



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

GENERACIÓN DINÁMICA DE MASAS EN $R(P)QED$

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
Maestro en Ciencias en el Área de Física

PRESENTA:

L.C.F.M Juan Angel Casimiro Olivares

DIRECTOR DEL TRABAJO:

Dr. Alfredo Raya Montaña
Instituto de Física y Matemáticas

Morelia, Michoacán, Febrero 2019



Dedicado a

Índice general

Resumen	III
Abstract	IV
Introducción	1
1. Grafeno	3
1.0.1. Propiedades	3
1.1. Estructura cristalina del grafeno	4
1.1.1. La primera zona de Brillouin	4
1.2. Estructura de bandas del grafeno	6
1.2.1. Teorema de Bloch	6
1.2.2. Halmiltoniano efectivo de amarre fuerte	10
1.2.3. Primer orden en $q a$	11
2. Ecuaciones de Schwinger-Dyson	13
2.1. Funciones de Green	15
2.1.1. Propagador del fermión	15
2.1.2. Propagador del fotón	16
2.1.3. Vértice	19
3. Generación dinámica de masas	20
Conclusiones	39
Bibliografía	40

Resumen

En esta tesis estudiamos el fenómeno de generación dinámica de masas en la electrodinámica cuántica reducida o pseudo-electrodinámica cuántica (R(P)QED por sus siglas en inglés). Para esto, partimos resolviendo la ecuación de Schwinger-Dyson (ESD) para el propagador del fermión usando aproximación arcoiris en una norma tipo Landau y despreciando correcciones a la función de renormalización de onda. En este escenario, ya otro grupo encuentra que el acoplamiento debe exceder el valor crítico $\alpha_c = \pi/4$ para poder generar masa mediante autointeracciones. Sin embargo, estas suposiciones hacen que el acoplamiento crítico dependa de en qué norma elegimos trabajar, lo cual físicamente no es aceptable. Para recuperar esta invariancia de norma, nos proponemos refinar el truncamiento de la torre de ESD imponiendo primeramente la identidad de Ward e implementando la parte central del vértice de Ball-Chiu, obteniendo resultados positivos en el decremento de la dependencia de norma del valor del acoplamiento crítico. Con estos resultados esperamos tener una descripción físicamente aceptable de la generación dinámica de masas en grafeno y otros sistemas afines.

PALABRAS CLAVE: Generación dinámica de masas, grafeno, electrodinámica cuántica reducida, ecuaciones de Schwinger-Dyson, red hexagonal.

Abstract

In this thesis we study the phenomenon of dynamical mass generation in reduced or pseudo-quantum electrodynamics (R(P)QED). For this purpose, we start by solving the Schwinger-Dyson equation (SDE) for the fermion propagator by using the rainbow truncation in a Landau-like gauge and neglecting wavefunction renormalization effects. In this scenario, other group has already found that the coupling must exceed the critical value $\alpha_c = \pi/4$ in order to generate masses through self-interactions. However, these assumptions lead to a gauge dependent value of the critical coupling, which is physically unacceptable. In order to recover gauge invariance, we propose to refine the truncation of the tower of SDE imposing in the first place the Ward Identity and then using the central Ball-Ciu vertex, achieving in this way a positive decreasing of the gauge dependence of the critical coupling. With these findings, we hope we have a physically acceptable description of the dynamical mass generation in graphene and related systems.

Introducción

Desde que se aislaron las primeras membranas de grafeno en 2004 – 2005 [1, 2], se generó una gran expectativa para su estudio, no solo por las potenciales aplicaciones tecnológicas del material dada su alta conductividad eléctrica y térmica, su dureza y flexibilidad o su transparencia [2], sino por el peculiar comportamiento de sus portadores de carga que a bajas energías son como fermiones de Dirac ultrarelativistas sin masa, lo que revivió el interés de la comunidad de la física de partículas en este tipo de sistemas. La razón es que estos fermiones se mueven al máximo de velocidad posible en grafeno, la velocidad de Fermi v_F . De hecho, el grafeno fue considerado como la encarnación de la electrodinámica cuántica en la física de la materia condensada.

Desde el punto de vista de las interacciones fundamentales, grafeno ofrece una excelente oportunidad para estudiar aspectos de la física de altas energías en entornos más controlados. Sin embargo, hacer modelos de juguete para grafeno a partir de las teorías fundamentales, en ocasiones deja aspectos importantes de lado. Por ejemplo, si bien es cierto que los portadores de carga están confinados en la membrana del grafeno, los campos electromagnéticos con los que estos interactúan en un laboratorio ordinario se propagan por todo el espacio. Por esto, estudiar el grafeno simplemente reduciendo la dimensionalidad de la electrodinámica cuántica a un plano ofrece una descripción muy limitada del material. Se han propuesto algunas variaciones de esta teoría que permiten que el campo electromagnético se propague en el espacio, pero los fermiones se confinen en un plano. Esta teoría es la electrodinámica cuántica reducida o pseudo electrodinámica cuántica, que llamaremos $R(P)QED$ a lo largo de esta tesis [3, 4]. La diferencia fundamental de esta teoría con la electrodinámica cuántica en el plano es que la interacción electrostática en $R(P)QED$ sigue siendo de tipo Coulomb, $V(r) \sim -1/r$ y no logarítmica.

En esta tesis, estudiamos la ruptura dinámica de la simetría quiral en la $R(P)QED$ y las condiciones en las que se generan masas para los fermiones en esta teoría en el contexto de las ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD). Los primeros pasos en esta dirección se han dado ya por otro grupo [5], quienes hacen una serie de suposiciones y conjeturas para el truncamiento de las ESD. Ellos utilizan el célebre truncamiento arcoiris, despreciando efectos de la polarización del vacío y correcciones al vértice en dichas ecuaciones. Además, desprecian correcciones a la renormalización de la función de onda y encuentran que cuando el acoplamiento excede el valor crítico $\alpha_c = \pi/4$, se rompe la simetría quiral y se generan masas para fermiones dinámicamente. En

nuestro trabajo nos proponemos explorar lo robusto de las suposiciones y los posibles refinamientos al truncamiento que se pueden dar.

Para ello organizamos nuestro trabajo de la siguiente manera. En el Capítulo 1, damos una breve descripción de las propiedades del grafeno y lo analizamos como una red 2-dimensional de panal de abeja. En el Capítulo 2 está dedicado al estudio de las ESD en QED, la estructura de las funciones de Green involucradas al estudio de la GDM. El Capítulo 3 parte con la idea de estudiar la GDM con la aproximación arcoiris y despreciando las correcciones a la renormalización de la función de onda. Bajo estas suposiciones nos encontramos con dependencia de norma del valor del acoplamiento, por tanto recurrimos a las identidades de Ward como intento para recuperar esta invariancia. Finalmente, discutimos nuestros resultados en el capítulo de conclusiones.

Capítulo 1

Grafeno

Se denomina grafeno a la membrana de átomos de carbono empaquetados en una red 2-dimensional hexagonal. Es el componente estructural básico de los demás elementos gráfiticos. Puede ser envuelto para formar fullerenos, enrollado en nanotubos o apilado como grafito [2]. También nos proporciona un excelente escenario para el estudio de la QED en el plano.

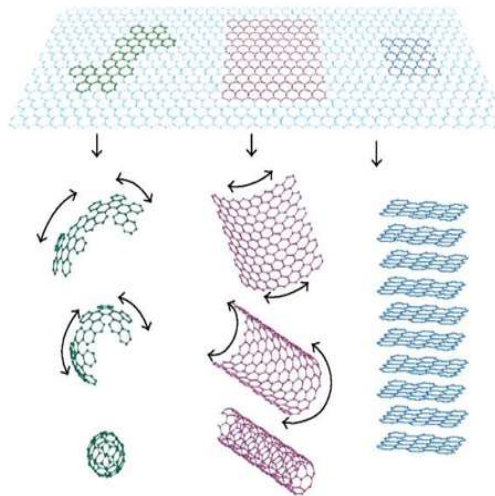


Figura 1.1: Elementos gráfiticos. Figura tomada de [2]

1.0.1. Propiedades

Son muchas las propiedades del grafeno que lo hacen relevante para su estudio. Entre ellas destacan, es el primer cristal bidimensional que conocemos. Su espesor es de apenas un átomo; es tan duro como el diamante pero con una enorme flexibilidad, es decir, podemos tomar una lámina de grafeno y deformarla sin romperla; además, soporta intensas corrientes eléctricas sin calentarse, ya que es mejor conductor térmico

que la plata, y los portadores de carga poseen una alta movilidad en el material. Debido a que el grafeno es 2-dimensional, lo consideramos un sistema físico interesante a estudiar, ya que durante muchos años se tuvieron problemas para producir estructuras de espesor pequeño, pues al intentarlo se obtenían estructuras inestables. Éste fenómeno fue explicado por los físicos Landau [6] y Mermin [7], quienes demostraron que en la naturaleza es imposible que un material cristalino bidimensional sea estable, debido a que las vibraciones naturales del material lo harían romperse. Entonces, ¿Cómo puede ser el grafeno estable si es bidimensional? La razón por la que el grafeno es estable es porque, en su forma natural, es corrugado. Esto se debe a las interacciones entre los núcleos atómicos de carbono y sus portadores de carga. Éstas son algunas propiedades que hacen el grafeno un material de gran interés para su estudio.

1.1. Estructura cristalina del grafeno

El grafeno es un sólido formado por átomos de carbono densamente empaquetados en una red hexagonal, también conocida como panal de abeja. La periodicidad de los puntos de la red se define de manera analítica de la siguiente manera

$$\vec{R} = m_1 \vec{a} + m_2 \vec{b}, \quad (1.1)$$

donde $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los vectores primitivos y $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. A partir de ellos, se construyen las celdas elementales que revelan la simetría de la red, de tal modo que podemos caracterizarla.

1.1.1. La primera zona de Brillouin

Para conseguir una mejor descripción de la estructura cristalina del grafeno, debemos estudiar la red recíproca, la cual es la red en el espacio de momentos. Aprovechando la periodicidad de la red, sabemos que todas las magnitudes que dependan de la distribución de los átomos también serán periódicas. En particular el potencial electrostático

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r} + \vec{R}), \quad (1.2)$$

como es una función periódica, podemos hacer un desarrollo en serie de Fourier:

$$\phi(\vec{r}) = \sum \phi_k(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}},$$

donde

$$\phi_k(\vec{k}) = \frac{1}{V} \int \phi(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dV. \quad (1.3)$$

Por las propiedades de periodicidad, tenemos que

$$\sum \phi_k(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \sum \phi_k(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} + \vec{R})},$$

$$\rightarrow e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} = 1 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{R} = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

de manera que si consideramos, $\vec{k} = c_1\vec{k}_1 + c_2\vec{k}_2 + c_3\vec{k}_3$, y además

$$\begin{aligned} c_1\vec{a}_1 \cdot \vec{k}_1 + c_2\vec{a}_1 \cdot \vec{k}_2 + c_3\vec{a}_1 \cdot \vec{k}_3 &= 2\pi c_1, \\ c_1\vec{a}_2 \cdot \vec{k}_1 + c_2\vec{a}_2 \cdot \vec{k}_2 + c_3\vec{a}_2 \cdot \vec{k}_3 &= 2\pi c_2, \\ c_1\vec{a}_3 \cdot \vec{k}_1 + c_2\vec{a}_3 \cdot \vec{k}_2 + c_3\vec{a}_3 \cdot \vec{k}_3 &= 2\pi c_3, \end{aligned} \quad (1.4)$$

y si exigimos que se satisfagan las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 \cdot \vec{k}_1 &= 2\pi & \vec{a}_1 \cdot \vec{k}_2 &= 0 & \vec{a}_1 \cdot \vec{k}_3 &= 0 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{k}_1 &= 0 & \vec{a}_2 \cdot \vec{k}_2 &= 2\pi & \vec{a}_2 \cdot \vec{k}_3 &= 0 \\ \vec{a}_3 \cdot \vec{k}_1 &= 0 & \vec{a}_3 \cdot \vec{k}_2 &= 0 & \vec{a}_3 \cdot \vec{k}_3 &= 2\pi \end{aligned}$$

podemos escribir nuestros vectores $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ y $\vec{k}_3$ así

$$\vec{k}_1 = 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}, \quad \vec{k}_2 = 2\pi \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}, \quad \vec{k}_3 = 2\pi \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}.$$

La celda que se forma por estos vectores es denominada celda elemental de la red recíproca. Entonces, toda estructura cristalina tiene asociadas dos importantes redes: la red cristalina representada en el espacio real y la red recíproca que representa la red en el espacio de momentos. Se define como la primera zona de Brillouin a la celda primitiva de la red recíproca, la cual en grafeno resulta ser también una red hexagonal. Los vectores que forman la primera zona de Brillouin son los que definen los puntos de Dirac. En la próxima sección discutimos el modelo que usamos para describir las cuasipartículas sin masa del grafeno, las cuales interactúan a través de un potencial de Coulomb.

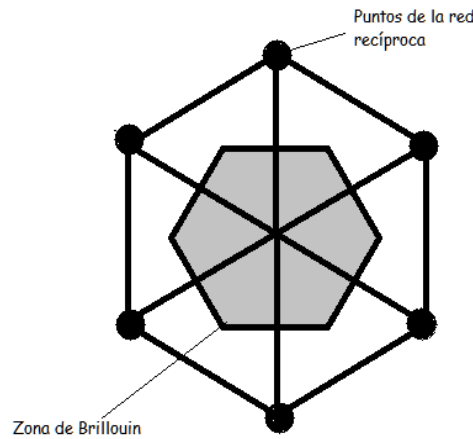


Figura 1.2: Zona de Brillouin del grafeno

1.2. Estructura de bandas del grafeno

La estructura de bandas del grafeno puede obtenerse usando la aproximación de amarre fuerte, cuya idea general es construir una función de onda a partir de una superposición de las funciones de onda de cada átomo. En una primera aproximación consideremos el caso de una red de Bravais con un átomo por celda y un electrón por átomo. El Hamiltoniano para un electrón arbitrario está dado por

$$\mathcal{H}_l = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_l^2 + \sum_{j=1}^N V(\vec{r}_l - \vec{R}_j), \quad (1.5)$$

donde ∇_l^2 es el operador laplaciano 2D. Cada ion localizado en la posición $\vec{R}_j$ produce un potencial electrostático que siente el electrón. El Hamiltoniano total es la suma sobre todos los electrones

$$\mathcal{H} = \sum_l^N \mathcal{H}_l. \quad (1.6)$$

La aproximación de amarre fuerte se basa en la suposición de que el electrón l se encuentra ligado a un ion que se encuentra en la posición $\vec{R}_j$ de la red.

