



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS
DE HIDALGO

Facultad de Filosofía "Dr. Samuel Ramos M."



Sobre la noción de número de Gottlob Frege

TESIS

Para obtener el grado de Licenciado en Filosofía

Presenta

Bogar Kassim Valdez Garcia

Asesor:

Licenciado en Filosofía, Mario Alberto Cortez Rodríguez

Morelia, Michoacán

Junio 2015

A mis padres Bertha García Murillo y Virgilio Valdés Ugarte

ÍNDICE

RESUMEN.....	4
ABSTRACT.....	4
INTRODUCCIÓN.....	5
CAPÍTULO I: UN POCO DE CONTEXTO.....	6
1. La crisis fundacional de las matemáticas.	6
2. Frege y su proyecto logicista.	13
CAPÍTULO II: EN TORNO AL CONCEPTO DE NÚMERO.....	23
1. La naturaleza <i>a priori</i> del concepto de número.	24
2. Los números como entidades no subjetivas ni psicológicas.	29
3. El problema de la objetividad de los números.	35
4. Los números como predicados de conceptos.....	37
CAPÍTULO III: SOBRE LA NATURALEZA LÓGICA DEL CONOCIMIENTO NUMÉRICO.	42
1. La naturaleza analítica de las proposiciones numéricas.....	43
2. La definición de número de Frege.	45
CONCLUSIONES.....	50
BIBLIOGRAFÍA.....	53

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es exponer la investigación en torno a la noción de número desarrollada por Gottlob Frege. Para lograr esto, el trabajo parte de una breve semblanza histórica de lo que constituyó el así llamado “proyecto logicista” de Frege, lo cual tiene como propósito el contextualizar el estudio en torno al número de Frege, al igual que arrojar luz sobre algunos de las nociones que sirven a Frege de trasfondo para su investigación. Expuesto esto, el trabajo pasa a desarrollar propiamente el análisis fregeano de número, el cual concluye en la exposición de lo que representa la definición de número de Frege.

Palabras clave: número, aritmética, lógica, logicismo, función biyectiva

ABSTRACT

The aim of this paper is to present the research on the notion of number developed by Gottlob Frege. To achieve this, the work of a brief historical sketch of what constituted the so-called "logician project" Frege, which aims to study the context around the number of Frege, as well as shed light on some of notions that serve Frege background for investigation. Exposed this, the work passes properly develop Frege number analysis, which concludes in the exhibition representing the definition of number of Frege.

Key words: number, arithmetic, logic, logicism, bijective function

“Después de que uno se haya convencido de la inmovilidad de una roca ante la inutilidad de los esfuerzos para moverla, se puede preguntar qué es lo que la sostiene con tanta firmeza.”

Gottlob Frege (1972: 26)

“Toda la obra –incluso toda la vida- de Frege está dedicada al esfuerzo por entender a fondo qué son los números naturales y de dónde les viene a los teoremas aritméticos su peculiar e inigualable seguridad”

(Mosterín, 1972: 5)

“Cuando pienso acerca de actos de integridad y gracia, me doy cuenta que no conozco ninguno comparable con la dedicación de Frege hacia la verdad. El trabajo de toda su vida estaba a punto de concluirse, mucho de su trabajo estaba siendo ignorado en beneficio de hombres infinitamente menos capaces, su segundo volumen estaba a punto de ser publicado, y al encontrar que su supuesto fundamental estaba equivocado, él respondió con placer intelectual sumergiendo claramente todo sentimiento de desilusión. Era algo casi sobrehumano y una prueba de lo que los hombres son capaces si su dedicación es hacia el trabajo creativo y el conocimiento en vez del crudo esfuerzo por dominar y ser reconocidos.”

(Russell en Heijenoort, 1967:127)

INTRODUCCIÓN

Gottlob Frege, filósofo, matemático y, sin lugar a dudas, uno de los lógicos más sobresalientes de la historia, considerado por muchos el padre de la lógica moderna y el lógico más importante desde Aristóteles, fue un modesto profesor de matemáticas en la universidad de Jena, cuya obra, subestimada e ignorada por la mayoría de sus contemporáneos, se encuentra marcada por un interés constante por el *status* epistemológico de las matemáticas, el cual tiene como punto cumbre la formulación y

desarrollo de su ambicioso proyecto de fundamentación de la aritmética conocido como *logicismo*.

El trabajo que expongo a continuación tiene como objetivo el llevar a cabo una exposición de una de las investigaciones más importantes realizadas por Gottlob Frege en el marco del desarrollo de su propuesta logicista, esta es, la investigación en torno al concepto de «número». Para esto partiré de una breve exposición de lo que constituyó el así llamado «proyecto logicista», el cual además de ofrecer el contexto general de la investigación de Frege acerca del número, pretende señalar el razonamiento detrás del análisis fregeano, así como algunas otras nociones teóricas utilizadas por Frege a través de su investigación. Seguido de esto, pasaré propiamente a la reconstrucción del análisis fregeano de número, señalando las principales conclusiones de Frege respecto a este tema, el cual desemboca en lo que representa la definición de número de Frege.

Como tal, este trabajo no pretende ser una reconstrucción exacta de la investigación de Frege, no tiene como propósito explicar a detalle las demostraciones lógicas de las que Frege hace uso en su definición de lógica, sino simplemente se reduce a hacer accesible al argumento general que lleva a Frege a sostener su postura respecto a la noción de número.

I. UN POCO DE CONTEXTO

1. LA «CRISIS FUNDACIONAL DE LAS MATEMÁTICAS»

A lo largo de la historia del conocimiento humano las matemáticas han ocupado un lugar muy especial dentro del espectro de las ciencias, y su influencia en algunas de las disciplinas filosóficas fundamentales, como lo son la ontología y la teoría del conocimiento, ha sido constante y profunda. Con frecuencia fueron consideradas como el conocimiento más perfecto que poseemos como humanidad, esto debido a su confiabilidad, certeza y exactitud. Su historia, que se remonta a etapas muy tempranas en la civilización pero tiene

como uno de sus puntos de mayor productividad el siglo XIX, siendo la resolución de diversas problemáticas formuladas desde mucho tiempo atrás, los avances en la unificación de las distintas ramas de las matemáticas (álgebra, aritmética, geometría, etc.) algunos ejemplos de los grandes logros que tuvieron lugar durante esa centuria. Sin embargo, y de manera quizá paradójica, es justamente en este contexto lleno de grandes avances y logros en ciencia en general, y particularmente en las matemáticas, en el que surge el fenómeno que fue conocido en el siglo XX como la «Crisis fundacional de las matemáticas».

Con esta expresión, «Crisis fundacional de las matemáticas», se hace referencia a un período en el campo de las matemáticas, y la filosofía de las matemáticas, que se caracteriza por una gran preocupación por desarrollar una descripción clara y completa de los diferentes elementos y funciones que constituyen las diferentes ramas de la ciencia matemática, con el objetivo de crear para estas una base teórica firme que logre expresar con claridad y precisión sus conceptos, y fundamentar o justificar adecuadamente sus verdades.

Esta «crisis» surge como consecuencia, por un lado, de la gran productividad intelectual de la época, que entre otros aspectos, llevó a las matemáticas a alcanzar un alto grado de abstracción, lo que generó en las mentes de los pensadores de la época interrogantes en torno a la naturaleza y validez del conocimiento matemático.

Por otro lado, la aparición durante la primera mitad del siglo XIX de nuevas teorías o verdades matemáticas que desafiaban viejas creencias, fuertemente arraigadas en las matemáticas tradicionales. Se crearon nuevas y “extrañas” álgebras; se formularon ecuaciones de quinto grado, o aparecieron las geometrías no euclidianas, lo que tuvo como consecuencia, entre otras, la puesta en tela de juicio de una concepción de las matemáticas como un cuerpo de leyes completo e inmutable -concepción que aún hasta el siglo XIX era dominante entre estudiosos de la ciencia e intelectuales-, motivando así la búsqueda de un nuevo y mejor fundamento para las matemáticas.

En relación con esto último es que vale la pena señalar, por lo menos a grandes rasgos y sin ocuparnos demasiado en los detalles, la especificidad de algunos de estos descubrimientos que dieron origen a esta llamada «crisis fundacional de las matemáticas»,

esto con el objetivo de mostrar de manera más clara y concreta las problemáticas derivadas de estos nuevos descubrimientos, así como los objetivos hacia los que sus posibles soluciones apuntaban.

Las nuevas algebras

Uno de los sucesos más interesantes que dieron lugar a ésta llamada crisis fundacional, fue sin duda, la aparición de nuevas algebras creadas en el siglo XIX, como las que se conocen como «álgebra vectorial» y el «álgebra de matrices». Estos nuevos descubrimientos constituyeron la creación de una nueva serie de algebras en las que no se cumplía la propiedad de «conmutabilidad» para sus operaciones fundamentales. Esta propiedad se presentaba como un rasgo necesario, definitorio, en el álgebra tradicional, que tenía a la suma y a producto como sus operaciones básicas. Esta propiedad se presenta en todas aquellas operaciones binarias en las que el orden de los términos a operar no altera el resultado que se obtiene. En el caso de la multiplicación o producto entre números, se enuncia con la familiar expresión: *el orden de los factores no altera el producto*.

Ahora bien, el problema que trae consigo la aparición de estas nuevas algebras, consistió en que hasta el nacimiento de estos nuevos sistemas, la comunidad matemática basaba los supuestos de uniformidad del álgebra en la propiedad de conmutatividad presente en los distintos tipos algebraicos; lo que trajo como consecuencia una drástica modificación hacia la manera de percibir la unicidad del álgebra, y en general, la naturaleza misma del álgebra.

Ecuaciones de quinto grado

En lo que respecta a las ecuaciones de quinto grado, en el siglo XIX era una opinión común entre los matemáticos que los valores numéricos para las variables en ecuaciones de grados superiores al cuarto, como la ecuación: $5x^5+2x^4+2x^3-7x^2+x=0$, podían ser obtenidos por los mismos procedimientos con los que obtenemos los valores numéricos de los grados 1, 2, 3 y 4. Tal creencia sin embargo fue quebrantada en 1824, cuando el matemático noruego Niels Henrik Abel, junto con otros, da a conocer el llamado «Teorema de Abel-

Ruffini»; en el cual se demuestra la imposibilidad de proceder, en la resolución de ecuaciones de quinto grado y grados superiores, de la misma manera en la que se procede al intentar descubrir las raíces de las ecuaciones que van del grado 1 al 4.

Las consecuencias que trajo este teorema, como uno bien podría imaginarse, influyeron de manera decisiva en la concepción que respecto a las matemáticas se tenía por parte de los intelectuales de la época, debido a que modificó de manera sustancial las expectativas acerca de la manera en que podría hacerse frente a ecuaciones de grado superior al 4. Del mismo modo podría decirse, junto con Nidditch, que “el descubrimiento de Abel lesionó gravemente la creencia, muy extendida entre investigadores en ciencia y en filosofía, de que, al menos, el núcleo del conocimiento futuro estaría de acuerdo con el conocimiento especializado de la época” (Nidditch, 1995: 35); lo que a vez minó la confianza, presente en las raíces mismas de la matemática, en la posibilidad de que las matemáticas, haciendo uso de los resultados y métodos hasta entonces conocidos, pudieran resolver sus problemas y justificar sus resultados futuros.

Geometrías no euclidianas

La aparición de geometrías no euclidianas fue sin duda uno de los logros más significativos en las matemáticas del siglo XIX, y esto debido principalmente a que las geometrías no euclidianas son la respuesta a uno de los grandes problemas de las matemáticas hasta ese momento, el problema que se relacionaba con el llamado «axioma de las paralelas» o «quinto postulado de Euclides». En este postulado se afirma, al menos en su versión más conocida, que dos rectas paralelas, al ser prolongadas en cualquier dirección, no se cortarán o, de manera equivalente, que si una recta al incidir sobre dos rectas forma ángulos internos del mismo lado cuya suma es menor a 180° , las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en que están dichos ángulos.

Planteado por los griegos antiguos, este problema parte de la axiomatización que de la geometría de su tiempo hizo Euclides y consiste en la pregunta por la posibilidad de deducir a este axioma V a partir de los demás. Para los matemáticos griegos, y para los matemáticos posteriores hasta esta llamada «crisis fundacional de las matemáticas», los axiomas representaban elementos, dentro de un sistema formal, primarios y autoevidentes,

que no podrían ser, dadas estas características, deducidas o explicadas a partir de otros elementos (axiomas, teoremas, etc.), es decir, representaban elementos autónomos. El problema que representaba el «axioma de las paralelas» para los matemáticos griegos consistía en que este no representaba un elemento evidentemente autónomo como sí lo eran los demás axiomas –esto quizá debido a que éste, a diferencia de los otros cuatro axiomas restantes, no presentaba la suficiente sencillez, al igual que este, en una de sus formulaciones, aparecía la noción de infinito, con la que los matemáticos griegos procedían con particular cuidado-, en este sentido, resultaba un trabajo de especial interés el demostrar la validez de este quinto postulado.

