



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Cálculo de Índices del Operador de Dirac sobre la 2-Esfera

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:

Sergio Fidel
AMBRIZ PENN

Asesor:

Dr. Elmar
WAGNER



Morelia Michoacán México, Agosto 2018.



Por todo tu apoyo

⋮

¡Muchas Gracias!

Trini Arteaga

Índice general

Introducción	VII
1. Preliminares	1
1.1. Variedades Diferenciales	1
1.2. Espacio Tangente	4
1.3. Hazes Vectoriales	6
1.4. Constr. de Hazes Vectoriales por Funciones de Transición	11
1.5. Módulos	13
2. La 2-Esfera	15
2.1. Definición	15
2.2. Proyección Estereográfica	16
2.3. Haz Tangente de la 2-Esfera	20
2.4. Hazes Lineales Complejos de la 2-Esfera	28
3. Cálculo de Índices del operador de Dirac	39
3.1. Operador de Dirac en la 2-esfera	39
3.2. K-Teoría	42
3.3. Cálculo del Índice	59
Conclusión	63

Resumen

En la presente tesis se calcula el índice de Fredholm del operador de Dirac con dominio en la 2-esfera. Haciendo uso de la teoría de índice de Atiyah y Singer, y por medio de proyecciones, se calculará el índice del operador de Dirac haciendo uso de que dicho operador es lineal elíptico sobre la 2-esfera, la cual es una variedad compacta y espín de dimensión par. Las proyecciones mencionadas nos generan el grupo K_0 y serán representadas por haces de línea complejos sobre la 2-esfera por medio del teorema de Serre-Swan, los cuales son clasificados por un entero llamado número de giro.

Abstract

On the following thesis, the Fredholm's index associated to the Dirac operator over the 2-sphere is going to be computed. By making use of Atiyah's and Singer's index theory, and by using projections, such computation for Dirac's index is going to be obtained by using that such operator is linear-elliptic over the 2-sphere, which is a compact and spin manifold of even dimension. The used projections generates the group K_0 and will be represented by complex line vector bundles over the 2-sphere with Serre-Swan's theorem, which are classified by an integer called *winding number*.

Palabras clave: Geometría diferencial, K-teoría, Fredholm, lineal elíptico, proyecciones.

Nomenclatura

A continuación se indican los símbolos utilizados en este texto, junto con su explicación.

Símbolo	Descripción
\mathbb{C}	Campo de los números complejos.
\mathbb{R}	Campo de los números reales.
i	Unidad imaginaria.
$\ \cdot\ _{\mathbb{R}^n}$	Norma sobre el espacio real de dimensión n .
\mathbb{S}^2	Esfera bidimensional o 2-Esfera.
\mathbf{N}	Polo norte $(0, 0, 1)$ de \mathbb{S}^2 .
\mathbf{S}	Polo sur $(0, 0, -1)$ de \mathbb{S}^2 .
$\mathcal{U}_{\mathbf{N}}$	Hemisferio norte de \mathbb{S}^2 .
$\mathcal{U}_{\mathbf{S}}$	Hemisferio sur de \mathbb{S}^2 .
\mathcal{M}	Una variedad lisa.
$\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$	Atlas para la variedad \mathcal{M} .
$\mathcal{T}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}$	Función de transición para ir del hemisferio norte al sur.
$\mathcal{T}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}$	Función de transición para ir del hemisferio sur al norte.
$\mathbf{T}_p\mathcal{M}$	Espacio tangente de la variedad \mathcal{M} en p .
$\mathbf{T}\mathcal{M}$	Haz tangente de la variedad \mathcal{M} .
\not{D}	Operador de Dirac.
C^k	Conjunto de funciones k veces diferenciables ($k \in \mathbb{N}$ fijo).
C^∞	Conjunto de funciones infinitamente diferenciables.
\amalg	Unión disjunta.
$\text{Gen}\{X\}$	Espacio generado por el conjunto X .
$\Gamma(\mathcal{E})$	Secciones del haz \mathcal{E} .

Introducción

La teoría del índice de Fredholm trata de establecer una relación entre el denominado *índice* y un operador lineal T por medio de la siguiente ecuación

$$\text{Ind}(T) = \text{Dim}(\text{Ker}(T)) - \text{Dim}(\text{coKer}(T)),$$

la cual está definida mientras las dimensiones del kernel y cokernel de T sean finitas. Una forma elemental de apreciar esto es como una generalización del teorema de *rango-nulidad* del álgebra lineal. Algo interesante, es la gran cantidad de matemáticas que viajan en ambas direcciones entre la topología y el análisis funcional a través de esta relación de índice de Fredholm. A este conglomerado de matemáticas se le conoce como la K -homología.

La *teoría de índice de Atiyah y Singer* presenta un diferente punto de vista al emparejamiento del índice de Fredholm entre la K -teoría y la K -homología. Haremos uso del grupo $K_0(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$, el cual está generado por clases de equivalencia de proyecciones de cualquier tamaño con entradas en $C(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Ahora supongamos que \mathcal{M} es una variedad compacta y que D es un operador lineal elíptico sobre \mathcal{M} . Entonces D tiene un índice de Fredholm bien definido. Adicionalmente si \mathcal{V} es un haz vectorial sobre \mathcal{M} , entonces una construcción estándar en la teoría de índice produce un nuevo operador elíptico lineal $D_{\mathcal{V}}$ (con coeficientes en \mathcal{V}) y la asignación $\mathcal{V} \mapsto \text{Ind}D_{\mathcal{V}}$ determina un homomorfismo

$$\text{Ind}_D : K_0(C(\mathcal{M})) \rightarrow \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Dada la 2-esfera Riemanniana \mathbb{S}^2 y el operador de Dirac \not{D} sobre \mathbb{S}^2 , se estudiará el cálculo de índice para \not{D} , visto desde una presentación diferente al trabajo original de Varilly [6]. Dicho trabajo “Elements of Noncommutative Geometry” [6] contiene un cálculo de índices para el *operador torcido de Dirac* sobre haces lineales. Por otro lado, queremos calcular los índices del operador de Dirac que corresponden a la estructura espín de \mathbb{S}^2 .

El índice se calculará para las proyecciones $P \in \text{Mat}_{k \times k}(C^\infty(\mathbb{S}^2, \mathbb{C}))$ representadas por haces de línea complejos que cuentan con número de giro $m \in \mathbb{Z}$. Para esto, se hará uso del teorema de Serre-Swan, 3.2.1, en el cual, si \mathcal{M} es una variedad diferenciable, entonces podemos representar el $C(\mathcal{M})$ -módulo $\Gamma(\mathcal{E})$ de un haz \mathbb{C} -vectorial $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M})$ por medio de una proyección $P \in \text{Mat}_{m \times m}(C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$.

De esta forma es que se utiliza el grupo $K_0(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$ antes mencionado con el fin de dar una versión más abstracta del *teorema de índice de Atiyah-Singer*.

Como ejemplo, supongamos que \mathcal{M} es una variedad espín de dimensión par, y

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}_{+-} \\ \mathcal{D}_{-+} & 0 \end{pmatrix},$$

es el operador de Dirac sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, en donde $\mathcal{H}_\pm := L_2(\mathcal{S}_\pm)$ es el espacio de Hilbert de L_2 -secciones del haz \mathcal{S}_\pm . Más aún, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_+ \oplus \mathcal{S}_-$ es el haz espín. Entonces se puede demostrar que para todo $P \in \text{Mat}_{m \times m}(C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$, el operador

$$P\mathcal{D}P : \text{dom}(P\mathcal{D}_\pm P) \subset P\mathcal{H}_\pm^m \rightarrow P\mathcal{H}_\pm^m,$$

es un operador de Fredholm. Donde, el homomorfismo de (1) está dado por

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\mathcal{D}}([P]) &:= \text{Ind}(P\mathcal{D}_{+-}P) \\ &= \text{Dim}(\text{Ker}(P\mathcal{D}_{+-}P)) - \text{Dim}(\text{coKer}(P\mathcal{D}_{+-}P)), \end{aligned}$$

ver [2, Section 10.2].

El objetivo de esta tesis es calcular el índice del operador de Dirac \mathcal{D} para la variedad \mathbb{S}^2 junto con las proyecciones $P \in \text{Mat}_{m \times m}(C^\infty(\mathbb{S}^2, \mathbb{C}))$, las cuales representan haces \mathbb{C} -lineales sobre \mathbb{S}^2 , que son clasificados por un entero llamado *número de giro*.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducirán los conceptos requeridos para el desarrollo del tema principal de la presente tesis.

1.1. Variedades Diferenciales

Se comenzará por introducir el concepto de *variedades topológicas*.

Definición 1.1.1 (Variedad topológica). Consideremos \mathcal{M} un espacio topológico de Hausdorff no vacío, segundo contable. Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideramos I un conjunto de índices y $p \in \mathcal{M}$, tal que para $i \in I$, existen $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{M}$ y $U_i \subset \mathbb{R}^n$ abierto y ocurre que $p \in \mathcal{U}_i \subset \mathcal{M}$ y

$$\mathcal{M} \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i.$$

Más aún, existe un homeomorfismo ϕ_i :

$$\phi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow U_i.$$

Entonces \mathcal{M} es una *variedad topológica* de dimensión n .

Definición 1.1.2. Sea \mathcal{M} una variedad topológica de dimensión n . Consideremos $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abiertos de \mathcal{M} y \mathbb{R}^n respectivamente. Consideramos $\phi : \mathcal{U} \rightarrow U$ un homeomorfismo. Entonces a la pareja ordenada (\mathcal{U}, ϕ) se le llamará *carta* de \mathcal{M} .

Sea I un conjunto de índices. Un *atlas* \mathcal{A} de \mathcal{M} es una colección de cartas indexadas:

$$\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_i, \phi_i)\}_{i \in I},$$

con la propiedad:

$$\mathcal{M} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i.$$

Definición 1.1.3 (Funciones de transición). Consideremos \mathcal{M} una variedad topológica de dimensión n , y sea \mathcal{A} un atlas de \mathcal{M} con conjunto de índices I . Consideramos $i, j \in I$ tales que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$. Entonces la composición:

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \rightarrow \phi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j),$$

es la *transición* o *función de cambio de cartas* de \mathcal{U}_i a \mathcal{U}_j .

Definición 1.1.4 (Atlas diferenciable). Consideremos \mathcal{M} una variedad topológica de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Sea I un conjunto de índices y consideramos

$$\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_i, \phi_i)\}_{i \in I},$$

un atlas de \mathcal{M} . Sea $k \in \mathbb{N}$, y para todo $i, j \in I$, consideremos las funciones

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

de clase C^k siempre que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$. Entonces a la variedad topológica \mathcal{M} le será dada una estructura de clase C^k (estructura diferencial). A este atlas se le llama *atlas diferenciable* y a la variedad topológica que poseé un atlas diferenciable se le llama *variedad diferenciable*. Cuando la estructura diferenciable es de clase C^∞ , entonces se dirá que \mathcal{M} es una *variedad lisa*.

Observación 1.1.1. A las funciones $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ de la definición anterior, se les conoce también como *difeomorfismos* de clase C^k .

Observación 1.1.2. Sean $\{(\mathcal{U}_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ y $\{(\mathcal{V}_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ dos atlas de clase C^k . Se dice que $\{(\mathcal{U}_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ y $\{(\mathcal{V}_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ son *compatibles* o *definen una misma estructura diferencial* si

$$\{(\mathcal{U}_i, \phi_i)\}_{i \in I} \cup \{(\mathcal{V}_j, \psi_j)\}_{j \in J} \text{ es un atlas de clase } C^k.$$

Esto si y sólo si para todos $i \in I$, $j \in J$, las funciones $\phi_i \circ \psi_j^{-1}$ y $\psi_j \circ \phi_i^{-1}$ son de clase C^k . La notación de atlas compatible define una relación de equivalencia en la cual, cada atlas en una misma clase de equivalencia define la misma estructura diferencial.

Comentario 1.1.1. Sea \mathcal{M} una variedad topológica y \mathcal{A} un atlas de \mathcal{M} , entonces a dicho atlas se le denotará por $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$.

Definición 1.1.5. Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} dos variedades lisas de dimensión m y n respectivamente y sean I y J dos conjuntos de índices. Sean $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ y $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ atlas de \mathcal{M} y \mathcal{N} respectivamente, definidos de la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathcal{M}} &= \{(\mathcal{U}_i, \phi_i)\}_{i \in I}, \\ \mathcal{A}_{\mathcal{N}} &= \{(\mathcal{V}_j, \psi_j)\}_{j \in J}. \end{aligned}$$

Se dirá que la función $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ es diferenciable si

$$\phi_i \circ f \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(f^{-1}(\mathcal{U}_i) \cap \mathcal{V}_j) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{U}_i \subseteq \mathbb{R}^m,$$

es diferenciable como función de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m para todos $i \in I$ y $j \in J$.

Ahora teniendo el concepto de variedad lisa, se procederá a introducir los conceptos de *espacio tangente*, así como *haz tangente*.

Definición 1.1.6. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable. Una *curva* c diferenciable sobre \mathcal{M} es una función:

$$c : (a, b) \rightarrow \mathcal{M},$$

que es diferenciable según la definición anterior (1.1.5) con el atlas $\mathcal{A}_{(a,b)} = \{(a, b), \text{id}\}$.

Sea $p \in \mathcal{M}$ y sea (\mathcal{U}, ϕ) una carta de \mathcal{M} tal que $p \in \mathcal{U}$. Entonces un vector tangente a \mathcal{M} en el punto p , será una clase de equivalencia de curvas diferenciables c, γ en \mathcal{M} con la propiedad

$$\gamma(0) = c(0) = p, \quad 0 \in (a, b),$$

definida por

$$c \sim \gamma \Leftrightarrow (\phi \circ c)'(0) = (\phi \circ \gamma)'(0). \quad (1.1)$$

En la siguiente figura se ilustra un ejemplo particular para cuando c y γ son equivalentes y no son equivalentes.

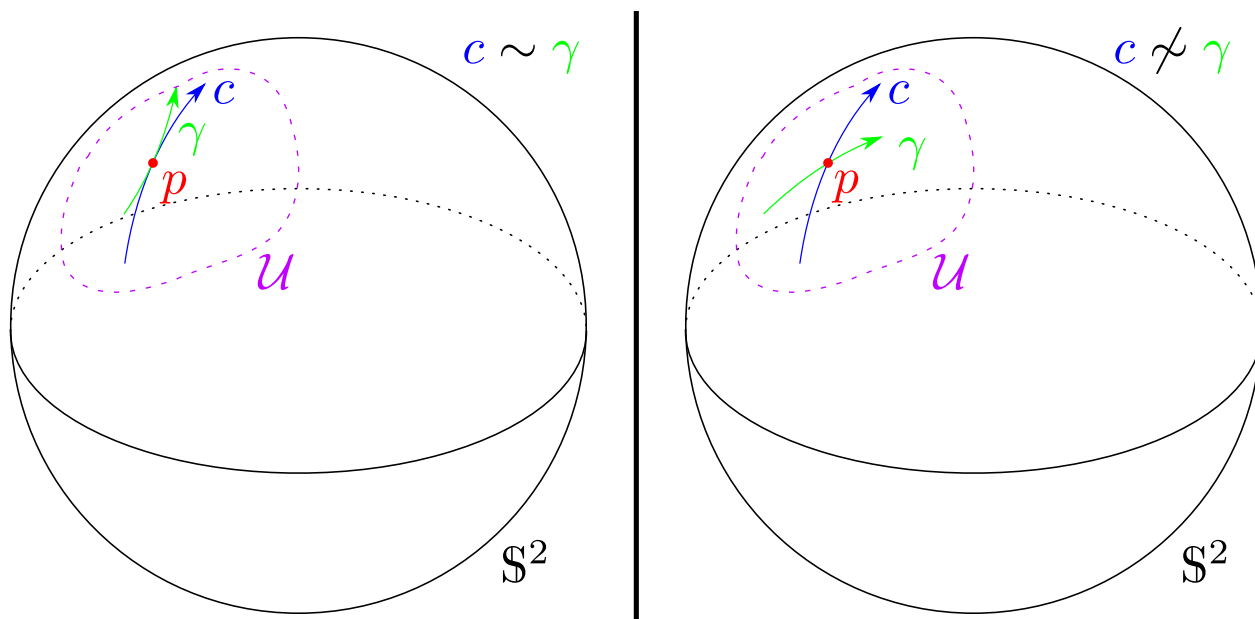


Figura 1.1: Casos cuando $c \sim \gamma$ y $c \not\sim \gamma$ en la esfera \mathbb{S}^2 (con $p \in \mathcal{U} \subset \mathbb{S}^2$)

Observación 1.1.3. La definición de la clase de equivalencia, no depende de la elección de carta para p .

Demostración. Sea \mathcal{M} una variedad lisa, un punto $p \in \mathcal{M}$ y cartas (\mathcal{U}_1, ϕ_1) , (\mathcal{U}_2, ϕ_2) cartas de \mathcal{M} tales que $p \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$. Sean c, γ dos curvas diferenciables equivalentes según la

definición 1.1.6 para la carta (\mathcal{U}_1, ϕ_1) . Entonces

$$\begin{aligned}
 (\phi_2 \circ \gamma)'(0) &= (\phi_2 \circ \phi_1^{-1} \circ \phi_1 \circ \gamma)'(0) \\
 &= (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})'(\phi_1(p)) (\phi_1 \circ \gamma)'(0) \\
 &= (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})'(\phi_1(p)) (\phi_1 \circ c)'(0) \\
 &= (\phi_2 \circ \phi_1^{-1} \circ \phi_1 \circ c)'(0) \\
 &= (\phi_2 \circ c)'(0). \quad \star
 \end{aligned}$$

1.2. Espacio Tangente

Definición 1.2.1 (Espacio tangente $\mathbf{T}_p\mathcal{M}$). Sea \mathcal{M} una variedad lisa o diferenciable. Sea $p \in \mathcal{M}$. Se le llamará *espacio tangente* a $p \in \mathcal{M}$, al conjunto de clases de equivalencia de curvas tangentes a \mathcal{M} que pasan por p en 0, *i.e.* sea c curva diferenciable tal que para $p \in \mathcal{M}$, $c(0) = p$, entonces $[c] \in \mathbf{T}_p\mathcal{M}$, donde $[c]$ denota la clase de curvas equivalentes a c .

Proposición 1.2.1. *Sea \mathcal{M} una variedad lisa de dimensión n y sea $p \in \mathcal{M}$. Entonces se tiene un isomorfismo de espacios vectoriales $\mathbf{T}_p\mathcal{M} \cong \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea \mathcal{M} una variedad lisa de dimensión n . Sea (\mathcal{U}, ϕ) una carta de \mathcal{M} tal que $p \in \mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Ahora para $t \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^n$ define el mapeo

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{P} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbf{T}_p\mathcal{M}, \\
 \mathfrak{P}(v) &:= [\phi^{-1}(\phi(p) + tv)] = [c_v],
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, para algún $\varepsilon > 0$, que existe en virtud de que $\Phi(\mathcal{U})$ es abierto. Notemos que \mathfrak{P} está bien definida, por lo que falta demostrar que \mathfrak{P} es biyectiva. Para ello, es suficiente exhibir la inversa de \mathfrak{P} , la cual está dada por

$$\mathfrak{P}^{-1}([c]) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi \circ c(t) = (\phi \circ c)'(0),$$

para $[c] \in \mathbf{T}_p\mathcal{M}$, ella no depende de la elección del representante gracias a la ecuación (1.1). Así, se verificará que en efecto, \mathfrak{P} y \mathfrak{P}^{-1} son inversos.

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{P}^{-1} \circ \mathfrak{P}(v) &= \mathfrak{P}^{-1} [\phi^{-1}(\phi(p) + tv)] \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi (\phi^{-1}(\phi(p) + tv)) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi(p) + tv) \\
 &= v.
 \end{aligned}$$

Así como

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{P} \circ \mathfrak{P}^{-1}([c]) &= \mathfrak{P}((\phi \circ c)'(0)) \\
 &= [\phi^{-1}(\phi(p) + t(\phi \circ c)'(0))],
 \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi \circ (\Phi^{-1}(\Phi(p) + t(\Phi \circ c)'(0))) = (\Phi \circ c)'(0),$$

y de la ecuación (1.1),

$$[\phi^{-1}(\phi(p) + t(\phi \circ c)'(0))] = [c].$$

Ahora se procederá a definir la estructura de espacio vectorial en $\mathbf{T}_p\mathcal{M}$ usando \mathfrak{P} . Sean $[c_v], [c_w] \in \mathbf{T}_p\mathcal{M}$ como en (1.2) con $v, w \in \mathbb{R}^n$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Definimos:

$$\begin{aligned} a[c_v] + b[c_w] &:= \mathfrak{P}(a\mathfrak{P}^{-1}([c_v]) + b\mathfrak{P}^{-1}([c_w])) \\ &= \mathfrak{P}(av + bw) \\ &= [c_{av+bw}]. \end{aligned}$$



Definición 1.2.2 (Base canónica). Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable de dimensión $n \in \mathbb{N}$, de clase C^k para $k \in \mathbb{N}$. Sea $p \in \mathcal{M}$ y (\mathcal{U}, ϕ) una carta de \mathcal{M} tal que $p \in \mathcal{U}$. En coordenadas locales

$$(x_1(p), \dots, x_n(p)) = \phi(p),$$

los vectores

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p) := \mathfrak{P}_{\Phi}(e_j) = [c_{e_j}] \in \mathbf{T}_p\mathcal{M},$$

forman la base canónica de $\mathbf{T}_p\mathcal{M}$, donde $p = \phi^{-1}(x)$, ó $x = \phi(p)$.

Teorema 1.2.1 (Cambio de coordenadas). Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable y sean (\mathcal{U}, ϕ) y (\mathcal{V}, ψ) dos cartas con coordenadas locales tal que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y para todo $p \in \mathcal{U}$, $q \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} (x_1(p), \dots, x_n(p)) &= \phi(p), \\ (y_1(q), \dots, y_n(q)) &= \psi(q), \end{aligned}$$

se escribe

$$y(x) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n)) = \psi \circ \phi^{-1}(x),$$

en donde $\psi \circ \phi^{-1}$ es la función de transición. Entonces para todo $p \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ y $k = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Demostración. Sean \mathcal{M} una variedad diferenciable de dimensión $n \in \mathbb{N}$, y (\mathcal{U}, ϕ) y (\mathcal{V}, ψ)

como en la hipótesis del teorema. Ahora para $k = 1, \dots, n$, por la definición 1.2.2 tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k}(p) &= \mathfrak{P}_\phi(e_k) = [\phi^{-1}(x + te_k)] \\
&= \mathfrak{P}_\psi \circ \mathfrak{P}_\psi^{-1}([\phi^{-1}(x + te_k)]) \\
&= \mathfrak{P}_\psi \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi \circ \phi^{-1}(x + te_k) \right) \\
&= \mathfrak{P}_\psi \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} y(x + te_k) \right) \\
&= \mathfrak{P}_\psi \left(\left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} y_1(x + te_k), \dots, \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} y_n(x + te_k) \right) \right) \\
&= \mathfrak{P}_\psi \left(\left(\frac{\partial y_1(x)}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial y_n(x)}{\partial x_k} \right) \right) \\
&= \mathfrak{P}_\psi \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j(x)}{\partial x_k} e_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j(x)}{\partial x_k} \mathfrak{P}_\psi(e_j) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j(x)}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial y_j}.
\end{aligned}$$



Definición 1.2.3 (Haz tangente \mathbf{TM}). Sea \mathcal{M} una variedad lisa de dimensión m , es decir, con atlas diferenciable

$$\mathcal{A}_\mathcal{M} = \{(\mathcal{U}_i, \phi_i)\}_{i \in I}.$$

El *haz tangente*, denotado por \mathbf{TM} es

$$\mathbf{TM} := \coprod_{p \in \mathcal{M}} \mathbf{T}_p \mathcal{M}$$

y está provisto con un atlas diferenciable dado en la proposición 1.3.1.