1.2.1. Teorema de Bloch

La función de onda que construimos debe respetar la simetría de traslación de la red, lo cual la esencia del teorema de Bloch. En mecánica cuántica, una traslación por un vector $\vec{R}_i$ se describe por el operador

$$\mathcal{T}_{R_i} = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{p} \cdot R_i}, \quad (1.7)$$

que se escribe en términos del operador de momento, el cual debe ser apropiadamente definido para el cristal y al cual llamaremos operador de quasi-momentum. Este operador conmuta con el Hamiltoniano total, $[\mathcal{T}_{R_i}, \mathcal{H}] = 0$, por lo que los eigenestados de $\mathcal{H}$ son eigenestados de $\mathcal{T}_{R_i}$ para todos los vectores de red $\vec{R}_i$, y del momento p , que es el eigenvalor del operador de momento $\hat{p}$. Ahora como nuestra función de onda es

$$\psi_k(\vec{r}) = \sum_{R_j} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_j} \phi^{(a)}(\vec{r} - \vec{R}_j), \quad (1.8)$$

si aplicamos el operador de traslación tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{R_i} \psi_k(\vec{r}) &= \psi_k(\vec{r} - \vec{R}_i) \\ &= \sum_{R_j} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_j} \phi^{(a)}[\vec{r} - (\vec{R}_j - \vec{R}_i)] \\ &= e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_i} \sum_{R_m} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_m} \phi^{(a)}(\vec{r} - \vec{R}_m) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_i} \psi_k(\vec{r}). \end{aligned}$$

donde redefinimos los vectores de la red como $\vec{R}_m = \vec{R}_j - \vec{R}_i$. De aquí concluimos que nuestra función de onda es eigenfunción del operador de traslaciones por un vector de traslación de la red. Veamos ahora que pasa cuando tenemos más átomos por celda unitaria, el cual es el caso del grafeno.

Si tenemos más de dos átomos por celda unitaria, como es el caso de la red de panal de abeja, el razonamiento que hicimos arriba debe ser modificado. Notemos que una traslación por cualquier vector δ_j que relaciona una posición de una subred con una posición en una segunda no es una operación que preserve la simetría, por lo que debemos tratar diferentes tipos de subredes. En el caso de que tengamos dos átomos por celda unitaria, escribimos la función de onda como sigue

$$\psi_k(\vec{r}) = a_k \psi_k^{(A)}(\vec{r}) + b_k \psi_k^{(B)}(\vec{r}), \quad (1.9)$$

con a_k y b_k funciones complejas del quasi-momento k , $\psi_k^{(A)}(\vec{r})$ y $\psi_k^{(B)}(\vec{r})$ son ambas funciones de Bloch con

$$\psi_k^{(j)}(\vec{r}) = \sum_{R_l} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_l} \phi^{(j)}(\vec{r} + \vec{\delta}_j - \vec{R}_l), \quad (1.10)$$

en la cual $\vec{\delta}$ son los vectores de conexión de la celda unitaria. Con la ayuda de estas funciones de onda, buscamos soluciones de la ecuación de Schrödinger

$$H\psi_k = \epsilon_k \psi_k.$$

Multiplicando esta ecuación por ψ_k^* por la izquierda tenemos $\psi_k^* H\psi_k = \epsilon_k \psi_k^* \psi_k$, lo cual debemos escribir en forma matricial como

$$(a_k^*, b_k^*) \mathcal{H} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \epsilon_k (a_k^*, b_k^*) \mathcal{S}_k \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

La matriz Hamiltoniana se define de la siguiente manera

$$\mathcal{H}_k = \begin{pmatrix} \psi_k^{(A)*} H \psi_k^{(A)} & \psi_k^{(A)*} H \psi_k^{(B)} \\ \psi_k^{(B)*} H \psi_k^{(A)} & \psi_k^{(B)*} H \psi_k^{(B)} \end{pmatrix} = \mathcal{H}_k^\dagger, \quad (1.12)$$

y la matriz de superposición

$$\mathcal{S}_k = \begin{pmatrix} \psi_k^{(A)*} \psi_k^{(A)} & \psi_k^{(A)*} \psi_k^{(B)} \\ \psi_k^{(B)*} \psi_k^{(A)} & \psi_k^{(B)*} \psi_k^{(B)} \end{pmatrix} = \mathcal{S}_k^\dagger. \quad (1.13)$$

Los eigenvalores ϵ_k de la ecuación de Schrödinger son las energías de dispersión de las bandas de energía, los cuales se obtienen de la ecuación secular

$$\det[\mathcal{H}_k - \epsilon_k^\lambda \mathcal{S}] = 0, \quad (1.14)$$

la cual debe tener como solución una función de onda no trivial, es decir, $a_k \neq 0$ y $b_k \neq 0$. La etiqueta λ denota las bandas de energía, y tenemos tantas bandas de energía

como soluciones de la ecuación secular. Para hacer la generalización a n átomos por celda unitaria, la función de onda debe ser escrita como

$$\psi_k = \sum_{j=1}^n a_k^{(j)} \psi_k^{(j)},$$

donde j denota diferentes átomos por celda unitaria. La ecuación secular permanece válida en términos de las $n \times n$ matrices hermitianas

$$\mathcal{H}_k^{ij} = \psi_k^{(i)*} H \psi_k^{(j)} \text{ y } \mathcal{S}_k^{(ij)} = \psi_k^{(i)*} \psi_k^{(j)}, \quad (1.15)$$

y ahora es un polinomio característico de grado n . Esto nos dice que existen n bandas de energía. Antes de pasar al caso de grafeno y sus bandas de energía, resolvamos la ecuación secular para una red arbitraria con muchos átomos por celda unitaria. Escribimos la matriz Hamiltoniana como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_k^{ij} &= \sum_{R_l, R_m} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{R}_l - \vec{R}_m)} \int d^2r \phi^{(i)*}(\vec{r} + \vec{\delta}_i - \vec{R}_k) H \phi^{(j)}(\vec{r} + \vec{\delta}_i - \vec{R}_m) \\ &= N \sum_{k_l} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_l} \int d^2r \phi^{(i)*}(\vec{r}) [H^a + \Delta V] \phi^{(j)}(\vec{r} + \vec{\delta}_{ij} - \vec{R}_l) \\ &= N(\epsilon^{(i)} s_k^{ij} + t_k^{ij}), \end{aligned}$$

con $\delta_{ij} = \delta_j - \delta_i$ y definimos la matriz de hopping como

$$t_k^{ij} = \sum_{R_l} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_l} \int d^2r \phi^{(i)*}(\vec{r} + \vec{\delta}_i - \vec{R}_k) \Delta V \phi^{(j)}(\vec{r} + \vec{\delta}_i - \vec{R}_m). \quad (1.16)$$

Con esto, nuestra ecuación secular ahora queda como

$$\det[t_k^{ij} - (\epsilon_k^\lambda - \epsilon^{(i)})] = 0. \quad (1.17)$$

Después de estas consideraciones, pasemos al caso de la aproximación de amarre fuerte para la red de panal de abeja, la cual nos da con gran precisión las bandas de energía del grafeno. La red hexagonal no es una red de Bravais pues los sitios en los cuales se encuentran los átomos no son equivalentes. Por lo tanto, debemos dividir nuestra red en dos subredes de Bravais triangulares, A y B, las cuales distinguiremos por el color azul y rojo respectivamente en la Figura 1.3. Elegimos los vectores de la red tales que $\vec{\delta}_A = 0$, y el sitio equivalente en la subred B se obtiene mediante el desplazamiento $\vec{\delta}_B = \delta_{AB} = \vec{\delta}_3$. La amplitud de hopping para los vecinos cercanos (nn) está dada por la expresión

$$t_{nn} = \int d^2r \phi^{A*}(\vec{r}) \Delta V \phi^B(\vec{r} + \vec{\delta}_3), \quad (1.18)$$

y también tomemos en cuenta el hopping de los siguientes vecinos cercanos (nnn) que conecta los sitios de los vecinos cercanos en la misma subred

$$t_{nnn} = \int d^2r \phi^{A*}(\vec{r}) \Delta V \phi^A(\vec{r} + \vec{a}_1) = \int d^2r \phi^{B*}(\vec{r}) \Delta V \phi^B(\vec{r} + \vec{A}_1). \quad (1.19)$$

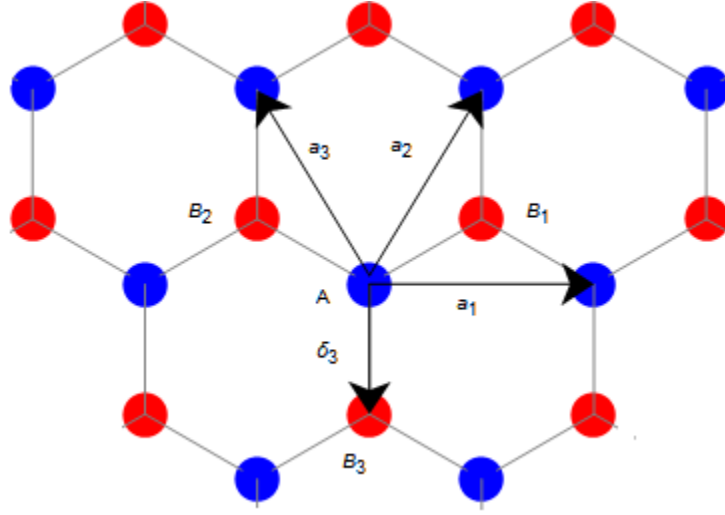


Figura 1.3: Red panal de abeja

Consideremos aparte la corrección de superposición entre los orbitales en los sitios nn

$$s \equiv \int d^2r \phi^{A*}(\vec{r}) \phi^B(\vec{r} + \vec{\delta}_3).$$

Los términos fuera de la diagonal de la matriz de hopping son

$$t_k^{AB} = t_{\gamma_k}^* = (t_k^{BA})^*, \quad (1.20)$$

así como los de la matriz de superposición

$$s_k^{AB} = s_{\gamma_k}^* = (s_k^{BA})^*, \quad (1.21)$$

donde la suma de los factores de fase de los sitios nn se define como

$$\gamma_k \equiv 1 + e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}_1} + e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}_2} + e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}_3}.$$

Las amplitudes de hopping de los sitios nnn producen los elementos de la diagonal de la matriz de hopping,

$$\begin{aligned} t_k^{AA} &= t_k^{BB} = t_{nnn} (e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}_1} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{a}_1} + e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}_2} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{a}_2} + e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}_3} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{a}_3}) \\ &= 2t_{nnn} \sum_{i=1}^3 \cos(\vec{k} \cdot \vec{a}_i) = t_{nnn} (|\gamma_k|^2 - 3). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Nuestra ecuación secular queda entonces como

$$\det \begin{bmatrix} t_k^{AA} - \epsilon_k & (t - s\epsilon_k)\gamma_k^* \\ (t - s\epsilon_k)\gamma_k & t_k^{AA} - \epsilon_k \end{bmatrix} = 0, \quad (1.23)$$

y tiene como soluciones

$$\epsilon_k^\lambda = \frac{t_k^{AA} + \lambda t |\gamma_k|}{1 + \lambda s |\gamma_k|}. \quad (1.24)$$

Si expandimos esta expresión asumiendo que $s \ll 1$ y $t_{nnn} \ll t$, la ecuación toma la siguiente forma

$$\epsilon_k^\lambda = t_k^{AA} + \lambda t |\gamma_k| - st |\gamma_k|^2 = t'_{nnn} |\gamma_k|^2 + \lambda t |\gamma_k| \quad (1.25)$$

$$= 2t'_{nnn} \sum_{i=1}^3 \cos(\vec{k} \cdot \vec{a}_i) + \lambda t \sqrt{3 + \sum_{i=1}^3 \cos(\vec{k} \cdot \vec{a}_i)}, \quad (1.26)$$

en la cual se define la amplitud de hopping de los sitios nnn como

$$t'_{nnn} \equiv t_{nnn} - st.$$

Notemos que las correcciones de superposición nos dejan con una renormalización de la amplitud de hopping de los sitios nnn. Las amplitudes de hopping se obtienen ajustando la dispersión de energía obtenida con la aproximación de amarre fuerte a la calculada numéricamente. Esto nos deja con un valor de $t \approx -3eV$ para la amplitud de hopping de nn y $t'_{nnn} \approx 0,1t$, lo cual justifica nuestra aproximación en la expansión para $t'_{nnn}/t \ll 1$. Este proceso de ajuste no nos permite distinguir entre la amplitud de hopping nnn real y la contribución de la corrección de superposición $-st$.

1.2.2. Halmiltoniano efectivo de amarre fuerte

Definamos el Hamiltoniano efectivo de amarre fuerte de la siguiente manera

$$\mathcal{H}_k \equiv t_{nnn} |\gamma_k|^2 \mathbb{1} + t \begin{pmatrix} 0 & \gamma_k^* \\ \gamma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

en la cual $\mathbb{1}$ es la matriz identidad 2×2

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este Hamiltoniano efectivo omite el problema de la no ortogonalidad de las funciones de onda con una simple renormalización de la amplitud de hopping nnn. Los eigenestados del Hamiltoniano efectivo son los espinores

$$\psi_k^\lambda = \begin{pmatrix} a_k^\lambda \\ b_k^\lambda \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

cuyos componentes son las amplitudes de probabilidad de la función de onda de Bloch de las dos subredes A y B. Estos los calculamos mediante la ecuación de eigenvalores

$$\mathcal{H}(t_{nnn} = 0) \psi_k^\lambda = \lambda t |\gamma_k| \psi_k^\lambda,$$

la cual no considera la corrección al hopping nnn. La solución a esta ecuación de eigenvalores tiene la forma

$$a_k^\lambda = \lambda \frac{\gamma_k^*}{|\gamma_k|} b_k^\lambda = \lambda e^{-i\phi_k} b_k^\lambda.$$

Entonces los eigenestados son

$$\psi_k^\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda e^{i\phi_k} \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

con $\phi_k = \arctan\left(\frac{Im\gamma_k}{Re\gamma_k}\right)$. El espinor representa una probabilidad igual de encontrar al electrón en el estado ψ_k^λ en la subred A o B.

