



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Instituto de física y matemáticas

Modelos cosmológicos de quintaesencia interactuante

Tesis para obtener el grado de Maestra en Ciencias en el área de
física elaborada por:

Aixa Mirena De La Torre Gálvez

Supervisado por:
Dr. Ulises Nucamendi Gómez

Morelia, Michoacán
Octubre, 2018.

Dedicado a mi estrella favorita.

Agradecimientos

Me gustaría agradecer en estas líneas el apoyo que muchas personas y colegas me han brindado durante el proceso de investigación y redacción de este trabajo.

En primer lugar, quisiera agradecer a mis padres Sonia y Agustín que me han ayudado y brindado su confianza en todo, a mi tutor el Dr. Ulises, por haberme orientado en todos los momentos que necesité sus consejos, por la paciencia, los conocimientos transmitidos y el tiempo dedicado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) le agradezco la beca recibida durante la maestría, al Instituto de Física y Matemáticas por brindarme las facilidades para seguirme preparando académicamente, a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo mi alma mater. También me gustaría expresar mi gratitud a todo el personal administrativo del instituto, a la Mtra. Alejandra el apoyo de siempre.

Agradezco de igual manera a todos los docentes que han sido parte de mi formación, pues todos han contribuido en mi desarrollo profesional y personal. A mis compañeros del posgrado, en especial a Richi, Gonny y Misha.

Gracias a todos mis amigos, a mi hermano Jesús y a toda mi familia. Gracias al universo, gracias a la vida.

Por último pero no menos importante deseo expresar mi mayor agradecimiento a René por el sustento y apoyo, porque sin ti la carga hubiera sido mucho más pesada. Gracias por siempre estar, por ser mi universo.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	V
Abstract	1
1. Preliminares	2
1.1. Componentes del universo	3
1.2. Compendio de la teoría de la relatividad general	5
2. Cosmología	10
2.1. Elementos de la métrica de FLRW	10
2.2. Ecuaciones de continuidad	16
2.3. Ecuaciones de FLRW	17
2.4. Tipos de universos	24
2.4.1. Universo dominado por materia	24
2.4.2. Universo con materia, energía oscura y radiación	25
3. Análisis de sistemas dinámicos cosmológicos	26
3.1. Conceptos básicos	26
3.2. Sistemas dinámicos en cosmología	30
3.3. Modelo de constante cosmológica	32
3.3.1. Análisis de puntos críticos	33
3.4. Modelo con potencial exponencial	34
3.4.1. Análisis de puntos críticos	35
3.5. Modelos de energía oscura con interacción con materia oscura.	41
3.5.1. Punto crítico x_{++}	46
3.5.2. Punto crítico x_{--}	49
4. Conclusiones	73

A. Pruebas cosmológicas	75
A.1. Conceptos auxiliares	76
A.2. Distancia de Luminosidad	78
A.3. Luminosidad y flujo	79
A.3.1. La distancia modular.	81
A.3.2. Distancia diametral angular	83
A.4. Expresión $H(z)$	84

Resumen

En este trabajo se presenta un análisis cosmológico de modelos de energía oscura del tipo conocido como quintaesencia con y sin interacción con materia oscura. El capítulo uno tiene una breve descripción de lo que estudia la cosmología, cuáles son los componentes del universo y un compendio de la teoría general de la relatividad que es en la que se sustenta nuestro estudio actual del cosmos.

El segundo capítulo describe el principio cosmológico, que es el fundamento sobre el cual basamos nuestro estudio del universo a gran escala. En este capítulo se construyen las ecuaciones que rigen la evolución del cosmos a partir de la teoría de la relatividad general y se habla acerca de los tipos de universo tomando como caso particular un universo en el que domina la materia (oscura y bariónica).

En el tercer capítulo, introducimos el concepto de sistema dinámico y consideramos que la energía oscura puede ser descrita mediante un campo escalar de quintaesencia. A continuación, se construyen las ecuaciones del respectivo sistema dinámico cosmológico para componentes de materia sin interacción entre ellas y se analizan los casos de:

- Constante cosmológica para un universo espacialmente plano
- Campo escalar con un potencial exponencial sin densidad de energía de radiación y espacialmente plano.

En todos los casos estudiados hemos asumido materia oscura fría.

Por último se desarrollan las ecuaciones para materia oscura interactuante con energía oscura y se procede a realizar el análisis de puntos críticos. Dos casos particulares de este modelo propuesto habían sido estudiados previamente en las referencias [Choudhury et al., 2018] [Shahalam et al., 2015], sin embargo, los resultados presentados son erróneos debido a que la construcción de sus ecuaciones es incorrecta. Los resultados que hemos obtenido son más generales y se presentan por primera vez de manera correcta.

Las conclusiones se muestran en el capítulo cuatro y donde además, se presentan las ideas del trabajo que se pretende realizar a futuro.

Para concluir, como complemento a la presente tesis en el anexo habla acerca de las observables cosmológicas mediante las cuales obtenemos información directa o

indirecta de la evolución del universo. Son presentadas las cantidades que deben ser calculadas para obtener la estimación de los parámetros físicos que componen al cosmos para completar el estudio de un modelo específico.

Palabras clave: Cosmología, energía oscura, materia oscura, física teórica, universo.

Abstract

In this thesis we present a cosmological analysis of dark energy models with type known as quintessence considering interaction and non-interaction with dark matter. The first chapter contains a brief description about what cosmology studies, which the components of the universe are and a general relativity survey which is the basis for our cosmos. In the second chapter we describe the cosmological principle, which is the foundation of our study from the large scale universe. Also, we present the equations that reign the cosmos evolution from the general relativity theory and we talk about certain kinds of universes. In third chapter we introduce the concept of dynamical system and we regard dark energy as a scalar field of quintessence. Now we give the equations of the cosmological dynamical system for components of matter with non-interaction between them and we analyze the following cases:

- Cosmological constant for a flat universe.
- Scalar field with an exponential potential without radiation energy density and spatially flat

In those cases we assume cold dark matter.

Last we develop the equations for dark matter interacting with cold dark energy and then we make the analysis of critical points. Two particular cases for this purposed model have been previously studied, however the results presented there are wrong because of their construction of the equations is incorrect. The results obtained here are more general and they are presented right for the first time. Conclusions are shown in the fourth chapter and besides we talk about the future directions of our work.

Capítulo 1

Preliminares

La cosmología podría ser definida como la ciencia que se encarga del estudio del Universo, su origen, estructura, composición, forma, evolución, destino y de las leyes que la gobiernan en grandes escalas de espacio y tiempo. Es decir estudia la estructura global del Universo, y toma en cuenta a las estructuras locales que la componen, tales como las galaxias, nebulosas, agujeros negros, estrellas, planetas, entre muchas otras, pero las ve tan solo como las “partículas” que constituyen al Universo como un todo, y que al tomar su comportamiento global, logra determinar características a gran escala. En la escala cosmológica la gravedad es la interacción más importante que gobierna la dinámica del Universo, en comparación con las otras tres fuerzas fundamentales, por esta razón los modelos en la cosmología actual están construidos sobre la Teoría General de la Relatividad de Einstein (GR), que da una posible explicación de lo que es la gravedad y de cómo se comporta.

Gracias al gran avance de las ciencias, hoy podemos comprender un poco de lo que sucede en el universo, sin embargo, aún hay muchas preguntas sin respuesta tales como: ¿De qué tipos de materias está compuesto el cosmos? ¿Qué forma tiene el universo? ¿Cómo se formó y cuál será su desenlace? ¿Qué es la llamada “energía oscura” y cuáles modelos teóricos se ajustan mejor a las observaciones? ¿Por qué el universo pasó de estar en expansión desacelerada a acelerada?

Algunas de las preguntas anteriores fueron la motivación para realizar este trabajo, en especial las que tienen que ver con la expansión acelerada del universo en la etapa “reciente”.

1.1. Componentes del universo

Si bien hemos hablado del universo como un todo, hay algunos elementos que lo constituyen. Se consideran como los principales componentes a la *materia bariónica*, la *radiación electromagnética*, la *materia oscura* y la *energía oscura*. Pero, ¿cómo se comporta cada una de ellas?

Materia bariónica: Esta clasificación de materia está compuesta por los llamados fermiones del modelo estándar de física de partículas.¹ Es la materia ordinaria con la que están hechas las estrellas, los planetas, el gas, nosotros, etc.

Se ha encontrado que el universo es eléctricamente neutro, sin embargo, solo se consideran los neutrones y protones en la medición de la cantidad de materia bariónica, debido a que la masa del electrón es mucho menor que la masa de los neutrones y los protones.²

Radiación electromagnética: Esta contribución proviene del remanente del Big Bang, también es conocida como Radiación del fondo cósmico y fue descubierta por A.A. Penzias y R.W. Wilson en 1965 por accidente. Esta radiación se comporta como un cuerpo negro a una temperatura de 2.725 K y su frecuencia pertenece al rango de las microondas con 160.2 GHz, correspondiéndose con una longitud de onda de 1.872 mm.

Materia oscura: La materia oscura sólo responde a la gravedad, no tiene nada que ver con el electromagnetismo debido a que no irradia energía de ningún tipo. Se puede inferir su existencia a través de las curvas de rotación galácticas y las velocidades de las galaxias dentro de los cúmulos de galaxias. Hasta ahora se desconoce de que tipo de partículas puede estar constituida, ya que en el modelo estándar de partículas no se conoce (teórica o experimentalmente) una partícula que sea eléctricamente neutra e interactúe solo gravitacionalmente. Actualmente es un problema abierto.

Energía oscura: Aunque también lleva la palabra oscura en su nombre, es importante recalcar que esta componente del universo es distinta a la materia oscura mencionada anteriormente. La energía oscura es propuesta para explicar el por qué nuestro universo, en una etapa “reciente”(desde hace 14000 millones de años aproximadamente), se mantiene en una expansión acelerada. Uno de los modelos más utilizados para esta componente del universo es el del campo escalar, pues cumple con la condición necesaria para la expansión acelerada del universo y nos

¹Los fermiones se caracterizan por tener espín semi-entero ($1/2, 3/2, \dots$). En el modelo estándar de física existen dos tipos de fermiones fundamentales, los quarks y los leptones.

²Masas: protón, $938,272 MeV/c^2$; neutrón, $939,565 MeV/c^2$; electrón, $0,510 MeV/c^2$.

permite modelar un universo con excelentes propiedades. Existen varios modelos más que se proponen como candidatos de esta componente, entre ellos está el de la constante cosmológica que es el candidato más analizado y uno de los que hemos estudiado, aunque también existen modelos de gas de Chaplygin generalizados, modelos de K-esencia y el modelo taquiónico. Estos no serán analizados en el presente trabajo. [poner referencia]

Dentro de la gran variedad de escenarios propuestos para abordar el problema de la energía oscura, también se considera la posibilidad de introducir un término Q de interacción entre las componentes de energía oscura y de materia oscura. Recientemente, se muestra a partir de las observaciones cosmológicas que es posible tener una interacción entre energía oscura y de materia oscura. Usualmente se introduce el término de interacción Q con el propósito de evitar el problema de la coincidencia. Debido a que no se conoce el origen fundamental de la energía oscura, el término de interacción se introduce bajo consideraciones fenomenológicas. Usualmente, el término de interacción es proporcional a la densidad de energía oscura, la materia oscura o una combinación lineal de ellas. El signo en el término de interacción Q determina la dirección del flujo de energía. Si Q es positivo, el decaimiento es de energía oscura en materia oscura y si Q es negativo, el decaimiento es de materia oscura en energía oscura. Usualmente la quintaesencia es representada por un fluido que tiene $-1 \leq w_{DE}(a) \leq -1/3$.

Ahora ya conocemos los elementos que dan la estructura al universo pero no hemos mencionado la forma de medir cada una de estas cantidades. Este tema será abordado más adelante.

Una manera usual de representar estas componentes del universo es mediante un fluido perfecto. Un fluido perfecto se define como aquel en el cual un observador que se mueva con el fluido (un observador comóvil) verá al fluido alrededor de él isotrópico. En otras palabras, supongamos un fluido que tiene una cierta velocidad en algún punto, el fluido es perfecto si un observador con la misma velocidad (comóvil) ve al fluido de la misma forma en cualquier dirección.

En la siguiente sección daremos los preámbulos matemáticos mediante los cuales se construye el modelo estándar en la cosmología. El modelo está basado en la teoría de la relatividad general (TRG).

1.2. Compendio de la teoría de la relatividad general

Los orígenes de la relatividad general se pueden remontar a la revolución conceptual que siguió a la introducción de Einstein de la relatividad especial en 1905. Einstein basó la construcción de su teoría en algo que llamó *el principio de equivalencia*, este principio enuncia la idea de que todos los observadores inerciales ven la misma física.

A partir de aquí asumiremos que estamos trabajando en una variedad diferenciable. A continuación daremos algunas definiciones matemáticas que nos servirán para comprender mejor la estructura sobre la cual estamos trabajando.

Sea \mathcal{M} una variedad C^∞ diferenciable 4 – *dimensional* pseudo-riemanniana. Para cada punto $p \in \mathcal{M}$ se puede definir un espacio vectorial con la misma dimensión que la variedad diferenciable, este espacio es denominado *espacio tangente* y es denotado por $T_p(\mathcal{M})$.

Dado un sistema de coordenadas $\{x_\mu\}_p$ en una carta $(U, x^\mu)_p \in \mathcal{M}$, podemos formar una base de vectores de $T_p(\mathcal{M})$ llamada base coordenada $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}_p$.

De forma análoga, en cada $p \in \mathcal{M}$ podemos definir vectores duales pertenecientes al espacio vectorial cotangente $T_p^*(\mathcal{M})$, con base coordenada $\{dx^\mu\}_p$ donde

$$dx^\mu \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right] \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (1.1)$$

En general, un espacio tangente en un punto p de \mathcal{M} es diferente del espacio tangente en cualquier otro punto q de la misma variedad. No existe una manera definida de relacionar $T_p(\mathcal{M})$ con $T_q(\mathcal{M})$. Si elegimos un vector tangente $v \in T_p(\mathcal{M})$, ¿cómo podemos llevar v al punto q sin perder información de este vector? Para responder esta pregunta necesitamos una estructura adicional y para hacerlo aún más general usaremos tensores, ya que estos suelen representar propiedades físicas.

Un tensor k – *veces* contravariante en $p \in \mathcal{M}$ es un mapeo multilineal

$$t_p : \underbrace{T_p^*(\mathcal{M}) \times T_p^*(\mathcal{M}) \times \dots \times T_p^*(\mathcal{M})}_{\text{producto cartesiano de } k\text{-copias de } T_p^*(\mathcal{M})} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (1.2)$$

que cumple $t_p[\alpha] = \alpha_\mu t^\mu$ con $\alpha \in T_p^*(\mathcal{M})^k$. Con esto en mente, definimos un campo tensorial t , k – *veces* contravariante sobre \mathcal{M} como un mapeo que asocia a cada punto $p \in \mathcal{M}$ un tensor k – *veces* contravariante en p . Dados dos tensores t_p y s_p , k – *veces* y l – *veces* contravariante respectivamente, definimos el producto tensorial $t_p \otimes s_p$ como:

$$(t_p \otimes s_p)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+l}) \equiv t_p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \cdot s_p(\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_{k+l}) \quad (1.3)$$

Entonces una representación de un campo tensorial k – veces covariante tiene la forma

$$t \equiv t_{\mu\nu\dots\alpha} dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes \dots \otimes dx^\alpha \quad (1.4)$$

Sean $\alpha \in T_p^*(\mathcal{M})$ y $v \in T_p(\mathcal{M})$, si hacemos la correspondencia $\alpha[v] \equiv v[\alpha]$ podemos encontrar que la representación de un campo tensorial k – veces contravariante está dada por

$$t = t^{\mu\nu\dots\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) \quad (1.5)$$

Para formular leyes que describan cambios en estas cantidades debemos comparar tensores en diferentes puntos de la variedad. Para esto definimos un operador lineal ∇ sobre \mathcal{M} . Sean X, Y, Z campos vectoriales, $a, b \in \mathbb{R}$ y $f \in C^\infty(\mathcal{M})$

- $\nabla_X(a \cdot Z + b \cdot Y) = a \nabla_X Z + b \nabla_X Y$
- $\nabla_X(f \cdot Y) = f \nabla_X Y + Y \nabla_X f$ donde $\nabla_X f = X(f) = X^\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right)$
- $\nabla_{(a \cdot X + b \cdot Y)} Z = a \nabla_X Z + b \nabla_Y Z$
- $\nabla_{(f \cdot X)} Y = f(\nabla_X Y)$

Decimos que $\nabla_X(Y)$ es la derivada covariante y se puede verificar con ayuda de las propiedades anteriores que sobre una carta de coordenadas $\{x^\mu\}$ esta tiene la forma

$$\nabla_X Y = X^\mu \left[\left(\frac{\partial Y^\beta}{\partial x^\mu} \right) + Y^\nu \gamma_{\mu\nu}^\beta \right] \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) \quad (1.6)$$

que más adelante será utilizada en una forma más compacta, donde no se muestran explícitamente las coordenadas por lo que suponemos que ya estamos trabajando sobre una carta de coordenadas.

Ahora que contamos con el operador derivada covariante o también conocida como conexión, podemos definir la noción de transporte paralelo de un vector tangente a lo largo de una curva sobre la variedad diferencial. Un vector v es transportado paralelamente a la curva C con campo vectorial t si se satisface la ecuación $\nabla_t v = 0$ que es equivalente a

$$t^\mu \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\mu} \right) + t^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha v^\beta = 0. \quad (1.7)$$

Como el transporte paralelo de un vector depende de la curva y no solo de los puntos iniciales y finales necesitamos describir la idea de curvatura. De forma general la curvatura asociada a la conexión ∇ es un mapeo $R(X, Y) : \rightarrow T_p \times T_p$ definido como

$$R(X, Y) \equiv \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}. \quad (1.8)$$

Veamos algunas propiedades de la curvatura Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$

- $R(X, Y) = -R(Y, X)$.
- $R(aX + bY, Z) = aR(X, Z) + bR(Y, Z)$.
- $R(X, Y)(aZ + bW) = aR(X, Y)Z + bR(X, Y)W$.
- $R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z$.

Podemos ver que la curvatura es una medida de la no conmutatividad de vectores al ser transportados paralelamente. En sí, la curvatura no satisface la definición de campo tensorial, pero lo podemos escribir equivalentemente como un tensor tres veces covariante y una vez contravariante

$$\tilde{R} = R_{\beta\mu\nu}{}^\eta dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes dx^\beta \otimes \left(\frac{\partial}{dx^\eta} \right), \quad (1.9)$$

la curvatura vista como tensor es también conocida como el tensor de Riemann. Podemos escribir el tensor de Riemann \tilde{R} en un representación coordenada aplicada a un campo vectorial Z

$$\nabla_\mu \nabla_\nu Z^\beta - \nabla_\nu \nabla_\mu Z^\beta = -R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta Z^\alpha. \quad (1.10)$$

Debido a la forma de la ecuación (1.10) podemos hacer una analogía entre la curvatura y la gravedad mediante la segunda ley de Newton debido a la aceleración que sufre una partícula.

Una curva c cuyo campo vectorial tangente $t = t^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)$ que es transportada paralelamente a lo largo de la misma curva sin cambio $t^\mu \nabla_\mu t^\alpha = 0$ recibe el nombre de geodésica. Las geodésicas nos son útiles ya que serán los caminos que seguirán nuestras partículas.

Hasta ahora hemos considerado las estructuras más generales, es momento de elegir una forma para el operador derivada covariante. Dados dos vectores tangentes arbitrarios v y w en el punto p requerimos que su producto interno definido como $g(v, w) = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu$ sea invariante bajo el transporte paralelo sobre cualquier curva c con campo vectorial tangente $t = t^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)$, este producto es conocido como tensor métrico.

El tensor métrico es un objeto muy importante en un espacio tiempo con curvatura pues está relacionado con el desplazamiento cuadrático infinitesimal de un vector tangente, en una base coordenada tiene la forma

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (1.11)$$

Entonces para escoger la forma de la conexión imponemos la condición

$$t^\alpha \nabla [g_{\mu\nu} u^\mu w^\nu] = 0. \quad (1.12)$$

Como ya teníamos una forma general de la derivada covariante, ahora podemos escribir la forma de las funciones $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ de acorde con la métrica, dicha forma es:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\nu\mu}), \quad (1.13)$$

esta conexión es conocida como la conexión de *Levi-Civita* podemos escribir todos los objetos con esta derivada. Aquí tenemos la forma de una geodésica

$$\left(\frac{d^2 x^\mu(\lambda)}{d\lambda^2} \right) + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \left(\frac{dx^\nu(\lambda)}{d\lambda} \right) \left(\frac{dx^\rho(\lambda)}{d\lambda} \right) = 0, \quad (1.14)$$

y la del tensor de Riemann asumiendo la conexión de *Levi-Civita*

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\sigma}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\nu\rho}^\sigma}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma. \quad (1.15)$$

El tensor anterior es conocido como el tensor de Einstein. Algunas de las propiedades de este tensor son:

Antisimétrico en los dos primeros índices. $R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = -R_{\nu\mu\rho}{}^\sigma$.

Totalmente antisimétrico en los primeros tres índices. $R_{[\mu\nu\rho]}{}^\sigma = 0$.

Antisimétrico en los dos últimos índices. $R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}$.

Simétrico en el cambio del primer par con el segundo. $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$.

Identidad de Bianchi. $\nabla_{[\beta} R_{\mu\nu]\rho}{}^\alpha = 0$.

Es útil descomponer el tensor de Einstein en un parte “con traza” y una “libre de traza”, entonces tenemos dos nuevos objetos. Para esto tomamos la contracción del tensor de curvatura, es decir,

$$R_{\mu\sigma\nu}{}^\sigma = R_{\mu\nu}. \quad (1.16)$$

Este tensor es conocido como el *Tensor de Ricci*, al hacer la contracción de este nuevo tensor con la métrica obtenemos una nueva cantidad llamada *escalar de curvatura*, representado por:

$$R = R^\mu{}_\mu. \quad (1.17)$$

A partir de la contracción de la métrica con la identidad de Bianchi obtenemos una expresión para el tensor de Einstein, la cual está dada por

$$G_{\nu}^{\mu} \equiv R_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2}g_{\nu}^{\alpha}R. \quad (1.18)$$

Esta última ecuación será la que utilizaremos para describir la estructura del espacio-tiempo. Es importante recalcar que estas ecuaciones son para el vacío, es decir no hemos considerado ninguna fuente que genere la curvatura. En los siguientes capítulos utilizaremos las ecuaciones con fuentes de materia.

Capítulo 2

Cosmología

Ahora que hemos dado una breve reseña de la teoría de la relatividad general podemos adentrarnos en el modelo estándar de la cosmología.