1.3. Haces Vectoriales

Una forma *robusta* de introducir la idea de un campo vectorial, es como un *campo de flechas* que denotan una *velocidad de un flujo* que existe en nuestra variedad lisa.

Definición 1.3.1 (Fibra). Sean X , y Y conjuntos y sea $f : X \rightarrow Y$ un mapeo. Sea $y \in Y$. La fibra de un elemento $y \in Y$, usualmente denotada por $f^{-1}(\{y\})$ es:

$$f^{-1}(\{y\}) := \{x \in X | f(x) = y\}.$$

También se le conoce como preimagen de f en y .

Definición 1.3.2 (Haz vectorial). Sean \mathcal{M} y \mathcal{E} dos variedades lisas. Sea $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ una función diferenciable y suprayectiva. Entonces a la terna ordenada $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M})$ se le llamará *haz vectorial complejo*, de rango o dimensión m y base \mathcal{M} si las siguientes propiedades se cumplen:

- a) $\pi^{-1}(x)$ es un espacio vectorial complejo de dimensión m , para cada $x \in \mathcal{M}$.
 b) Para todo $x \in \mathcal{M}$ existe $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{M}$ abierto que contiene x (una vecindad de x), así como un difeomorfismo

$$\varphi : \pi^{-1}(\mathcal{U}_x) \rightarrow \mathcal{U}_x \times \mathbb{C}^m.$$

Además dicho difeomorfismo φ cuenta con la propiedad de que, para todo $y \in \mathcal{U}_x$

$$\varphi|_{\pi^{-1}(y)} : \pi^{-1}(y) \mapsto \{y\} \times \mathbb{C}^m \cong \mathbb{C}^m,$$

es un isomorfismos de espacio vectoriales.

A la pareja ordenada $(\pi^{-1}(w), \varphi)$ con $w \in \mathcal{U}_x$ se le llama *trivialización local del haz vectorial*. Se dice que una sección (global) del haz vectorial \mathcal{E} es una aplicación diferenciable (continua)

$$s : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E},$$

tal que $\pi \circ s(p) = p$. Es decir, $s(p) \in \pi^{-1}(p)$ en la fibra sobre p .

Como comentario, cabe mencionar que la misma definición aplica para haces vectoriales reales con fibra \mathbb{R}^m .

Ejemplo (Banda de Möbius). Considere $\mathcal{M} = [-1, 1]/\sim \cong \mathbb{S}^1$, donde para todo $x \in [-1, 1]$ $x \sim x$, y además $(-1) \sim 1$. Aquí consideramos una segunda relación de equivalencia

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= [-1, 1] \times [-1, 1]/\sim, \\ &\forall (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1], \quad (x, y) \sim (x, y), \\ &\& \forall y \in [-1, 1], \quad (1, y) \sim (-1, -y); \end{aligned}$$

con

$$\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}, \quad \pi([(x, y)]) := [x].$$

La construcción análoga vale para $\{y\} = \mathbb{R}$, ver figura 1.2. Es posible reconocer a \mathcal{E} como un haz vectorial.

Ejemplo 1.3.1. Es posible reconocer al haz tangente al círculo \mathbb{S}^1 como

$$\mathbf{TS}^1 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \text{ ver figura 1.3}$$

Definición 1.3.3 (Haz trivial). Sea $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M})$ un haz vectorial. Se dice que $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ es un *haz trivial complejo* si $\mathcal{E} \cong \mathcal{M} \times \mathbb{C}^m$ (o bien haz trivial real $\mathcal{E} \cong \mathcal{M} \times \mathbb{R}^m$), por una trivialización lineal

$$\psi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{C}^m, \quad (\text{o bien } \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{R}^m).$$

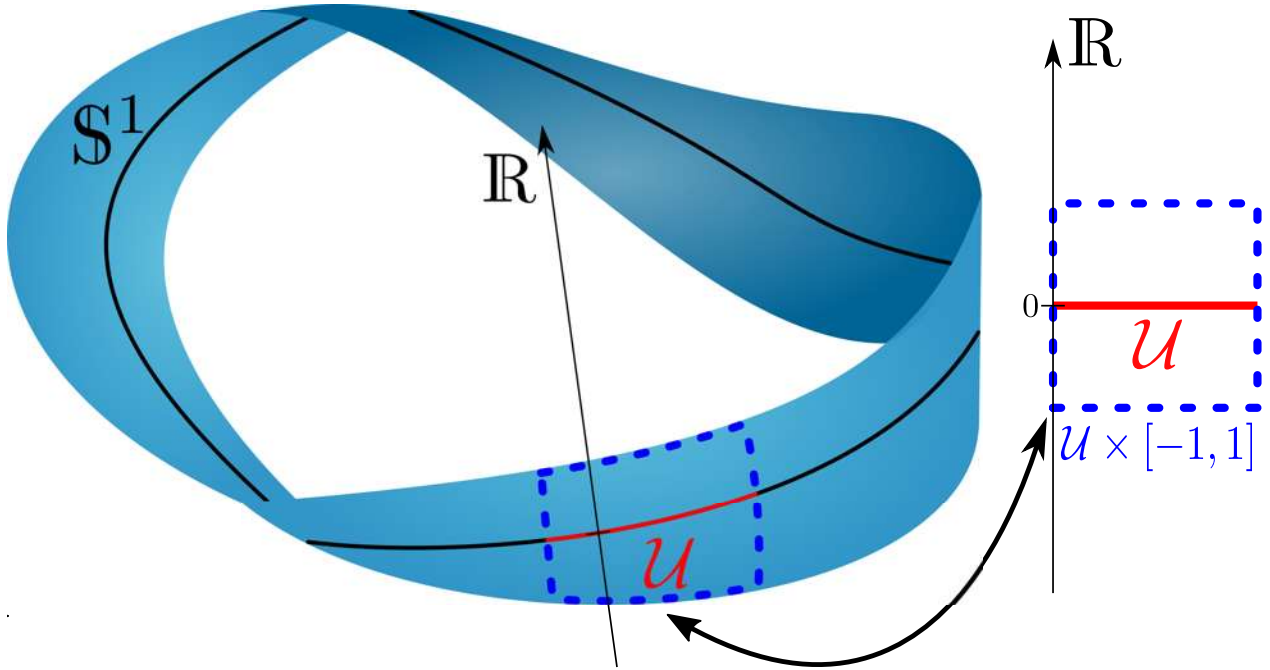


Figura 1.2: Haz vectorial de la banda de Möbius

Teorema 1.3.1. Sea $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M})$ un haz vectorial de dimensión m . Entonces $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ es trivial, si y sólo si existen secciones globales

$$s_1, \dots, s_m : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E},$$

tal que para todo $p \in \mathcal{M}$

$$\{s_1(p), \dots, s_m(p)\} \subset \pi^{-1}(p) \cong \mathbb{C}^m,$$

es una base.

Demostración. Sea $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M})$ un haz vectorial y suponiendo que $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ es trivial. Suponemos que

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{C}^m, \\ \psi : \pi^{-1}(p) &\rightarrow \{p\} \times \mathbb{C}^m \end{aligned}$$

es un isomorfismo. Entonces para $j = 1, \dots, m$

$$s_j(p) := \psi^{-1} \left(\left(\left(p, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \right), \quad 1 \text{ en la } j\text{-ésima entrada},$$

define m -secciones s_1, \dots, s_m tales que

$$\{s_1(p), \dots, s_m(p)\},$$

definen una base de $\pi^{-1}(p)$.

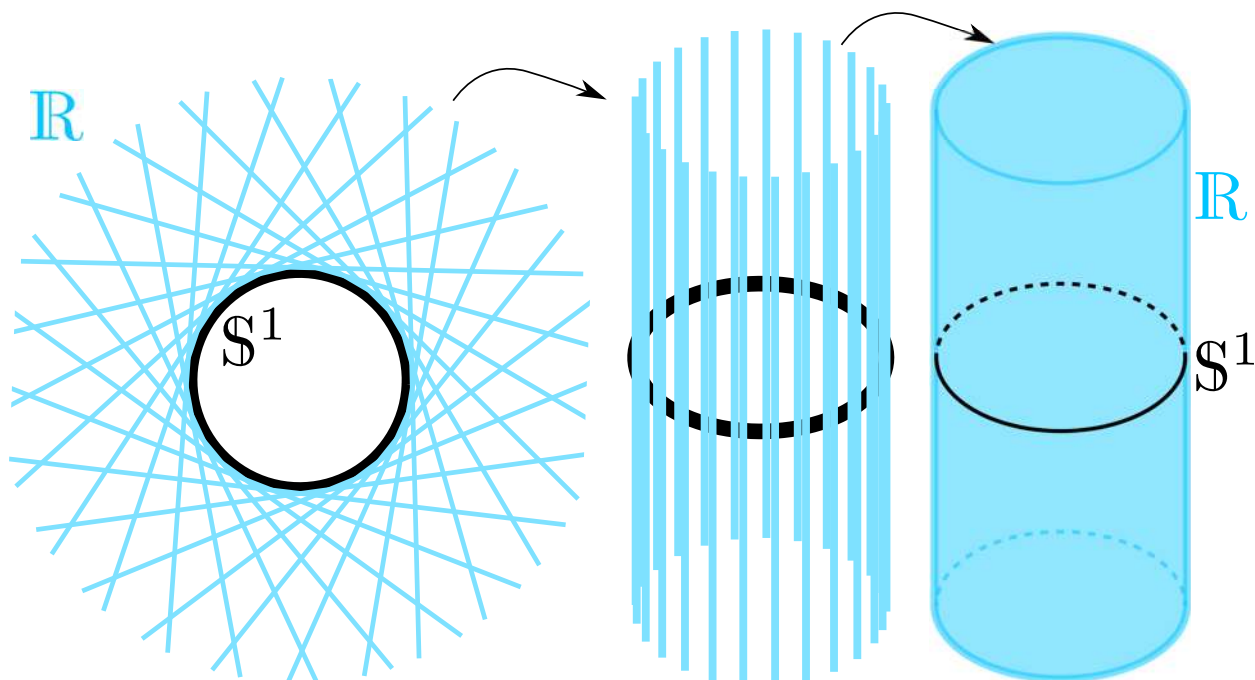


Figura 1.3: Haz tangente del círculo \mathbb{S}^1 : $\mathbf{TS}^1 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Ahora para la otra implicación, sean

$$s_1, \dots, s_m : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E},$$

secciones tales que

$$\{s_1(p), \dots, s_m(p)\} \subset \pi^{-1}(p),$$

es una base. Definimos

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{C}^m, \\ \psi \left(\sum_{j=1}^m a_j(p) s_j(p) \right) &= \left(p, \begin{pmatrix} a_1(p) \\ \vdots \\ a_m(p) \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

para todo

$$v(p) \in \pi^{-1}(p) = \text{Gen} \{s_1(p), \dots, s_m(p)\},$$

ya que existen únicos $a_j(p) \in \mathbb{C}$ tales que

$$v(p) = \sum_{j=1}^m a_j(p) s_j(p). \quad *$$

Observación 1.3.1. Recordando que para una variedad lisa \mathcal{M} y un haz vectorial liso \mathcal{E} , una sección lisa de un haz vectorial $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M})$ es una función

$$s : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E},$$

donde $s \in C^\infty$ y tal que

$$\pi \circ s = \text{id}_{\mathcal{M}}.$$

Al conjunto de todas las secciones lisas del haz vectorial $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M})$ se denota por $\Gamma^\infty(\mathcal{E})$.

Comentario. $\Gamma^\infty(\mathcal{E})$ es un $C^\infty(\mathcal{M})$ -módulo.

Definición 1.3.4. Una sección del haz tangente se llama *campo vectorial*.

Definición 1.3.5. Sea \mathcal{M} una variedad lisa y $p \in \mathcal{M}$. Una *métrica riemanniana* para \mathcal{M} es un conjunto de funciones diferenciables

$$g_p : \mathbf{T}_p\mathcal{M} \times \mathbf{T}_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que:

- g_p es bilineal, simétrica y positiva definida.
- La función definida por $p \mapsto g_p(X(p), Y(p)) \in \mathbb{R}$ es lisa para todo $X, Y \in \Gamma^\infty(\mathbf{T}\mathcal{M})$.

Proposición 1.3.1. Sea \mathcal{M} una variedad lisa y sea $\mathbf{T}\mathcal{M}$ el haz tangente para \mathcal{M} . El haz tangente $\mathbf{T}\mathcal{M}$ junto con la función que manda al espacio tangente

$$\begin{aligned} \pi : \mathbf{T}\mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M}, \\ \mathbf{T}_p\mathcal{M} &\mapsto p, \end{aligned}$$

es un haz vectorial real de rango n y con base \mathcal{M} .

Demostración. Sea $\mathcal{A}_{\mathcal{M}} = \{(\mathcal{U}_i, \Phi_i)\}_{i \in I}$ un atlas diferenciable de clase C^k , con $k > 0$. Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i &:= \coprod_{p \in \mathcal{U}_i} \mathbf{T}_p\mathcal{M}, \quad y \\ \psi_i : \mathcal{V}_i &\rightarrow \Phi_i(\mathcal{U}_i) \times \mathbb{R}^n \\ \psi_i \left(\sum_{j=1}^n a_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right) &= \left(\Phi_i(p), \begin{pmatrix} a_1(p) \\ \vdots \\ a_n(p) \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

donde $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ denota la base canónica de la definición 1.2.2. Como en el teorema 1.2.1 se verifica que

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1} = \left(\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}, (\Phi_j \circ \Phi_i^{-1})' \right),$$

en particular $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$ es de clase C^{k-1} . Considerando la topología sobre $\mathbf{T}\mathcal{M}$ generada por los conjuntos $\psi_i^{-1}(A)$ en donde $i \in I$ y $A \subset \Phi_i(\mathcal{U}_i) \times \mathbb{R}^n$ es abierto, obtenemos un atlas diferenciable $\{(\mathcal{V}_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ para $\mathbf{T}\mathcal{M}$. Observemos que $\pi : \mathbf{T}\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ es diferenciable, ya que

$$\begin{aligned} \Phi_j \circ \pi \circ \psi_j^{-1} &: \Phi_j(\mathcal{U}_j) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \Phi_j \circ \pi \circ \psi_j^{-1}(\Phi_j(p, \mathcal{V})) &= \Phi_j \circ \pi \left(\sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial}{\partial x_k}(p) \right) = \Phi_j(p), \end{aligned}$$

es la proyección sobre la primera entrada. Ahora se observa como también se cumplen las condiciones para que $(\mathbf{T}\mathcal{M}, \pi)$ sea un haz vectorial para \mathcal{M} :

- I) $\pi^{-1}(p) = \mathbf{T}_p\mathcal{M} \cong \{p\} \times \mathbb{R}^n$ por la proposición 1.2.1.
- II) Sea $p \in \mathcal{M}$. Tomando un abierto \mathcal{U}_i del atlas $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ que contiene a p , para el cual $\pi^{-1}(\mathcal{U}_i) = \mathcal{V}_i$ es un abierto de $\mathbf{T}\mathcal{M}$, se tiene un difeomorfismo

$$\mathcal{V}_i = \coprod_{p \in \mathcal{U}_i} \mathbf{T}_p\mathcal{M} \cong \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^n$$

con el isomorfismo en cada fibra dado por $[c_v] \mapsto (p, v)$ con $[c_v] \in \mathbf{T}_p\mathcal{M}$.



1.4. Construcción de Haces Vectoriales Mediante Funciones de Transición

Sea $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ un haz vectorial con fibras $\pi^{-1}(p) \cong \mathbb{K}^n$, donde $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sea $\mathcal{A}_{\mathcal{M}} = \{(\mathcal{U}_i, \Phi_i)\}_{i \in I}$ un atlas para \mathcal{M} tal que existen trivializaciones locales

$$\psi_i : \pi^{-1}(\mathcal{U}_i) \rightarrow \mathcal{U}_i \times \mathbb{K}^n \quad \forall i \in I.$$

Entonces para todo $p \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ tenemos isomorfismos de espacios vectoriales

$$\begin{aligned} \psi_j \circ \psi_i^{-1} : \{p\} \times \mathbb{K}^n &\rightarrow \{p\} \times \mathbb{K}^n, \\ \psi_j \circ \psi_i^{-1}((p, v)) &= (p, \mathcal{J}_{ji}(p)v) \end{aligned} \quad (1.3)$$

con funciones diferenciables $\mathcal{J}_{ji} : \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_i \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{K})$. Las funciones \mathcal{J}_{ji} se llaman *funciones de transición del haz* y cumplen

$$(i) \mathcal{J}_{ii} = \text{id} \quad (ii) \mathcal{J}_{ij}\mathcal{J}_{ji} = \text{id} \quad (iii) \mathcal{J}_{ij}\mathcal{J}_{jk}\mathcal{J}_{ki} = \text{id}.$$

Se puede demostrar que

$$\mathcal{E} \cong \coprod_{i \in I} \mathcal{U}_i \times \mathbb{K}^n / \sim, \quad (1.4)$$

con $(p_i, v_i) \in \mathcal{U}_i \times \mathbb{K}^n$, $(p_j, v_j) \in \mathcal{U}_j \times \mathbb{K}^n$ y $(p_i, v_i) \sim (p_j, v_j)$, si y sólo si $p_i = p_j$ y $v_i = \mathcal{J}_{ij}(p_j)v_j$. Un isomorfismo

$$\Phi : \coprod_{i \in I} \mathcal{U}_i \times \mathbb{K}^n / \sim \rightarrow \mathcal{E},$$

está dado por

$$\Phi([p_i, v_i]) := \psi_i^{-1}((p_i, v_i)).$$

Por (1.3) y (1.4), Φ está bien definido.

Por otro lado, sea $\mathcal{A}_{\mathcal{M}} = \{(\mathcal{U}_i, \Phi_i)\}_{i \in I}$ un atlas para \mathcal{M} y funciones diferenciables

$$\mathcal{J}_{ij} : \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{n^2},$$

dadas tal que para todo $i, j, k \in I$

$$(i) \mathcal{T}_{ii} = \text{id} \quad (ii) \mathcal{T}_{ij}\mathcal{T}_{ji} = \text{id} \quad (iii) \mathcal{T}_{ij}\mathcal{T}_{jk}\mathcal{T}_{ki} = \text{id}, \quad (1.5)$$

(trivialmente cumplido si $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \emptyset$), entonces se puede construir un haz vectorial con fibra \mathbb{K}^n por

$$\mathcal{E} := \coprod_{i \in I} \mathcal{U}_i \times \mathbb{K}^n / \sim,$$

con $(p_i, v_i) \in \mathcal{U}_i \times \mathbb{K}^n$, $(p_j, v_j) \in \mathcal{U}_j \times \mathbb{K}^n$ y $(p_i, v_i) \sim (p_j, v_j)$ si y sólo si $p_i = p_j$ y $v_i = \mathcal{T}_{ij}(p_j)v_j$. Con

$$\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}, \quad \pi([(p_i, v_i)]) := p_i,$$

y trivializaciones locales

$$\begin{aligned} \Psi_i : \pi^{-1}(\mathcal{U}_i) &\rightarrow \mathcal{U}_i \times \mathbb{K}^n, \\ \Psi_i([(p_i, v_i)]) &= (p_i, v_i). \end{aligned}$$

Observamos que para todo $i \in I$,

$$\pi^{-1}(\mathcal{U}_i) = \{[(p_i, v_i)] : (p_i, v_i) \in \mathcal{U}_i \times \mathbb{K}^n\}.$$

Entonces, dada una sección $s \in \Gamma(\mathcal{E})$, podemos escribir para todo $p \in \mathcal{U}$

$$s(p) = [(p, v_i(p))],$$

donde $\mathcal{V}_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{K}^n$, es continua ya que $\Psi_i(s(p)) = (p, v_i(p))$ es un homeomorfismo entre $\pi^{-1}(\mathcal{U}_i)$ y $\mathcal{U}_i \times \mathbb{K}^n$.

Sea ahora $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y supongamos que $\mathcal{T}_{ij} : \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \rightarrow U(n)$, donde

$$U(n) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{C}) : A^*A = \text{id} = AA^*\},$$

denota el conjunto de matrices unitarias del tamaño $n \times n$.

Análogamente a la definición 1.3.5 podemos definir un producto interno

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_p : \pi^{-1}(p) \times \pi^{-1}(p) &\rightarrow \mathbb{C}, \text{ por} \\ \langle [(p, v_i)], [(p, w_i)] \rangle_p &:= \langle v_i, w_i \rangle_{\mathbb{C}^n}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

con $(p, v_i), (p, w_i) \in \mathcal{U}_i \times \mathbb{C}^n$.

El producto interno está bien definido porque $\mathcal{T}_{ij}(p) \in U(n)$ implica $\mathcal{T}_{ij}^*(p)\mathcal{T}_{ij}(p) = \text{id}$. Entonces, para $[(p, v_i)] = [(p, v_j)]$ y $[(p, w_i)] = [(p, w_j)]$, con $(p, v_j), (p, w_j) \in \mathcal{U}_j \times \mathbb{C}^n$, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle [(p, v_i)], [(p, w_i)] \rangle_p &= \langle v_i, w_i \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \mathcal{T}_{ij}(p)v_j, \mathcal{T}_{ij}(p)w_j \rangle_{\mathbb{C}^n}, \\ \langle v_j, \mathcal{T}_{ij}^*(p)\mathcal{T}_{ij}(p)w_j \rangle_{\mathbb{C}^n} &= \langle v_j, w_j \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle [(p, v_j)], [(p, w_j)] \rangle_{\mathbb{C}^n}. \end{aligned}$$

Además dadas dos secciones $r, s \in \Gamma^k(\mathcal{E})$, la función que envía a $p \in \mathcal{M}$:

$$p \mapsto \langle s(p), r(p) \rangle_p,$$

con $\langle s(p), r(p) \rangle_p \in \mathbb{C}$ es continua de clase C^k porque, escribiendo para todo $p \in \mathcal{U}$

$$s(p) = [(p, v(p))], \quad r(p) = [(p, w(p))],$$

con $v, w : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ continuas de clase C^k tenemos para $p \in \mathcal{U}_i$

$$p \mapsto \langle s(p), r(p) \rangle_p = \langle v(p), w(p) \rangle_{\mathbb{C}^n},$$

es continua de clase C^k .

1.5. Módulos

Una parte a tratar en esta tesis tiene relación con la estructura matemática conocida como *módulos*. Teniendo que R es un anillo, entonces un R -módulo no es más que *un espacio vectorial sobre un anillo R* . De esta forma se procede a definirlo formalmente.

Definición 1.5.1 (R -módulo). Sea R un anillo conmutativo con $1 \in R$ (dónde $1 \in R$ es el elemento neutro multiplicativo o unidad). Entonces un R -módulo por la izquierda es un grupo abeliano \mathfrak{M} (aditivo), con una multiplicación por escalar:

$$\begin{aligned} R \times \mathfrak{M} &\rightarrow \mathfrak{M}, \\ (r, m) &\mapsto rm. \end{aligned}$$

tal que las siguientes condiciones se satisfacen para todo $m, m' \in \mathfrak{M}$ y r, r' :

- I) $r(m + m') = rm + rm'$;
- II) $(r + r')m = rm + r'm$;
- III) $(rr')m = r(r'm)$;
- IV) $1m = m$.

Observación 1.5.1. De esta forma, considerando el hecho de que todo campo es un anillo, entonces todo espacio vectorial sobre cualquier campo K es un K -módulo.

Ejemplo 1.5.1. $\Gamma(\mathcal{E})$ es un $C(\mathcal{M})$ -módulo.

Definición 1.5.2 (Módulo finitamente generado). Sea R un anillo y sea \mathfrak{M} un R -módulo. Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathfrak{M}$ un subconjunto de finito de \mathfrak{M} . Se dice que \mathfrak{M} es finitamente generado si $\mathfrak{M} = \langle X \rangle$.