Para describir las excitaciones electrónicas a bajas energías nos debemos concentrar en las excitaciones a nivel de Fermi. Esto nos deja con estados cuánticos en la vecindad de los puntos de Dirac, y uno debe expandir la energía de dispersión alrededor de $\pm K$. Descomponemos el vector de onda como

$$\vec{k} = \pm \vec{K} + \vec{q}$$

con $|\vec{q}| \ll |\vec{K}| \sim 1/a$, el parámetro que predomina en la expansión es $|\vec{q}|a \ll 1$. Debemos expandir γ_k de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \gamma_q^\pm \equiv \gamma_{k=\pm K+q} &= 1 + e^{\pm iK \cdot a_2} e^{iq \cdot a_2} + e^{\pm iK \cdot a_3} e^{iq \cdot a_3} \\ &\approx 1 + e^{\pm i2\pi/3} \left[1 + i\vec{q} \cdot \vec{a}_2 - \frac{1}{2}(\vec{q} \cdot \vec{a}_2)^2 \right] \\ &\quad + e^{\mp i2\pi/3} \left[1 + i\vec{q} \cdot \vec{a}_3 - \frac{1}{2}(\vec{q} \cdot \vec{a}_3)^2 \right] \\ &= \gamma_q^{\pm(0)} + \gamma_q^{\pm(1)} + \gamma_q^{\pm(2)} \end{aligned}$$

Por definición de los puntos de Dirac y su posición en las esquinas de la zona de Brillouin tenemos que $\gamma_q^{\pm(0)} = \gamma_{\pm k} = 0$.

1.2.3. Primer orden en qa

El termino de primer orden es

$$\begin{aligned} \gamma_q^{\pm(1)} &= i \frac{\sqrt{3}a}{2} [(q_x + \sqrt{3}q_y) e^{\pm i2\pi/3} + (-q_x + \sqrt{3}q_y) e^{\mp i2\pi/3}] \\ &= \mp \frac{3a}{2} (q_x \pm iq_y) \end{aligned} \quad (1.30)$$

donde utilizamos que $\sin(\pm 2\pi/3) = \pm \sqrt{3}/2$ y $\cos(\pm 2\pi/3) = -1/2$. Quedando nuestro Hamiltoniano efectivo a baja energía de la siguiente manera

$$\mathcal{H}_q^{eff,\xi} = \xi \hbar v_F (q_x \sigma^x + q_y \sigma^y) \quad (1.31)$$

donde definimos la velocidad de Fermi como

$$v_F \equiv -\frac{3ta}{2\hbar} = \frac{3|t|a}{2\hbar} \quad (1.32)$$

y las matrices de Pauli

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

También introducimos el isospín o índice de Valle $\xi = \pm$ donde $\xi = +$ denota K apuntando a $+\vec{K}$ y $\xi = -$ denota K' apuntando a $-\vec{K}$. Este Hamiltoniano corresponde al Hamiltoniano de Dirac para partículas sin masa. Aquí es, precisamente donde se establece el puente entre los sistemas de materia condensada y de física de partículas, pues las interacciones electromagnéticas dan origen a la electrodinámica cuántica. En el siguiente capítulo estudiaremos las ecuaciones de Schwinger-Dyson en dicha teoría.

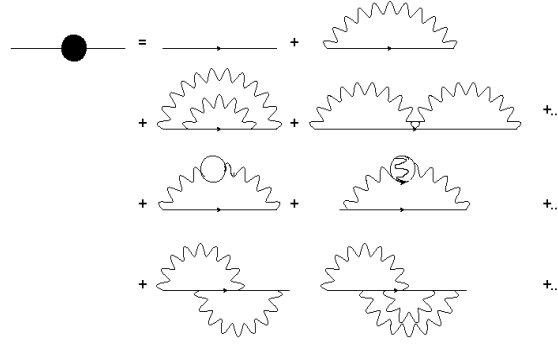
Capítulo 2

Ecuaciones de Schwinger-Dyson

En este capítulo estudiaremos el fenómeno no perturbativo de la Generación Dinámica de Masas (GMD) [8] que surge por el rompimiento, también dinámico, de la simetría quiral en la Electrodinámica Cuántica Reducida o Pseudo-Electrodinámica Cuántica (R(P)QED por sus siglas en inglés) mediante las Ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD). Veamos primero cómo surgen las ESD y como es que mediante ellas podemos estudiar el fenómeno de nuestro interés en la electrodinámica cuántica (QED por sus siglas en inglés), que tienen la misma estructura en la R(P)QED.

El Lagrangiano que describe las interacciones en la Electrodinámica Cuántica es invariante bajo transformaciones locales de fase llamadas de norma. Esta simetría se refleja por medio de las identidades de Ward-Green-Takahashi [9–13], las cuales relacionan las funciones de Green entre sí, y las transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin, que relacionan una función de Green en una norma particular y en otra norma covariante arbitraria. Para resolver teorías cuánticas de campos, el esquema más conveniente a usar, entre otros, es la teoría de perturbaciones. El problema es que no todos los fenómenos aparecen en el régimen perturbativo. Un ejemplo de esto es el origen de las masas, que es un fenómeno no perturbativo. Una alternativa conveniente para el estudio de estos fenómenos es el uso de las ESD, las cuales son una torre infinita de relaciones entre las funciones de Green de la teoría en estudio, que deben truncarse con la finalidad de obtener información física relevante. Uno de los problemas del truncamiento no perturbativo de las ESD es la pérdida de la invarianza de norma. Debido a esto, el poder predictivo de estas ecuaciones se ve comprometido.

Los propagadores se modifican mediante las autointeracciones. En el caso fermiónico, el propagador que representa la suma de todas las autointeracciones se llama propagador completo y posee todas las propiedades del propagación del fermión. En el caso en el que el propagador no emite ni absorbe fotones se denomina propagador desnudo. Existe una serie infinita de correcciones al propagador. En términos de diagramas quedan de la siguiente manera

**Figura 2.1:** Correcciones al propagador del fermión

Clasificamos estas correcciones en tres tipos, al propagador del fermión, al del fotón y al vértice. Estas correcciones no se pueden sumar directamente. Para poder hacerlo, definimos la autoenergía, tal como se representa en la expansión diagramática

$$\Sigma(p) = \text{diagrama de autoenergía}$$

El diagrama de autoenergía $\Sigma(p)$ se representa como una línea horizontal con un punto verde en su extremo izquierdo y un punto amarillo en su extremo derecho. Entre estos dos puntos, hay un bucle de wavy (fotón) que comienza y termina en un punto rojo.

La autoenergía involucra todas las correcciones a las funciones de Green. En términos de $\Sigma(p)$, la expansión perturbativa para el propagador del fermión es

**Figura 2.2:** Propagador del fermión en la teoría de perturbaciones en términos de la autoenergía.

La Fig. 2.2 corresponde a las expansión

$$\begin{aligned} S_F(p) &= S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p) + \dots \\ &= S_F(p)[1 + \Sigma(p)S_F^0(p) + \Sigma(p)S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p) + \dots], \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde $S_F(p)$ es el propagador completo y $S_F^0(p)$ su contraparte desnuda. La parte dentro del corchete es una serie geométrica que se puede sumar, quedando nuestra expresión de la siguiente manera

$$S_F(p) = S_F^0(p) \left[\frac{1}{1 - \Sigma(p)S_F^0(p)} \right]. \quad (2.2)$$

Si reescribimos la ecuación (2.1) de esta forma

$$\begin{aligned} S_F(p) &= S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p)[1 + \Sigma(p)S_F^0(p) + \Sigma(p)S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p) + \dots] \\ &= S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p) \left(S_F^0(p) \left[\frac{1}{1 - \Sigma(p)S_F^0(p)} \right] \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

y si usamos la ecuación (2.2) llegamos a

$$S_F(p) = S_F^0(p) + S_F(p)\Sigma(p)S_F(p). \quad (2.4)$$

Esta es ESD para el propagador del fermión. Es conveniente reescribirla en términos del inverso de este propagador. Para esto, multipliquemos la ecuación por $S_F^{-1}(p)$ por la izquierda tenemos

$$1 = S_F^0(p)S_F^{-1}(p) + S_F^0(p)\Sigma(p). \quad (2.5)$$

Ahora multipliquemos por $(S_F^0(p))^{-1}$ por la derecha, de manera que quedamos con

$$S_F^{-1}(p) = (S_F^0(p))^{-1} - \Sigma(p). \quad (2.6)$$

En general siendo esta la ESD que corresponde a la función de Green de dos puntos del fermión. Las funciones de Green de dos puntos están relacionadas con las de tres puntos, las de tres puntos con las de cuatro y así sucesivamente hasta formar una torre infinita de relaciones entre las funciones de Green.

Para tener posibilidad de obtener información física de las ESD, es necesario truncar esta torre infinita suponiendo alguna forma para las funciones de Green de varios puntos. Para estudiar el fenómeno de nuestro interés es usual truncar la torre de ESD al nivel de los propagadores. En la siguiente sección discutiremos el estudio de las ESD para el propagador del fermión.

2.1. Funciones de Green

Veamos ahora como es la estructura de los propagadores del fermión S_F y del fotón $\Delta_{\mu\nu}$, y del vértice Γ^μ .

2.1.1. Propagador del fermión

Podemos escribir el propagador como una combinación lineal de las matrices $\mathbb{I}$ y $\not{p}$ de la siguiente forma

$$S_F(p) = A(p)\not{p} + B(p). \quad (2.7)$$

Equivalentemente, escribimos el propagador como sigue

$$S_F(p) = \frac{F(p)}{\not{p} - M(p)} = \frac{F(p)(\not{p} + M(p))}{p^2 - M^2(p)}, \quad (2.8)$$

donde $F(p)$ es la función de renormalización de onda y a $M(p)$ es la función de masa. Notemos que si hacemos $M(p) = m$ y $F(p) = 1$, queda el propagador desnudo o propagador de Dirac.

$$S_F^0(p) = \frac{1}{\not{p} - m}. \quad (2.9)$$

La ESD para el propagador del fermión en el espacio Minkowski. Usando las reglas de Feynman es

$$S_F^{-1}(p) = (S_F^0(p))^{-1} - e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Gamma^\mu(k, p) S_F(k) \gamma^\nu \Delta_{\mu\nu}(q) \quad (2.10)$$

donde $q = k - p$ y $S_F^0(p)$ es el propagador desnudo. Si $m = 0$, $S_F^0(p)$ tiene un polo en $p = 0$. El fenómeno de la GDM toma lugar cuando la posición de este polo cambia de lugar debido a las autointeracciones.

2.1.2. Propagador del fotón

Antes de encontrar el propagador del fotón y entender el motivo de incluir el término que fija la norma, hagamos un ejemplo de un camino corto para obtener el propagador del fermión a partir del Lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\bar{\psi}. \quad (2.11)$$

El propagador se puede leer directamente si lo identificamos así

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\bar{\psi} = \bar{\psi} S_F^{-1}(x) \bar{\psi} \\ &\rightarrow S_F^{-1}(x) = (i\cancel{\partial} - m) \stackrel{\text{TF}}{=} \not{p} - m \\ &\rightarrow S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m} \end{aligned}$$

Entonces, para obtener el propagador del fotón, partimos del Lagrangiano de Maxwell

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

Buscamos la forma de escribirlo tal que $\Delta_{\mu\nu} = A^\mu \mathcal{O} A^\nu$. Para esto desarrollamos el Lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{4} [\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu] \\ &= \frac{1}{2} A^\mu [g_{\mu\nu} \square^2 - \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Las ecuaciones de Maxwell homogéneas pueden escribirse de la forma

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0 \\ (g_{\mu\nu} \square^2 - \partial_\mu \partial_\nu) A^\mu &= 0. \end{aligned}$$

Para encontrar el propagador del fotón correspondiente, debemos resolver

$$[g_{\mu\nu} \square^2 - \partial_\mu \partial_\nu] \Delta^{(-1)\nu\lambda}(x - y) = \delta_\mu^\lambda \delta(x - y). \quad (2.14)$$

Si operamos con ∂_μ sobre la ecuación obtenemos

$$\partial^\mu [g_{\mu\nu} \square^2 - \partial_\mu \partial_\nu] \Delta^{(-1)\nu\lambda}(x-y) = \partial^\lambda \delta(x-y) \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} ((\square^2 \partial_\nu - \square^2 \partial_\nu) \Delta^{(-1)\nu\lambda}(x-y)) &= (0 \cdot \partial_\nu) \Delta^{(-1)\nu\lambda} \\ &= \partial^\lambda \delta(x-y). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Esto implica que $\Delta^{\nu\lambda}(x-y)$ no tiene inverso. Para resolver este problema, es necesario incluir en el Lagrangiano un término que fije la norma. Algunas elecciones comunes para fijar la norma son

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A} &= 0 \quad \text{Norma de Coulomb,} \\ A^0 &= 0 \quad \text{Norma Temporal,} \\ A^3 &= 0 \quad \text{Norma Axial,} \\ \partial_\mu A^\mu &= 0 \quad \text{Norma de Lorentz} \end{aligned}$$

Si imponemos la condición de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$, podemos escribir el Lagrangiano de Maxwell como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\nu g_{\mu\nu} \square^2 A^\nu. \quad (2.17)$$

El operador $g_{\mu\nu} \square^2$ si tiene inverso, y es conocido como el propagador de Feynmann

$$\Delta_F(x, y)_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \Delta_F(x, y, m=0). \quad (2.18)$$

Ahora, incluimos un término que fija la norma covariantemente, al Lagrangiano. Para esto consideramos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} A^\mu [g_{\mu\nu} \square^2 - \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &= \frac{1}{2} A^\mu [g_{\mu\nu} \square^2 - \partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{\xi} \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu, \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde ξ es el parámetro que fija la norma. Cuando $\xi = 1$ estamos trabajando en la norma de Feynmann, y si $\xi = 0$, en la norma de Landau. El inverso del propagador completo está definido por

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1} = g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{\xi} \partial_\mu \partial_\nu, \quad (2.20)$$

cuya transformada de Fourier es

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1}(p) = -p^2 g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p_\mu p_\nu. \quad (2.21)$$

Ahora, el propagador tiene la forma

$$\Delta^{\nu\lambda} = A(p^2) g^{\nu\lambda} + B(p^2) p^\nu p^\lambda, \quad (2.22)$$

donde A y B son funciones desconocidas. Junto con su inverso debe satisfacer que

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1}(\Delta^{\nu\lambda}) = g^\lambda{}_\mu.$$

Si desarrollamos y hacemos la contracción tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}^{-1}(\Delta^{\nu\lambda}) &= \left[-p^2 g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p_\mu p_\nu \right] [A(p^2)g^{\nu\lambda} + B(p^2)p^\nu p^\lambda] \\ &= -p^2 A(p^2)g^\lambda{}_\mu + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) A(p^2)p_\mu p_\lambda \\ &\quad - p^2 B(p^2)p^\mu p^\lambda + B(p^2) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p^2 p_\mu p_\lambda \\ &= -p^2 A(p^2)g^\lambda{}_\mu + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) A(p^2)p_\mu p_\lambda + \frac{1}{\xi} B(p^2)p^2 p_\mu p_\lambda = g^\lambda{}_\mu \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} -p^2 A(p^2) &= 1 & \rightarrow & A(p^2) = -\frac{1}{p^2}, \\ \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) A(p^2) + \frac{1}{\xi} B(p^2)p^2 &= 0 & \rightarrow & B(p^2) = \frac{(1 - \xi)}{p^4}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos coeficientes, el propagador del fotón es

$$\Delta^{\nu\lambda}(p) = -\frac{1}{p^2} \left[g^{\nu\lambda} - \frac{(1 - \xi)}{p^2} p^\nu p^\lambda \right]. \quad (2.23)$$

De modo que se enfatiza que el fotón no tiene masa pues el propagador tiene un polo simple en el origen $p^2 = 0$.