El problema sin embargo se mantuvo sin respuesta alguna pese a los diversos intentos de solución por parte de los matemáticos de distintas épocas. Es sólo hasta el siglo XIX, principalmente por los trabajos de Gauss, Bolyai, Lobachevsky y Riemann, que esta problemática llega a arrojar resultados concluyentes a consecuencia de la aparición de sistemas geométricos en donde no se incluye el «axioma de las paralelas», sino su negación. Esto significa que podemos combinar al resto de los axiomas y postulados de la geometría euclidiana con la negación del axioma V, y lo que resulta es un conjunto consistente, lo que se muestra al encontrar un modelo de dicho conjunto. La existencia misma de las geometrías no euclidianas muestran la imposibilidad de deducir el «axioma de las paralelas» de otros axiomas. Conviene puntualizar aquí que una proposición α es independiente de un conjunto de proposiciones Δ si a partir de este conjunto no podemos inferir α ni la negación de α . Si lo vemos en términos de consecuencia lógica, diríamos que α es lógicamente independiente de Δ si, y solo si, $\Delta \not\models \alpha$ y $\Delta \models \neg \alpha$, lo que puede ser interpretado intuitivamente como el hecho de que no hay suficiente información o contenido de verdad en las proposiciones contenidas en Δ como para saber si α es verdadera o falsa. Es fácil ver que si una proposición α es lógicamente independiente de un conjunto de proposiciones Δ , la cual podría ser una teoría, entonces si añadimos α al conjunto Δ , obtenemos un conjunto de proposiciones consistente; y lo mismo sucederá si añadimos a Δ , a la negación de α .

De manera general, las consecuencias de estos nuevos descubrimientos representaron un cambio en la manera de percibir las matemáticas generando una nueva

perspectiva acerca de las características que habitualmente se asociaban a la matemática; una problematización en torno a los axiomas de estas y en general de cualquier otra ciencia que hiciera uso de ellos; y un desconcierto hacia la conformidad del conocimiento futuro de las matemáticas con lo desarrollado hasta entonces, consecuencia de la sorpresa que generaron los múltiples descubrimientos en aquellos años.

Es así como las sorpresas generadas por los descubrimientos particulares en las matemáticas fueron adquiriendo cada vez más la forma de un proyecto global de restauración, enfocado en llevar a la ciencia matemática a una correcta caracterización de los diferentes procedimientos y componentes que en ella se desarrollaban; restauración tal que dio un gran impulso al desarrollo de lenguajes artificiales, de sintaxis sencilla y estricta, para la expresión de los distintos sistemas matemáticos.

De la misma forma, como consecuencia de estos nuevos fenómenos, los científicos e intelectuales del siglo XIX se fueron haciendo cada vez más conscientes de la naturaleza de la ciencia matemática y del tipo de actividad que en ellas se realizaba. Así las matemáticas empezaron a ser vistas como una ciencia aún más abstracta y formal de lo que los matemáticos de la época creían, cuya construcción dependía más del libre juicio de la mente humana que de la aplicación que de ellas se hiciera en las ciencias naturales, y cuya actividad consistía en la tarea de deducir teoremas a partir de una serie de hipótesis ya postuladas sin preocuparse propiamente por si éstas pueden ser consideradas o no verdades “autoevidentes” o si representaban, o no, rasgos profundos que la estructura de la realidad.

Estos nuevos descubrimientos en matemáticas, además, influyeron en la formación de una nueva perspectiva respecto a las matemáticas por parte de algunos matemáticos y filósofos del siglo XIX, la cual comenzaba a concebir a la matemática como algo más alejado de la naturaleza y más cercano a un invento humano, cuya utilidad, mas no su verdad, radicaría en el mayor o menor ajuste de estas a la realidad.

Frente a esta problemática, los avances en favor de una adecuada fundamentación de la matemática no se hicieron esperar, y pronto salieron a la luz importantes investigaciones de la mano de grandes matemáticos, que pretendían llevar a su disciplina (o a algunas partes de ellas) a una mejor comprensión de su naturaleza basada principalmente

en una mayor simplificación en su contenido; muestra de ello lo fue la así conocida «aritmización del análisis».

Surgida de las contribuciones de Bolzano, Weierstrass, Dedekind, Cantor y otros, la aritmización del análisis tiene como origen el intento por ofrecer una base firme al cálculo, al álgebra y los sistemas numéricos, basado en la consideración, demostrativamente fundada, de que la aritmética de los números naturales y todo lo que ella presupone, basta para la estructuración de las diferentes teorías que conforman el análisis matemático (los números complejos, los números reales, los números racionales, los números enteros, y las diversas construcciones derivadas a partir de ellos).

No obstante, pese a esta simplificación que mostraba una naturaleza esencialmente aritmética de los conceptos numéricos en general, es decir, fundada en los números naturales, se erguía lo que se mostraba como un problema igualmente preocupante para una adecuada comprensión de las matemáticas, y es que si bien con la «aritmización del análisis» se lograba acceder a una mejor comprensión de diversas áreas de las matemáticas, por otro lado, aún quedaba una cuestión abierta: ¿qué es exactamente la aritmética? ¿Qué es un número natural y por qué debemos detenernos en ellos, como siendo la base esencial de las matemáticas? Responder a estas preguntas resultaba crucial si se pretendía generar la posibilidad de encontrar algún mejor, y quizá, más elemental fundamento para las matemáticas.

Consecuencia de esto fue que desde las últimas décadas del siglo XIX y hasta las primeras décadas del siglo XX, el mundo vio el surgimiento y desarrollo de diferentes pensadores que reflexionaban en torno a este problemático tema, como lo fueron Brouwer, Weyl, Russell, Hilbert y Frege, entre otros, además de que vio el florecimiento de las tres posturas básicas en torno al problema de los fundamentos de las matemáticas: el intuicionismo, el formalismo y el logicismo.

2. FREGE Y SU PROYECTO LOGICISTA

Gottlob Frege, filósofo, matemático y, sin lugar a dudas, uno de los lógicos más sobresalientes de la historia, fue un pensador de origen alemán cuya preocupación por los problemas del lenguaje, la lógica y sobre todo la matemática, lo llevaron a generar importantes avances en filosofía y en ciencias, y a ser considerado por muchos como el creador de la lógica moderna y el lógico más importante desde Aristóteles.

La obra de este importante pensador, marcada por un interés constante por el *status* epistemológico de las matemáticas y por una inmensa preocupación por llevar a las matemáticas a una mayor precisión de sus operaciones, al igual que a una mejor comprensión de sus conceptos, encuentra como puntos cumbres de su grandiosa labor el desarrollo del proyecto fundacional de las matemáticas conocido como *logicismo* y la creación de su lógica matemática, estrechamente relacionada y, hasta cierto punto, constitutiva de su proyecto logicista.

Gottlob Frege

Nacido en Wismar, Mecklenburg (Alemania) en el año de 1848, Gottlob Frege fue un modesto profesor de matemáticas en la universidad de Jena, lugar al que llegó gracias a la ayuda de Ernst Abbe (catedrático y benefactor de la esa universidad) y en el que se mantendría, no sin ayuda del mismo Abbe, la mayor parte de su vida y hasta algunos pocos años antes de su fallecimiento en 1925.

Doctorado en matemáticas por la universidad de Göttingen, Frege desarrolló una, en apariencia, muy poca fructífera carrera universitaria, en la ya mencionada universidad de Jena, como profesor extraordinario de matemáticas —sin llegar nunca a conseguir el nombramiento de catedrático— en dónde el poco interés que este representaba para la universidad, queda reflejado en el pobre salario del que Frege gozaba —y que sólo la intervención de Abbe pudo remediar—, la existencia de algunos intentos de despido, que nuevamente se evitaron gracias a la intervención del citado protector, y las distinciones

rutinarias que le fueron negadas debido a que «su actividad carecía de interés para la Universidad» (Mosterín, 1971:5).

En lo que respecta a sus estudios e investigaciones, Frege fue un pensador subestimado entre los intelectuales de la época, incluso ignorado, cuyo escaso eco entre los matemáticos y filósofos de su época queda ilustrado en algunas tristemente célebres anécdotas de su vida¹. Esta situación se debió, posiblemente, a la complicada lectura de su lógica que discurría de forma vertical; la particular manera de abordar el problema matemático desde un lenguaje similar y no desde el lenguaje natural como era común entre filósofos; la extraña teoría que no se mostraba propiamente ni como matemática, ni como filosofía ni como lógica; o simplemente por el hecho de que una propuesta así representaba un trabajo tan poco prometedor como para tomarse la molestia de estudiarlo. (Cf. Nidditch, 1995: 69-70).

El proyecto logicista

La labor intelectual de Frege, como ya se señaló, se encuadra en la constante preocupación por llevar las matemáticas a una mayor precisión de sus conceptos y operaciones, preocupación que lo lleva a realizar importantes aportaciones en los campos de la matemática, la lógica y la filosofía del lenguaje; estudios que, por otro lado, representan lo que desde la perspectiva global de su obra constituyen el desarrollo de su ambicioso proyecto conocido como *logicismo*.

El logicismo, recordando lo dicho en la primera parte de este trabajo, representa una posición teórica surgida en el contexto del problema fundacional de las matemáticas, que, a grandes rasgos, se entiende como aquella tesis según la cual se concibe a la matemática como una parte constitutiva de la lógica, es decir, como un sistema formal derivable en última instancia de principios lógicos elementales.

¹ Como ejemplo de estas, se pueden mencionar las clases de Frege en la universidad de Jena que, en palabras de Carnap, sólo contaban con tres alumnos, entre ellos el mismo Carnap y un comandante retirado interesado en estudiar las nuevas ideas matemáticas únicamente como hobby; además de la falta de apoyo económico en la publicación de su *Las leyes básicas de la aritmética*, las cuales tuvieron que ser pagadas del propio bolsillo de Frege.

La tesis logicista, no obstante, y pese a su conocido origen fregeano, constituye una doctrina en la cual se pueden llegar a reconocer, además de Frege, otros filósofos y matemáticos importantes, como Leibniz, Bolzano, Russell o Dedekind. Quizá valga la pena detenerse un momento para analizar, aunque de manera general, las diferencias presentes entre las propuestas de estos pensadores, con el fin lograr una mejor comprensión de la especificidad de la Frege.

Un primer elemento a considerar en este reconocimiento de pensadores logicistas, es lo que se podrían denominar como «precursores del logicismo». Reconocido principalmente en la figura de Leibniz, aunque también en pensadores como Bolzano, Dedekind y Peano, la presencia de una tesis logicista en estos pensadores tiene como origen el reconocimiento de una serie de ideas lógicas, matemáticas y filosóficas, propias de cada uno de ellos, que tiene gran afinidad con las propuestas teóricas pertenecientes al logicismo de corte fregeano o russelliano. Como tal, esta identificación surge de una concepción del logicismo amplia, entendida como «una visión acerca de las relaciones que la lógica y las matemáticas mantienen entre sí, [así como] una concepción acerca de la naturaleza no sólo de las matemáticas, sino también de la lógica misma.» (Segura, 2001: 193)².

No obstante, y frente a esta concepción, se debe de tomar en consideración que el logicismo, si bien representa una concepción de la naturaleza de la matemática y de la lógica, así como de las relaciones que existen entre estas, está conformado ante todo aquella tesis que señala a la matemática como una parte constitutiva y derivable de la lógica, por lo que un reconocimiento de este con la doctrina de Bolzano, Dedekind o Peano es necesariamente parcial al no encontrarse en ellos, implícita o explícitamente, la formulación de tal idea.

El caso de Leibniz, por otro lado, resulta ser un tanto especial, ya que en este pensador se puede reconocer, aunque de manera no muy evidente, la tesis que reduce la matemática a nociones lógicas (tesis logicista), implícita de alguna manera en su propuesta

² Esta concepción «amplia», como se ha entendido, es la que puede encontrarse en algunos estudios sobre el tema del logicismo, como lo es el libro de Luis Felipe Segura *La prehistoria del logicismo*. Sin embargo, y tal y como el propio Segura lo entiende, la propuesta logicista debe reconocer como primer representante, propiamente hablando, a Gottlob Frege; esto debido a cuestiones tales como las que a continuación desarrollo (Cf. Segura, 2001: 16).

de una *combinatoria característica*. Sin embargo, este proyecto, que, por otro lado, se encuentra inmerso en un programa metafísico y epistemológico omnicomprendivo, representa un trabajo que Leibniz nunca llega a desarrollar.

Al respecto de estos así llamados «precursores del logicismo» y de sus claras diferencias con la tesis propiamente logicista, sólo diremos que es la reconstrucción histórica realizada mediante las herramientas conceptuales desarrolladas por Frege mismo la que nos permite calificarlos de tales. Pero es al propio Gottlob Frege a quien se le considera el primer representante del logicismo propiamente dicho, ya que en él se puede encontrar, a diferencia de estos otros pensadores, la primera formulación explícita de que las matemáticas (o por lo menos una parte de ellas) son derivables en última instancia, de principios meramente lógicos, acompañado del primer intento real de reducción de las matemáticas a términos lógicos.

Un segundo elemento a considerar respecto a la propuesta logicista de Frege, es el que representa la doctrina de los ingleses Bertrand Russell y Alfred North Whitehead, filósofos contemporáneos de Frege, quienes durante las primeras décadas del siglo XX llevaron a cabo el desarrollo de su propio proyecto logicista, el cual quedó plasmado en los tres volúmenes de su monumental obra titulada *Principia Mathematica* (primer volumen, 1910; segundo volumen, 1912; tercer volumen, 1913), y a quienes, al igual que en el caso de Frege, se deben considerar como representantes, propiamente dicho, del movimiento logicista.

Sin detenerme demasiado en este punto, simplemente quisiera señalar que, si bien desde una perspectiva general se considera a la matemática como derivable de la lógica, ambas doctrinas (la de Frege y la de Russell-Whitehead) se pueden reconocer como las dos únicas representantes del logicismo (esto en su versión clásica³). Sin embargo existen algunas diferencias esenciales en sus planteamientos que llevan a distinguir entre dos clases

³ En décadas recientes se ha hecho frecuente identificar las doctrinas logicistas de Frege y Russell-Whitehead con el término de «logicismo clásico», esto como una forma de contraste entre estos dos proyectos y el surgimiento de una nueva propuesta logicista conocida como «neo-logicismo», representada por el filósofo británico Crispin Wright, y expuesta principalmente en su trabajo de 1983 *Frege's Conception of Numbers as Objects*.

de proyectos logicistas. Quizá la más profunda de esas diferencias se da en el campo de aplicación de la matemática que posee uno y otro proyecto.

