



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

CÓDIGO PARA ESTUDIAR LA DINÁMICA DE PLASMAS EN LOS
REGÍMENES IDEAL Y RESISTIVO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA:

RICARDO OCHOA ARMENTA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. FRANCISCO SIDDARTHA GUZMÁN MURILLO



MORELIA MICH.

ABRIL DE 2019

A mi familia

AGRADECIMIENTOS

La realización de este trabajo no hubiera sido posible sin el apoyo del Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular deseo agradecer a mi asesor de tesis, el profesor Francisco S. Guzmán principalmente por haberme apoyado moralmente en todo el proceso de investigación.

El equipo de trabajo del profesor Guzmán ha sido un gran apoyo para poder realizar la investigación en forma y todos y cada uno de los integrantes ha dejado una fuerte impresión en mí de lo que es tener una buena ética de trabajo. Siento mucha admiración, respeto y gratitud por José Juan, Pancho, Chucho y Venecia y deseo que podamos seguir desarrollándonos en la labor de la academia.

Agradezco también a los amigos entrañables que conozco desde los años de licenciatura y que tuve la oportunidad de conocer mejor y con los cuales pude establecer lazos más fuertes, en particular quiero mencionar a Jorge y a Santi.

Deseo agradecer a mis compañeros de maestría y a algunos profesores con los cuales tuve la oportunidad de aprender y discutir temas apasionantes de la física, creo que tenerlos como compañeros enriqueció mi crecimiento y sin duda me gustaría volver a tomar un curso con ellos. Gracias a Goni, Aixa, Misha, y a los profesores Pablo, Cotti y Raya.

Finalmente agradezco a mi familia, que sigue apoyándome e impulsándome a buscar metas más grandes.

Morelia MEX., 1 de abril de 2019

Índice general

Resumen	v
Abstract	vii
1. Introducción	1
2. Sistemas hiperbólicos de ecuaciones diferenciales parciales	5
2.1. Definición de los sistemas hiperbólicos	5
2.2. Curvas Características	6
2.2.1. Sistemas lineales con coeficientes constantes	6
2.2.2. Sistemas lineales con coeficientes variables	8
2.2.3. Ecuación de Burgers	9
2.3. Leyes de conservación	12
2.4. Problema de Riemann	14
2.4.1. Ondas de choque	14
2.4.2. Ondas de Rarefacción	14
2.4.3. Ondas de contacto	15
3. Teoría Cinética de los Plasmas	17
3.1. Plasmas	17
3.1.1. Parámetros de un Plasma	18
3.2. Teoría Cinética	20
3.2.1. Ecuación de Boltzmann	21
3.2.2. Los momentos de la ecuación de Boltzmann	22
3.2.3. Ecuación de Estado Adiabática	23
3.3. Validez de la MHD resistiva	24
4. Ecuaciones de la Magnetohidrodinámica	27
4.1. Ecuaciones de Euler	27
4.1.1. Derivación de las ecuaciones	29
4.1.2. Ley de Conservación de la masa	29
4.1.3. Ley de conservación del momentum	30
4.1.4. Ley de conservación de la energía	30
4.1.5. Ondas Hidrodinámicas	31

4.2.	Ecuaciones de la Magnetohidrodinámica	34
4.2.1.	Ley de Ohm y la Ley de Faraday	35
4.2.2.	Ley de conservación de la masa	36
4.2.3.	Ley de conservación del momentum	36
4.2.4.	Conservación de la Energía	37
4.2.5.	Ondas magnetohidrodinámicas	39
5.	Métodos Numéricos	45
5.1.	Método de líneas	47
5.2.	Volumenes finitos	48
5.2.1.	Metodos Conservativos	48
5.2.2.	Integración inter-celda	50
5.2.3.	Aproximación HLLE	52
5.2.4.	Implementación en 3 dimensiones	54
5.3.	Condiciones de Frontera	56
5.3.1.	Flujo Saliente	56
5.3.2.	Condiciones Periódicas	56
5.4.	Implementación para la MHD	56
5.4.1.	Limpieza hiperbólica de la Divergencia	57
5.4.2.	Velocidades Características	59
6.	Pruebas Numéricas	63
6.1.	Pruebas de la MHD ideal en 1 dimensión	63
6.1.1.	Brio-Wu	64
6.1.2.	Ryu-Jones 1b	64
6.1.3.	Ryu-Jones 2a	65
6.1.4.	Ryu-Jones 3b	66
6.2.	Pruebas de la MHD ideal en 2 dimensiones	67
6.2.1.	Vortice de Orszag-Tang	67
6.2.2.	Rotor	71
6.2.3.	Ondas explosivas MHD	73
6.2.4.	Hoja de Corriente	75
6.2.5.	Inestabilidad Kelvin Helmholtz	76
6.3.	Pruebas de la MHD Resistiva en 1 dimensión	78
6.3.1.	Hoja de Corriente auto-similar	78
6.4.	Pruebas de la MHD Resistiva en 2 dimensiones	80
6.4.1.	Hoja de corriente de Harris	80
7.	Simulaciones numéricas	83
7.1.	Espejos Magnéticos	83
7.1.1.	Dinámica de una partícula cargada en un campo estático y uniforme	83
7.1.2.	Aproximación de Alfvén	85
7.1.3.	Efecto de espejo magnético	89
7.2.	Botellas Magnéticas	90

7.2.1. Ángulo de Paso	90
7.2.2. Modelación de la Botella Magnética	92
7.2.3. Especificaciones de la Simulación	93
7.2.4. Resultados	95
7.3. Campos magnéticos Toroidales	99
7.3.1. Superposición de campos toroidales y poloidales	101
7.3.2. Modelación de la sección transversal del toro	102
7.3.3. Especificaciones de la simulación	103
7.3.4. Resultados	104
8. Comentarios Finales	117

Resumen

En este trabajo se presenta la construcción e implementación de un código, basado en el método de volúmenes finitos, que resuelve las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica en los regímenes ideal y resistivo para velocidades no relativistas en tres dimensiones. Se presenta una descripción tanto de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica como del método numérico que se utiliza para resolverlas. Se discute acerca de qué tipo de plasmas se pueden modelar con este sistema de ecuaciones y las restricciones necesarias para que sea válido el modelo. Posteriormente se presentan algunas pruebas estándar en la literatura para validar la capacidad del código, y finalmente se proponen dos pruebas adicionales que modelan algunos tipos de confinamiento de plasma, se muestran los resultados de la simulación en estos sistemas.

Palabras Clave: Plasmas, Magnetohidrodinámica, Sistemas Hiperbólicos, Física Computacional, Metodos de Volúmenes finitos.

Abstract

In this work I show the construction and implementation of a code, based on finite volume methods, that solves the Magnetohydrodynamic equations in the ideal and resistive regimes for non-relativistic velocities. Next, a description of the magnetohydrodynamic equations and the numerical model used to solve them is presented. Later I elaborate on the kind of plasmas that are adequate to be modelled with this system of equations and the necessary restrictions to be imposed on the plasma in order to make an accurate representation of the plasma phenomena. After that I present some standard tests found in literature and the results of running the code with them. Finally I propose two additional tests that model plasma confinement, and then the results of the simulation are shown.

Keywords: Plasma, Magnetohydrodynamics, Hyperbolic Problems, Computational Physics, Finite Volume Methods.

Capítulo 1

Introducción

Un plasma es primero que nada un gas que ha sido ionizado hasta presentar ciertas características particulares¹, dentro de las más importantes está la de permitir un flujo de corriente eléctrica con poca resistencia y que macroscópicamente es una sustancia neutra.

La descripción de los plasmas es un tema cautivante debido a que muchas disciplinas físicas se utilizan para poder representar y modelar de manera adecuada los distintos fenómenos en los que se encuentran. Resulta interesante que una de las descripciones más utilizada para describir los plasmas, que es la que se utilizó para esta tesis, se basa fuertemente en física que modela fluidos conductores, utilizando las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de Euler, que son sistemas de ecuaciones que existen desde el siglo XIX. No obstante, aún utilizando este modelo, la física de plasmas evoluciona debido a que es un sistema altamente complejo en el que suceden procesos radiativos, fenómenos de transporte, fenómenos cuánticos, por mencionar algunos, que requieren de un amplio acervo y enfoque multidisciplinario (Van Dijk et al., 2009).

El estudio de procesos físicos que involucren plasmas tiene su origen a principios del siglo XX. Fue Irving Langmuir la primera persona en acuñar el término *plasma*² refiriéndose a ciertos tipos de gases ionizados, al observar dentro de las lámparas de arco de mercurio, que la estructura del gas, una vez alcanzado cierto grado de ionización, se parecía mucho a una sustancia moldeable o gelatinosa. No pasó mucho tiempo para que se observara que se tienen plasmas en diversas situaciones, por ejemplo en fenómenos astrofísicos o termonucleares, y actualmente muchas de las herramientas tecnológicas que se basan en fenómenos de plasmas necesitan de la teoría que describe este tipo de sistemas.

Dentro de la física, existe una división entre la parte teórica y la parte experimental para estudiar un fenómeno particular y ambas partes actúan en conjunto con la física computacional para describir ciertas características del sistema. En las últimas décadas la simulación numérica se vuelve indispensable para diagnosticar al plasma, en especial en situaciones donde hacer medidas directas es un proceso costoso o difícil de implementar.

Debido a que modelar a un plasma con todas sus características es una tarea poco práctica y a veces imposible, tanto del punto de vista teórico como computacional, existen diversos métodos

¹Los criterios actuales que existen para que se considere que el grado de ionización es suficiente para que el gas sea un plasma se presentan en el capítulo 3.

²(Goldston and Rutherford, 1995)

numéricos que se utilizan para diferentes situaciones idealizadas del plasma. Una vez escogido el modelo teórico adecuado, se puede escoger un método numérico que permita hacer simulaciones correspondientes para observar las características de interés en el plasma. En esta tesis se presentan las restricciones suficientes para poder modelar un plasma utilizando las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD) en el régimen ideal y resistivo para sistemas no relativistas. Cabe mencionar que éstas restricciones también se cumplen para extensiones y variaciones al sistema de ecuaciones, por ejemplo incluyendo flujos de calor o la ley de Ohm generalizada, que consideran situaciones que pueden hacer más complejo el modelado numérico, pero más apegado a la dinámica del plasma.

El método numérico presentado en esta tesis es de la clase de elementos finitos, y recibe el nombre de volúmenes finitos. La aplicación de volúmenes finitos es natural para leyes de conservación, ya que involucra la interpretación física del problema para poder obtener la evolución del sistema.

Volúmenes finitos es adecuado para modelar escenarios en los cuales el plasma no es estacionario; como es el caso de fenómenos astrofísicos, desde la magnetosfera de la tierra o eyecciones solares hasta dinámica de galaxias; para jets de plasmas, como es el caso de los propulsores de Hall, entre otros. Para el caso en el cual se tienen sistemas cuasi estacionarios, como los presentes en las aplicaciones de confinamiento de plasmas, se hace la aproximación de ecuaciones diferenciales parciales elípticas (Jardin, 2010), que se resuelven de una manera mas adecuada, en el sentido de que se pueden observar mejor las características de los sistemas estables, con otro tipo de métodos numéricos; sin embargo es posible modelar sistemas en los cuales se alcanza la estabilidad con volúmenes finitos.

En esta tesis se presenta la construcción de un código capaz de resolver las ecuaciones de la MHD en tres dimensiones, basado en el trabajo de (Gonzales-Aviles, 2017) y las pruebas realizadas para validar el campo de acción del método. Las pruebas presentadas modelan fenómenos dinámicos del plasma, no obstante se desea mostrar que también se pueden simular los sistemas cuasi-estáticos de una manera adecuada, es así que en este trabajo se presentan dos pruebas numéricas adicionales enfocadas en buscar la localización del plasma utilizando configuraciones de campo magnético con simetrías específicas. Estas pruebas numéricas no se encuentran presentes en la literatura y la construcción de los campos magnéticos iniciales fue hecha a la medida para obtener los resultados esperados según los textos (Gurnett and Bhattacharjee, 2005) y (Bittencourt, 2013). A continuación se menciona la estructura de la tesis:

En el segundo capítulo se discute acerca de la naturaleza de los sistemas hiperbólicos de ecuaciones de derivadas parciales, con el enfoque de presentar el significado de las leyes de conservación y mostrar el tipo de sistemas se pueden modelar.

En el tercer capítulo se habla acerca de la teoría cinética de los plasmas para poder establecer las escalas, parámetros y tipo de plasmas que se pueden modelar con las ecuaciones de la magnetohidrodinámica.