Para el caso de la $R(P)QED$ donde la materia se encuentra confinada en el plano [14, 34]. Tenemos que el Lagrangiano es el siguiente

$$\mathcal{L}_{RQED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu)\psi - j^\mu A_\mu - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \frac{1}{(-\square)^{1/2}} F^{\mu\nu} \quad (2.24)$$

Para poder calcular las ecuaciones de movimiento, es necesario hacer una variación respecto a A_μ , haciendo esto tenemos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^3x \left[-\frac{1}{2} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) \frac{1}{(-\square)^{1/2}} F^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{1}{(-\square)^{1/2}} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) - e j^\nu \delta A_\nu \right]. \end{aligned}$$

Integrando parcialmente, llegamos a lo siguiente

$$\delta S = \int d^3x [\delta A_\nu \frac{1}{(-\square)^{1/2}} \partial_\mu F^{\mu\nu} + \partial_\mu F^{\mu\nu} \frac{1}{(-\square)^{1/2}} \delta A_\nu - e j^\nu \delta A_\nu]. \quad (2.25)$$

Usamos la siguiente propiedad del kernel del d 'Alambertiano

$$\begin{aligned} \int d^3x G(x) \frac{1}{\sqrt{-\square}} H(x) &= \int d^3y \int d^3x G(x) K(x-y) H(y), \\ &= \int d^3y \int d^3x H(x) K(x-y) G(y). \end{aligned}$$

Notamos que en nuestra ec. (2.25) los dos términos dentro de la integral son equivalentes al usar esta propiedad, así encontramos

$$\delta S = \int d^3x [\delta A_\nu \frac{2}{(-\square)^{1/2}} \partial_\mu F^{\mu\nu} - e j^\nu \delta A_\nu]. \quad (2.26)$$

De lo anterior notamos que nuestra ecuación de movimiento es

$$\frac{2\partial_\mu F^{\mu\nu}}{(-\square)^{1/2}} = e j^\nu. \quad (2.27)$$

El propagador para este Lagrangiano tiene la siguiente forma euclidiana

$$\Delta_{0\mu\nu}(p) = \frac{1}{p} \left[\delta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \quad (2.28)$$

El parámetro que fija la norma ζ no es el mismo que el de QED ordinario, pero juega el mismo papel.

2.1.3. Vértice

El vértice $\Gamma^\mu(k, p)$ de la interacción de fermiones con fotones se puede construir de una combinación lineal de la forma

$$\Gamma^\mu(k, p) = \sum_{i=1}^{12} v_i(k, p) V_i^\mu \quad (2.29)$$

de los vectores base

$$\begin{aligned} V_1^\mu &= \gamma^\mu, & V_2^\mu &= k^\mu, & V_3^\mu &= p^\mu, \\ V_4^\mu &= \not{k} \gamma^\mu, & V_5^\mu &= \not{k} k^\mu, & V_6^\mu &= \not{k} p^\mu, \\ V_7^\mu &= \not{p} \gamma^\mu, & V_8^\mu &= \not{p} k^\mu, & V_9^\mu &= \not{p} p^\mu, \\ V_{10}^\mu &= \not{k} \not{p} \gamma^\mu, & V_{11}^\mu &= \not{k} \not{p} k^\mu, & V_{12}^\mu &= \not{k} \not{p} p^\mu. \end{aligned}$$

donde las $v_i(k, p)$ son funciones escalares de k^2 , p^2 y q^2 . De este modo, en la ESD para el propagador del fermión están involucradas 15 funciones desconocidas. Para poder obtener información física, debemos hacer algunas suposiciones sobre estas funciones, es decir, debemos truncar la torre de ESD. En el siguiente capítulo, emplearemos algunas de estas suposiciones para estudiar la generación dinámica de masa.

Capítulo 3

Generación dinámica de masas

Un buen punto de partida para estudiar el fenómeno de la GDM es partir de la ESD [14, 15] para el propagador del fermión, cuya expresión es dada por

$$S_F^{-1}(p) = S_{0F}^{-1}(p) - \pi\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Gamma^\mu(k, p) S_F(k) \gamma^\nu \Delta_{\mu\nu}(p - k) \quad (3.1)$$

donde

$$\begin{aligned} S_F(p) &= \frac{\not{p} - M(p)}{F(p)}, \\ S_{0F}^{-1}(p) &= \not{p} - m, \\ S_F(k) &= \frac{F(k)(\not{k} + M(k))}{k^2 - M^2(k)}. \end{aligned}$$

Si sustituimos estas expresiones, nuestra ESD queda como

$$\frac{\not{p} - M(p)}{F(p)} = \not{p} - m - \pi\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Gamma^\mu(k, p) \frac{F(k)(\not{k} + M(k))}{k^2 - M^2(k)} \gamma^\nu \Delta_{\mu\nu}(p - k) \quad (3.2)$$

Para este trabajo de tesis nos concentramos en el estudio de la aproximación apagada, despreciando lazos entre fermiones. Esto quiere decir que tomamos simplemente $\Delta_{\mu\nu} \rightarrow \Delta_{0\mu\nu}$, lo cual, diagramáticamente representamos como

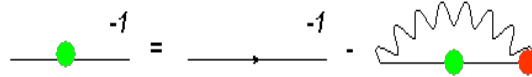


Figura 3.1: ESD para el propagador del fermión en la aproximación apagada.

Además, en una primera aproximación, tomaremos la siguiente forma para el vértice

$$\Gamma^\mu(k, p) = \gamma^\mu, \quad (3.3)$$

lo que se conoce como aproximación arcoiris. Esto debido a que en el régimen del acoplamiento débil, el propagador toma la forma

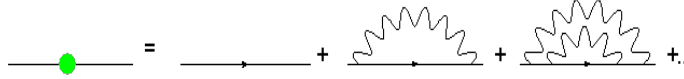


Figura 3.2: Propagador del fermión en la aproximación arcoiris en el régimen de acoplamiento débil

Gráficamente, la ESD en aproximación arcoiris queda de la siguiente manera

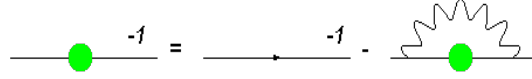


Figura 3.3: ESD para el propagador del fermión en la aproximación arcoiris.

Si sustituimos el vértice y el propagador en la ec. (3.2), obtenemos

$$\frac{\not{p} - M(p)}{F(p)} = \not{p} - m - \pi\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma^\mu \frac{F(k)(\not{k} + M(k))}{k^2 - M^2(k)} \gamma^\nu \Delta_{0\mu\nu}(p - k). \quad (3.4)$$

Esta es una ecuación matricial, que podemos convertir en un sistema de ecuaciones integrales no lineales escalares acopladas para M y F . La primera la obtenemos tomando la traza de la ESD

$$-\frac{M(p)}{F(p)} \text{Tr}(Id) = -m \text{Tr}(Id) - \pi\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{k} + M(k)) \gamma^\nu] \Delta_{0\mu\nu}(p - k)$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu (\not{k} + M(k)) \gamma^\nu] = M(k) \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 3g^{\mu\nu} M(k). \quad (3.5)$$

Sustituyendo esta expresión obtenemos:

$$-\frac{M(p)}{F(p)} \text{Tr}(Id) = -m \text{Tr}(Id) - \pi\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} [3g^{\mu\nu} M(k)] \Delta_{0\mu\nu}(p - k),$$

donde

$$\Delta_{0\mu\nu}(p - k) = \frac{1}{(p - k)} [\delta_{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi})] \frac{(p_\mu - k_\mu)(p_\nu - k_\nu)}{(p - k)^2}.$$

Sustituyendo lo anterior y haciendo el cambio $\frac{1}{\xi} \rightarrow \zeta$:

$$\begin{aligned} -\frac{M(p)}{F(p)} &= -m - \pi\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \frac{M(k)}{(p - k)} \left[3 - \frac{(1 - \zeta)[p^2 - 2p \cdot k + k^2]}{p^2 - 2p \cdot k + k^2} \right], \\ \Rightarrow \frac{M(p)}{F(p)} &= m + \pi\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \frac{M(k)}{(p - k)} [2 + \zeta]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Haciendo una rotación de Wick, nuestra expresión queda de la siguiente manera

$$\frac{M(p)}{F(p)} = m + \pi\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 + M^2(k)} \frac{M(k)}{(k - p)} [2 + \zeta]. \quad (3.7)$$

Tomamos $d^3k = k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi$

$$\frac{M(p)}{F(p)} = m + \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_0^\lambda \frac{dk F(k) M(k) [2 + \zeta]}{k^2 + M^2(k)} \int_0^\pi \frac{d\theta \sin \theta}{[p^2 - 2p \cdot k + k^2]^{1/2}}.$$

Haciendo las integrales angulares llegamos a la siguiente expresión

$$\frac{M(p)}{F(p)} = m + \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_0^\lambda \frac{dk F(k) M(k) [2 + \zeta]}{k^2 + M^2(k)} \left[\frac{1}{kp} (|k + p| - |k - p|) \right]. \quad (3.8)$$

Es posible partir esta integral en dos regiones [16–18, 20], resultando las dos siguientes integrales

$$\frac{M(p)}{F(p)} = m + \frac{\alpha}{4\pi p} \int_0^p \frac{dk k^2 F(k) M(k)}{k^2 + M^2(k)} \frac{2k[2 + z]}{k} + \frac{\alpha}{4\pi p} \int_p^\Lambda \frac{dk k^2 F(k) M(k)}{[k^2 + M^2(k)]k} [2p](2 + z) \quad (3.9)$$

Como primera aproximación tomemos $F(p) \approx 1$ [5], ya que la inclusión de términos de mayor orden solo es necesaria para recuperar la invarianza de norma. Además esto nos dará una idea cualitativa del comportamiento de $M(p)$. Convenientemente podemos escribir esta integral como una ecuación diferencial ordinaria con dos condiciones de frontera adecuadas. Si diferenciamos respecto a p obtenemos

$$M'(p) = -\frac{\alpha}{\pi p^2} \int_0^p \frac{k^2 M(k)}{k^2 + M^2(k)} dk. \quad (3.10)$$

Multiplicamos por p^2 y volvemos a diferenciar respecto a p

$$\begin{aligned} p^2 M'(p) &= -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^p \frac{k^2 M(k)}{k^2 + M^2(k)} dk \\ 2p M'(p) + p^2 M''(p) &= -\frac{\alpha}{\pi} \frac{p^2 M(p)}{p^2 + M^2(p)} \\ \rightarrow p^2 M''(p) + 2p M'(p) + \frac{\alpha}{\pi} \frac{p^2 M(p)}{p^2 + M^2(p)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

De las ecuaciones anteriores podemos obtener las condiciones infrarroja y ultravioleta

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \Lambda} \left(p \frac{dM(p)}{dp} + M(p) \right) &= 0 & \text{UV} \\ \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \frac{dM(p)}{dp} &= 0 & \text{IR} \end{aligned}$$

Reescribimos nuestra ecuación diferencial usando una aproximación tal que $p \gg M(p)$

$$p^2 M''(p) + 2p M'(p) + \frac{\alpha}{\pi} M(p), \quad (3.12)$$

o bien

$$\frac{d}{dp} \left(p^2 \frac{dM(p)}{dp} \right) + \frac{\alpha}{\pi} M(p) = 0, \quad (3.13)$$

La cual es una ecuación diferencial de tipo Euler-Cauchy. La solución de esta ecuación tiene la siguiente forma

$$M(p) = C_1 p^{n_+} + C_2 p^{n_-}, \quad (3.14)$$

en la cual

$$n_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{\pi}}}{2}. \quad (3.15)$$

definimos $\alpha_c = \frac{\pi}{4}$. Dadas las condiciones de frontera, tenemos que $\alpha > \alpha_c$ para que se genere masa, ¿cuánta masa se genera si damos un valor que cumpla esta condición?

$$M(p) = C_1 p^{-\frac{1}{2} - \frac{i\tau}{2}} + C_2 p^{-\frac{1}{2} + \frac{i\tau}{2}}, \quad (3.16)$$

con $\tau = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_c} - 1}$, Multiplicando por p y derivando ambos lados respecto a p

$$\begin{aligned} pM(p) &= C_1 p^{\frac{1}{2} - \frac{i\tau}{2}} + C_2 p^{\frac{1}{2} + \frac{i\tau}{2}}, \\ [pM(p)]' &= C_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{i\tau}{2} \right) p^{-\frac{1}{2} - \frac{i\tau}{2}} + C_2 p^{-\frac{1}{2} + \frac{i\tau}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{i\tau}{2} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando las condiciones de frontera a esta ecuación obtenemos

$$\frac{\Lambda}{\kappa} = A' \exp \left(\frac{A}{\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_c} - 1}} \right). \quad (3.17)$$

Este parámetro de escala exhibe una transición de fase para $\alpha \rightarrow \alpha_c$ y además obedece una ley de escalamiento de Miransky [19], que es un resultado bien conocido en el contexto de la QED [19, 23, 36].