El principio cosmológico supone que el universo es isotrópico y homogéneo espacialmente a gran escala, esto quiere decir que no hay un lugar preferencial en un universo. La isotropía espacial nos indica que en cualquier punto que en que nos situemos el espacio se ve igual en todas direcciones, y la homogeneidad nos dice que la métrica es la misma en toda la variedad.

Además utilizaremos observadores comóviles, estos tienen la propiedad de ver al universo isotrópico y homogéneo.

Aunque es un principio muy sencillo nos da restricciones importantes sobre el universo.

Una propiedad que tienen los espacios maximalmente simétricos es que tienen la misma curvatura en cada punto. Por eso estamos interesados en estudiar espacios que tengan esta propiedad.

Hay algunas métricas que pueden proponerse pero la más adecuada es la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker ya que respeta el principio cosmológico.

2.1. Elementos de la métrica de FLRW

El elemento de línea ds^2 de la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) en coordenadas esféricas, se puede expresar como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.1)$$

Donde el coeficiente k es un factor constante proporcional a la tres-curvatura espacial del universo, dependiendo del valor de este factor el universo puede ser

de tres tipos, usualmente se les llama *abierto*, *plano* o *cerrado* si k es respectivamente *negativa*, *cero* o *positiva*. Y el término $a(t)$ es conocido como el factor de escala, este nos permite introducir la evolución del tamaño del universo. Una de las predicciones que se pueden obtener de la métrica de FLRW es la expansión del Universo, cuantificada a través del factor de escala $a(t)$, el cual es un elemento central de esta métrica.

La métrica de FLRW en forma matricial tiene la forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

La matriz inversa $g^{\mu\nu}$ está dada por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - kr^2)/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(a^2 r^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(a^2 r^2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

El determinante de $g_{\mu\nu}$ es:

$$g \equiv \det g_{\mu\nu} = -\frac{a^6 r^4 \sin^2 \theta}{1 - kr^2}. \quad (2.4)$$

Antes habíamos encontrado las ecuaciones de Einstein en el vacío, sin embargo sabemos que el universo está compuesto por diferentes tipos de materia. Ahora utilizaremos las ecuaciones de Einstein con materia.

Para esto consideramos que el universo es un fluido perfecto, una propiedad importante de estos fluidos es que pueden ser descritos solamente mediante dos componentes, la presión P y la densidad ρ medidos en el marco de referencia en reposo del fluido.

Las componentes del tensor $T_{\mu\nu}$ en el sistema comóvil pueden escribirse en forma matricial como:

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Esto debido a la isotropía de la presión del fluido, la matriz es diagonal debido a que no estamos considerando flujo de momento.

La traza T de este tensor de energía-momento es:

$$T = \text{Tr}(T^\mu{}_\mu) = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu = 3p - \rho. \quad (2.6)$$

Partiendo de las ecuaciones de Einstein con materia

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

Y considerando que el fluido perfecto tiene un tensor de energía momento de la forma

$$T_{\mu\nu} = [\rho + P]U_\mu U_\nu + g_{\mu\nu}P \quad (2.8)$$

siendo U_μ la cuadri velocidad de un observador comóvil con tiempo propio τ , esta velocidad está definida como

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (2.9)$$

al normalizar las cuadri-velocidades comóviles se obtiene

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad U_\mu = (-1, 0, 0, 0) \quad (2.10)$$

Las densidades y presiones que aparecen en esta expresión son las totales, hay que considerar que el universo tiene diferentes tipos de fluidos y cada uno de ellos tiene su propia densidad y presión.

Hemos considerado que estos fluidos son perfectos, por lo que cada uno tiene su ecuación de estado

$$P_{(i)} = w_{(i)}\rho_{(i)} \quad (2.11)$$

suponiendo que las $w_{(i)}$ son constantes.

Ahora bien, para calcular la parte de la curvatura necesitamos el tensor de Einstein el cual está en términos de los símbolos de Christoffel, estos se definen como

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (2.12)$$

Los símbolos de Christoffel distintos de cero para la métrica de FLRW son los siguientes trece términos:

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1 - kr^2} \quad (2.13)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = a\dot{a}r^2 \quad \Gamma_{\phi\phi}^t = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \quad (2.14)$$

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{t\phi}^\phi = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.15)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1 - kr^2) \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \quad (2.16)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r} \quad (2.17)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta. \quad (2.18)$$

El tensor de Riemann $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ de forma general se define como

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (2.19)$$

El tensor de Riemann consta de 256 componentes en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Sin embargo, tomando en cuenta todas las simetrías de este tensor, el número de componentes independientes se reduce a veinte. Los términos distintos de cero para el caso de la métrica de FLRW, son

$$R^t_{\ rtr} = \frac{a\ddot{a}}{1 - kr^2} \quad (2.20)$$

$$R^t_{\ \theta t\theta} = a\ddot{a}r^2 \quad (2.21)$$

$$R^t_{\ \phi t\phi} = a\ddot{a}r^2 \sin^2(\theta) \quad (2.22)$$

$$R^r_{\ ttr} = R^\theta_{\ tt\theta} = R^\phi_{\ tt\phi} = \frac{\ddot{a}}{a} \quad (2.23)$$

$$R^r_{\ \theta r\theta} = -R^\phi_{\ \theta\theta\phi} = r^2(\dot{a}^2 + k) \quad (2.24)$$

$$R^r_{\ \phi r\phi} = R^\theta_{\ \phi\theta\phi} = r^2(\dot{a}^2 + k) \sin^2(\theta) \quad (2.25)$$

$$R^\theta_{\ rr\theta} = R^\phi_{\ rr\phi} = -\frac{\dot{a}^2 + k}{1 - kr^2} \quad (2.26)$$

Las componentes distintas de cero del tensor de Riemann en su forma totalmente *covariante* $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ son

$$R_{trtr} = -\frac{a\ddot{a}}{1 - kr^2} \quad (2.27)$$

$$R_{t\theta t\theta} = -a\ddot{a}r^2 \quad (2.28)$$

$$R_{t\phi t\phi} = -a\ddot{a}r^2 \sin^2(\theta) \quad (2.29)$$

$$R_{r\theta r\theta} = \frac{a^2 r^2 (\dot{a}^2 + k)}{1 - kr^2} \quad (2.30)$$

$$R_{r\phi r\phi} = \frac{a^2 r^2 \sin^2(\theta) (\dot{a}^2 + k)}{1 - kr^2} \quad (2.31)$$

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = a^2 r^4 \sin^2(\theta) (\dot{a}^2 + k) \quad (2.32)$$

Y las componentes distintas de cero del tensor de Riemann en su forma totalmente *contravariante* $R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ son

$$R^{trtr} = -\frac{\ddot{a}(1 - kr^2)}{a^3} \quad (2.33)$$

$$R^{t\theta t\theta} = -\frac{\ddot{a}}{a^3 r^2} \quad (2.34)$$

$$R^{t\phi t\phi} = -\frac{\ddot{a}}{a^3 r^2 \sin^2(\theta)} \quad (2.35)$$

$$R^{r\theta r\theta} = \frac{(1 - kr^2)(\dot{a}^2 + k)}{a^6 r^2} \quad (2.36)$$

$$R^{r\phi r\phi} = \frac{(1 - kr^2)(\dot{a}^2 + k)}{a^6 r^2 \sin^2(\theta)} \quad (2.37)$$

$$R^{\theta\phi\theta\phi} = \frac{\dot{a}^2 + k}{a^6 r^4 \sin^2(\theta)} \quad (2.38)$$

$$(2.39)$$

También necesitamos los términos *covariantes* distintos de cero del tensor de Ricci $R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ son los elementos de la diagonal, esto es,

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{rr} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \quad (2.40)$$

$$R_{\theta\theta} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)$$

$$R_{\phi\phi} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \sin^2 \theta$$

Los términos *contravariantes* distintos de cero del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ son

$$R^{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (2.41)$$

$$R^{rr} = \left(\frac{1 - kr^2}{a^4}\right) (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \quad (2.42)$$

$$R^{\theta\theta} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{a^4 r^2} \quad (2.43)$$

$$R^{\phi\phi} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{a^4 r^2 \sin^2(\theta)} \quad (2.44)$$

$$(2.45)$$

Expresadas de la forma “contravariante-covariante”, las componentes del tensor de Ricci $R^\mu{}_\nu$ distintas de cero son

$$R^t{}_t = 3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (2.46)$$

$$R^r{}_r = R^\theta{}_\theta = R^\phi{}_\phi = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{a^2} \quad (2.47)$$

Por último el escalar de curvatura $R \equiv R^\alpha{}_\alpha = R_{\beta\alpha} g^{\beta\alpha}$ se expresa como:

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]$$

Del tensor de Einstein $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, los únicos términos distintos de cero son los de la diagonal, es decir:

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k) \\ G_{rr} &= \frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{-1 + kr^2} \\ G_{\theta\theta} &= -r^2(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) \\ G_{\phi\phi} &= -r^2(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)\sin^2\theta \end{aligned} \quad (2.48)$$

Ahora que tenemos todas las herramientas necesarias podemos calcular las ecuaciones de Einstein.

2.2. Ecuaciones de continuidad

A partir del tensor de energía- momento utilizando la identidad de Bianchi obtenemos una expresión importante,

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.49)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación local de continuidad. Es importante recalcar que cada componente del universo debe obedecerla asumiendo que estas componentes solo interactúan gravitacionalmente. Si proyectamos la conservación a lo largo de la velocidad U_μ ,

$$U_\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.50)$$

La cual nos resulta en la expresión

$$U^\nu \nabla_\nu \rho + [\rho + P] \nabla_\nu U^\nu = 0 \quad (2.51)$$

donde el término $\nabla_\nu U^\nu$ nos modela la contracción o expansión del elemento del fluido.

Así mismo, podemos proyectar ortogonalmente

$$[g_{\mu\beta} + U_\mu U_\beta] \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.52)$$

Lo que nos arroja una ecuación conocida como la conservación local del movimiento.

$$[P + \rho] U^\mu \nabla_\mu U^\nu + [g_\mu^\nu + U_\mu U^\nu] \nabla^\mu P = 0 \quad (2.53)$$

Se puede introducir la interacción directa de los fluidos o componentes del universo considerando que $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = Q^\mu$, sin embargo nosotros no consideraremos estos casos.

A continuación definimos unas cantidades que nos serán útiles

- $n \rightarrow$ número de partículas por unidad de volumen.
- $s \rightarrow$ entropía por partícula
- $J^\mu = nU^\mu \rightarrow$ corriente de partículas

En general, podemos tener que la densidad del fluido depende de la entropía, la presión y la densidad número de partícula n . Note que podemos obtener una ley de conservación para la corriente de partículas

$$\nabla_\mu J^\mu = U^\mu \nabla_\mu n + n \nabla_\mu U^\mu = 0 \quad (2.54)$$

Una de las condiciones necesarias que impondremos para nuestro modelo cosmológico es que cada fluido tiene su ecuación de continuidad.

Si escribimos explícitamente la ecuación de continuidad de energía momento, tenemos que para la componente temporal

$$\partial_t T^t_t + \Gamma_{\mu t}^\mu T^t_t - \Gamma_{rt}^r T^r_r - \Gamma_{\theta t}^\theta T^\theta_\theta - \Gamma_{\phi t}^\phi T^\phi_\phi = 0. \quad (2.55)$$

De la cual conocemos ya todos los elementos, por lo que obtenemos

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.56)$$

que es mejor conocida como la *ecuación local de la conservación de energía momento*. Es importante decir que es local, ya que en un espacio-tiempo curvo no hay esta conservación.

2.3. Ecuaciones de FLRW

Existen muchas soluciones para las ecuaciones de Einstein, sin embargo nosotros estamos interesados en esta en particular, debido a que por construcción nuestro espacio-tiempo preserva la homogeneidad e isotropía espacial.

Exigimos que nuestro modelo cosmológico se base en las ecuaciones de relatividad de Einstein y que además considere las ecuaciones de continuidad 2.51 y 2.52, también hemos supuesto que todos los fluidos son perfectos.

Ya que hemos calculado todos los elementos importantes dada la métrica y las restricciones del sistema (ecuaciones de continuidad) podemos sustituir en las ecuaciones de Einstein.

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad (2.57)$$

Donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, T es la traza de $T_{\mu\nu}$, G es la constante gravitacional de Newton y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento *total* del Universo, que resulta de la suma de todos los tensores de energía-momento individuales de cada una de las componentes de materia-energía que un modelo cosmológico dado considere que están presentes en el Universo, es decir,

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^b + T_{\mu\nu}^{\text{DM}} + T_{\mu\nu}^\gamma + T_{\mu\nu}^{\text{DE}} + \dots, \quad (2.58)$$

donde los superíndices “b”, “DM”, “ γ ”, “DE” indican “materia bariónica”, “materia oscura”, “radiación” y “energía oscura respectivamente. Es importante mencionar que podemos considerar cualquier otro tipo de materia o energía de acuerdo al modelo cosmológico en el que se pretenda trabajar.

Calculamos primero solo la componente temporal de la ecuación (2.57). Utilizaremos las componentes del tensor $T_{\mu\nu}$, los elementos de la matriz para $g_{\mu\nu}$ y la

traza (2.6) para T que anteriormente fueron calculados. Sustituimos en la ecuación (2.57) y obtenemos:

$$R_{tt} = 8\pi G \left[\rho + \frac{1}{2}(3p - \rho) \right] = \frac{8\pi G}{2}(3p + \rho), \quad (2.59)$$

Donde ρ y p denotan la densidad y presión *total* del Universo. Considerando

$$\rho = \rho_b + \rho_{DM} + \rho_\gamma + \rho_{DE} + \dots \quad (2.60)$$

$$p = p_b + p_{DM} + p_\gamma + p_{DE} + \dots \quad (2.61)$$

Por otra parte, conocemos $R_{\mu\nu}$ de la métrica de FLRW. Se encontró que $R_{tt} = -3(\ddot{a}/a)$ los dos puntos sobre “ a ” significan segunda derivada temporal. Por lo que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3p + \rho) \quad (2.62)$$

Esta es llamada la *segunda ecuación de Friedmann*. La *primera ecuación de Friedmann* se deriva a partir de la segunda de la siguiente forma. Se toma ahora la componente radial de la ecuación (2.57). Con la ayuda de las componentes radiales de las matrices y $T^{\mu\nu}$, la ecuación (2.57) resulta

$$R_{rr} = 8\pi G \frac{a^2}{1 - kr^2} \left[p - \frac{1}{2}(3p - \rho) \right], \quad (2.63)$$

donde k el factor de la curvatura espacial. De calcular R_{rr} se encuentra que [ver expresión (2.40)]:

$$R_{rr} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \quad (2.64)$$

igualando estas dos expresiones obtenemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p). \quad (2.65)$$

Sustituyendo la segunda ecuación de Friedmann (2.62) en esta última expresión:

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} &= 4\pi G(\rho - p) + \frac{4\pi G}{3}(3p + \rho), \\ &= \frac{4\pi G}{3}(3\rho - 3p + \rho + 3p), \\ &= \frac{4\pi G}{3}4\rho, \\ \Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Por conveniencia, se define el **parámetro de Hubble** como

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (2.67)$$

donde “ t ” es coloquialmente llamado el tiempo cósmico. Con esto, la ecuación (2.66) llega a ser

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{k}{a^2(t)} \quad (2.68)$$

Esta es la primera ecuación de Friedmann, o simplemente la *Ecuación de Friedmann*.

Se puede hacer el cálculo para las otras dos componentes del tensor de Ricci (es decir, $R_{\theta\theta}$, $R_{\phi\phi}$), sin embargo se obtiene la misma expresión y es por eso que solo se manejan dos ecuaciones de Friedmann (2.65).

Existen otras dos maneras muy útiles de expresar esta ecuación. Una de ellas es a través de los *parámetros de densidad* Ω_i para cada una de las componentes de materia presentes en el Universo. Estos parámetros se definen como

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{\text{crit}}} \quad (2.69)$$

donde ρ_i es la densidad de materia-energía de la i -ésima componente de materia del Universo (por ejemplo, materia bariónica, oscura, etc.) y ρ_{crit} es *densidad crítica* que a su vez se define como diferentes modelos propuestos para esta componente del universo.

$$\rho_{\text{crit}}(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \quad (2.70)$$

que proviene de asumir que la curvatura espacial del Universo es cero [$k = 0$ en la ecuación (2.68)].

Cuando la densidad total de la materia-energía ρ en el Universo es *igual* al valor de la densidad crítica, entonces resulta que el Universo es espacialmente *plano*. Si $\rho > \rho_{\text{crit}}$ entonces el Universo es espacialmente cerrado, y si $\rho < \rho_{\text{crit}}$ es abierto.

La densidad crítica depende del tiempo cósmico t . El tiempo cósmico *presente* del Universo, así como cualquier otra cantidad cosmológica evaluada en el presente, se le distinguirá con un subíndice o superíndice cero, por ejemplo t_0 , H_0 . Por tanto, el valor presente de la densidad crítica lo representamos como

$$\rho_{\text{crit}}^0 \equiv \rho_{\text{crit}}(t_0) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 1,16 \times 10^{-27} \text{kg/m}^3, \quad (2.71)$$

donde $H_0 \equiv H(t_0)$ es llamada la *constante de Hubble*.

Usando las definiciones (2.69) y (2.70) podemos reescribir la ecuación de Friedmann (2.68) de la siguiente forma.

$$1 = \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} - \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (2.72)$$

Además se suele definir un parámetro Ω_k que corresponde a la curvatura espacial del Universo como

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2 H^2}. \quad (2.73)$$

Con esta definición y usando también (2.70), la ecuación (2.72) llega a ser

$$1 = \Omega_{\text{total}} + \Omega_k \quad (2.74)$$

donde

$$\Omega_{\text{total}} \equiv \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} = \Omega_b + \Omega_{\text{DM}} + \Omega_\gamma + \Omega_{DE} + \dots \quad (2.75)$$

Esta es otra manera de expresar la ecuación de Friedmann. A pesar de que Ω_{total} y Ω_k dependen del tiempo, esta igualdad debe satisfacerse para cualquier tiempo. Adicionalmente nos provee una restricción al sistema.

Otra manera de expresar la ecuación de Friedmann es una mezcla de las expresiones (2.68) y (2.74), con la ayuda de la ecuación de conservación de la materia (2.56) para cada una de las componentes del Universo. Primero hay que encontrar la dependencia de la densidad ρ_i con respecto al factor de escala para cada una de las componentes. Para la componente de materia bariónica

Como se mencionó en la sección anterior la presión asociada al fluido de materia bariónica es cero, es decir, $p_b = 0$. Por tanto, otra alternativa la ecuación de conservación de materia (2.56) para esta componente toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_b + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_b &= 0, & (2.76) \\ \Rightarrow \frac{\dot{\rho}_b}{\rho_b} &= -3\frac{\dot{a}}{a}, \\ \Rightarrow \frac{d \ln \rho_b}{dt} &= -3\frac{d \ln a}{dt}, \\ \Rightarrow \int_{\rho_b^0}^{\rho_b} d \ln \rho_b &= -3 \int_{a_0}^a d \ln a, \end{aligned}$$

donde ρ_b^0 y a_0 indican el valor de la densidad de materia bariónica y del factor de escala *hoy*. Integrando la expresión obtenemos

$$\rho_b(a) = \frac{\rho_b^0}{a^3}, \quad (2.77)$$

note que hemos normalizado al factor de escala de tal forma que en el presente este valga uno (esto es, $a_0 = 1$). Como puede verse de esta ecuación, la densidad de materia bariónica depende del factor de escala como a^{-3} .

Para el caso de la materia oscura, se tiene la misma expresión que para la bariónica debido a que se considera que su presión es despreciable (esto es, $p_{DM}^0 = 0$), por lo que

$$\rho_{mo}(a) = \frac{\rho_{mo}^0}{a^3}, \quad (2.78)$$

donde ρ_{mo}^0 es el valor presente de la densidad de la materia oscura. Hay casos en que se suele agrupar la materia bariónica y oscura, en una misma expresión, y se suele referir a ella simplemente como “materia”, que denotaremos como $\rho_M(a)$. Esta se define de la siguiente forma

$$\rho_M(a) \equiv \rho_b(a) + \rho_{mo}(a), \quad \rho_M^0 \equiv \rho_b^0 + \rho_{mo}^0,$$

Así que la relación de la densidad con el factor de escala con la materia es

$$\rho_M(a) = \frac{\rho_M^0}{a^3}. \quad (2.79)$$

Por otro lado, de la ecuación de estado para un gas ideal $p = w_i \rho_i$ se puede obtener una expresión más general que la obtenida anteriormente. Partiendo de la ecuación de continuidad 2.56, resolvamos para la densidad

$$\frac{d\rho_i}{dt} + \frac{3}{a} \frac{da}{dt} [\rho_i + w_i \rho_i] = 0 \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int d \ln \rho_i &= \int -\frac{3}{a} (1 + w_i) da \\ \Rightarrow \rho_i &= \text{Exp} \left[\int -\frac{3}{a} (1 + w_i) da \right] \end{aligned} \quad (2.81)$$

Si w_i no depende del factor de escala

$$\rho_i(a) = B_i a^{-3[1+w_i]} \quad (2.82)$$

Considerando las densidades al día de hoy $\rho_i(a_0) = \rho_i^0$ Tenemos la condición

$$B_i = \frac{\rho_i^0}{a_0^{-3[1+w_i]}} \quad (2.83)$$

Por tanto,

$$\rho_i(a) = \rho_r^0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w_i)}. \quad (2.84)$$

Para la componente de energía oscura, *asumiendo* que es la constante cosmológica, se tiene $w_{DE} = -1$ y ecuación de estado de la forma $p_{DE} = -\rho_{DE}$ y para la radiación $w_\gamma = \frac{1}{3}$ por lo que la ecuación de estado toma la forma $p_\gamma = \frac{1}{3}\rho_\gamma$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 2.56) se obtiene $\rho_\gamma = \rho_\gamma^0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^4$ y $\rho_{DE} = \rho_{DE}^0$. Lo cual implica que la densidad de la constante cosmológica siempre es una constante a lo largo de la expansión del Universo,

$$\rho_\Lambda = \rho_{DE}^0 = \text{constante}. \quad (2.85)$$

Siguiendo esta misma estrategia se pueden ir agregando más tipos de componentes de materia-energía dado un modelo cosmológico en particular.

