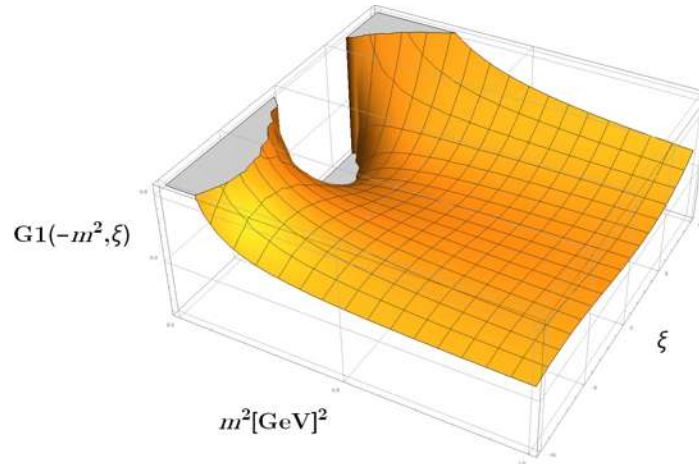


Figura 5.12: Función de estructura  $G_1^{(1,\xi)}$  del límite simétrico.

derado la masa de escala como  $\mu = 1$ . Esto verifica los resultados (5.15)-(5.18).

Ahora presentamos las gráficas de las funciones escalares  $G$ , comenzando por las que dependen de la norma. La función  $G_0^{(1,\xi)}$  de (5.9) manifiesta un comportamiento muy similar a la función  $A^{(1,\xi)}$  de (5.1), tal es así que al seleccionar  $\xi = -\frac{8}{9}$  también se vuelve una constante. Las aportaciones de  $C$ ,  $F$  y  $H$  son solo polinomios del parámetro de norma. Su gráfica se encuentra en la figura 5.11, resulta muy similar a 5.1.

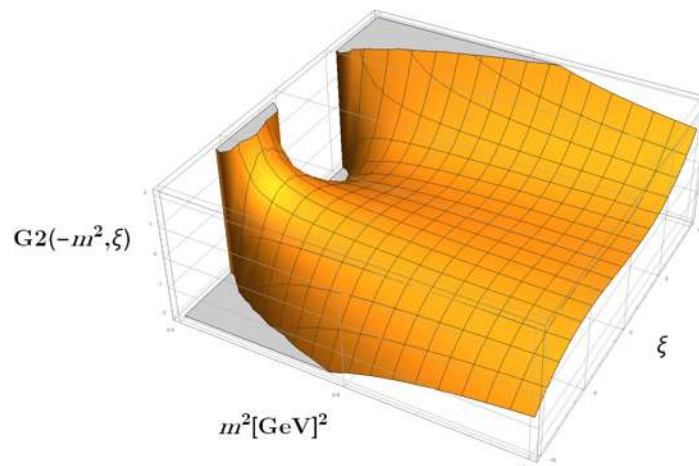


Figura 5.13: Función de estructura  $G_2^{(1,\xi)}$  del límite simétrico.

La función  $G_1^{(1,\xi)}$  se comporta como una función  $\frac{1}{m^2} f(\xi)$ , donde la dependencia es de tercer grado a la norma. Es dominada por las aportaciones de  $F$ . Su gráfica se encuentra en la figura 5.12.  $G_1^{(2,\xi)}$  también posee al cuadrado de la masa como denominador, pero su dependencia a la norma proviene de  $C, F$  y  $H$ . Alcanza valores más altos que  $G_0$  y  $G_1$ , que la convierte en la función dominante de este límite. Su gráfica se encuentra en la figura 5.13.

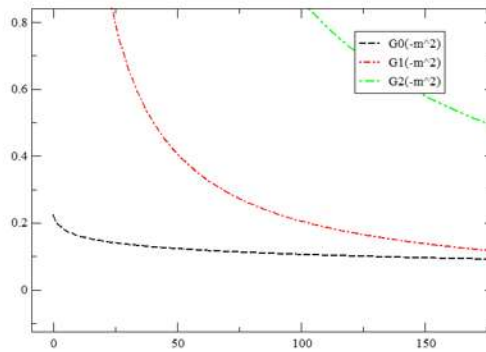
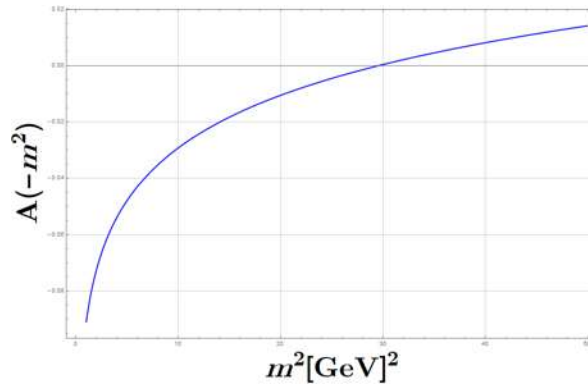