Numéricamente el comportamiento bajo distintas normas de la función de masa para un mismo valor de acoplamiento es el siguiente [Fig. 3.4],

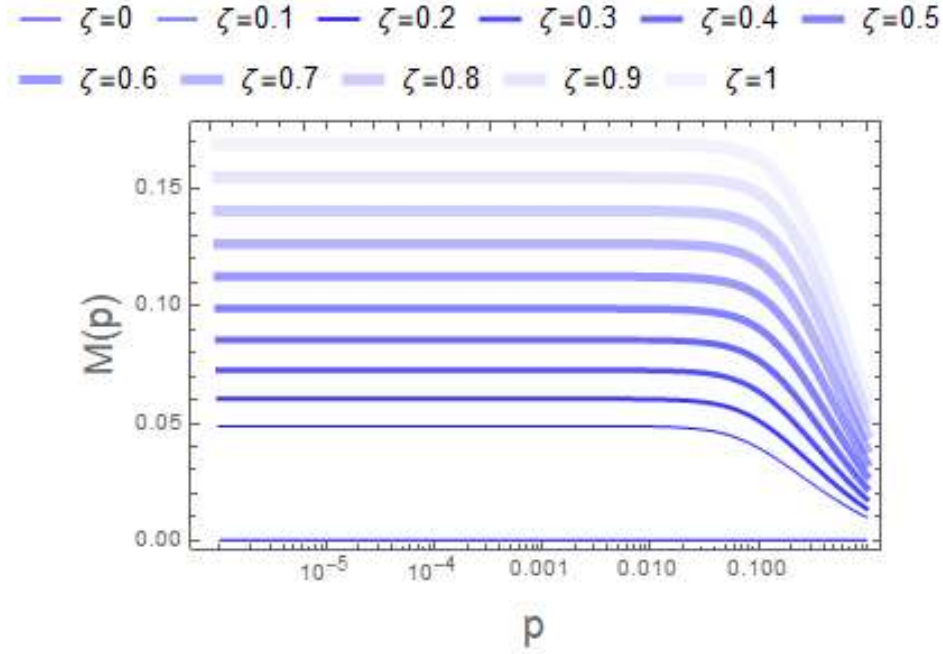


Figura 3.4: Función de masa $M(p)$ con $a = 2$ en distintas normas. Donde $\alpha = a\alpha_c$.

Si nos acercamos al valor del acoplamiento crítico y variamos la norma tenemos el comportamiento observado en la [Fig. 3.5].

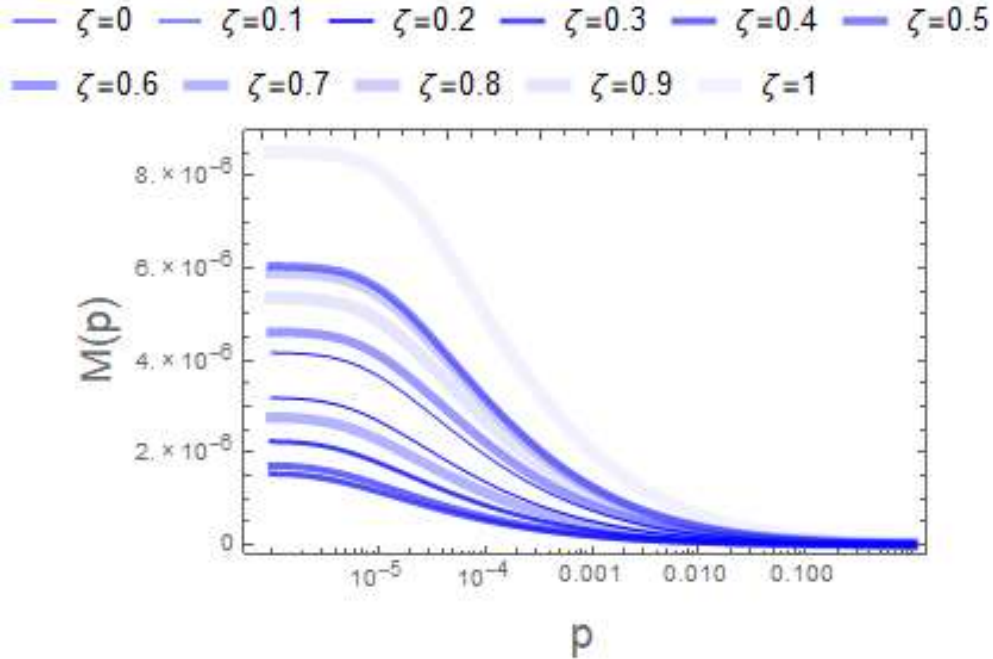


Figura 3.5: Función de masa $M(p)$ cerca del acoplamiento crítico en distintas normas.

Así, podemos observar en los dos casos anteriores [Fig. 3.4 & Fig. 3.5] que el pára-

metro de acoplamiento cambia en relación a la norma que elegimos. Por lo cual el comportamiento de este acoplamiento en distintas normas se vizualiza en la [Fig 3.6].

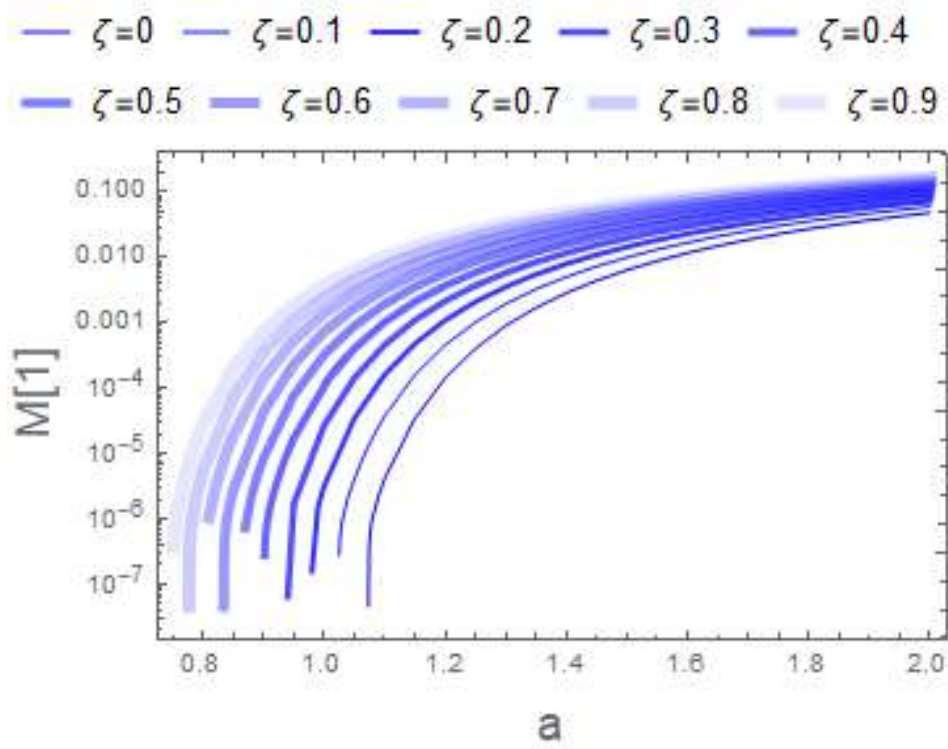


Figura 3.6: Acoplamiento crítico en distintas normas.(Caso $F(p) \approx 1$)

Es necesario corregir este problema, pues el acoplamiento debe ser independiente de la norma que elijamos [26]. Para conseguir esto, veamos primero como afecta la aproximación que se hizo al tomar $F(p) \approx 1$. Para obtener la ecuación de la función de renormalización de onda $F(p)$, multiplicamos la expresión (3.4) por $\not{p}$ y tomamos la traza, llegando así a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{F(p)} \text{Tr}(Id) = p^2 \text{Tr}(Id) &= \pi\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \\ &\times \text{Tr}[\not{p}\gamma^\mu(\not{k} + M(k))\gamma^\nu]\Delta_{0\mu\nu}(p-k). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Calculamos la traza

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\not{p}\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu] &= \text{Tr}[p_\alpha\gamma^\alpha\gamma^\mu k_\beta\gamma^\beta\gamma^\nu] = 3p_\alpha k_\beta (g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}) \\ &= 3[p^\mu k^\nu - (p \cdot k)g^{\mu\nu} + k^\mu p^\nu] \end{aligned}$$

Sustituimos la traza y $\Delta_{0\mu\nu}(p-k)$ y nuestra expresión queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{F(p)} &= p^2 - \pi\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \Delta_{0\mu\nu}(p-k) \frac{[p^\mu k^\nu - (p \cdot k)g^{\mu\nu} + k^\mu p^\nu]}{|p-k|} \\ &\times \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{(1-\zeta)(p_\mu p_\nu - p_\mu k_\nu - k_\mu p_\nu + k_\mu k_\nu)}{p^2 + k^2 - 2(p \cdot k)} \right] \end{aligned}$$

Simplificando está expresión

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F(p)} &= 1 - \frac{\pi\alpha}{p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \frac{1}{|p - k|} \left[-p \cdot k - \frac{(1 - \eta)[(p \cdot k)p^2 - 2p^2k^2 + k^2(p \cdot k)]}{p^2 + k^2 - 2(p \cdot k)} \right] \\
&= 1 - \frac{\pi\alpha}{p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \frac{1}{|p - k|} \left[-p \cdot k - \frac{(p \cdot k)p^2 - 2p^2k^2 + k^2(p \cdot k)}{p^2 + k^2 - 2(p \cdot k)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\zeta[(p \cdot k)p^2 - 2p^2k^2 + k^2(p \cdot k)]}{p^2 + k^2 - 2(p \cdot k)} \right] \\
&= 1 - \frac{\pi\alpha}{p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \frac{1}{|p - k|} \\
&\quad \times \left[\frac{-2(p \cdot k)p^2 - 2(p \cdot k)k^2 + 2(p \cdot k)^2 + 2p^2k^2 + \zeta(p \cdot k)p^2 - 2\zeta p^2k^2 + \zeta k^2(p \cdot k)}{p^2 + k^2 - 2(p \cdot k)} \right]
\end{aligned}$$

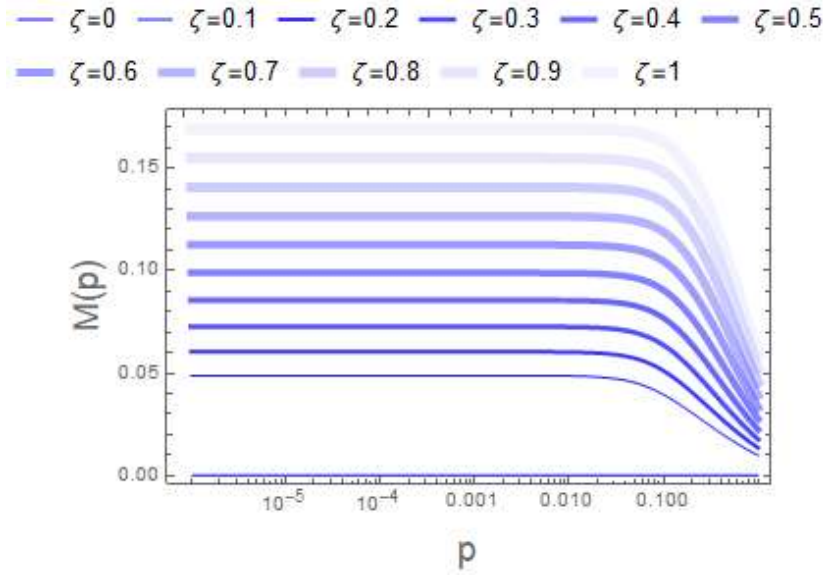
Si hacemos una rotación de Wick para pasar al espacio euclideo tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F(p)} &= 1 + \frac{\pi\alpha}{p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 + M^2(k)} \frac{1}{|k - p|} \\
&\quad \times \left[\frac{2(p \cdot k)p^2 + 2(p \cdot k)k^2 - 2(p \cdot k)^2 - 2p^2k^2 - \zeta(p \cdot k)p^2 + 2\zeta p^2k^2 - \zeta k^2(p \cdot k)}{p^2 + k^2 - 2(p \cdot k)} \right]
\end{aligned}$$

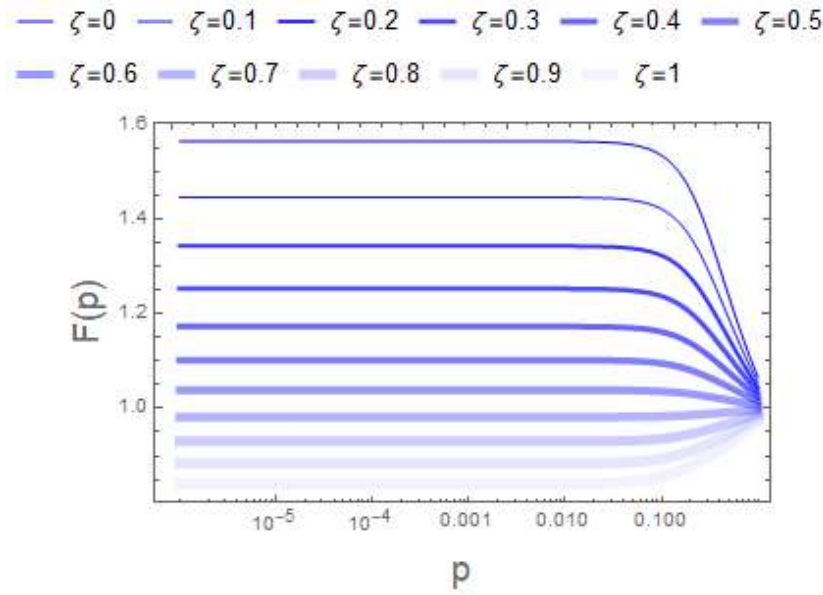
Escribamos está expresión en término de las integrales angulares para obtener la ecuación para $F(p)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F(p)} &= 1 + \frac{\alpha}{4\pi p^2} \int_0^\Lambda \frac{dk F(k) k^2}{k^2 + M^2(k)} \left[\int_0^\pi \frac{(2 - \zeta)(p^2 + k^2)kp \cos \theta \sin \theta}{[p^2 + k^2 - 2(k \cdot p)]^{3/2}} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\pi \frac{2p^2k^2(\zeta - 1) \sin \theta}{[p^2 + k^2 - 2(k \cdot p)]^{3/2}} - \int_0^\pi \frac{2k^2p^2 \cos^2 \theta \sin \theta}{[p^2 + k^2 - 2(k \cdot p)]^{3/2}} \right]
\end{aligned}$$

Si graficamos esta expresión y la de la función de masa para el mismo valor del acoplamiento tenemos el comportamiento de la [Fig. 3.7].