Sustituyendo las expresiones (2.77, 2.78, 2.84, 2.85) en la parte de la densidad de la ecuación de Friedmann (2.68) obtenemos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_b^0}{a^3} + \frac{\rho_{DM}^0}{a^3} + \frac{\rho_r^0}{a^4} + \rho_{DE}^0 \right) - \frac{k}{a^2}. \quad (2.86)$$

Dividiendo esta ecuación por H_0^2 e identificando la expresión de la densidad crítica hoy, $\rho_{crit}^0 = 3H_0^2/8\pi G$, se tiene

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \left(\frac{\rho_b^0}{\rho_{crit}^0} \frac{1}{a^3} + \frac{\rho_{DM}^0}{\rho_{crit}^0} \frac{1}{a^3} + \frac{\rho_r^0}{\rho_{crit}^0} \frac{1}{a^4} + \frac{\rho_D^0}{\rho_{crit}^0} \right) - \frac{k}{a^2 H_0^2}. \quad (2.87)$$

Usando las definiciones del parámetro de densidad (2.69) evaluadas hoy (esto es., $\Omega_i^0 \equiv \rho_i^0/\rho_{crit}^0$), así como la definición del parámetro de la curvatura espacial (2.73) hoy, $\Omega_k^0 \equiv -k/H_0^2$ (recuerde que hemos supuesto que el factor de escala “ a ” evaluado hoy vale 1), llegamos a

$$H(a) = H_0 \left(\frac{\Omega_b^0}{a^3} + \frac{\Omega_{DM}^0}{a^3} + \frac{\Omega_\gamma^0}{a^4} + \Omega_{DE}^0 + \frac{\Omega_k^0}{a^2} \right)^{1/2}. \quad (2.88)$$

Los astrónomos usualmente estudian las distancias a escalas cosmológicas en términos del “*redshift*” o *corrimiento hacia el rojo* del espectro de luz emitido por un objeto debido a su velocidad relativa con respecto a un observador que mide la luz emitida por dicho objeto. Como el Universo se está expandiendo, todas las estructuras que lo componen (galaxias, cúmulos de galaxias, etc.) se están alejando entre sí unas de otras lo que nos permite encontrar el corrimiento al rojo de la luz que emiten y que es medida por algún observador.

Se acostumbra denotar el corrimiento al rojo con la letra “ z ” y se define como

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_o}{\lambda_o}, \quad (2.89)$$

donde λ es la longitud de onda medida por un observador que se aleja o acerca de la fuente que emite la radiación y λ_o es la medida por un observador en reposo respecto la fuente.

Por otro lado, podemos encontrar una relación entre z y el factor de escala que aparece en la métrica de FLRW, esta es, $a = 1/(1+z)$. Con esto, la expresión para el parámetro de Hubble (2.88) llega a ser

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_b^0 (1+z)^3 + \Omega_{DM}^0 (1+z)^3 + \Omega_\gamma^0 (1+z)^4 + \Omega_{DE}^0 + \Omega_k^0 (1+z)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.90)$$

Esta forma del parámetro de Hubble es muy útil para acotar los parámetros libres de un modelo cosmológico dado usando datos cosmológicos observacionales.

Respecto al parámetro de curvatura, Ω_k^0 , para determinar cuál es el valor de k , o al menos si es positivo, negativo o cero, para el caso de un Universo constituido por materia bariónica, oscura, constante cosmológica y radiación, se puede utilizar la ecuación de Friedmann (2.74). Entonces, de acuerdo al valor de k se obtiene (asumiendo el modelo Λ CDM)

$$\text{Cerrado } k > 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_k^0 < 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_b^0 + \Omega_{DM}^0 + \Omega_{DE}^0 + \Omega_\gamma^0 > 0.$$

$$\text{Plano } k = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_k^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_b^0 + \Omega_{DM}^0 + \Omega_{DE}^0 + \Omega_\gamma^0 = 0.$$

$$\text{Abierto } k < 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_k^0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_b^0 + \Omega_{DM}^0 + \Omega_{DE}^0 + \Omega_\gamma^0 < 0.$$

Por tanto, logrando determinar los valores de $(\Omega_{DM}^0, \Omega_b^0, \Omega_{DE}^0, \Omega_\gamma^0)$ queda determinada la geometría del Universo (de acuerdo a este modelo). El *parámetro de desaceleración* de la expansión del Universo se define como

$$q(t) = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3p}{\rho} \right) \quad (2.91)$$

En términos de $q(t)$ se tiene que

$$\ddot{a} > 0 \quad \Rightarrow \quad q(t) < 0 \quad \text{Expansión } \textit{acelerada} \text{ del Universo.}$$

$$\ddot{a} < 0 \quad \Rightarrow \quad q(t) > 0 \quad \text{Expansión } \textit{desacelerada} \text{ del Universo.}$$

De igual forma, de la definición del parámetro de Hubble $H(t) \equiv \dot{a}/a$ se tiene que

$$H(t) > 0 \Rightarrow \textit{Expansión} \text{ del Universo.}$$

$$H(t) < 0 \Rightarrow \textit{Contracción} \text{ del Universo.}$$

2.4. Tipos de universos

Ahora que conocemos las componentes del universo daremos algunos ejemplos de modelos dominados por diferentes tipos de energía-materia.

Pongamos entonces las relaciones a utilizar. Las ecuaciones de Friedmann considerando todas las fuentes de energía-materia son

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}[\rho_b + \rho_\gamma + \rho_{DM}] - \frac{k}{a^2} \quad (2.92)$$

Podemos escribir esta ecuación en términos del parámetro de Hubble y el corrimiento al rojo

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} [\rho_b^0(1+z)^3 + \rho_{DM}^0(1+z)^3 + \rho_\gamma^0(1+z)^4] - \frac{k}{a^2} \quad (2.93)$$

2.4.1. Universo dominado por materia

Cuando hablamos de materia para ejemplificar este tipo de universo nos referiremos fundamentalmente a partículas cuya velocidad es muy inferior a la de la luz y por tanto su energía cinética no es comparable a la de su masa. Es por eso que podemos considerar la presión despreciable $p_b = 0$. Con esta consideración el factor de desaceleración resulta positivo y el universo se expandiría desaceleradamente. Entonces la ecuación de Friedmann tiene la forma

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{4\pi G}{3}\rho = 0, \quad (2.94)$$

Suponiendo que el universo es plano y que $H \neq 0$ tenemos que el factor de desaceleración es $q = \frac{1}{2}$. De la ecuación de continuidad (2.56) tenemos

$$\dot{\rho} + 3\rho\frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (2.95)$$

Tenemos para la densidad de materia $\rho = \rho_c \left(\frac{a_0}{a}\right)^3$ por lo que la ecuación de Friedmann es

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c \left(\frac{a_0}{a}\right)^3. \quad (2.96)$$

Por lo que la ecuación puede ser escrita equivalentemente en términos del parámetro de Hubble

$$a^{1/2} da = H_0 a_0^{3/2} dt. \quad (2.97)$$

La ecuación anterior tiene una solución y para encontrarla basta con resolver la ecuación diferencial integrando en ambos lados

$$\int_{a_1}^{a_2} a^{1/2} da = H_0 a_0^{3/2} \int_{t_1}^{t_2} dt \quad (2.98)$$

Cuya solución es

$$t_2 - t_1 = \frac{2}{3}H_0^{-1} \left[\left(\frac{a_2}{a_0} \right)^{3/2} - \left(\frac{a_1}{a_0} \right)^{3/2} \right] \quad (2.99)$$

Entonces la edad del universo es

$$t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1} \quad (2.100)$$

En esta solución se puede ver que el universo se expande para siempre pero que la tasa de expansión $H(t)$ disminuye con el tiempo llegando a ser infinitamente lento a medida que el universo se vuelve infinitamente viejo.

2.4.2. Universo con materia, energía oscura y radiación

Para calcular la edad del universo de FLRW considere ahora el caso general con valores arbitrarios de Ω_m y Ω_{DE} , de la ecuación 2.92 obtenemos que la ecuación diferencial a resolver es

$$\frac{da}{dt} = H_0 a_0 \sqrt{\Omega_\gamma a_0^2 a^{-2} + \Omega_M a_0 a^{-1} + \Omega_{DE} a^2 a_0^{-2} - k H_0^{-2} a_0^{-2}}. \quad (2.101)$$

Si proponemos el cambio de variable $x \equiv \frac{a}{a_0} = \frac{1}{1+z}$ la ecuación a resolver es

$$\frac{1}{a_0} \frac{da}{dt} \equiv \frac{dx}{dt} = H_0 a_0 \sqrt{\Omega_\gamma x^{-2} + \Omega_M x^{-1} + \Omega_{DE} x^2 + (1 - \Omega_0)}, \quad (2.102)$$

ahora integramos el tiempo que lleva al universo a expandirse de a_1 a a_2 o el corrimiento al rojo z_1 a z_2 .

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = H_0^{-1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\Omega_\gamma x^{-2} + \Omega_M x^{-1} + \Omega_{DE} x^2 + (1 - \Omega_0)}}. \quad (2.103)$$

Esta ecuación es conocida como la relación edad-corrimento al rojo del universo, al día de hoy esta ecuación tiene la forma

$$t(z) = \int_0^t dt = H_0^{-1} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_\gamma x^{-2} + \Omega_M x^{-1} + \Omega_{DE} x^2 + (1 - \Omega_0)}}. \quad (2.104)$$

Poniendo los valores estimados de los parámetros de densidad podemos obtener un valor para el tiempo.

Capítulo 3

Análisis de sistemas dinámicos cosmológicos

3.1. Conceptos básicos

Los sistemas dinámicos se ocupan de la evolución de conjuntos de variables dinámicas, que pueden ser cualquier cantidad necesaria para describir el sistema de interés. En otras palabras un sistema dinámico es un modo de describir el recorrido a lo largo del tiempo de todos los puntos de un espacio dado. La meta es predecir esta evolución usando un modelo matemático apropiado.

Los sistemas dinámicos pueden ser clasificados como continuos o discretos. Un sistema continuo es donde un conjunto de ecuaciones diferenciales describen la evolución del sistema en tiempo continuo. Un sistema discreto es gobernado por una función iterada que describe la evolución del sistema en tiempo discreto. Un sistema lineal dos dimensional tiene la forma

$$\dot{x} = ax + by \tag{3.1}$$

$$\dot{y} = cx + dy \tag{3.2}$$

donde a, b, c y d son parámetros, podemos escribir el sistema en una forma más compacta en notación vectorial como $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Se dice que el sistema es lineal si \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 son soluciones, entonces cualquier combinación lineal $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ también lo es. La ecuación $\dot{\mathbf{x}} = f(x)$ se dice que tiene un punto crítico o punto fijo en $\mathbf{x} = x_0$ si y solo si $f(x_0) = 0$.

Para obtener información acerca del sistema podemos analizar qué sucede muy cerca de los puntos críticos, a esto se le conoce como el estudio de estabilidad del sistema.

Para este estudio es necesario primeramente linealizar al rededor del punto

crítico hiperbólico P_i^1 . Para linealizar consideramos una pequeña perturbación lineal

$$x \rightarrow x_i + \delta x(t), y \rightarrow y_i + \delta y(t) \quad (3.3)$$

Estas perturbaciones obedecerán al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acoplado que en forma de matriz queda como:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = J(P_i) \delta \mathbf{x} \quad (3.4)$$

En donde

$$\delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$$

y la matriz jacobiana, o bien también conocida como la matriz de linealización:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Gracias al Teorema de Hartman-Grobman que básicamente establece que el comportamiento de un sistema dinámico en la vecindad de cada punto de equilibrio hiperbólico es cualitativamente el mismo que el comportamiento de su linealización, podemos estudiar el sistema (3.4) en lugar de (3.1) y (3.2). Asumiendo que J puede ser diagonalizada, es decir que tiene la forma $J^* = M^{-1}JM$ siendo M la matriz de diagonalización y

$$J^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

es la matriz diagonal que tiene por componentes a los valores propios de la matriz jacobiana J , $\det|J - \lambda \mathbf{I}| = 0$ con \mathbf{I} la matriz que tiene solamente unos en las componentes de la diagonal. Después de la diagonalización, el sistema acoplado de ecuaciones diferenciales (3.4) se desacopla:

$$\delta \dot{\bar{\mathbf{x}}} = J^* \delta \bar{\mathbf{x}} \quad (3.5)$$

$$\delta \bar{\mathbf{x}} = M^{-1} \delta \mathbf{x} \quad (3.6)$$

Para cada punto crítico tenemos una matriz J^* , note que el sistema desacoplado puede integrarse fácilmente,

$$\delta \bar{x}(t) = \delta \bar{x}(0) \exp(\lambda_1 t) \quad (3.7)$$

¹Se dice que un punto crítico es hiperbólico si la parte real de todos los valores propios de la matriz de linealización al rededor del punto crítico no desaparece. En particular, un punto hiperbólico puede no ser un centro.

$$\delta\bar{y}(t) = \delta\bar{y}(0)\exp(\lambda_2 t) \quad (3.8)$$

Dado que las perturbaciones son lineales $\delta\bar{x}$ y $\delta\bar{y}$, la combinación de las perturbaciones δx y δy

$$\delta\bar{x} = c_{11}\delta x + c_{12}\delta y \quad (3.9)$$

$$\delta\bar{y} = c_{21}\delta x + c_{22}\delta y \quad (3.10)$$

donde c_{ij} son los elementos de la matriz M^{-1} , entonces

$$\delta x(t) = \bar{c}_{11}\exp(\lambda_1 t) + \bar{c}_{12}\exp(\lambda_2 t) \quad (3.11)$$

$$\delta y(t) = \bar{c}_{21}\exp(\lambda_1 t) + \bar{c}_{22}\exp(\lambda_2 t) \quad (3.12)$$

En donde los coeficientes

$$\bar{c}_{11} = \frac{c_{22}\delta\bar{x}(0)}{c_{22}c_{11} - c_{12}c_{21}} \quad (3.13)$$

$$\bar{c}_{12} = \frac{c_{12}\delta\bar{y}(0)}{c_{22}c_{11} - c_{12}c_{21}} \quad (3.14)$$

$$\bar{c}_{21} = \frac{c_{21}\delta\bar{x}(0)}{c_{22}c_{11} - c_{12}c_{21}} \quad (3.15)$$

$$\bar{c}_{22} = \frac{c_{11}\delta\bar{y}(0)}{c_{22}c_{11} - c_{12}c_{21}} \quad (3.16)$$

De hecho, no es necesario calcular estos coeficientes pues solo deseamos saber el comportamiento de los puntos críticos hiperbólicos, este será determinado por los valores propios λ_1 y λ_2 . Entonces según la naturaleza de estos podemos clasificarlos de la siguiente manera

- λ_1 y λ_2 son reales
- $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ El punto crítico P_i es un nodo inestable.
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ El punto crítico P_i es un punto silla, este punto de equilibrio es inestable
- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 = \lambda_2 < 0$) El punto crítico P_i es un nodo estable
- λ_1, λ_2 son números complejos $\lambda_{1,2} = \nu \pm i\omega$
- $\nu > 0$ El punto crítico P_i es una espiral inestable este punto de equilibrio está asociado con oscilaciones inestables.
- $\nu = 0$ El punto crítico P_i es un centro, este punto de equilibrio está asociado con oscilaciones libres.

- $\nu < 0$ El punto crítico P_i es una espiral estable, el sistema amortigua las oscilaciones hasta que llega al estado de equilibrio.

La clasificación anterior de puntos críticos aislados abarca los tipos de puntos de equilibrio más frecuentemente encontrados en aplicaciones cosmológicas. Sin embargo no hemos hablado acerca de los puntos críticos no hiperbólicos. Otra consideración que hemos hecho es que el sistema es dos dimensional, para el sistema tres dimensional el análisis de puntos críticos se hace de manera análoga, considerando una ecuación diferencial más en el sistema y una matriz 3×3 sin embargo la clasificación para la estabilidad es un poco diferente. A continuación daremos la clasificación.

El sistema dinámico es ahora

$$f(x, y, z) = \dot{x} = ax + by + cz \quad (3.17)$$

La matriz de jacobiana para

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Como ya dijimos es equivalente analizar el sistema en la vecindad de cada punto crítico o su linealización definimos algunas cantidades como lo son la traza $p = tr(J) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, el determinante $q = det(J) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ y los menores $r = M(J) = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3$, La naturaleza de los valores propios es dada por el discriminante de Girolamo Cardano

$$R = 4P^3 + 27Q^2 \quad (3.18)$$

Siendo $P = r - \frac{p^2}{3}$ y $Q = \frac{-2p^3}{27} + \frac{pr}{3} - q$. Los casos considerados para esta clasificación fueron introducidos por Poincaré en sus memorias(1886, p.166),

- Si los valores propios son reales y positivos, el punto fijo es un nodo inestable.
- Si los valores propios son reales y negativos el punto fijo es un nodo estable
- Si alguno de los valores propios tiene signo opuesto, el punto fijo es un punto silla
- Si dos de los valores propios son complejos conjugados y el restante es real y positivo el punto fijo es un foco.
- Si dos de los valores propios son complejos conjugados y el restante es real y negativo el punto fijo es un punto silla.
- Si los valores propios son puramente imaginarios, el punto fijo es un centro.

3.2. Sistemas dinámicos en cosmología

Los modelos de energía oscura más utilizados en la actualidad son los llamados de campo escalar ϕ , para esto consideramos que la presión y la densidad del campo están definidas por

$$\rho_\phi \equiv \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.19)$$

$$p_\phi \equiv \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (3.20)$$

Donde $V(\phi)$ es el potencial del campo escalar pedimos que sea definido positivo, este potencial será propuesto por nosotros más adelante. Además deseamos que este campo pueda ser descrito como un fluido perfecto, pues hemos supuesto desde un principio que nuestras componentes del universo pueden ser modeladas por este tipo de fluidos.

Queremos las ecuaciones dinámicas del campo por lo que calcularemos $\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$, así pues, sustituyendo las expresiones, tenemos

$$\dot{H} = -\frac{8\pi G}{3} \left[\left(\frac{2}{3} \right) (\rho + p) \right] + \frac{k}{a^2} \quad (3.21)$$

Pero $\rho + p = \rho_m + \frac{4}{3}\rho_\gamma + \dot{\phi}^2$, por lo que la ecuación dinámica de H es

$$\dot{H} = -\frac{8\pi G}{3} \left(\frac{2}{3} \right) \left[\rho_m + \frac{4}{3}\rho_\gamma + \dot{\phi}^2 \right] + \frac{k}{a^2} \quad (3.22)$$

De donde ya conocemos ρ_m y ρ_γ . Para resolver el sistema de ecuaciones necesitamos encontrar los valores de H , ϕ , $\dot{\phi}$ y t sin embargo, podemos prescindir de una de las variables, es decir, podemos reparametrizar para que nuestras ecuaciones (3.22).

Entonces, si dividimos por H^2 la ecuación (??) tenemos

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2} \left[\rho_m + \rho_\gamma + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right] - \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (3.23)$$

Utilizando la definición de la densidad crítica (2.70), y definiendo las variables

$$x^2 \equiv \frac{(8\pi G)\dot{\phi}^2}{6H^2}; \quad y^2 \equiv \frac{(8\pi G)V(\phi)}{3H^2}, \quad (3.24)$$

La ecuación es entonces

$$1 = \Omega_m + \Omega_\gamma + \Omega_k + x^2 + y^2, \quad (3.25)$$

con esto podemos escribir una de nuestras variables en términos de las demás, lo que nos reduce la cantidad de incógnitas en nuestro sistema. Ahora estudiaremos el comportamiento de las componentes de materia, entonces las ecuaciones dinámicas son

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{2}{3} \left[\Omega_m + \frac{4}{3}\Omega_\gamma + 2x^2 \right] - \Omega_k. \quad (3.26)$$

Para conocer cómo es que evolucionan las componentes del universo, utilizamos la ecuación de conservación (2.56), para la materia

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0, \quad (3.27)$$

si multiplicamos y dividimos por $H\rho_{crit}$

$$\frac{\dot{\rho}_m}{H\rho_{crit}} + 3\Omega_m = 0. \quad (3.28)$$

Para conocer la evolución de las componentes, tomamos la derivada temporal

$$\dot{\Omega}_m = -3H\Omega_m - \Omega_m \left(\frac{\dot{\rho}_{crit}}{\rho_{crit}} \right), \quad (3.29)$$

y considerando que $\frac{2\dot{H}}{H^2} = \frac{\dot{\rho}_{crit}}{\rho_{crit}}$, por lo que

$$\dot{\Omega}_m = -3H\Omega_m - \Omega_m \left(\frac{2H^2}{H} \right). \quad (3.30)$$

Además, podemos quitar la dependencia explícita del tiempo mediante la relación

$$\dot{\Omega}_m = \left(\frac{d\Omega_m}{da} \right) \dot{a} = H \frac{d\Omega_m}{d(\ln a)}. \quad (3.31)$$

Para hacer más ligera la notación denotamos $\Omega'_m = \frac{d\Omega_m}{d(\ln a)}$. Entonces la ecuación final que debemos resolver es

$$\Omega'_m = \Omega_m \left[-3 + 3 \left(\Omega_m + \frac{4}{3}\Omega_\gamma + 2x^2 \right) + 2\Omega_k \right]. \quad (3.32)$$

De manera análoga podemos encontrar las ecuaciones dinámicas para Ω'_γ , Ω'_k x' y y' . El sistema a resolver es:

$$\Omega'_\gamma = \Omega_\gamma \left[-4 + 3 \left(\Omega_m + \frac{4}{3}\Omega_\gamma + 2x^2 \right) + 2\Omega_k \right] \quad (3.33)$$

$$\Omega'_k = -2\Omega_k \left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right) \quad (3.34)$$

$$x' = -x \left[3 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right] - \left(\frac{3}{\sqrt{6}} \right) y^2 \lambda(\phi) \quad (3.35)$$

$$y' = y \left[\frac{\sqrt{6}}{2} x \lambda(\phi) - \frac{\dot{H}}{H^2} \right]. \quad (3.36)$$

Siendo el factor $\lambda(\phi) = \frac{dV(\phi)}{d\phi} \frac{1}{\sqrt{8\pi G}V(\phi)}$. Con esto, tenemos completo el sistema y las ecuaciones son suficientes para encontrar las variables a determinar, ahora solo debemos dar la forma del potencial de acuerdo a nuestros requerimientos físicos.

Otra restricción del sistema de la que no hemos hablado es la que proponemos al suponer que la densidad de materia siempre es positiva o igual a cero. Esta suposición nos arroja la siguiente desigualdad $\Omega_m = 1 - x^2 - y^2 \geq 0$, que nos impone las condiciones

$$0 \leq y \leq 1 \quad (3.37)$$

$$-1 \leq x \leq 1 \quad (3.38)$$

En las siguientes secciones haremos un análisis del sistema utilizando estas ecuaciones con modelos específicos, entre ellos el más conocido como constante cosmológica.