Definición 1.5.3 (Módulo proyectivo). Sea R un anillo. Un *módulo proyectivo* \mathfrak{P} sobre un anillo R es un R -módulo con la propiedad de que para cualquier homomorfismo sobreyectivo de R -módulos $\alpha : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{P}$, tiene un inverso derecho $\beta : \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{M}$

Teorema 1.5.1. *Sea R un anillo. Un R -módulo es proyectivo si y solamente si dicho R -módulo es isomorfo a un sumando directo en un R -módulo libre. Más aún, es finitamente generado y proyectivo si y solamente si es isomorfo a un sumando directo en R^n para algún n .*

Demostración. La demostración está disponible en [5, Theorem 1.1.2, página 3].



Capítulo 2

La 2-Esfera

Ahora se procederá a introducir el espacio en el que se trabajará, así como se integrará el material visto del capítulo anterior para aplicarlo a la esfera.

2.1. Definición

Definición 2.1.1. Consideremos el espacio real \mathbb{R}^3 . Al siguiente subespacio topológico de \mathbb{R}^3

$$\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

se le llamará *2-Esfera*. A los puntos $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$ se les llamará *polo norte* y *polo sur* y denotará por **N** y **S** respectivamente.

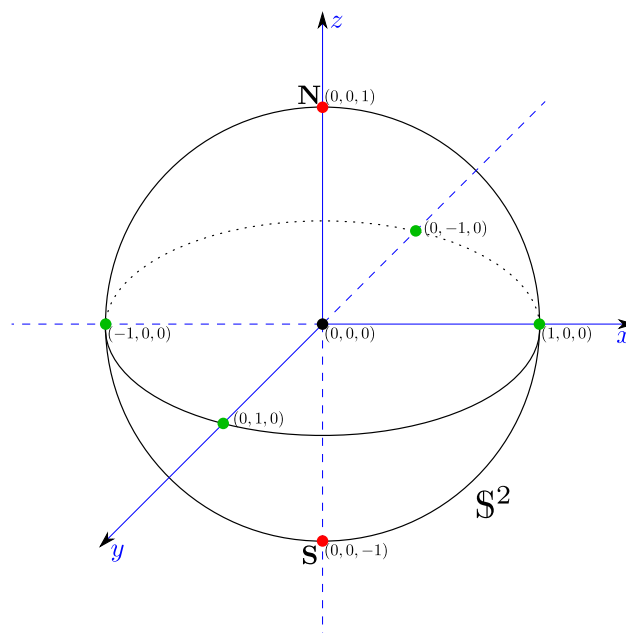


Figura 2.1: Representación de la esfera \mathbb{S}^2 en el espacio \mathbb{R}^3 , con sus polos **N** y **S**.

2.2. Proyección Estereográfica

La motivación de definir y usar la proyección estereográfica es para definir un atlas para la 2-Esfera.

Definición 2.2.1. Sea \mathbb{S}^2 la esfera 2-dimensional y sean \mathbf{N} y \mathbf{S} sus polos norte y sur. Se definirán los *hemisferios norte y sur* de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{\mathbf{N}} &:= \mathbb{S}^2 \setminus \{\mathbf{S}\}, \\ \mathcal{U}_{\mathbf{S}} &:= \mathbb{S}^2 \setminus \{\mathbf{N}\}.\end{aligned}$$

Observación 2.2.1. Notemos que tanto $\mathcal{U}_{\mathbf{N}} \subset \mathbb{S}^2$ como $\mathcal{U}_{\mathbf{S}} \subset \mathbb{S}^2$ son conjuntos abiertos en \mathbb{S}^2 .

Observación 2.2.2. Observemos que $\mathbb{S}^2 = \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cup \mathcal{U}_{\mathbf{S}}$. Por lo tanto,

$$\bigcup_{i \in \{\mathbf{N}, \mathbf{S}\}} \mathcal{U}_i,$$

es una cubierta abierta de \mathbb{S}^2 .

Teniendo en mano las definiciones de los hemisferios para la esfera \mathbb{S}^2 , se procederá a definir un par de funciones.

Definición 2.2.2. Consideremos \mathbb{S}^2 con sus conjuntos abiertos $\mathcal{U}_{\mathbf{N}}$ y $\mathcal{U}_{\mathbf{S}}$. Se procederá a definir las *proyecciones norte y sur* ($\varphi_{\mathbf{N}}$ y $\varphi_{\mathbf{S}}$ respectivamente) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{N}} : \mathcal{U}_{\mathbf{N}} &\rightarrow \mathbb{R}^2, & (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3} \right), \\ \varphi_{\mathbf{S}} : \mathcal{U}_{\mathbf{S}} &\rightarrow \mathbb{R}^2, & (y_1, y_2, y_3) &\mapsto \left(\frac{y_1}{1-y_3}, \frac{-y_2}{1-y_3} \right).\end{aligned}$$

Ahora considerase \mathbb{R}^2 con las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{N}}^{-1} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \text{Imagen}(\varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(\mathbb{R}^2)) \subset \mathbb{R}^3, \\ (x_1, x_2) &\mapsto \left(\frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{1-x_1^2-x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2} \right), \\ \varphi_{\mathbf{S}}^{-1} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \text{Imagen}(\varphi_{\mathbf{S}}^{-1}(\mathbb{R}^2)) \subset \mathbb{R}^3, \\ (y_1, y_2) &\mapsto \left(\frac{2y_1}{1+y_1^2+y_2^2}, \frac{-2y_2}{1+y_1^2+y_2^2}, \frac{y_1^2+y_2^2-1}{1+y_1^2+y_2^2} \right).\end{aligned}$$

Considerando $\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 = x_1^2 + x_2^2$ y $\|\mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^2}^2 = y_1^2 + y_2^2$ (donde $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$ denota la norma usual en \mathbb{R}^2), el mapeo anterior se puede escribir:

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(x_1, x_2) &= \left(\frac{2x_1}{1+\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2}, \frac{2x_2}{1+\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2}, \frac{1-\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2}{1+\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2} \right), \\ \varphi_{\mathbf{S}}^{-1}(y_1, y_2) &= \left(\frac{2y_1}{1+\|\mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^2}^2}, \frac{-2y_2}{1+\|\mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^2}^2}, \frac{\|\mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^2}^2-1}{1+\|\mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^2}^2} \right).\end{aligned}$$

Observación 2.2.3. De la definición previa 2.2.2, se tiene que para $i \in \{\mathbf{N}, \mathbf{S}\}$,

$$\varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathcal{U}_i \subseteq \mathbb{S}^2.$$

Demostración. Sea $\varphi_{\mathbf{N}}^{-1}$ como en 2.2.2 y sea $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Ahora calculando $\|\varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(x_1, x_2)\|$:

$$\begin{aligned} \|\varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(x_1, x_2)\|_{\mathbb{R}^3}^2 &= \left\| \left(\frac{2x_1}{1 + \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2}, \frac{2x_2}{1 + \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2}, \frac{-\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}{1 + \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2} \right) \right\|_{\mathbb{R}^3}^2 \\ &= \frac{4x_1^2 + 4x_2^2 + (\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 - 1)^2}{(1 + \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2)^2} \\ &= \frac{4x_1^2 + 4x_2^2 + (\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^4 - 2\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1)}{(1 + \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2)^2} \\ &= \frac{(\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^4 + 2\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1)}{(1 + \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2)^2} \\ &= \frac{(\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1)^2}{(1 + \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

En virtud de la arbitrariedad de $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que para cualquier $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|\varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(x_1, x_2)\| = 1$. Por lo tanto, se concluye que $\varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{S}^2$.

De esta forma se tiene que Imagen $(\varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(\mathbb{R}^2)) \subseteq \mathcal{U}_{\mathbf{N}}$ ya que

$$\frac{1 - \|x\|_{\mathbb{R}^2}^2}{1 + \|x\|_{\mathbb{R}^2}^2} > \frac{-\|x\|_{\mathbb{R}^2}^2}{1 + \|x\|_{\mathbb{R}^2}^2} > -1,$$

Por lo tanto $\mathbf{S} \notin \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(\mathbb{R}^2)$.

La demostración para $\varphi_{\mathbf{S}}^{-1}$ es de forma simétrica. ✱

De esta forma se tiene hasta el momento que

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{N}}^{-1} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathcal{U}_{\mathbf{N}}, \\ \varphi_{\mathbf{S}}^{-1} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathcal{U}_{\mathbf{S}}, \end{aligned}$$

y se procederá a mostrar que $\varphi_{\mathbf{N}} \circ \varphi_{\mathbf{N}}^{-1} = \text{id}$, $\varphi_{\mathbf{N}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{N}} = \text{id}$, así como $\varphi_{\mathbf{S}} \circ \varphi_{\mathbf{S}}^{-1} = \text{id}$, y $\varphi_{\mathbf{S}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{S}} = \text{id}$.

Proposición 2.2.1. *Sea $i \in \{\mathbf{N}, \mathbf{S}\}$ y sean φ_i y φ_i^{-1} como en la definición 2.2.2. Entonces*

$$\varphi_i \circ \varphi_i^{-1} = \text{id} \quad \text{y} \quad \varphi_i^{-1} \circ \varphi_i = \text{id}$$

Demostración. Sin pérdida de la generalidad, se considerará el caso para cuando $i = \mathbf{N}$, ya que el otro caso se da de forma simétrica. De esta forma, sea $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \subset \mathbb{S}^2$, entonces:

$$\varphi_{\mathbf{N}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{N}}(x_1, x_2, x_3) = \varphi_{\mathbf{N}}^{-1} \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3} \right),$$

por definición de $\varphi_{\mathbf{N}}$. Ahora

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{N}}^{-1} \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3} \right) &= \left(\frac{\frac{2x_1}{1+x_3}}{1 + \frac{x_1^2}{(1+x_3)^2} + \frac{x_2^2}{(1+x_3)^2}}, \frac{\frac{2x_2}{1+x_3}}{1 + \frac{x_1^2}{(1+x_3)^2} + \frac{x_2^2}{(1+x_3)^2}}, \frac{1 - \frac{x_1^2}{(1+x_3)^2} - \frac{x_2^2}{(1+x_3)^2}}{1 + \frac{x_1^2}{(1+x_3)^2} + \frac{x_2^2}{(1+x_3)^2}} \right) \\ &= \left(\frac{(1+x_3)2x_1}{(1+x_3)^2 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{(1+x_3)2x_2}{(1+x_3)^2 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{(1+x_3)^2 - x_1^2 - x_2^2}{(1+x_3)^2 + x_1^2 + x_2^2} \right). \end{aligned}$$

Dado que $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \subset \mathbb{S}^2$, entonces se tiene que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Particularmente $x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2$. Observemos que

$$(1+x_3)^2 + x_1^2 + x_2^2 = (1+x_3)^2 + 1 - x_3^2 = (1+x_3)((1+x_3) + 1 - x_3) = 2(1+x_3),$$

así como

$$(1+x_3)^2 - x_1^2 - x_2^2 = (1+x_3)^2 + x_3^2 - 1 = (1+x_3)((1+x_3) + (x_3 - 1)) = (1+x_3) \cdot 2x_3.$$

Por lo tanto, reescribiendo $\varphi_{\mathbf{N}}^{-1} \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3} \right)$ con las dos observaciones previas:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{N}}^{-1} \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3} \right) &= \left(\frac{(1+x_3)2x_1}{2(1+x_3)}, \frac{(1+x_3)2x_2}{2(1+x_3)}, \frac{(1+x_3)2x_3}{2(1+x_3)} \right) \\ &= \left(\frac{\cancel{(1+x_3)}2x_1}{\cancel{2}(1+x_3)}, \frac{\cancel{(1+x_3)}2x_2}{\cancel{2}(1+x_3)}, \frac{\cancel{(1+x_3)}2x_3}{\cancel{2}(1+x_3)} \right) \\ &= (x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Así, se puede concluir que $\varphi_{\mathbf{N}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{N}}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$, y por lo tanto $\varphi_{\mathbf{N}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{N}} = \text{id}$.

Ahora sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, antes de continuar, observemos que

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1 - \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1} &= \frac{1 - \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}. \end{aligned}$$

Así, calculando $\varphi_{\mathbf{N}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{N}}(x_1, x_2)$ y usando la observación anterior:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{N}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{N}}(x_1, x_2) &= \varphi_{\mathbf{N}} \left(\frac{2x_1}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}, \frac{2x_2}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}, \frac{1 - \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1} \right) \\ &= \left(\frac{\frac{2x_1}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}}{\frac{2}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}}, \frac{\frac{2x_2}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}}{\frac{2}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}} \right) \\ &= \left(\frac{\cancel{2}x_1(\cancel{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1})}{\cancel{2}(\cancel{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1})}, \frac{\cancel{2}x_2(\cancel{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1})}{\cancel{2}(\cancel{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1})} \right) \\ &= (x_1, x_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi_{\mathbf{N}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{N}}(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. Así $\varphi_{\mathbf{N}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{N}} = \text{id}$.

De esta forma, se tiene que efectivamente $\varphi_{\mathbf{N}}$ y $\varphi_{\mathbf{N}}^{-1}$ son inversos [por ambos lados]. Para $\varphi_{\mathbf{S}}$ y $\varphi_{\mathbf{S}}^{-1}$ la demostración procede de forma simétrica. \star

Habiendo encontrado las cartas $(\mathcal{U}_{\mathbf{N}}, \varphi_{\mathbf{N}})$ y $(\mathcal{U}_{\mathbf{S}}, \varphi_{\mathbf{S}})$, se procederá a encontrar las funciones de transición. Pero antes, se denotará por $\mathcal{A}_{\mathbb{S}^2}^{\diamond}$ al atlas de \mathbb{S}^2 con estas cartas. Es decir:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{S}^2}^{\diamond} = \{(\mathcal{U}_{\mathbf{N}}, \varphi_{\mathbf{N}}), (\mathcal{U}_{\mathbf{S}}, \varphi_{\mathbf{S}})\}.$$

Proposición 2.2.2. *Consideremos la esfera \mathbb{S}^2 con su atlas diferenciable $\mathcal{A}_{\mathbb{S}^2}^{\diamond}$. Entonces las funciones de transición $T_{\mathbf{N},\mathbf{S}}$ y $T_{\mathbf{S},\mathbf{N}}$ (transición del hemisferio norte al sur, y viceversa) son:*

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{N},\mathbf{S}} &: \varphi_{\mathbf{N}}(\mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}}) \rightarrow \varphi_{\mathbf{S}}(\mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}}), \\ T_{\mathbf{N},\mathbf{S}} &:= \varphi_{\mathbf{S}} \circ \varphi_{\mathbf{N}}^{-1} : (x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}(x_1, -x_2), \\ T_{\mathbf{S},\mathbf{N}} &: \varphi_{\mathbf{S}}(\mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}}) \rightarrow \varphi_{\mathbf{N}}(\mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}}), \\ T_{\mathbf{S},\mathbf{N}} &:= \varphi_{\mathbf{N}} \circ \varphi_{\mathbf{S}}^{-1} : (y_1, y_2) \mapsto \frac{1}{y_1^2 + y_2^2}(y_1, -y_2). \end{aligned}$$

Demostración. Sea \mathbb{S}^2 con su atlas $\mathcal{A}_{\mathbb{S}^2}^{\diamond}$. Por definición de $\varphi_{\mathbf{N}}^{-1}$ y $\varphi_{\mathbf{S}}$, se tiene que para

$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \varphi_{\mathbf{N}}(\mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}})$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathbf{S}} \circ \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(x_1, x_2) &= \varphi_{\mathbf{S}} \left(\frac{2x_1}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}, \frac{2x_2}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}, \frac{1 - \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{2x_1}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}}{1 - \frac{1 - \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}}, \frac{\frac{-2x_2}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}}{1 - \frac{1 - \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{2x_1}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}}{2\frac{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}}, \frac{\frac{-2x_2}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}}{2\frac{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 1}} \right) \\
&= \left(\frac{x_1}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2}, \frac{-x_2}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2} \right) \\
&= \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2}^2} (x_1, -x_2).
\end{aligned}$$

En virtud de la simetría del argumento, lo mismo ocurre con $\varphi_{\mathbf{N}} \circ \varphi_{\mathbf{S}}^{-1}(y_1, y_2)$. ✱

Teniendo hasta el momento las proyecciones estereográficas, sus inversas y funciones de transición, se pasará a introducir *la esfera de Riemann*, usando los elementos ya establecidos previamente.

Recordando el hecho de que \mathbb{C} es isomorfo a \mathbb{R}^2 . Observemos que para $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, se puede hacer la asignación $z := x_1 + i x_2$, y por consecuencia $\bar{z} = x_1 - i x_2$. De esta forma, se puede ver a la esfera \mathbb{S}^2 como una variedad compleja \mathbb{C} de dimensión 1.

Considerando que $\zeta = y_1 + i y_2$. Observemos que las funciones de transición $T_{\mathbf{N},\mathbf{S}}$ y $T_{\mathbf{S},\mathbf{N}}$ se convierten en:

$$\begin{aligned}
T_{\mathbf{N},\mathbf{S}} : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, & T_{\mathbf{N},\mathbf{S}}(z) &= \frac{1}{z\bar{z}}\bar{z} = \frac{1}{z}, \\
T_{\mathbf{S},\mathbf{N}} : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, & T_{\mathbf{S},\mathbf{N}}(\zeta) &= \frac{1}{\zeta\bar{\zeta}}\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}.
\end{aligned}$$

En particular, las funciones son holomorfas, por lo tanto son C^∞ .

2.3. Haz Tangente de la 2-Esfera

Dado que $\mathcal{A}_{\mathbb{S}^2}^\diamond$ es un atlas diferenciable para \mathbb{S}^2 , entonces es posible construir el haz tangente. De esta forma, para cada $p \in \mathbb{S}^2$, se construirá el espacio tangente $\mathbf{T}_p\mathbb{S}^2$, como un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 . Para hacer esto, se mostrará el isomorfismo entre espacios que hay para $\mathbf{T}_p\mathbb{S}^2$ y \mathbb{R}^3 . Posteriormente para cada $p \in \mathbb{S}^2$, se procederá a definir una base para $\mathbf{T}_p\mathbb{S}^2$. Para todo esto, se partirá de las definiciones de la sección 1.2.

Definición 2.3.1. Consideremos la esfera \mathbb{S}^2 , y sea $p \in \mathbb{S}^2$. Entonces para $i \in \{1, 2\}$ define:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}(p) &:= \frac{\partial \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}}{\partial x_i}(x_1, x_2), \\ \frac{\partial}{\partial y_i}(p) &:= \frac{\partial \varphi_{\mathbf{S}}^{-1}}{\partial y_i}(y_1, y_2).\end{aligned}$$

De esta forma, se tiene que para $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \subset \mathbb{S}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}(p) &= \frac{\partial \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \left(\frac{2(-x_1^2 + x_2^2 + 1)}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{-4x_1x_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{-4x_1}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} \right) \in \mathbb{R}^3, \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(p) &= \frac{\partial \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \left(\frac{-4x_1x_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{2(x_1^2 - x_2^2 + 1)}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{-4x_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} \right) \in \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Y de forma similar para $q \in \mathcal{U}_{\mathbf{S}} \subset \mathbb{S}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_1}(q) &= \frac{\partial \varphi_{\mathbf{S}}^{-1}}{\partial y_1}(y_1, y_2) = \left(\frac{2(-y_1^2 + y_2^2 + 1)}{(1 + y_1^2 + y_2^2)^2}, \frac{4y_1y_2}{(1 + y_1^2 + y_2^2)^2}, \frac{4y_1}{(1 + y_1^2 + y_2^2)^2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y_2}(q) &= \frac{\partial \varphi_{\mathbf{S}}^{-1}}{\partial y_2}(y_1, y_2) = \left(\frac{-4y_1y_2}{(1 + y_1^2 + y_2^2)^2}, \frac{-2(y_1^2 - y_2^2 + 1)}{(1 + y_1^2 + y_2^2)^2}, \frac{4y_2}{(1 + y_1^2 + y_2^2)^2} \right).\end{aligned}$$

Observación 2.3.1. Observemos que para $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}}$ o $q \in \mathcal{U}_{\mathbf{S}}$, se tiene que:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial x_2}(p) \right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

o bien

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}(q), \frac{\partial}{\partial y_2}(q) \right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

son linealmente independientes. Más aún,

$$\text{Dim} \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial x_2}(p) \right\} \right) = 2 = \text{Dim} \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}(q), \frac{\partial}{\partial y_2}(q) \right\} \right), \quad (2.1)$$

y así, de $\text{Dim}(\mathbf{T}_p\mathbb{S}^2) = 2$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_p\mathcal{U}_{\mathbf{N}} &\cong \text{Gen} \left\{ \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial x_2}(p) \right\} \right\}, \\ \mathbf{T}_q\mathcal{U}_{\mathbf{S}} &\cong \text{Gen} \left\{ \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}(q), \frac{\partial}{\partial y_2}(q) \right\} \right\}.\end{aligned}$$

En estos casos, el isomorfismo está dado por \mathcal{T} , introducido en el próximo lema.

Lema 2.3.1. Consideremos la esfera \mathbb{S}^2 , con su atlas diferenciable $\mathcal{A}_{\mathbb{S}^2}^\diamond$. Sea $p \in \mathbb{S}^2$, y sea $[c] \in \mathbf{T}_p\mathbb{S}^2$. Define el mapeo

$$\mathcal{Y} : \mathbf{T}_p\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{Y}([c]) := c'(0).$$

Entonces \mathcal{Y} define un isomorfismo entre $\mathbf{T}_p\mathbb{S}^2$ y $\mathcal{Y}(\mathbf{T}_p\mathbb{S}^2) \subset \mathbb{R}^3$.

Demostración. En virtud de la definición de \mathcal{Y} , basta mostrar que \mathcal{Y} no depende del representante. De esta forma, sea $p \in \mathbb{S}^2$, entonces para $i \in \{\mathbf{N}, \mathbf{S}\}$, y $[c], [\gamma] \in \mathbf{T}_p\mathbb{S}^2$ tal que $[c] \sim [\gamma]$, se tiene que

$$(\varphi_i \circ c)'(0) = (\varphi_i \circ \gamma)'(0).$$

Dado que $\ker((\varphi_i^{-1})') = \{0\}$ por la ecuación (2.1), entonces ocurre que $[c] \sim [\gamma]$, si y sólo si

$$(\varphi_i^{-1})' \circ (\varphi_i \circ c)'(0) = (\varphi_i^{-1})' \circ (\varphi_i \circ \gamma)'(0).$$

De esta forma

$$\begin{aligned} c'(0) &= (\varphi_i^{-1} \circ \varphi_i \circ c)'(0) = (\varphi_i^{-1})'(\varphi_i(p)) \circ (\varphi_i \circ c)'(0), \\ &= (\varphi_i^{-1})'(\varphi_i(p)) \circ (\varphi_i \circ \gamma)'(0) = (\varphi_i^{-1} \circ \varphi_i \circ \gamma)'(0), \\ &= \gamma'(0). \end{aligned}$$

Así, se obtiene que para cuando $[c] \sim [\gamma]$, $\mathcal{Y}([c]) = \mathcal{Y}([\gamma])$. Más aún, \mathcal{Y} es lineal: sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $v, w \in \mathbb{R}^2$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}([c_{\alpha v + \beta w}]) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_i^{-1}(\varphi_i(p) + t(\alpha v + \beta w)), \\ &= (\varphi_i^{-1})'(\varphi_i(p)) \cdot (\alpha v + \beta w), \\ &= \alpha (\varphi_i^{-1})'(\varphi_i(p)) \cdot v + \beta (\varphi_i^{-1})'(\varphi_i(p)) \cdot w, \\ &= \alpha \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_i^{-1}(\varphi_i(p) + t \cdot v) + \beta \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_i^{-1}(\varphi_i(p) + t \cdot w), \\ &= \alpha \mathcal{Y}([c_v]) + \beta \mathcal{Y}([c_w]). \end{aligned}$$

Por otro lado, como $\ker((\varphi_i^{-1})') = \{0\}$ por la ecuación (2.1), entonces

$$\mathcal{Y}([c]) = (\varphi_i^{-1})'(\varphi_i(p)) \cdot v = 0,$$

si y sólo si $v = 0$, o en otras palabras $[c_v] = 0$. De esta forma se concluye que \mathcal{Y} es un isomorfismo entre $\mathbf{T}_p\mathbb{S}^2$ y $\mathcal{Y}(\mathbf{T}_p\mathbb{S}^2) \subset \mathbb{R}^3$. ✱

Definición 2.3.2. Sea $p \in \mathbb{S}^2$, entonces define:

$$\begin{aligned} g_p &: \mathbf{T}_p\mathbb{S}^2 \times \mathbf{T}_p\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \\ g_p([c], [\gamma]) &:= \langle \mathcal{Y}([c]), \mathcal{Y}([\gamma]) \rangle, \end{aligned}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto punto canónico de \mathbb{R}^3 .