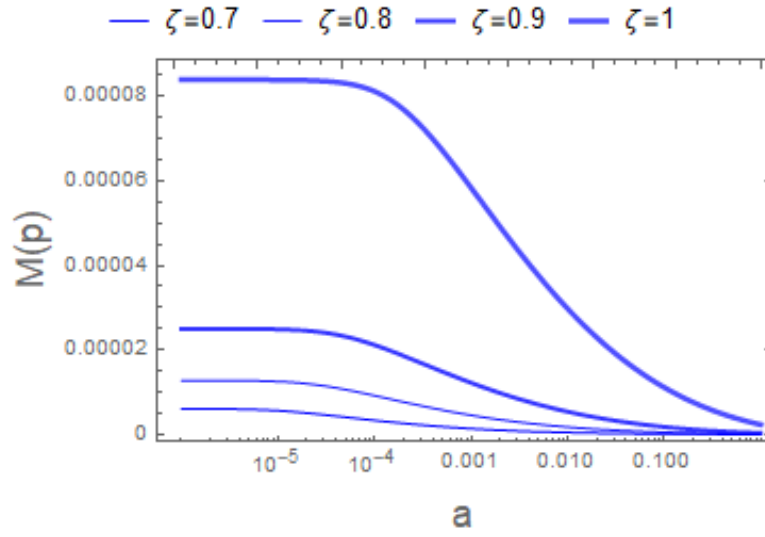
(a) Función de masa $M(p)$ con $a = 2$ en distintas normas.



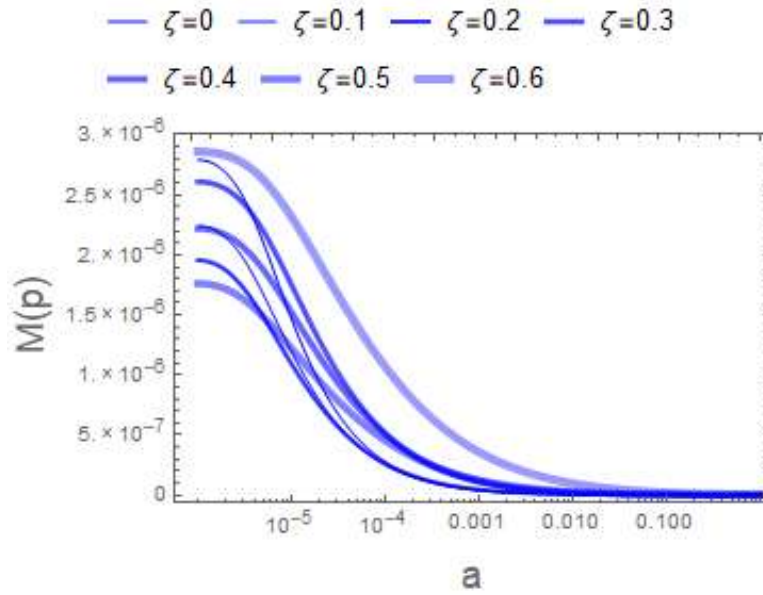
(b) Función renormalización de onda $F(p)$ con $a = 2$ en distintas normas.

Figura 3.7

Para el caso en el cual tomamos los valores cerca del acoplamiento crítico el comportamiento es distinto, pues mientras más lejos estamos de la norma de Landau, más crece la función de masa



(a) Función de masa $M(p)$ cerca del acoplamiento crítico en distintas normas. $\xi = 0,7 - 1$.



(b) Función de masa $M(p)$ cerca del acoplamiento crítico en distintas normas. $\xi = 0 - 0,6$.

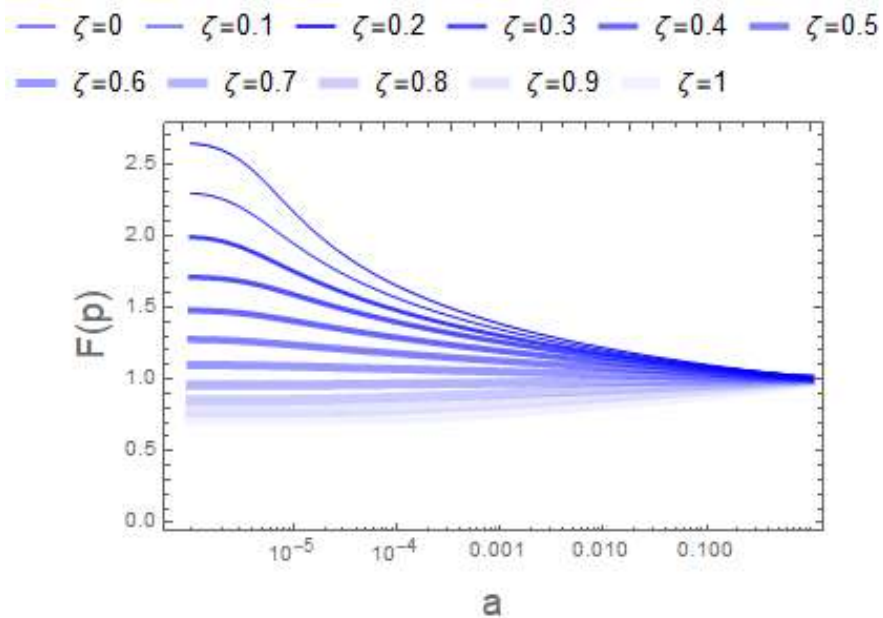


Figura 3.8: Función renormalización de onda $F(p)$ cerca del acoplamiento crítico en distintas normas..

Por último, para este caso grafiquemos cual es la variación del acoplamiento α

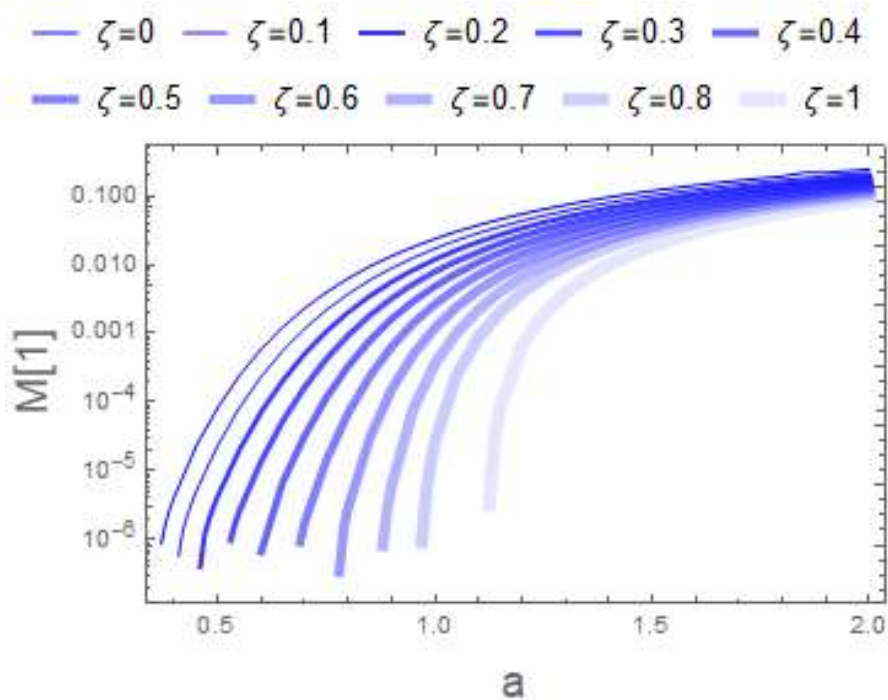


Figura 3.9: Acoplamiento crítico en distintas normas.(Caso $F \neq 1$)

Se puede apreciar que al incluir $F(p)$ la dependencia de norma del acoplamiento

aumento, por lo que vemos que no es conveniente tomar la aproximación arcoiris y $F(p) \approx 1$.

Un siguiente intento para recuperar la invarianza de norma es utilizar la identidad de Ward , [16–18, 21, 26–33]. Lo cual nos daría un truncamiento más refinado de la torre de ESD, esta identidad consiste en contraer el vértice de la siguiente manera

$$q_\mu = \Gamma^\mu(k, p) = S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(p), \quad (3.19)$$

con $q = k - p$, esto pues debe existir una cantidad conservada, en nuestro caso la carga, para tener la invarianza de norma.

Para usar esta identidad en nuestra ESD, separamos la ecuación ec. (3.1) en dos partes, una que tendrá la parte del propagador del fotón que no depende de la norma y la otra la cual llevará toda la dependencia, quedando como sigue

$$S^{-1}(p) = S_0^{-1} - \alpha\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma^\mu S(k) \gamma^\nu \Delta_{\mu\nu}^T(k - p) - \alpha\pi\zeta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma^\mu S(k) \Gamma^\nu \frac{q_\nu q_\mu}{q^3}.$$

Nuestra segunda parte de la integral queda como

$$\alpha\pi\zeta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma^\mu S_F(k) \Gamma^\nu \frac{q_\nu q_\mu}{q^3} = -\alpha\pi\zeta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma^\mu \frac{F(k)(\not{k} + M(k))}{k^2 - M^2(k)} (k_\nu - p_\nu) \Gamma^\nu \frac{q_\mu}{q^3}$$

Lo que haciendo uso de la identidad de Ward sería

$$\begin{aligned} & \alpha \pi\zeta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma^\mu \frac{F(k)(\not{k} + M(k))}{k^2 - M^2(k)} (S_F^{-1}(p) - S_F^{-1}(k)) \frac{q_\mu}{q^3} \\ &= \alpha\pi\zeta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\not{q}}{q^3} S_F(k) S_F^{-1}(p) - 0 \\ &= \alpha\pi\zeta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\not{q}}{q^3} \frac{F(k)(\not{k} + M(k))}{k^2 - M^2(k)} \frac{\not{q} - M(p)}{F(p)}. \end{aligned}$$

Haciendo los mismos pasos que hicimos anteriormente llegamos a las expresiones para $M(p)$ y $F(p)$

$$\begin{aligned} \frac{M(p)}{F(p)} = m + & \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^p \frac{dk k^2 F(k) M(k)}{k^2 + M^2(k)} \frac{4k}{k} + \frac{\alpha}{4\pi} \int_p^\Lambda \frac{dk k^2 F(k) M(k)}{k^2 + M^2(k)} \frac{4p}{k} \\ & + \frac{3\alpha\zeta}{4\pi F(p)} \int_0^\Lambda \frac{dk F(k) k^2}{k^2 + M^2(k)} \int_0^\pi \frac{(kp \cos \theta - p^2)(M(k) - M(p))}{[p^2 + k^2 - 2k \cdot p]^{3/2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F(p)} = 1 &+ \frac{\alpha}{2\pi p^2} \int_0^\Lambda \frac{dk k^2 F(k)}{k^2 + M^2(k)} \left[\int_0^\pi \frac{d\theta (p^2 + k^2) k p \cos \theta \sin \theta}{[p^2 + k^2 - 2k \cdot p]^{3/2}} \right. \\
&- \int_0^{\pi i} \frac{d\theta p^2 k^2 \sin \theta}{[p^2 + k^2 - 2k \cdot p]^{3/2}} - \int_0^\pi \frac{d\theta k^2 p^2 \cos^2 \theta \sin \theta}{[p^2 + k^2 - 2k \cdot p]^{3/2}} \left. \right] \\
&+ \frac{3\alpha\zeta}{4\pi F(p)p^2} \int_0^\Lambda \frac{dk F(k) k^2}{k^2 + M^2(k)} \\
&\times \left[\int_0^\pi \frac{p^2 k p \cos \theta - k^2 p^2 - M(k)M(p) k p \cos \theta + M(k)M(p) p^2}{[p^2 + k^2 - 2k \cdot p]^{3/2}} \right],
\end{aligned}$$

donde en las Fig. 3.10 y Fig. 3.11 podemos apreciar las funciones para $M(p)$ y $F(p)$ para un mismo valor de acoplamiento.