3.3. Modelo de constante cosmológica

La dinámica del universo queda completamente determinada por la forma explícita del factor de escala, que depende de la simetría y de la materia del universo. Así pues ahora consideraremos el caso de la constante cosmológica, este caso es analizado en el artículo de Copeland. Para nuestro sistema de ecuaciones anteriormente escrito en (3.33), (3.35), (3.36), tomamos $x = 0$ y $V(\phi) = V_0$ donde V_0 es una constante. Por lo que nuestro sistema dinámico queda conformado de la siguiente manera

$$\Omega'_m = \Omega_m [-1 + \Omega_m + 2\Omega_\gamma - 2y^2] \quad (3.39)$$

$$\Omega'_\gamma = \Omega_\gamma [-2 + \Omega_m + 2\Omega_\gamma - 2y^2] \quad (3.40)$$

$$\Omega'_k = -2\Omega_k \left[1 - \frac{3}{2} \left(\Omega_m + \frac{4}{3}\Omega_\gamma \right) - \Omega_k \right] \quad (3.41)$$

$$y' = y \left[1 + \frac{1}{2}\Omega_m + \Omega_\gamma - y^2 \right] \quad (3.42)$$

Un parámetro del que aún no hemos dicho nada es el parámetro de desaceleración, este se puede escribir como $q = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2}$ y nos será muy útil para comprender la evolución del sistema.

3.3.1. Análisis de puntos críticos

Del sistema de ecuaciones anterior encontramos que los puntos críticos son los mostrados en la tabla 3.1

Punto crítico	Ω_m	Ω_γ	y	Ω_k	q
P_1	0	0	0	1	0
P_2	0	0	1	0	-1
P_3	0	1	0	0	1
P_4	1	0	0	0	1/2

Cuadro 3.1: Se muestran los puntos críticos y el valor que toma el parámetro de desaceleración en cada caso.

Para el análisis dinámico calculamos los valores propios para conocer la estabilidad.

De la ecuación para obtenemos el comportamiento del factor de escala en cada uno de los puntos críticos, entonces veamos qué sucede en cada caso

P_1 La ecuación toma la forma $H^2 = -\frac{k}{a^2}$ integrando para encontrar el factor de escala $a(t) = \sqrt{-kt}$, lo que se conoce como el espacio el universo de Milne, este es un universo vacío de todos los tipos de materia y energía con secciones espaciales hiperbólicas.

P_2 Es el universo dominado por energía oscura, nos da un universo acelerado y la ecuación para el factor de escala está dada por $a(t) = Aexp(H_0t)$. Note que si $t \rightarrow \infty$ el universo diverge, pero si $t \rightarrow -\infty$ se va a cero y cuando $t = 0$ la ecuación $\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{AH_0^2 exp(H_0t)}{Aexp(H_0t)} = H_0^2$ lo que nos dice que $H = H_0$, a este universo se le conoce como el universo de *DeSitter* o *Modelo inflacionario*

P_3 El universo dominado por radiación, este es un universo en desaceleración,

P_4 Para el universo dominado por materia tenemos la ecuación $H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho_m^0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \right)$ resolviendo para $a(t)$ tenemos $a(t) = \left(\frac{3}{2} Ct \right)^{\frac{2}{3}}$ lo que es un universo desacelerado en toda la historia.

Crit. Point	λ_1	λ_2	λ_3	Estabilidad
P_1	-1	-2	1	punto silla inestable
P_2	-3	-4	-2	atractor estable
P_3	1	2	2	repulsor inestable
P_4	1	-1	3/2	punto silla inestable

Cuadro 3.2: Estabilidad

3.4. Modelo con potencial exponencial

Los campos escalares juegan un rol central en modelos de universo temprano, la idea de esta sección es mostrar que los campos escalares con potenciales exponenciales aportan una densidad de energía no despreciable.

Consideremos un campo escalar con una densidad de energía potencial exponencial

$$V = V_0 \exp(-\lambda \kappa \phi), \quad (3.43)$$

con λ una constante positiva, en este caso el factor $\lambda(\phi) = -\lambda$, por lo que tenemos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Sin embargo, por simplicidad consideraremos que $\Omega_\gamma = 0$ y $\Omega_k = 0$, es decir, un universo plano donde la radiación no juega un papel importante, por lo que nuestro sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\Omega'_m = \Omega_m [1 - \Omega_m - 4y^2 + 2x^2] \quad (3.44)$$

$$x' = -x \left(3 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right) + \sqrt{\frac{3}{2}} y^2 \lambda \quad (3.45)$$

$$y' = y \left(-\sqrt{\frac{3}{2}} x \lambda - \frac{\dot{H}}{H^2} \right) \quad (3.46)$$

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = - \left(\frac{3}{2} \right) (1 + x^2 - y^2) \quad (3.47)$$

$$\Omega_m + x^2 + y^2 = 1 \quad (3.48)$$

Note que las variables H y Ω_m no son independientes debido a que pueden escribirse en función de x y y (esto se puede ver de las ecuaciones (3.47) y (3.48)), por lo podemos reducir el sistema a un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con dos incógnitas determinado por las ecuaciones:

$$x' = -3x + \frac{3}{2}x(1 + x^2 - y^2) + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda y^2 \quad (3.49)$$

$$y' = y \left[-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda x + \frac{3}{2}(1 + x^2 - y^2) \right] \quad (3.50)$$

Además se pueden escribir la ecuación para el parámetro de desaceleración en función de las Ω ,

$$q = -1 + \frac{3}{2}(1 + x^2 - y^2) \quad (3.51)$$

Ahora tenemos todas las herramientas para proceder al análisis de puntos críticos.

3.4.1. Análisis de puntos críticos

Los puntos críticos del sistema dado por las ecuaciones (3.49) y (3.50) son mostrados en la tabla (3.3), al igual que el parámetro de desaceleración.

Punto crítico	x	y	Ω_m	q
P_1	0	0	1	$\frac{1}{2}$
P_2	1	0	0	2
P_3	-1	0	0	2
P_4	$\sqrt{\frac{3}{2}\frac{1}{\lambda}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}\frac{1}{\lambda}}$	$1 - \frac{3}{\lambda^2}$	$\frac{1}{2}$
P_5	$\frac{\lambda}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}}$	0	$2 < \lambda^2 < 6 \quad q > 0$ $0 < \lambda^2 < 2 \quad q < 0$ $\lambda^2 = 2 \quad q = 0$

Cuadro 3.3: Se muestran los puntos críticos del sistema (3.49) y (3.50).

Para hacer el análisis de estabilidad de puntos críticos del sistema (3.49) y (3.50) calculamos los valores propios estos son obtenidos del polinomio característico asociado a la matriz jacobiana de este sistema. Estos valores son mostrados en la tabla (3.4).

Analicemos los puntos críticos,

- El punto P_1 es conocido como el universo dominado por materia debido a que no hay campo escalar, y el universo se vuelve desacelerante.
- En los puntos P_2 y P_3 tenemos un universo que es dominado por la energía cinética del campo escalar, el universo en este caso también es desacelerante ya que q siempre es positivo.
- El punto P_4 solución nos muestra un universo desacelerante dominado por campo escalar. Note que el factor $\frac{\Omega_m}{\Omega_\phi} = 0$

- El punto crítico P_5 tiene una combinación de energía cinética y potencial del campo escalar, aquí se pueden obtener ambos comportamientos de aceleración y desaceleración dependiente de los valores de λ , para $0 < \lambda^2 < 2$ obtenemos universos acelerados. La razón entre la densidad de materia y la densidad de energía oscura de campo escalar está dada por $\frac{\Omega_m}{\Omega_\phi} = \frac{\lambda^2 - 3}{3}$ la cual es una constante debido a que este punto crítico existe solamente cuando $\lambda^2 \geq \frac{3}{2}$. Esta solución es conocida como la solución de escala (*scaling critical point*).

Un detalle importante de este modelo es que nos muestra que existen universos con un punto crítico que es un atractor acelerante futuro (P_4) para los valores de $2 < \lambda < 6$

Si consideramos un valor específico como $\lambda = 1$ tenemos un diagrama de espacio fase como el que se muestra en la figura (3.1). A continuación, se muestran tres casos para distintos valores de λ . El caso $\lambda = 1$ nos muestra cuatro puntos críticos, dos repulsores, un punto silla y un atractor.

Punto crítico	σ_1	σ_2	Existencia	Estabilidad
P_1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	todo λ	punto silla
P_2	3	$3 - \sqrt{\frac{3}{2}\lambda}$	todo λ	inestable para $\lambda < \sqrt{6}$ punto silla para $\lambda > \sqrt{6}$
P_3	3	$3 - \sqrt{\frac{3}{2}\lambda}$	todo λ	inestable para $\lambda > -\sqrt{6}$ punto silla para $\lambda < -\sqrt{6}$
P_4	$\frac{3(-\lambda - \sqrt{24\lambda^2 - 7\lambda^4})}{4\lambda^2}$	$\frac{3(-\lambda + \sqrt{24\lambda^2 - 7\lambda^4})}{4\lambda^2}$	$\lambda^2 \geq \frac{3}{2}$	estable para $3 < \lambda^2 < \frac{24}{7}$ punto silla para $3 < \lambda^2$ espiral estable para $\lambda^2 > \frac{24}{7}$
P_5	$-3 + \lambda^2$	$-3 \left(1 - \frac{\lambda^2}{6}\right)$	$\lambda^2 \leq 6$	punto silla para $3 < \lambda^2 < 6$ estable para $\lambda^2 < 3$

Cuadro 3.4: Estabilidad de puntos críticos del modelo (3.50), (3.49), siendo σ_1 y σ_2 los vlores propios

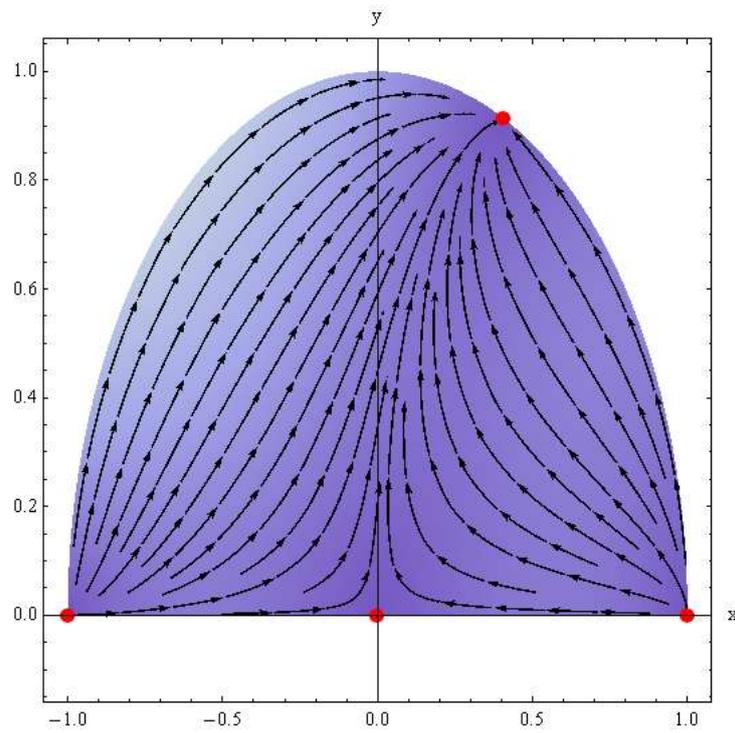


Figura 3.1: Diagrama de espacio fase del sistema tomando $\lambda = 1$, los puntos rojos indican los puntos críticos del sistema. El atractor de tiempo tardío está ubicado en $x = \sqrt{\frac{1}{6}}$, $y = \sqrt{\frac{5}{6}}$

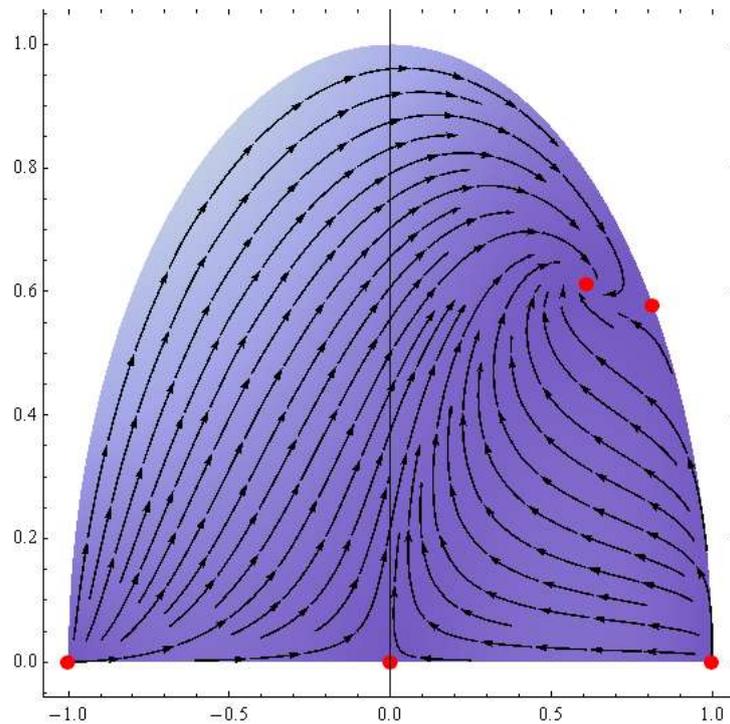


Figura 3.2: Diagrama de espacio fase del sistema tomando $\lambda = 2$, los puntos rojos indican los puntos críticos del sistema. El punto $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $y = \sqrt{\frac{1}{3}}$ es un punto silla, mientras que $x = y = \sqrt{\frac{3}{8}}$ es un atractor de tiempo tardío.

Usamos distintos valores para el parámetro λ observar cómo es que cambia el comportamiento del sistema.

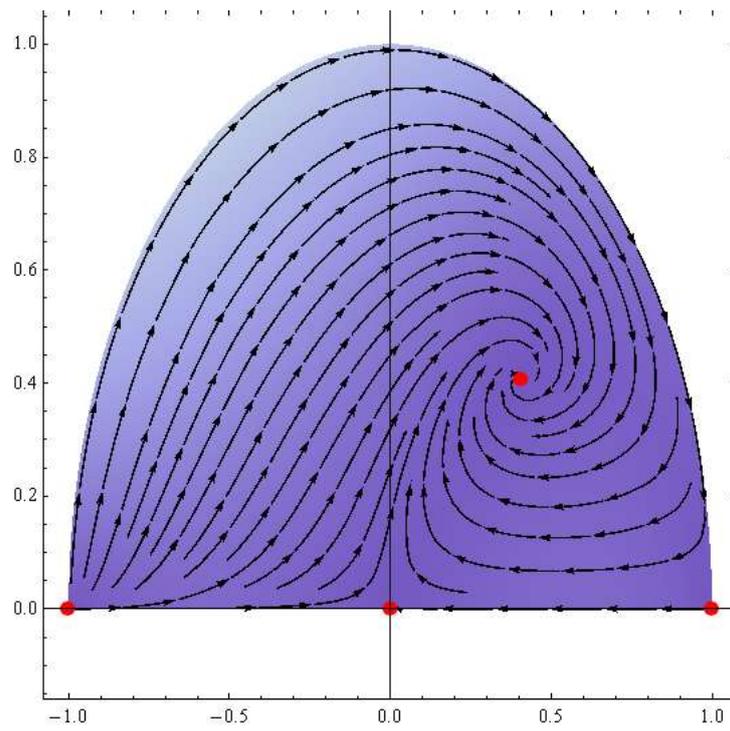


Figura 3.3: Diagrama de espacio fase del sistema tomando $\lambda = 3$, los puntos rojos indican los puntos críticos del sistema. El punto $x = y = \sqrt{\frac{1}{6}}$ es un atractor de tiempo tardío

A continuación, analizaremos un modelo más complejo, este sistema es el estudio central de esta tesis. El modelo que acabamos de estudiar es un caso particular del sistema de energía oscura interactuando con materia oscura.

3.5. Modelos de energía oscura con interacción con materia oscura.

Consideramos dos componentes del universo, el primero es el campo escalar llamado quintaesencia como fuente de energía oscura en el universo espacialmente plano, y el segundo es la materia oscura. La densidad total de energía del Universo se conserva y los componentes individuales de la densidad de energía pueden no conservarse. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento se escriben como

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + P_\phi) = Q \quad (3.52)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + P_m) = -Q \quad (3.53)$$

$$\dot{H} = -\frac{(8\pi G)}{3} \left(\frac{3}{2}(\rho + P) \right) \quad (3.54)$$

Siendo Q la interacción y tomando $\kappa^2 = 8\pi G$ tenemos que la segunda ecuación de Friedmann tiene la forma:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2} \left((1 + w_m)\Omega_m + \frac{\kappa^2 \dot{\phi}^2}{3H^2} \right) \quad (3.55)$$

Para el análisis hemos utilizado la misma forma de presión y densidad del campo escalar mostrados en las ecuaciones (3.19) y (3.20). Con lo que la ecuación del campo escalar es escrita ahora como

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = \frac{Q}{\dot{\phi}} \quad (3.56)$$

Usando las definiciones de las variables x , y y λ mencionadas en el capítulo anterior tenemos que la derivada de x con respecto al tiempo

$$\dot{x} = x \left(\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} - \frac{\dot{H}}{H} \right) \quad (3.57)$$

Sustituyendo (3.56) y (3.55) en (3.57), obtenemos la expresión

$$\frac{\dot{x}}{H} = -3x + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda y^2 + \frac{Q\kappa^2}{6xH^3} - x \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (3.58)$$

Cambiando a la variable primada $\ln(a)$ como anteriormente se había hecho, la ecuación queda finalmente:

$$x' = -3x + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda y^2 - x \left(\frac{\dot{H}}{H^2} \right) + \frac{Q\kappa^2}{6xH^3} \quad (3.59)$$

De igual manera derivamos con respecto al tiempo para la variable y

$$\dot{y} = y \left[-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda x + \frac{\dot{H}}{H^2} \right] \quad (3.60)$$

Ahora calculamos la derivada de la densidad del campo con respecto al tiempo

$$\dot{\rho} = \dot{\phi} \left[\ddot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right] \quad (3.61)$$

Con lo que la ecuación de continuidad queda de la forma

$$\dot{\rho}_\phi + 3H[\rho_\phi + P_\phi] = Q \quad (3.62)$$

Por último, para la densidad de materia

$$\dot{\rho}_m + 3H[1 + w_m]\rho_m = -Q \quad (3.63)$$

Es aquí donde introducimos la interacción de la siguiente forma $Q = \alpha\dot{\rho}_m + \beta\dot{\rho}_\phi$, o bien la interacción puede ser escrita de manera equivalente como:

$$Q = \frac{-3H}{1 - \alpha + \beta} \left[(1 + w_m)\rho_m\alpha + \beta\dot{\phi}^2 \right] \quad (3.64)$$

sustituyendo esta expresión en nuestras ecuaciones y haciendo la consideración de que $w_m = 0$, el sistema dinámico queda determinado por las ecuaciones:

$$x' = \left[\frac{3\beta - 3(1 - \alpha + \beta)}{(1 + \beta - \alpha)} \right] x + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda y^2 + \frac{3x}{2} [1 + x^2 - y^2] + \frac{3\alpha}{2(1 - \alpha + \beta)} \frac{(1 - x^2 - y^2)}{x} \quad (3.65)$$

$$y' = -y \left[\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda x - \left(\frac{3}{2}(1 + x^2 - y^2) \right) \right] \quad (3.66)$$

Al suponer que la densidad de materia siempre es positiva o igual a cero obtenemos que $\Omega_m = 1 - x^2 - y^2 \geq 0$, que nos impone las condiciones

$$0 \leq y \leq 1 \quad (3.67)$$

$$-1 \leq x \leq 1 \quad (3.68)$$

por lo que el espacio fase físicamente aceptable es un semicírculo de radio uno. Es decir, toda la dinámica del sistema físico se desarrolla en esta región.

Cabe destacar que el modelo tiene una singularidad interesante, debido a que el término $\frac{3\alpha}{2(1-\alpha+\beta)} \frac{(1-x^2-y^2)}{x}$ que aparece en la ecuación (3.65) nos indica que la solución del sistema cuando $x \rightarrow 0$ no es única pues la función que aparece del lado derecho de la ecuación (3.65) no es continuamente diferenciable. Esto se puede apreciar de manera visual en los diagramas de espacio fase.

Hacemos el análisis de puntos críticos,

$$0 = -\frac{3(1-\alpha)}{(1-\alpha+\beta)}x + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda y^2 + \left(\frac{3}{2}\right)x[1+x^2-y^2] + \left(\frac{3}{2}\right)\frac{\alpha}{(1-\alpha+\beta)}\frac{(1-x^2-y^2)}{x}, \quad (3.69)$$

$$0 = -y \left[\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda x - \left(\frac{3}{2}(1+x^2-y^2)\right) \right]. \quad (3.70)$$

De la ecuación (3.70) se puede observar que existen dos casos, $y = 0$ o bien $\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda x - \left(\frac{3}{2}(1+x^2-y^2)\right) = 0$. Analizamos primero el caso en que $y = 0$, de la ecuación (3.69) obtenemos los puntos críticos

$$x_i = \pm \sqrt{\left[\frac{(1-\beta) \pm \sqrt{(1-\beta)^2 - 4\alpha(1+\beta-\alpha)}}{2(1+\beta-\alpha)} \right]}, \quad (3.71)$$

siendo $i = (++, -, +, --)$. La figura ?? muestra las regiones de existencia de las soluciones de los puntos críticos, estas regiones se encuentran acotadas por las siguientes desigualdades:

$$\alpha \leq 0 \text{ y } \beta \geq 0 \quad (3.72)$$

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ y } 0 \leq \beta \leq 1 - 2\sqrt{2\alpha} + 2\alpha. \quad (3.73)$$

para los puntos críticos x_{++} y x_{-+} a esta región de existencia está compuesta de la región 1 y región 2 mostradas en la figura 3.4 . Mientras que para los puntos críticos x_{+-} y x_{--} las regiones quedan definidas por las desigualdades

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ y } -1 + \alpha < \beta \leq 1 - 2\sqrt{2\alpha} + 2\alpha \quad (3.74)$$

$$\frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \text{ y } -1 + \alpha < \beta \leq 0 \quad (3.75)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1 \text{ y } \beta < -1 + \alpha \text{ ó } \alpha > 1 \text{ y } \beta \leq 0 \quad (3.76)$$

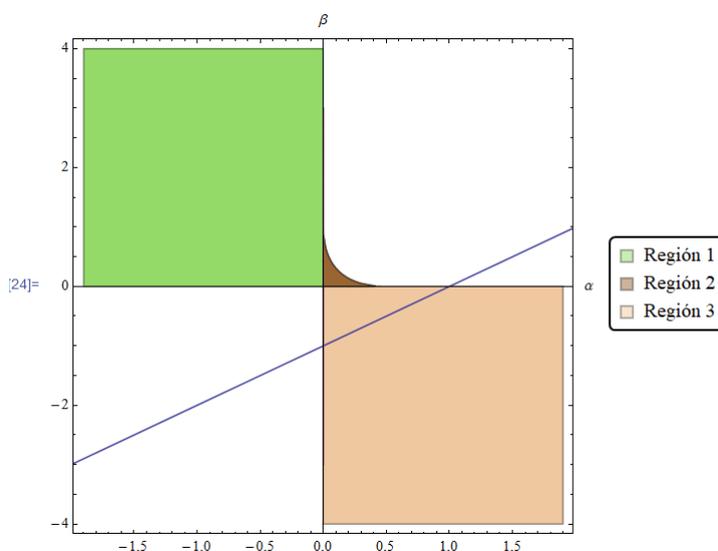


Figura 3.4: Condiciones de existencia del sistema para los puntos críticos provenientes de $y = 0$, las regiones quedan acotadas por las desigualdades (3.72 - (3.76)). La línea azul muestra un universo dominado por materia.