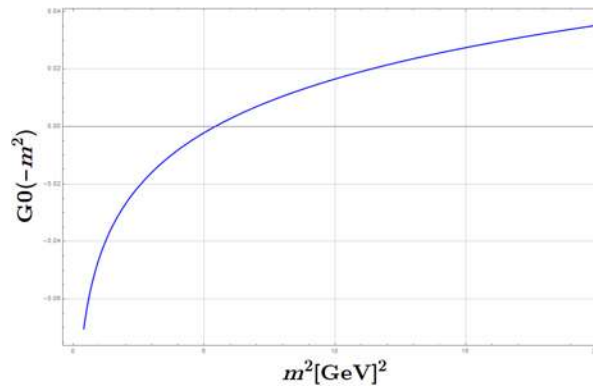
Figura 5.14: Funciones de estructura  $G_1^{(1,q)}$ ,  $G_2^{(1,q)}$  y  $G_3^{(1,q)}$  del límite simétrico.

Como se ha notado en el desarrollo de este capítulo, las funciones de quarks muestran muchas similitudes a las de fantasmas y gluones. En 5.12-5.14 podemos notar que los valores alcanzados por  $G_2$  son mayores a los de  $G_1$  y  $G_0$ . Esto confirma el dominio de la función  $G_2$  dentro del límite simétrico. En la figura 5.14 se encuentran las gráficas de estas funciones con la masa del campo de gluones.

Para finalizar hemos decidido exaltar una característica más de las funciones en este límite. Observemos la función que rige el comportamiento en  $A^{(1,\xi)}$ ,  $C^{(1,\xi)}$ ,  $F^{(1,\xi)}$  y  $H^{(1,\xi)}$  dentro de las expresiones (5.1)-(5.4). Puede notarse que  $C$  y  $H$  tienen un comportamiento del tipo  $\sim -m^{-2}$ . Por su parte  $F \sim -(m^2)^{-2}$ . Algo común entre estas funciones es el comportamiento asintótico, confirmado por las curvas en la figura 5.9. En este sentido resalta la función  $A$ , que resulta ser del tipo  $\sim a + b \log(m^2)$ . Esto se puede observar en la figura

Figura 5.15: Función de estructura  $A^{(1,1)}$ .

5.1. Observe la forma en que  $A$  cruza el eje de las masas en la figura 5.15. Este cero de la función nos permite afirmar que en  $A^{(1,\xi)}$  existe zero-crossing. Como se había menciona-

Figura 5.16: Función de estructura  $G_0^{(1,1)}$ .

do,  $G_0^{(1,\xi)}$  solo difiere a la función  $A$  por la dependencia a la norma que obtiene de  $C$ ,  $F$  y  $H$ . Por lo tanto está función también manifiesta el zero-crossing. El punto donde la curva  $G_0(-m^2)$  cruza el eje de las masas puede observarse en 5.16.

---

## Capítulo 6

### Conclusiones

En este trabajo de tesis hemos realizado una revisión sobre resultados conocidos en el vértice de tres gluones. Seguimos el proceso de construcción del vértice presentado en [2]. Por la generalidad de los cálculos desarrollados en [5], hemos reproducido las expresiones presentadas por el autor para el límite simétrico. Verificamos la consistencia de estos desarrollos, al realizar un comparativo con lo obtenido en [1].

Como consecuencia de lo presentado en el capítulo dos, hemos confirmado lo siguiente:

- Las constantes  $N_f, T_R$  son la única manifestación del sabor en el vértice.
- Las constantes  $C_A$  y  $f^{a_1 a_2 a_3}$  representan las propiedades de color en el vértice.

Esto da validez a la propuesta de simetría presentada en [1, 2, 5, 15] como método de solución a las SDE.