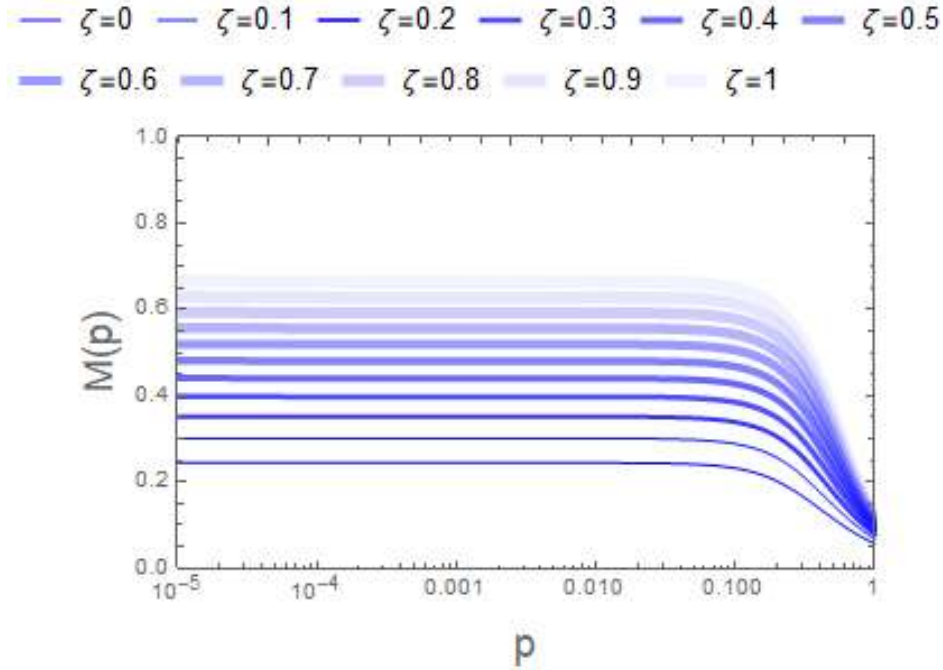


Figura 3.10: Función de masa $M(p)$ con $a = 2$ en distintas normas.

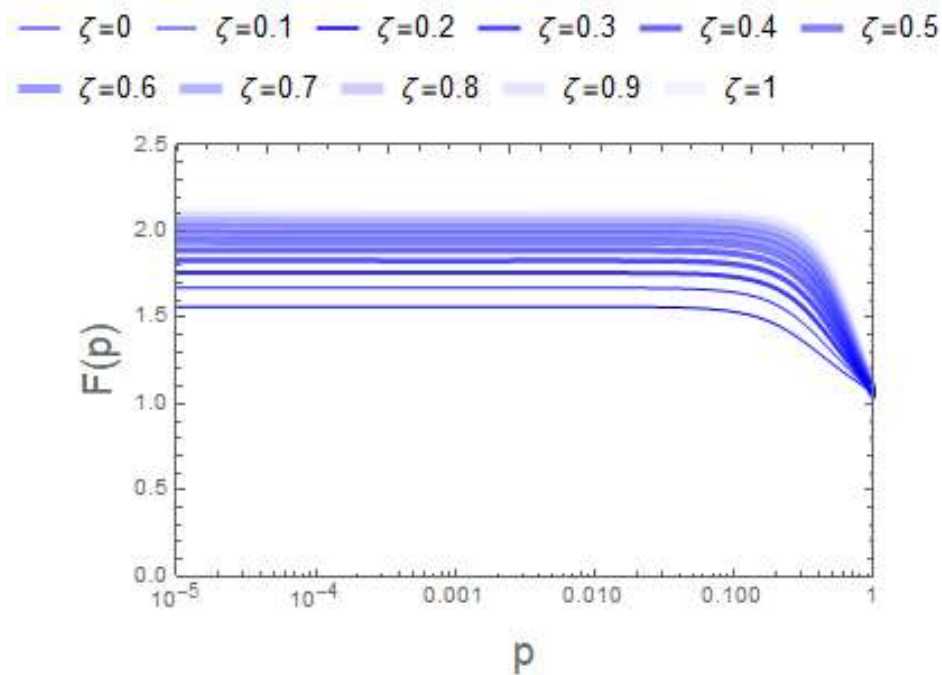


Figura 3.11: Función de renormalización de onda $F(p)$ con $a = 2$ en distintas normas.

En el caso en el cual estamos cerca del valor del acoplamiento crítico tenemos

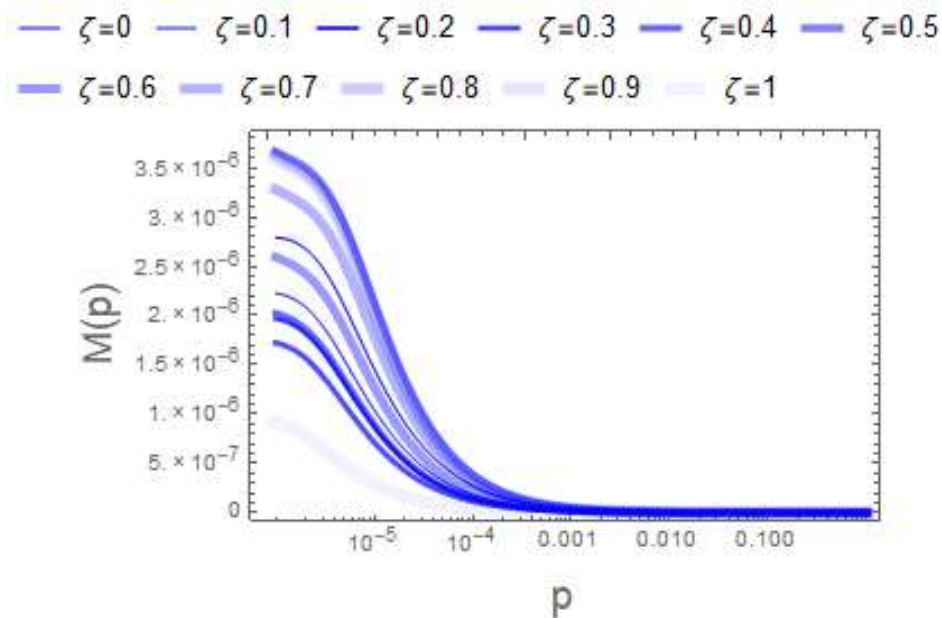


Figura 3.12: Función de masa $M(p)$ con valores cercanos al acoplamiento crítico y distintas normas .

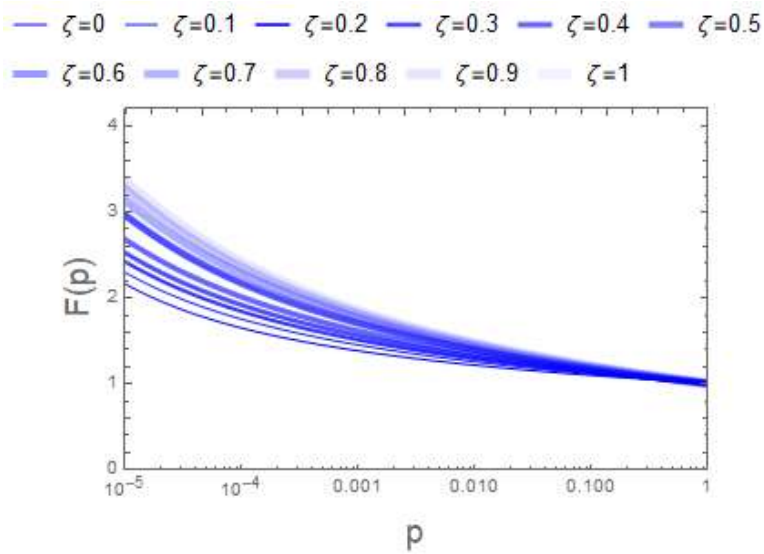


Figura 3.13: Función de renormalización de onda $F(p)$ con valores cercanos al acoplamiento crítico y distintas normas.

En la Fig. 3.14 vemos como se comporta el acoplamiento crítico en varias normas.

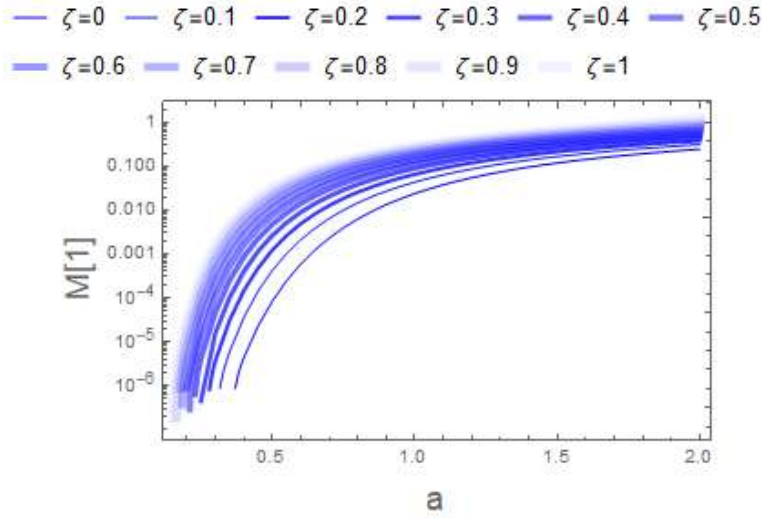


Figura 3.14: Acoplamiento crítico en distintas normas (Caso IW).

En esta gráfica podemos apreciar como la dependencia disminuye pero aún falta más refinamiento al truncar la torre de ESD.

Ahora en lugar de separar nuestra ESD en dos partes, usamos el vértice de Ball y Chiu el cual esta basado en la identidad de Ward y se escribe de la siguiente manera

$$\Gamma_{BC}^{\mu} = \frac{\gamma^{\mu}}{2} \left[\frac{1}{F(k)} + \frac{1}{F(p)} \right] + \frac{1}{2} \frac{(\not{k} + \not{p})(k+p)^{\mu}}{(k^2 - p^2)} \left[\frac{1}{F(k)} - \frac{1}{F(p)} \right] + \frac{(k+p)^{\mu}}{(k^2 - p^2)} \left[\frac{\mathcal{M}(k)}{F(k)} - \frac{\mathcal{M}(p)}{F(p)} \right].$$

Sin embargo para evitar complicaciones numéricas, usaremos solo la parte central de este vértice, la cual es

$$\Gamma_{BC}^{\mu} = \frac{\gamma^{\mu}}{2} \left[\frac{1}{F(k)} + \frac{1}{F(p)} \right]. \quad (3.20)$$

Sustituimos la parte central de este vértice en la ec. (3.2) y seguimos el mismo procedimiento, al final nos quedan las integrales que teníamos cuando consideramos

$F(p) \neq 1$ multiplicadas por $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(k)} + \frac{1}{F(p)} \right]$, teniendo

$$\begin{aligned} \frac{M(p)}{F(p)} &= m + \frac{\alpha}{8\pi} \int_0^p \frac{dk k^2 F(k) M(k)}{k^2 + M^2(k)} \frac{2k[2+z]}{k} \left[\frac{1}{F(k)} + \frac{1}{F(p)} \right] \\ &\quad + \frac{\alpha}{8\pi} \int_p^\Lambda \frac{dk k^2 F(k) M(k)}{k^2 + M^2(k)} \frac{2p(2+z)}{k} \left[\frac{1}{F(k)} + \frac{1}{F(p)} \right] \\ \frac{1}{F(p)} &= 1 + \frac{\alpha}{8\pi p^2} \int_0^\Lambda \frac{dk k^2 F(k)}{k^2 + M^2(k)} \left[\frac{1}{F(k)} + \frac{1}{F(p)} \right] \\ &\quad \times \left[\int_0^\pi \frac{d\theta (2-z)(p^2 + k^2) k p \cos \theta \sin \theta}{[p^2 + k^2 - 2k \cdot p]^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\pi \frac{d\theta 2p^2 k^2 (z-1) \sin \theta}{[p^2 + k^2 - 2k \cdot p]^{3/2}} - \int_0^\pi \frac{2k^2 p^2 \cos^2 \theta \sin \theta}{[p^2 + k^2 - 2k \cdot p]^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

Graficamente, estas ecuaciones para el mismo valor del acoplamiento crítico se ven así

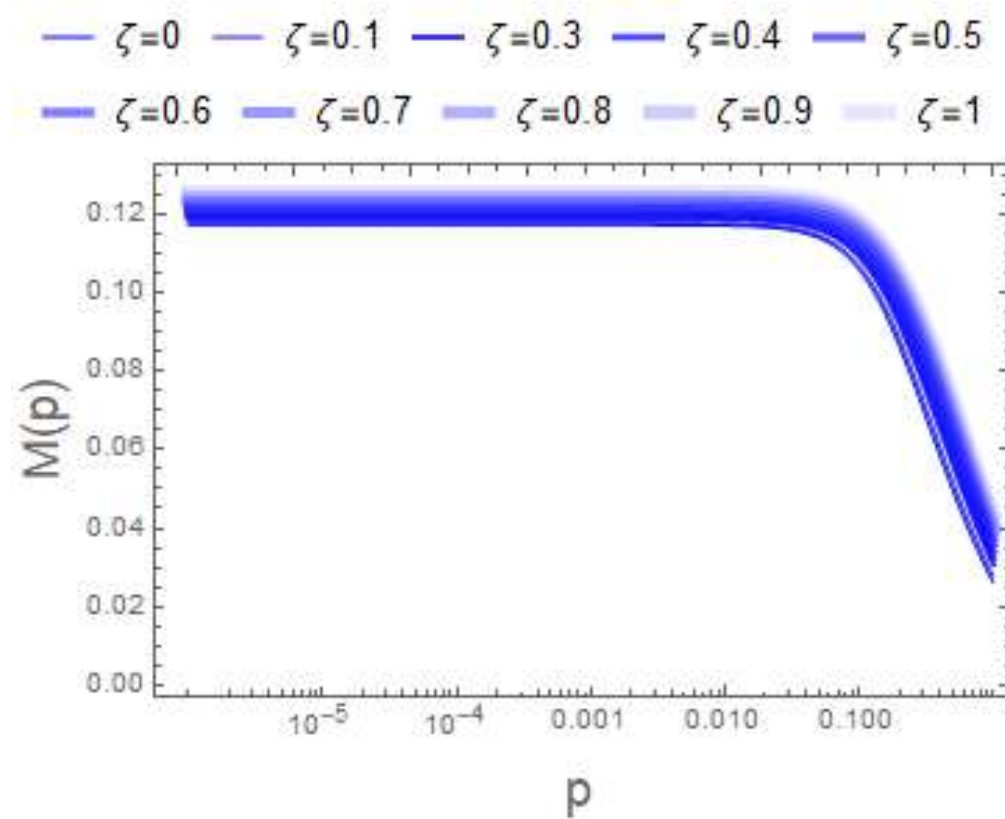


Figura 3.15: Función de masa $M(p)$ con $a = 2$ en distintas normas.