En lo que respecta la propuesta logicista de Russell-Whitehead, se debe entender antes que nada, que nos encontramos con lo que se puede considerar como una teoría logicista amplia o general, cuya reducción lógica de las matemáticas engloba la totalidad de disciplinas matemáticas conocidas en esos primeros años del siglo pasado⁴. En contraste, la propuesta logicista de Frege se limita a la reducción únicamente del estudio matemático que constituye la aritmética, con lo cual quedan excluidas de esa manera del proyecto logicista fregeano otras tantas ramas de la matemática, entre las que destaca la geometría; rama a la cual –y quizá de manera más evidente en sus *fundamentos de la aritmética*- Frege caracteriza como una ciencia estrechamente ligada a la intuición, y como se observará más adelante en este mismo apartado, fuera de toda posible reducción a la lógica⁵.

Dejando de lado el trabajo de Russell y Whitehead en el tema del logicismo, así como el de otros representantes del mismo, se puede pasar ahora a la exposición de una más detallada caracterización del proyecto logicista desarrollado por Frege, el cual, sin embargo, no pretende más que esbozar un panorama general del logicismo fregeano que logre contextualizar las reflexiones en torno a la noción de «número» realizadas por nuestro autor, así como poner de relieve algunas de las nociones más importantes relacionadas con su proyecto.

La tesis logicista de Frege, cabe mencionar antes que nada, representa un proyecto del cual se puede hablar, hasta cierto punto, como el trasfondo presente en la mayor parte de su labor intelectual, ya que, dejando de lado los diferentes escritos sobre matemáticas desarrollados a partir de su tesis doctoral en 1873 y hasta la aparición en 1879 de su

⁴ En relación con el logicismo postulado por Russell y Whitehead, resulta interesante mencionar la postura de algunos estudiosos de la obra russelliana, como es el caso de Alejandro Tomasini, quien basado en la diferencia de los ámbitos de la matemática susceptibles de reducción a términos lógicos, sugiere, si bien con algunas reservas, reconocer en la figura de Bertrand Russell al primer logicista propiamente hablando (Cf. Tomasini, 1994: 121-122).

⁵ Al respecto de esta dependencia de la geometría al ámbito de la experiencia en el pensamiento de Frege, resulta interesante la opinión de William y Martha Kneale, quienes, partiendo de la opinión de Frege frente a las geometrías no euclidianas, a las cuales Frege considera de manera implícita como verdades analíticas, derivan, como consecuencia de esto, el posible reconocimiento con un sistema igualmente analítico del cual sería susceptible la misma geometría euclidiana, derivándose así, consecuentemente, la aplicación del proyecto logicista al campo de la geometría (Cf. Kneale, 1980: 412-413).

Conceptografía, además de las obras posteriores al descubrimiento de la «paradoja de Russell» en 1902 que representó un grave desafío a su proyecto logicista⁶ —dos momentos que, en opinión de algunos expertos, representan las etapas menos fecundas y relevantes de su labor intelectual—, la obra de Frege se haya empapada por una constante preocupación por la confirmación de su tesis logicista.

El proyecto logicista de Frege posee un origen que se remonta a la publicación en 1879 de su revolucionaria obra titulada *Conceptografía, un lenguaje de fórmulas, semejante al de la aritmética, para el pensamiento puro (Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens)*⁷. Esta obra, tal y como lo muestra su prólogo, surge a partir de las inquietudes del propio Frege por intentar mostrar algunos elementos de la aritmética como verdades justificables a partir de pruebas meramente lógicas, en contraste con aquellas que basan su justificación en hechos empíricos, y como tal, el de mostrar la posibilidad de llevar a la formalización en el lenguaje lógico algunos de los aspectos presentes en la ciencias matemáticas.

Esta inquietud, sin embargo, y tal y como el propio Frege lo reconoce en el prólogo de su *Conceptografía*, encontró rápidamente importantes dificultades surgidas directamente de la inadecuación del lenguaje de la lógica aristotélica tradicional para la formalización de los enunciados de la matemática. De cara a esta problemática, Frege se dio a la tarea de desarrollar una nueva propuesta de lenguaje lógico que superase las dificultades de la lógica tradicional, lo cual dio como resultado la presentación en esta misma obra del lenguaje de la *Begriffsschrift* y del desarrollo de las primeras reducciones lógicas de elementos aritméticos.

Pese a todo esto se debe admitir que en la *Conceptografía* no podemos encontrar una tesis logicista en realidad. Y es que si bien, no se puede negar que la *Conceptografía*

⁶ Es un hecho ya muy bien conocido que el logicismo fregeano encontró su fin en el año de en 1902, debido a una carta escrita por Russell en la cual este comunica a Frege la presencia de una paradoja en la base de sus reflexiones, esto en el momento en el cual se encontraba lista para su publicación la obra fundamental de Frege, la cual vendría a ser la culminación de su proyecto logicista, esta es, *Las leyes básicas de la aritmética (Grundgesetze der Arithmetik)*.

⁷ Desde este punto y en adelante utilizaré el original alemán «*Begriffsschrift*» para referirme únicamente a la propuesta de lenguaje lógico fregeano, es decir, a la sistema de lógica formal ideado por Frege; por otro lado, utilizaré su traducción al español «*Conceptografía*», también de manera única, para hacer alusión a la obra total de Frege aparecida en 1879, diferenciando de esta forma entre sistema lógico y obra escrita.

representa la realización de las primeras demostraciones de una tesis que concibe a la aritmética como un tipo de conocimiento expresable en términos meramente lógicos, por otro lado, se debe tener presente que en ella no encontramos la formulación explícita ni implícita de que la aritmética pueda ser reconocida como una extensión de la lógica pura, sino, por el contrario, solo podemos encontrar un intento por explorar las posibilidades de una nueva propuesta lógica, aunada a la formalización de algunos elementos de la aritmética en términos lógicos⁸.

La formulación de la tesis logicista fregeana y, a partir de ahí, los esfuerzos claramente dirigidos a la puesta en marcha y consumación, solo tienen inicio hasta la publicación en 1884 de *Los fundamentos de la aritmética: Investigación lógico-matemática sobre el concepto de número* (*Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*). Esta obra, cuyo propósito particular —tal y como su nombre lo indica— es el de llevar al análisis el concepto mismo de «número», posee una importancia capital dentro de la labor de Gottlob Frege en tanto que en ella se ve formulada por vez primera la tesis logicista al mismo tiempo que se aparecen, igualmente por primera vez, los términos bajo los cuales el proyecto logicista es comprendido.

En las primeras líneas de la Conclusión a sus *Fundamentos de la aritmética*, Frege redacta lo que será la célebre formulación de su tesis logicista, afirmando, de cara a la investigación realizada en esa obra, lo siguiente: “Espero haber hecho verosímil en esta obra la idea de que las leyes aritméticas son juicios analíticos y que, por consiguiente, son a priori. La aritmética, por tanto, sería solamente una lógica más extensamente desarrollada, y cada enunciado aritmético sería una ley lógica, aunque una ley derivada” (1972: §87).

Como bien se puede observar a partir de esta formulación, la tesis logicista de Frege, que —como se ha venido diciendo— identifica a la aritmética con la lógica, basa su postura respecto a la naturaleza de la aritmética, en un doble reconocimiento: 1) en la

⁸ En relación con este antecedente de la tesis logicista fregeana, resulta llamativo observar una lectura del pensamiento de Gottlob Frege como el que nos ofrece Luis Felipe Segura en su ya citada *La prehistoria del logicismo*. En esta obra Segura nos comenta cómo es que los resultados surgidos de las reflexiones *Conceptografía* pudieron derivar en la formulación explícita de la tesis logicista, señalando “En nuestra opinión [...] Frege llega a la tesis logicista sólo después de percatarse de la inesperada posibilidad de definir la noción de sucesor en una serie [...] y, por tanto, de describir de manera estrictamente lógica la noción misma de número.” (Segura, 2001: 126).

identificación de la lógica con el conocimiento analítico-*a priori*; y 2) en el reconocimiento, por de más necesitado de demostración, de la aritmética con este conocimiento analítico-*a priori*, lo cual implica a su vez, su identificación con la lógica. Pero profundicemos un poco más en esta idea.

La lógica, tal y como se ha entendido desde su nacimiento en la filosofía aristotélica —y tal y como se entiende en la doctrina de Frege—, constituye una disciplina teórica interesada por el estudio exclusivo del razonamiento (pensamiento inferencial) a partir sólo de la forma en que éste se estructura, y mediante la traducción (o formalización) del razonamiento al lenguaje de la lógica. Lenguaje tal que, cabe señalar, es regido por las leyes lógicas del pensamiento al ser éste la expresión de principios lógicos elementales.

En lo que respecta al carácter analítico de la lógica, lo primero que se debe de tomar en consideración es que lejos de las categorías kantianas, la dicotomía analítico-sintético adquieren un nuevo significado dentro de la filosofía de Gottlob Frege⁹. De este modo se debe entender que, independientemente de las definiciones realizadas por Kant, para Frege las proposiciones representan juicios analíticos siempre que estos sean deducibles únicamente a partir de las leyes lógicas generales del pensamiento y de definiciones (las cuales representan solo juicios de identidad)¹⁰. En contraposición, las proposiciones representan juicios sintéticos siempre que existe una dependencia de estos con algún campo particular del saber, es decir, cuándo estos no se fundan solamente en definiciones y leyes lógicas del pensamiento (Cf. Frege, 1972: §3). De lo dicho se sigue que la verdad de una

⁹ No está de más no perder de vista que existe una gran influencia de Frege en la filosofía de Kant —de la que ya tendré oportunidad de hablar más adelante—, la cual queda quizá de manera más claramente evidenciada en las dicotomías *a priori-a posteriori* y analítico sintético; dos categorías que, no obstante, son reformuladas en el planteamiento fregeano.

¹⁰ Un buen ejemplo de lo que representa un juicio analítico desde esta concepción nos viene dado por el propio Frege en sus *fundamentos de la aritmética* cuando en relación con la posibilidad de demostrar formulas numéricas, Frege expone la labor desempeñada por Leibniz al respecto citando:

«No es una verdad inmediata que 2 y 2 son 4; supongamos que 4 significa 3 y 1. Se la puede demostrar de esta manera:

Definiciones:

1. 2 es 1 y 1,
2. 3 es 2 y 1,
3. 4 es 3 y 1.

Axioma [el cual también representa una verdad analítica (Cf. Frege, 1972: §65)]: Si se reemplaza una cosa por otra igual, la igualdad persiste.

Prueba: $2+2 = 2+1+1 = 3+1 = 4$.

Def. 1. Def. 2 Def. 3.

Luego: por el axioma $2+2 = 4$ » (Leibniz citado en Frege, 1972: §6).

proposición analítica es necesariamente *a priori*, mientras que la de las proposiciones sintéticas, debe ser *a posteriori*.

Caracterizados los juicios analíticos de esta manera, se observa fácilmente cómo es que Frege identifica a la lógica con este tipo de juicios. Y es que partiendo de lo dicho respecto a la lógica como aquella disciplina regida por las leyes lógicas del pensamiento, que se ocupa de estudiar la estructura del razonamiento, se puede observar que la lógica se identifica con los juicios analíticos en tanto que ambos encuentran su fundamento en las leyes lógicas del pensamiento, al igual que ambos se enfocan en la validez de las proposiciones a partir únicamente de su estructura como bien lo muestra el ejemplo expuesto en la nota 10. Es de esta manera que se debe decir como bien señala William y Martha Kneale, que en el logicismo de Frege “el adjetivo «analítico» se ha de entender por referencia a su propia concepción de lógica” (1980: 412).

El paso de lo analítico a lo *a priori*, por otro lado, representa una consecuencia fácilmente deducible e inmediata. Como bien es sabido, por lo menos desde Kant, el conocimiento, dígame científico, filosófico, etc., puede ser clasificado en dos diferentes campos dependiendo de la forma en que se pueden justificar sus verdades: el conocimiento *a posteriori*, que basa sus verdades en la apelación a los hechos del mundo sensible; y el conocimiento *a priori*, el cual prescinde de la experiencia para justificar sus verdades. Ahora bien, los juicios analíticos como verdades fundadas en principios lógicos y en meras definiciones que son, vienen a representar un conocimiento *a priori* en tanto que en ellos no existe apelación alguna al mundo sensible para la justificación de su verdad, ni para su proceder en general¹¹.

Identificada de esta manera, la lógica con lo analítico-*a priori*, la cuestión respecto a la naturaleza lógica de la aritmética adquiere en Frege la forma de un intento por demostrar la naturaleza analítica-*a priori* de los juicios aritméticos, y en general de todos los

¹¹ Pese a la identificación inmediata que representa lo analítico respecto al conocimiento *a priori*, no deja de ser curioso el observar la importancia que da Frege en sus *fundamentos de la aritmética* al combate contra la postura empírica de la aritmética; la cual, de manera bastante segura, fue motivada por el interés de Frege hacia la posibilidad de acceder a un público filosófico. Así se puede observar que en esta obra el combate hacia este punto de vista representa prácticamente un tercio de sus reflexiones, siendo igualmente curioso el observar que aun cuando de la formalización exitosa de la noción de número se obtendría como consecuencia su condición de conocimiento *a priori*, esta formalización se presenta solo después haber hecho verosímil tal concepción mediante dicho combate.

elementos inmersos en esta ciencia (números, conceptos, teoremas, etc.). Para llevar a cabo su tarea el objetivo debía ser intentar mostrar que cada proposición de la aritmética puede ser obtenida a partir de una cadena de inferencias basadas en principios lógicos y definiciones, de manera que no existiese duda alguna de su carácter estrictamente analítico, para lo cual requería el uso de un lenguaje capaz de ofrecer la expresividad y claridad necesarias para realizar con efectividad esta tarea, siendo éste el lenguaje que pretendió desarrollar precisamente en su *Begriffsschrift*.