En el cuarto capítulo se muestra una construcción de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica y se muestran los tipos de ondas presentes en los plasmas descritos con este modelo. Estas ondas se encuentran presentes en la construcción del método numérico.

En el quinto capítulo se habla de la construcción del método de volúmenes finitos y la implementación para las ecuaciones de la magnetohidrodinámica, se presenta además un método para mantener la divergencia del campo magnético cercana a cero durante las simulaciones.

En el sexto capítulo se muestran los resultados de implementar el código en pruebas estándar

de la literatura en una y dos dimensiones espaciales para regímenes ideal y resistivo de la MHD. Se discuten los resultados obtenidos y se contrastan con los resultados esperados según las especificaciones de la prueba.

En el séptimo capítulo se proponen dos pruebas adicionales basadas en situaciones de confinamiento esquemáticas mostradas en los textos introductorios al estudio de la física de plasmas (Gurnett and Bhattacharjee, 2005) y (Bittencourt, 2013). Finalmente se discute acerca del resultado de la implementación y de posibles extensiones del trabajo.

Capítulo 2

Sistemas hiperbólicos de ecuaciones diferenciales parciales

Las ecuaciones de la magnetohidrodinámica, que son las que se utilizarán para describir a los plasmas en esta tesis, son un sistema hiperbólico de ecuaciones diferenciales parciales. Para poder trabajar con ellas y para construir el método numérico que las resuelva aproximadamente, es importante conocer un poco del trasfondo matemático de este tipo de sistemas.

En este capítulo se presentan las características de los sistemas hiperbólicos de ecuaciones diferenciales parciales. Se presenta el concepto las curvas y velocidades características y su relevancia en la construcción de las soluciones al sistema; se hacen las especificaciones del tipo de ondas que se propagan con las velocidades características; se presenta también la ecuación de Burgers como un ejemplo de un sistema hiperbólico en el caso unidimensional y escalar; se muestra la conexión entre los sistemas hiperbólicos y las leyes de conservación para sistemas físicos y finalmente se presenta una clasificación de las ondas que se generan en los sistemas hiperbólicos con condiciones iniciales de un problema de Riemann.

2.1. Definición de los sistemas hiperbólicos

Un sistema hiperbólico de ecuaciones diferenciales parciales es primero un *sistema lineal* de ecuaciones diferenciales parciales, por ejemplo, para el caso unidimensional, un sistema lineal tiene la forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, t, u_1, \dots, u_m) \frac{\partial u_j}{\partial x} + b_i(x, t, u_1, \dots, u_m) = 0 \quad (2.1)$$

con $i = 1, \dots, m$. Este sistema tiene m ecuaciones y m incógnitas u_i que dependen de las variables x y t ¹. Es posible escribir el sistema (2.1) en forma matricial como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right] + \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

con

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix}$$

Si las entradas a_{ij} de la matriz \mathbf{A} y las componentes b_i del vector \mathbf{B} son constantes, entonces el sistema (2.2) es *lineal con coeficientes constantes*. Si $a_{ij} = a_{ij}(x, t)$, $b_j = b_j(x, t)$ el sistema es *lineal con coeficientes variables*. El sistema es cuasilineal si los coeficientes de la matriz \mathbf{A} dependen del vector \mathbf{U} , es decir $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{U})$.

El sistema en (2.2) se llama *hiperbólico* en el punto (x, t) si \mathbf{A} tiene m eigenvalores reales $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ y un conjunto correspondiente de m eigenvectores linealmente independientes $\mathbf{K}^{(1)}, \dots, \mathbf{K}^{(m)}$. El sistema es *estrictamente hiperbólico* si los λ_i son distintos.

2.2. Curvas Características

Para poder construir una solución a (2.1) se utilizan las *curvas características*. Para demostrar su implementación y significado se presenta el ejemplo en el que el sistema de ecuaciones es homogéneo, es decir, en el que $\mathbf{B} = 0$, con condiciones iniciales \mathbf{U}_0 :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) = 0 & -\infty < x < \infty, t = 0 \\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x) \end{cases} \quad (2.3)$$

Las curvas características son curvas en el plano $(x-t)$ sobre las cuales el sistema se convierte en un sistema de ecuaciones parciales desacoplado, es decir, un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

2.2.1. Sistemas lineales con coeficientes constantes

A manera de ilustrar la obtención de curvas características en el caso en que los coeficientes de (2.3) sean constantes, se analizará el problema unidimensional:

¹Cuando se tienen más dimensiones espaciales, la definición de sistemas hiperbólicos es una extensión natural a (2.1) y (2.2) simplemente sumando las derivadas parciales con respecto al resto de las variables con sus respectivos coeficientes y notando que las entradas de \mathbf{B} dependen ahora de más variables y que existiera una matriz similar a \mathbf{A} adicional para cada variable. Sin embargo, para la introducir las definiciones de los sistemas hiperbólicos es suficiente analizar los sistemas lineales unidimensionales dados, bien sea por (2.1), ó por (2.2).

$$\begin{cases} u_t + a(u_x) = 0 & -\infty < x < \infty, t = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (2.4)$$

A esta problema se le conoce como la ecuación de advección.

La tasa de cambio de u con respecto al tiempo sobre la curva $x(t)$ es

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x},$$

se toma ahora una curva específica que satisfaga

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad (2.5)$$

entonces se sigue, usando (2.4), que

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Por lo tanto, integrando (2.5), se tiene que u es constante sobre la curva $x = at + x_0$ y así

$$u(x, t) = u_0(x_0) = u_0(x - at).$$

En este ejemplo, resolver la ecuación diferencial ordinaria (EDO) para una curva característica (2.5) resulta en una familia de curvas que determinan la solución completa. Visto de otra manera, las curvas características sirven, para saber como se propagarán los datos iniciales $u(x_0)$.

Esquemáticamente esto se representa en la Figura 2.1.

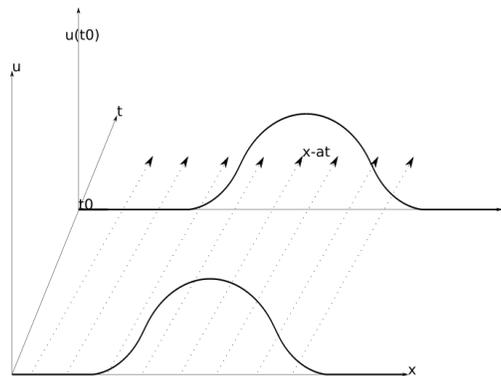


Figura 2.1: Comportamiento de la solución a la ecuación de advección

Ahora bien, una estrategia para encontrar las curvas características a (2.3), en el caso en que \mathbf{U} sea un vector, es a través de la diagonalización de la matriz \mathbf{A} . Al diagonalizar la matriz se pueden encontrar velocidades de propagación similares a (??) de manera que se obtenga una familia de curvas para cada velocidad de propagación. La construcción de la solución será entonces rastreando los punto de donde se propaga la información para cada curva espacio temporal para cada componente

del vector \mathbf{U} . El proceso para construir la solución de esta manera se muestra a continuación.

Si \mathbf{A} es una matriz diagonalizable, existe una matriz $\mathbf{\Lambda}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{K}\mathbf{\Lambda}\mathbf{K}^{-1}$, donde

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = [\mathbf{K}^1, \dots, \mathbf{K}^m]$$

donde \mathbf{K}^i es el eigenvector asociado al eigenvalor λ_i .

Al definir un vector \mathbf{W} como $\mathbf{W} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{U}$ ó $\mathbf{U} = \mathbf{K}\mathbf{W}$ se tiene que al aplicar \mathbf{K}^{-1} a (2.3) resulta en

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{\Lambda}\mathbf{W}_x = 0, \quad (2.6)$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales desacoplado

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.7)$$

donde w_i es la i -ésima componente del vector w .

Al sistema (2.7) le corresponden una familia de curvas características que satisfacen las EDO

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i \quad x(0) = x_0 \quad (2.8)$$

para $i = 1, \dots, m$. Entonces para cada w_i existe una solución exacta dada por

$$w_i(x) = w(\lambda_i t + x_0)$$

Construir la solución para \mathbf{U} consiste simplemente en aplicar \mathbf{K} al vector \mathbf{W} .

Una de las implicaciones de esto es que se tienen cantidades w_i que se propagan a velocidades independientes λ_i . Esta característica es importante a la hora de interpretar el significado físico de las velocidades características.

2.2.2. Sistemas lineales con coeficientes variables

Para estudiar el sistema (2.3) en el caso en que los coeficientes de \mathbf{A} sean variables (que dependen de \mathbf{U}), primero se analizará el caso de un problema escalar:

$$u_t + \lambda(u)u_x = 0. \quad (2.9)$$

La ecuación de curvas características es

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(u), \quad x(0) = 0, \quad (2.10)$$

que implica soluciones similares al problema (2.5):

$$u(x, t) = u(x_0).$$

Es conveniente, entonces, evaluar la pendiente λ en $u_0(x_0)$ y sustituyendo en (2.10) se obtiene al integrar

$$x = x_0 + \lambda(u_0(x_0))t, \quad (2.11)$$

y así la solución completa es

$$u(x, t) = u_0(x - \lambda(u_0(x_0))t). \quad (2.12)$$

En el caso no escalar ($m > 1$) del problema (2.3), la solución se obtiene de manera similar, es decir, desacoplando exactamente igual que en (2.10) con \mathbf{W} definido como en (2.6).

Debido a la estructura de la ecuación de las curvas características, a los $\lambda_{(i)}^u$ se les percibe como velocidades de propagación de una onda, además, a causa de su dependencia de u , se genera un campo de velocidades distintas, al cual se le conoce como *campo de velocidades característico* λ_i .

2.2.3. Ecuación de Burgers

Una observación importante es que si $\lambda(u)$ no es constante (respecto a u), el perfil de la función al propagarse no será constante, como en el caso de λ constante. Por ejemplo, si $\lambda(u_0(x_1)) > \lambda(u_0(x_2)) > 0$, la información producida en x_1 se propagará más rápido que la de x_2 . En este mismo ejemplo, si $x_1 < x_2$, se formarán choques de información (se les conoce como *shockwave*), es decir, hay un tiempo t en el cual las curvas características se intersectan. A partir de este choque, el tratamiento de la solución tiene que ser distinto pues ya no es posible rastrear la solución en (x, t) con una sola curva característica.

Es muy ilustrativo observar el comportamiento de la ecuación de Burgers:

$$u_t + uu_x = 0 \quad (2.13)$$

ó escrito de otra forma

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (2.14)$$

con $f = \frac{1}{2}u^2$, con condiciones iniciales $u(x, 0) = u_0(x)$, $u_0''(x) < 0$.

En este caso, debido a que $\lambda = u$ las curvas características tendrán la forma

$$x = x_0 + u_0(x)t. \quad (2.15)$$

En este ejemplo es fácil ver que el perfil de la función tiende a ensancharse para las regiones en las cuales u es creciente y a acortarse en las regiones donde u es decreciente, como puede observarse en la Figura 2.2. Es así que eventualmente al evolucionar en el tiempo, se producirá una discontinuidad en la solución.

Por este tipo de comportamientos, es muy ilustrativo estudiar sistemas de ecuaciones con condiciones iniciales discontinuas.

$$u_0(x) = \begin{cases} u_L & x < 0 \\ u_R & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

con u_L, u_R constantes.

Para este problema se podría pensar que el campo característico i solo consta de dos velocidades, $\lambda_i(u_L)$ y $\lambda_i(u_R)$, pero no es así, enseguida se analizan los diferentes tipos de velocidades que pueden

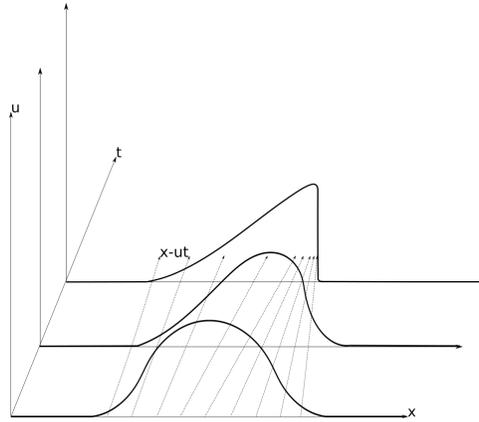


Figura 2.2: Comportamiento de la solución de la ecuación de Burgers. En este caso hay un punto en el cual las curvas características se intersectan y es en este punto donde se produce una discontinuidad.

presentarse.

Caso 1 $u_L > u_R$

En este caso, los datos que están a la izquierda de la discontinuidad se transmitirán con una velocidad u_L y los que están a la derecha con una velocidad u_R ; surge la pregunta de cómo es que se transmitirá la información en la discontinuidad.