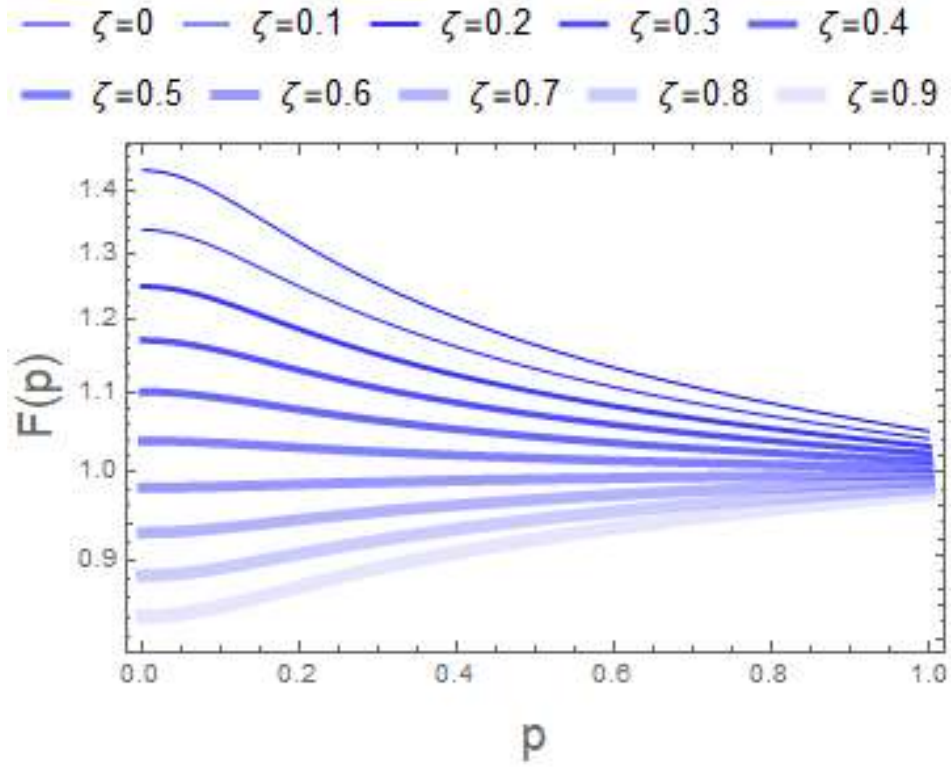


Figura 3.16: Función de renormalización de onda $F(p)$ con $a = 2$ en distintas normas.

Si nos acercamos lo más posible al valor del acoplamiento crítico tenemos

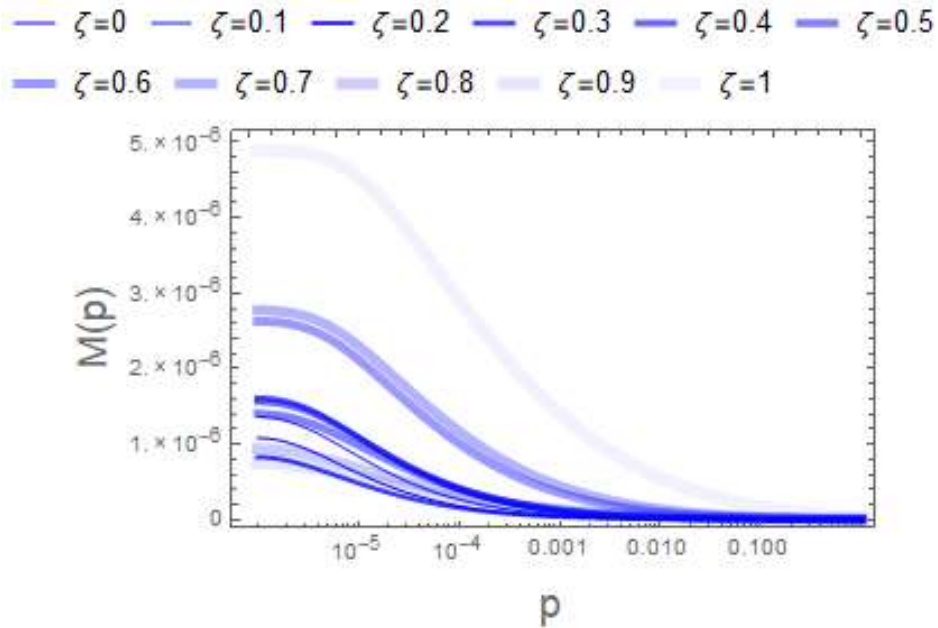


Figura 3.17: Función de masa $M(p)$ con valores cercanos al acoplamiento crítico y distintas normas.

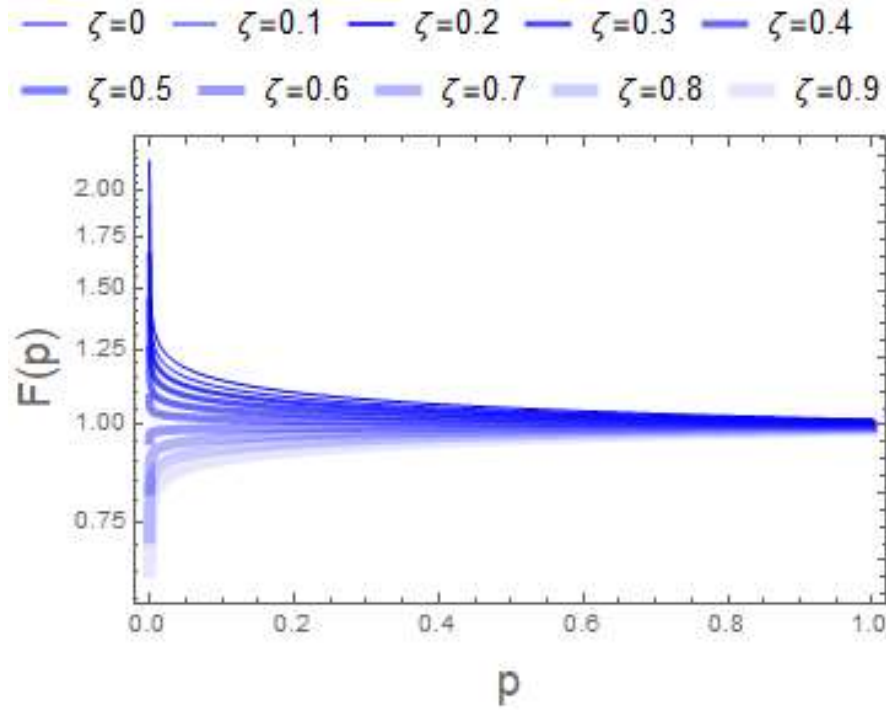


Figura 3.18: Función de renormalización de onda $F(p)$ con valores cercanos al acoplamiento crítico y distintas normas.

En distintas normas el acoplamiento crítico se comporta como sigue

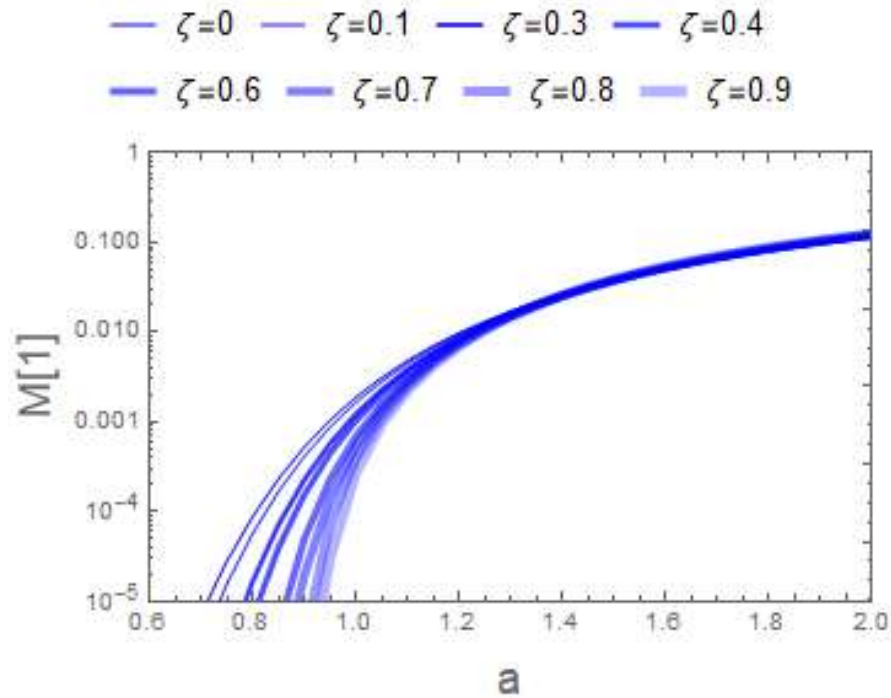


Figura 3.19: Acoplamiento crítico en distintas normas. (Caso parte central vértice de Ball y Chiu)

Podemos apreciar la reducción de la dependencia de norma del acoplamiento. Sin embargo, aún es posible trabajar en el vértice para recuperar la invarianza de norma.

Conclusiones

El principio de invariancia de norma es de suma importancia en la física moderna. Es la clave del entendimiento sobre el origen y naturaleza de las interacciones fundamentales. En esta tesis estudiamos el fenómeno de generación dinámica de masas para la teoría denominada R(P)QED.

En una primera aproximación al resolver las ecuaciones de Schwinger Dyson y basados en los resultados de [5], pudimos notar que si se toman las aproximaciones que indican, se pierde la invariancia de norma y nuestro acoplamiento es altamente dependiente de la misma. Esto motivo a hacer un análisis más detallado relajando las aproximaciones que se habían hecho.

Tomamos la función de renormalización de onda $F(p) \neq 1$ para hacer notar como se afectan los resultados anteriores y pudimos ver que si bien no recuperamos la invariancia de norma, el comportamiento del acoplamiento cambio. Considerando las ecuaciones para $M(p)$ y $F(p)$ lo siguiente a trabajar era en el vértice que tomamos al truncar las ESD. Dejamos la aproximación arcoiris de lado y procedimos a utilizar la identidad de Ward.

Separamos la ecuación para el propagador del fermión en dos partes de las cuales una tendría completamente la dependencia del parámetro de norma, así obtuvimos dos nuevas ecuaciones para $M(p)$ y $F(p)$, resolviendolas vimos que la dependencia de norma disminuyo pero aún no es suficiente. Tomando como base esta experiencia decidimos usar un vértice que cumpliera con la identidad de Ward, por lo que procedimos a usar el vértice de Ball y Chiu.

Para este caso usamos la parte central del vértice de Ball y Chiu. A pesar de que obtuvimos mejorías en el comportamiento del acoplamiento respecto a la norma, es posible trabajar en refinar el truncamiento de las ESD, para recuperar la invariancia de norma. Esto lo haremos como trabajo futuro.

Bibliografía

- [1] K. S. NOVOSELOV ET. AL., Two-dimensional atomic crystals, Proc.Natl Acad. Sci. USA 102, 10451-10453 (2005).
- [2] K. S. NOVOSELOV. The rise of graphene, Nature Materials 6; 183-191 (2007)
- [3] E. C. MARINO, Nucl. Phys. B408, 551 (1993).
- [4] S. TEBER, Phys. Rev. D86, 025005 (2012).
- [5] V. S. ALVES ET. AL., *Chiral symmetry breaking in the pseudo-quantum electrodynamics*, Physical Review D 87 (2013) 125002.
- [6] L.D. LANDAU Y LIFSHITZ. Statistical Physics, (Pergamon, Oxford 1980)
- [7] N.D. MERMIN, Crystalline Order in Two Dimensions, Phys. Rev. 176; 250-254.
- [8] S. AOKI ET. AL., para la colaboración CP-PACS, Phys. Rev. D67 (2003) 034503.
- [9] J. C. WARD, Phys. Rev. 78 (1950) 182.
- [10] E. S. FRADKIN, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 29 (1955) 258.
- [11] E. S. FRADKIN, Sov. Phys. JETP 2 (1956) 361.
- [12] H. S. GREEN, Proc. Phys. Soc. (London) A66 (1953) 873.
- [13] Y. TAKAHASHI, Nuovo Cimento 6 (1957) 371.
- [14] F. J. DYSON, Phys. Rev. 75 (1949) 1736.
- [15] J. S. SCHWINGER, Proc. Natl. Acad. Sci. 37 (1951) 452.
- [16] P. I. FOMIN ET. AL., Riv. Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. 6 (1983) 1.
- [17] V. A. MIRANSKY, Phys. Lett. 165B (1985) 401.
- [18] V. A. MIRANSKY, Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. 90A (1985) 149.
- [19] K. KONDO ET. AL., Phys. Lett. B220 (1989) 270.

- [20] P. MARIS. Phys. Rev. D50 (1994) 4189.
- [21] P. MARIS, Phys. Rev. D 52, (1995) 6087.
- [22] J. S. SCHWINGER, Proc. Natl. Acad. Sci. 37 (1951) 455.
- [23] C. D. ROBERTS & A. G. WILLIAMS, Prog. Part. Nucl. Phys. 33 (1994)v 477.
- [24] D. C. CURTIS & M. R. PENNINGTON, Phys. Rev. D 42 (1990) 4165.
- [25] V. P. GUSYNIN, Mod. Phys. Lett. A05 (1990) 133.
- [26] A. BASHIR & M. R. PENNINGTON, Phys. Rev. D 50 (1994) 7679.
- [27] A. KIZILERSÜ ET. AL., Phys. Rev. D52 (1995) 1242.
- [28] C. J. BURDEN & P. C. TJIANG, Phys. Rev. D58 (1998) 085019.
- [29] A. BASHIR ET. AL. Phys. Rev. D62 (2000) 085002.
- [30] A. BASHIR & A. RAYA, Phys. Rev. D64 (2001) 105001.
- [31] A. BASHIR ET. AL., Phys. Rev. D66 (2002) 025029.
- [32] C. S. FISHER ET. AL., Phys. Rev. D70 (2004) 073007.
- [33] A. KIZILERSÜ & M. R. PENNINGTON, Phys. Rev. D79 (2009) 125020.
- [34] F. J. DYSON, Phys. Rev. 75 (1949) 486.
- [35] B. ROY ET. AL., Phys. Rev. B87 (2013) 041401(R).
- [36] W. A. BARDEEN ET. AL. Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 1230.