El objetivo planteado de esta manera en sus *Fundamentos de la aritmética* representaba ahora el inicio de un proyecto que de cierta manera Frege había esbozado cinco años atrás cuando en su *Conceptografía* había realizado las primeras formalizaciones lógicas de elementos aritméticos, y que ahora en sus *Fundamentos de la aritmética* había continuado con la reducción de la noción de «número» a términos lógicos. Sin embargo, y como el propio Frege reconoce en esta obra, este proyecto de fundamentación (proyecto logicista) solo podría ser concluido después de haber logrado llevar a la totalidad de la aritmética a una completa formalización en el lenguaje lógico.

Con el propósito de cumplir tal objetivo, aparece en 1893 la primera parte de la monumental obra fregeana de dos tomos titulada *Las leyes básicas de la aritmética, deducidas conceptográficamente* (*Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*); obra en la que además de la masificación de formalizaciones lógicas de teoremas aritméticos, encontramos una evolución en algunos de sus planteamientos teóricos, que se produce a raíz de las investigaciones en semántica realizadas por el propio Frege en el período que va de la aparición de los *Fundamentos de la aritmética* a la publicación de estas *Leyes básicas de la aritmética*, y que quedan plasmados en algunos textos ahora clásicos entre los que destacan *Función y concepto* (*Funktion und Begriff*), *Sobre sentido y referencia* (*Über Sinn und Bedeutung*) y *Sobre concepto y objeto* (*Über Begriff und Gegenstand*). Posterior a esto Frege publica en 1903 la segunda parte de *Leyes básicas de la aritmética* con lo cual se da por concluido el proyecto logicista tras el hallazgo un año antes, de la «paradoja de Russell».

Esbozada en estas líneas tan generales el proyecto logicista de Frege representa, teóricamente hablando, el planteamiento de dos objetivos diferentes aunque

complementarios: 1) por un lado, la codificación completa de la argumentación lícita en aritmética en el lenguaje exclusivamente lógico de la *Begriffsschrift*. Lo que se podría denominar «tesis formalista»; 2) y por otro, la reducción efectiva, a partir de esto, de la totalidad de la aritmética a términos lógicos. Lo que se podría denominar propiamente como «tesis logicista» o bien, «tesis reduccionista».

En lo que respecta al primero de estos objetivos (la «tesis formalista»), este constituye una labor que Frege se encarga de desarrollar bajo la forma de su *Begriffsschrift*, en lo que representa su primer gran obra e inicio de su proyecto logicista, la *Conceptografía*. En ella Frege presenta lo que, a grandes rasgos, constituirá la herramienta lógica de formalización de la aritmética¹². Por otro lado, la realización del segundo de sus objetivos (la «tesis reduccionista»), viene a representar una labor que, dada las dimensiones de tan ambicioso proyecto, solamente tendrá lugar a través de sus *Los fundamentos de la aritmética* y sus dos tomos de *Las leyes básicas de la aritmética*, sin olvidar el claro antecedente presente en su *Conceptografía*.

II. EN TORNO AL CONCEPTO DE NÚMERO

La cuestión acerca de la naturaleza del número representa un problema central en la doctrina logicista de Frege, esto debido a que la confirmación de la tesis logicista pasa necesariamente por la reducción lógica de todos los elementos aritméticos, entre los cuales, partiendo de la definición de aritmética como *la ciencia de los números naturales*, la

¹² No obstante, se debe de tomar en consideración que –como se señaló– la teoría lógica de Frege constituye un proyecto con una evolución propia a lo largo de toda la obra de Frege, y cuyos cambios más significativos se pueden observar en la primera parte de *Las leyes básicas de la aritmética*, lugar en donde se presentan algunas modificaciones a su lógica a raíz de las ya mencionadas nuevas investigaciones en semántica.

noción de «número» sobresale como el elemento fundamental y centro de toda reflexión dentro de la aritmética¹³.

Ahora bien, la respuesta dada por Frege a esta interrogante representa lo que, en palabras de algunos estudiosos de la obra fregeana, se puede considerar como la obra maestra de Frege, esta es, *Los fundamentos de la aritmética*. Este libro, que constituye una puesta en marcha del proyecto logicista de Frege, y como tal lleva inmersas importantes consideraciones epistemológicas, representa el esfuerzo por aclarar de manera contundente, la naturaleza misma de los números.

1. LA NATURALEZA A PRIORI DEL CONCEPTO DE NÚMERO

El problema de la naturaleza de los números, dejando al margen su motivación logicista y su importancia matemática en general, representa para Frege una cuestión estrechamente ligada con cuestiones filosóficas fundamentales. Sin duda alguna, y tal como el propio Frege afirma en la primera parte de sus *Fundamentos*, tales investigaciones han sido motivadas, además, por cuestiones filosóficas referentes principalmente a la naturaleza *a priori* o *a posteriori*, sintética o analítica, de las verdades aritméticas (Cf. Frege, 1972: §3).

Dejando de lado el análisis realizado por Frege a las cuestiones acerca de la naturaleza sintética o analítica de las verdades aritméticas –de las cuales ya tendré oportunidad de hablar más tarde– el problema epistemológico acerca de la naturaleza *a priori* o *a posteriori* de los números, representa una cuestión fundada en la distinción epistemológica entre el conocimiento obtenido de modo *a priori* y aquel obtenido de manera *a posteriori*. Siendo así se debe señalar, antes que nada, que “[p]ara que una verdad sea *a posteriori* se exige que su prueba no pueda ser validada sin alguna apelación a los hechos [...] Si por el contrario, es posible llevar a cabo la prueba partiendo de leyes generales únicamente [...] la verdad es *a priori*.” (Frege, 1972: §3).

¹³ A partir de este punto y en adelante, me referiré con el término «número» a la clase de los números enteros positivos, esto acorde con el manejo que hace del mismo Frege (Cf. Frege, 1972: Nota 3).

Pero entonces ¿qué clase de verdad representa el conocimiento numérico? Una primera posible respuesta sería que los números poseen una naturaleza ligada a la experiencia empírica, y por tanto, su naturaleza sería *a posteriori*. Esta propuesta no es del todo descabellada, sobre todo si pensamos en la forma en que nos acercamos al conocimiento de los números, en la que hacemos constante referencia a lo que tenemos enfrente y que nos es patente gracias a los sentidos. Frente a esta posibilidad, no obstante, Frege expone y analiza algunas de las posturas más usuales e importantes en favor de la naturaleza *a posteriori* de los números y enunciados aritméticos en general, concluyendo, como consecuencia de este análisis, la insostenibilidad de una concepción como esta.

Una de las principales tesis en favor de la naturaleza *a posteriori* de los números que combate Frege, la constituye la postura empirista de John Stuart Mill. Mill sostiene que todo enunciado aritmético afirma un hecho observado, y en consecuencia, los números vendrían a constituir representaciones mentales de fenómenos físicos, siendo por tanto, su naturaleza esencialmente empírica.

Sin embargo, como el propio Frege expone, esta postura trae consigo una serie de problemáticas que hacen de una tesis como ésta algo altamente improbable, ya que si nos apegamos de manera estricta a una concepción como la que Mill expone, nos vemos conducidos a la exigencia de observar un hecho particular para cada uno de los números de los cuales tengamos conciencia. Así, por ejemplo, se hace necesaria la observación previa de un fenómeno en el que hayan intervenido un millón de elementos para poder concebir un número como este; y aún de manera más complicada, tendríamos que haber observado un fenómeno en el que a novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve elementos (999, 999) se le hubiese sumado un elemento más para poder hacer comprensible una operación aritmética como la que viene designada por: «999, 999 + 1 = 1, 000,000».

Por otro lado, siguiendo con las críticas de Frege hacia la postura empirista de la aritmética y de los números, una postura como la expuesta de Mill –señala Frege- excluye toda la posibilidad de hablar de «dulce, ácido y amargo» como tres sensaciones del gusto o de «tres modos de resolución de una ecuación» –para seguir con los ejemplos de Frege- debido a que en ninguno de estos casos se tiene una impresión sensible como la que tenemos al observar tres manzanas por ejemplo; y aún de manera más enigmática, sería el

hablar del número cero, ya que, como el propio Frege señala, “hasta ahora nadie ha visto o tocado 0 guijarros” (Frege, 1972: §8).

Yendo un poco más lejos, Frege acepta la posibilidad de una inferencia de los números grandes y de sus operaciones, a partir de la observación en el mundo físico de pequeñas cantidades de cosas y de las operaciones entre estas, es decir, la inferencia por inducción de una ley general de los números a partir de la observación. No obstante, Frege enseguida descarta una solución como esta, señalando su escasa plausibilidad al hacer notoria la imposibilidad de su formulación diciendo “trátese de expresar una esta ley y se verá que es imposible” (Frege, 1972: §7).

Una propuesta alternativa a la de Mill dentro de lo que constituye la postura empirista de los números (y la aritmética en general), es la que concibe a los números como conjuntos de cosas. Esta tesis señala, a grandes rasgos, que los números tienen su origen en el mundo físico en tanto que estos constituyen abstracciones de multiplicidades de cosas materiales. Frente a esta alternativa, no obstante, Frege señala que los números tampoco pueden ser concebidos como conjuntos, montones, pluralidades o multiplicidades de cosas materiales, debido a que esta idea, a la que de igual forma se le podría adjudicar las mismas críticas expuestas hasta ahora, posee el inconveniente de que excluye los números «1» y «0» de la definición, al no representar estos pluralidad alguna.

Por demás, los números tampoco pueden representar propiedades de cosas materiales. Siguiendo con las ideas de Baumann, Frege rechaza la idea de concebir los números como propiedades de cosas materiales, debido a que las cosas materiales, en sentido estricto, nunca representan unidades rigurosas, siendo posible el concebirlas como unidades algunas veces o como pluralidades de diversos tamaños algunas otras, sin por ello modificar de manera alguna el objeto físico de nuestra percepción.

Un ejemplo de ello lo puede constituir un objeto cotidiano como lo es un libro. Este objeto, determinado por demás, en cuanto a su extensión, peso, textura, olor, color y de más características se refiere, posee una indeterminación numérica expuesta los distintos modos en que este objeto es concebido. Y es que como bien puede observarse, este puede llegar a

ser entendido como «1» en tanto que es un libro, como «10» en cuanto constituye diez capítulos, o como «220» en tanto que constituye doscientas veinte hojas de papel.

Esto, consecuentemente, marca una separación tajante con las propiedades usuales que nos exhiben los objetos físicos, como lo es la propiedad del color o del sabor, los cuales permanecen inalterados frente al espectador, constituyendo así elementos independientes de nuestra voluntad.

Una segunda crítica hecha por Frege hacia esta manera de concebir los números como propiedades, es la mayor aplicabilidad que poseen los números frente a las propiedades usuales de las cosas sensibles. Y es que los números como tal, pueden ser aplicados a cualquier cosa existente o no existente, a diferencia de una propiedad como el purpura o lo salado, y de este modo hablar de Dios, un concepto, un árbol y el movimiento como cuatro cosas, y no de un concepto salado o de un movimiento purpura.

Además de estas dos objeciones a los números como propiedades, Frege expone otras críticas a esta concepción, esta vez, en relación con el número «1». En primer lugar, concebidos los números como propiedades, sería realmente sorprendente que cada objeto existente (y no existente) poseyera la propiedad de ser «1»; además de que sería incomprensible –continúa Frege– el por qué se le atribuye explícitamente esta propiedad a una cosa.

Por otro lado, pensando que si así fuera, un calificativo como ese no podría servir en absoluto para determinar con mayor precisión un objeto (¡pues este calificativo lo abarca todo!) y perdería, de este modo, todo su contenido como calificativo. Sería difícil imaginar, además, cómo llegaría el lenguaje a crear un calificativo como este, que no sirviera para determinar con mayor precisión un objeto.

Una última propuesta mencionada por Frege de manera un tanto implícita, que podría intentar salvar la concepción de los números como elementos surgidos de la experiencia, es la que viene a representar una forma bastante primitiva de formalismo matemático, esta es, la idea de comprender a los números simplemente como los signos físicos y sensibles que constituyen el lenguaje aritmético (0, 1, 2, 3,...).

Este formalismo, ideado a partir de la forma en que los matemáticos llevan a cabo largos cálculos sin referirse con sus signos a nada perceptible por los sentidos, sin embargo – y como bien señala Frege –, no puede ser aceptada como una tesis adecuada en tanto que esta basa su concepción acerca de la naturaleza numérica en el error, por demás grave, de confundir los números con los signos (de naturaleza meramente física y sensible) que se refieren a ellos.

Y es que como bien puede llegar a reconocer toda persona al realizar cálculos matemáticos, los signos numéricos (numerales) poseen un contenido referente a los números y a sus propiedades, aunque expresable sólo a través del signo físico; contenido tal que, por otro lado, no se puede adjudicar de ninguna manera a los signos meramente físicos.

En este sentido es que se observa, siguiendo con el ejemplo de Frege en relación con la crítica al formalismo de Hankel acerca del número que resulta de la sustracción de «2-3» (el «-1»), que “sin un contenido [el número -1] es sólo tinta o una macha impresa sobre papel, y como tal tiene propiedades físicas, pero no la de dar 2 al sumársele 3” (Frege, 1972: §95).