Supóngase que la velocidad con la que se transporta la discontinuidad es S . Entonces se tiene que cumplir que la solución es

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & x < S t \\ u_R & x > S t \end{cases}, \quad (2.17)$$

además se debe satisfacer la *condición de entropía*, que establece que la velocidad de propagación del lado izquierdo sea mayor que la del derecho y que la velocidad con la que se propaga la discontinuidad esté en un valor intermedio:

$$\lambda(u_L) > S > \lambda(u_R). \quad (2.18)$$

Esta relación se debe cumplir debido a que en el caso de la ecuación de Burgers $\lambda(u) = u$. Una representación esquemática de esta situación se presenta en la Figura 2.3. En esta figura se observa que el perfil de la función u permanece constante mientras se desplaza la discontinuidad con la velocidad S .

Integrando la ecuación (2.14) en la coordenada x sobre el dominio $[x_L, x_R]$, e intercambiando derivadas e integrales, resulta en

$$f(u(x_L, t)) - f(u(x_R, t)) = \frac{d}{dt} \left[\int_{x_L}^{x(t)} u(\xi, t) d\xi + \int_{x(t)}^{x_R} u(\xi, t) d\xi \right],$$

por otra parte, usando la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{x_L}^{x(t)} u(\xi, t) d\xi \right] = \int_{x_L}^{x(t)} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} d\xi + u(x(t), t) \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{x(t)}^{x_R} u(\xi, t) d\xi \right] = \int_{x(t)}^{x_R} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} d\xi - u(x(t), t) \frac{dx(t)}{dt},$$

tomando $x(t)$ como la posición de la discontinuidad se obtiene

$$f(u(x_L, t)) - f(u(x_R, t)) = [u(x_l(t), t) - u(x_r(t), t)] S$$

$$+ \int_{x_L}^{x(t)} u_t(\xi, t) d\xi + \int_{x(t)}^{x_R} u_t(\xi, t) d\xi,$$

donde $u(x_l(t), t)$ es el límite cuando u se acerca a $u(x(t), t)$ por la izquierda y $u(x_r(t), t)$ cuando es por la derecha. Haciendo el límite cuando $x_L \rightarrow x(t)$ y $x_R \rightarrow x(t)$ se cancelan las integrales, se obtiene entonces la *condición de Rankine-Hugoniot*:

$$f(u(x_L, t)) - f(u(x_R, t)) = [u(x_L, t) - u(x_R, t)] S. \quad (2.19)$$

De esta manera se obtiene para los problemas escalares y en el caso particular de la ecuación de Burgers

$$S = \frac{\Delta f}{\Delta u},$$

donde $\Delta f = f(u(x_L, t)) - f(u(x_R, t))$, $\Delta u = u(x_L, t) - u(x_R, t)$.

Explícitamente, la velocidad de propagación de la discontinuidad (velocidad de choque) en este caso es

$$S = \frac{1}{2}(u_L + u_R). \quad (2.20)$$

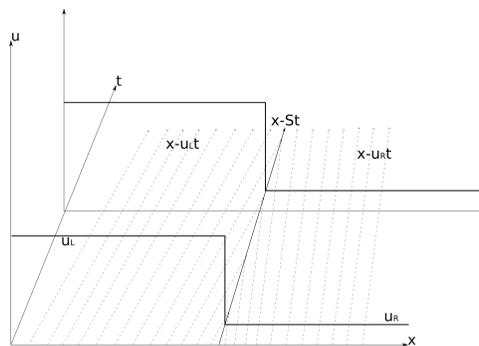


Figura 2.3: La velocidad de propagación de la discontinuidad se obtiene de la condición de Rankine-Hugoniot

Caso 2 $u_L < u_R$

En este caso una solución matemática aceptable es la misma que (2.17), no obstante esta solución es físicamente inaceptable, pues la discontinuidad no surge debido a una compresión ($\lambda(u_L) < \lambda(u_R)$) las velocidades características divergen de la discontinuidad. A esta solución se le llama *shock de rarefacción* ó *shock* que viola la entropía, debido a que no satisface la condición (2.18).

Otra de las características por las cuales es inadmisibles un *shock de rarefacción* es debido a que pequeñas alteraciones al problema hacen que la solución diverja ampliamente, el sistema es inestable. Se analizará este escenario a continuación.

Supóngase que las condiciones iniciales de (2.16) se modifican ligeramente

$$u_0(x) = \begin{cases} u_L & x < x_L \\ u_L + \frac{u_R - u_L}{x_R - x_L}(x - x_L) & x_L < x < x_R \\ u_R & x > x_R \end{cases} \quad (2.21)$$

Se observa que ya no es posible obtener la solución dada por (2.17) ya que el perfil de la onda tiende a achatarse y realmente deja de existir un choque. Este comportamiento se representa en la Figura 2.4. La solución a (2.21) se obtiene nuevamente al seguir las velocidades características que surgen en $t = 0$. La solución consiste en dos velocidades $\lambda(u_L) = u_L$ y $\lambda(u_R) = u_R$ seguidas por una transición suave de velocidades. A este tipo de solución se le conoce como *Onda de Rarefacción*.

La solución completa para este problema será entonces

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \frac{x - x_L}{t} \leq u_L \\ \frac{x - x_L}{t} & u_L \leq \frac{x - x_L}{t} \leq u_R \\ u_R & u_R \leq \frac{x - x_L}{t} \end{cases}$$

Haciendo el mismo proceso límite que en el caso anterior ($x_L \rightarrow 0 \leftarrow x_R$) se obtiene la solución para las condiciones iniciales (2.16):

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \frac{x - x_L}{t} \leq u_L \\ \frac{x}{t} & u_L \leq \frac{x}{t} \leq u_R \\ u_R & u_R \leq \frac{x}{t} \end{cases} \quad (2.22)$$

que se conoce como *onda de rarefacción centrada*. El caso límite se puede interpretar como sigue: $u_0(x)$ toma todos los valores entre u_L y u_R , consecuentemente las velocidades características toman todos los valores entre $\lambda(u_L)$ y $\lambda(u_R)$

La solución exacta y también la generalización de la ecuación de Burgers en dos dimensiones se encuentra en (LeVeque, 2002).

2.3. Leyes de conservación

En la física, muchas propiedades de un sistema se obtienen gracias a leyes que gobiernan la naturaleza, algunas de estas leyes manifiestan cantidades conservadas importantes para su descripción,

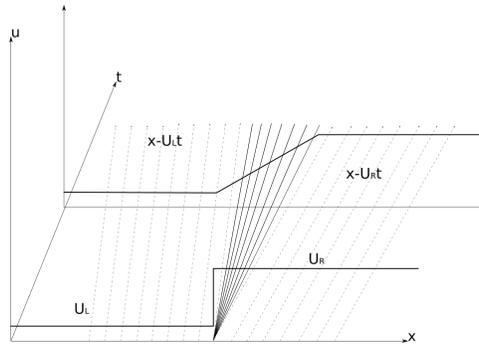


Figura 2.4: Cuando se presenta una onda de rarefacción, se crea un abanico de velocidades características entre la velocidad menor y mayor, que resulta en que la discontinuidad inicial se suaviza y desaparece.

por ejemplo, la ley de conservación de la masa, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$.

Una de las formas más generales en las cuales se presentan las leyes de conservación es

$$\mathbf{U}_t + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0, \quad (2.23)$$

que en el caso en el que el problema se pueda definir solamente en una dimensión se toma como

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0, \quad (2.24)$$

a la función $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ se le denomina a como el *flujo de las variables conservativas*.

Aplicando la regla de la cadena en la ecuación (2.24) se obtiene

$$\mathbf{U}_t + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U}_x = 0. \quad (2.25)$$

Entonces, dada una colección de leyes de conservación, se dice que el sistema es hiperbólico si la matriz Jacobiana

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$$

satisface los criterios de hiperbolicidad.

Para un dominio cerrado $[x_L, x_R] \times [t_1, t_2]$ es posible expresar las leyes de conservación en forma integral

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{U}(x, t_2) dx = \int_{x_L}^{x_R} \mathbf{U}(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_L, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_R, t)) dt \quad (2.26)$$

que se derivan directamente de la física del sistema. Esta forma de las leyes de conservación facilita el trabajo numérico para aproximar la solución cuando se presentan discontinuidades.

En el caso de que las leyes de conservación no se sostengan, es posible realizar modelos conservativos al agregar un término externo \mathbf{S} a una ley de conservación

$$\mathbf{U}_t + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}, \quad (2.27)$$

este término externo puede representar fuerza o fenómenos en los cuales haya transferencia de energía externa.

2.4. Problema de Riemann

Es de interés para los métodos numéricos observar el comportamiento de los campos de velocidades característicos para un problema de condiciones iniciales específicas:

$$\mathbf{U}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & x < 0 \\ \mathbf{U}_R & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

con $\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R$ constantes.

En este problema, al igual que para la ecuación de Burgers, asumiendo que $\mathbf{U}_L \neq \mathbf{U}_R$, se presentarán distintos tipos de ondas dentro del campo característico de velocidades.

2.4.1. Ondas de choque

Para la i -ésima cantidad conservada, en el campo de velocidades características se obtendrán, al igual que en la ecuación de Burgers, dos velocidades constantes $\lambda^{(i)}(\mathbf{U}_L), \lambda^{(i)}(\mathbf{U}_R)$, y una velocidad sobre la cual se propaga la discontinuidad S_i , conocida como velocidad de onda de choque. Para esto se tienen que cumplir las siguientes condiciones

1. El campo característico es un campo genuinamente no lineal:

$$\mathbf{K}^{(i)} \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \lambda^{(i)}(\mathbf{U}) \neq 0; \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^m. \quad (2.29)$$

2. Condiciones de Rankine-Hugoniot:

$$F(\mathbf{U}_R) - F(\mathbf{U}_L) = S_i(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L). \quad (2.30)$$

3. Condición de no violación de la Entropía:

$$\lambda_i(\mathbf{U}_L) > S_i > \lambda_i(\mathbf{U}_R). \quad (2.31)$$

a

2.4.2. Ondas de Rarefacción

En el campo de velocidades características, al igual que en la ecuación de Burgers, se obtendrán además de las dos velocidades características $\lambda_i(\mathbf{U}_L), \lambda_i(\mathbf{U}_R)$, un conjunto de velocidades que producirá una transición suave entre estas dos velocidades. A este conjunto se le conoce como onda de rarefacción; debido a que $\lambda_i(\mathbf{U}_R)$ es mayor, se le conoce como onda a la cabeza y a $\lambda_i(\mathbf{U}_L)$ como onda cola; a todas las velocidades intermedias se les llama abanico de rarefacción.

Las condiciones para ser onda de rarefacción son

1. No se satisface la ecuación (??), es decir que existe violación de la entropía:

$$\lambda_i(\mathbf{U}_L) < \lambda_i(\mathbf{U}_R). \quad (2.32)$$

2. El campo es linealmente degenerado:

$$\mathbf{K}^{(i)} \cdot \nabla_u \lambda^i(\mathbf{U}) = 0; \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^m. \quad (2.33)$$

En el caso de las ondas de rarefacción se cumple un conjunto de relaciones que se conoce como invariantes generalizados de Riemann:

$$\frac{dw_1}{dK_1^{(i)}} = \dots = \frac{dw_m}{dK_m^{(i)}} \quad (2.34)$$

donde w_j y $K_j^{(i)}$ están definidos como en (2.6).

2.4.3. Ondas de contacto

Este tipo de ondas no está presente en la ecuación de Burgers, y está asociada a una velocidad característica λ_i . Se deben cumplir las siguientes condiciones.

1. El campo de velocidades es linealmente degenerado, como en (2.33).
2. Las velocidades características son iguales

$$\lambda_i(\mathbf{U}_L) = \lambda_i(\mathbf{U}_R) = S_i. \quad (2.35)$$

donde S_i es la velocidad de la discontinuidad.

3. Se cumplen las condiciones de Rankine-Hugoniot, como en (2.30)

De la misma manera que en las ondas de rarefacción se satisfacen las relaciones de invariantes generalizados de Riemann (2.33).

En este capítulo se presentó una descripción de los sistemas hiperbólicos de ecuaciones diferenciales parciales. Estos sistemas son importantes pues con ellos se pueden modelar algunas leyes de conservación que representan situaciones físicas. Se presentó en particular el problema de Riemann que consiste en un sistema hiperbólico con condiciones iniciales discontinuas y se describió el tipo de onda que puede generarse al considerar las velocidades características del sistema.