Las regiones de existencia son mostradas como la región 3 y la región 2 de la Figura 3.4 . Note que existe también una línea que cruza $\beta = -1 + a$. Esta línea representa el universo dominado por materia, se concluir esto al ver las ecuaciones que modelan este sistema dinámico.

Es importante notar que en la región dos de la figura (3.4) existen cuatro puntos críticos, lo cual es algo sumamente interesante debido a que en el sistema sin interacción solo aparecen dos puntos críticos.

Para hablar de la estabilidad del sistema tenemos que ver cómo son los valores propios. Calculando los elementos de la matriz Jacobiana J tenemos las siguientes

expresiones

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} = & -\frac{3(1-\alpha)}{(1-\alpha+\beta)} + \left(\frac{3}{2}\right) (1+x^2-y^2) + 3x^2 \\ & -\frac{3\alpha}{2(1-\alpha+\beta)} \left(\frac{1+x^2-y^2}{x^2}\right) \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = y \left(\sqrt{6}\lambda - 3x - \frac{3\alpha}{(1-\alpha+\beta)} \frac{1}{x} \right) \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -y \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda - 3x \right) \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda x + \frac{3}{2} (1+x^2-3x^2) \quad (3.80)$$

Los valores propios calculados mediante la siguiente ecuación

$$\det (J|_{(y=y_*, x=x_*)} - \lambda I) = 0, \quad (3.81)$$

donde I es la matriz identidad de 2×2 . Al sustituir los puntos críticos en la matriz obtenemos solo componentes en diagonal, así pues los valores propios son:

$$\begin{aligned} \lambda_1^i &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{(x=x_i, y=0)} \quad (3.82) \\ &= \frac{3}{(1-\alpha+\beta)x_i^2} [(1-\beta)x_i^2 - 2\alpha] \\ &= -\frac{3(1-\beta)}{2(1-\alpha+\beta)} + \frac{9}{2}x_i^2 - \frac{3\alpha}{2(1-\alpha+\beta)} \frac{1}{x_i^2} \\ &= \frac{3 \left[(1-\beta) \left((1-\beta) + \sqrt{\Delta} \right) - 4\alpha(1-\alpha+\beta) \right]}{(1-\alpha+\beta) \left[(1-\beta) + \sqrt{\Delta} \right]} \end{aligned}$$

$$\lambda_2^i = -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda x_i + \frac{3}{2} (1+x_i^2), \quad (3.83)$$

donde $\Delta = (1-\beta)^2 - 4\alpha(1-\alpha+\beta)$. Por otra parte recordemos que $0 \leq x_i^2 \leq 1$.

3.5.1. Punto crítico x_{++}

Entonces tenemos que la región dentro de la existencia de solución $\lambda_1^{(++)} > 0$ (al tomar $x_{(++)}$) está acotada por las siguientes desigualdades:

$$\alpha < 0 \text{ y } \beta \geq 0 \quad (3.84)$$

$$0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \text{ y } 0 \leq \beta < 1 - 2\sqrt{2\alpha} + 2\alpha. \quad (3.85)$$

$$\alpha = 0 \text{ y } \beta > 1. \quad (3.86)$$

Ahora veamos que para el valor propio $\lambda_2^{(++)} > 0$, es decir;

$$\lambda_2^{(++)} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda x_{(++)} + \frac{3}{2}(1 + x_{(++)}^2) > 0 \quad (3.87)$$

$$\Rightarrow \lambda < \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(1 + x_{(++)}^2)}{x_{(++)}}. \quad (3.88)$$

Lo que implica que para λ obtenemos una cota superior, dependiendo de los valores de α y β .

Revisando si en alguna región los valores propios toman valores negativos obtenemos que:

★ No existe en ningún punto de la región de existencia de solución tal que $\lambda_1^{(++)} < 0$.

★ Cuando $\lambda_2^{(++)} < 0$, tenemos:

$$\lambda_2^{(++)} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda X_{(++)} + \frac{3}{2}(1 + X_{(++)}^2) < 0 \quad (3.89)$$

$$\Rightarrow \lambda > \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(1 + X_{(++)}^2)}{X_{(++)}}. \quad (3.90)$$

Por último veamos cuándo los valores propios son cero: Para el valor propio $\lambda_1^{(++)} = 0$ se cumple en la curva definido por

$$\beta = 1 - 2\sqrt{2\alpha} + 2\alpha, \text{ donde } 0 \leq \alpha \leq 1/2. \quad (3.91)$$

En la curva definida por la ecuación (3.91), tenemos

$$\lambda_2^{(++)} = -\lambda \sqrt{\frac{3(\sqrt{2\alpha} - \alpha)}{2(2 + \alpha - 2\sqrt{2\alpha})}} + \left[\frac{3(2 - \sqrt{2\alpha})}{2(2 + \alpha - 2\sqrt{2\alpha})} \right] \quad (3.92)$$

Y cuando $\lambda_2^{(++)} = 0$

$$\Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(1 + X_{(++)}^2)}{X_{(++)}}. \quad (3.93)$$

Es importante notar que para el valor propio $\lambda_1^{(++)}$ es simple ubicar en qué regiones los valores son positivos por lo que hemos obtenido que $\lambda_1^{(++)} > 0$, en casi toda la región de existencia de solución, ya que en la curva $\beta = 1 - 2\sqrt{2\alpha} + 2\alpha$ y $0 \leq \alpha \leq 1/2$, tenemos que $\lambda_1^{(++)} = 0$.

Por el contrario el valor propio $\lambda_2^{(++)}$ no es posible ubicar en que regiones de la existencia de solución es positivo, negativo o cero en la región de existencia de solución, debido a que este valor propio depende del parámetro λ que viene del potencial del campo escalar, el cual al menos hemos obtenido cotas para el valor de λ , por lo que tomamos casos particulares

★ Cuando $\alpha = 0$ y $0 \leq \beta < 1$ tenemos que $\lambda_1^{(++)} < 0$ y $\lambda_2^{(++)} = 3/2 > 0$, por lo tanto, para ese intervalo son puntos silla.

★ Cuando $\alpha = 0$ y $\beta > 1$, tenemos que $\lambda_1^{(++)} > 0$ y $\lambda_2^{(++)} = 3/2$, por lo tanto, para ese intervalo son repulsores.

Punto crítico $x_{(-+)}$

Ahora analizamos el punto crítico que tiene el signo negativo fuera y positivo dentro de la raíz, debido a que este valor propio depende de $x_{(-+)}^2$ el cual tiene un comportamiento igual a $x_{(++)}^2$, entonces para $\lambda_2^{(-+)}$ el análisis es exactamente igual que en el caso anterior para $\lambda_1^{(++)}$, ya que el resultado es exactamente igual que el caso analizado en la sección previa.

Sin embargo para el valor propio $\lambda_2^{(-+)}$, lo primero que hay que notar es que $-1 \leq x_{(-+)} \leq 0$. Un caso particular ocurre cuando $x_{(-+)} = 0$, que nos provee $\lambda_2^{(-+)} = 3/2$ para todo λ . Entonces se debe hacer el análisis en el intervalo $-1 \leq x_{(-+)} < 0$.

★ Ahora veamos cuando $\lambda_2^{(-+)} > 0$, lo que tenemos es una cota para λ

$$\lambda_2^{(-+)} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda x_{(-+)} + \frac{3}{2}(1 + x_{(-+)}^2) > 0 \quad (3.94)$$

$$\Rightarrow \lambda > \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(1 + x_{(-+)}^2)}{x_{(-+)}}. \quad (3.95)$$

★ Tomando $\lambda_2^{(-+)} < 0$, tenemos que

$$\lambda_2^{(-+)} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda x_{(-+)} + \frac{3}{2}(1 + x_{(-+)}^2) < 0 \quad (3.96)$$

$$\Rightarrow \lambda < \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(1 + x_{(-+)}^2)}{x_{(-+)}}. \quad (3.97)$$

★ Y considerando $\lambda_2^{(++)} = 0$

$$\Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(1 + x_{(++)}^2)}{x_{(++)}}. \quad (3.98)$$

Lo que nos deja ver que para distintos valores de lambda el comportamiento de la estabilidad va a cambiar como se muestra en la tabla.

Punto crítico $x_{(+-)}$

Ahora analicemos los valores propios con el punto crítico $x_{(+-)}$, notemos que el intervalo en el que está definido el punto crítico es $0 \leq x_{(+-)} \leq 1$.

Así pues el valor propio $\lambda_1^{(+-)} > 0$ está definido en la región

$$0 < \alpha \leq 1 \text{ y } \beta < -1 + \alpha \text{ ó } \alpha > 1 \text{ y } \beta \leq 0 \quad (3.99)$$

El valor propio $\lambda_1^{(+-)} < 0$ tiene valores en la región

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ y } -1 + \alpha < \beta < 1 - 2\sqrt{2\alpha} + 2\alpha \quad (3.100)$$

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1 \text{ y } -1 + \alpha < \beta \leq 0 \quad (3.101)$$

En resumen $\lambda_1^{(+-)}$ es positivo debajo de la línea $\beta = -1 + \alpha$ y es negativo sobre esta línea.

Se puede verificar que este valor propio es $\lambda_1^{(+)} = 0$, al igual que para la raíz anterior ($x_{(++)}$), $\lambda_1^{(+-)}$ es igual a cero en la curva definido por

$$\beta = 1 - 2\sqrt{2\alpha} + 2\alpha, \text{ donde } 0 \leq \alpha \leq 1/2 \quad (3.102)$$

Y el valor propio $\lambda_2^{(+)} > 0$, nos otorga una cota para λ , dada por la expresión

$$\lambda < \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(1 + x_{(+-)}^2)}{x_{(+-)}}, \text{ donde } 0 < x_{(+-)} \leq 1. \quad (3.103)$$

Por otro lado, $\lambda_2^{(+)} < 0$ tenemos

$$\lambda > \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(1 + x_{(+-)}^2)}{x_{(+-)}}, \text{ donde } 0 < x_{(+-)} \leq 1. \quad (3.104)$$

Finalmente para este valor propio cuando $\lambda_2^{(+)} = 0$, tenemos

$$\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(1 + x_{(+-)}^2)}{x_{(+-)}}, \text{ donde } 0 < x_{(+-)} \leq 1. \quad (3.105)$$

★ Veamos que el caso particular cuando $\alpha = 0$ y $-1 < \beta < 1$, tenemos $\lambda_1^{(+)} < 0$ y $\lambda_2^{(+)} = 3/2 > 0$, por lo tanto para esos puntos tienen un comportamiento de punto silla.

★ Ahora cuando $\alpha = 0$ y $\beta < -1$, tenemos; $\lambda_1^{(+)} > 0$ y $\lambda_2^{(+)} = 3/2 > 0$, por lo tanto para esos puntos, tenemos repulsores.

3.5.2. Punto crítico x_{--}

Finalmente vamos a analizar la raíz $x_{(--)}^2$, el cual en este caso $-1 \leq x_{(--)} \leq 0$. Primero revisamos cuando $x_{(--)} = 0$, en este caso es exactamente igual que en caso anterior con $x_{(+-)}$, es decir; cuando $\alpha = 0$ y $-1 < \beta < 1$, los valores propios son: $\lambda_1^{(-)} < 0$ y $\lambda_2^{(-)} = 3/2$, por lo tanto, tenemos puntos sillas. Por otro lado, cuando $\alpha = 0$ y $\beta < -1$, los valores propios son: $\lambda_1^{(-)} > 0$ y $\lambda_2^{(-)} = 3/2 > 0$, es decir tenemos, repulsores en ese intervalo.

Por otro lado, $\lambda_1^{(-)}$, es exactamente igual que $\lambda^{(+-)}$, ya que estos valores propios dependen de $x_{(--)}^2$ y $x_{(+-)}^2$ respectivamente, además $x_{(--)}^2 = x_{(+-)}^2$, de

aquí el mismo comportamiento de valores propios. Lo que resta es estudiar como se comporta $\lambda_2^{(--)}$, y el resultado es el siguiente

$$\lambda_2^{(--)} > 0 \Rightarrow \lambda > \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(1 + x_{(--)}^2)}{x_{(--)}}, \quad (3.106)$$

$$\lambda_2^{(--)} < 0 \Rightarrow \lambda < \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(1 + x_{(--)}^2)}{x_{(--)}}, \quad (3.107)$$

$$\lambda_2^{(--)} = 0 \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(1 + x_{(--)}^2)}{x_{(--)}}, \quad (3.108)$$

Todos estos resultados se pueden ver de manera más práctica en la tabla 3.5, sin embargo, solo son los puntos críticos al resolver el sistema considerando $y = 0$, por lo que ahora haremos un análisis de los otros puntos críticos.

Entonces de la ecuación 3.70 cuando $y \neq 0$, entonces;

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda x - \frac{3}{2}(1 + x^2 - y^2) = 0 \Rightarrow y^2 = 1 + x^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda x, \quad (3.109)$$

sustituyendo la ecuación (3.109) en el sistema dinámico obtenemos

$$(3 + (1 - \alpha + \beta)\lambda^2)x - \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda(1 + \beta) - \sqrt{6}\lambda(1 + \beta - \alpha)x^2 = 0. \quad (3.110)$$

Además debido a que $0 \leq y \leq 1$, de la ecuación (3.110) solo vamos a estudiar cuando y es positivo. Resolviendo para x , obtenemos:

$$x_i^* = \frac{(3 + (1 + \beta - \alpha)\lambda^2) \pm \sqrt{\Gamma}}{2\sqrt{6}\lambda(1 + \beta - \alpha)} \quad (3.111)$$

donde $i = +, -$ y $\Gamma \equiv (1 - \alpha + \beta)^2\lambda^4 - 6\lambda^2(1 - \alpha + \beta)(1 + 2\beta) + 9$. Es decir tenemos dos puntos críticos en función de α y β . La región de existencia de solución está dado por las siguientes regiones bajo condiciones dadas:

La región de x_+^* con $\lambda > 0$ son las siguientes:

Región A donde $0 < \lambda < \sqrt{6}$ está determinada por:

- $\beta \leq -1$ y $\left(\alpha \leq f_1 \text{ o } \alpha \geq \frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + f_2 \right)$
- $-1 < \beta \leq 0$ y $\alpha \leq f_1$

- $0 < \beta < f_3$ y $\left(\alpha \leq -\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + f_2 \text{ o } \frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + f_2 \leq \alpha \leq f_1 \right)$
- $\beta = f_3$ y $\left(\alpha \leq -\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + f_2 \text{ o } \alpha = f_1 \right)$
- $\beta > f_3$ y $\alpha \leq -\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + f_2$

donde,

$$f_1 = \frac{6\sqrt{6} + 2\lambda(1 + \beta)(\sqrt{6}\lambda - 9)}{-12\lambda + 2\sqrt{6}\lambda^2}, \quad (3.112)$$

$$f_2 = \frac{\lambda^2(1 + \beta) - 3 - 6\beta}{\lambda^2}, \quad (3.113)$$

$$f_3 = \frac{2\sqrt{6}\lambda - 6 - \lambda^2}{\lambda^2 - 2\sqrt{6}\lambda}. \quad (3.114)$$

Región B, $\lambda = \sqrt{6}$

- $\beta \leq -1$ y $\alpha \geq \frac{1}{2} + \sqrt{\beta(1 + \beta)}$
- $\beta \geq 0$ y $\alpha \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\beta(1 + \beta)}$

Región C, donde, $\sqrt{6} < \lambda < 2\sqrt{6}$:

- $\beta \leq -1$ y $\alpha \geq 6\sqrt{\frac{\beta(1+\beta)}{\lambda^4}} + f_2$
- $\beta = f_3$ y $\alpha = f_1$
- $\beta > f_3$ y $f_1 \leq \alpha \leq -\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + f_2$

Región D, donde, $\lambda = 2\sqrt{6}$;

$$\beta \leq -1 \text{ y } \alpha \geq \frac{21 + 18\beta}{24} + \frac{\sqrt{\beta(1 + \beta)}}{4}, \quad (3.115)$$

Región E, donde, $\lambda > 2\sqrt{6}$

- $\beta \leq f_3$ y $\alpha \geq f_1$

- $f_3 < \beta \leq -1$ y $\alpha \geq 6\sqrt{\frac{\beta(1+\beta)}{\lambda^4}} + f_2$

Región de existencia de x_+^* cuando $\lambda < 0$, tenemos; Región A, donde $-\sqrt{6} < \lambda < 0$,

- $\beta \leq -1$ o $(\alpha \leq w_1$ ó $\alpha \geq \frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + w_2)$

- $-1 < \beta \leq 0$ y $\alpha \leq w_1$

- $0 < \beta < w_3$ y $\left(\alpha \leq -\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + w_2$ ó $\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + w_2 \leq \alpha \leq w_1 \right)$

- $\beta = w_3$ y $\left(\alpha \leq -\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + w_2$ ó $\alpha = w_1 \right)$

- $\beta > w_3$ y $\alpha \leq -\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + w_2$

Región B, donde $\lambda = -\sqrt{6}$

- $\beta \leq -1$ y $\alpha \geq \frac{1}{2} + \sqrt{\beta(1+\beta)}$

- $\beta \geq 0$ y $\alpha \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\beta(1+\beta)}$

Región C, donde $-2\sqrt{6} < \lambda < -\sqrt{6}$

- $\beta \leq -1$ y $\alpha \geq \frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + w_2$

- $\beta = w_3$ y $\alpha = w_1$

- $\beta > w_3$ y $w_1 \leq \alpha \leq -\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + w_2$

Región D, cuando $\lambda = -2\sqrt{6}$

$$\beta \leq -1 \text{ y } \alpha \geq \frac{21 + 18\beta}{24} + \frac{\sqrt{\beta(1+\beta)}}{4}$$

Región E, cuando $\lambda < -2\sqrt{6}$

- $\beta \leq w_3$ y $\alpha \geq w_1$
- $w_3 < \beta \leq -1$ y $\alpha \geq \frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + w_2$,

donde hemos definido las siguientes ecuaciones

$$w_1 = \frac{6\sqrt{6} + 18\lambda(1 + \beta) + 2\sqrt{6}(1 + \beta)\lambda^2}{12\lambda + 6\lambda^2} \quad (3.116)$$

$$w_2 = \frac{-3 - 6\beta + (1 + \beta)\lambda^2}{\lambda^2} \quad (3.117)$$

$$w_3 = \frac{-36 - 12\sqrt{6}\lambda - 6\lambda^2}{12\sqrt{6}\lambda + 6\lambda^2} \quad (3.118)$$

Región de existencia de x_-^* con $\lambda > 0$

Región A, cuando $0 < \lambda < \sqrt{6}$

- $b < -1$ y $\alpha \geq \frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + g_2$
- $-1 \leq \beta \leq 0$ y ($\alpha < 1 + \beta$ o $\alpha > 1 + \beta$)
- $0 < \beta \leq g_3$ y $\left(\alpha \leq -\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + g_2 \right.$
 $\left. \text{o } \frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + g_2 \leq \alpha < 1 + \beta \text{ o } \alpha > 1 + \beta \right)$
- $g_3 < \beta < \frac{\sqrt{6}-\lambda}{\lambda}$ y $\left(\alpha \leq -\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + g_2 \right.$
 $\left. \text{o } g_1 \leq \alpha < 1 + \beta \text{ o } \alpha > 1 + \beta \right)$
- $\beta = \frac{\sqrt{6}-\lambda}{\lambda}$ y $\left(\alpha \leq -\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + g_2 \text{ o } \alpha > 1 + \beta \right)$
- $\beta > \frac{\sqrt{6}-\lambda}{\lambda}$ y $\left(\alpha \leq -\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + g_2 \text{ o } \alpha \geq g_1 \right)$

Región B, cuando $\lambda = \sqrt{6}$

- $\beta < -1$ y $\alpha \geq \frac{1}{2} + \sqrt{\beta(1 + \beta)}$

- $-1 \leq \beta \leq 0$ o $(\alpha < 1 + \beta$ o $\alpha > 1 + \beta)$
 $\beta > 0$ y $\alpha \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\beta(1 + \beta)}$

Región C, cuando $\sqrt{6} < \lambda < 2\sqrt{6}$

- $\beta < -1$ y $\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + g_2 \leq \alpha \leq g_1$
- $-1 \leq \beta < \frac{\sqrt{6}-\lambda}{\lambda}$ y $(\alpha < 1 + \beta$ o $1 + \beta < \alpha \leq g_1)$
- $\beta = \frac{\sqrt{6}-\lambda}{\lambda}$ y $\alpha < 1 + \beta$
- $\frac{\sqrt{6}-\lambda}{\lambda} < \beta \leq g_3$ y $\alpha \leq g_1$
- $\beta > g_3$ y $\alpha \leq -\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + g_2$

Región D, $\lambda = 2\sqrt{6}$

- $\beta < -1$ y $\frac{21+18\beta}{24} + \frac{\sqrt{\beta(1+\beta)}}{4} \leq \alpha \leq \frac{18+12\beta}{24}$
- $-1 \leq \beta < -\frac{1}{2}$ y $(\alpha < 1 + \beta$ o $1 + \beta < \alpha \leq \frac{18+12\beta}{24})$
- $\beta = -\frac{1}{2}$ y $\alpha < 1 + \beta$
- $\beta > -\frac{1}{2}$ y $\alpha \leq \frac{18+12\beta}{24}$

Región E, $\lambda > 2\sqrt{6}$

- $\beta = g_3$ y $\alpha = g_1$
- $g_3 < \beta < -1$ y $\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + g_2 \leq \alpha \leq g_1$
- $-1 \leq \beta < \frac{\sqrt{6}-\lambda}{\lambda}$ y $(\alpha < 1 + \beta$ o $1 + \beta < \alpha \leq g_1)$
- $\beta = \frac{\sqrt{6}-\lambda}{\lambda}$ y $\alpha < 1 + \beta$

$$\blacksquare \beta > \frac{\sqrt{6}-\lambda}{\lambda} \text{ y } \alpha \leq g_1$$