Habiendo descartado toda posibilidad de concebir a la experiencia como fundamento de los números (y de la aritmética en general) tras las críticas efectuadas hacia la postura empírica de la aritmética, Frege apuesta por una concepción *a priori* de la naturaleza de los números, sustentada en la independencia, fundada en la problematización de la concepción empírica de la aritmética, de la sensibilidad para el conocimiento de los números. De este modo para Frege los números vendrán a constituir algo no espacial ni físico, sino por el contrario, elementos no sensibles, los cuales como tal, no afirman hechos percibidos ni tampoco los presuponen para su legitimidad; aunque sin los sentidos, por otro lado, a nadie se le hubiese ocurrido pensar en números o, mejor aún, nadie hubiera podido hacerlo.

2. LOS NÚMEROS COMO ENTIDADES NO SUBJETIVAS NI PSICOLÓGICAS

De cara a lo dicho por Frege acerca de la naturaleza *a priori* que presentan los números y que marca una separación tajante entre estos y los objetos del mundo físico, el problema de la naturaleza específica de los números resulta ser una cuestión aún no resuelta, y aunque delimitada al ámbito de lo incorpóreo, sumamente abierta en cuanto a sus posibilidades de interpretación.

En este sentido, por ejemplo, se puede decir que el razonamiento que nos lleva a pensar en los números como elementos *a priori*, es decir, independientes del mundo sensible, lleva fácilmente a pensar –como bien menciona Frege– que estos poseen una naturaleza subjetiva, ligada a procesos psicológicos y a las arbitrariedades del mundo mental de cada persona; y que como tal, la explicación a la pregunta ¿qué son los números? vendría dada por la explicación del modo en que los números surgen en nuestra mente. Aquí lo subjetivo tiene, entonces, dos sentidos distintos: lo subjetivo como objeto de la psicología y lo subjetivo como el estado interno particular de cada persona.

Frente una posibilidad como esta, que pretende hacer de los números objetos de la psicología, Frege observa que si bien desde el ámbito psicológico es posible llegar a ofrecer una descripción satisfactoria y adecuada de los procesos internos que preceden a la emisión de un juicio sobre números, esta, por otro lado, nunca podría llegar a reemplazar a una verdadera definición conceptual.

Según esto, una explicación psicológica como esta, no puede ofrecer una verdadera solución a la pregunta de qué sean los números, debido a que esta nos dice cómo es que llegamos a pensar en los números, no qué cosa son los números. De la misma manera, mediante una explicación psicológica semejante nunca se podría llegar a adquirir conocimiento alguno acerca de los números, de sus propiedades, o de las operaciones existentes entre estos, ni mucho menos ser empleada en la demostración de un enunciado aritmético.

En otro sentido, tampoco es adecuado concebir a los números como representaciones mentales («imágenes»)¹⁴. En contra de una propuesta como Schloemilch, la cual entiende al número como «la imagen del lugar de un objeto en una serie» (Cf. Frege, 1972: §27), Frege menciona que esta manera de concebir a los números presenta el inconveniente de que para cualquier caso en que se haga alusión a un número, este siempre debería generar la aparición en la mente de un mismo lugar, lo cual –en palabras de Frege– es “manifiestamente falso” (Frege, 1972b: Nota 16).

De manera similar, cualquier propuesta que pretenda reducir los números a meras imágenes, continuando con Frege, resulta igualmente errónea y equivocada. Pasando ahora al segundo sentido de subjetivo, se puede decir que una concepción como esta, que limita al número a una mera imagen, caer en el error de confundir la mera representación mental de los números con los números en sí. Explico esto. Basado en los ejemplos expuestos por Frege, se puede decir que el tomar los números como meras imágenes lleva inevitablemente a aceptar que, en cuanto a su calidad de representación subjetivas, la imagen que yo posea del número «2», por ejemplo, es ante todo mía y de nadie más, de igual forma la imagen que otro posea de este número sería propiamente suya. Esto, sin embargo, lleva a aceptar la existencia de millones de doces, pues cada persona –siguiendo con lo dicho– tiene su propia imagen del número «2».

Así, podría decirse que en tanto que mi «2» es diferente al «2» de otra persona, este posee cualidades distintas de las de otro «2» (pues sería realmente sorprendente que las características que posee mi imagen del «2», condicionada por las arbitrariedades de mi mundo mental, pudiesen coincidir con las características que posee el «2» de otra persona igualmente atado su particular estado mental) y que de este modo mi «2» al intervenir en alguna operación aritmética, podría dar un resultado X, mientras que el «2» de otra persona, inmerso en la misma operación, daría un resultado Y, lo cual es absolutamente absurdo.

¹⁴ El término «imagen», desde la perspectiva de Frege, posee una naturaleza ambigua que encierra dentro de sí dos significados distintos de carácter diametralmente opuesto: la «imagen subjetiva» y la «imagen objetiva» (Cf. Frege, 1972: Nota 16). La imagen en sentido subjetivo es aquella imagen de carácter psicológico, que suele ser esencialmente distinta en personas diferentes, y que posee una función meramente representativa; la imagen objetiva, por el contrario, pertenece al ámbito de la lógica, siendo esta, en principio, una imagen esencialmente compartida por todos. (Cf. Frege, 1972: Nota 16).

Con esta distinción en mente, en lo que se desarrolla a continuación empleo la palabra «imagen» en el sentido de «imagen subjetiva», siguiendo de este modo con la terminología empleada por Frege (Cf. Frege, 1972: Nota 16).

Inclusive, yendo un poco más lejos -y como bien señala Frege-, podría decirse que “Con los seres humanos en crecimiento, irían surgiendo nuevos doses, y quién sabe si, con el paso de los milenios se modificarán tanto que llegarían a ser $2 \times 2 = 5$ ” (Frege, 1972: §27), pero una concepción así lejos de representar un panorama difícil de imaginar, constituye una visión acerca de los números fantástica y equivocada, pues los números no responden a las arbitrariedades del mundo mental de cada persona, ni por ello están condicionados histórica ni culturalmente, sino que se presentan ante mí y ante cada persona, como siendo exactamente los mismos.

En este sentido es que resulta del todo ciertas las palabras de Frege cuando este señala que “Mientras que cada uno puede sentir solamente su dolor, su deseo, su hambre, o tener sus sensaciones de sonido o de color, los números, por el contrario, pueden ser objetos comunes para muchos, y sin duda son exactamente los mismos para todos, y no sólo estados más o menos semejantes de diferentes personas” (Frege, 1972: §93).

Llevando esta idea a sus últimas consecuencias, se puede decir que de manera general, los números representan elementos inimaginables.

Contrario a la creencia común que pretende ver en la imagen del numeral tres (3) o en la imagen de tres puntos (:) algo que responde al número «3», por poner un ejemplo, se debe entender que los números constituyen elementos esencialmente inimaginables, ya sea como objetos autónomos o como una propiedad de objetos; y que las meras representaciones, por demás arbitrarias, que se puedan hacer de estos no responden en lo más mínimo a la realidad de los números, como sí sucede al imaginarse la luna, a Nietzsche o el color azul, por ejemplo.

Tómese por caso, para seguir con los ejemplos señalados, que se nos pide imaginar un cielo despejado y vacío, sin ningún astro en él, ahora piénsese ese mismo cielo con la luna en él, la realidad es que este primer cielo ha cambiado y ha aparecido así un nuevo objeto en la imagen. Lo mismo ocurre al imaginarse un escritorio, el cual en un principio aparece vacío, más al imaginarse en él a Nietzsche sentado, esta imagen se modifica; al igual que si uno se imagina un perro y luego se le pide que lo piense de color azul, existe un cambio en la imagen. Pero ahora piénsese en la luna y véase si esta cambia al añadir el

número «1» y en vez de pedir imaginarse «la luna» se pide imaginarse «una luna», ¡en lo absoluto! Inclusive si se le pide pensarla como «2», la imagen quizá se duplique pero la luna se mantendrá exactamente igual, sin ninguna alteración en su imagen.

Esta condición de los números como elementos inimaginables resulta aún más evidente, como bien menciona Frege (Cf. Frege, 1972: §58), en el caso del número «0», en dónde resulta en vano todo esfuerzo por intentar imaginarse cero estrellas o cero personas, ya que aunque uno pueda imaginarse un cielo totalmente nublado o algún lugar desolado, en estas imágenes no hay nada que corresponda a la idea de «estrella», de «persona» o del número «0».

Lo dicho hasta aquí abre entonces la siguiente posibilidad: admitir que los números representan elementos objetivos e independientes de nosotros.

El número pensado de manera general, menciona Frege,

“es un objeto de la psicología o resultado de procesos psíquicos tanto como lo pueda ser, digamos, el mar del Norte [...] cuándo se dice que «el mar del Norte tiene 10 000 millas cuadradas de extensión», no nos estamos refiriendo, ni con «mar del norte» ni con «10 000», a un estado o proceso en nuestro interior, sino que se afirma algo totalmente objetivo” (Frege, 1972: §26)

Y es que si se analiza a profundidad lo que constituye la experiencia que se tiene respecto a los números, se debe admitir que estos poseen una naturaleza esencialmente objetiva y que independientemente de nuestras condiciones culturales, estados mentales – como se acaba de observar- o voluntad, estos representan elementos autónomos, que como tal responden a factores propios.

Así se puede observar que, al igual que el mar del Norte cuya objetividad no viene afectada por el hecho de que dependa de nuestro arbitrio qué parte de agua sobre la Tierra delimitemos y llamemos «Mar del Norte», así no importa la clasificación arbitraria que hagamos de los números, ni el símbolo que para ellos designemos, el hablar acerca de los números nos remite siempre a un fenómeno objetivamente dado, y como tal, con una sola y misma naturaleza para todos nosotros.

Se puede pensar por ejemplo, para ilustrar esta idea, en las distintas denominaciones de los números que se dan en las diferentes lenguas naturales (español, alemán, chino, purépecha, etc.), que existen además varias formas de expresarlos (de manera escrita, oral, etc.), al igual que distintos sistemas numéricos (sistema decimal, sexagesimal, binario, o de cualquier otra base). Todas estas maneras de denominación y de estudio, sin embargo, no hacen sino expresar un solo y mismo fenómeno objetivo, el cual posee como «objetos» de estudio, por ejemplo, un número como el «2» que tiene la cualidad de ser par, el número «3» cuya característica es ser primo, o el número «4» cuya raíz cuadrada es igual al número «2».

Por otro lado, se puede decir que un ejemplo concreto de la objetividad presente en los números, lo tenemos dado en cualquier operación aritmética básica como la expresada en « $2+2$ ». Esta operación revela la naturaleza objetiva de los números en tanto que el resultado que esta posee es totalmente independiente de nuestro arbitrio y circunstancias socio-culturales, siendo un trabajo completamente inútil, cuando es entendida la operación correctamente, el intentar derivar de esta un resultado diferente al de las posibilidades intrínsecas de estos números, es decir, diferente al número «4».

De la misma forma, resulta una labor imposible el intentar dotar a los números características diferentes a las que estos poseen en su naturaleza. Así se observa, por ejemplo, lo vano del esfuerzo por intentar concebir al número «4» como un número con la propiedad de ser impar, el de tener una raíz cuadrada distinta al número «2», o el ser incapaz de dividir a cualquier número impar (manteniéndose en el ámbito de los números enteros).

Con todo se debe seguir manteniendo la idea de que los números son elementos *a priori*. Y es que dadas las conclusiones a las que Frege llega, que alejan la naturaleza de los números de lo empíricamente dado relacionándola a su vez con lo *a priori*, se debe admitir ahora, de cara a lo dicho respecto a su objetividad latente, que los números representan elementos objetivos-*a priori*.

Pero ¿cómo aceptar la naturaleza objetiva y *a priori* de los números? ¿Acaso la objetividad no es un correlato necesario de lo empíricamente dado, así como lo subjetivo lo es de lo *a priori*?

Frente a una problemática como esta que podría tener lugar a raíz de esta identificación de lo *a posteriori* con lo objetivo y lo *a priori* con lo subjetivo, Frege comenta que no existe contradicción alguna en concebir a los números como algo no espacial ni material al mismo tiempo que como algo objetivamente dado, ya que como bien entiende Frege, “No toda cosa objetiva tiene un lugar” (Frege, 1972: §61).

Hablando en sentido espacial –nos dice Frege- es un hecho que el número “No está ni fuera ni dentro de nosotros. [...] Tampoco nuestras imágenes están, en este sentido, dentro de nosotros (no son subcutáneas)” (Frege, 1972: §61) aunque “[los números] ciertamente están fuera del sujeto en el sentido de que no son subjetivos” (Frege, 1972: §93). De la misma manera, se puede decir, existen otras tantas cosas más dentro de nuestra experiencia diaria que representando elementos evidentemente no espaciales ni materiales (es decir, *a priori*), no obstante, son reconocidos y aceptados como objetivos sin mayor dificultad; tal es el caso, por ejemplo, de lo que representan el eje terrestre o la línea del ecuador que divide al globo terráqueo.

Tomemos por caso, en primer lugar, lo que constituye el ecuador. El ecuador es una línea «imaginaria» -como usualmente se le describe- que atraviesa la superficie del globo terráqueo dividiéndola, de este modo, en dos grandes mitades iguales, y que se encuentra en cualquiera de sus puntos a una misma distancia respecto al Polo norte y al Polo sur. Esta línea, como bien es entendida, no constituye, además, ninguna clase de objeto espacial o material (pues, evidentemente, no existe físicamente una línea que atravesase nuestro planeta cortándolo por la mitad), sino más bien, posee una existencia supeditada al pensamiento que la define como atributo de un determinado objeto físico.