Existen tres motivaciones para poner énfasis en las soluciones del problema de Riemann, la primera es que las ecuaciones de la hidrodinámica son un sistema hiperbólico de ecuaciones que describen la dinámica de un gas y en las cuales se tiene la solución exacta para el problema de Riemann, la segunda es que para las ecuaciones de la magnetohidrodinámica, el problema de Riemann también ayuda a estudiar la estructura hidrodinámica de un plasma y la última motivación es que el método numérico en el que se basó el código de este trabajo, que resuelve las ecuaciones de la magnetohidrodinámica, se basa en la estructura de las soluciones del problema de Riemann para sistemas hiperbólicos.

Antes de hacer un análisis de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica, en el siguiente capítulo se hará una descripción de los plasmas y de las escalas en las cuales está bien planteado el modelo matemático del sistema.

Capítulo 3

Teoría Cinética de los Plasmas

Cuando se habla acerca de plasmas, coloquialmente se menciona que es el cuarto estado de la materia, pues el mecanismo de ionización más difundido consiste en que al aumentar la temperatura de un gas, se consigue un alto grado de ionización. Cabe mencionar que este no es en realidad otro estado de la materia, ya que no existe una transición de fase en a partir de la cual un gas se considere plasma. Más aún, existen otras configuraciones de partículas en las cuales existen fenómenos que están asociados a los plasmas, por ejemplo se habla desde hace tiempo de plasmas en estado sólido (Jonscher, 1964) y esto se debe a que los fenómenos asociados a los plasmas no son inherentes a la estructura gaseosa de la materia. Para poder hablar acerca de los plasmas, entonces se tiene que tener de manera precisa a qué tipo de sustancias se está refiriendo.

En este capítulo se presenta específicamente las características de un sistema que se denomine como plasma, y como en cualquier descripción de una sustancia, cuáles son los tipos de parámetros medibles, y las escalas sobre las cuales está definido el plasma. También se presenta una breve descripción de la teoría cinética de los plasmas para representar su carácter macroscópicamente neutro, así como para establecer el rango de validez de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica en los regímenes ideal y resistivo que se presentarán en el capítulo 4.

3.1. Plasmas

Un plasma es primero que nada un gas ionizado constituido por partículas cargadas positiva y negativamente, una mezcla de electrones, iones y partículas neutras. No cualquier sustancia constituida por esta mezcla se le considera plasma, ya que hay ciertos criterios que debe satisfacer para que se le considere como un plasma.

- **Macroscópicamente Neutro**

En equilibrio, en un volumen δv lo suficientemente grande para contener un gran número de partículas pero lo suficientemente pequeño comparado con las longitudes características para la variación de parámetros macroscópicos (por ejemplo la densidad y la temperatura), la carga neta total es cero.

- **Blindaje de Debye**

Un plasma tiene la característica de tener alta conductividad, esto es que los electrones se pueden mover de manera más libre que en un gas normal. Este tipo de libertad produce que los efectos producidos por la carga de una partícula sean apantallados a distancias muy cortas. A la longitud después de la cual ya no se percibe la carga de la partícula se le conoce como *longitud de Debye* λ_D . Uno de los criterios que tiene que cumplir una sustancia para llamarse plasma es que la longitud de Debye sea mucho menor que la escala macroscópica de longitudes L con la que se estudia al gas ionizado, $\lambda_D \ll L$.

- Frecuencia del plasma

Cuando un plasma es perturbado de un estado en equilibrio, los campos internos producidos por las cargas generan movimientos que tienden a reestablecer el equilibrio y la neutralidad de carga. Este proceso tiene naturaleza oscilatoria y la frecuencia de oscilación sirve para caracterizar al plasma.

Existen distintos mecanismos para obtener plasmas. Un plasma puede ser producido elevando la temperatura de una sustancia hasta que un grado razonable de ionización es obtenido. Un gas molecular gradualmente se disocia en un gas atómico, debido a colisiones. A mayor temperatura, una cantidad grande de átomos adquiere suficiente energía cinética, a tal punto de que en cada colisión entre átomos, se logra superar la energía de ligamento de los electrones de las orbitas externas, produciendo iones y electrones libres; eventualmente se llega a una configuración de plasma. El plasma formado de esta manera está en equilibrio termodinámico y el grado de ionización y la temperatura de los electrones está fuertemente relacionado.

Los plasmas también pueden ser producidos por procesos que ionizan mucho más que el de elevar la temperatura en equilibrio termodinámico. Ejemplos de esto son la fotoionización en la cual la ionización ocurre por la absorción de fotones cuya energía es mayor que el potencial de ionización del átomo.

Otro mecanismo que produce plasmas es una descarga eléctrica fuerte. Un campo eléctrico externo se aplica a un gas ionizado, éste acelera a los electrones a energías lo suficientemente altas para ionizar a otros átomos por colisiones.

En un plasma, las interacciones de sus partículas se dan entre las que tienen carga con otras también cargadas (interacción carga-carga) o entre partículas cargadas con neutras (interacción carga-neutra). Para interacciones carga-carga las fuerzas que están presentes son las debidas a la interacción electromagnética; para interacciones carga-neutra las fuerzas que están presentes son eléctricas (debido a la polarización) y cuánticas.

En plasmas débilmente ionizados, hay mayor cantidad de interacciones carga-neutra. En plasmas altamente ionizados la cantidad de interacciones carga-carga es mayor. En esta tesis se trabaja con plasmas altamente ionizados en los cuales no consideramos las interacciones carga-neutra.

Al hablar de las partículas que describen al plasma se utilizarán subíndices para definir la especie de partícula que se está observando.

3.1.1. Parámetros de un Plasma

Cuando se describe un gas de manera macroscópica, se necesita conocer el valor de las cantidades termodinámicas que definen el estado en el cuál se encuentra el sistema, por ejemplo la presión,

el volúmen y la temperatura. No obstante en un plasma, es necesario contar con algunos parámetros extra que describan la dinámica interna de las partículas.

Los parámetros característicos que definen a un plasma son

- **Densidad de número y temperatura.**

La densidad de número, n_s , expresa el número de partículas de la especie s por unidad de volumen. La temperatura de estas partículas está relacionada con su energía cinética promedio. Existe una cantidad llamada *velocidad térmica* que para un gas ideal en equilibrio térmico es

$$C_s = \sqrt{\frac{kT_s}{m_s}} \quad (3.1)$$

- **Longitud de Debye.**

La longitud de Debye se puede obtener en función de la temperatura y la densidad de número de partículas cargadas, esta longitud define una escala para caracterizar al plasma. En equilibrio termodinámico y considerando una función de distribución de Maxwell para la función de distribución, se puede obtener una fórmula práctica para la longitud de Debye que es

$$\lambda_D = 6.9 \sqrt{T_e/n_0}, \quad (3.2)$$

donde T_e está en grados Kelvin y la densidad n_0 , que es la densidad de número de los electrones, está en cm^{-3} . En la literatura también se encuentra definido el cubo de Debye, que representa la región máxima en el espacio sobre la cual se apantalla el efecto de las cargas.

- **Frecuencia de plasma.**

Existe una fórmula para la frecuencia de oscilación del plasma, ω_s , que se presenta al perturbarlo ligeramente. Esta fórmula es aproximada y debe considerarse sólo como una escala temporal.

$$\omega_s = C_s/\lambda_s. \quad (3.3)$$

- **Frecuencia y radio de Ciclotrón.**

Si una partícula cargada de masa m y carga q es insertada en un campo magnético estático uniforme, ésta se desplaza con movimiento circular uniforme alrededor del campo magnético, a una velocidad angular característica llamada frecuencia de ciclotrón, Ω_{cs} ,

$$\Omega_{cs} = \frac{|q_s|B}{m}. \quad (3.4)$$

Movimientos casi circulares se encuentran si el campo magnético está compuesto por una componente estática homogénea uniforme más una perturbación pequeña espacio-temporal. En estos casos se puede definir también una frecuencia ciclotrón.

Para un electrón, la frecuencia de ciclotrón (en Hertz) es

$$f_{c_e} = 28B. \quad (3.5)$$

El radio que describe una partícula en movimiento ciclotrón es

$$\rho_{cs} = \frac{v_s}{\Omega_c}, \quad (3.6)$$

que se conoce como radio de ciclotrón o radio de Larmor.

Una partícula cargada que realiza movimiento circular uniforme presenta un momento magnético μ cuya magnitud está dada por

$$|\mu| = IA,$$

donde I es la corriente producida por el movimiento de la partícula y A es el área de la órbita.

Tomando

$$I = \frac{|q|\Omega_c}{2\pi},$$

$$A = \pi\rho_c^2,$$

se tiene que

$$|\mu_s| = \frac{1}{2}|q_s|\Omega_c\rho_{cs}^2 \quad (3.7)$$

y usando las relaciones (3.4) y (3.6) se tiene que

$$|\mu_s| = \frac{\frac{1}{2}mv_s^2}{B} = \frac{W_{\perp s}}{B} \quad (3.8)$$

donde $W_{\perp s}$ representa la energía cinética debida a la componente de la velocidad que es perpendicular al campo magnético.

La ecuación (3.8) escrita en forma vectorial tiene la forma

$$\mu_s = \frac{W_{\perp s}}{B}\mathbf{B}, \quad (3.9)$$

utilizando el momento magnético es posible definir la magnetización en el plasma.

3.2. Teoría Cinética

A continuación se presenta un pequeño repaso de la teoría cinética en el estudio de plasmas. Es importante mencionar que no es un estudio exhaustivo y la finalidad de presentar esta información es para delimitar el rango de validez de las ecuaciones de la MHD.

Para hacer una descripción estadística de un plasma, es conveniente utilizar la función de distribución $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ que se define como el número probable de partículas que se encuentran en un elemento de volumen $d^3x d^3v$. El número total de partículas en el sistema, N , se obtiene integrando sobre todo el espacio fase

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3x d^3v.$$

Debido a que un plasma está compuesto por distintos tipos de partículas, es necesario utilizar una función de distribución para cada especie. Se utilizará el subíndice s para designar a la especie

de la que se está hablando, las cuales pueden ser iones, electrones o partículas neutras.

Gracias a la función de distribución es posible encontrar varios tipos de promedios para valores esperados de cantidades macroscópicas:

- Densidad de número de partículas n_s , es el número promedio de partículas de tipo s por unidad de volumen

$$n_s = \int_v f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (3.10)$$

- Velocidad promedio \mathbf{v}_s , es la velocidad promedio de las partículas de tipo s

$$\mathbf{v}_s = \frac{1}{n_s} \int_v \mathbf{v} f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (3.11)$$

- Densidad de energía promedio W_s es la energía cinética promedio de las partículas de tipo s por unidad de volumen

$$W_s = \int_v \frac{1}{2} m_s v^2 f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (3.12)$$

- Tensor de Presión $\mathbf{P}_s = [P_{ij}]$, es la tasa promedio a la cual el momentum es transportado en la dirección i sobre la superficie j , donde i, j representan las direcciones x, y, z , en un sistema de referencia que se mueve a la velocidad promedio \mathbf{v}_s

$$\mathbf{P} = \int_v m_s (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \otimes (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}) f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (3.13)$$

donde \otimes es el producto tensorial.

3.2.1. Ecuación de Boltzmann

La ecuación cinética que gobierna la evolución de la función de distribución en el espacio fase es la *ecuación de Boltzmann*. Esta ecuación asume que las fuerzas actuantes sobre las partículas se pueden clasificar en dos tipos: de largo alcance (como las producidas por los campos electromagnéticos o gravitacionales) o de corto alcance (como las producidas debido a colisiones, es decir, efectos eléctricos y cuánticos). Esta ecuación es

$$\frac{\partial f}{\partial t} \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_v f = \frac{\delta_c f}{t}, \quad (3.14)$$

donde \mathbf{F} representa las fuerzas de largo alcance y $\delta_c f / \delta t$ es el término que representa las fuerzas debido a colisiones. Para poder obtener esta ecuación se debe suponer que las velocidades de las partículas que componen al gas tienen que ser no relativistas. Si el número de electrones contenidos en un cubo de Debye es grande, es decir $n\lambda_D^3 \gg 1$, entonces las fuerzas colectivas son mucho más importantes que las fuerzas de colisión. En estas condiciones el término de la derecha de (3.14) es despreciable y sustituyendo \mathbf{F} por la fuerza de Lorentz, entonces se obtiene la ecuación de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \nabla_v f = 0. \quad (3.15)$$

3.2.2. Los momentos de la ecuación de Boltzmann

Muchas veces no es necesario resolver la ecuación de Boltzmann para obtener las cantidades macroscópicas por medio de las integrales. Un método para encontrar las cantidades macroscópicas es utilizar las ecuaciones de momento que se obtienen de multiplicar la ecuación de Boltzmann (3.14) por potencias de la velocidad e integrar sobre todo el espacio de velocidades. Este proceso genera una ecuación para cada potencia de la velocidad a la cual se le conoce como el momento de la ecuación, el tratamiento de la teoría cinética se encuentra en (Bittencourt, 2013).