Región de existencia de x_-^* cuando $\lambda < 0$ Región A, cuando $-1 \leq \lambda < 0$;

$$\blacksquare \beta < -1 \text{ y } \alpha \geq \frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + h_2$$

$$\blacksquare -1 \leq \beta \leq 0 \text{ y } (\alpha < 1 + \beta \text{ o } \alpha > 1 + \beta)$$

$$\blacksquare 0 < \beta < g_3 \text{ y } \left(\alpha \leq -\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + h_2 \right.$$

$$\blacksquare \text{ o } \frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + h_2 \leq \alpha < 1 + \beta \text{ o } \alpha > 1 + \beta$$

$$\blacksquare h_3 \leq \beta < \frac{\sqrt{6}-\lambda}{\lambda} \text{ y } \left(\alpha \leq -\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + h_2 \right.$$

$$\blacksquare \text{ o } h_1 \leq \alpha < 1 + \beta \text{ o } \alpha > 1 + \beta$$

$$\blacksquare \beta = \frac{-\sqrt{6}-\lambda}{\lambda} \text{ y } \left(\alpha \leq -\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + h_2 \text{ o } \alpha > 1 + \beta \right)$$

$$\blacksquare \beta > \frac{-\sqrt{6}-\lambda}{\lambda} \text{ y } \alpha \leq -\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + h_2 \text{ o } \alpha \geq h_1$$

Región B, donde $\lambda = -\sqrt{6}$

$$\blacksquare \beta < -1 \text{ y } \alpha \geq \frac{1}{2} + \sqrt{\beta(1+\beta)}$$

$$\blacksquare -1 \leq \beta \leq 0 \text{ y } (\alpha < 1 + \beta \text{ ó } \alpha > 1 + \beta)$$

$$\blacksquare \beta > 0 \text{ y } \alpha \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\beta(1+\beta)}$$

Región C, donde $-2\sqrt{6} < \lambda < -\sqrt{6}$

$$\blacksquare \beta < -1 \text{ y } \frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + h_2 \leq \alpha \leq h_1$$

$$\blacksquare -1 \leq \beta < \frac{\sqrt{6}-\lambda}{\lambda} \text{ y } (\alpha < 1 + \beta \text{ o } 1 + \beta < \alpha \leq h_1)$$

- $\beta = \frac{-\sqrt{6}-\lambda}{\lambda}$ y $\alpha < 1 + \beta$
- $\frac{-\sqrt{6}-\lambda}{\lambda} < \beta \leq h_3$ y $\alpha \leq h_1$
- $\beta > h_3$ y $\alpha \leq -\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + h_2$

Región D, donde $\lambda = -2\sqrt{6}$

- $\beta < -1$ y $\frac{21+18\beta}{24} + \frac{\sqrt{\beta(1+\beta)}}{4} \leq \alpha \leq \frac{18+12\beta}{24}$
- $-1 \leq \beta < -\frac{1}{2}$ y ($\alpha < 1 + \beta$ o $1 + \beta < \alpha \leq \frac{18+12\beta}{24}$)
- $\beta = -\frac{1}{2}$ y $\alpha < 1 + \beta$
- $\beta > -\frac{1}{2}$ y $\alpha \leq \frac{18+12\beta}{24}$

Región E, donde $\lambda < -2\sqrt{6}$

- $\beta = h_3$ y $\alpha = h_1$
- $h_3 < \beta < -1$ y $\frac{6\sqrt{\beta(1+\beta)}}{\lambda^2} + h_2 \leq \alpha \leq h_1$
- $-1 \leq \beta < \frac{-\sqrt{6}-\lambda}{\lambda}$ y ($\alpha < 1 + \beta$ o $1 + \beta < \alpha \leq h_1$)
- $\beta = \frac{-\sqrt{6}-\lambda}{\lambda}$ y $\alpha < 1 + \beta$
- $\beta = \frac{-\sqrt{6}-\lambda}{\lambda}$ y $\alpha \leq h_1$

Como se puede ver las regiones de existencia de solución no son tan simples como en los puntos críticos cuando $y = 0$ y requieren de un análisis más detallado y complejo, por ahora nosotros tomaremos valores predeterminados con los que podemos obtener las gráficas del espacio fase con los puntos fijos determinados para los valores específicos de α y β que indican cada figura.

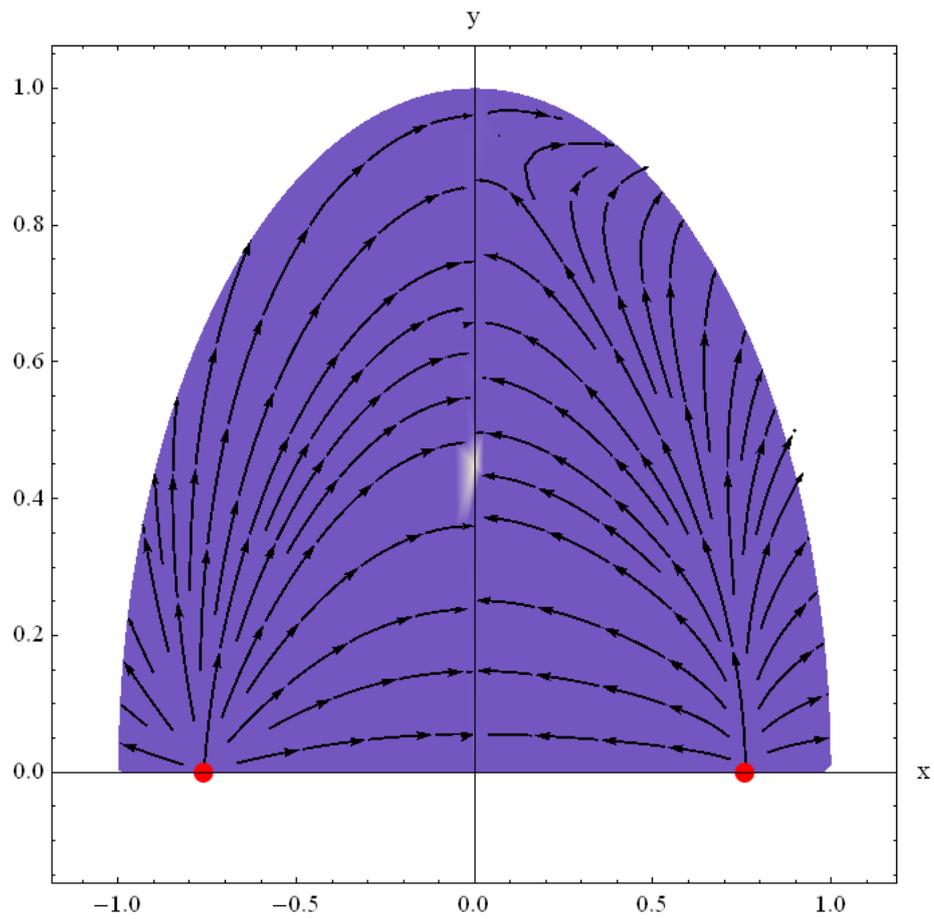


Figura 3.5: Diagrama de espacio fase del sistema tomando $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\lambda = 1$, los puntos rojos indican los puntos críticos del sistema, ambos son repulsores.

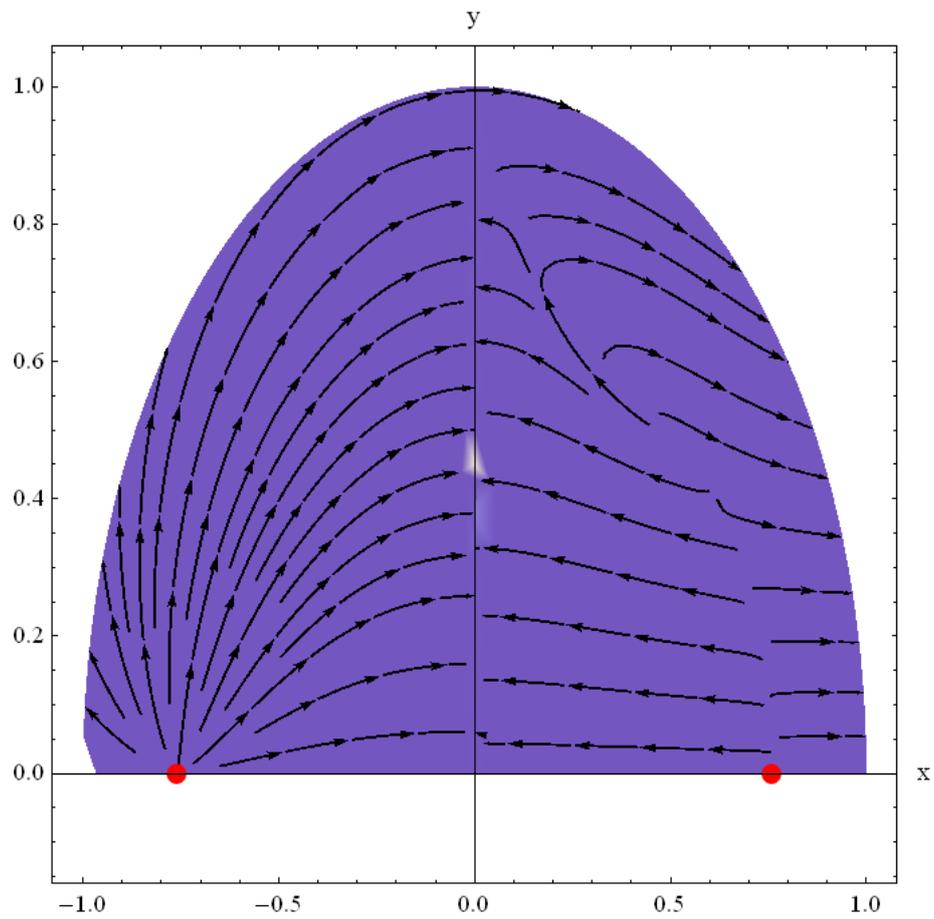


Figura 3.6: Diagrama de espacio fase del sistema tomando $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\lambda = \sqrt{6}$, los puntos rojos indican los puntos críticos del sistema,

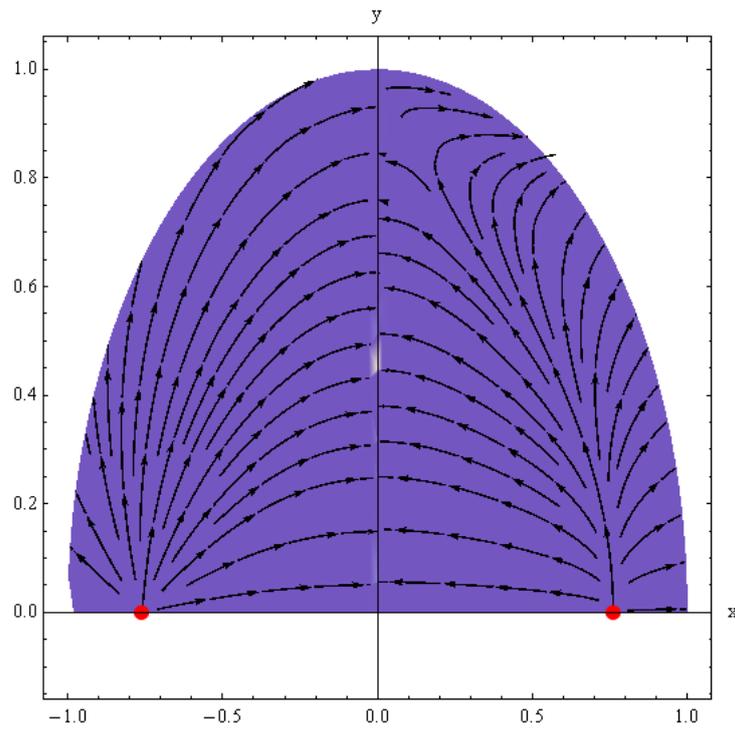


Figura 3.7: Diagrama de espacio fase del sistema tomando $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\lambda = \frac{\sqrt{6}}{2}$, los puntos rojos indican los puntos críticos del sistema, ambos son repulsores en este caso.

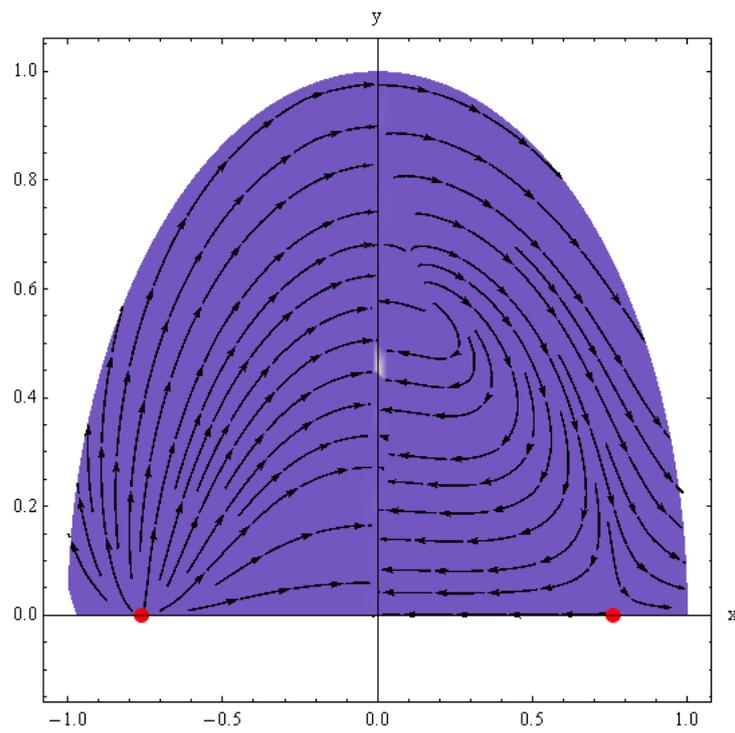


Figura 3.8: Diagrama de espacio fase del sistema tomando $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\lambda = 2\sqrt{6}$, los puntos rojos indican los puntos críticos del sistema. Uno de los puntos fijos es un punto silla mientras que el otro es un repulsor

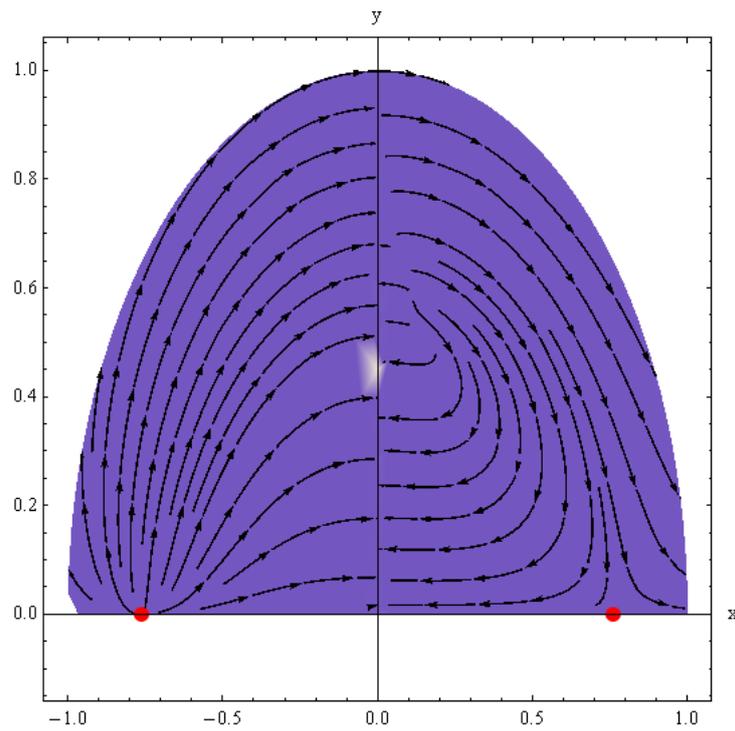


Figura 3.9: Diagrama de espacio fase del sistema tomando $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\lambda = 3\sqrt{6}$, los puntos rojos indican los puntos críticos del sistema.

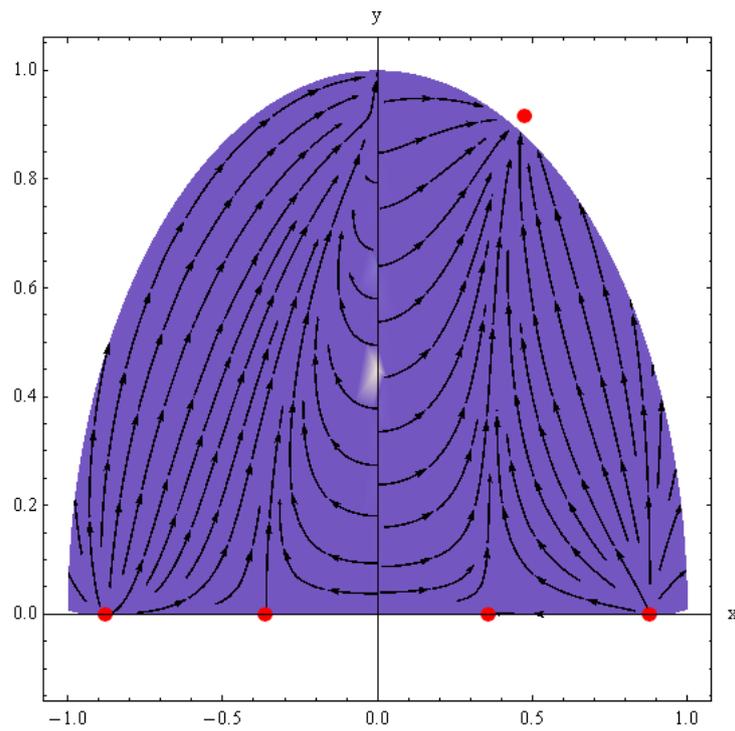


Figura 3.10: Diagrama de espacio fase del sistema tomando $\alpha = 1$, $\beta = -1$ y $\lambda = 1$, los puntos rojos indican los puntos críticos del sistema.

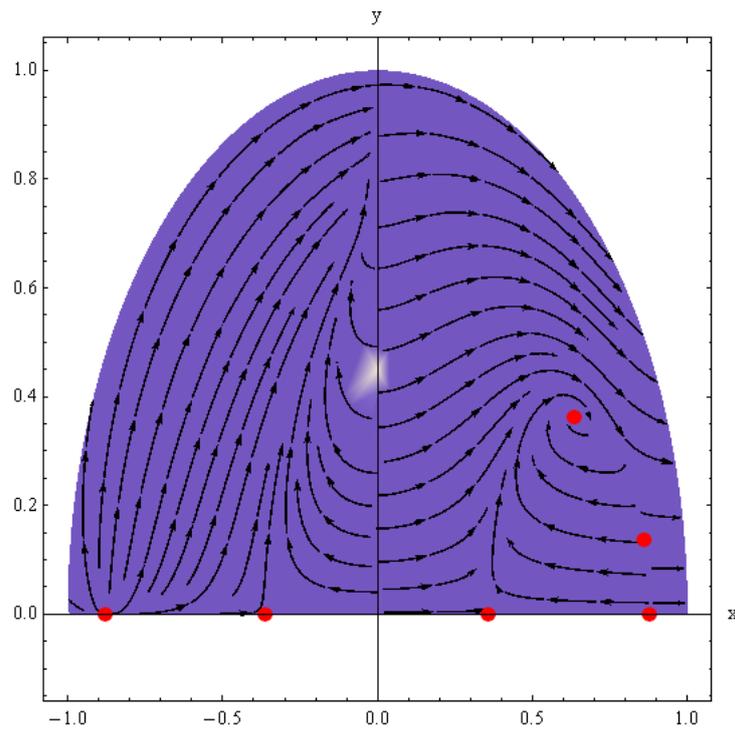


Figura 3.11: Diagrama de espacio fase del sistema tomando $\alpha = 1$, $\beta = -1$ y $\lambda = \sqrt{6}$, los puntos rojos indican los puntos críticos del sistema.

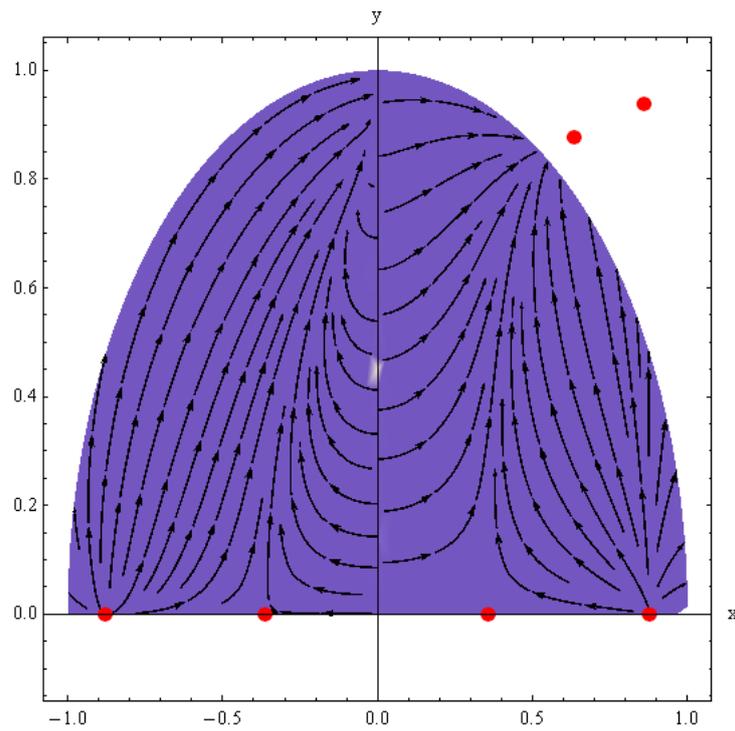


Figura 3.12: Diagrama de espacio fase del sistema tomando $\alpha = 1$, $\beta = -1$ y $\lambda = \frac{\sqrt{6}}{2}$, los puntos rojos indican los puntos críticos del sistema.

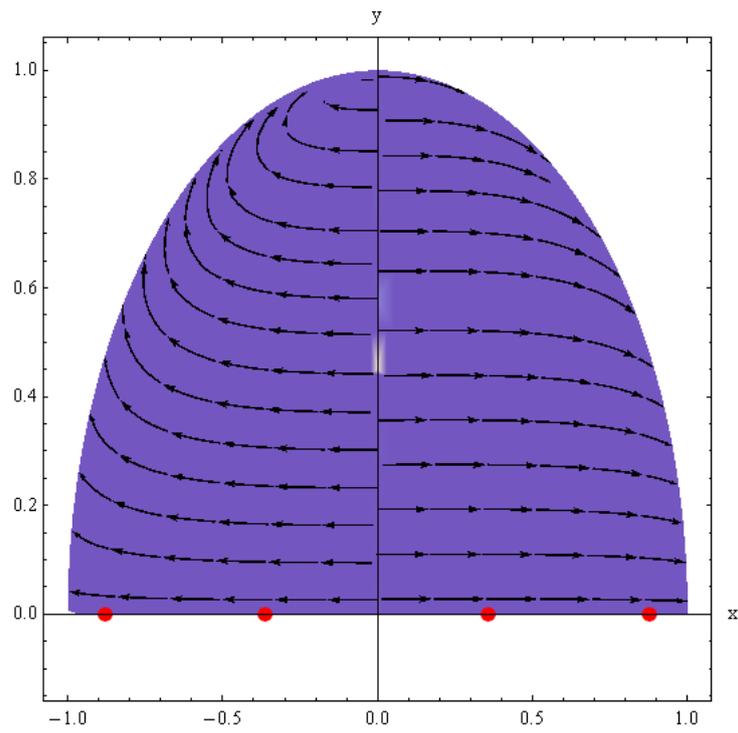


Figura 3.13: Diagrama de espacio fase del sistema tomando $\alpha = 1$, $\beta = -1$ y $\lambda = 2\sqrt{6}$, los puntos rojos indican los puntos críticos del sistema.