Proposición 2.3.1. Sea $p \in \mathbb{S}^2$, en virtud de la definición anterior se tiene que g_p proporciona una métrica Riemanniana para \mathbb{S}^2 . Por lo tanto, \mathbb{S}^2 es una variedad Riemanniana.

Demostración. En virtud de las propiedades de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, para $p \in \mathbb{S}^2$, g_p es bilineal, positivo y simétrico, ya que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ lo es. Más aún $\text{Ker}(\mathcal{Y}) = \{0\}$, entonces g_p es positivo definido.

Ahora, sin pérdida de la generalidad, para $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}}$ define:

$$g_{ij}(x_1, x_2) := g_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right).$$

De esta forma se obtiene

$$\begin{aligned} g_{11}(x_1, x_2) &= \left\langle \left(\frac{2(1 - x_1^2 + x_2^2)}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{-4x_1x_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{-4x_1}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} \right), \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{2(1 - x_1^2 + x_2^2)}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{-4x_1x_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{-4x_1}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} \right) \right\rangle \\ &= \frac{4}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{12}(x_1, x_2) &= \left\langle \left(\frac{2(1 - x_1^2 + x_2^2)}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{-4x_1x_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{-4x_1}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} \right), \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{-4x_1x_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{2(1 + x_1^2 - x_2^2)}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{-4x_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} \right) \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por simetría, $g_{12}(x_1, x_2) = g_{21}(x_1, x_2) = 0$,

$$\begin{aligned} g_{22}(x_1, x_2) &= \left\langle \left(\frac{-4x_1x_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{2(1 + x_1^2 - x_2^2)}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{-4x_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} \right), \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{-4x_1x_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{2(1 + x_1^2 - x_2^2)}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{-4x_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} \right) \right\rangle \\ &= \frac{4}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}. \end{aligned}$$

De forma análoga se obtiene

$$\begin{aligned} g_{11}(y_1, y_2) &= \frac{4}{(1 + y_1^2 + y_2^2)^2}, \\ g_{12}(y_1, y_2) &= 0, \\ g_{21}(y_1, y_2) &= 0, \\ g_{22}(y_1, y_2) &= \frac{4}{(1 + y_1^2 + y_2^2)^2}. \end{aligned}$$

Así, g_{ij} también es diferenciable. Consideremos $X, V \in \Gamma^\infty(\mathbf{TS}^2)$, entonces para la carta $(\mathcal{U}_{\mathbf{N}}, \varphi_{\mathbf{N}})$:

$$\begin{aligned} g_p(X(x_1, x_2), V(x_1, x_2)) &= g_p \left(\sum_{i=1}^2 X^i(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^2 V^i(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 X^i(x_1, x_2) V^j(x_1, x_2) g_{ij}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

es diferenciable porque X^i, V^j, g_{ij} lo son para $i, j = 1, 2$. De forma análoga se obtiene la diferenciable para la carta $(\mathcal{U}_{\mathbf{S}}, \varphi_{\mathbf{S}})$. \star

Definición 2.3.3. Sea $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}}$ y supongase que $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$ una base para $\mathbf{T}_p \mathbb{S}^2$. Consideremos que

$$\|X(p)\| := \sqrt{g_p(X(p), X(p))}, \text{ para todo } X(p) \in \mathbf{T}_p \mathbb{S}^2,$$

Lema 2.3.2. Sea $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}}$. Entonces para $i \in \{1, 2\}$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right\| = \frac{2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \quad (2.2)$$

Demostración. Sin pérdida de la generalidad, sea $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}}$ y supongamos que $i = 1$. Dado que $\frac{\partial}{\partial x_1}(p) \in \mathbf{T}_p \mathbb{S}^2$, y $p = \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(x_1, x_2)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}(p) &= \frac{\partial \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ &= \left(\frac{2(1 - x_1^2 + x_2^2)}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{-4x_1 x_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{-4x_1}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} \right). \end{aligned}$$

Ahora calcularemos la norma de acuerdo a la definición anterior:

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_1}(p) \right\| = \sqrt{g_p \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial x_1}(p) \right)}.$$

Observemos que en la proposición 2.3.1, el término $g_{1,1}(x_1, x_2)$ representa exactamente lo que queremos calcular. Por lo tanto para $i \in \{1, 2\}$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right\| = \sqrt{\frac{4}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}} = \frac{2}{1 + x_1^2 + x_2^2}.$$

\star

Observación. Observemos que para el lema anterior, de forma análoga se puede realizar el cálculo para $i \in \{1, 2\}$ y $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{S}}$ para así obtener

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y_i}(p) \right\| = \sqrt{\frac{4}{(1 + y_1^2 + y_2^2)^2}} = \frac{2}{1 + y_1^2 + y_2^2}. \quad (2.3)$$

Definición 2.3.4. Sea $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}}$ y supongase que $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$ una base para $\mathbf{T}_p \mathbb{S}^2$. Considerando el resultado anterior, el conjunto $\{e_1^{\mathbf{N}}, e_2^{\mathbf{N}}\}$ definirá la base ortogonal dada por

$$e_1^{\mathbf{N}} := \left\| \frac{\partial}{\partial x_1}(p) \right\|^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1}(p) = \frac{1 + x_1^2 + x_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_1}(p),$$

$$e_2^{\mathbf{N}} := \left\| \frac{\partial}{\partial x_2}(p) \right\|^{-1} \frac{\partial}{\partial x_2}(p) = \frac{1 + x_1^2 + x_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_2}(p).$$

De forma análoga se definirá $\{e_1^{\mathbf{S}}, e_2^{\mathbf{S}}\}$ para la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2} \right\}$ cuando $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{S}}$:

$$e_1^{\mathbf{S}} := \left\| \frac{\partial}{\partial y_1}(p) \right\|^{-1} \frac{\partial}{\partial y_1}(p) = \frac{1 + y_1^2 + y_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial y_1}(p),$$

$$e_2^{\mathbf{S}} := \left\| \frac{\partial}{\partial y_2}(p) \right\|^{-1} \frac{\partial}{\partial y_2}(p) = \frac{1 + y_1^2 + y_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial y_2}(p).$$

Para hacer esta identificación entre vectores tangentes de $\mathbf{T}_p \mathcal{U}_{\mathbf{N}}$ y $\mathbf{T}_p \mathcal{U}_{\mathbf{S}}$, de acuerdo con el teorema 1.2.1 y ecuación (1.2), se obtiene por medio de la multiplicación matricial:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{S}, \mathbf{N}}(p) = (\varphi_{\mathbf{S}} \circ \varphi_{\mathbf{N}}^{-1})'(\varphi_{\mathbf{N}}(p)),$$

con $\varphi_{\mathbf{N}}(p) = (x_1, x_2)$, así como

$$\begin{aligned} (y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)) &= \varphi_{\mathbf{S}} \circ \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(x_1, x_2) \\ &= \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right). \end{aligned}$$

De esta forma:

$$(\varphi_{\mathbf{S}} \circ \varphi_{\mathbf{N}}^{-1})'(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^2 \tag{2.4}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & \frac{-2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Ahora, para $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \setminus \{\mathbf{N}\}$, denota:

$$\varphi_{\mathbf{N}}(p) = (x_1, x_2) = r(\cos \theta, \sin \theta) = r e^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Entonces observa que

$$\begin{aligned} \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} &= \frac{-r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{r^4} = \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{r^2} = \frac{-\cos 2\theta}{r^2}, \\ \frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} &= \frac{r^2 (2 \cos \theta \sin \theta)}{r^4} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \frac{\sin 2\theta}{r^2}. \end{aligned}$$

Así, la matriz de (2.5) se puede reescribir de la forma

$$(\varphi_{\mathbf{S}} \circ \varphi_{\mathbf{N}}^{-1})'(r, \theta) = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Denotando como $\mathcal{T}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}(p) := (\varphi_{\mathbf{S}} \circ \varphi_{\mathbf{N}}^{-1})'(\varphi_{\mathbf{N}}(p))$, se tiene que

$$\mathcal{T}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}(p) = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Observemos que $\mathcal{T}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}(p) \cdot (\mathcal{T}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}(p))^* = \frac{1}{r^4} \mathbb{1}_{2 \times 2}$, por lo tanto, $r^2 \mathcal{T}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}(p) \in \text{SO}(2)$. Más aún,

$$(r^2 \mathcal{T}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}(p))^* = (r^2 \mathcal{T}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}(p))^{-1} = r^2 \mathcal{T}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}(p).$$

De esta forma, para $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}}$, las funciones de transición del haz tangente \mathbf{TS}^2 , están dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}(p) &= \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \setminus \{\mathbf{N}\}, \\ \mathcal{T}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}(p) &= \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad p \in \mathcal{U}_{\mathbf{S}} \setminus \{\mathbf{S}\}. \end{aligned}$$

Antes de proceder, mencionaremos la forma matricial asociada a un número complejo. Consideremos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces existe un isomorfismo natural entre el plano cartesiano \mathbb{R}^2 y la línea compleja \mathbb{C} dado por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + iy. \quad (2.6)$$

Ahora para $z \in \mathbb{C}$, vamos a actuar $x + iy$ de la siguiente forma

$$(x + iy) \xrightarrow{z} z \cdot (x + iy) = (\text{Re}z + i \text{Im}z)(x + iy) = (\text{Re}z x - \text{Im}z y) + i(\text{Im}z x + \text{Re}z y). \quad (2.7)$$

Por otro lado, recordando el isomorfismo (2.6) tenemos que

$$(\text{Re}z x - \text{Im}z y) + i(\text{Im}z x + \text{Re}z y) \mapsto \begin{pmatrix} \text{Re}z x - \text{Im}z y \\ \text{Im}z x + \text{Re}z y \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Observemos que

$$\begin{pmatrix} \text{Re}z x - \text{Im}z y \\ \text{Im}z x + \text{Re}z y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re}z & -\text{Im}z \\ \text{Im}z & \text{Re}z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

donde la matriz del lado derecho de (2.9) está en $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, por lo tanto, gracias a (2.6), (2.7), (2.8) y (2.9), tenemos la siguiente cadena

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + iy \xrightarrow{z} z \cdot (x + iy) \mapsto \begin{pmatrix} \text{Re}z x - \text{Im}z y \\ \text{Im}z x + \text{Re}z y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re}z & -\text{Im}z \\ \text{Im}z & \text{Re}z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

En virtud a lo mencionado anteriormente, y del hecho que las matrices $\mathcal{T}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}(p)$ y $\mathcal{T}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}(p)$ son la representación matricial de números complejos, se tiene que el haz tangente \mathbf{TS}^2 es un haz vectorial complejo, cuyas funciones de transición están dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}(p) &= -\frac{e^{-2i\theta}}{r^2}, & p &= \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(re^{i\theta}), \\ \mathcal{T}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}(p) &= -\frac{e^{2i\theta}}{r^2}, & p &= \varphi_{\mathbf{S}}^{-1}(re^{i\theta}).\end{aligned}$$

De esta forma, podemos reescribir estas matrices de rotación como elementos $z \in \mathbb{C}$, pasando así nuestros cálculos a la variable compleja. Observamos que el número complejo asociado a la matriz

$$\begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \text{ es } -\cos 2\theta + i \sin 2\theta,$$

y al reescribir en términos de z

$$\begin{aligned}-\cos 2\theta + i \sin 2\theta &= -(\cos 2\theta - i \sin 2\theta) \\ &= -e^{-2i\theta} \\ &= -\frac{\|z\|^2}{z^2} \\ &= -\frac{\bar{z}}{z}.\end{aligned}$$

De forma análoga para la matriz

$$\begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix},$$

se le identifica el número complejo $-\cos 2\theta - i \sin 2\theta$, el cuál cumple con:

$$\begin{aligned}-\cos 2\theta - i \sin 2\theta &= -(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ &= -e^{2i\theta} \\ &= \frac{-\zeta^2}{\|\zeta\|^2} \\ &= \frac{-\zeta}{\bar{\zeta}}.\end{aligned}$$

Proposición 2.3.2. *Las funciones de transición en las bases $\{e_1^{\mathbf{N}}, e_2^{\mathbf{N}}\}$ y $\{e_1^{\mathbf{S}}, e_2^{\mathbf{S}}\}$ del haz tangente de la esfera \mathbf{TS}^2 están dadas por las matrices*

$$\begin{aligned}t_{SN}(p) &= \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}, & p &\in \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \setminus \{\mathbf{N}\}, & p &= \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(re^{i\theta}), \\ t_{NS}(p) &= \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}, & p &\in \mathcal{U}_{\mathbf{S}} \setminus \{\mathbf{S}\}, & p &= \varphi_{\mathbf{S}}^{-1}(re^{i\theta}).\end{aligned}$$

Además \mathbf{TS}^2 es un haz vectorial complejo con funciones de transición

$$\begin{aligned} t_{SN}(p) &= -e^{-2i\theta} = -\frac{\bar{z}}{z}, & z &= \varphi_{\mathbf{N}}(p) = re^{i\theta}, \\ t_{NS}(p) &= -e^{2i\theta} = -\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}, & \zeta &= \varphi_{\mathbf{S}}(p) = re^{i\theta}. \end{aligned}$$

Demostración. Por la definición 2.3.3 y el argumento previo a la proposición. ✱

2.4. Haces Lineales Complejos de la 2-Esfera

Por los resultados anteriores, podemos considerar el atlas $\mathcal{A}_{\mathbb{S}^2}^{\diamond} = \{(\mathcal{U}_{\mathbf{N}}, \varphi_{\mathbf{N}}), (\mathcal{U}_{\mathbf{S}}, \varphi_{\mathbf{S}})\}$ dado por la proyección estereográfica y dada una función (diferenciable)

$$\mathcal{T}_{\mathbf{N},\mathbf{S}} : \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}} \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Construimos un haz vectorial sobre \mathbb{S}^2 por

$$\mathcal{E} := (\mathcal{U}_{\mathbf{N}} \times \mathbb{C}^n) \amalg (\mathcal{U}_{\mathbf{S}} \times \mathbb{C}^n) / \sim,$$

con la relación de equivalencia

$$\begin{aligned} (p_i, v_i) \in \mathcal{U}_i \times \mathbb{C}^n, (p_j, v_j) \in \mathcal{U}_j \times \mathbb{C}^n, & \text{ definida como} \\ (p_i, v_i) \sim (p_j, v_j) & \end{aligned}$$

si y sólo si $p_i = p_j$, $v_i = \mathcal{T}_{i,j}(p_i)v_j$, para $i, j \in \{\mathbf{N}, \mathbf{S}\}$, en donde para todo $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}}$,

$$\mathcal{T}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}(p) := (\mathcal{T}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}(p))^{-1},$$

y $\mathcal{T}_{\mathbf{S},\mathbf{S}} = \mathcal{T}_{\mathbf{N},\mathbf{N}} = \mathrm{id}$. Para $i, j, k \in \{\mathbf{N}, \mathbf{S}\}$, las funciones $\{\mathcal{T}_{\mathbf{N},\mathbf{N}}, \mathcal{T}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}, \mathcal{T}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}, \mathcal{T}_{\mathbf{S},\mathbf{S}}\}$ cumplen automáticamente las propiedades (1.5) de la página 12. Notemos que III se cumple porque dos de los índices $\{i, j, k\}$ son iguales.

Definición 2.4.1 (Haz lineal complejo con número de giro $m \in \mathbb{Z}$). El haz lineal complejo con número de giro $m \in \mathbb{Z}$ está definido por

$$\mathcal{E}_m := (\mathcal{U}_{\mathbf{N}} \times \mathbb{C}) \amalg (\mathcal{U}_{\mathbf{S}} \times \mathbb{C}) / \sim,$$

con la relación de equivalencia

$$\begin{aligned} (p_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{N}}) \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \times \mathbb{C}, (p_{\mathbf{S}}, f_{\mathbf{S}}) \in \mathcal{U}_{\mathbf{S}} \times \mathbb{C}, & \text{ y} \\ (p_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{N}}) \sim (p_{\mathbf{S}}, f_{\mathbf{S}}), & \end{aligned}$$

si y sólo si $p_{\mathbf{N}} = p_{\mathbf{S}}$ y $f_{\mathbf{N}} = \mathcal{T}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m(p_{\mathbf{S}})f_{\mathbf{S}}$, donde

$$\mathcal{T}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m(p_{\mathbf{S}}) := \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^{\frac{m}{2}} \quad \text{y } z = \varphi_{\mathbf{N}}(p_{\mathbf{N}}) = \varphi_{\mathbf{N}}(p_{\mathbf{S}}).$$

Notemos que para $m \in \mathbb{Z}$, la función $\mathcal{J}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m(p_{\mathbf{S}})$ está bien definida ya que para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, considerando su forma polar $z = re^{i\theta}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m(p_{\mathbf{S}}) &= \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^{\frac{m}{2}} \\ &= \left(\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}}\right)^{\frac{m}{2}} = \left(e^{-2i\theta}\right)^{\frac{m}{2}} = e^{-im\theta}. \end{aligned}$$

Observación.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &\cong (\varphi_{\mathbf{N}}(\mathcal{U}_{\mathbf{N}}) \times \mathbb{C}) \amalg (\varphi_{\mathbf{S}}(\mathcal{U}_{\mathbf{S}}) \times \mathbb{C}) / \sim, \\ (z, f_{\mathbf{N}}) &\in \varphi_{\mathbf{N}}(\mathcal{U}_{\mathbf{N}}) \times \mathbb{C}, \quad (\zeta, f_{\mathbf{S}}) \in \varphi_{\mathbf{S}}(\mathcal{U}_{\mathbf{S}}) \times \mathbb{C}, \quad y \\ (z, f_{\mathbf{N}}) &\sim (\zeta, f_{\mathbf{S}}), \end{aligned}$$

si y sólo si $z = 1/\zeta$, $f_{\mathbf{N}} = (\bar{z}/z)^{\frac{m}{2}} f_{\mathbf{S}}$, con el isomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{E}_m &\rightarrow (\varphi_{\mathbf{N}}(\mathcal{U}_{\mathbf{N}}) \times \mathbb{C}) \amalg (\varphi_{\mathbf{S}}(\mathcal{U}_{\mathbf{S}}) \times \mathbb{C}) / \sim, \\ \psi([(p_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{N}})]) &= [(\varphi_{\mathbf{N}}(p_{\mathbf{N}}), f_{\mathbf{N}})] \quad , \quad (p_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{N}}) \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \times \mathbb{C}, \\ \psi([(p_{\mathbf{S}}, f_{\mathbf{S}})]) &= [(\varphi_{\mathbf{S}}(p_{\mathbf{S}}), f_{\mathbf{S}})] \quad , \quad (p_{\mathbf{S}}, f_{\mathbf{S}}) \in \mathcal{U}_{\mathbf{S}} \times \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Proposición 2.4.1. Sean $m \in \mathbb{Z}$ y

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{M}}_m &:= \left\{ (g_{\mathbf{N}}, g_{\mathbf{S}}) \in C(\mathcal{U}_{\mathbf{N}}) \times C(\mathcal{U}_{\mathbf{S}}) : g_{\mathbf{N}}(p) = \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^{\frac{m}{2}} g_{\mathbf{S}}(p) \quad \forall p = \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(z) \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}}, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}, \\ \mathfrak{M}_m &:= \left\{ (f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}}) \in C(\mathbb{C}) \times C(\mathbb{C}) : f_{\mathbf{N}}(z) = \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^{\frac{m}{2}} f_{\mathbf{S}}\left(\frac{1}{z}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}. \end{aligned}$$

Ahora, en virtud de la estructura de $C(\mathbb{S}^2)$ -módulo dado por

$$\Phi(g_{\mathbf{N}}, g_{\mathbf{S}}) := \left(\Phi|_{\mathcal{U}_{\mathbf{N}}} g_{\mathbf{N}}, \Phi|_{\mathcal{U}_{\mathbf{S}}} g_{\mathbf{S}} \right)$$

para todo $(g_{\mathbf{N}}, g_{\mathbf{S}}) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_m$, y

$$\Phi(f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}}) := \left((\Phi \circ \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}) \cdot f_{\mathbf{N}}, (\Phi \circ \varphi_{\mathbf{S}}^{-1}) \cdot f_{\mathbf{S}} \right)$$

para todo $(f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}}) \in \mathfrak{M}_m$, $\Phi \in C(\mathbb{S}^2)$, se tiene que

$$\Gamma(\mathcal{E}_m) \cong \widetilde{\mathfrak{M}}_m \cong \mathfrak{M}_m.$$

Demostración. Sea $s : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathcal{E}_m$ una sección. Entonces para todo $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}}$ podemos escribir

$$s(p) = [(p, f_{\mathbf{N}}(p))], \quad \text{con } (p, f_{\mathbf{N}}(p)) \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \times \mathbb{C}.$$

Y análogamente para todo $q \in \mathcal{U}_{\mathbf{S}}$

$$s(q) = [(q, f_{\mathbf{S}}(q))],$$

con $(q, f_{\mathbf{S}}(q)) \in \mathcal{U}_{\mathbf{S}} \times \mathbb{C}$. Definimos

$$\begin{aligned} \psi : \Gamma(\mathcal{E}_m) &\rightarrow \widetilde{\mathfrak{M}}_m, \text{ por,} \\ \psi(s) &= (f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}}), \end{aligned}$$

así como

$$\begin{aligned} \Phi : \widetilde{\mathfrak{M}}_m &\rightarrow \Gamma(\mathcal{E}_m), \text{ por,} \\ \Phi((f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}}))(p) &:= [(p, f_{\mathbf{N}}(p))], \quad p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}}, \\ \Phi((f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}}))(q) &:= [(q, f_{\mathbf{S}}(q))], \quad q \in \mathcal{U}_{\mathbf{S}}. \end{aligned}$$

Observemos que Φ está bien definido por la definición de $\widetilde{\mathfrak{M}}_m$ y la definición 2.4.1. Es evidente que ψ y Φ son $C(\mathbb{S}^2)$ -lineal. Además $\psi \circ \Phi = \text{id}$, $\Phi \circ \psi = \text{id}$, entonces $\Psi = \psi^{-1}$. Un isomorfismo $C(\mathbb{S}^2)$ -lineal entre \mathfrak{M}_m y $\widetilde{\mathfrak{M}}_m$ está dado por

$$\begin{aligned} \Psi : \widetilde{\mathfrak{M}}_m &\rightarrow \mathfrak{M}_m, \\ \Psi((f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}})) &:= (f_{\mathbf{N}} \circ \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}, f_{\mathbf{S}} \circ \varphi_{\mathbf{S}}^{-1}). \end{aligned}$$

✱

Dado que $\mathcal{U}_{\mathbf{N}} \subset \mathbb{S}^2$ es denso, entonces toda sección $s \in \Gamma(\mathcal{E}_m)$ está únicamente determinada por su restricción $s|_{\mathcal{U}_{\mathbf{N}}}$ ya que para $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}}$

$$s((0, 0, -1)) = \lim_{p \rightarrow (0, 0, -1)} s(p),$$

por continuidad. Ahora aplicando el isomorfismo $\Gamma(\mathcal{E}_m) \cong \mathfrak{M}_m$, se ve que para toda sección continua está únicamente determinado por $f_{\mathbf{N}} \in C(\mathbb{C})$.