- Momento cero

Este momento se obtiene tomando la potencia a la cual se elevará la velocidad igual a cero, es decir, se multiplica la ecuación de Boltzmann por $v^0 = 1$, posteriormente se integra sobre todo el espacio de velocidades. Este momento deviene en la ecuación de continuidad de la densidad de número

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{v}_s) = 0. \quad (3.16)$$

Multiplicando la ecuación (3.16) por la masa de una partícula s , se convierte en la ecuación de continuidad de la materia para esa especie

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{v}_s) = 0. \quad (3.17)$$

Multiplicando la ecuación (3.16) por la carga de la partícula s se convierte en la ley de la conservación de la carga

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (3.18)$$

- Primer momento

Este momento se obtiene multiplicando por \mathbf{v} la ecuación de Boltzmann. La ecuación macroscópica resultante es

$$\rho_s \left[\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s \right] = \rho_{e_s} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] - \nabla \cdot \mathbf{P}_s + \frac{\delta_c \mathbf{P}_s}{\delta t}, \quad (3.19)$$

donde ρ_s es la densidad de materia de las partículas s , ρ_{e_s} es la densidad de carga que produce la distribución de las partículas s , \mathbf{P} es el tensor de presión para las partículas s y $\delta_c \mathbf{p} / \delta t$ es la fuerza de arrastre debido a colisiones. El término de la izquierda es la derivada convectiva de la velocidad promedio, por lo que (3.19) puede escribirse como

$$\rho_s \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = \rho_{e_s} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] - \nabla \cdot \mathbf{P}_s + \frac{\delta_c \mathbf{P}_s}{\delta t}. \quad (3.20)$$

Esta es la ecuación de conservación de momentum y es evidente que tiene la forma de la segunda ley de Newton. Para construir las ecuaciones de la MHD, una de las consideraciones

es que el momento total en el plasma se conserva, así que para la distribución total del materia

$$\frac{\delta_c \mathbf{P}}{\delta t} = 0.$$

- Segundo Momento

El segundo momento se obtiene multiplicando la ecuación de Boltzmann por el tensor $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ e integrando sobre el espacio de velocidades. Este procedimiento genera una matriz simétrica con nueve componentes. La traza de esta matriz se obtiene multiplicando la ecuación de Boltzmann por la energía cinética ($1/2m_s v^2$) e integrando sobre el espacio de velocidades. La ecuación macroscópica resultante es

$$\frac{\partial W_s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{Q}_s - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_s = \int \frac{1}{2} m_s v^2 \frac{\delta_c f_s}{\delta t} d^3 v \quad (3.21)$$

que se le conoce como la ecuación de la energía; donde W_s es la densidad de energía cinética

$$W_s = \frac{1}{2} m_s v^2 f_s,$$

Q_s es el flujo de energía cinética

$$\mathbf{Q}_s = \int \frac{1}{2} m_s v^2 \mathbf{v} f_s d^3 v,$$

el término $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_s$ se obtiene considerando la fuerza de Lorentz en la ecuación de Boltzmann, representa la contribución de la ley de calor de Joule para la especie s . El término de colisión en la derecha da la tasa de transferencia de energía a la especie s debido a colisiones con las demás partículas. Sumando sobre todas las partículas se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}, \quad (3.22)$$

donde $W = \sum_s W_s$ es la energía cinética total, $Q = \sum_s Q_s$ es el flujo total de energía cinética y $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ es la ley de calor de Joule. En un plasma completamente ionizado, la suma de los términos debido a las colisiones es cero, ya que las colisiones electrostáticas simplemente transfieren la energía cinética de una especie a la otra, pero esto no cambia la energía cinética del sistema completo.

3.2.3. Ecuación de Estado Adiabática

De los primeros tres momentos de la ecuación de Boltzmann se puede inferir que para el momento n se involucra siempre el momento $n + 1$. Esta jerarquía ocurre por el término $\mathbf{v} \cdot \nabla f_s$. Es por este motivo que nunca hay suficientes ecuaciones para todas las incógnitas de momentos. Obtener un sistema cerrado de ecuaciones se puede hacer especificando una ecuación de estado que relacione el tensor de presión \mathbf{P}_s con la densidad de número n_s , o con la densidad ρ_s . La ecuación de estado que se utiliza para esta tesis asume que hay una distribución isotrópica de las velocidades.

Bajo éstas condiciones, el tensor de presión se vuelve diagonal, con elementos diagonales iguales

$$\mathbf{P}_s = IP_s.$$

Esta característica isotrópica se debe a que las colisiones permiten este perfil para el tensor de presión, en el caso de plasmas fríos, también es posible pensar en una distribución isotrópica considerando la interacción entre las ondas microscópicas que perturban al plasma con las partículas, estas interacciones hacen que el perfil de velocidades no se ajuste a una velocidad en específico.

En esta tesis se utiliza P_s igual que en la ecuación de gases ideales

$$P_s = \frac{e_s}{\rho(\gamma + 1)} \quad (3.23)$$

donde e es la energía interna por unidad de volumen y γ es el cociente de las capacidades caloríficas $\gamma = C_p/C_v$. De la mecánica estadística se sabe que para un gas con 3 grados de libertad.

$$\gamma = \frac{5}{3},$$

aunque en algunas ocasiones se puede tomar γ como un parámetro ajustable para representar ecuaciones de estado no adiabáticas.

3.3. Validez de la MHD resistiva

Cualitativamente la MHD resistiva es válida para fenómenos de baja frecuencia y baja longitud de onda, en plasmas que presentan una cantidad suficiente de colisiones y en las cuales las velocidades no son relativistas, esto es, considerando perturbaciones de frecuencia ω y número de onda k :

- Se tiene que cumplir que la velocidad de propagación de las perturbaciones y las velocidades térmicas de los electrones y los iones sean menores que la velocidad de la luz c .

$$\begin{aligned} \omega/k &\ll c, \\ C_e &\ll c, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$C_i \ll c.$$

- Para que exista la cuasi-neutralidad, y por lo cual no estamos considerando corrientes de desplazamiento en las ecuaciones de Maxwell, se tiene que cumplir que

$$k\lambda_D \ll 1 \quad (3.25)$$

- Matemáticamente describir que en el plasma hay suficientes colisiones se puede expresar de la siguiente manera. Si τ_e y τ_i son los tiempos esperados para las colisiones que sufren los

electrones y los iones respectivamente, entonces se tiene que satisfacer que

$$\begin{aligned}\omega\tau_e &\ll 1, \\ \omega\tau_i &\ll 1.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Aunado a esto se debe cumplir que los caminos libres promedio (distancia promedio que presenta una partícula antes de colisionar) que tienen los electrones e iones sea mucho menor que la escala espacial macroscópica L .

$$\begin{aligned}C_e\tau_e &\ll 1 \\ C_i\tau_i &\ll 1\end{aligned}\tag{3.27}$$

- La ley de Ohm generalizada es

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} = \frac{1}{en} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{1}{en} \nabla \cdot \mathbf{P}_e + \frac{m_e}{ne^2} \left[\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{J} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{J}) \right]\tag{3.28}$$

Cuando la corriente eléctrica \mathbf{J} es pequeña, los términos de la derecha son despreciables y se regresa a la ley de Ohm resistiva.

Otro de los criterios importantes para poder utilizar la ley de ohm resistiva es que el radio de Larmor para los iones sea mucho mas pequeño que las escalas macroscópicas

$$\begin{aligned}\rho_{ci} &\ll L, \\ \omega &\ll \Omega_{ci},\end{aligned}\tag{3.29}$$

aunque se puede mencionar que algunos fenómenos, como algunas ocasiones en las que hay reconexión magnética, se pueden describir al no obviar estos términos.

Una vez descritas las características y parámetros que definen a un plasma, se puede presentar el modelo matemático que se utilizó, las ecuaciones de la magnetohidrodinámica. Para estas ecuaciones se modela al plasma como un fluido de una sólo especie y esto se realiza

Capítulo 4

Ecuaciones de la Magnetohidrodinámica

4.1. Ecuaciones de Euler

Las Ecuaciones de Euler son un sistema no lineal hiperbólico de ecuaciones diferenciales parciales que expresan las leyes de conservación presentes en la dinámica de la materia compresible, es así en gases o líquidos a presiones altas, para los cuales los efectos de viscosidad, fuerzas externas o flujos de calor no son considerados.

Para modelar un fluido existe cierta libertad a la hora de escoger las variables que lo describen. Hay dos tipos de variables: primitivas, que son la densidad $\rho(x, y, z, t)$, la presión $P(x, y, z, t)$ y las tres componentes de la velocidad del fluido $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$; conservativas, que son la densidad $\rho(x, y, z)$, las tres componentes del momento $\rho\mathbf{v}$, y la energía, ya sea la energía total por unidad de masa $E(x, y, z, t)$ o la energía interna por unidad de masa $e(x, y, z, t)$.

Las variables conservativas reciben este nombre debido a que surgen naturalmente de la aplicación de principios físicos que se expresan en leyes de conservación y las variables primitivas reciben este nombre debido a que es posible obtener las otras cantidades a partir de éstas.

Las ecuaciones de Euler se expresan en términos de las variables conservativas. Estas ecuaciones son

$$\begin{aligned}\rho_t + (\rho v_x)_x + (\rho v_y)_y + (\rho v_z)_z &= 0 \\ (\rho v_x)_t + (\rho v_x^2 + P)_x + (\rho v_x v_y)_y + (\rho v_x v_z)_z &= 0 \\ (\rho v_y)_t + (\rho v_x v_y)_x + (\rho v_y^2 + P)_y + (\rho v_y v_z)_z &= 0 \\ (\rho v_z)_t + (\rho v_x v_z)_x + (\rho v_y v_z)_y + (\rho v_z^2 + P)_z &= 0 \\ E_t + [v_x(E + P)]_x + [v_y(E + P)]_y + [v_z(E + P)]_z &= 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

Estas 5 ecuaciones se pueden escribir de manera compacta como

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$(\rho \mathbf{v})_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + P\mathbf{I}) = 0$$

$$E_t + \nabla \cdot [(E + P)\mathbf{v}] = 0$$

donde \otimes es el producto tensorial y \mathbf{I} es la matriz unitaria

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x^2 & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y v_x & v_y^2 & v_y v_z \\ v_z v_x & v_z v_y & v_z^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el sistema (4.1) hay cinco variables involucradas y solamente cuatro ecuaciones. Afortunadamente, al tomar en cuenta consideraciones termodinámicas es posible completar el sistema, la manera de realizar esto es a través de la ecuación de estado, como se mencionó en el capítulo anterior.

Para gases ideales se considerara la ecuación de estado calórica, que relaciona la energía interna con la presión y el volumen específico:

$$e = \frac{PV}{\gamma - 1} = \frac{P}{\rho(\gamma - 1)} \quad (4.2)$$

donde γ es una constante que depende del gas a considerar. Dado que la energía interna está relacionada con la energía total vía la ecuación

$$E = \rho\left(\frac{1}{2}v^2 + e\right) \quad (4.3)$$

se tiene un sistema de ecuaciones donde el número de incógnitas y de ecuaciones es adecuado para resolverse; si las condiciones de frontera son consistentes, se puede asegurar que el sistema se puede resolver.

4.1.1. Derivación de las ecuaciones

Considérese una función escalar $\Phi(x, y, z, t)$. La razón de cambio de Φ según un observador que se mueve con la velocidad \mathbf{v} del fluido, está dada por

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\Phi$$

Ahora, considérese

$$\Psi(t) = \iiint_V \Phi(x, y, z, t) dx^3$$

donde el volumen V está definido como el interior de una superficie suave a trozos ∂V que se mueve con el material en consideración. Se tiene entonces que

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \iiint_V \frac{\partial\Phi}{\partial t} dx^3 + \iint_{\partial V} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \Phi \mathbf{v}) da \quad (4.4)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario normal a la superficie da y que apunta hacia afuera de V . Nótese que si Φ y Ψ fuesen campos vectoriales, la ecuación seguiría siendo la misma¹.