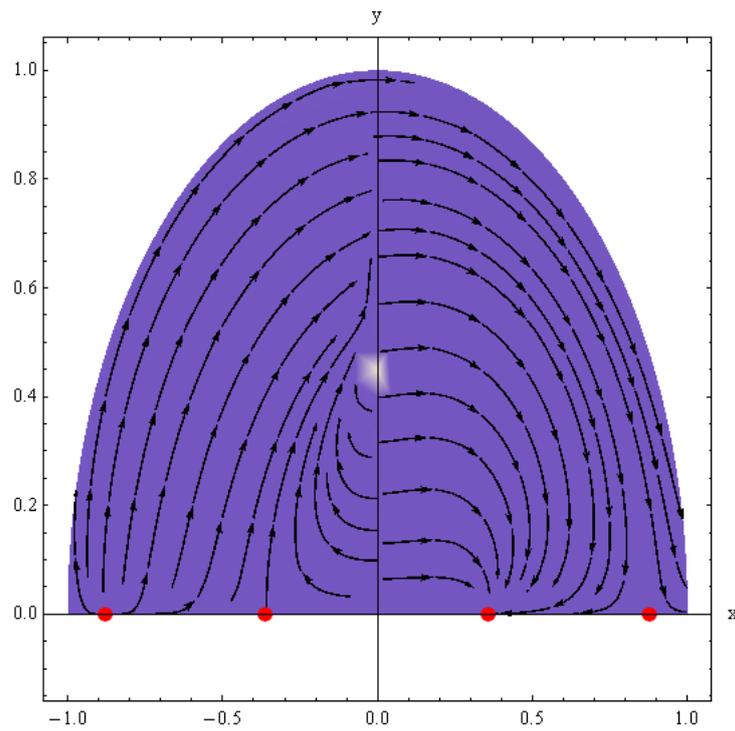


Figura 3.14: Diagrama de espacio fase del sistema tomando $\alpha = 1$, $\beta = -1$ y $\lambda = 3\sqrt{6}$, los puntos rojos indican los puntos críticos del sistema.

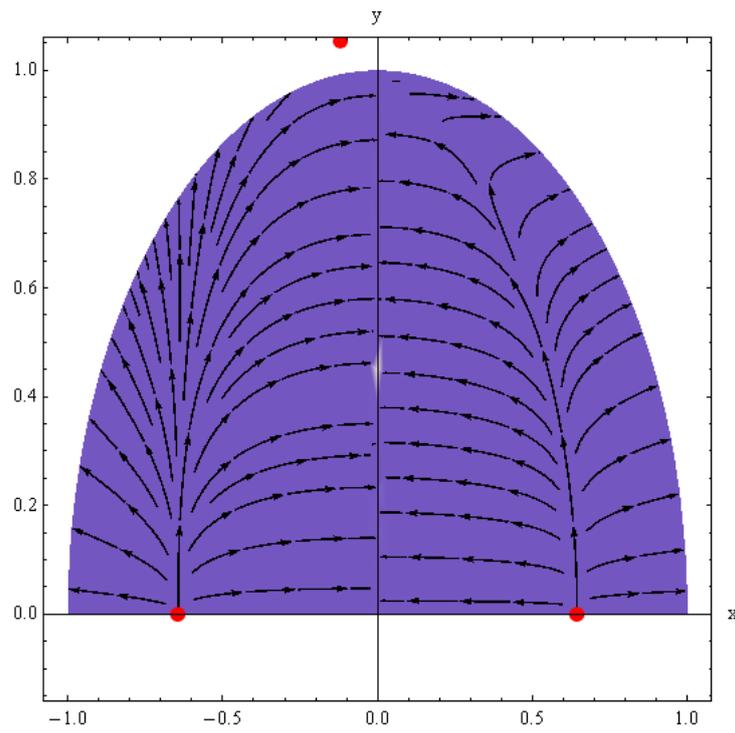


Figura 3.15: Diagrama de espacio fase del sistema tomando $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$ y $\lambda = 1$, los puntos rojos indican los puntos críticos del sistema.

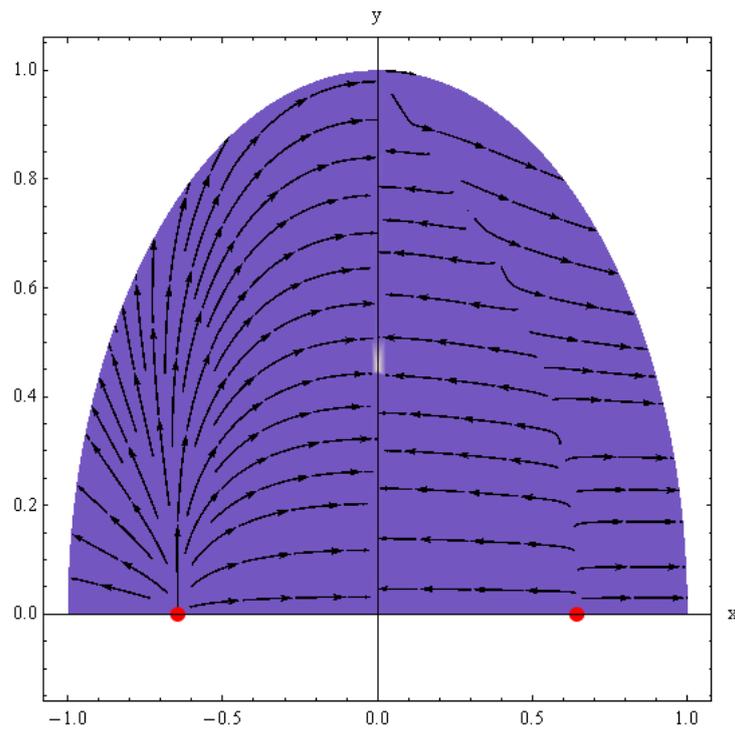


Figura 3.16: Diagrama de espacio fase del sistema tomando $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$ y $\lambda = \sqrt{6}$, los puntos rojos indican los puntos críticos del sistema.

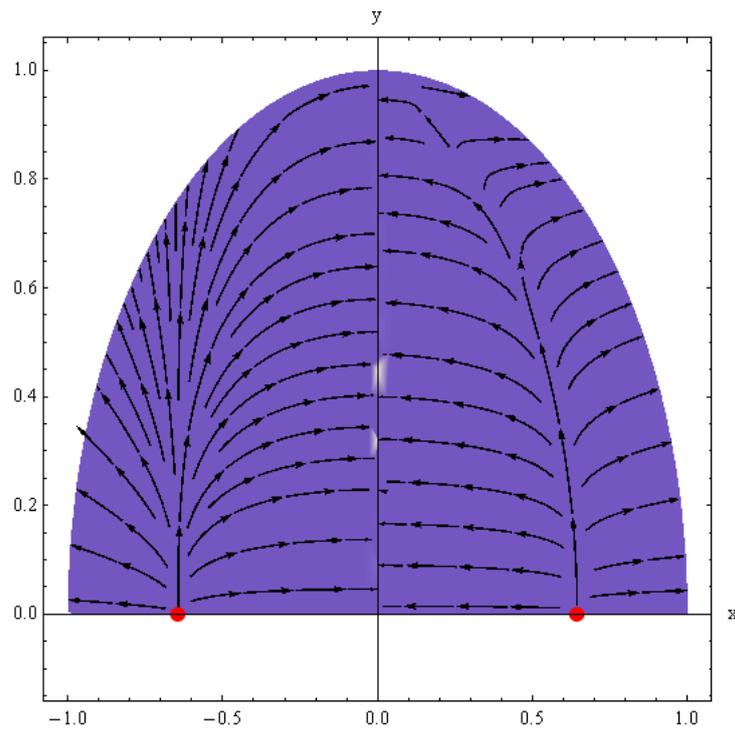


Figura 3.17: Diagrama de espacio fase del sistema tomando $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$ y $\lambda = \frac{\sqrt{6}}{2}$, los puntos rojos indican los puntos críticos del sistema.

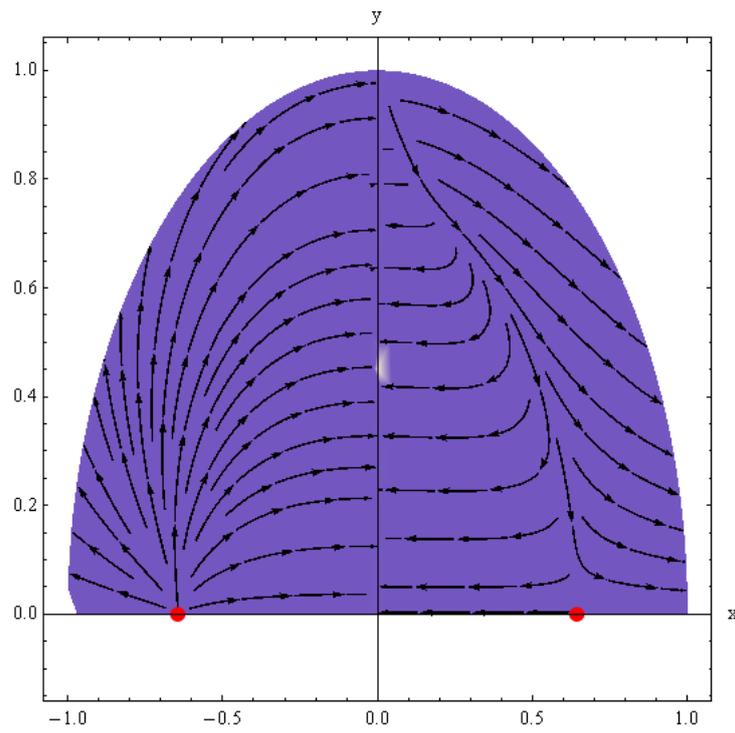


Figura 3.18: Diagrama de espacio fase del sistema tomando $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$ y $\lambda = 2\sqrt{6}$, los puntos rojos indican los puntos críticos del sistema.

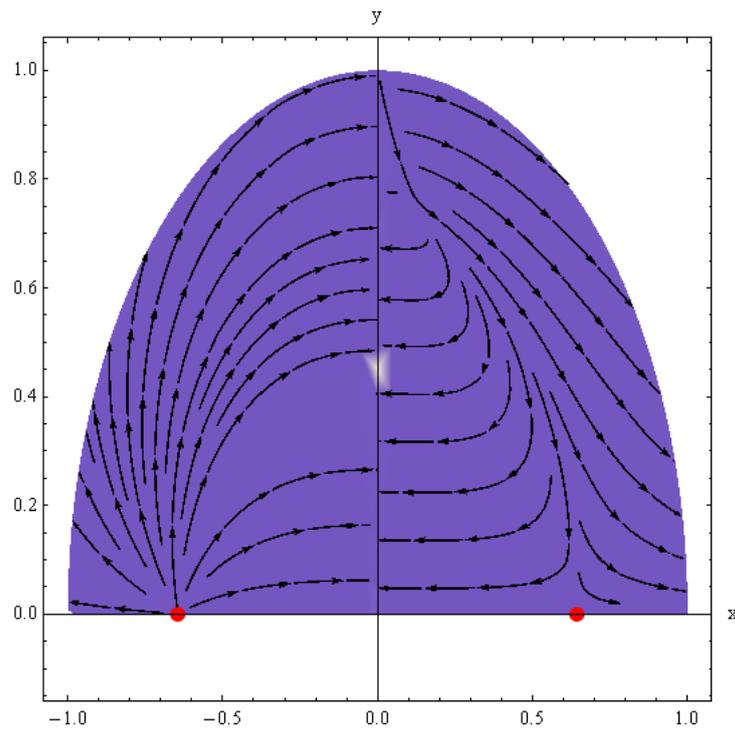


Figura 3.19: Diagrama de espacio fase del sistema tomando $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$ y $\lambda = 3\sqrt{6}$, los puntos rojos indican los puntos críticos del sistema.

x	y	Existencia	Estabilidad	Ω_ϕ	q	
$x_{(++)}$	0	para todo λ y región 1	Inestable Para $\lambda < \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(1+x^2)_{(++)}}{x_{(++)}}}$ cuando $ \lambda > 0$	1	0	
		$\alpha = 0, 0 \leq \beta < 1$ Para todo λ $\alpha = 0, 1 \leq \beta$ Para todo λ	Punto silla para $\lambda > \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(1+x^2)_{(++)}}{x_{(++)}}}$ cuando $ \lambda > 0$ Punto silla para todo λ Inestable para todo λ	1 1 1	1 1 1	
$x_{(-+)}$	0	Para todo λ y región 1	Inestable para $\lambda > \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(1+X^2)_{(-+)}}{X_{(-+)}}}$ cuando $ \lambda > 0$	1	1	
			Punto silla para $\lambda < \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(1+X^2)_{(-+)}}{X_{(-+)}}}$ cuando $ \lambda > 0$	1	1	
$x_{(+-)}$	0	Para todo λ y región 2	Inestable para $\lambda < \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(1+x^2)_{(+-)}}{x_{(+-)}}}$ cuando $ \lambda > 0$	1	1	
	0		Punto silla para $\lambda > \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(1+x^2)_{(+-)}}{x_{(+-)}}}$ cuando $ \lambda > 0$	1	1	
	0	Para todo λ y región 3	punto silla para $\lambda < \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(1+x^2)_{(+-)}}{x_{(+-)}}}$ donde $ \lambda > 0$	1	1	
	0		Estable para $\lambda > \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(1+x^2)_{(+-)}}{x_{(+-)}}}$ cuando $ \lambda > 0$	1	1	
	0	$\alpha = 0$ y $-1 < \beta < 1$	Punto silla para todo λ	1	1	
	0	$\alpha = 0$ y $\beta < -1$	Inestable para λ	1	1	
$x_{(--)}$	0	Para todo λ y región 2	Inestable para $\lambda > \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(1+x^2)_{(--)}}{x_{(--)}}}$ donde $ \lambda > 0$	1	1	
	0		Punto silla para $\lambda < \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(1+x^2)_{(--)}}{x_{(--)}}}$ donde $ \lambda > 0$	1	1	
	0	Para todo λ y región 3	punto silla para $\lambda > \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(1+x^2)_{(--)}}{x_{(--)}}}$ donde $ \lambda > 0$	1	1	
	0		Estable para $\lambda < \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(1+x^2)_{(--)}}{x_{(--)}}}$ donde $ \lambda > 0$	1	1	

Cuadro 3.5: Puntos críticos de

Capítulo 4

Conclusiones

En esta tesis se analizó un modelo cosmológico de FLRW plano en donde existe una interacción entre materia oscura y energía oscura. Esta interacción específica en el sector oscuro fue introducida de manera fenomenológica, debido a la ausencia de una teoría fundamental de interacción entre las componentes oscuras del universo. En particular el conjunto de modelos considerados tiene una interacción de la forma $\alpha\dot{\rho}_m + \beta\dot{\rho}_\phi$. El objetivo principal fue investigar si en el espacio fase de soluciones cosmológicas existen (nuevos o conocidos) atractores acelerados de tiempo tardío que tiene un cociente $\frac{\Omega_m}{\Omega_\phi}$ constante. Encontramos regiones en las que para α y β distintas de cero obtenemos las soluciones tipo "*scaling*", ya que tienen atractores estables de tiempo tardío. estos se encuentran (al menos) en el punto $x_+^* = \frac{((3+(1-\alpha+\beta)\lambda))+\sqrt{\Gamma}}{2\sqrt{6}\lambda(1-\alpha+\beta)}$.

La existencia de estos atractores estables de tiempo tardío nos permite proponer modelos alternativos al de constante cosmológica para explicar la aceleración - eficiente" de la expansión del universo.

Además se encontró una región de existencia de las soluciones del modelo con interacción con cuatro puntos críticos del sistema, esto enriquece el análisis debido a que nos muestra posibles alternativas de universos acelerantes.

Se puede apreciar que cuando $x = 0$ y $y = constante$ tenemos una "partición" del espacio fase, debido a que la función x' no es continuamente diferenciable en ese punto, por lo que no se puede producir un cambio de signo en la energía cinética (de positivo a negativo, o viceversa), esto nos indica que la solución en $x = 0$ no es única. Adicionalmente se puede apreciar que cuando las líneas son entrantes a esta región las soluciones que se aproximan tienen un valor máximo para $\ln(a)$, mientras que cuando las líneas salen tenemos algo conocido como un punto de comienzo.

Para elegir cuál modelo explica mejor el fenómeno de expansión acelerada reciente de nuestro universo, es necesario hacer la comparación de el ajuste estadístico

paramétrico con las observaciones entre estos modelos encontrados con interacción de energía oscura de campo escalar con materia oscura y el modelo de constante cosmológica. Este trabajo será realizado en un futuro cercano. En el apéndice se pueden encontrar las cantidades que deben ser estimadas para poder realizar la comparación de las predicciones de nuestro modelo con interacción contra las observaciones cosmológicas.

Los resultados de este trabajo seguirán siendo estudiados desde el punto de vista analítico para los casos en que los puntos críticos tienen parte $y \neq 0$, se espera concluir con este análisis para su publicación.

Apéndice A

Pruebas cosmológicas

Existen distintas observaciones cosmológicas que nos permiten llegar a la conclusión de que nuestro universo se encuentra en expansión, nuestros modelos están basados en estas, hablaremos un poco sobre algunas de ellas y por qué nos permiten pensar en la expansión.

Las supernovas distantes proporcionaron la primera prueba de la aceleración del Universo. Se trata de *supernovas de tipo Ia*, las cuales tienen su origen en un sistema doble de estrellas: una enana blanca y una gigante roja. La enana blanca absorbe materia de la estrella gigante hasta que su masa alcanza un valor crítico, la llamada masa de Chandrasekhar (1.4 masas solares) y explota.

La *radiación de fondo de microondas* (CMB por sus siglas en inglés) es la imagen más antigua que se puede tener del Universo a partir de fotones. En su época temprana el Universo no era transparente a la radiación porque estaba lleno de electrones libres que interaccionaban continuamente con los fotones. Sin embargo, a partir de unos 380.000 años después del Big Bang, el Universo se enfrió lo suficiente como para que los electrones fueran capturados por los protones, formando los primeros átomos de hidrógeno y helio. Sin apenas electrones libres, a partir de ese momento los fotones pudieron circular libremente. Se observa que la radiación de fondo de microondas es muy uniforme, aunque presenta unas variaciones de temperatura muy pequeñas, de tan sólo una parte entre cien mil. Por una parte, esto confirma la hipótesis inicial de que vivimos en un Universo altamente isótropo a gran escala. Por otra parte, estudiando sus pequeñas anisotropías se puede deducir el contenido total del Universo.

Otra evidencia observacional que se tiene de la aceleración del Universo son las *oscilaciones acústicas de bariones* (BAO por sus siglas en inglés). La imagen de la CMB representa el momento en que los fotones ya pueden viajar libremente. Con anterioridad el Universo estaba formado por un plasma de protones, electrones,

fotones y materia oscura donde los protones y los fotones estaban acoplados electromagnéticamente. En ciertas regiones del Universo había más materia oscura, donde los protones, por atracción gravitatoria, tendían a concentrarse en ellas. Los fotones, al estar acoplados con los protones, también caían hacia estas regiones, pero en su caso la presión de radiación les impedía agruparse tanto como los protones. De esta manera, llegado a un punto, los fotones se alejaban de los protones hasta que la presión de radiación disminuía lo suficiente como para que volvieran a acercarse hacia los protones para volver a empezar el ciclo. Este movimiento de vaivén produjo ondas de presión que viajaban por este plasma, formando así burbujas. Cuando los fotones se desacoplaron de los protones (a los 380.000 años con la formación de la radiación de fondo de microondas) el plasma desapareció y las burbujas quedaron congeladas. En el centro de estas burbujas, donde había una gran cantidad de protones, se formaron muchas galaxias, pero también a una cierta distancia de su centro (a unos 100 Mpc), donde se encontraba la cresta de la onda de presión (el límite de la burbuja). Observando cómo son estas burbujas de materia en la radiación de fondo de microondas, puede determinarse como ha ido evolucionando el Universo desde que se formó. Esto ayudará a conocer la naturaleza de la energía oscura.

Por último consideraremos algo que es conocido como *cronómetros cósmicos*, este enfoque se basa en la noción de que la tasa de expansión $H(z)$ puede medirse utilizando únicamente la derivada $\frac{dz}{dt}$ del corrimiento al rojo entre galaxias que evolucionan pasivamente durante un tiempo mucho más largo que su diferencia de edad.

A.1. Conceptos auxiliares

Casi todo lo que podemos observar del cosmos básicamente es luz, veamos cómo se comporta un fotón en el espacio.

Consideremos que una fuente luminosa emite dos fotones de la misma frecuencia ω_e . Un fotón es emitido al tiempo t_e y el otro al tiempo $t_e + \delta t_e$. El subíndice “e” indica “emitido”. Por otro lado, el observador recibe los dos fotones, el primer fotón emitido lo recibe al tiempo t_o , el segundo emitido al tiempo $t_o + \delta t_o$ y les asigna una frecuencia ω_o . El subíndice “o” indica que se trata del fotón “observado”.

Los fotones siguen una curva que está dada por la ecuación

$$ds^2 = 0 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} \right), \quad (\text{A.1})$$

por lo cual

$$dt = \pm a(t) \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \right). \quad (\text{A.2})$$

El signo “+” indica que el fotón se mueve al futuro y “−” al pasado. Respecto al primer fotón emitido, entre el tiempo t_e y t_o el fotón viajó una distancia χ^* , que se puede calcular integrando a partir de la ecuación (A.2) como

$$\chi^* = \int_{r^*}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (\text{A.3})$$

La magnitud de χ^* se fija desde el inicio, cuando se establecen las posiciones de la fuente con respecto al observador. Es importante mencionar que su magnitud no cambia en el tiempo ya que es una coordenada comóvil, por lo que es una constante ya que aunque la fuente o el observador tenga movimientos intrínsecos, el corrimiento al rojo que producen es despreciable en comparación con el corrimiento al rojo cosmológico. Así pues se puede considerar una buena aproximación que la fuente esté “fija” en sus coordenadas comóviles.