Entonces tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.4.1. Sean $m \in \mathbb{Z}$ y

$$\mathfrak{F}_m := \left\{ f \in C(\mathbb{C}) : \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^{\frac{m}{2}} f(z) \in \mathbb{C} \text{ existe} \right\},$$

con la estructura de un $C(\mathbb{S}^2)$ -módulo dado por $\Phi \circ f := (\Phi \cdot \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}) \circ f$ para todo $\Phi \in C(\mathbb{S}^2)$. Entonces $\mathfrak{F}_m \cong \mathfrak{M}_m$ como $C(\mathbb{S}^2)$ -módulos con el isomorfismo

$$\psi : \mathfrak{M}_m \rightarrow \mathfrak{F}_m,$$

dado por $\Phi(f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}}) = f_{\mathbf{N}}$.

Demostración. Obviamente Φ es $C(\mathbb{S}^2)$ -lineal. Además, $f_{\mathbf{N}} \in \mathfrak{F}_m$ porque

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^{\frac{m}{2}} f_{\mathbf{N}}(z) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)^{\frac{m}{2}} f_{\mathbf{S}} \left(\frac{1}{z} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} f_{\mathbf{S}} \left(\frac{1}{z} \right) = f_{\mathbf{S}}(0) \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

El inverso de Φ está dado por ψ de la proposición anterior (2.4.1)

$$\psi : \mathfrak{F}_m \rightarrow \mathfrak{M}_m, \quad \psi(f) := (f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}}),$$

donde

$$f_{\mathbf{N}} := f, \text{ y}$$

$$f_{\mathbf{S}}(\zeta) := \begin{cases} \left(\frac{\bar{\zeta}}{\zeta}\right)^{\frac{m}{2}} f\left(\frac{1}{\zeta}\right), & \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{\frac{m}{2}} f(z), & \zeta = 0 \end{cases}$$

Por definición $f_{\mathbf{N}}(z) = (\bar{z}/z)^{\frac{m}{2}} f_{\mathbf{S}}(1/z)$. Además, $f_{\mathbf{S}} \in C(\mathcal{U})_{\mathbf{S}}$ porque $f \in C(\mathbb{C})$, y

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow 0} f_{\mathbf{S}}(\zeta) &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{\zeta}}{\zeta}\right)^{\frac{m}{2}} f\left(\frac{1}{\zeta}\right), \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{\frac{m}{2}} f(z) = f_{\mathbf{S}}(0). \end{aligned}$$



Definición 2.4.2 (Partición de unidad). Sea $p \in \mathbb{S}^2$. Definimos las siguientes funciones

$$\alpha_{\mathbf{N}}(p) := \begin{cases} \frac{1}{1+(z\bar{z})^m}, & p = \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(z), z \in \mathbb{C} \\ 0, & p = (0, 0, -1) \end{cases}, \quad \alpha_{\mathbf{S}}(q) := \begin{cases} \frac{1}{1+(\zeta\bar{\zeta})^m}, & p = \varphi_{\mathbf{S}}^{-1}(\zeta), \zeta \in \mathbb{C} \\ 0, & q = (0, 0, 1) \end{cases},$$

Observación 2.4.1. Sea $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$. Recordando que $z(\zeta) = \varphi_{\mathbf{S}} \circ \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$, se cumple la siguiente igualdad:

$$\alpha_{\mathbf{N}}(p) + \alpha_{\mathbf{S}}(p) = \frac{1}{1+(z\bar{z})^m} + \frac{1}{1+(\zeta\bar{\zeta})^m} = \frac{1}{1+(z\bar{z})^m} + \frac{(z\bar{z})^m}{1+(z\bar{z})^m} = 1.$$

Más aún, por continuidad se tiene que para todo $p \in \mathbb{S}^2$:

$$\alpha_{\mathbf{N}}(p) + \alpha_{\mathbf{S}}(p) = 1.$$

Lema 2.4.1. Sean $(f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}}) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_m$ y $i, j \in \{\mathbf{N}, \mathbf{S}\}$. Entonces

(i) Las funciones

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}}\mathcal{J}_{i,j}^m &: \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbb{C}, \\ \sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}}\mathcal{J}_{i,j}^m f_{\mathbf{S}} &: \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbb{C} \end{aligned}$$

tienen una única extensión a funciones continuas sobre $\mathcal{U}_{\mathbf{N}}$.

(ii) *Las funciones*

$$\begin{aligned}\sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}}\mathcal{T}_{i,j}^m &: \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbb{C}, \\ \sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}}\mathcal{T}_{i,j}^m f_{\mathbf{N}} &: \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbb{C}\end{aligned}$$

tienen una única extensión a funciones continuas sobre $\mathcal{U}_{\mathbf{S}}$.

(iii) *Las funciones*

$$\begin{aligned}\sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}\alpha_{\mathbf{S}}}\mathcal{T}_{i,j}^m &: \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbb{C}, \\ \sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}\alpha_{\mathbf{S}}}\mathcal{T}_{i,j}^m f_{\mathbf{N}} &: \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbb{C}, \\ \sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}\alpha_{\mathbf{S}}}\mathcal{T}_{i,j}^m f_{\mathbf{S}} &: \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbb{C}\end{aligned}$$

tienen una única extensión a funciones continuas sobre \mathbb{S}^2 .

Demostración. Como $\mathcal{T}_{i,j}^m(p) \in U(1) = \{u \in \mathbb{C} : |u| = 1\}$, se tiene $|\mathcal{T}_{i,j}^m(p)| = 1$ para todo $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}}$.

Por la definición de $\widetilde{\mathfrak{M}}_m$, $|f_{\mathbf{S}}| \in C(\mathcal{U}_{\mathbf{S}})$ y

$$\lim_{p \rightarrow \mathbf{N}} |f_{\mathbf{S}}|(p) = \lim_{p \rightarrow \mathbf{N}} |\mathcal{T}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}^m(p) f_{\mathbf{N}}(p)| = \lim_{p \rightarrow \mathbf{N}} |f_{\mathbf{N}}(p)| = |f_{\mathbf{N}}(\mathbf{N})|,$$

entonces $|f_{\mathbf{S}}|$ tiene una única extensión a función continua sobre \mathbb{S}^2 . Luego, $|f_{\mathbf{S}}|$ es acotado, es decir, existe $c > 0$ tal que $|f_{\mathbf{S}}(p)| \leq c$ para todo $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{S}}$. Ahora

$$0 \leq \lim_{p \rightarrow \mathbf{N}} |\sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}(p)} \mathcal{T}_{i,j}^m(p) f_{\mathbf{S}}(p)| \leq c \lim_{p \rightarrow \mathbf{N}} \sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}(p)} = 0,$$

por lo tanto

$$\left(\sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}}\mathcal{T}_{i,j}^m f_{\mathbf{S}}\right)(\mathbf{N}) := \lim_{p \rightarrow \mathbf{N}} \sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}(p)} \mathcal{T}_{i,j}^m(p) f_{\mathbf{S}}(p) = 0$$

define la única extensión a una función continua sobre $\mathcal{U}_{\mathbf{N}}$.

Análogamente,

$$\lim_{p \rightarrow \mathbf{N}} |\sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}(p)} \mathcal{T}_{i,j}^m(p)| = \lim_{p \rightarrow \mathbf{N}} \sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}(p)} = 0$$

implica que

$$\left(\sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}}\mathcal{T}_{i,j}^m\right)(\mathbf{N}) := \lim_{p \rightarrow \mathbf{N}} \sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}(p)} \mathcal{T}_{i,j}^m(p) = 0$$

define la única extensión a una función continua sobre $\mathcal{U}_{\mathbf{N}}$. Esto concluye la demostración de (i). De forma similar se demuestra (ii). Ahora (iii) es una consecuencia de (i) y (ii).

Por ejemplo

$$\sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}}f_{\mathbf{S}} \in C(\mathcal{U}_{\mathbf{S}}) \text{ y } \sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}}\mathcal{J}_{i,j}^m$$

tiene una única extensión a una función continua sobre $\mathcal{U}_{\mathbf{S}}$ por **(ii)**, entonces

$$\sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}\alpha_{\mathbf{N}}}\mathcal{J}_{i,j}^m f_{\mathbf{S}} = (\sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}}f_{\mathbf{S}}) (\sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}}\mathcal{J}_{i,j}^m)$$

tiene una única extensión a una función continua sobre $\mathcal{U}_{\mathbf{S}}$. De forma similar, por **(i)**,

$$\sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}\alpha_{\mathbf{N}}}\mathcal{J}_{i,j}^m f_{\mathbf{S}} = \sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}} (\sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}}\mathcal{J}_{i,j}^m f_{\mathbf{S}})$$

tiene una única extensión a una función continua sobre $\mathcal{U}_{\mathbf{N}}$, por lo tanto se obtiene una única extensión a función continua sobre \mathbb{S}^2 . El resto de los casos se demuestra de forma similar. \star

Comentario. Con el abuso de notación de ahora en adelante no distinguimos entre una función y su única extensión dada en el lema 2.4.1.

Proposición 2.4.2. *Consideremos las siguientes matrices*

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{N}} &\in \text{Mat}_{1 \times 2}(C(\mathcal{U}_{\mathbf{N}})), & F_{\mathbf{S}} &\in \text{Mat}_{1 \times 2}(C(\mathcal{U}_{\mathbf{S}})), \\ G_{\mathbf{N}} &\in \text{Mat}_{2 \times 1}(C(\mathcal{U}_{\mathbf{N}})), & G_{\mathbf{S}} &\in \text{Mat}_{2 \times 1}(C(\mathcal{U}_{\mathbf{S}})), \end{aligned}$$

definidas por aplicar el lema 2.4.1 a las siguientes formulas:

$$F_{\mathbf{N}} = (\sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}}, \sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}}\mathcal{J}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m), \quad F_{\mathbf{S}} = (\sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}}\mathcal{J}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}^m, \sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}}), \quad (2.10)$$

$$G_{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}} \\ \sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}}\mathcal{J}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}^m \end{pmatrix}, \quad G_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}}\mathcal{J}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m \\ \sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Entonces

$$F_{\mathbf{N}} \circ G_{\mathbf{N}} = \text{id}_{\mathcal{U}_{\mathbf{N}}}, \quad F_{\mathbf{S}} \circ G_{\mathbf{S}} = \text{id}_{\mathcal{U}_{\mathbf{S}}}, \quad (2.12)$$

$$F_{\mathbf{S}} \circ G_{\mathbf{N}} = \mathcal{J}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}^m, \quad F_{\mathbf{N}} \circ G_{\mathbf{S}} = \mathcal{J}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m, \quad \text{sobre } \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}}. \quad (2.13)$$

Además,

$$P_m := G_{\mathbf{N}} \circ F_{\mathbf{N}} = G_{\mathbf{S}} \circ F_{\mathbf{S}} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(C(\mathbb{S}^2))$$

es una proyección ortogonal, es decir, $P_m^* = P_m = P_m^2$, dada por

$$P_m = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{N}} & \sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}\alpha_{\mathbf{S}}}\mathcal{J}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m \\ \sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}\alpha_{\mathbf{S}}}\mathcal{J}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}^m & \alpha_{\mathbf{S}} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Demostración. La existencia de únicas extensiones a funciones continuas sobre los dominios considerados cumple por el lema 2.4.1. Como $\mathcal{J}_{i,j}^m \circ \mathcal{J}_{j,i}^m = 1$ y $\alpha_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}} = 1$, las igualdades en (2.13) y (2.12) se cumplen.

Además, por (2.14) y el lema 2.4.1, $P_m \in \text{Mat}_{2 \times 2}(C(\mathbb{S}^2))$. Recordando que $F_{\mathbf{N}} \circ G_{\mathbf{N}} = \text{id}_{\mathcal{U}_{\mathbf{N}}}$ tiene una única extensión a una función continua sobre \mathbb{S}^2 , se calcula

$$P_m^2 = G_{\mathbf{N}} \circ (F_{\mathbf{N}} \circ G_{\mathbf{N}}) \circ F_{\mathbf{N}} = G_{\mathbf{N}} \circ \text{id} \circ F_{\mathbf{N}} = G_{\mathbf{N}} \circ F_{\mathbf{N}} = P_m.$$

Observemos que

$$(\mathcal{J}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m)^* = \overline{\mathcal{J}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m} = (\mathcal{J}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m)^{-1} = \mathcal{J}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}^m,$$

entonces $G_{\mathbf{N}} = F_{\mathbf{N}}^*$ y por lo tanto

$$P_m^* = (F_{\mathbf{N}}^* \circ F_{\mathbf{N}})^* = F_{\mathbf{N}}^* \circ F_{\mathbf{N}}^{**} = F_{\mathbf{N}}^* \circ F_{\mathbf{N}} = P_m.$$



Proposición 2.4.3. *Sea P_m definida como en la proposición 2.4.2. Entonces existe un isomorfismo de $C(\mathbb{S}^2)$ -módulos*

$$\Psi : P_m C(\mathbb{S}^2)^2 \rightarrow \widetilde{\mathfrak{M}}_m$$

dado por

$$\Psi \left(P_m \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right) := \left(F_{\mathbf{N}} \circ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, F_{\mathbf{S}} \circ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right),$$

con inverso

$$\begin{aligned} \Phi : \widetilde{\mathfrak{M}}_m &\rightarrow P_m C(\mathbb{S}^2)^2, \\ \Phi((f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}})) &:= \alpha_{\mathbf{N}} f_{\mathbf{N}} G_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}} f_{\mathbf{S}} G_{\mathbf{S}}. \end{aligned}$$

Demostración. Recordemos que

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_m = \left\{ (f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}}) \in C(\mathcal{U}_{\mathbf{N}}) \times C(\mathcal{U}_{\mathbf{S}}) : f_{\mathbf{N}}(p) = \mathcal{J}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m(p) f_{\mathbf{S}}(p) \ \forall p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}} \right\}$$

por las definiciones en la proposición 2.4.1 y definición 2.4.1. Además, por la ecuación (2.10) y lema 2.4.1,

$$\Psi \left(P_m \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right) = (\sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}} f_1 + \sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}} \mathcal{J}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m f_2, \sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}} \mathcal{J}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}^m f_1 + \sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}} f_2) \in C(\mathcal{U}_{\mathbf{N}}) \times C(\mathcal{U}_{\mathbf{S}}).$$

Ahora para demostrar que Ψ está bien definido, comienza por notar que Ψ es $C(\mathbb{S}^2)$ -lineal. Sea $P_m \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = P_m \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$, entonces $P_m \begin{pmatrix} f_1 - g_1 \\ f_2 - g_2 \end{pmatrix} = 0$. Como Ψ es $C(\mathbb{S}^2)$ -lineal basta demostrar que para todo $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \in C(\mathbb{S}^2)$ tal que $P_m \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$, se cumple que $\Psi \left(P_m \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right) = 0$ y consecuentemente $\Psi \left(P_m \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right) - \Psi \left(P_m \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right) = 0$. Supongamos que $P_m \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$. Como

$$P_m = G_{\mathbf{N}} \circ F_{\mathbf{N}} = G_{\mathbf{S}} \circ F_{\mathbf{S}},$$

entonces se tiene

$$0 = P_m \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = G_{\mathbf{N}} \circ F_{\mathbf{N}} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}} \left(F_{\mathbf{N}} \circ \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right) \\ \sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}} \mathcal{J}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}^m \left(F_{\mathbf{N}} \circ \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix}.$$

como $\sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}(p)} > 0$ para todo $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}}$, tenemos necesariamente que

$$F_{\mathbf{N}}(p) \circ \begin{pmatrix} h_1(p) \\ h_2(p) \end{pmatrix} = 0,$$

para todo $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}}$. Consecuentemente

$$F_{\mathbf{N}} \circ \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0.$$

De forma análoga para $P_m = G_{\mathbf{S}} \circ F_{\mathbf{S}}$, con $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{S}}$. Así se puede ver que

$$\Psi \left(P_m \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right) = \left(F_{\mathbf{N}} \circ \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, F_{\mathbf{S}} \circ \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right) = (0, 0).$$

Queda demostrar que efectivamente $\Psi \left(P_m \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_m$. Consideremos las funciones

$$F_{\mathbf{N}} \circ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$F_{\mathbf{S}} \circ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : \mathcal{U}_{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Tenemos que demostrar que

$$\mathcal{J}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m \left(F_{\mathbf{S}} \circ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right) = F_{\mathbf{N}} \circ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \text{ sobre } \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}}.$$

Como $\mathcal{J}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m \mathcal{J}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}^m = 1$ sobre $\mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m \left(F_{\mathbf{S}} \circ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right) &= \sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}} \mathcal{J}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m \mathcal{J}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}^m f_1 + \sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}} \mathcal{J}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m f_2 \\ &= \sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}} f_1 + \sqrt{\alpha_{\mathbf{S}}} \mathcal{J}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m f_2 \\ &= F_{\mathbf{N}} \circ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entonces $\Psi \left(P_m \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_m$, es decir, Ψ está bien definido.

Consideremos ahora $\Phi : \widetilde{\mathfrak{M}}_m \rightarrow P_m C(\mathbb{S}^2)^2$. Por el lema 2.4.1 (con $\mathcal{J}_{jj}^m = \text{id}_{U_j}$, $j \in \{\mathbf{N}, \mathbf{S}\}$) todas las entradas de $\alpha_{\mathbf{N}} f_{\mathbf{N}} G_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}} f_{\mathbf{S}} G_{\mathbf{S}}$ tienen una única extensión a $C(\mathbb{S}^2)$, entonces $\Phi((f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}})) \in C(\mathbb{S}^2)^2$.

Demostremos que $\Phi(\widetilde{\mathfrak{M}}_m) \subset P_m C(\mathbb{S}^2)^2$, es decir,

$$\Phi(f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}}) = P_m \Phi(f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}}) \in \text{Imagen}(P_m).$$

Recordando que $P_m = G_{\mathbf{N}} \circ F_{\mathbf{N}} = G_{\mathbf{S}} \circ F_{\mathbf{S}}$, obtenemos de la ecuación (2.12)

$$\begin{aligned} P_m(\Phi(f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}})) &= P_m(\alpha_{\mathbf{N}} f_{\mathbf{N}} G_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}} f_{\mathbf{S}} G_{\mathbf{S}}) \\ &= \alpha_{\mathbf{N}} f_{\mathbf{N}} P_m \circ G_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}} f_{\mathbf{S}} P_m \circ G_{\mathbf{S}} \\ &= \alpha_{\mathbf{N}} f_{\mathbf{N}} G_{\mathbf{N}} \circ F_{\mathbf{N}} \circ G_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}} f_{\mathbf{S}} G_{\mathbf{S}} \circ F_{\mathbf{S}} \circ G_{\mathbf{S}} \\ &= \alpha_{\mathbf{N}} f_{\mathbf{N}} G_{\mathbf{N}} \circ \underbrace{F_{\mathbf{N}} \circ G_{\mathbf{N}}}_{\text{id}} + \alpha_{\mathbf{S}} f_{\mathbf{S}} G_{\mathbf{S}} \circ \underbrace{F_{\mathbf{S}} \circ G_{\mathbf{S}}}_{\text{id}} \\ &= \alpha_{\mathbf{N}} f_{\mathbf{N}} G_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}} f_{\mathbf{S}} G_{\mathbf{S}} \\ &= \Phi(f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}}). \end{aligned}$$

Como $\Phi(\widetilde{\mathfrak{M}}_m) \subset P_m C(\mathbb{S}^2)^2$, podemos calcular $\Psi \circ \Phi$. Para todo $(f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}}) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_m$ tenemos

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi(f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}}) &= \Psi(\alpha_{\mathbf{N}} f_{\mathbf{N}} G_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}} f_{\mathbf{S}} G_{\mathbf{S}}) \\ &= (F_{\mathbf{N}} \circ (\alpha_{\mathbf{N}} f_{\mathbf{N}} G_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}} f_{\mathbf{S}} G_{\mathbf{S}}), F_{\mathbf{S}} \circ (\alpha_{\mathbf{N}} f_{\mathbf{N}} G_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}} f_{\mathbf{S}} G_{\mathbf{S}})) \\ &= (\alpha_{\mathbf{N}} f_{\mathbf{N}} F_{\mathbf{N}} \circ G_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}} f_{\mathbf{S}} F_{\mathbf{N}} \circ G_{\mathbf{S}}, \alpha_{\mathbf{N}} f_{\mathbf{N}} F_{\mathbf{N}} \circ G_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}} f_{\mathbf{S}} F_{\mathbf{N}} \circ G_{\mathbf{S}}) \\ &= (\alpha_{\mathbf{N}} f_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}} \mathcal{J}_{\mathbf{N}, \mathbf{S}}^m f_{\mathbf{S}}, \alpha_{\mathbf{N}} \mathcal{J}_{\mathbf{S}, \mathbf{N}}^m f_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}} f_{\mathbf{S}}) \\ &= (\alpha_{\mathbf{N}} f_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}} f_{\mathbf{N}}, \alpha_{\mathbf{N}} f_{\mathbf{S}} + \alpha_{\mathbf{S}} f_{\mathbf{S}}) \\ &= (\alpha_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}})(f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}}) \\ &= (f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{S}}), \end{aligned}$$

ya que $\alpha_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}} = 1$, $F_{\mathbf{S}} \circ G_{\mathbf{N}} = \mathcal{J}_{\mathbf{S}, \mathbf{N}}^m$ y $F_{\mathbf{N}} \circ G_{\mathbf{S}} = \mathcal{J}_{\mathbf{N}, \mathbf{S}}^m$ por ecuaciones (2.12) y (2.13), y $\mathcal{J}_{\mathbf{N}, \mathbf{S}}^m f_{\mathbf{S}} = f_{\mathbf{N}}$, $\mathcal{J}_{\mathbf{S}, \mathbf{N}}^m f_{\mathbf{N}} = f_{\mathbf{S}}$ por la definición de $\widetilde{\mathfrak{M}}_m$. Ahora para todo $P_m \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in P_m C(\mathbb{S}^2)^2$ tenemos

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Psi \left(P_m \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right) &= \Phi \left(F_{\mathbf{N}} \circ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, F_{\mathbf{S}} \circ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \alpha_{\mathbf{N}} \left(F_{\mathbf{N}} \circ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right) G_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}} \left(F_{\mathbf{S}} \circ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right) G_{\mathbf{S}} \\ &= \alpha_{\mathbf{N}} G_{\mathbf{N}} \circ F_{\mathbf{N}} \circ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \alpha_{\mathbf{S}} G_{\mathbf{S}} \circ F_{\mathbf{S}} \circ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha_{\mathbf{N}} P_m \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \alpha_{\mathbf{S}} P_m \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha_{\mathbf{N}} + \alpha_{\mathbf{S}}) P_m \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \\ &= P_m \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta forma se aprecia que $\Phi \circ \Psi = \text{id}$, así como $\Psi \circ \Phi = \text{id}$. Consecuentemente $\Phi = \Psi^{-1}$ y finalmente Ψ es un isomorfismo. \star

Corolario 2.4.2. $\Gamma(\mathcal{E}_m) \cong \widetilde{\mathfrak{M}}_m \cong \mathfrak{M}_m \cong \mathfrak{F}_m \cong P_m C(\mathbb{S}^2)^2$.