En el capítulo tres continúa con el desarrollo de los argumentos de simetría. Las 14 estructuras de Lorentz independientes se deducen al restablecer la simetría de Bose en el vértice. La identidad WST ordena la estructura covariante en sus partes longitudinal y transversa. La imposición de simetría con intercambios en los momentos externos e índices de color

también establece a las 6 funciones  $A, B, C, F, H$  y  $S$  como los componentes escalares del vértice.

Algo importante es la relación que existe entre las funciones  $\Lambda$  del vértice 3.5 y  $A, B, C, F$  y  $H$  de (3.8). Estas expresiones definen la forma del vértice bajo cualquier situación física en los campos de gluones.

El desarrollo de las integrales (3.25) en dos y tres puntos muestran la singularidad de las funciones  $\kappa_i$ , al igual que el polo en las funciones  $\varphi$  alrededor de  $n \rightarrow 4$  como dimensiones del espacio.

En la sección final de este capítulo se muestran las funciones de estructura en dimensiones arbitrarias y covariantes. Resalta que  $S$  resulta nula, imponiendo que solo se necesiten 5 tensores para representar al vértice. En las expresiones para las funciones de estructura se aprecia que en  $A$ , tanto de fantasmas y gluones como quarks se encuentran factores con las funciones  $\kappa_i$ , mientras que en las funciones  $B, C, F$  y  $H$  aparecen como diferencias. Esto implica que solo las funciones  $A$  tienen divergencias en las dimensiones espaciales.

El capítulo cuarto aborda las funciones de estructura del límite simétrico. Primero se muestra la forma de las funciones auxiliares en el vértice. Se muestra que  $\eta, \mathcal{K}, \mathcal{Q}$  son finitos, mientras que  $\kappa$  y  $\varphi$  de este límite presentan una divergencia y polo respectivamente. Se hace notar los cambios que produce que las funciones de carácter anti-simétrico  $B$  y  $S$  se anulen. Las funciones  $\Lambda$  de este límite imponen una nueva re-asociación del vértice. Que se compone de tres tensores de Lorentz.

Además de presentar las expresiones de  $A, C, F$  y  $H$  en este límite, mostramos las definiciones de  $G_0, G_1$  y  $G_2$ . Dentro del proceso de renormalización se presentan resultados en los que es posible elegir distintos esquemas de sustracción.

En el quinto capítulo presentamos los estudios sobre la dependencia del vértice a la masa de los campos de gluones y la norma. Se inicia con las funciones de estructura  $A, C, F$  y  $H$

distinguiendo los resultados por lazos de origen. Posteriormente se abordan las expresiones de  $G_0$ ,  $G_1$  y  $G_2$ .

Se verifican las expresiones del límite simétrico presentadas en [5] a realizar un comparativo con lo establecido en [1].

En base a nuestros objetivos hemos clasificado las singularidades y polos de las funciones escalares del vértice. Podemos concluir que solo las funciones  $A$  son divergentes en las dimensiones del espacio. Además de una singularidad con el regulador, también posee un término logarítmico, mismo que la hace divergente en las regiones IR y UV. Las funciones  $C$  y  $H$  presentan un polo de primer orden con  $p^2$ . Resultan dominantes las funciones  $F$ , pues presentan un polo de segundo orden con  $p^2$ . Cabe resaltar que el término logarítmico de  $A^{(1,\xi)}(p^2)$  es removible, por lo tanto carece de significado físico.

Se ha mostrado que las funciones transversales resultan dominantes. Resaltan las similitudes de comportamiento entre las funciones de quarks con las de fantasmas y gluones. La principal diferencia entre las funciones se encuentra en  $A^{(1,q)}$ , donde el término logarítmico no puede ser removido por la elección de norma.

Las tres funciones escalares que rigen el comportamiento del vértice en este límite suprimen los polos de orden dos de la función  $F$ . La función  $G_0$  es la única con divergencias en las dimensiones del espacio (que hereda de  $A$ ). Las funciones  $G_1$  y  $G_2$  tienen un polo de primer orden en  $p^2$ .

El comportamiento de  $G_0$  es regido por  $A$ , de la que obtiene un comportamiento logarítmico y la divergencia con el regulador. En el caso de  $G_1$ , se tiene un comportamiento asintótico con  $p^2$  que proviene de las funciones  $C$  y  $F$ . El comportamiento de  $G_2$  es también asintótico con  $p^2$ , que toma de las funciones  $C$ ,  $F$  y  $H$ . De nuevo se encuentran similitudes en el comportamiento entre las funciones de fantasmas y gluones con las de quarks.