No obstante, el ecuador constituye un elemento notoriamente objetivo, que se presenta ante cualquiera de nosotros como un solo y único objeto, con propiedades y características definidas, pues quién sería capaz de decir que para él el ecuador posee una posición distinta a la de los demás, siendo su ecuador uno tal que atraviesa alguno de los

dos polos por ejemplo, o que su ecuador es realmente más pequeño o más grande que el de otros ecuadores.

Cosa similar puede decirse respecto al eje terrestre. Esta línea recta que atraviesa el centro de la Tierra y sobre la cual esta última tiene su movimiento de rotación, posee una existencia *a priori* al tratarse de un elemento inmaterial, de un elemento que no existe como parte física de nuestro planeta, y del cual no se puede tener, por consiguiente, ninguna clase de experiencia sensible. No obstante esta situación, se puede llegar a comprender muy fácilmente que, en lo que respecta al eje terrestre, se debe admitir necesariamente una esencia claramente objetiva, la cual se hace presente en la actividad racional de la cual esta es susceptible, que nos lleva a descubrir en su naturaleza características comunes a todos nosotros, como los son su longitud o su inclinación, las cuales representan para todos -en cifras numéricas- la cantidad 12 713 km y 23°5' respectivamente.

A la luz de estos ejemplos, se puede decir ahora, se logra entender de mejor manera cómo la concepción de una naturaleza objetiva-*a priori* en el caso de los números constituye una circunstancia posible y no contradictoria, al ser esta naturaleza un hecho aceptable en ámbitos del conocimiento ajenos a los números.

3. EL PROBLEMA DE LA OBJETIVIDAD DE LOS NÚMEROS

Pero ¿cómo admitir la objetividad de los números, esto es, la autonomía de sus propiedades y comportamiento respecto de nosotros, cuándo se ha demostrado ya su inmaterialidad, su independencia con lo sensible? ¿Acaso la objetividad no es un correlato necesario de lo empíricamente dado así como lo subjetivo lo es de lo *a priori*?

Las conclusiones a las que nos ha llevado todo lo dicho hasta aquí hacen necesario el admitir que los números poseen una naturaleza objetiva y *a priori*. Se ha señalado que los números no pueden tener un origen empírico, lo que los convierte, por tanto, en elementos *a priori*; al igual que se ha mostrado que éstos no pueden ser concebidos como algo subjetivo, al evidenciar su independencia esencial con los objetos de la psicología al mismo tiempo que su independencia con las arbitrariedades del mundo mental de cada

persona. Pero quizá se debe tomar aún algunas cuantas consideraciones en cuanto al concepto de «objetividad» se refiere.

Lo primero que se debe de entender al respecto de este concepto es que, a diferencia de la noción de «subjetividad» cuya concepción se encuentra sólo de manera implícita en Frege, el concepto de «objetividad» es una idea que Frege se preocupa por explicar lo más claramente posible, esto con la finalidad de mostrar la compatibilidad que este concepto encuentra con el análisis del número que Frege desarrolla.

Es así que la noción de «objetividad» queda definida por Frege dentro de sus *Fundamentos de la aritmética*, con las siguientes palabras: “Distingo lo objetivo de lo que es palpable, espacial o real [...] entiendo por objetividad la independencia de nuestras sensaciones, intuiciones e imágenes, de la proyección de representaciones internas a partir de los recuerdos de sensaciones anteriores, pero no la independencia de la razón” (Frege, 1972b: 53-54). “Lo objetivo aquí es lo regular, conceptual, enjuiciable, lo que puede expresarse en palabras. Lo puramente intuitivo no es comunicable” (Frege, 1972b: 53).

Esta definición fregeana de objetividad, como bien puede observarse, resalta lo expuesto con relación a la independencia de los números con el mundo empírico y con el ámbito de lo subjetivo, pero aún más importante, ésta menciona un aspecto de suma importancia en cuanto a la cuestión epistemológica de lo objetivo y la naturaleza de los números se refiere, éste es, la identificación de lo objetivo con lo conceptual y enjuiciable. Para Frege lo objetivo se basa en lo que puede ser objeto de la razón, en aquello que puede ser analizado conceptualmente, enjuiciado, y a final de cuentas, expresado para su enjuiciamiento público.

Para entender esto piénsese, por ejemplo, en lo que representa una experiencia tan aparentemente subjetiva como lo es la experiencia de los colores. Ante una palabra como «blanco», por poner un ejemplo, se piensa de manera bastante habitual en que ésta hace referencia ante todo a una sensación del todo subjetiva, a la percepción particular que cada uno posee, y de la cual no se puede tener nunca la certeza de su concordancia con las sensaciones por demás subjetivas de otros, pues, evidentemente, resulta imposible el lograr equipararlas una al lado de la otra.

Sin embargo, y pese a este hecho, se puede observar que el uso corriente que se hace de la palabra «blanco» pone de manifiesto un sentido distinto al puramente subjetivo, este es, una pretensión de referencia hacia algo independiente de nuestra subjetividad, hacia el color blanco como una propiedad *objetiva* de ciertas cosas ajenas a nosotros mismos. Es en este sentido, por ejemplo, que se dice «la nieve es blanca» pensando en describir una propiedad universal de la nieve, o «dame el libro blanco» convencido de que la particularidad que yo identifico en el libro y que lo diferencia de otros, es igualmente compartida por quien responde a mis palabras.

Ahora bien, partiendo de la concepción de «objetividad» señalada por Frege, la cual separa las sensaciones, o para decirlo con Frege «lo puramente intuitivo», de lo objetivo, se puede decir que lo blanco representa una propiedad objetiva de las cosas en tanto que las distintas sensaciones, por demás subjetivas, que cada persona experimenta entran en una relación de equivalencia al encontrar todas estas un mismo correlato en los juicios expresados sobre el color blanco.

Supóngase, por ejemplo, que existe para cierta persona X que posee una sensación propia del color blanco a la que designamos como B^1 , en contraste, existe otra persona Y que posee una sensación propia del color blanco, que designamos como B^2 , la cual es diferente a B^1 . X y Y se relacionan en el mundo expresando juicios sobre lo que ambos identifican como «blanco», haciendo declaraciones del tipo “hay solo una bola blanca en el juego de billar”, a las cuales la palabra «blanco» corresponde las sensaciones particulares B^1 y B^2 , siendo que siempre que se afirma algún juicio sobre «blanco» aparecen en X y en Y las sensaciones B^1 y B^2 . En este sentido, se puede decir que el color blanco representa algo objetivo.

4. LOS NÚMEROS COMO PREDICADOS DE CONCEPTOS

La conclusión de Frege acerca de la naturaleza *a priori* y objetiva de los números, si bien, resulta reveladora en el sentido de que separa a los números de todo elemento sensible y material conservando, no obstante, su objetividad latente; esta conclusión, por otro lado, deja abierta importantes cuestiones en torno la naturaleza específica del número. Y es que

si bien, después lo observado se puede decir que los números no representan alguna cosa material, por otro lado, se puede seguir preguntando por la clase de elementos no sensibles que son los números.

Para encontrar la respuesta a esto, Frege analiza una cuestión más específica, y, apegado a su principio de que “el significado de las palabras debe ser buscado en el contexto de todo el enunciado, nunca en las palabras aisladas” (Frege, 1972: p.20), Frege se hace la siguiente pregunta “¿de quién decimos algo cuando damos un número?” (Frege, 1972: §45)¹⁵.

Como pudo observarse en el primer apartado, los números poseen un amplio campo de aplicación, pudiendo ser aplicados a objetos que van desde las cosas físicas del mundo, tales como personas, piedras, dedos, etc., hasta entidades abstractas como los son ángeles, conceptos, sentimientos, etc. Sin embargo, y como igualmente comentó, los números no pueden ser atribuidos a los objetos físicos ni como parte de ellos, ni como conjuntos de ellos, ni como propiedades de los mismos. Siendo así, el problema que enfrenta Frege es el de explicar cómo es el que hablamos de números al referirnos a objetos físicos, sin que sean, por otro lado, los números parte constituyentes de estos.

Frente a esta problemática, Frege propone entender los números no como atributos propios de los objetos materiales (e inmateriales) o imágenes, sino como predicados atribuibles a conceptos, y como tal, a todo enunciado numérico como un enunciado acerca de conceptos. De esta forma, cuando nosotros asignamos un número a algún objeto, ya sea material o abstracto, no estamos más que afirmando algo sobre un concepto, dentro del cual cae el objeto como tal, así el número vendría a representar un atributo de un objeto en tanto que este último es un elemento perteneciente a un concepto.

¹⁵ El estudio de la naturaleza de los números y de los fundamentos aritméticos, así como en general toda la doctrina logicista de Frege, se encuentra regida por lo que Frege señala en sus *Fundamentos de la aritmética*, son los tres «principios fundamentales» presentes en su investigación en torno a la naturaleza del número (Cf. Frege, 1972: p. 20). Los cuales quedan expresados en los siguiente tres puntos:

- 1) Hay que separar tajantemente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo.
- 2) El significado de las palabras debe ser buscado en el contexto de todo el enunciado, nunca en palabras aisladas
- 3) Hay que tener siempre presente la diferencia entre concepto y objeto.

Siguiendo con el ejemplo ya señalado en el primer capítulo, se puede decir que un objeto como un libro puede ser susceptible de una cantidad diversa de atributos numéricos en tanto que este objeto se le cataloga ya sea bajo un determinado concepto, ya sea bajo otro. De este modo, si el libro es entendido, por ejemplo, como un objeto que se define como «obra escrita» este se entenderá entonces como representando «1» (un solo elemento); si por el contrario, se define a este como «lecciones escritas» este representará «10» en tanto que el número de lecciones que conforman al objeto son diez; o si por otro lado, se le definiera como «piezas de papel unidas por medio de una pasta», este constituirá entonces «220», correspondiendo a la cantidad de hojas que conforman el objeto en cuestión.

Esta manera de concebir el número resulta por demás apropiada al momento de explicar algunas de las características que Frege, señala poseen los números y su aplicación en los objetos, como lo son las diferentes asignaciones de las cuales son capaces un mismo objeto –de las cuales se acaba de hablar-, así como su amplio margen de aplicación, que va desde la asignación que de ellos se hacen a objetos físicos hasta la que se hace hacia los objetos abstractos.

En relación con esto último se puede observar, retomando un poco lo dicho respecto a las críticas hacia la posición de los números como propiedades de cosas materiales, que los números constituyen características atribuibles a objetos inexistentes o inmateriales, en la medida en que estos objetos son designados bajo un concepto determinado, el cual es poseedor de una determinada propiedad numérica, es decir, de un determinado número. Así se puede entender, por ejemplo, la manera en que resulta igualmente correcto el hablar de «1» como el número de objetos que caen bajo el concepto «árboles en el patio de la escuela primaria Virrey de Mendoza», siendo los árboles objetos empíricos, que el hablar de «1» como el número de «conceptos con el cual designo en este párrafo los árboles que hay en el patio de la escuela primaria Virrey de Mendoza», siendo este, por el contrario, el número perteneciente a un objeto abstracto o *a priori* (los conceptos).

Consecuencia de esta manera de entender los números es que se puede decir que todos los enunciados en los que interviene un número pueden ser reducidos, en última instancia, a enunciados de la forma “el número que corresponde al concepto *C* es *n*”.

Tómese por caso el enunciado “Júpiter tiene cuatro lunas” –para citar un ejemplo de Frege-, este enunciado, como se aceptará, puede ser transformado en el enunciado “el número de lunas de Júpiter es cuatro” sin por ello alterar su sentido; en donde «lunas de Júpiter» viene a representar el concepto del cual se predica, y «cuatro» el predicado numérico de dicho concepto.

Aunado a esto, se debe entender que la palabra «es» no debe ser considerada de ningún modo como representando una mera cópula, como lo es en el caso de “el cielo es azul” o “la casa es grande”. En este caso el «es» posee un sentido de igualdad, un sentido de «es igual» o «es lo mismo que», por lo cual se puede decir de igual modo “el número de lunas de Júpiter es cuatro”, “el número de lunas de Júpiter *es igual* cuatro” o “el número de lunas de Júpiter *es lo mismo* que cuatro”. En este sentido se debe señalar que Frege retoma el concepto de igualdad de la filosofía de Leibniz, el cual entiende por señala –tal y como Frege mismo menciona en su texto- que «dos cosas son lo mismo, si una de ellas puede ser sustituida por la otra sin prejuicio de la verdad.» (1972: §65).

Cabe notar que en todo caso lo que se tiene aquí es una *ecuación*, esto es, una oración que afirma que la expresión de la izquierda (“el número de lunas de Júpiter”) es igual a la expresión de la derecha (“cuatro”), o mejor dicho, que la expresión de la izquierda (“el número de lunas de Júpiter”) designa el mismo objeto que la expresión de la derecha (“cuatro”); siendo posible incluso designarla, en dado caso, como “ C es igual a n ” o “ $C = n$ ”¹⁶. Este enunciado es, por otro lado -y como Frege bien señala- la forma que domina en la aritmética.

En este sentido vale la pena señalar que desde la perspectiva de Frege, un número representa un objeto dentro de la oración. La estructura de un enunciado numérico -como se ha dicho- posee la forma esencial de una oración del tipo “el número que corresponde al concepto C es n ”. En este sentido se debe señalar, siguiendo con Frege, que el número « n » representa un objeto en tanto que este solamente constituye una parte del predicado, siendo considerado «el número que corresponde al concepto» y «es» el predicado en sí, y « C » el sujeto real de la oración. En favor de esta opinión parece hablar el hecho de que al hablar nosotros de números, como en el caso del «1», no decimos “los unos son números primos”

¹⁶ Aunque se debe decir que, en realidad, estas dos últimas designaciones no aparecen en Frege.

sino muy por el contrario utilizamos un artículo determinado para referirnos a 1, y así decimos “el 1 es un número primo”, con lo cual 1 es caracterizado de objeto (Cf. Frege, 1972: §57).