Demostración. Es una consecuencia directa de las proposiciones 2.4.1 y 2.4.3 y corolario 2.4.1. \star

Comentario. Con el isomorfismo $C(\mathbb{S}^2) \cong C(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$,

$$f(z) := \begin{cases} f \circ \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(z), & z \in \mathbb{C} \\ f(\mathbf{S}), & z = \infty \end{cases},$$

para todo $f \in C(\mathbb{S}^2)$, podemos escribir (con abuso de notación)

$$\begin{aligned} P_m(z) &= \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{N}}(z) & \sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}(z)\alpha_{\mathbf{S}}(z)} \mathcal{J}_{\mathbf{N},\mathbf{S}}^m(z) \\ \sqrt{\alpha_{\mathbf{N}}(z)\alpha_{\mathbf{S}}(z)} \mathcal{J}_{\mathbf{S},\mathbf{N}}^m(z) & \alpha_{\mathbf{S}}(z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(z\bar{z})^m} & \frac{(z\bar{z})^{\frac{m}{2}}}{1+(z\bar{z})^m} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^{\frac{m}{2}} \\ \frac{(z\bar{z})^{\frac{m}{2}}}{1+(z\bar{z})^m} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{\frac{m}{2}} & \frac{(z\bar{z})^m}{1+(z\bar{z})^m} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+(z\bar{z})^m} \begin{pmatrix} 1 & \bar{z}^m \\ z^m & (z\bar{z})^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y de forma similar,

$$P_{-m}(z) = \frac{1}{1+(z\bar{z})^m} \begin{pmatrix} 1 & z^m \\ \bar{z}^m & (z\bar{z})^m \end{pmatrix}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Capítulo 3

Cálculo de Índices del operador de Dirac

Para una variedad topológica \mathcal{M} , denotamos por $C(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ el álgebra de funciones continuas complejas, es decir

$$C(\mathcal{M}, \mathbb{C}) = \{f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es continua}\}.$$

Cuando no se preste a confusión, continuamos escribiendo simplemente $C(\mathcal{M})$.

3.1. Operador de Dirac en la 2-esfera

Antes de proseguir, vamos a analizar algunas propiedades sobre nuestro dominio para así poder hacer uso de nociones como el producto interno y norma. Esto es ya que introduciremos una colección de elementos ortonormales los cuales serán muy importantes para el cálculo del índice ya que están directamente relacionados con la nulidad del operador de Dirac.

Dado un $\mathcal{U} \in \mathbb{S}^2$, $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^2$ y un difeomorfismo $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ tal que para todo $(x_1, x_2) \in \mathcal{V}$, $\text{Dim}(\text{Rank}(\varphi^{-1}(x_1, x_2))) = 2$, para $f \in C(\mathbb{S}^2)$ se calcula el integral de superficie por

$$\int_{\mathcal{U}} f d^2 a := \int_{\mathcal{V}} f(\varphi(x_1, x_2)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right\| d\lambda(x_1, x_2), \quad (3.1)$$

donde λ denota la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^2 . Dado que el área de un punto es 0, para todo $f \in C(\mathbb{S}^2)$ tenemos:

$$\int_{\mathbb{S}^2} f d^2 a = \int_{\mathcal{U}_{\mathbf{N}}} f d^2 a,$$

donde hemos considerado

$$\varphi_{\mathbf{N}}^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \subset \mathbb{S}^2.$$

En la proposición 2.3.1 se demostró que

$$g_{12}(x_1, x_2) = \left\langle \frac{\partial \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right\rangle = 0,$$

entonces

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right\| &= \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right\| \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right\| \\ &= \sqrt{g_{11}(x_1, x_2)} \sqrt{g_{22}(x_1, x_2)}, \\ &= \frac{4}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $f \in C(\mathbb{S}^2)$,

$$\int_{\mathbb{S}^2} f d^2 a = \int_{\mathbb{R}^2} f(\varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(x_1, x_2)) \frac{4}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} dx_1 dx_2.$$

Por otra parte, recordando que

$$\mathcal{E}_m = (\mathcal{U}_{\mathbf{N}} \times \mathbb{C}) \amalg (\mathcal{U}_{\mathbf{S}} \times \mathbb{C}) / \sim$$

con las funciones de transición

$$\mathcal{T}_{\mathbf{N}, \mathbf{S}}(p) = \mathcal{T}_{\mathbf{S}, \mathbf{N}}^{-1}(p) = \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)^{\frac{m}{2}}, \quad p = \varphi_{\mathbf{N}}^{-1}(z).$$

Como $|\mathcal{T}_{\mathbf{N}, \mathbf{S}}(p)| = (|\bar{z}|/|z|)^{\frac{m}{2}} = 1$, para todo $p \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{S}}$ tenemos $\mathcal{T}_{\mathbf{N}, \mathbf{S}}(p) \in U(1)$. Entonces

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : \pi^{-1}(p) \times \pi^{-1}(p) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (3.2)$$

de la ecuación (1.6), está bien definido, para $p \in \mathbb{S}^2$ y todo $s, r \in \Gamma(\mathcal{E}_m)$. La asignación

$$p \rightarrow \langle s(p), r(p) \rangle_p \in \mathbb{C},$$

es continua. Por lo tanto podemos definir un producto interno

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma(\mathcal{E}_m) \times \Gamma(\mathcal{E}_m) \rightarrow \mathbb{C},$$

por

$$\langle s, r \rangle := \int_{\mathbb{S}^2} \langle s(p), r(p) \rangle_p d^2 a(p).$$

La completación de $\Gamma(\mathcal{E}_m)$ en la norma dada por el producto interno la denotamos por $L_2(\mathcal{E}_m)$. Usando el isomorfismo del corolario 2.4.1

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{E}_m) \cong \mathfrak{F}_m &= \left\{ f \in C(\mathbb{C}) : \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^{\frac{m}{2}} f(z) \in \mathbb{C} \right\}, \\ f &\rightarrow [(p, f(\varphi_{\mathbf{N}}(p)))] , \quad (p, f(\varphi_{\mathbf{N}}(p))) \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}} \times \mathbb{C}, \end{aligned}$$

se obtiene un producto interno para toda $f, g \in \mathfrak{F}_m$,

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} g(z) \frac{4}{(1 + z\bar{z})^2} d\lambda(z, \bar{z}), \quad (3.3)$$

donde tal que $\Gamma(\mathcal{E}_m)$ y \mathfrak{F}_m son isométricamente isomorfos y $d\lambda(z, \bar{z})$ simboliza la integración con respecto de la medida de Lebesgue.

Recordamos la norma $\|\cdot\|_2$ para $f \in \mathfrak{F}_m$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \frac{4}{(1+z\bar{z})^2} d\lambda(z, \bar{z})}$$

entonces la completación de \mathfrak{F}_m con la norma dada por (3.3) también la denotamos por $L_2(\mathcal{E}_m)$. Una base ortonormal de $L_2(\mathcal{E}_m) = \overline{\mathfrak{F}_m}^{\|\cdot\|_2}$ está dada por

$$\left\{ \frac{m}{2} Y_{lk} : l = \frac{|m|}{2}, \frac{|m|}{2} + 1, \dots, k = -l, -l + 1, \dots, l \right\},$$

donde

$${}_s Y_{lk} := \frac{a_{lk}}{\sqrt{(l-s)!(l+s)!}} (1+z\bar{z})^{-l} \sum_p^{l-s} z^p (-\bar{z})^{p+s-k} \binom{l-s}{p} \binom{l+s}{p+s-k}, \quad (3.4)$$

con $a_{lk} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, ver [4].

Para verificar que ${}_s Y_{lk} \in \mathfrak{F}_{2s}$, observemos que

$$p + p + s - k \leq p + l + s \leq l - s + l + s = 2l$$

con igualdad si y sólo si $p + s - k = l + s$ y $p = l - s$, entonces $l - k = l + s$ que a su vez implica $k = -s$. Por lo tanto

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^s \frac{z^p (-\bar{z})^{p+s-k}}{(1+z\bar{z})^l} = 0$$

si $p \neq l - s$ ó $p = l - s$ y $k \neq -s$. Si $p = l - s$ y $k = -s$, se obtiene

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^s \frac{z^{l-s} (-\bar{z})^{l+s}}{(1+z\bar{z})^l} = \lim_{z \rightarrow \infty} (-1)^{l+s} \frac{(z\bar{z})^l}{(1+z\bar{z})^l} = (-1)^{l+s}.$$

Por la definición de \mathfrak{F}_{2s} en el corolario 2.4.1, se concluye que ${}_s Y_{lk} \in \mathfrak{F}_{2s}$. Donde \mathfrak{F}_{2s} es isomorfo al módulo de secciones del haz lineal complejo con número de giro $2s \in \mathbb{Z}$ sobre \mathbb{S}^2 .

Ahora definimos el operador δ_z

$$\delta_z := (1+z\bar{z}) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2} \bar{z},$$

para así definir el operador de Dirac sobre \mathbb{S}^2

$$\mathcal{D} := \begin{pmatrix} 0 & \delta_z \\ -\delta_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

sobre $\mathcal{H} = L_2(\mathcal{E}_{-1}) \oplus L_2(\mathcal{E}_1)$ con

$$\text{dom}(\mathcal{D}) = \left\{ \sum_{l,k} \alpha_{lk}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} Y_{lk} \oplus \sum_{l,k} \alpha_{lk}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} Y_{lk} : \sum_{l,k} l^2 |\alpha_{lk}^{\pm}|^2 < \infty \right\}$$

donde ∂_z y $\bar{\partial}_z$ están definidos para todos $f_- \in \mathfrak{F}_{-1} \cap C^{(1)}(\mathbb{C})$, $f_+ \in \mathfrak{F}_1 \cap C^{(1)}(\mathbb{C})$ por:

$$\begin{aligned} \partial_z f_-(z, \bar{z}) &= (1 + z\bar{z}) \frac{\partial f_-}{\partial z}(z, \bar{z}) - \frac{1}{2} \bar{z} f_-(z, \bar{z}), \\ \bar{\partial}_z f_+(z, \bar{z}) &= (1 + z\bar{z}) \frac{\partial f_+}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z}) - \frac{1}{2} z f_+(z, \bar{z}), \end{aligned}$$

ver [2, Section 9.A, Pág. 407].

3.2. K-Teoría

A continuación haremos uso de elementos de la K-teoría que serán fundamentales para nuestro cálculo del índice. Dichos elementos son: el teorema de Serre-Swan para establecer una conexión entre las estructuras de nuestras variedades con las estructuras de módulos. También haremos uso de la equivalencia de Murray-von Neumann para así definir el grupo K_0 que es esencial para nuestro trabajo.

Dados dos haces vectoriales $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ sobre una variedad \mathcal{M} con proyecciones $\pi_i : \mathcal{G}_i \rightarrow \mathcal{M}$, para $i \in \{1, 2\}$, y fibras $\pi_i^{-1}(p) \cong \mathbb{K}^{n_i}$, se define la suma $\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$ por

$$\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 := \{(e_1, e_2) \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 : \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\},$$

con la proyección

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 &\rightarrow \mathcal{M}, \\ \pi(e_1, e_2) &= \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2), \end{aligned}$$

y la fibra $\pi^{-1}(p) \cong \mathbb{K}^{n_1+n_2}$.

La idea de la K-Teoría es clasificar haces vectoriales establemente isomorfos. Se dice que dos \mathbb{K} -haces vectoriales $(\mathcal{G}_1, \pi_1, \mathcal{M})$ y $(\mathcal{G}_2, \pi_2, \mathcal{M})$ sobre una variedad \mathcal{M} son establemente isomorfos si existe un haz $\varepsilon_m \cong \mathcal{M} \times \mathbb{K}^m$ tal que

$$\mathcal{G}_1 \oplus \varepsilon_m \cong \mathcal{G}_2 \oplus \varepsilon_m.$$

Por ejemplo, si consideramos $\mathcal{M} = \mathbb{S}^2$, $\mathcal{G}_1 = \mathbb{T}\mathbb{S}^2$ y $\mathcal{G}_2 := \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$, entonces \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 no son isomorfos por el teorema de la bola peluda. Sin embargo, si consideramos el haz normal

$$\mathcal{N} := \coprod_{p \in \mathbb{S}^2} (\mathbb{T}_p \mathbb{S}^2)^\perp = \coprod_{p \in \mathbb{S}^2} \mathbb{R}_p,$$

entonces

$$\varepsilon_1 := \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \cong \mathcal{N} \quad \text{y} \quad \mathbf{TS}^2 \oplus \mathcal{N} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3,$$

por lo tanto

$$\mathbf{TS}^2 \oplus \varepsilon_1 \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \cong (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2) \oplus \varepsilon_1.$$

Es decir \mathbf{TS}^2 y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$ son establemente isomorfos.

Teorema 3.2.1 (Serre-Swan). *Sean \mathcal{E} y \mathcal{M} variedades diferenciables, \mathcal{M} compacta y \mathcal{E} un haz vectorial sobre \mathcal{M} tal que $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ es diferenciable y $\pi^{-1}(p) \cong \mathbb{C}^n$. Entonces el $C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ -módulo $\Gamma^\infty(\mathcal{M})$ es un módulo proyectivo finitamente generado, es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ y una proyección $P \in \text{Mat}_{N \times N}(C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$ tal que $P^2 = P = P^*$, y $\Gamma^\infty(\mathcal{M}) \cong PC^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C})^N$.*

Además considerando secciones continuas en lugar de secciones lisas, $\Gamma(\mathcal{M}) \cong PC(\mathcal{M}, \mathbb{C})^N$, como $C(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ -módulo.

Análogamente para haces vectoriales reales con fibra $\pi^{-1}(p) \cong \mathbb{R}^n$. Ver [3, Section 1, Theorem 6.18 y Proposition 6.25]

Sea ahora $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Las clases de equivalencia de haces \mathbb{C} -vectoriales establemente isomorfos forman un semigrupo abeliano con la adición dada por la suma directa y el elemento neutro $\varepsilon_0 := \mathcal{M} \times \{0\}$. Un procedimiento del álgebra nos permite obtener un grupo abeliano llamado *el grupo de Grothendieck*, a partir de un semigrupo abeliano. Por otro lado, por el Teorema de Serre-Swan 3.2.1, el $C(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ -módulo de secciones continuas $\Gamma(\mathcal{E})$ de un haz $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M})$ es un módulo proyectivo finitamente generado y un isomorfismo de haces da un isomorfismo de módulos proyectivos. Entonces se puede usar los módulos proyectivos finitamente generados para la clasificación de haces establemente isomorfos. Estas observaciones nos llevan a las siguientes definiciones:

Definición 3.2.1. Sean $m, k \in \mathbb{N}$ y $P \in \text{Mat}_{m \times m}(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$, $Q \in \text{Mat}_{k \times k}(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$ proyecciones, es decir, $P^2 = P = P^*$ y $Q^2 = Q = Q^*$. Decimos que P y Q son *Murray-von Neumann* equivalentes si existe una matriz $X \in \text{Mat}_{m \times k}(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$ tal que

$$P = X \cdot X^*, \quad \text{y} \quad Q = X^* \cdot X.$$

El siguiente lema establece que dos proyecciones *Murray-von Neumann* equivalentes también son unitariamente equivalentes y viceversa. Para esto se tiene que permitir matrices con tamaño adecuado.

Lema 3.2.1. *Sean $m, k \in \mathbb{N}$ y $P \in \text{Mat}_{m \times m}(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$, $Q \in \text{Mat}_{k \times k}(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$ dos proyecciones. Entonces P y Q son Murray-von Neumann equivalente si y sólo si existe un $l \in \mathbb{N}$, $l \geq \max\{m, k\}$, y una matriz unitaria $U \in \text{Mat}_{l \times l}(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$ tal que*

$$U \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Obviamente P y $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ son *Murray-von Neumann* equivalente por $X := (P, 0) \in \text{Mat}_{m \times l}(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$ ya que

$$XX^* = PP^* + 0 = P, \quad \text{y} \quad X^*X = \begin{pmatrix} P^*P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde usamos $P^* = P = P^2$. Lo mismo cumple para Q . Supongamos ahora que

$$U \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con $U \in \text{Mat}_{l \times l}(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$ tal que $UU^* = U^*U = \mathbb{1}$. Definimos

$$X := \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*.$$

Entonces

$$\begin{aligned} X^*X &= U \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = U \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ XX^* &= \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*U \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son *Murray-von Neumann* equivalentes. Sea ahora $Y \in \text{Mat}_{m \times k}(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$ tal que $P = YY^*$ y $Q = Y^*Y$. Por [7, Section 5.1.5] tenemos $YY^*Y = Y$, $Y^*YY^* = Y^*$. Definimos

$$U := \begin{pmatrix} Y^* & 1 - Q \\ 1 - P & Y \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} U^*U &= \begin{pmatrix} YY^* + (1 - P)^2 & Y(1 - Q) + (1 - P)Y \\ (1 - Q)Y^* + Y^*(1 - P) & (1 - Q)^2 + Y^*Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} YY^* + 1 - YY^* & Y - YY^*Y + Y - YY^*Y \\ Y^* - Y^*YY^* + Y^* - Y^*YY^* & 1 - Y^*Y + Y^*Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$UU^* = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Más aún

$$\begin{aligned}
U \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* &= \begin{pmatrix} Y^* & 1-Q \\ 1-P & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & 1-P \\ 1-Q & Y^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Y^*P & 0 \\ (1-P)P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} PY & P(1-P) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Y^*YY^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} YY^*Y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Y^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^*Y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- son unitariamente equivalentes. ✱

Para definir el grupo $K_0(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$ usaremos la equivalencia de *Murray-von Neumann* y recordaremos que esta relación de equivalencia es equivalente a la equivalencia unitaria si permitimos matrices de cualquier tamaño.

Definición 3.2.2. Sea \mathcal{M} una variedad topológica compacta. Definimos $K_0(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$ como el grupo abeliano generado por clases de equivalencia $[P]$, donde $P \in \text{Mat}_{k \times k}(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$ es una proyección para algún $k \in \mathbb{N}$ con la suma

$$[P] + [Q] = \left[\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \right],$$

y como elemento neutro $0 = [0]$, donde $0 \in \text{Mat}_{k \times k}(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$, $k \in \mathbb{N}$ arbitrario.

Observación 3.2.1. Todo elemento en $K_0(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$ está dado por

$$[P] - [Q],$$

donde $P \in \text{Mat}_{m \times m}(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$ y $Q \in \text{Mat}_{k \times k}(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$ son proyecciones.

Comentario 3.2.1. Si \mathcal{M} es una variedad diferenciable, entonces por el teorema de Serre-Swan 3.2.1 podemos representar el $C(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ -módulo $\Gamma(\mathcal{E})$ de un haz \mathbb{C} -vectorial $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M})$ por una proyección $P \in \text{Mat}_{m \times m}(C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$.

El grupo $K_0(C(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$ [7] fue introducido por Atiyah para dar una versión abstracta del *teorema de índice de Atiyah-Singer*. En grandes rasgos, la versión abstracta del teorema de índice dice que, dado un operador diferencial elíptico \mathcal{D} de primer orden sobre una variedad diferenciable \mathcal{M} , existe un homomorfismo

$$\text{Ind}_{\mathcal{D}} : K_0(C(\mathcal{M}, \mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{Z}, \tag{3.6}$$

dato por calcular el índice de un operador de Fredholm [2, Section 4] construido mediante \mathcal{D} y $\mathbf{P} \in \text{Mat}_{m \times m}(C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$. Por ejemplo, si \mathcal{M} es una variedad espín de dimensión par y

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}_{+-} \\ \mathcal{D}_{-+} & 0 \end{pmatrix},$$

es el operador de Dirac sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, donde $\mathcal{H}_\pm := L_2(\mathcal{S}_\pm)$ es el espacio de Hilbert de L_2 -secciones del haz \mathcal{S}_\pm y $\mathcal{S} = \mathcal{S}_+ \oplus \mathcal{S}_-$ es el haz espín, entonces se puede demostrar que, para todo $\mathbf{P} \in \text{Mat}_{m \times m}(C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$, el operador

$$\mathbf{P}\mathcal{D}_{+-}\mathbf{P} : \text{dom}(\mathbf{P}\mathcal{D}_{+-}\mathbf{P}) \subset \mathbf{P}\mathcal{H}_-^m \rightarrow \mathbf{P}\mathcal{H}_+^m,$$

es un operador de Fredholm y el homomorfismo

$$\text{Ind}_{\mathcal{D}} : K_0(C(\mathcal{M}, \mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{Z},$$

está dado por

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\mathcal{D}}([\mathbf{P}]) &:= \text{Ind}(\mathbf{P}\mathcal{D}_{+-}\mathbf{P}), \\ &= \text{Dim}(\text{Ker}(\mathbf{P}\mathcal{D}_{+-}\mathbf{P})) - \text{Dim}(\text{coKer}(\mathbf{P}\mathcal{D}_{+-}\mathbf{P})), \end{aligned}$$

ver [2, Section 10.2]. El objetivo de esta tesis es calcular el mapeo de índice (3.6) para la variedad \mathbb{S}^2 y las proyecciones $\mathbf{P} \in \text{Mat}_{m \times m}(C^\infty(\mathbb{S}^2, \mathbb{C}))$ que representan los haces \mathbb{C} -lineales con número de giro $m \in \mathbb{Z}$ sobre \mathbb{S}^2 . Por los resultados anteriores en el corolario 2.4.2 y el comentario posterior, ya sabemos que $\Gamma(\mathcal{E}_m) \cong \mathbf{P}_m C(\mathbb{S}^2)^2$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_m &= \frac{1}{1 + (z\bar{z})^m} \begin{pmatrix} 1 & \bar{z}^m \\ z^m & (z\bar{z})^m \end{pmatrix}, \\ \mathbf{P}_{-m}(z) &= \frac{1}{1 + (z\bar{z})^m} \begin{pmatrix} 1 & z^m \\ \bar{z}^m & (z\bar{z})^m \end{pmatrix}, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

A continuación pasaremos a definir unos operadores que nos auxiliarán con el cálculo del índice, ya que van a satisfacer algunas propiedades adecuadas para nuestros cálculos.

Definición 3.2.3. Sea $m \in \mathbb{Z}$. Definimos los operadores

$$\begin{aligned} {}_m\bar{\partial}_z &:= (1 + z\bar{z})\partial_z + \frac{m}{2}\bar{z}, \\ {}_m\bar{\partial}_{\bar{z}} &:= (1 + z\bar{z})\partial_{\bar{z}} - \frac{m}{2}z. \end{aligned}$$

Como comentario cabe mencionar que

$${}_m\bar{\partial}_z f = \overline{{}_{-m}\bar{\partial}_z \bar{f}}.$$

Por el artículo [4, ecuación (3.22)] sabemos que

$$\begin{aligned} {}_{2s}\bar{\partial}_z {}_s Y_{lm} &= \lambda_{sl} {}_{s+1} Y_{lm}, \\ {}_{2s}\bar{\partial}_{\bar{z}} {}_s Y_{lm} &= -\lambda_{(-s)l} {}_{s-1} Y_{lm}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde $\lambda_{sl} := \sqrt{(l-s)(l+s+1)}$, $s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $l = |s|, |s|+1, \dots$. Además

$$\{ {}_s Y_{lm} , l = |s|, |s|+1, \dots , m = -l, \dots, l \} \subset \Gamma(\mathcal{E}_{2s}), \quad (3.8)$$

es una base ortonormal de

$$L_2(\mathcal{E}_{2s}) = \overline{\Gamma(\mathcal{E}_{2s})}^{\|\cdot\|} \cong \overline{\mathfrak{F}_{2s}}^{\|\cdot\|_2} \cong L_2(\mathbb{C}, d^2a),$$

donde $d^2a = \frac{4}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} dx_1 dx_2$.

Para resolver el problema de la computación de índices, queremos expresar el módulo $\Gamma(\mathcal{E}_m)$ por proyecciones construidas por las funciones ${}_s Y_{|s|,k}$, $k = -|s|, \dots, |s|$.