4.1.2. Ley de Conservación de la masa

Se define Ψ como la masa total en el volumen V

$$\Psi(t) = \iiint_V \rho(x, y, z, t) dx^3. \quad (4.5)$$

Asumiendo que dentro del volumen la masa se mantiene constante, se tiene que $\frac{D\Psi}{Dt} = 0$. Sustituyendo en la ecuación (4.4) se obtiene

$$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dx^3 + \iint_{\partial V} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \rho \mathbf{v}) da = 0. \quad (4.6)$$

Usando el teorema de la divergencia de Gauss, se cambia la segunda integral de la parte izquierda de (4.6). Se tiene entonces que

$$\iiint_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dx^3 = 0. \quad (4.7)$$

Dado que esto es para un volumen V arbitrario, entonces se tiene que cumplir que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4.8)$$

que es la ley de conservación de la masa

¹En este caso el producto $\Phi \mathbf{v}$ se referiría al producto tensorial

4.1.3. Ley de conservación del momentum

Considérese Ψ ahora el momento total en el volumen de control V :

$$\Psi = \iiint_V \rho \mathbf{v} dx^3. \quad (4.9)$$

Según la segunda ley de Newton, el cambio de momentum es igual a la fuerza que experimenta. Al no considerar fuerzas externas (como la gravedad), ni efectos de viscosidad, la única fuerza que experimenta el elemento de volumen V es debido a la presión, por lo tanto

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \mathbf{f}_s = \iint_{\partial V} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da. \quad (4.10)$$

Sustituyendo (4.10) en (4.4) y agrupando las integrales, se tiene que

$$\iiint_V \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} dx^3 = - \iint_{\partial V} [\mathbf{v}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \rho \mathbf{v}) + \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}] da. \quad (4.11)$$

Aplicando el teorema de la divergencia, se obtiene

$$\iiint_V \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + [\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla \mathbf{P}] dx^3 = 0 \quad (4.12)$$

que puede reescribirse como

$$\iiint_V \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \mathbf{P}\mathbf{1}] dx^3 = 0 \quad (4.13)$$

donde $\mathbf{1}$ es la matriz unitaria de dimensiones 3×3 .

Todo esto es valido para cualquier volumen V , así que el integrando debe de ser 0, esto es

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \mathbf{P}\mathbf{1}] = 0, \quad (4.14)$$

que es la ley de conservación del momentum.

4.1.4. Ley de conservación de la energía

En este caso se tomará Ψ como la Energía total en el volumen V

$$\Psi(t) = \iiint_V E dx^3. \quad (4.15)$$

Se tiene que una fuerza \mathbf{f} que actúa en un punto en movimiento con una velocidad \mathbf{v} produce un trabajo W por unidad de tiempo $\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}$, al despreciar fuerzas externas y efectos de viscosidad, éste es producido sólomente por la presión, así

$$\frac{dW}{dt} = - \iint_{\partial V} P(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da \quad (4.16)$$

Si no hay flujo de calor, entonces

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \frac{dW}{dt} = \iiint_V \frac{\partial E}{\partial t} dx^3 + \iint_{\partial V} (\hat{\mathbf{n}} \cdot E\mathbf{v}) da, \quad (4.17)$$

es decir

$$\iiint_V \frac{\partial E}{\partial t} dx^3 = - \iint_{\partial V} (P + E)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}) da, \quad (4.18)$$

usando el teorema de la divergencia

$$\iiint_V \left(\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(P + E)\mathbf{v}] \right) dx^3 = 0 \quad (4.19)$$

Nuevamente, debido a que el análisis se hizo en un volumen arbitrario V , entonces se tiene que cumplir que

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(P + E)\mathbf{v}] = 0 \quad (4.20)$$

que es la ley de conservación de la energía.

4.1.5. Ondas Hidrodinámicas

Al ser un sistema hiperbólico, con las condiciones iniciales adecuadas, las ecuaciones de la hidrodinámica pueden presentar tres tipos de onda: Ondas de choque, ondas de rarefacción y ondas de contacto. Un problema sencillo unidimensional con significado físico real en el cual se pueden estudiar estas ondas es el problema del tubo de choque.

El problema de tubo de choque físicamente consiste en un tubo que contiene un tipo de gas constituido por un sólo tipo de partículas, por ejemplo un gas monoatómico; a la mitad del tubo existe una membrana que lo divide en dos regiones, cada región está en equilibrio pero la densidad y la presión son mayores en una región, la velocidad del gas en ambas regiones es cero. Al retirarse la membrana, empezará a haber flujo de gas de la región de mayor densidad a la de menor densidad y se presentarán los tres tipos de onda.

Este problema matemáticamente se modela como un problema unidimensional de las ecuaciones de la hidrodinámica

$$\partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v_x) = 0$$

$$\partial_t(\rho v_x) + \partial_x(\rho v_x^2 + P) = 0 \quad (4.21)$$

$$\partial_t(E) + \partial_x[(E + P)v_x] = 0$$

con condiciones de frontera de Riemann centradas en el origen, donde físicamente se situaría la membrana:

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_L & x < 0 \\ \rho_R & x > 0 \end{cases}$$

$$P(x, 0) = \begin{cases} P_L & x < 0 \\ P_R & x > 0 \end{cases}$$

$$v_x(x, 0) = 0,$$

donde $\rho_L > \rho_R$, $P_L > P_R$ y son constantes.

De (4.21) se necesita calcular el valor de las velocidades características y para esto se tienen que calcular los eigenvalores de la matriz $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{u}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)v_x^2 & (3 - \gamma)v_x & \gamma - 1 \\ (\gamma - 1)v_x^3 - \frac{\gamma v_x E}{\rho} & \frac{\gamma E}{\rho} - \frac{3}{2}(\gamma - 1)v_x^2 & \gamma v_x \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

que corresponden a las velocidades características.

$$\lambda_1 = v_x - a \quad (4.23)$$

$$\lambda_2 = v_x \quad (4.24)$$

$$\lambda_3 = v_x + a \quad (4.25)$$

donde $a = \sqrt{\gamma P / \rho}$ es la velocidad del sonido en un gas ideal.

Los eigenvectores de \mathbf{A} son

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ v_x - a \\ H - a - v_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ \frac{1}{2}v_x^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ v_x + a \\ H - a + v_x \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

que se utilizan para desacoplar las ecuaciones de Euler, como se expresó en el capítulo 2.

Dependiendo de la región de la solución se usarán tanto las condiciones invariantes de Riemann para las ondas de rarefacción y las condiciones de Rankine-Hugoniot para los choques y las discontinuidades de contacto. Se utilizará el superíndice * para especificar que se está hablando de las cantidades dentro de una región en específico.

Discontinuidad de Contacto

La discontinuidad de contacto se describe por la velocidad característica λ_2 , pues el eigenvector \mathbf{u}_2 es linealmente degenerado(2.33). En este caso los invariantes generalizados de Riemann (2.34)

proporcionan la siguiente relación

$$\frac{d\rho}{1} = \frac{d(\rho v_x)}{v_x} = \frac{dE}{\frac{1}{2}v_x^2}. \quad (4.27)$$

Estas relaciones implican que $dv = 0$ y por lo tanto sobre esta onda la velocidad es constante, de esto se sigue que la presión es constante.

Es así que las ondas de contacto en la hidrodinámica son aquellas en las cuales la presión y la velocidad son constantes pero propagan una discontinuidad de la densidad y, por lo tanto, en las variables que dependen de ella, como la temperatura, entropía, velocidad del sonido, energía interna específica, etc.

Ondas de Rarefacción

Los eigenvalores λ_1 y λ_2 pueden representar tanto ondas de rarefacción como de choque, dependiendo de las condiciones iniciales. Para el problema (4.21) la onda de rarefacción corresponde a λ_1 . Una onda de rarefacción es una onda suave sobre la cual los valores de ρ , v_x y P cambian. La estructura de las líneas características tiene forma de abanico y está encerrada por dos líneas características correspondientes a la cabeza y a la cola de la onda de rarefacción, que representan la velocidad máxima y mínima de la onda. Sobre la onda, para este ejemplo, los invariantes generalizados de Riemann muestran que $v_x + 2a/(\gamma - 1)$ y la entropía son constantes.

Ondas de Choque

En el contexto de las ecuaciones de Euler unidimensionales, las ondas de choque son ondas discontinuas asociadas a campos genuinamente no lineales (2.29). Las tres cantidades ρ , v_x y P cambian discontinuamente a través de la onda y hay una velocidad característica que define la velocidad a la cual se propaga el choque.

Solución exacta

A continuación se presenta la gráfica de la solución exacta para el problema de Riemann de las ecuaciones de la hidrodinámica con condiciones iniciales de tubo de choque. Las condiciones iniciales presentan un abanico de rarefacción del lado izquierdo, luego una onda de contacto y finalmente una onda de choque a la derecha. El método para encontrar la solución exacta al problema de Riemann para las ecuaciones de la hidrodinámica se puede encontrar en (Toro, 2013) y en (Lora-Clavijo et al., 2013).

Se presentan a continuación las cantidades usadas, el dominio espacial es de $[-0.5, 0.5]$. La energía total inicial del sistema puede obtenerse a partir de los datos presentados.

Test	γ	ρ	P	v
Tubo de choque RS				
Estado Izquierdo	5/3	1.0	1.0	0.0
Estado Derecho	5/3	0.125	0.1	0.0

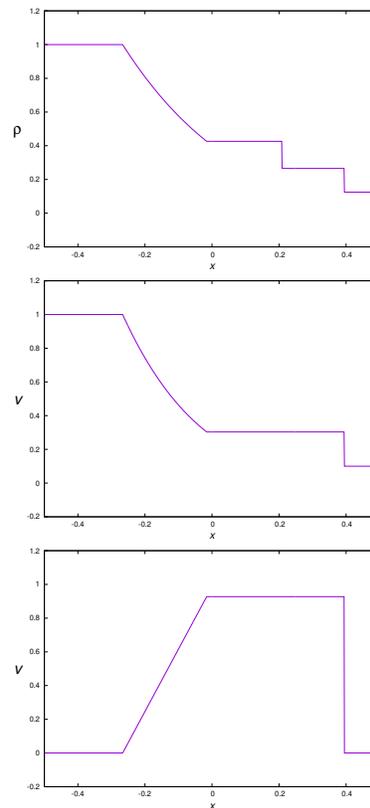


Figura 4.1: Evolución del tubo de choque a un tiempo $t=0.25$

En la figura 4.1, se observa que de $x \approx -0.3$ a $x = 0$ hay una onda de rarefacción en la cual las tres cantidades varían suavemente. En $x \approx 0.2$ hay una onda de contacto en la cual la densidad tiene una discontinuidad pero la velocidad y la presión son constantes. En $x \approx 0.4$ hay una onda de choque en la cual las tres cantidades presentan una discontinuidad. En este caso, las ondas de contacto y de choque viajan hacia la derecha pero la rarefacción se extiende hacia la izquierda.

4.2. Ecuaciones de la Magnetohidrodinámica

Las ecuaciones de la hidrodinámica son insuficientes para describir un plasma interactuando con un campo electromagnético externo. Para describir este comportamiento se utilizan las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica (MHD), que tienen una forma muy similar a las ecuaciones de Euler.

Estas ecuaciones son

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] &= 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \left(P + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{I} \right] &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(E + P + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \right] &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{v} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{v}] &= \nabla \times [\eta \cdot \mathbf{J}],\end{aligned}\tag{4.28}$$

junto con la ecuación de estado

$$\epsilon = \frac{P}{\rho(\gamma - 1)},$$

y la restricción de la divergencia del campo magnético

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Muchas restricciones del rango de validez de la MHD se encuentran de la obtención formal de las ecuaciones. Para obtenerlas se tiene que revisar la teoría cinética de gases, de la cual se presenta un breve resumen en el capítulo 3.

Dentro de otras condiciones necesarias para obtener (4.28) es que no se considerarán flujos de calor ni procesos radiativos y que es válido utilizar la ecuación de estado adiabática para gases ideales.

Al utilizar las ecuaciones de la MHD se tienen que definir las dimensiones características del gas a estudiar. Estas dimensiones restringen los fenómenos ondulatorios que se pueden estudiar, y esto se hace comparando la longitud de la onda con estas dimensiones.

Por definición los plasmas son cuasi neutros, es decir que la densidad de carga (ρ_q) en el gas es despreciable, y esta característica ya está presente en el desarrollo de la MHD.

En este capítulo se presenta una descripción de cada ecuación y también se mencionarán los tipos de ondas que pueden describirse con estas ecuaciones.

4.2.1. Ley de Ohm y la Ley de Faraday

De las primeras diferencias que existen con la hidrodinámica es que se pueden producir corrientes eléctricas dentro del plasma. Estas corrientes están descritas por la Ley de Ohm:

$$\mathbf{J} = \sigma \cdot [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]\tag{4.29}$$

donde \mathbf{J} es la corriente eléctrica, \mathbf{B} el campo magnético, \mathbf{E} el campo eléctrico y σ el tensor de conductividad.