A lo dicho respecto a la *ecuación* y el número como objeto se puede añadir también el análisis de Frege en torno al «sentido» y a la «referencia» de los signos. Es un hecho que en la vida cotidiana poseemos una gran variedad de formas distintas en las que podemos referirnos a los objetos con los cuales nos relacionamos, siendo frecuente el encontrar en dos o más denominaciones distintas un sola y única referencia. Tal es el caso, por ejemplo, de las denominaciones «maestro de Aristóteles» y «discípulo de Sócrates» las cuales hacen referencia a una única y misma persona, a saber, un filósofo griego de hace unos 2,500 años. Esto, por consiguiente, hace necesario distinguir dos diferentes planos dentro de los signos: el *sentido* y la *referencia*.

La *referencia*, tal y como Frege señala en su texto *Sobre sentido y referencia*¹⁷, representa aquel objeto al cual se hace alusión por medio el signo (nombre, unión de palabras, etc.) expresado; así una palabra como «maestro de Aristóteles» o «discípulo de Sócrates» aluden, o *refieren*, a un filósofo griego de hace 2,500 años. Por otro lado, el *sentido* representa este *modo de darse* especial que posee el signo y que nos hace acercarnos al objeto aludido de cierta manera; así «maestro de Aristóteles» nos movería a acercarnos a este filósofo griego desde su condición como maestro y «discípulo de Sócrates» nos incitaría a hacerlo desde su condición de discípulo, siendo no obstante, la misma referencia en cualquiera de los dos casos.

Este modo de entender los signo trae como consecuencia que una relación como la de $A = B$ se deba entender como una relación entre sentidos y no entre los objetos a los cuales los signos A y B refieren. Supóngase por caso que queremos ver en el enunciado $A = B$ una relación entre las referencias de A y B, esta relación como tal no pretendería más

¹⁷ La idea de distinguir entre dos distintos planos dentro de lo que constituye un mismo signo es una idea que Frege analiza y expone de manera extensa en esta obra *Sobre sentido y referencia*. Sin embargo, y en concordancia con este trabajo, esta representa una concepción de los signos que ya puede encontrarse en Frege desde la publicación de su *Conceptografía* y de sus *Fundamentos de la aritmética*. De la primera da cuenta Frege en su *Sobre sentido y referencia* al expresar en los primeros renglones que la igualdad como una relación entre nombres es una idea supuesta ya desde su *Conceptografía* (Cf. 2002: 51). Por otro lado, en sus *Fundamentos de la aritmética* puede inferir esta idea de lo señalado respecto a la función de igualdad que desempeña la palabra «es» sobre la que se acaba de hablar (Cf. 1972: §57).

que expresar que una cosa es igual consigo misma, lo cual hasta cierto punto es irrelevante al tratarse de una verdad presente en todas las cosas, pues de cualquier cosa es válido decir que es igual a ella misma. Esto por tanto hace necesario pensar que el enunciado $A = B$ más que expresar una relación entre referencias lo que pretende hacer es dar a conocer una igualdad entre sentidos, en la cual sí se encontraría presente verdadero conocimiento, al hacer evidente la coincidencia referencial entre expresiones distintas, alguna de las cuales puede ser desconocida para quien lea el enunciado.

Sobre la distinción entre sentido y referencia se puede entender ahora que los enunciados numéricos (" $C = n$ "), nos hablan de igualdades entre sentidos. Tómese, para volver al nuestro ejemplo, el enunciado "el número de lunas de Júpiter es cuatro"; este enunciado, de cara a lo recién señalado, se deberá entender como significando que la referencia de «el número de lunas de Júpiter» es la misma que la referencia de «cuatro», siendo la diferencia presente en estas denominaciones de sentido y no de referencia. De igual forma y en dado caso nos es lícito hablar también de igualdad entre conceptos (" $C = C$ ") ("el número que corresponde al concepto F es el mismo que el que corresponde al concepto G ").

III. SOBRE LA NATURALEZA LÓGICA DEL CONOCIMIENTO NUMÉRICO

Sin lugar a dudas, uno de los puntos de mayor importancia para Frege dentro de lo que corresponde a su proyecto logicista, lo constituye la preocupación por demostrar de manera contundente la independencia que poseen los números respecto al mundo sensible, objetivo tal que, como ya se señaló, encuentra su cumplimiento en la doctrina de Frege, bajo la concepción de los números como elementos no sensibles, los cuales, como tal, no afirman hechos percibidos ni tampoco los presuponen para su legitimidad; conclusión alcanzada, cabe recordar, a raíz de las duras críticas esbozadas por parte de Frege hacia la posibilidad de una concepción empírica de los números.

Ahora bien, esta concepción, si bien, reveladora desde el punto de vista de la preocupación por la justificación general del conocimiento aritmético (*a priori* o *a posteriori*), deja tras de sí, no obstante, importantes consideraciones en torno a la pregunta de ¿cómo se justifica el conocimiento aritmético a partir de lo dado *a priori*? Y es que si bien desde una postura empírica de la aritmética como la desarrollada por Mill, el problema del conocimiento numérico se reducía a la afirmación de hechos observados, los cuales dotaban de contenido a los números y a sus operaciones, el problema que surge con la condición *a priori* de los números sostenida por Frege es el de tratar de explicar cómo a partir de lo dado meramente *a priori* la aritmética puede extraer todo su contenido.

1. LA NATURALEZA ANALÍTICA DE LAS PROPOSICIONES NUMÉRICAS

Basado en las distinciones kantianas respecto a los diferentes tipos de conocimiento (*a priori*-*a posteriori* y analítico-sintético), de los cuales ya se ha hablado más atrás, Frege analiza la posibilidad de concebir el conocimiento aritmético como un caso particular de algunas de las cuatro posibles combinaciones que surgen del relacionar estas clasificaciones entre sí, a saber: analítico-*a priori*, analítico-*a posteriori*, sintético-*a priori* y sintético-*a posteriori*.

En primer lugar, Frege descarta la posibilidad de encontrar una posible explicación al problema de la justificación del conocimiento aritmético en las concepciones analítico-*a posteriori* y sintético-*a posteriori*, esto debido a que como mostraron las críticas expuestas por este hacia la postura empírica de la aritmética, una postura *a posteriori* de la aritmética se presenta como problemática y en general como insostenible. De este modo, habiendo descartado estas posibilidades, Frege pasa a analizar la plausibilidad de las concepciones sintética-*a priori* y analítica-*a priori* del conocimiento aritmético.

En primer lugar, y antes que nada, debemos tener presente que respecto a las distinciones entre analítico-sintético, pese al evidente uso que hace Frege de estas nociones kantiana de «analítico» y «sintético», estas adquieren en Frege un sentido distinto al expuesto por Kant, consecuencia sin duda, de las agudas críticas realizadas por Frege hacia

la caracterización kantiana, las cuales se basan en el análisis estructural de los enunciados provenientes de la lógica aristotélica tradicional¹⁸.

Así se puede observar que mientras para Kant la distinción básica entre enunciados analíticos y sintéticos se basa en la contención o no contención del predicado en el sujeto, para Frege la diferencia entre estas dos clases de enunciados se observa en su deducción a partir exclusivamente de definiciones y leyes lógicas generales para el caso de los enunciados analíticos, o, por el contrario, en la dependencia de estos con algún campo particular del saber, para el caso de los enunciados sintéticos (Cf. Frege, 1972: §3). Así un enunciado se puede catalogar como «analítico» siempre y cuando este pueda ser mostrado como una consecuencia lógica de principios igualmente lógicos y/o definiciones; por otro lado, este vendrá a representar un conocimiento de naturaleza sintética siempre que en su justificación intervenga alguna clase de intuición.

Pasando al análisis de la concepción sintética-*a priori* y analítica-*a priori* del conocimiento aritmético, una primera solución al problema que Frege se encarga de analizar es la postura que identifica la aritmética como una clase de conocimiento justificable de manera sintética-*a priori*.

En primer lugar, Frege recuerda que “[e]n este caso, sin duda, no es posible más que apelar a una intuición pura como fundamento último del conocimiento [aritmético]”, por lo que una tesis que sostenga la naturaleza sintético-*a priori* de la aritmética debería de señalar qué clase de intuición pura está en la base de este tipo de conocimiento; situación que desde la perspectiva de Frege, no deja de presentar una solución problemática como bien puede observarse en la propuesta de Hankel.

Una posible respuesta a esta interrogante es la que viene representada por la teoría de los números reales de Hankel, la cual basa el conocimiento aritmético en la intuición

¹⁸ La distinción kantiana entre «juicios analíticos» y «juicios sintéticos» -siguiendo con lo expresado por Frege-, representa una división poco exhaustiva, limitada únicamente al caso de los juicios afirmativos universales («todos los A son B»), y por tanto inadecuado para el análisis de juicios existenciales. Por otro lado, la misma noción de «concepto» -del cual hace uso esta distinción- viene definido como la suma de las características que se le asocian a éste; sin embargo, este es uno de los modos menos fructíferos de formar conceptos al no aportar estos nada esencialmente nuevo, además de que su estructura («todos los A son B») resulta completamente distinta de los enunciados más útiles y comunes de la ciencia en general (Cf. Frege, 1972: §88).

pura de «magnitud». Esta propuesta, sin embargo, resulta en opinión de Frege poco adecuada, debido a que la amplia gama de aspectos a los cuales ésta se aplica (números, longitudes, áreas, volúmenes, ángulos, velocidades, intensidades de luz, etc.) hace difícil el concebir a la magnitud, en principio, como una intuición pura; siendo, además, problemático decir, dada esta variedad de aspectos, si esta representa una intuición espacial o temporal, o de qué otro tipo. Aunado a esto, el intentar explicar los números como una especie de magnitud siempre acarrea la pregunta de si en verdad estos representan magnitudes, con lo cual debería de saberse de antemano qué cosa son los números.

Tras las críticas esbozadas hacia estas tres concepciones acerca de la aritmética (analítica-*a posteriori*, sintética-*a posteriori* y sintética-*a priori*) que desembocaron en su rechazo como soluciones posibles al problema del conocimiento aritmético, Frege pasa a analizar las posibilidades que una postura analíticas-*a priori* como la sostenida por el logicismo, ofrece en la explicación acerca de la naturaleza de las verdades aritméticas. Para Frege, como se recordará, la aritmética representa solamente un desarrollo de principios lógicos elementales, y como tal, representan solamente un caso particular de conocimiento analítico.

2. LA DEFINICIÓN DE NÚMERO DE FREGE

El proyecto logicista de Frege, recordando lo señalado en el capítulo uno, representa aquel intento por demostrar la veracidad de la tesis que concibe a la aritmética como un desarrollo propio de la lógica (tesis logicista) –lógica que es reconocida desde la postura teórica de Frege como conocimiento de naturaleza analítica-, esto basado en la presentación de los elementos de la aritmética como verdades demostradas de manera estrictamente analítica. Siguiendo con esta idea, en sus ya citados *Fundamentos de la aritmética*, Frege se da a la tarea de llevar a la reducción lógica lo que este considera la noción fundamental y centro de toda reflexión en aritmética, esta es, la noción misma de «número».

Número cardinal

¿Qué son los números? Recordando un poco lo dicho hasta aquí, vemos que el problema de la naturaleza de los números representa una cuestión que dada la aplicación cotidiana que hacemos de los números a los objetos del mundo físico, es pensada de manera bastante usual como directamente relacionada a la experiencia empírica, siendo incluso igualmente común la creencia de que es solo en esta experiencia empírica en donde podemos encontrar el sentido y fundamento de estos, y de la aritmética en general. No obstante, y como igualmente se observó, se debe entender a partir de las fuertes críticas de Frege hacia esta postura empirista de la aritmética, que los números no pueden constituir elementos fundados sobre el mundo sensible sino, por el contrario, elementos abstractos –los cuales no deben ser confundidos con imágenes-, cuyo conocimiento se encuentra ligado a lo dado de manera *a priori*.

Pero entonces ¿cómo entender los números? La respuesta de Frege a esta cuestión - como igualmente se pudo observar- es que los números deben ser entendidos no como cosas sensibles o imágenes, sino como características que atribuimos a conceptos; siendo por tanto, todo enunciado numérico necesariamente un enunciado reducible a una afirmación acerca de conceptos. Tomado de este modo, se puede decir, el número viene a representar un elemento cuyo sentido se encuentra íntimamente ligado a su relación con los conceptos de los cuales este predica, lo cual hace que sea solo a través de los enunciados numéricos la única forma mediante la cual los números nos son dados. Siendo así, de lo que se trata entonces es de determinar el sentido que posee un enunciado en donde intervenga un número.

Ahora bien, un enunciado numérico, tal y como quedó dicho en el apartado anterior, posee esencialmente la forma de “el número que corresponde al concepto C es n ” (“ $C = n$ ”) o, en relación con los conceptos, la forma “el número que corresponde al concepto F es el mismo que el que corresponde al concepto G ” (“ $F = G$ ”), con lo cual se evidencia su esencial sentido de enunciado de igualdad. Dado esto, de lo que se trata entonces es de determinar el sentido de esta *ecuación*, o, como diría Frege, de los «enunciados que expresan que un número se reconoce de nuevo» (Cf. 1972: §62), para lo cual se hace

necesario establecer un criterio que nos sirva para concebir un número determinado y reconocerlo como el mismo.