Lema 3.2.2. Sean $N, K \in \mathbb{N}$, $V \in \text{Mat}_{1 \times N}(C(\mathbb{C}))$, $X \in \text{Mat}_{1 \times K}(C(\mathbb{C}))$, tal que $VV^* = 1 = XX^*$. Así como $V^*V \in \text{Mat}_{N \times N}(C(\mathbb{S}^2))$, $X^*X \in \text{Mat}_{K \times K}(C(\mathbb{S}^2))$ y $V^*X \in \text{Mat}_{N \times K}(C(\mathbb{S}^2))$. Definamos $P := V^*V$ y $Q := X^*X$. Entonces los módulos proyectivos $PC(\mathbb{S}^2)^N$ y $QC(\mathbb{S}^2)^K$ son isomorfos. Más aún, un isomorfismo está dado por

$$\begin{aligned} \psi : PC(\mathbb{S}^2)^N &\rightarrow QC(\mathbb{S}^2)^K, \\ \psi \left(P \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \right) &:= X^*V \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con inverso

$$\begin{aligned} \Phi : QC(\mathbb{S}^2)^K &\rightarrow PC(\mathbb{S}^2)^N, \\ \Phi \left(Q \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_K \end{pmatrix} \right) &:= V^*X \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_K \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Demostración. Primero se mostrará que ψ y Φ están bien definidos. Si

$$P \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix},$$

entonces

$$P \begin{pmatrix} f_1 - g_1 \\ \vdots \\ f_N - g_N \end{pmatrix} = 0.$$

Como ψ obviamente es $C(\mathbb{S}^2)$ -lineal, basta demostrar que

$$\psi \left(P \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix} \right) = 0,$$

si

$$P \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix} = 0.$$

Sea entonces

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix} \in C(\mathbb{S}^2)^N$$

tal que

$$0 = P \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix} = V^*V \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$0 = VV^*V \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix},$$

luego

$$\psi \left(P \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix} \right) = X^*V \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix} = 0.$$

De forma análoga se demuestra que Φ está bien definido. Se procederá a demostrar que para $N, K \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \Phi \circ \psi \left(P \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \right) &= P \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}, \\ \psi \circ \Phi \left(Q \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_K \end{pmatrix} \right) &= Q \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_K \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Antes de proseguir, se verificará que en efecto, las imágenes de las funciones ψ y Φ yacen en $QC(\mathbb{S}^2)^K$ y $PC(\mathbb{S}^2)^N$ respectivamente. Analizando la estructura de un elemento en la imagen de ψ :

$$X^*V \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix},$$

recordando que $XX^* = 1$, y $Q = X^*X$, notando que

$$\begin{aligned} X^* \cdot 1 \cdot V \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} &= X^*XX^*V \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}, \\ &= QX^*V \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde por hipótesis, $X^*V \in \text{Mat}_{K \times N}(C(\mathbb{S}^2))$, por lo tanto, dicho elemento tiene entradas en $C(\mathbb{S}^2)$ y tiene tamaño $K \times N$, viendo así que en efecto, es elemento de $\text{QC}(\mathbb{S}^2)^K$. De forma simétrica se verifica para el otro morfismo Φ .

Ahora comenzando por mostrar que $\Phi \circ \psi = \mathbb{1}_{\text{PC}(\mathbb{S}^2)^N}$, y recordando que $XX^* = 1$, así como $X^*X = \mathbb{Q}$ se tiene que para

$$\text{P} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \in \text{PC}(\mathbb{S}^2)^N,$$

se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} \Phi \circ \psi \left(\text{P} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \right) &= \Phi \left(X^*V \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \right) = \Phi \left(X^* \cdot 1 \cdot V \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \right) \\ &= \Phi \left(X^*XX^*V \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \right) = \Phi \left(\mathbb{Q}X^*V \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \right) \\ &= V^*XX^*V \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = V^*V \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \\ &= \text{P} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, es evidente que $\Phi \circ \psi = \mathbb{1}_{\text{PC}(\mathbb{S}^2)^N}$. Para mostrar que $\psi \circ \Phi = \mathbb{1}_{\text{QC}(\mathbb{S}^2)^K}$, los cálculos son simétricos. ✱

Lema 3.2.3. *Sea $f, g \in C(\mathbb{C})$ tal que $f \in \Gamma(\mathcal{E}_m)$ y $g \in \Gamma(\mathcal{E}_k)$. Entonces $f \cdot g \in \Gamma(\mathcal{E}_{m+k})$. Particularmente para $f, g \in C(\mathbb{C})$ tal que $f, g \in \Gamma(\mathcal{E}_m)$, se cumple que*

$$\begin{aligned} \bar{f} &\in \Gamma(\mathcal{E}_{-m}), \text{ y} \\ \bar{f} \cdot g &\in C(\mathbb{S}^2) \cong \Gamma(\mathcal{E}_0). \end{aligned}$$

Demostración. Por el corolario 2.4.2 se tiene que

$$\Gamma(\mathcal{E}_n) \cong \mathfrak{F}_n = \left\{ f \in C(\mathbb{C}) : \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^{\frac{n}{2}} f(z) \in \mathbb{C} \text{ existe} \right\}.$$

Sea $f \in \mathfrak{F}_m$ y $g \in \mathfrak{F}_k$. Entonces

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^{\frac{m+k}{2}} f(z)g(z) = \left(\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^{\frac{m}{2}} f(z) \right) \left(\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^{\frac{k}{2}} g(z) \right) \in \mathbb{C}$$

existe, por lo tanto $f \cdot g \in \mathfrak{F}_{m+k} \cong \Gamma(\mathcal{E}_{m+k})$. Además

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^{-\frac{m}{2}} \bar{f}(z) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)^{\frac{m}{2}} \overline{f(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \overline{\left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^{\frac{m}{2}} f(z)} \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

existe, por lo tanto $\bar{f} \in \mathfrak{F}_{-m} \cong \Gamma(\mathcal{E}_{-m})$.

Así teniendo $f, g \in \mathfrak{F}_m \cong \Gamma(\mathcal{E}_m)$, entonces $\bar{f} \cdot g \in \mathfrak{F}_{-m+m} = \mathfrak{F}_0 \cong \Gamma(\mathcal{E}_0) \cong C(\mathbb{S}^2)$ por nuestros resultados anteriores. ✱

Como comentario, cabe mencionar que el producto $f \cdot g$ corresponde a una sección

$$s_{f \cdot g} \in \Gamma(\mathcal{E}_m \otimes \mathcal{E}_k) \cong \Gamma(\mathcal{E}_{m+k}).$$

Lema 3.2.4 (Generadores de $\Gamma(\mathcal{E}_m)$). *Sean $N \in \mathbb{N}$, $V = (V_1, \dots, V_N) \in \text{Mat}_{1 \times N}(C(\mathbb{C}))$ tal que para todo $j = 1, 2, \dots, N$, $V_j \in \Gamma(\mathcal{E}_m)$, y además $VV^* = \mathbb{1}$. Consideramos $\Gamma(\mathcal{E}_m) \cong \text{PC}(\mathbb{S}^2)^N$ con $\mathbf{P} = V^*V$. Entonces $\Gamma(\mathcal{E}_m) = \text{Gen}_{C(\mathbb{S}^2)} \{V_1, \dots, V_N\}$.*

Demostración. Dado que $\Gamma(\mathcal{E}_m) \cong \text{PC}(\mathbb{S}^2)^N$, entonces basta demostrar que

$$\begin{aligned} \text{PC}(\mathbb{S}^2)^N &\cong \text{Gen}_{C(\mathbb{S}^2)} \{V_1, \dots, V_N\} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^N f_j V_j : f_j \in C(\mathbb{S}^2) \right\}. \end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned} \psi : \text{PC}(\mathbb{S}^2)^N &\rightarrow \text{Gen}_{C(\mathbb{S}^2)} \{V_1, \dots, V_N\}, \text{ por} \\ \psi \left(\mathbf{P} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \right) &:= \sum_{j=1}^N f_j V_j = V \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observamos que ψ es bien definido:

$$\mathbf{P} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix},$$

si y sólo si

$$\mathbf{P} \begin{pmatrix} f_1 - g_1 \\ \vdots \\ f_N - g_N \end{pmatrix} = 0.$$

Entonces tenemos que demostrar lo siguiente

$$P \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = 0 \quad \text{implica} \quad V \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = 0.$$

Considerando

$$P \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = V^* V \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = 0,$$

entonces

$$\begin{aligned} \psi \left(P \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \right) &= V \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = 1 \cdot V \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = V V^* V \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = V P \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ψ está bien definido. Ahora definimos

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Gen}_{C(\mathbb{S}^2)} \{V_1, \dots, V_N\} &\rightarrow \text{PC}(\mathbb{S}^2)^N, \text{ por} \\ \Phi \left(\sum_{j=1}^N g_j V_j \right) &:= P \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Y de forma análoga, se demostrará que Φ está bien definido. Supongamos que

$$\sum_{j=1}^N g_j V_j = 0.$$

Entonces

$$0 = \sum_{j=1}^N g_j V_j = V \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix}.$$

Lo cual nos implica que

$$P \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix} = V^* V \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix} = V^* \cdot 0 = 0.$$

Así, se procederá a mostrar que ψ y Φ son morfismos inversos:

$$\psi \circ \Phi \left(\sum_{j=1}^N g_j V_j \right) = \psi \left(P \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix} \right) = \sum_{j=1}^N g_j V_j.$$

De igual forma:

$$\Phi \circ \psi \left(P \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \right) = \Phi \left(\sum_{j=1}^N f_j V_j \right) = P \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}.$$



Dado que ${}_s Y_{|s|,k} \in \Gamma(\mathcal{E}_{2s})$ por (3.8), queremos presentar los módulos proyectivos usando las secciones ${}_s Y_{|s|,k}$, $k = -|s|, \dots, |s|$. De este modo, sea $m \in \mathbb{Z}$. Para $m > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} Y_{\frac{m}{2},k}(z, \bar{z}) &\sim \frac{(-\bar{z})^{\frac{m}{2}-k}}{(1+z\bar{z})^{\frac{m}{2}}}, \quad k = -\frac{m}{2}, -\frac{m}{2} + 1, \dots, \frac{m}{2}, \\ -\frac{m}{2} Y_{\frac{m}{2},k}(z, \bar{z}) &\sim \frac{z^{\frac{m}{2}+k}}{(1+z\bar{z})^{\frac{m}{2}}}, \quad k = -\frac{m}{2}, -\frac{m}{2} + 1, \dots, \frac{m}{2}, \end{aligned}$$

por (3.4). Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo. Definimos

$$\begin{aligned} V_j^m(z, \bar{z}) &:= \sqrt{\binom{m}{j}} \frac{\bar{z}^j}{(1+z\bar{z})^{\frac{m}{2}}}, \quad j = 0, 1, \dots, m, \\ V_j^{-m}(z, \bar{z}) &:= \sqrt{\binom{m}{j}} \frac{z^j}{(1+z\bar{z})^{\frac{m}{2}}}, \quad j = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} V_j^m(z, \bar{z}) &\sim \frac{m}{2} Y_{\frac{m}{2}, \frac{m}{2}-j}(z, \bar{z}), \\ V_j^{-m}(z, \bar{z}) &\sim -\frac{m}{2} Y_{\frac{m}{2}, j-\frac{m}{2}}(z, \bar{z}). \end{aligned} \tag{3.9}$$

En particular para todo $j = 0, 1, \dots, m$.

$$\begin{aligned} V_j^m(z, \bar{z}) &\in \Gamma(\mathcal{E}_m), \\ V_j^{-m}(z, \bar{z}) &\in \Gamma(\mathcal{E}_{-m}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ahora definimos

$$\begin{aligned} V_m &:= (V_m^m, \dots, V_0^m), \\ V_{-m} &:= (V_m^{-m}, \dots, V_0^{-m}). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} V_m V_m^* &= \frac{1}{(1+z\bar{z})^m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (z\bar{z})^j \\ &= \frac{1}{(1+z\bar{z})^m} (1+z\bar{z})^m = 1 = V_{-m} V_{-m}^*. \end{aligned}$$

De esta forma, $Q_{\pm m} := V_{\pm m} V_{\pm m}^*$ es una proyección ortogonal. Es decir,

$$Q_{\pm m}^* = Q_{\pm m} = Q_{\pm m}^2.$$

Por otro lado, observamos que $\overline{V_j^m} = V_j^{-m}$. Por lo tanto para todo $m \in \mathbb{Z}$, $j, k = 0, \dots, |m|$,

$$\overline{V_j^m} V_k^m \in \Gamma(\mathcal{E}_0) = C(\mathbb{S}^2),$$

luego

$$\mathbf{Q}_{\pm m} \in \text{Mat}_{|m|+1 \times |m|+1}(C(\mathbb{S}^2)).$$

Ya hemos demostrado en el corolario de la sección 2.4 que

$$\Gamma(\mathcal{E}_m) \cong \mathbf{P}_m C(\mathbb{S}^2)^2,$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_m &= \frac{1}{1 + (z\bar{z})^m} \begin{pmatrix} 1 & \bar{z}^m \\ z^m & (z\bar{z})^m \end{pmatrix}, \quad m > 0, \\ \mathbf{P}_{-m} &= \frac{1}{1 + (z\bar{z})^m} \begin{pmatrix} 1 & z^m \\ \bar{z}^m & (z\bar{z})^m \end{pmatrix}, \quad m < 0. \end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned} X_m &:= \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (z\bar{z})^m}}, \frac{\bar{z}^m}{\sqrt{1 + (z\bar{z})^m}} \right), \quad m > 0, \\ X_{-m} &:= \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (z\bar{z})^m}}, \frac{z^m}{\sqrt{1 + (z\bar{z})^m}} \right), \quad m < 0. \end{aligned}$$

Entonces $X_{\pm m} X_{\pm m}^* = 1$, y además

$$\mathbf{P}_{\pm m} = X_{\pm m}^* X_{\pm m}.$$

Lema 3.2.5. Para $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + (z\bar{z})^m}}, \frac{\bar{z}^m}{\sqrt{1 + (z\bar{z})^m}} &\in \Gamma(\mathcal{E}_m), \\ \frac{1}{\sqrt{1 + (z\bar{z})^m}}, \frac{z^m}{\sqrt{1 + (z\bar{z})^m}} &\in \Gamma(\mathcal{E}_{-m}). \end{aligned}$$

Demostración. Usaremos el isomorfismo $\Gamma(\mathcal{E}_{\pm m}) \cong \mathfrak{F}_{\pm m}$ del corolario 2.4.2. Como

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^{\pm \frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (z\bar{z})^m}} \right| = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + (z\bar{z})^m}} = 0,$$

se tiene que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^{\pm \frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (z\bar{z})^m}} = 0 \in \mathbb{C} \text{ existe,}$$

entonces

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (z\bar{z})^m}} \in \mathfrak{F}_m, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + (z\bar{z})^m}} \in \mathfrak{F}_{-m}.$$

Además

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^{\frac{m}{2}} \frac{\bar{z}^m}{\sqrt{1 + (z\bar{z})^m}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(\bar{z}z)^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{1 + (z\bar{z})^m}} = 1 \in \mathbb{C},$$

entonces

$$\frac{\bar{z}^m}{\sqrt{1 + (z\bar{z})^m}} \in \mathfrak{F}_m \cong \Gamma(\mathcal{E}_m).$$

Luego, por el lema 3.2.3,

$$\frac{z^m}{\sqrt{1 + (z\bar{z})^m}} = \overline{\frac{\bar{z}^m}{\sqrt{1 + (z\bar{z})^m}}} \in \Gamma(\mathcal{E}_{-m}).$$

✱

Corolario 3.2.1.

$$V_{\pm m}^* X_{\pm m} \in \text{Mat}_{|m|+1 \times 2}(C(\mathbb{S}^2))$$

Demostración. Sin pérdida de la generalidad, consideramos V_m y X_m como fueron definidos anteriormente. Observamos que $V_m \in \text{Mat}_{1 \times |m|+1}(\Gamma(\mathcal{E}_m))$ por la ecuación (3.10), así como $X_m \in \text{Mat}_{1 \times 2}(\Gamma(\mathcal{E}_m))$ por el lema 3.2.5. De esta forma $V_m^* \in \text{Mat}_{|m|+1 \times 1}(\Gamma(\mathcal{E}_{-m}))$ ya que $\overline{V_j^m} = V_j^{-m}$. Por lo tanto, las entradas de $V_m^* X_m$ estarán en $\Gamma(\mathcal{E}_0) = C(\mathbb{S}^2)$ por el lema 3.2.3. Ocurre así que

$$V_m^* X_m \in \text{Mat}_{|m|+1 \times 2}(C(\mathbb{S}^2)).$$

De forma análoga ocurre para el caso $V_{-m}^* X_{-m}$.

✱

Proposición 3.2.1. Sea $Q_{\pm m} := V_{\pm m} V_{\pm m}^*$. Entonces

$$\Gamma(\mathcal{E}_{\pm m}) \cong Q_{\pm m} C(\mathbb{S}^2)^{|m|+1}.$$

Demostración. Ya sabemos que

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{E}_{\pm m}) &\cong P_{\pm m} C(\mathbb{S}^2)^2, \\ &= X_{\pm m}^* X_{\pm m} C(\mathbb{S}^2)^2. \end{aligned}$$

Como

$$Q_{\pm m} = V_{\pm m}^* V_{\pm m} \in \text{Mat}_{m+1 \times m+1}(C(\mathbb{S}^2)),$$

y también

$$V_{\pm m}^* X_{\pm m} \in \text{Mat}_{|m|+1 \times 2}(C(\mathbb{S}^2)),$$

tenemos que por el lema 3.2.2,

$$\Gamma(\mathcal{E}_{\pm m}) \cong P_{\pm m} C(\mathbb{S}^2)^2 \cong Q_{\pm m} C(\mathbb{S}^2)^{|m|+1}.$$

✱

Lema 3.2.6. Consideremos $V_j^{\pm m}$ como fue definido previamente. Entonces la siguiente igualdad tiene lugar

$$\left\{ \sum_{j=0}^m s_j V_j^{\pm m} : s_j \in \Gamma(\mathcal{E}_{\pm 1}) \right\} = \Gamma(\mathcal{E}_{\pm m \pm 1}).$$

Demostración. Por el lema 3.2.3, ya sabemos que para todo $f \in \Gamma(\mathcal{E}_k)$, $g \in \Gamma(\mathcal{E}_l)$, tenemos $fg \in \Gamma(\mathcal{E}_{k+l})$. Entonces es claro que

$$\left\{ \sum_{j=0}^m s_j V_j^{\pm m} : s_j \in \Gamma(\mathcal{E}_{\pm 1}) \right\} \subset \Gamma(\mathcal{E}_{\pm m \pm 1}).$$

Dado que ambos lados son $C(\mathbb{S}^2)$ -módulos, entonces para demostrar la otra contención, basta demostrar que

$$V_0^{\pm m \pm 1}, \dots, V_{|\pm m \pm 1|}^{\pm m \pm 1} \in \left\{ \sum_{j=0}^m s_j V_j^{\pm m} : s_j \in \Gamma(\mathcal{E}_{\pm 1}) \right\},$$

ya que por el lema 3.2.4 y la proposición 3.2.1

$$\Gamma(\mathcal{E}_k) = \text{Gen}_{C(\mathbb{S})} \{V_0^k, \dots, V_{|k|}^k\}.$$

De esta forma, por el lema 3.2.5 sabemos que

$$\frac{z}{\sqrt{1+(z\bar{z})}}, \frac{1}{\sqrt{1+(z\bar{z})}} \in \Gamma(\mathcal{E}_1).$$

Sea $m > 0$. Entonces para todo $j = 0, 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned} V_j^{-m-1}(z, \bar{z}) &\sim \frac{z^j}{(1+z\bar{z})^{\frac{m+1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+z\bar{z}}} \frac{z^j}{(1+z\bar{z})^{\frac{m}{2}}} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{1+z\bar{z}}} V_j^{-m}(z, \bar{z}) \in \Gamma(\mathcal{E}_{-1})\Gamma(\mathcal{E}_{-m}), \\ V_{m+1}^{-m-1}(z, \bar{z}) &\sim \frac{z^{m+1}}{(1+z\bar{z})^{\frac{m+1}{2}}} = \frac{z}{\sqrt{1+z\bar{z}}} \frac{z^m}{(1+z\bar{z})^{\frac{m}{2}}} \\ &\sim \frac{z}{\sqrt{1+z\bar{z}}} V_m^{-m}(z, \bar{z}) \in \Gamma(\mathcal{E}_{-1})\Gamma(\mathcal{E}_{-m}). \end{aligned}$$

De esta forma se tiene que

$$\Gamma(\mathcal{E}_{-m-1}) = \left\{ \sum_{j=0}^m s_j V_j^{-m} : s_j \in \Gamma(\mathcal{E}_{-1}) \right\}.$$

Por otra parte se consigue

$$\Gamma(\mathcal{E}_{m+1}) = \left\{ \sum_{j=0}^m s_j V_j^m : s_j \in \Gamma(\mathcal{E}_1) \right\},$$

de aplicar la conjugación compleja. Ahora, para $j = 0, \dots, m-1$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{z}{\sqrt{1+z\bar{z}}} V_{j+1}^m + \frac{1}{\sqrt{1+z\bar{z}}} V_j^m &\sim \frac{1}{\sqrt{1+z\bar{z}}} \frac{(z\bar{z}+1)\bar{z}^j}{(1+z\bar{z})^{\frac{m}{2}}} = \\ &= \frac{\bar{z}^j}{(1+z\bar{z})^{\frac{m-1}{2}}} \sim V_j^{m-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que

$$V_0^{m-1}, \dots, V_{m-1}^{m-1} \in \left\{ \sum_{j=0}^m s_j V_j^m : s_j \in \Gamma(\mathcal{E}_{-1}) \right\},$$

y entonces

$$\Gamma(\mathcal{E}_{m-1}) = \left\{ \sum_{j=0}^m s_j V_j^m : s_j \in \Gamma(\mathcal{E}_{-1}) \right\}.$$

Ahora aplicando el complejo conjugado tenemos

$$\Gamma(\mathcal{E}_{-m-1}) = \left\{ \sum_{j=0}^m s_j V_j^{-m} : s_j \in \Gamma(\mathcal{E}_1) \right\}.$$

Quedando así, demostrado el lema. ✱

Lema 3.2.7. Sean $x \in \Gamma(\mathcal{E}_{-1})$, $f \in \Gamma(\mathcal{E}_{-m})$, $g \in \Gamma(\mathcal{E}_m)$. Entonces tenemos

$$\delta_z(fgx) = ({}_{-m}\delta_z f)gx + f({}_m\delta_z g)x + fg(\delta_z x),$$

donde $\delta_z = {}_{-1}\delta_z = (1 + z\bar{z})\partial_z - \frac{1}{2}\bar{z}$.