De manera similar para el segundo fotón emitido, la distancia que recorre es igual χ^* y se calcula como:

$$\chi^* = \int_{\chi^*}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (\text{A.4})$$

Igualando estas dos expresiones obtenemos

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)}, \quad (\text{A.5})$$

Ahora desarrollamos la integral del lado derecho de la igualdad

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_o}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (\text{A.6})$$

Sustituyendo en la ecuación (A.5) vemos que el término del lado izquierdo de la igualdad es idéntico al que se obtiene de la expresión (A.6), por lo que la ecuación (A.5) resulta

$$\int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_o}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (\text{A.7})$$

A.2. Distancia de Luminosidad

Consideremos de nuevo un observador ubicado en las coordenadas comóviles ($r = 0, \theta = 0, \phi = 0$) y una fuente luminosa ubicada en ($r = r^*, \theta = 0, \phi = 0$) la cual emite fotones que llegan hasta el observador. Para obtener (teóricamente) la distancia de luminosidad se debe calcular primero la distancia comóvil r^* .

Tomando la métrica de FLRW, la trayectoria nula que siguen los fotones entre la fuente y el observador está dada por las expresiones (A.1 y A.2), de estas se obtiene la igualdad (A.3), es decir,

$$\int_0^{r^*} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (\text{A.8})$$

Es importante mencionar que se han invertido los límites de integración de la expresión (A.3), esto es posible debido a que lo que importa es la magnitud de r^* . Integrando el lado derecho de la igualdad (A.8) tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{r^*} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} &= \frac{1}{\sqrt{|k|}} \text{sinn}^{-1}(\sqrt{|k|r}) \Big|_0^{r^*} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|k|}} \text{sinn}^{-1}(\sqrt{|k|r^*}), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

donde para simplificar la notación se ha definido la función “sinn” como

$$\text{sinn}(x) \equiv \begin{cases} \sin(x) & \text{si } k > 0 \text{ (Universo espacialmente } \textit{cerrado}, \Omega_k < 0), \\ x & \text{si } k = 0 \text{ (Universo espacialmente } \textit{plano}, \Omega_k = 0), \\ \sinh(x) & \text{si } k < 0 \text{ (Universo espacialmente } \textit{abierto}, \Omega_k > 0). \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Por otra parte, la integral del lado izquierdo de la igualdad de la expresión (A.8) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} &= \int_{a(t_e)}^{a(t_o)} \frac{da}{a(t)(da/dt)}, \\ &= \int_{a(t_e)}^{a(t_o)} \frac{da}{a^2 (\dot{a}/a)}, \\ &= \int_{a_e}^{a_o} \frac{da}{a^2 H}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

donde hemos definido el parámetro de Hubble $H \equiv \dot{a}/a$. Si utilizamos la relación entre el factor de escala y el corrimiento al rojo dada por $a = 1/(1+z)$, tenemos que $da = -dz/(1+z)^2$, donde $a_e \rightarrow z$ y $a_o \rightarrow z = 0$. Haciendo el cambio de variable $a \rightarrow z$, la expresión (A.11) puede escribirse como

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = - \int_z^0 \frac{dz'}{H(z')}. \quad (\text{A.12})$$

Utilizando las expresiones (A.9) y (A.12), la igualdad (A.8) puede expresarse como

$$\frac{1}{\sqrt{|k|}} \text{sinn}^{-1}(\sqrt{|k|}r^*) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (\text{A.13})$$

De aquí resolvemos para r^* y obtenemos

$$r^*(z) = \frac{1}{\sqrt{|k|}} \text{sinn} \left[c \sqrt{|k|} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right], \quad (\text{A.14})$$

note que hemos puesto explícitamente el factor de la velocidad de la luz, $c = 3 \times 10^5$ km/s, para tener la expresión de la distancia comóvil, $r^*(z)$, con sus unidades reales. Las unidades de los demás términos son: $[k] = 1/(\text{distancia})^2$, $[H] = (1/\text{tiempo})$, el redshift z es adimensional. Por otro lado, la *distancia efectiva* d_{eff} entre el observador y la fuente está dada por $d_{\text{eff}} = a(t)r^*(z)$. En astronomía debemos definir la llamada *distancia de luminosidad*, que se expresa en términos de la distancia efectiva mediante la relación

$$d_L(z) \equiv d_{\text{eff}}(1+z). \quad (\text{A.15})$$

Sustituyendo la expresión (A.14) para r^* en la distancia efectiva y a su vez esto en la definición de la distancia de luminosidad (A.15) obtenemos la relación

$$d_L(z) = \frac{(1+z)}{\sqrt{|k|}} \text{sinn} \left[c \sqrt{|k|} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right]. \quad (\text{A.16})$$

La forma de $H(z)$ estará dada de acuerdo al modelo cosmológico supuesto, es decir, es en $H(z)$ donde incluiremos la *teoría cosmológica*.

A.3. Luminosidad y flujo

Además definiremos algunas cantidades usadas en astrofísica y astronomía que nos serán útiles más adelante para la descripción de nuestro universo.

Luminosidad L . Cantidad de energía emitida por una fuente, por unidad de tiempo.

Flujo f . Cantidad de energía emitida por una fuente, por unidad de tiempo, por unidad de área, en todas direcciones de forma isotrópica.

L y f se relacionan de la siguiente manera

$$L = \int_{S^2} f dA = 4\pi r^2 f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{L}{4\pi r^2}. \quad (\text{A.17})$$

Consideremos una fuente luminosa en el Universo (por ejemplo una supernova) de la que deseamos calcular su luminosidad *emitida*, a una frecuencia particular ω_e de los fotones. El subíndice “ e ” indica “emitidos” por la fuente luminosa. Definamos entonces

- n_e = número de fotones emitidos por unidad de tiempo.
- N_e = número total de fotones emitidos. Lo cual significa que $n_e = N_e/\delta t_e$, donde δt_e es el lapso de tiempo infinitesimal durante el cual la fuente luminosa emite fotones.
- E_e = energía de un fotón con frecuencia ω_e , es decir, $E_e = \hbar\omega_e$.

Así la luminosidad emitida se expresa como

$$L_e = E_e \frac{N_e}{\delta t_e} = E_e n_e = \hbar\omega_e n_e. \quad (\text{A.18})$$

Supongamos que la fuente se encuentra ubicada en las coordenadas espaciales *comóviles* ($r = 0, \theta = 0, \phi = 0$). Y que existe un observador ubicado en ($r = r^*, \theta = 0, \phi = 0$) el cual mide desde su ubicación la luminosidad de la fuente. De forma análoga a la expresión (A.18), la luminosidad *observada* de la fuente se expresa como

$$L_o = E_o \frac{N_o}{\delta t_o} = E_o n_o = \hbar\omega_o n_o, \quad (\text{A.19})$$

donde el subíndice “ o ” indica “observada”. Considerando que *todos* los fotones emitidos por la fuente en $r = 0$ llegan a una esfera de radio $r = r^*$, al cabo de un determinado lapso se tiene entonces que

$$N_e = N_o, \quad (\text{A.20})$$

Es decir que la cantidad emitida de fotones es la misma cantidad de fotones observada. Claramente esto no es así en la práctica pues algunos de los fotones suelen ser absorbidos y reemitidos al interactuar con la materia. Usando la relación

$1 + z = \delta t_o / \delta t_e = \omega_e / \omega_o$, se puede deducir de la expresión (A.20) que

$$\begin{aligned} N_e = N_o \quad \Rightarrow \quad n_e \delta t_e = n_o \delta t_o \quad \Rightarrow \quad n_o = n_e \frac{\delta t_e}{\delta t_o} \quad \Rightarrow \\ n_o = \frac{n_e}{1 + z}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Y de la expresión (A.19) se deduce que

$$\begin{aligned} L_o = \hbar \omega_o n_o = \hbar \left(\frac{\omega_e}{1 + z} \right) \left(\frac{n_e}{1 + z} \right) \quad \Rightarrow \\ L_o = \frac{L_e}{(1 + z)^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Por otra parte, consideremos el flujo de energía “ f_o ” (A.17) que el observador mide de la fuente, desde su posición. La distancia efectiva d_{eff} entre el observador y la fuente esta dada por $d_{\text{eff}} = a(t)r^*$. Así pues el flujo *observado* puede expresarse como

$$f_o = \frac{L_o}{4\pi d_{\text{eff}}^2}, \quad (\text{A.23})$$

usando la expresión (A.22) tenemos

$$f_o = \frac{L_e}{4\pi d_{\text{eff}}^2 (1 + z)^2}. \quad (\text{A.24})$$

A.3.1. La distancia modular.

En años recientes los astrónomos han descubierto mediante las observaciones que las supernovas tipo Ia se comportan como *candelas estándar*, es decir que la luminosidad absoluta de cualquier explosión de SNe Ia es prácticamente la misma, sin importar la parte del Universo donde sucedan. Este descubrimiento ha marcado una serie de nuevas técnicas mediante las cuales se pueden medir distancias cosmológicas de las galaxias y cúmulos de galaxias que las hospedan e ir trazando la historia de la expansión del Universo.

A grandes distancias las SNIa pueden ser observadas debido a que su explosión es muy brillante, esto nos permite medir distancias muy grandes y con mayor precisión que utilizando otros objetos. La observaciones de objetos lejanos permite recrear la historia de la expansión a tiempos tempranos del Universo.

En una combinación de observaciones y modelos los astrónomos han determinado la expresión y sus coeficientes para la *magnitud absoluta* de la luminosidad de una supernova tipo Ia, que se expresa como

$$M \equiv -2,5 \log_{10} \left(\frac{L_e}{L_{\odot}} \right) + 4,74, \quad (\text{A.25})$$

donde el subíndice “ \odot ” indica la luminosidad total del Sol, y que se usa como medida de referencia y calibración en la expresión (A.25). La magnitud de esta luminosidad es: $L_{\odot} = 3,85 \times 10^{33}$ erg/seg. *Observacionalmente* los astrónomos han determinado un valor de $M = -19,31 \pm 0,03 + 5 \log_{10} h_{70}$ [Astier2006] para las supernovas, donde $h_{70} = 0,7$.

Por otra parte, la *magnitud aparente* u observada de la luminosidad se define como

$$m \equiv -2,5 \log_{10} \left(\frac{f_o}{f_{\odot, 10\text{pc}}} \right) + 4,74, \quad (\text{A.26})$$

donde el subíndice “ $\odot, 10\text{pc}$ ” indica que es el flujo del Sol medido a una distancia de 10 parsecs. La magnitud de este flujo es: $f_{\odot, 10\text{pc}} = 3,21 \times 10^{-7}$ erg/(cm²·seg). Con estas dos magnitudes, se define la *distancia modular* como

$$\mu \equiv m - M. \quad (\text{A.27})$$

Utilizando las expresiones (A.25–A.26), podemos expresar la distancia modular como

$$\begin{aligned} \mu &= 2,5 \left[\log_{10} \left(\frac{L_e}{L_{\odot}} \right) - \log_{10} \left(\frac{f_o}{f_{\odot, 10\text{pc}}} \right) \right] \\ &= 2,5 \left[\log_{10} \left(\frac{L_e \cdot f_{\odot, 10\text{pc}}}{L_{\odot} \cdot f_o} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

sustituyendo la ecuación (A.24) para f_o obtenemos

$$\mu = 2,5 \log_{10} \left(\frac{f_{\odot, 10\text{pc}}}{L_{\odot}} \cdot 4\pi d_{\text{eff}}^2 (1+z)^2 \right). \quad (\text{A.29})$$

Por otro lado usando de nuevo la expresión (A.24), se puede escribir el término del flujo para el Sol como

$$f_{\odot, 10\text{pc}} = \frac{L_{\odot}}{4\pi d_{\text{eff}, \odot}^2 (1+z_{\odot})^2}. \quad (\text{A.30})$$

Pero, el corrimiento al rojo cosmológico para el Sol, z_{\odot} , es prácticamente cero, debido a que la distancia entre la Tierra y el Sol es prácticamente nula en comparación con las escalas cosmológicas, por lo que no se puede considerar redshift cosmológico. De esta forma la ecuación (A.30) se pueda escribir como

$$f_{\odot, 10\text{pc}} = \frac{L_{\odot}}{4\pi(10\text{pc})^2}, \quad (\text{A.31})$$

sustituyendo en (A.29) tenemos

$$\begin{aligned} \mu &= 2,5 \log_{10} \left(\frac{d_{\text{eff}}^2(1+z)^2}{(10\text{pc})^2} \right), \\ &= 5 \log_{10} \left(\frac{d_{\text{eff}}(1+z)}{10\text{pc}} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

En algunos casos en lugar de la distancia efectiva d_{eff} , los astrónomos suelen usar la distancia de luminosidad $d_L(z) \equiv d_{\text{eff}}(1+z)$ en la distancia modular (A.32). Por otra parte, para medir distancias cosmológicas es más conveniente usar unidades de “megaparsecs” (Mpc) en lugar de parsecs. Entonces, utilizando el hecho de que $10\text{pc} = 1 \text{ Mpc}/10^5$ podemos escribir expresión (A.32) como

$$\begin{aligned} \mu &= 5 \log_{10} \left(\frac{d_L(z)}{1 \text{ Mpc}} \cdot 10^5 \right), \\ &= 5 \log_{10} \left(\frac{d_L(z)}{1 \text{ Mpc}} \right) + 5 \log_{10}(10^5), \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

con lo cual se llega a

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L(z)}{1 \text{ Mpc}} \right) + 25, \quad (\text{A.34})$$

donde $d_L(z)$ esta dada por la ecuación (A.16). Esta manera de expresar la distancia modular corresponde al cálculo *teórico* de su magnitud, es decir, partiendo de una teoría o modelo cosmológico, se puede determinar cual es la magnitud que *predice* el modelo para la distancia modular $\mu(z)$ de un objeto luminoso ubicado a una distancia z de nosotros. Sin embargo, los astrónomos *miden* esta magnitud para diversos objetos brillantes en el Universo, en particular, miden la magnitud de $\mu(z)$ para las supernovas Ia.

Por eso empleando la expresión (A.34) podemos confrontar las predicciones de un modelo teórico, contra un conjunto de datos observacionales de supernovas Ia (en nuestro caso) y estudiar qué tanto el modelo es capaz de reproducirlos a través de $\mu(z)$.

A.3.2. Distancia diametral angular

La distancia diametral angular d_A es definida como la razón del diámetro propio de un objeto \mathbf{x} con su diámetro angular aparente θ (en radianes)

$$d_A \equiv \frac{\mathbf{x}}{\theta}. \quad (\text{A.35})$$

La distancia diametral angular depende del modelo cosmológico que se asuma, a través de \mathbf{x} . La distancia diametral angular es usada para convertir una separación angular entre dos puntos dados en una imagen obtenida por un telescopio, en una separación *propia* en la fuente. Resulta que d_A está relacionada con la *distancia de luminosidad* d_L [ver expresión (A.16)] de la siguiente forma [Hogg2000]:

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad (\text{A.36})$$

Por lo tanto, usando la expresión (A.16) y expresando k en términos de Ω_{k0} , resulta

$$d_A(z) = \frac{a}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \text{sinn} \left[H_0 \sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right], \quad (\text{A.37})$$

donde se ha usado $(1+z) = 1/a$. La distancia diametral angular para el modelo cosmológico de referencia, que distinguiremos por una tilde, $\tilde{d}_A(z)$, puede calcularse usando la expresión (A.37), para obtener (asumiendo el Universo espacialmente *plano*):

$$\tilde{d}_a(z_{\text{rec}}) = \frac{a_{\text{rec}}}{H_0} \int_0^{z_{\text{rec}}} \frac{dz}{[\tilde{\Omega}_{M0}(1+z)^3 + \tilde{\Omega}_r(1+z)^4]^{1/2}} \quad (\text{A.38})$$

Esta distancia está relacionada con la distancia de luminosidad

A.4. Expresión $H(z)$

Por último calculemos la relación que utilizaremos para ajustar los cronómetros cósmicos. De la definición del factor de escala

$$H(a) = \frac{\dot{a}}{a} = \left(\frac{da}{dt} \right) \frac{1}{a} \quad (\text{A.39})$$

Por otra parte

$$\frac{da}{dt} = \frac{-1}{(1+z)^2} \left(\frac{dz}{dt} \right) \quad (\text{A.40})$$

Entonces, si consideramos la relación para el factor de escala con el corrimiento al rojo tomando $a_0 = 1$ tenemos que

$$H(z) = -\frac{1}{(1+z)} \left(\frac{dz}{dt} \right) \quad (\text{A.41})$$

Bibliografía

- [Bazaraa et al., 2004] Bazaraa, M., Jarvis, J., and Sherali, H. (2004). *Programación lineal y flujo en redes*. Limusa, 2 edition.
- [Bernal et al., 2016] Bernal, J. L., Verde, L., and Riess, A. G. (2016). The trouble with h_0 . *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(10):019.
- [Betoule, M. et al., 2014] Betoule, M., Kessler, R., Guy, J., Mosher, J., Hardin, D., Biswas, R., Astier, P., El-Hage, P., Konig, M., Kuhlmann, S., Marriner, J., Pain, R., Regnault, N., Balland, C., Bassett, B. A., Brown, P. J., Campbell, H., Carlberg, R. G., Cellier-Holzem, F., Cinabro, D., Conley, A., D'Andrea, C. B., DePoy, D. L., Doi, M., Ellis, R. S., Fabbro, S., Filippenko, A. V., Foley, R. J., Frieman, J. A., Fouchez, D., Galbany, L., Goobar, A., Gupta, R. R., Hill, G. J., Hlozek, R., Hogan, C. J., Hook, I. M., Howell, D. A., Jha, S. W., Le Guillou, L., Leloudas, G., Lidman, C., Marshall, J. L., Möller, A., Mourão, A. M., Neveu, J., Nichol, R., Olmstead, M. D., Palanque-Delabrouille, N., Perlmutter, S., Prieto, J. L., Pritchett, C. J., Richmond, M., Riess, A. G., Ruhlmann-Kleider, V., Sako, M., Schahmanche, K., Schneider, D. P., Smith, M., Sollerman, J., Sullivan, M., Walton, N. A., and Wheeler, C. J. (2014). Improved cosmological constraints from a joint analysis of the sdss-ii and snls supernova samples. *A&A*, 568:A22.
- [Choudhury et al., 2018] Choudhury, B. S., Mondal, H. S., and Chatterjee, D. (2018). Some dynamical aspects of interacting quintessence model. *Pramana*, 90(4):55.
- [Copeland et al., 1998] Copeland, E. J., Liddle, A. R., and Wands, D. (1998). Exponential potentials and cosmological scaling solutions. *Phys. Rev. D*, 57:4686–4690.
- [J. Foley et al., 2017] J. Foley, R., Scolnic, D., Rest, A., Jha, S., Pan, y.-c., G. Riess, A., Challis, P., Chambers, K., A. Coulter, D., G. Dettman, K., M. Foley, M., D. Fox, O., E. Huber, M., O. Jones, D., D. Kilpatrick, C., P. Kirshner, R., S. B. Schultz, A., R. Siebert, M., A. Flewelling, H., and Willman, M. (2017).

The foundation supernova survey: Motivation, design, implementation, and first data release. 475.

- [Jackson, 2015] Jackson, N. (2015). The hubble constant. *Living Reviews in Relativity*, 18(1):2.
- [Jones et al., 2018] Jones, D. O., Scolnic, D. M., Riess, A. G., Rest, A., Kirshner, R. P., Berger, E., Kessler, R., Pan, Y.-C., Foley, R. J., Chornock, R., Ortega, C. A., Challis, P. J., Burgett, W. S., Chambers, K. C., Draper, P. W., Flewelling, H., Huber, M. E., Kaiser, N., Kudritzki, R.-P., Metcalfe, N., Tonry, J., Wainscoat, R. J., Waters, C., Gall, E. E. E., Kotak, R., McCrum, M., Smartt, S. J., and Smith, K. W. (2018). Measuring dark energy properties with photometrically classified pan-starrs supernovae. ii. cosmological parameters. *The Astrophysical Journal*, 857(1):51.
- [Leibundgut and Sullivan, 2018] Leibundgut, B. and Sullivan, M. (2018). Type ia supernova cosmology. *Space Science Reviews*, 214(2):57.
- [Riess et al., 2018] Riess, A. G., Rodney, S. A., Scolnic, D. M., Shafer, D. L., Strolger, L.-G., Ferguson, H. C., Postman, M., Graur, O., Maoz, D., Jha, S. W., Mobasher, B., Casertano, S., Hayden, B., Molino, A., Hjorth, J., Garnavich, P. M., Jones, D. O., Kirshner, R. P., Koekemoer, A. M., Grogin, N. A., Brammer, G., Hemmati, S., Dickinson, M., Challis, P. M., Wolff, S., Clubb, K. I., Filippenko, A. V., Nayyeri, H., Vivian, U., Koo, D. C., Faber, S. M., Kocevski, D., Bradley, L., and Coe, D. (2018). Type ia supernova distances at redshift >1.5 from the hubble space telescope multi-cycle treasury programs: The early expansion rate. *The Astrophysical Journal*, 853(2):126.
- [Salvatelli et al., 2014] Salvatelli, V., Said, N., Bruni, M., Melchiorri, A., and Wands, D. (2014). Indications of a late-time interaction in the dark sector. *Phys. Rev. Lett.*, 113(18):181301.
- [Scolnic et al., 2018] Scolnic, D. M., Jones, D. O., Rest, A., Pan, Y. C., Chornock, R., Foley, R. J., Huber, M. E., Kessler, R., Narayan, G., Riess, A. G., Rodney, S., Berger, E., Brout, D. J., Challis, P. J., Drout, M., Finkbeiner, D., Lunnan, R., Kirshner, R. P., Sanders, N. E., Schlafly, E., Smartt, S., Stubbs, C. W., Tonry, J., Wood-Vasey, W. M., Foley, M., Hand, J., Johnson, E., Burgett, W. S., Chambers, K. C., Draper, P. W., Hodapp, K. W., Kaiser, N., Kudritzki, R. P., Magnier, E. A., Metcalfe, N., Bresolin, F., Gall, E., Kotak, R., McCrum, M., and Smith, K. W. (2018). The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed sne ia from pan-starrs1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample. *The Astrophysical Journal*, 859(2):101.

- [Shahalam et al., 2015] Shahalam, M., Pathak, S. D., Verma, M. M., Khlopov, M. Y., and Myrzakulov, R. (2015). Dynamics of interacting quintessence. *The European Physical Journal C*, 75(8):395.
- [Wang et al., 2017] Wang, S., Wen, S., and Li, M. (2017). Exploring jla supernova data with improved flux-averaging technique. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(03):037.