Para cumplir con este objetivo, Frege opta por hacer uso de un método matemático utilizado frecuentemente para establecer la igualdad entre números, esta es, la igualdad como *función biyectiva*. Entendiéndose los enunciados numéricos como enunciados que afirman que existe una igualdad entre los conceptos señalados (" $F = G$ "), una función biyectiva se entiende, de manera intuitiva, como aquella relación que establece que los objetos que caen bajo el concepto F poseen una relación uno a uno con aquellos que caen bajo el concepto G , esto es, como aquella relación que señala que para cada objeto perteneciente al concepto F existe un único objeto en G con el cual este se relaciona, existiendo, a la inversa, para cada objeto en G un solo y único objeto en F con el cual este entra en relación. Esto es lo que en terminología de Frege se expresa diciendo que " F es *equinúmero* a G ". Así para Frege dos conceptos poseen el mismo número si, y solo si, se puede establecer entre ellas dicha relación.

Establecida la igualdad de conceptos, el número que corresponde a un concepto se puede definir diciendo que el número que corresponde a un determinado concepto F es el número que corresponde a todos los conceptos biyectables con F . Esta manera de entender la igualdad entre números trae como consecuencia que se pueda hablar de clases de equivalencia entre los conceptos, pues en tanto que existen conceptos iguales entre sí (esto es, biyectables o equinúmericos) que poseen un número determinado n , existen otros conceptos desiguales a estos pero biyectables entre sí, que poseen como número a m .

Sin embargo, pese a todo esto, solamente se ha logrado definir con esto la correspondencia de un concepto con un número n , y no los números naturales como tal.

Número natural

La dilucidación completa de la definición de número solo se logra tras la definición previa de algunos otros elementos, los cuales, siguiendo con lo planteado por Frege, se definen de la siguiente forma.

Lo primero en ser definido por Frege lo constituye el número 0.

Frege define 0 como el número que corresponde al concepto «desigual consigo mismo», el cual sirve de representante para la clase de equivalencia que posee al 0 como número, pues como bien menciona Frege, “Para la definición del 0, podría haber tomado cualquier otro concepto bajo el cual no caiga nada” (1972: 74). Pero expliquemos esto.

El concepto «desigual consigo mismo» –tal y como el propio Frege lo menciona (Cf. 1972: 74)- señala que existe un x que cae bajo el concepto «desigual consigo mismo», siendo posible el parafrasearlo como « x es desigual consigo mismo», lo cual a la vez puede ser traducido como « x no es igual a x », lo cual evidentemente representa una contradicción. Por lo tanto se debe afirmar que nada cae bajo este concepto, es decir, que no existe ningún objeto x que caiga bajo el concepto «desigual consigo mismo», siendo, por consiguiente, el número 0 es número que corresponde a este concepto.

n sigue a m

Tras la definición de 0, Frege pasa a exponer la relación en que se encuentran dos miembros adyacentes de la serie de los números naturales, lo cual hace bajo los siguientes términos: “existe un concepto F y un objeto x que cae bajo él de tal tipo que el número que corresponde al concepto F es n , y que el número que corresponde al concepto «que cae bajo F , pero no es iguala x » es m ” (Frege, 1972: 100).

1

Habiendo definido el número 0, se debe pasar ahora a demostrar que existe algo que sigue inmediatamente a este número en la serie de los números naturales, es decir, se debe pasar a definir el número 1. El número 1, como Frege lo define, representa el número que corresponde al concepto «igual a 0», ya que como bien se puede observar, bajo este concepto cae únicamente el número 0, es decir, se tiene un concepto «igual a 0» y un único

objeto que cae bajo él: el número 0. Por lo cual se debe decir que 1 es el número que corresponde al concepto «igual a 0».

El 1 es el número que sigue al 0

Dadas estas definiciones Frege señala que el número que corresponde al concepto «igual a 0» es igual al número que corresponde al concepto «igual a 0»; el número que corresponde al concepto «igual a 0, pero no igual a 0» es 0. Por tanto, y en base a la segunda definición (n sigue a m), se debe concluir que el número que corresponde al concepto «igual a 0» sigue inmediatamente al 0 en la serie de los números naturales, siendo que si se define al 1 como el número que corresponde al concepto «igual a 0», se puede decir que 1 sigue inmediatamente al 0 en la serie de los números naturales.

Sucesión

Pero a pesar de esto aún queda por definir un elemento más, este es, el que afirma que a todo número n le sigue inmediatamente un número en la serie de los números naturales. Es decir, se necesita definir la noción de «sucesión».

Retomando la definición expuesta en la *Conceptografía*, como el propio Frege menciona, este define la sucesión en los siguientes términos:

“si todo objeto con el que x está en la relación $\emptyset$ cae bajo el concepto F , y si del hecho de que d caiga bajo el concepto F , se sigue, en general, sea lo que sea d , que todo objeto con el que d , está en relación $\emptyset$, cae bajo el concepto F , entonces y cae bajo el concepto F , sea F el concepto que sea” (Frege, 1972: 79), lo cual tiene el mismo significado que “ y sigue a x en la serie- $\emptyset$ ”.

Perteneciente a la serie numérica

En base a todo esto, ahora Frege está en condición de poder dar una definición de número.

En primer lugar considérese la relación $\emptyset$ como la establecida entre m y n en la relación n sigue inmediatamente a m , y a la serie- $\emptyset$ como la serie de los números naturales. Así se puede decir que y es el elemento que sigue a x en la serie de los números naturales o y es lo mismo que x , posee el mismo significado que y pertenece a la serie de los números naturales que empieza con x , y que x pertenece a la serie de los números naturales que termina con y .

Esto por tanto significa que a pertenecer a la serie de los números naturales que termina con n , si o bien n sigue a a en la serie de los números naturales, o bien es igual a a . Siendo así, un número se define como *todo elemento perteneciente a la serie numérica que empieza por 0*, siendo que un número puede ser o bien igual a 0 ó un número que sigue a 0 en la serie numérica.

IV. CONCLUSIONES

La cuestiones en torno a la definición de número de Frege, y en general de toda su doctrina logicista, es una cuestión que hasta el día de hoy sigue generando un gran número de publicaciones (libros, artículos, tesis, etc.) y trabajos de todo tipo dentro del ámbito filosófico internacional. Y es que a lo largo de ya más de cien años, Frege se ha consolidado como un pensador fundamental dentro del estudio de la filosofía de la lógica y de las matemáticas, siendo su trabajo frecuentemente catalogado como el origen de la reflexión en torno estos dos temas así como el origen de la lógica moderna.

De manera general, las reflexiones al respecto del trabajo fregeano han tomado diversas direcciones, encontrándose entre las más comunes su relación con otros filósofos

como Russell, Wittgenstein, Husserl; las similitudes y contraste de su ideas respecto a las propuestas de fundamentación de otros matemáticos como Bolzano o Dedekind; la originalidad de su lógica frente a la lógica aristotélica tradicional; y la posibilidad de sustentar un realismo platónico a partir de sus investigaciones. Sin embargo, quisiera detenerme ahora en un aspecto que ha sido frecuentemente dejado de lado, este es, el proyecto logicista como solución efectiva de la crisis fundacional de las matemáticas.

Si nos basamos en el ámbito de la práctica matemática, lo más adecuado es pensar que si bien Frege no constituyó un punto final al problema de fundamentación de la aritmética, sí, por otro lado, vino a realizar aportes sobresalientes en el ámbito matemático general.

Y es que la definición de número ofrecida por Frege, la cual entiende al número como un elemento perteneciente a la serie numérica que empieza por 0 y definible en términos de una función biyectiva, es una definición presente en la matemática contemporánea.

Además de esto, resulta igualmente interesante cómo es que una definición como la ofrecida por Frege en sus *Fundamentos de la aritmética* resulta compatible con algunos otros avances efectuados en el campo de la matemática, y en particular con algunos de los avances en la tarea por ofrecer una base firme a la matemática en el contexto de la crisis fundacional. Así se observa que la llamada «axiomatización de las matemáticas» efectuada por el célebre matemático italiano Giuseppe Peano, la cual se basa en la reducción de los números naturales a los ya famosos cinco axiomas de Peano, resulta compatible con el logicismo fregeano al basarse ambas concepciones en la definición de los elementos «cero», «número» y «sucesor», y al no encontrarse en ellas oposición alguna.

Por otro lado, tomado el resultado de la investigación de Frege desde la perspectiva filosófica, se pueden ofrecer -desde mi punto de vista- dos diferentes respuestas, las cuales responden a dos tipos de racionalidad diferentes: la racionalidad de «rigor lógico» reconocida de manera general en la corriente analítica temprana, y la racionalidad que comprende los cambios científicos y filosóficos como procesos complejos y parciales, la

cual se puede reconocer en los modelos de cambios científicos de la segunda mitad del siglo XX (Kuhn, Lakatos, Feyerabend, etc.).

En lo que respecta al primer tipo de racionalidad, lo primero que se debe tomar en consideración es que el programa logicista de Frege, al igual que toda la obra fregeana en general, se desarrolla dentro de un contexto de rigor lógico establecido por el propio Frege, pero presente en una parte del ámbito filosófico contemporáneo a Frege, en figuras muy cercanas a este como lo fueron Russell y Wittgenstein.

Esta racionalidad como bien se puede entender, se basa en intentar presentar el razonamiento presente en la tarea investigativa y crítica, como un cuerpo justificado rigurosamente con ayuda frecuente de las herramientas de la lógica y claramente definido en cuanto a sus elementos e inferencias se refiere, y en la medida de lo posible. En este sentido, el trabajo de Frege constituyó un fracaso en su tarea por presentar un sistema riguroso para la fundamentación de la aritmética, pues, como ya se ha mencionado, este encuentra su fin en la llamada «paradoja de Russell», con lo cual queda igualmente comprometida su definición del concepto de «número».

Tomando en consideración el segundo tipo de racionalidad mencionado, se puede decir que el resultado de las investigaciones de Frege respecto al número y la aritmética en general, si bien no representaron una sustento teórico definitivo, al ser presa de paradojas que pusieron en tela de juicio sus principios y al pasar a segundo término en beneficio de otras teorías como la de Peano, establecieron las bases para una nueva concepción de las aritmética y los números en matemática y filosofía.

Y es que si nos basamos en el legado, por decirlo de alguna manera, que ha dejado Frege a partir de sus investigaciones en torno al número, se puede observar que este logro separar de manea bastante adecuada, el ámbito de la aritmética y los números de la experiencia sensible y las posiciones empiristas de la aritmética, al igual que de las concepciones psicologistas que intentaban fundamentar el razonamiento matemático a partir de procesos mentales e imágenes subjetivas. Además de que sentó las bases para una nueva manera de proceder en las demostraciones matemáticas, llevándolas a un nuevo grado de rigor.

Aunado a esto, las investigaciones en torno al número y el desarrollo del proyecto logicista en general, representó un parte aguas en cuanto a la manera de concebir la lógica se refiere. Ya que como se ha mencionado en repetidas ocasiones, Frege representó el rompimiento con la lógica aristotélica tradicional y el inicio de la lógica moderna. Además de que su trabajo en distintas áreas de la filosofía como lo es su distinción entre sentido y referencia en semántica y filosofía del lenguaje, o su reformulación de la dicotomía analítico-sintético en epistemología se presentan hoy como sumamente originales e importantes.

BIBLIOGRAFÍA

- Ávila del palacio, A. (1992). La definición de número en Gottlob Frege. *Crítica, Revista Hispanoamericana de Filosofía*, 24 (72), 73-101.
- Cárdenas, H., Lluís, E., Raggi, F., Tomás, F. (2001). *Álgebra superior*. México: Trillas.
- Dummett, M. (1991). *Frege philosophy of mathematic*. London: Duckworth.
- Frege, G. (1972). *Los fundamentos de la aritmética: Investigación lógico-matemática sobre el concepto de número*. U. Moulines (trad.). Barcelona: Laia.
- Frege, G. (2002). En *Estudios sobre semántica*. U. Moulines (trad.). Barcelona: Folio.
- Heijenoort, J. V. (Ed.) (1967). *From Frege to Gödel. A sourcebook in mathematical logic, 1879-1931*. (pp. 1-82). Massachusetts: Harvard University Press.
- Imbert, C. (1972). *Estudios de los Fundamentos de la Aritmética de Frege*. U. Moulines (trad.). Barcelona: Laia.
- Kline, M. (2000). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. México: Siglo veintiuno editores.

- Kneale, W. y Kneale, M. (1980). *El desarrollo de la lógica*. Madrid: Tecnos.
- Moretti. *La objetividad de los números fregeanos*. *Crítica, Revista Hispanoamericana de Filosofía*, 23 (68), 139-156.
- Mosterín, J. (2000) *Los lógicos*. España: Espasa.
- Nagel, E. y Newman, J. (1979). *El teorema de Gödel*. A. Martin (Trad.). Madrid: Tecnos.
- Nidditch, P.H. (1995). *El desarrollo de la lógica matemática*. C. Garcia (Trad.). Madrid, España: Cátedra.
- Reck, E. H. (Ed.). (2002). *From Frege to Wittgenstein. Perspectives on Early Analytic Philosophy*. Estados Unidos de America: Oxford University Press.
- Segura, L. F. (2001). *La prehistoria del logicismo*. México: Plaza y Valdés.
- Shapiro, S. (Ed.). (2005). *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Estados Unidos de America: Oxford University Press.
- Tomasini, A. (1994). *Los Atomismos lógicos de Russell y Wittgenstein*. México: UNAM.
- Torretti, R. (1993). El método axiomático. *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía*, 4, pp. 89-110.
- Torretti, R. (1998). *El Paraíso de Cantor*. Chile: Universitaria.
- Zalta, E. N. (1995). Gottlob Frege. En E. N. Zalta (Ed.) *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. (Otoño 2012 Ed) Recuperado de <http://plato.stanford.edu/entries/frege/>