Demostración. Realizando la computación directa de $\delta_z(fgx)$ y usando la definición del operador δ tenemos

$$\begin{aligned} \delta_z(fgx) &= (1 + z\bar{z})\partial_z(fgx) - \frac{1}{2}\bar{z}fgx \\ &= (1 + z\bar{z}) \left(\frac{\partial f}{\partial z}gx + f\frac{\partial g}{\partial z}x + fg\frac{\partial x}{\partial z} \right) - \frac{1}{2}\bar{z}fgx \\ &= (1 + z\bar{z}) \left(\frac{\partial f}{\partial z}gx + f\frac{\partial g}{\partial z}x - \frac{m}{2}\bar{z}fgx + \frac{m}{2}\bar{z}fgx \right) + fg \left((1 + z\bar{z})\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{1}{2}\bar{z}x \right) \\ &= \left((1 + z\bar{z})\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{m}{2}\bar{z}f \right) gx + f \left((1 + z\bar{z})\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{m}{2}\bar{z}g \right) x + fg \left((1 + z\bar{z})\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{1}{2}\bar{z}x \right). \end{aligned}$$

Finalmente agrupando y usando la definición de ${}_m\delta_z$ y ${}_{-m}\delta_z$ tenemos

$$\delta_z(fgx) = ({}_{-m}\delta_z f)gx + f({}_m\delta_z g)x + fg(\delta_z x).$$

✱

Lema 3.2.8. Para $m \in \mathbb{Z}$ y $x_{-1} \in \Gamma(\mathcal{E}_{-1})^{|m|+1}$ tenemos

$$\mathbb{Q}_m\delta_z(\mathbb{Q}_m x_{-1}) = V_m^* ({}_{m-1}\delta_z(V_m x_{-1})).$$

Demostración. Por el lema anterior, y recordando que $V_m V_m^* = 1$:

$$\begin{aligned}
Q_m \partial_z (Q_m x_{-1}) &= V_m^* V_m \partial_z (V_m^* V_m x_{-1}) \\
&= V_m^* V_m (-_m \partial_z V_m^*) V_m x_{-1} + \underbrace{V_m^* V_m V_m^*}_{=1} ({}_m \partial_z V_m) x_{-1} + \underbrace{V_m^* V_m V_m^*}_{=1} V_m (\partial_z x_{-1}) \\
&= V_m^* V_m (-_m \partial_z V_m^*) V_m x_{-1} + V_m^* (({}_m \partial_z V_m) x_{-1} + V_m (\partial_z x_{-1})) \\
&= V_m^* V_m (-_m \partial_z V_m^*) V_m x_{-1} + \\
&\quad + V_m^* \left(\left(\frac{\partial}{\partial z} V_m \right) x_{-1} + \frac{m}{2} \bar{z} V_m x_{-1} + V_m \frac{\partial}{\partial z} x_{-1} - \frac{1}{2} \bar{z} V_m x_{-1} \right) \\
&= V_m^* V_m (-_m \partial_z V_m^*) V_m x_{-1} + V_m^* \left(\frac{\partial}{\partial z} (V_m x_{-1}) + \frac{m-1}{2} \bar{z} V_m x_{-1} \right) \\
&= V_m^* V_m (-_m \partial_z V_m^*) V_m x_{-1} + V_m^* ({}_{m-1} \partial_z (V_m x_{-1})).
\end{aligned}$$

De esta forma, para demostrar el lema, basta exhibir que

$$V_m (-_m \partial_z V_m^*) = 0.$$

Sea $m \leq 0$. Escribamos $s := -m/2 \geq 0$. Por las formulas de (3.9), vemos que las entradas del vector V_m^* están dadas por

$$\overline{V_j^m(z, \bar{z})} = V_j^{-m}(z, \bar{z}) \sim {}_s Y_{s(s-j)}(z, \bar{z}),$$

y por la ecuación (3.7) sabemos que, para todo $j = s - k$, donde $k = -s, -s + 1, \dots, s$,

$$-_m \partial_z \overline{V_j^m(z, \bar{z})} \sim {}_{2s} \partial_z {}_s Y_{sk} = 0.$$

Esto implica, para todo $j = 0, \dots, |m|$:

$$-_m \partial_z \overline{V_j^m(z, \bar{z})} = 0,$$

y que a su vez implica ${}_m \partial_z V_m^* = 0$ porque tenemos cero en cada entrada. Por lo tanto,

$$V_m (-_m \partial_z V_m^*) = V_m \cdot 0 = 0,$$

que es precisamente lo que queríamos demostrar. Ahora sea $m > 0$ y $s := m/2 \geq 0$. Para este caso, las entradas de V_m están dadas por múltiplos de

$${}_s Y_{sk}(z, \bar{z}), \quad k = -s, -s + 1, \dots, s,$$

entonces por lo anterior

$${}_m \partial_z {}_s Y_{sk} = {}_{2s} \partial_z {}_s Y_{sk} = 0.$$

Así, ${}_m \partial_z V_m = 0$ por los mismos argumentos previos. Dado que $V_m V_m^* = 1$ tenemos además

$$\begin{aligned}
0 &= (1 + z\bar{z}) \frac{\partial}{\partial z} (V_m V_m^*) \\
&= (1 + z\bar{z}) \left(\left(\frac{\partial}{\partial z} V_m \right) V_m^* + V_m \left(\frac{\partial}{\partial z} V_m^* \right) \right) + \frac{m}{2} \bar{z} V_m V_m^* - \frac{m}{2} \bar{z} V_m V_m^* \\
&= \left((1 + z\bar{z}) \frac{\partial}{\partial z} V_m + \frac{m}{2} \bar{z} V_m \right) V_m^* + V_m \left((1 + z\bar{z}) \frac{\partial}{\partial z} V_m^* - \frac{m}{2} \bar{z} V_m^* \right) \\
&= ({}_m \partial_z V_m) V_m^* + V_m (-_m \partial_z V_m^*) \\
&= V_m (-_m \partial_z V_m^*),
\end{aligned}$$

dato que, por lo anterior, ${}_m\check{\partial}_z V_m = 0$. De esta forma para todo $m \in \mathbb{Z}$, $V_m ({}_{-m}\check{\partial}_z V_m^*) = 0$ como era deseado demostrar. \star

Lema 3.2.9. *Para todo $g \in \Gamma(\mathcal{E}_{m+1})$ tenemos que*

$$V_m^* g \in \mathbb{Q}_m \Gamma(\mathcal{E}_1)^{|m|+1} \quad y \quad V_m^* g = 0,$$

si y sólo si $g = 0$.

Demostración. Sea $g \in \Gamma(\mathcal{E}_{m+1})$ tal que $V_m^* g = 0$. Recordando que $\mathbb{Q}_m = V_m^* V_m$, así como $V_m V_m^* = 1$, entonces

$$\mathbb{Q}_m V_m^* g = V_m^* \underbrace{V_m V_m^*}_1 g = V_m^* g.$$

De esta forma, $V_m^* g \in \text{Imagen}(\mathbb{Q})$. Además las entradas $\overline{V_j^m}$ de V_m^* están en $\Gamma(\mathcal{E}_{-m})$, así

$$\overline{V_j^m} g \in \Gamma(\mathcal{E}_{-m+m+1}) = \Gamma(\mathcal{E}_1),$$

por lo tanto $V_m^* g \in \Gamma(\mathcal{E}_1)^{|m|+1}$. Observemos que

$$|V_j^m(z, \bar{z})| = \sqrt{\binom{|m|}{j} \frac{|z|^j}{(1+z\bar{z})^{\frac{|m|}{2}}}} > 0,$$

en casi todo punto. Entonces $V_j^m g = 0$ en $\mathcal{H}_+ = L_2(\mathbb{C}, d\lambda(x_1, x_2))$, si y sólo si $g(z, \bar{z})$ en casi todo punto. Como $g \in \Gamma(\mathcal{E}_{m+1})$ es continua, tenemos $V_m^* g = 0$, si y sólo si $g = 0$. \star

Corolario 3.2.2. *Sea $x_{-1} \in \Gamma(\mathcal{E}_{-1})^{|m|+1} \cap \text{dom}(\check{\partial}_z)$, entonces*

$$\mathbb{Q}_m \check{\partial}_z(\mathbb{Q}_m x_{-1}) = 0,$$

si y sólo si

$$V_m x_{-1} \in \text{Gen} \left\{ \frac{m-1}{2} Y_{\frac{m-1}{2}, k} : k = -\frac{m-1}{2}, -\frac{m-1}{2} + 1, \dots, \frac{m-1}{2} \right\} \quad \text{para } m > 0,$$

$$V_m x_{-1} = 0, \quad \text{para } m \leq 0.$$

Sea $x_1 \in \Gamma(\mathcal{E}_1) \cap \text{dom}(\bar{\check{\partial}}_z)$, entonces

$$\mathbb{Q}_m \bar{\check{\partial}}_z(\mathbb{Q}_m x_1) = 0$$

si y sólo si

$$V_m x_1 = 0, \quad \text{para } m \geq 0,$$

$$V_m x_1 \in \text{Gen} \left\{ \frac{m+1}{2} Y_{\frac{m+1}{2}, k} : k = -\frac{m+1}{2}, -\frac{m+1}{2} + 1, \dots, \frac{m+1}{2} \right\} \quad \text{para } m < 0.$$

Demostración. En virtud al lema 3.2.8,

$$\mathbb{Q}_m \check{\partial}_z(\mathbb{Q}_m x_{-1}) = 0, \quad \text{si y sólo si } V_m^* ({}_{m-1}\check{\partial}_z(V_m x_{-1})) = 0.$$

Por el lema anterior,

$$V_m^* ({}_{m-1}\check{\partial}_z(V_m x_{-1})) = 0, \quad \text{si y sólo si } {}_{m-1}\check{\partial}_z(V_m x_{-1}) = 0.$$

Por el lema 3.2.3, $V_m x_{-1} \in \Gamma(\mathcal{E}_{m-1})$, entonces $V_m x_{-1} \in \text{Ker}({}_{m-1}\check{\partial}_z)$.

Sea $s := (m - 1)/2$. Como

$$\begin{aligned} & \{ {}_s Y_{lk} : l = |s|, |s| + 1, \dots, k = -l, \dots, l \}, \\ & \{ {}_{s+1} Y_{lk} : l = |s + 1|, |s + 1| + 1, \dots, k = -l, \dots, l \} \end{aligned}$$

son bases ortonormales de $L_2(\mathbb{C}, d^2a)$ y por la ecuación (3.7)

$${}_{m-1} \bar{\partial}_z {}_s Y_{lk} = \lambda_{sl} {}_{s+1} Y_{lk}$$

con $\lambda_{sl} = 0$, si y sólo si $s \geq 0$ y $l = s$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Ker}({}_{m-1} \bar{\partial}_z) &= \text{Gen} \left\{ \frac{m-1}{2} Y_{\frac{m-1}{2}, k} : k = -\frac{m-1}{2}, -\frac{m-1}{2} + 1, \dots, \frac{m-1}{2} \right\}, \quad \text{si } m > 0 \text{ y} \\ \text{Ker}({}_{m-1} \bar{\partial}_z) &= \{0\} \text{ si } m \leq 0. \end{aligned}$$

El resultado para $\bar{\partial}_z$ se obtiene de lo anterior observando que

$${}_s \bar{\partial}_z f = \overline{-s \bar{\partial}_z \bar{f}}.$$



3.3. Cálculo del Índice

Antes de proceder, cabe mencionar que

$$Q_m \bar{\partial}_z Q_m : \text{dom}(Q_m \bar{\partial}_z Q_m) \subset Q_m \mathcal{H}_-^{|m|+1} \rightarrow Q_m \mathcal{H}_+^{|m|+1}.$$

Teorema. Sea $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\text{Ind}(Q_m \bar{\partial}_z Q_m) = m.$$

Demostración. Primero observemos que $\bar{\partial}_z^* = -\bar{\partial}_z$ ya que $\mathcal{D} = \mathcal{D}^*$ (o se puede verificar sobre las bases ortonormales $\left\{ \pm \frac{1}{2} Y_{lk} : l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, k = -l, -l + 1, \dots, l \right\}$). Entonces

$$\begin{aligned} \text{Ind}(Q_m \bar{\partial}_z Q_m) &= \text{Dim}(\text{Ker}(Q_m \bar{\partial}_z Q_m)) - \text{Dim}(\text{coKer}(Q_m \bar{\partial}_z Q_m)) \\ &= \text{Dim}(\text{Ker}(Q_m \bar{\partial}_z Q_m)) - \text{Dim}(\text{Ker}(Q_m \bar{\partial}_z Q_m)^*) \\ &= \text{Dim}(\text{Ker}(Q_m \bar{\partial}_z Q_m)) - \text{Dim}(\text{Ker}(Q_m^* \bar{\partial}_z^* Q_m^*)) \\ &= \text{Dim}(\text{Ker}(Q_m \bar{\partial}_z Q_m)) - \text{Dim}(\text{Ker}(Q_m \bar{\partial}_z Q_m)). \end{aligned}$$

Por el corolario 3.2.2, ocurre para $x_{-1} \in (\Gamma(\mathcal{E}_{-1}) \cap \text{dom}(\bar{\partial}_z))^{|m|+1}$ que $Q_m \bar{\partial}_z(Q_m x_{-1}) = 0$, si y sólo si, para $m > 0$,

$$V_m x_{-1} \in \text{Gen} \left\{ \frac{m-1}{2} Y_{\frac{m-1}{2}, k} : k = -\frac{m-1}{2}, -\frac{m-1}{2} + 1, \dots, \frac{m-1}{2} \right\} = \text{Ker}({}_{m-1} \bar{\partial}_z),$$

y para $m \leq 0$, $V_m x_{-1} = 0$. Análogamente ocurre para $x_1 \in (\Gamma(\mathcal{E}_1) \cap \text{dom}(\delta_z))^{|m|+1}$ que $\mathbb{Q}_m \bar{\delta}_z(\mathbb{Q}_m x_1) = 0$, si y sólo si para $m < 0$,

$$V_m x_1 \in \text{Gen} \left\{ \frac{m-1}{2} Y_{|\frac{m+1}{2}|, k} : k = -|\frac{m+1}{2}|, -|\frac{m+1}{2}| + 1, \dots, |\frac{m+1}{2}| \right\} = \text{Ker} \left({}_{m+1}\bar{\delta}_z \right),$$

y para $m \geq 0$, $V_m x_1 = 0$. Ahora sea $m > 0$. Por el lema 3.2.6, tenemos para $m > 0$

$$\begin{aligned} \{V_m x_{-1} : x_{-1} \in \Gamma(\mathcal{E}_{-1})^{m+1}\} &= \Gamma(\mathcal{E}_{m-1}), \\ \{V_{-m} x_1 : x_1 \in \Gamma(\mathcal{E}_1)^{m+1}\} &= \Gamma(\mathcal{E}_{-m+1}). \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\text{Gen} \left\{ \frac{m-1}{2} Y_{\frac{m-1}{2}, k} : k = -\frac{m-1}{2}, \dots, \frac{m-1}{2} \right\} \subseteq \{V_m x_{-1} : x_{-1} \in \Gamma(\mathcal{E}_{-1})^{m+1}\}, \quad (3.11)$$

$$\text{Gen} \left\{ -\frac{m+1}{2} Y_{\frac{m-1}{2}, k} : k = -\frac{m-1}{2}, \dots, \frac{m-1}{2} \right\} \subseteq \{V_{-m} x_1 : x_1 \in \Gamma(\mathcal{E}_1)^{m+1}\}. \quad (3.12)$$

Para concluir el cálculo de índices, se tiene que determinar la dimensión de los espacios

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_m &:= \left\{ x_{-1} \in \mathbb{Q}_m \Gamma(\mathcal{E}_{-1})^{m+1} : V_m x_{-1} \in \text{Gen} \left\{ \frac{m-1}{2} Y_{\frac{m-1}{2}, -\frac{m-1}{2}}, \dots, \frac{m-1}{2} Y_{\frac{m-1}{2}, \frac{m-1}{2}} \right\} \right\}, \\ \mathfrak{X}_{-m} &:= \left\{ x_1 \in \mathbb{Q}_m \Gamma(\mathcal{E}_1)^{m+1} : V_{-m} x_1 \in \text{Gen} \left\{ -\frac{m-1}{2} Y_{\frac{m-1}{2}, -\frac{m-1}{2}}, \dots, -\frac{m-1}{2} Y_{\frac{m-1}{2}, \frac{m-1}{2}} \right\} \right\}, \end{aligned}$$

con $m \in \mathbb{N}$. Consideramos la aplicación \mathbb{C} -lineal

$$\begin{aligned} \Phi_m : \mathfrak{X}_m &\rightarrow \text{Gen} \left\{ \frac{m-1}{2} Y_{\frac{m-1}{2}, k} : k = -\frac{m-1}{2}, -\frac{m-1}{2} + 1, \dots, \frac{m-1}{2} \right\}, \\ x_{-1} &\mapsto V_m x_{-1}. \end{aligned}$$

Demostremos primero que Φ_m es sobreyectiva.

Sea $x_{-1} \in \Gamma(\mathcal{E}_{-1})^{m+1}$ tal que

$$V_m x_{-1} \in \text{Gen} \left\{ \frac{m-1}{2} Y_{\frac{m-1}{2}, k} : k = -\frac{m-1}{2}, -\frac{m-1}{2} + 1, \dots, \frac{m-1}{2} \right\}.$$

Como $V_m \mathbb{Q}_m x_{-1} = V_m V_m^* V_m x_{-1} = \text{id} \cdot V_m x_{-1} = V_m x_{-1}$, se obtiene que $\mathbb{Q}_m x_{-1} \in \mathfrak{X}_m$ y $\Phi_m(\mathbb{Q}_m x_{-1}) = V_m x_{-1}$. Luego, por la ecuación (3.11), Φ_m es sobreyectivo.

Sea $x_{-1} \in \text{Ker}(\Phi_m)$. Como $x_{-1} \in \mathbb{Q}_m \Gamma(\mathcal{E}_{-1})^{m+1}$, se cumple que $x_{-1} = \mathbb{Q}_m x_{-1}$. De ahí

$$x_{-1} = \mathbb{Q}_m x_{-1} = V_m^* V_m x_{-1} = V_m^* \Phi_m(x_{-1}) = 0,$$

entonces Φ_m es inyectivo. Por lo tanto, Φ_m es un isomorfismo, entonces

$$\begin{aligned} \text{Dim}(\mathfrak{X}_m) &= \text{Dim} \left(\text{Gen} \left\{ \frac{m-1}{2} Y_{\frac{m-1}{2}, k} : k = -\frac{m-1}{2}, -\frac{m-1}{2} + 1, \dots, \frac{m-1}{2} \right\} \right) \\ &= 2 \left(\frac{m-1}{2} \right) + 1 = m. \end{aligned}$$

De forma análoga, se demuestra que $\text{Dim}(\mathfrak{X}_{-m}) = m$.

Del corolario 3.2.2 y de lo anterior, se obtiene para $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& \text{Dim} (\text{Ker} (\mathbb{Q}_m \partial_z \mathbb{Q}_m)) = \\
& = \left\{ x_{-1} \in \mathbb{Q}_m \Gamma(\mathcal{E}_{-1})^{m+1} : V_m x_{-1} \in \text{Gen} \left\{ \frac{m-1}{2} Y_{\frac{m-1}{2}, -\frac{m-1}{2}}, \dots, \frac{m-1}{2} Y_{\frac{m-1}{2}, \frac{m-1}{2}} \right\} \right\} \\
& = \text{Dim} (\mathfrak{X}_m) \\
& = m,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Dim} (\text{Ker} (\mathbb{Q}_{-m} \bar{\partial}_z \mathbb{Q}_{-m})) = \\
& = \left\{ x_1 \in \mathbb{Q}_{-m} \Gamma(\mathcal{E}_1)^{m+1} : V_{-m} x_1 \in \text{Gen} \left\{ -\frac{m-1}{2} Y_{\frac{m-1}{2}, -\frac{m-1}{2}}, \dots, -\frac{m-1}{2} Y_{\frac{m-1}{2}, \frac{m-1}{2}} \right\} \right\} \\
& = \text{Dim} (\mathfrak{X}_{-m}) \\
& = m.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Sea ahora $x_{-1} \in \mathbb{Q}_{-m} \Gamma(\mathcal{E}_{-1})^{m+1}$ tal que $V_{-m} x_{-1} = 0$. Entonces

$$x_{-1} = \mathbb{Q}_{-m} x_{-1} = V_{-m}^* V_{-m} x_{-1} = 0.$$

Luego, por el corolario 3.2.2,

$$\begin{aligned}
& \text{Dim} (\text{Ker} (\mathbb{Q}_{-m} \partial_z \mathbb{Q}_{-m})) = \text{Dim} (\{x_{-1} \in \mathbb{Q}_{-m} \Gamma(\mathcal{E}_{-1})^{m+1} : V_{-m} x_{-1} = 0\}) \\
& = \text{Dim} (\{0\}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

De forma análoga, $x_1 \in \mathbb{Q}_m \Gamma(\mathcal{E}_1)^{m+1}$ y $V_m x_1 = 0$ implica $x_1 = \mathbb{Q}_m x_1 = V_m^* V_m x_1 = 0$, entonces por el corolario 3.2.2

$$\begin{aligned}
& \text{Dim} (\text{Ker} (\mathbb{Q}_m \bar{\partial}_z \mathbb{Q}_m)) = \text{Dim} (\{x_1 \in \mathbb{Q}_m \Gamma(\mathcal{E}_1)^{m+1} : V_m x_1 = 0\}) \\
& = \text{Dim} (\{0\}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Sea ahora $m \in \mathbb{Z}$. Entonces para $m > 0$, por (3.13) y (3.16) tenemos

$$\begin{aligned}
& \text{Ind} (\mathbb{Q}_m \partial_z \mathbb{Q}_m) = \text{Dim} (\text{Ker} (\mathbb{Q}_m \partial_z \mathbb{Q}_m)) - \text{Dim} (\text{coKer} (\mathbb{Q}_m \partial_z \mathbb{Q}_m)) \\
& = \text{Dim} (\text{Ker} (\mathbb{Q}_m \partial_z \mathbb{Q}_m)) - \text{Dim} (\text{Ker} (\mathbb{Q}_m \bar{\partial}_z \mathbb{Q}_m)) \\
& = m - 0 = m,
\end{aligned}$$

y análogamente, para $m < 0$, tenemos por (3.15) y (3.14):

$$\begin{aligned}
& \text{Ind} (\mathbb{Q}_m \bar{\partial}_z \mathbb{Q}_m) = \text{Dim} (\text{Ker} (\mathbb{Q}_m \bar{\partial}_z \mathbb{Q}_m)) - \text{Dim} (\text{coKer} (\mathbb{Q}_m \bar{\partial}_z \mathbb{Q}_m)) \\
& = \text{Dim} (\text{Ker} (\mathbb{Q}_m \bar{\partial}_z \mathbb{Q}_m)) - \text{Dim} (\text{Ker} (\mathbb{Q}_m \partial_z \mathbb{Q}_m)) \\
& = 0 - |m| \\
& = m.
\end{aligned}$$

Además, para $m = 0$ tenemos $Q_m = \mathbb{1}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{Ind}(Q_0 \partial_z Q_0) &= \text{Ind}(\partial_z) \\ &= \text{Dim}(\text{Ker}(\partial_z)) - \text{Dim}(\text{Ker}(\overline{\partial_z})) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ya que $\text{Ker}(\partial_z) = \text{Ker}(\overline{\partial_z}) = \{0\}$ sobre $\Gamma(\mathcal{E}_{-1})$ y $\Gamma(\mathcal{E}_1)$, respectivamente.

Por lo tanto, es concluyente que para todo $m \in \mathbb{Z}$, $\text{Ind}(Q_m \partial_z Q_m) = m$. ✱

Conclusión

Habiendo establecido los conceptos básicos para trabajar en calcular el índice para el operador de Dirac \mathcal{D} , hemos llegado a la conclusión que para dicho operador, con dominio en la 2-esfera \mathbb{S}^2 , su índice está completamente determinado por la dimensión de las proyecciones $Q_m \in \text{Mat}_{|m|+1 \times |m|+1}(C^\infty(\mathbb{S}^2))$, las cuales vienen a estar representadas por haces \mathbb{C} -lineales con número de giro $m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \text{Ind}(Q_m \partial_z Q_m) &= \text{Dim}(\text{Ker}(Q_m \partial_z Q_m)) - \text{Dim}(\text{coKer}(Q_m \partial_z Q_m)), \\ &= m. \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] A. Connes. *Noncommutative Geometry*. Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.
- [2] J. M. Gracia-Bondía, J. C. Várilly, and H. Figueroa. *Elements of Noncommutative Geometry*. Birkhäuser Inc., Boston, MA, 2001.
- [3] M. Karoubi. *K-Theory. An Introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [4] E. T. Newman and R. Penrose. Note on the Bondi-Metzner-Sachs Group. *J. Math. Phys.*, 7(1966):863–870.
- [5] J. Rosenberg. *Algebraic K-Theory and its Applications*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [6] J. C. Várilly. *An Introduction to Noncommutative Geometry*, volume 4. European Mathematical Society, Zürich, 2006.
- [7] N. E. Wegge-Olsen. *K-Theory and C*-Algebras: A Friendly Approach*. Oxford University Press, New York, 1993.