Debido a que el plasma es cuasi-neutro y por lo tanto se desprecia la densidad de carga ($\rho_q = 0$), obtener el campo Eléctrico de la ley de Gauss es imposible, ya que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_q$$

así que para obtener el campo eléctrico, éste se despeja de (4.29)

$$\mathbf{E} = \eta \cdot \mathbf{J} - \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

donde $\eta = \sigma^{-1}$ es el tensor de resistividad.

Así, de la ley de inducción de Faraday,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E},$$

se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times [\eta \cdot \mathbf{J} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (4.30)$$

Es posible reescribir (4.30) en forma conservativa utilizando el producto tensorial, es así que se obtiene la ley de inducción como

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{v} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{v}] = -\nabla \times [\eta \cdot \mathbf{J}]. \quad (4.31)$$

Es importante mencionar que esta forma de la Ley de Ohm desprecia muchos tipos de fenómenos asociados con el flujo y la temperatura de los electrones en un plasma, la justificación al porqué de este criterio es que la masa de los iones es mucho mayor.

Para plasmas en los cuales la resistividad es muy pequeña ($\eta \rightarrow 0$), hay un resultado importante que se llama el teorema del campo congelado (*frozen field theorem*) el cual implica que las líneas de campo no se intersectan o quiebran para un observador que se mueve con la velocidad de un elemento de volumen del plasma. Es entonces importante notar que el fenómeno de reconexión magnética, que consiste precisamente en que las líneas de campo magnético se quiebran y reconecten o intersecten, es un proceso que se da sólo en la magnetohidrodinámica resistiva. Gracias a esta propiedad, se tiene que una manera de verificar la validez de los métodos numéricos que se utilicen para resolver las ecuaciones de la MHD es corroborar que no haya reconexión magnética en el régimen ideal de la MHD, es decir, cuando se considera $\eta = 0$.

4.2.2. Ley de conservación de la masa

Comparando con las ecuaciones de Euler, no hay modificaciones para la conservación de la masa, es decir que estamos considerando que no hay mecanismos que intervengan en la cantidad total de materia para los elementos diferenciales de volumen V . La ecuación es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] = 0. \quad (4.32)$$

4.2.3. Ley de conservación del momentum

La ecuación de la ley de conservación del momentum es similar a la de Euler, solamente se consideran los efectos de la fuerza electromagnética. Esto es que aunada a la fuerza causada por la presión, se suman las componentes electromagnéticas. Explícitamente, la segunda ley de Newton

queda expresada para los elementos de volumen V como

$$\frac{d\rho\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot [\mathbf{P}] + \rho_q \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (4.33)$$

Debido a que el plasma es cuasi-neutro $\rho_q = 0$, y utilizando la Ley de Ampère $\mathbf{J} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{B}$ (reescalando las unidades para que $\mu_0 = 1$) es posible reescribir (4.33) como

$$\frac{d\rho\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot [\mathbf{P}] + [\nabla \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B}, \quad (4.34)$$

y el segundo término de la derecha puede reescribirse usando que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, pues se tiene que

$$[\nabla \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \nabla \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2} \right)$$

$$[\nabla \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B} = \nabla \cdot \left(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{\mathbf{B}^2}{2} \mathbf{I} \right) - (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B},$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad.

De esta manera, y desarrollando la derivada convectiva de manera análoga que en las ecuaciones de Euler, se obtiene la ecuación de conservación de momentum

$$\frac{\partial \rho\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \left(P + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{I} \right] = (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B},$$

y, puesto que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, entonces

$$\frac{\partial \rho\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \left(P + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{I} \right] = 0. \quad (4.35)$$

Contrastando las ecuaciones de Euler con las de la MHD se observa que aparece un término adicional a la presión, éste corresponde a la presión magnética. A cada plasma se le asocia una cantidad específica

$$\beta = \frac{P}{\mathbf{B}^2/2}$$

que permite determinar cual de las presiones es la que domina y, con base en esto, describir una propiedad del plasma.

4.2.4. Conservación de la Energía

Para encontrar la ley de conservación de la energía se procede de la misma manera que para las ecuaciones de Euler. La fuerza \mathbf{f} que actúa sobre un elemento de volumen del plasma que se mueve con una velocidad \mathbf{v} , produce un trabajo por unidad de tiempo W . Despreciando fuerzas externas y efectos de viscosidad, W está producido por la presión hidrostática y por la fuerza electromagnética. Puesto que el campo magnético no produce trabajo, esta cantidad es

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} &= \iiint_V \rho q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dx^3 - \iint_{\partial V} P(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da \\
&= \iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dx^3 - \iint_{\partial V} P(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Se puede reescribir la primer integral de la parte derecha de la igualdad utilizando la ley de Ampère, ley de Faraday, ley de Ohm y una identidad vectorial, pues

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\
&= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\
&= -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot ((\eta \mathbf{J} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \\
&= -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot [(\eta \mathbf{J} \times \mathbf{B}) - (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \\
&= -\frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t} + \nabla \cdot [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} - \mathbf{B}^2 \mathbf{v}] - \nabla \cdot (\eta \mathbf{J} \times \mathbf{B}).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Por otra parte, dado que no hay flujo de calor, el trabajo por unidad de tiempo está dado como la energía² por unidad de tiempo menos la presión magnética (que no realiza trabajo), por lo tanto

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_V \frac{d}{dt} \left(E - \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) dx^3 \tag{4.38}$$

Desarrollando la derivada convectiva para $E - \mathbf{B}^2/2$, donde E es la energía, se tiene que

$$\iiint_V \frac{d}{dt} \left(E - \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) dx^3 = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left(E - \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) dx^3 + \iint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(E - \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{v} da. \tag{4.39}$$

Sustituyendo (4.39) y (4.37) en (4.36) se obtiene

$$\begin{aligned}
\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left(E - \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) dx^3 &= \iiint_V \left[-\frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t} + \nabla \cdot [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} - \mathbf{B}^2 \mathbf{v}] - \nabla \cdot (\eta \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \right] dx^3 \\
&\quad - \iint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(E + P - \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{v} da,
\end{aligned}$$

que usando el teorema de la divergencia de Gauss y agrupando los términos correspondientes resulta en la ecuación de la conservación de la energía en su forma integral

$$\iiint_V \left(\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(E + P + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \right] \right) dx^3 = 0, \tag{4.40}$$

²Debido a que las ecuaciones de la MHD pueden escribirse sin referirse al campo eléctrico, no habrá ambigüedad al definir E como la energía que hay en los elementos de volumen V , por lo tanto E representa la energía y no la magnitud del campo eléctrico.

la cual tiene su forma diferencial correspondiente

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(E + P + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \right] = -\nabla \cdot (\eta \mathbf{J} \times \mathbf{B}). \quad (4.41)$$

La ecuación (4.41) es una forma de la ley de la conservación de energía.

4.2.5. Ondas magnetohidrodinámicas

Si se igualan a cero todas las componentes electromagnéticas de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica, entonces se vuelven a obtener las ecuaciones de Euler. Esta relación entre los dos sistemas de ecuaciones hace que en la MHD también existan ondas de contacto, de rarefacción y de choque. No se hará un estudio específico de las variaciones que tienen estas ondas al considerar que la materia interactúa con los campos electromagnéticos y se procederá a mostrar las ondas específicas que se presentan en la MHD.

Se considerarán las ondas de pequeña amplitud en un fluido magnetohidrodinámico ideal ($\sigma \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$). Para este caso se considera que \mathbf{v} , \mathbf{B} , ρ y P están compuestas por una cantidad homogénea espacialmente uniforme e independiente del tiempo más una perturbación pequeña de primer orden, esto es:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1,$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1,$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1,$$

$$P = P_0 + P_1.$$

Usando el sistema de referencia en el cual $\mathbf{v}_0 = 0$ entonces se tiene que, a primer orden, las ecuaciones (4.30), (4.32) y (4.35) son

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad (4.42)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 - \nabla P_1, \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0), \quad (4.44)$$

y la presión está dada por

$$P_1 = \gamma \left(\frac{P_0}{\rho_0} \right) \rho_1. \quad (4.45)$$

Ahora se mostrará a la descripción de las ondas en este medio homogéneo. Para realizar el análisis es conveniente descomponer las soluciones a las ecuaciones (4.42)-(4.43) utilizando la transformada de Fourier. La ventaja de utilizar la transformada de Fourier es que permite estudiar el comportamiento de las ondas que tienen una longitud de onda muy cercano entre sí. Las ondas que se

estudian en este capítulo son de una longitud mucho mayor que las longitudes características del plasma, por lo tanto el número de onda es pequeño.

La descomposición de una función $f(\mathbf{r}, t)$ utilizando la transformada de Fourier para las 3 dimensiones y el tiempo está dada por

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} d^3k d\omega. \quad (4.46)$$

Aplicando los operadores $\frac{\partial}{\partial t}$ y ∇ a f se obtiene

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) \tilde{f} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} d^3k d\omega,$$

$$\nabla f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (i\mathbf{k}) \tilde{f} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} d^3k d\omega,$$

por lo tanto hay una transformación de los operadores diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow -i\omega \\ \nabla &\rightarrow i\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

y de esta manera es posible transformar una ecuación diferencial lineal

$$\mathcal{D}(\nabla, \partial/\partial t)f = 0, \quad (4.48)$$

en una matriz aplicada a \tilde{f}

$$\tilde{\mathcal{D}}(i\mathbf{k}, i\omega)\tilde{f} = 0. \quad (4.49)$$

Esta forma de la ecuación diferencial nos revela que para tener una solución no trivial, se debe satisfacer que

$$\tilde{\mathcal{D}}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad (4.50)$$

que se conoce como la *relación de dispersión*, ésta relación de dispersión para muchos casos tiene raíces discretas para ω , representadas por ω_α , con $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Estas raíces representan los *modos normales de oscilación* de las ondas presentes. Con excepción de casos degenerados, el número de modos normales es igual al orden de la ecuación diferencial.

En el caso de las ecuaciones (4.42)-(4.45) el objetivo es obtener sus correspondientes relaciones de dispersión y los modos normales de oscilación definirán el tipo de onda presente. Además se podrá decir algo con respecto a la propagación de las ondas con respecto a las líneas de campo magnético.

Las ecuaciones resultantes de aplicar la transformada de Fourier son

$$-i\omega\tilde{\rho} + i\rho_0\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (4.51)$$

$$-i\omega\rho_0\tilde{\mathbf{v}} = i(\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \tilde{B}_0 - i\mathbf{k}\tilde{P}, \quad (4.52)$$

$$-i\omega\tilde{\mathbf{B}} = i\mathbf{k} \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{B}_0), \quad (4.53)$$

$$\tilde{P} = V_s^2\tilde{\rho}, \quad (4.54)$$

donde $V_s^2 = \gamma \left(\frac{P_0}{\rho_0} \right)$ se define como la velocidad del sonido y donde se ha dejado de usar un subíndice para describir la perturbación a primer orden. Utilizando (4.51) para eliminar $\tilde{\rho}$ de (4.54) se obtiene una ecuación para la perturbación de la presión a primer orden

$$\tilde{P} = V_s^2 \frac{\rho_0}{\omega} \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}. \quad (4.55)$$

La ecuación (4.55) es útil para eliminar \tilde{P} de la ecuación (4.52), es así que, multiplicando por $i\omega/\rho_0$ se obtiene

$$\omega^2 \tilde{\mathbf{v}} = \frac{-\omega}{\rho_0} (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \tilde{B}_0 + V_s^2 \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}). \quad (4.56)$$

Finalmente se puede eliminar la perturbación del campo magnético $\tilde{\mathbf{B}}$ usando (4.53), que resulta en

$$\omega^2 \tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{\rho_0} \{ \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}_0)] \} \times \mathbf{B}_0 + V_s^2 \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}). \quad (4.57)$$

Sin pérdida de generalidad, se escogerán coordenadas en las cuales

$$\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$$

$$\mathbf{k} = (k \sin \theta, 0, k \cos \theta).$$

Desarrollando (4.57) se obtiene

$$v_p^2 \begin{bmatrix} \tilde{v}_x \\ \tilde{v}_y \\ \tilde{v}_z \end{bmatrix} = V_A^2 \begin{bmatrix} \tilde{v}_x \\ \tilde{v}_y \cos^2 \theta \\ 0 \end{bmatrix} + V_s^2 \begin{bmatrix} \tilde{v}_x \sin^2 \theta + \tilde{v}_z \sin \theta \cos \theta \\ 0 \\ \tilde{v}_x \sin \theta \cos \theta + \tilde{v}_z \cos^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (4.58)$$

donde la cantidad

$$V_A = \frac{B_0}{\sqrt{\rho_0}},$$

tiene unidades de velocidad (recordando que se está considerando una escala en la cual $\mu_0 = 1$) y se le conoce como *velocidad de Alfvén*. A la cantidad $v_p = \omega/k$ se le conoce como *velocidad fase* y es la que describe la velocidad con la que se propaga una onda con frecuencia ω y número de onda k .