La función dominante de este límite es  $G_2$  que crece con mayor rapidez a  $G_1$  por las cons-

tantes numericas en las funciones.

La última característica del vértice que hemos presentado es el zero-crossing. Mismo efecto que se generará por el comportamiento logarítmico en la función  $A$  del vértice. Este efecto está presente también en  $G_0$  y proviene de la función  $A$ . Este efecto puede ser removido del vértice si se elige que  $\xi = -\frac{8}{9}$  por lo que no tiene relevancia física.



---

## Bibliografía

- [1] W. Celmaster and R.J Gonsalves, *Phys. Rev. D* 20, 1420 (1979).
- [2] J.S. Ball and T.-W. Chiu, *Phys. Rev. D* 22, 2542 (1980).
- [3] F.T. Brandt and J. Frenkel, *Phys. Rev. D* 33 (1986) 464.
- [4] M.A. Nowak, M. Praszalowicz and W. Słomiński, *Ann. Phys.* 166 (1986) 443.
- [5] A. I. Davydychev, P. Osland and O. V. Tarasov, *Phys. Rev. D* 54, 6 (1996).
- [6] Gernot Eichmann and Richard Williams , *Phys. Rev. D* 89, 105014 (2014).
- [7] Ph. Boucaud, F. De Soto, J. Rodríguez-Quintero, and S. Zafeiropoulos, *Refining the detection of the zero crossing for the symmetric and asymmetric three-gluon vertices*, *Phys. Rev. D* 95, 114503 (2017).
- [8] A. I. Davydychev, Per Osland, Leo Sacks *Quark mass dependence of the one-loop three-gluon vertex in arbitrary dimension*.
- [9] N. I. Ussyukina, A. I. Davydychev, *Some Exact Results For Two-Loop Diagrams With Three And Four External Lines*.
- [10] Eric Braaten, Jacques P. Leveille, *Minimal subtraction and momentum subtraction in quantum chromodynamics at two-loop order*, *Phys. Rev. D* 24, 5 (1981).

- 
- [11] A. I. Davydychev, *Geometrical methods in loop calculations and the three-point function*.
- [12] A. I. Davydychev, P. Osland *On-shell two-loop three-gluon vertex*.
- [13] J. S. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sc.37 452 (1951)
- [14] F. J. Dyson, The  $S$  matrix in quantum electrodynamics, Phys. Rev. 75 (1949)
- [15] Andrey Grozin, *Lectures on QED and QCD practical renormalization of one and two loop diagrams* World Scientific Publishing (2007).
- [16] C. Itzikson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980
- [17] Kerson Huang, *Quarks, Leptons and Gauge Fields 2nd edition*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 1992.
- [18] P. Pascual and Tarrach, *QCD: Renormalization for the practitioner*, Springer, Berlin, 1984 (*Lecture notes in Physics*, v.194).
- [19] Walter Greiner, Stefan Scramm and Eckart Stein *Quantum Chromodynamics* Third Edition Springer
- [20] John C. Collins, *RENORMALIZATION An Introduction to Renormalization, the renormalization group, and the operator-product expansion*, Cambridge University Press, 1984.
- [21] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory* second edition 1996.
- [22] Franz Mandl, Graham Shaw, *Quantum Field Theory* second Edition, Jhon Wiley and Sons 2010.

- 
- [23] Hung Jung Lu, Christopher A. Perez *Massless One-Loop Scalar Three-Point Integral and Associated Clausen, Glaisher and L-Functions*, SLAC-PUB-5809 May 1992.
- [24] Luis G. Cabral- Rosetti and Miguel A. Sanchis-Lozano, *Apell Functions and the Scalar One-Loop Three-point Integrals in Feynman Diagrams* 13 jun 1992.
- [25] Jorge C. Romão *Modern Techniques for One-Loop Calculations*
- [26] Robbert Rietkerk *ONE-LOOP AMPLITUDES IN PERTURBATIVE QUANTUM FIELD THEORY*, Master Thesis ...
- [27] Đỗ Hoàng Sơn *Feynman loop integrals and their automatic computer-aided evaluation* Ph. D thesis May 27,2003