Escribiendo la ecuación (4.58) en forma matricial

$$\begin{bmatrix} v_p^2 - V_s^2 \sin^2 \theta - V_A^2 & 0 & -V_s^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & v_p^2 - V_A^2 \cos^2 \theta & 0 \\ -V_s^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & v_p^2 - V_s^2 \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_x \\ \tilde{v}_y \\ \tilde{v}_z \end{bmatrix} = 0, \quad (4.59)$$

se entiende que (4.59) tiene solución no trivial para $\tilde{\mathbf{v}}$ si el determinante de la matriz es distinto de

cero, lo cual implica una relación de dispersión:

$$\tilde{D}(k, \omega) = (v_p^2 - V_A^2 \cos^2 \theta)[v_p^4 - v_p^2(V_A^2 + V_s^2) + V_A^2 V_s^2 \cos^2 \theta] = 0, \quad (4.60)$$

que tiene tres raíces

$$v_p^2 = \frac{1}{2}(V_A^2 + V_s^2) - \frac{1}{2}[(V_A^2 - V_s^2)^2 + 4V_A^2 V_s^2 \sin^2 \theta]^{1/2}, \quad (4.61)$$

$$v_p^2 = V_A^2 \cos^2 \theta, \quad (4.62)$$

$$v_p^2 = \frac{1}{2}(V_A^2 + V_s^2) + \frac{1}{2}[(V_A^2 - V_s^2)^2 + 4V_A^2 V_s^2 \sin^2 \theta]^{1/2}. \quad (4.63)$$

La raíz (4.61) es el modo normal de oscilación de la onda que tiene por nombre magnetosónica lenta, (4.63) es el modo de la magnetosónica rápida y (4.62) es el modo transversal de Alfvén (también conocido como modo de Alfvén de corte).

A continuación se estudiarán los eigenvectores correspondientes a cada modo.

Ondas de Alfvén transversales

Para el modo (4.62) la velocidad de propagación (v_p) está completamente controlada por la velocidad de Alfvén, por eso recibe este nombre. El eigenvector asociado a esta onda de Alfvén es

$$\tilde{\mathbf{v}} = (0, \tilde{v}_y, 0). \quad (4.64)$$

De esta forma de la perturbación para la velocidad se observa, al sustituir en (4.51) que $\tilde{\rho} = 0$ y, por (4.54), que $\tilde{P} = 0$.

De (4.53), usando la aproximación ideal de la MHD en la cual $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ a primer orden, se obtiene

$$\tilde{\mathbf{B}} = (0, \tilde{B}_y, 0), \quad \tilde{B}_y = -B_0 \frac{\tilde{v}_y \cos \theta}{V_A |\cos \theta|}, \quad (4.65)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = (\tilde{E}_x, 0, 0), \quad \tilde{E}_x = -B_0 \tilde{v}_y.$$

Debido a que la perturbación en la densidad (y en la presión) es despreciable, entonces no existe compresión en el fluido, y como no hay compresión, ni la temperatura ni la presión juegan un papel en la propagación de este modo. La dirección de propagación de la energía está en dirección del campo magnético estático \mathbf{B}_0 , independientemente del ángulo que hace con la normal a la onda ($\cos \theta = \hat{k} \cdot \hat{B}_0$).

Esto se deduce por un lado de la velocidad de grupo

$$\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega = V_A \hat{z} = V_A \hat{\mathbf{B}}_0, \quad (4.66)$$

y por otro del vector de Poynting

$$\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = S \hat{z} = S \hat{\mathbf{B}}_0. \quad (4.67)$$

Una analogía ilustrativa de esto es pensar en la propagación de las ondas en una cuerda estirada,

las vibraciones hacen un ángulo con la dirección de la tensión de la cuerda, pero el transporte de energía es sobre la línea de la cuerda. En este caso las ondas de Alfvén se propagan a través de las líneas de campo magnético, y como es en el régimen ideal de la MHD, estas líneas no se cruzan así que esta analogía de cuerdas estiradas sugiere que las ondas de Alfvén en líneas de campo magnético distintas se propagan independientemente.

Ondas magnetosónicas

Los modos (4.61) y (4.63) involucran al campo magnético (a través de la velocidad de Alfvén) y a la presión del plasma (a través de la velocidad del sonido). Es por esta razón que ambos modos se denominan magnetosónicos. Para ángulos oblicuos de propagación con respecto a la dirección de \mathbf{B}_0 es posible demostrar que existe propagación a lo largo de \mathbf{k} . Así que las ondas magnetosónicas no son necesariamente transversales, es decir que existe cierta compresión (y en este caso la perturbación a la presión no es despreciable). Puesto que la relación de dispersión es complicada para ángulos arbitrarios, se estudiarán los casos para los cuales $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$.

Para $\theta = 0$, (4.59) se representa mediante el siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} v_p^2 - V_A^2 & 0 \\ 0 & v_p^2 - V_s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_x \\ \tilde{v}_z \end{bmatrix} = 0. \quad (4.68)$$

La relación de dispersión tiene dos raíces, $v_p^2 = V_A^2$ y $v_p^2 = V_s^2$. Para saber cuál modo es el magnetosónico rápido y cual el lento, basta con comparar las velocidades V_A y V_s . Los eigenvectores para el modo $v_p^2 = V_A^2$ son

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} &= (\tilde{v}_x, 0, 0), \\ \tilde{\mathbf{B}} &= (\tilde{B}_x, 0, 0), \\ \tilde{\mathbf{E}} &= (0, \tilde{E}_y, 0), \\ \tilde{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Nótese que $\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0$ por lo tanto no hay compresión de densidad, así que los eigenvectores de este modo tienen las propiedades de una onda transversal electromagnética.

Los eigenvectores para el modo $v_p^2 = V_s^2$ son

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} &= (0, 0, \tilde{v}_z), \\ \tilde{\mathbf{B}} &= (0, 0, 0), \\ \tilde{\mathbf{E}} &= (0, 0, 0), \\ \tilde{\rho} &= \rho_0 \frac{\tilde{v}_z}{v_p}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Nótese que las perturbaciones al campo magnético y eléctrico son cero y que hay una compresión

de densidad a lo largo de la línea de campo, así que estos eigenvectores tienen la propiedad de una onda sonora longitudinal.

Para $\theta = \pi/2$ la relación de dispersión es

$$\begin{bmatrix} v_p^2 - (V_A^2 + V_s^2) & 0 \\ 0 & v_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_x \\ \tilde{v}_z \end{bmatrix} = 0. \quad (4.71)$$

En este caso la relación de dispersión sólo tiene una raíz no trivial, $v_p^2 = V_A^2 + V_s^2$. Los eigenvectores correspondientes a este modo son

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} &= (\tilde{v}_x, 0, 0), \\ \tilde{\mathbf{B}} &= (0, 0, \tilde{B}_z), \\ \tilde{\mathbf{E}} &= (0, \tilde{E}_y, 0), \\ \tilde{\rho} &= \rho_0 \frac{\tilde{v}_x}{v_p}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

En este caso, este eigenvector presenta características que son tanto de ondas transversales electromagnéticas como de ondas longitudinales sonoras.

Para conocer la estructura de las ecuaciones de la MHD se necesita estudiar la construcción de las ecuaciones. En este capítulo se obtuvo grosso modo los tipos de ondas, tanto hidrodinámicas como magnetohidrodinámicas presentes en los sistemas que se modelan con estas ecuaciones.

En el siguiente capítulo se presenta la construcción del método numérico que se utilizó en esta tesis para resolver las ecuaciones de la MHD. Este método numérico utiliza para calcular las velocidades características de las ondas presentadas en este capítulo, lo cual es una característica peculiar del método.

Capítulo 5

Métodos Numéricos

Tanto las ecuaciones de Euler como las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica clásica presentan soluciones analíticas sólo para casos muy específicos. En general, es muy difícil construir una nueva solución a ellas.

Afortunadamente se han desarrollado diversos enfoques para poder encontrar soluciones aproximadas que preservan la estructura del sistema aceptablemente. La información que se quiere obtener es la dependencia temporal y espacial de las cantidades que describen al gas, en el caso de las ecuaciones de Euler, ó plasma, en el caso de la MHD.

En este capítulo se describirá el funcionamiento de los métodos numéricos para obtener soluciones numéricas o aproximadas y se discutirá la validez y la implementación de ellos.

Discretización del dominio

Cuando se quiere resolver ecuaciones diferenciales parciales numéricamente, una posibilidad es trasladar el problema continuo a un problema discreto con una cantidad finita de puntos pues obviamente la cantidad de memoria de una computadora es finita e implementar una infinidad de puntos es imposible.

El primer paso para construir el problema discreto es definir un dominio para el problema, para hacer esto se selecciona una cantidad finita representativa de puntos dentro del dominio continuo. Una manera de hacer esto es construir al dominio discreto con puntos equidistantes entre vecinos. En el caso de un problema unidimensional, por ejemplo, si se desea tener N puntos en el dominio, basta con definir la distancia Δx entre ellos. Si L es la longitud del dominio espacial, entonces

$$\Delta x = \frac{L}{N - 1},$$

y así los puntos x_i quedan definidos como

$$x_i = x_0 + i\Delta x,$$

donde $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, y x_0 es la frontera izquierda del dominio continuo $[x_0, x_0 + L]$. De la misma manera se podría discretizar el dominio temporal. No obstante es importante guardar cierta relación entre el dominio espacial y temporal. Por el momento se definirán como t^n a las

etiquetas de los valores discretos en el tiempo. Se ha creado de esta manera una malla para el dominio $[x_0, x_0 + L] \times [t_0, t_f]$

Dentro de cada punto de la malla se ha definido naturalmente una cantidad de valores representativos para la función u , es así que se escogen los valores

$$u_i^n := u(x_i, t^n).$$

Lo que sigue es convertir el problema de ecuaciones diferenciales a un problema discreto. Para ilustrar esto, se analizará cómo es que se resolvería la ecuación de advección numéricamente utilizando diferencias finitas.

El esquema de diferencias finitas consiste en aproximar las derivadas en una ecuación diferencial por medio de las series de Taylor. Para aproximar la derivada espacial de una función suave $\varphi(x)$, se puede hacer de varias maneras:

- Método *Upwind*. Consiste en utilizar el valor de la función en puntos que estén a la derecha del punto donde queremos conocer la derivada.

$$\frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x} = \frac{\varphi(x_i + \Delta x) - \varphi(x_i)}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

- Método *Downwind*. Consiste en utilizar el valor de la función en puntos que estén a la izquierda del punto donde queremos conocer la derivada.

$$\frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x} = \frac{\varphi(x_i) - \varphi(x_i - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

- Método centrado. Consiste en un promedio entre el *Upwind* y el *Downwind*.

$$\frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x} = \frac{\varphi(x_i + \Delta x) - \varphi(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

Una observación a realizar es que con estas aproximaciones, el orden del error es de 1 o 2 solamente.

Usando estos elementos, se ilustra con la ecuación de advección (con velocidad de propagación a)

$$u_t + au_x = 0$$

que la versión discreta, siguiendo el método *Upwind*, es la siguiente

$$\begin{aligned} \frac{u(x_i, t^n + \Delta t) - u(x_i, t^n)}{\Delta t} + a \frac{u(x_i + \Delta x, t^n) - u(x_i, t^n)}{\Delta x} = \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0, \end{aligned}$$

y es a partir de esta ecuación que se obtiene una ecuación para la función en un tiempo t^{n+1}

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c [u_{i+1}^n - u_i^n]$$

donde

$$c = a / \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

es la razón entre la velocidad de propagación de la ecuación y la propagación dada por los parámetros del dominio Δx y Δt . A este número se le conoce como *Factor de Courant*. Esta cantidad ayuda a relacionar el valor que debe tener el paso temporal en relación con el paso espacial

$$\Delta t = \frac{c}{a} \Delta x.$$

Es importante que la velocidad de propagación de la ecuación sea mayor que la velocidad de propagación dada por los parámetros Δx y Δt , de lo contrario, el sistema evolucionaría con valores que no son aproximaciones, pues no estarían conectadas causalmente u_i^{n+1} con los valores de u en un tiempo t^n . En el caso de la ecuación de advección, la velocidad de propagación a da la solución a la ecuación característica (2.5); con la curva característica obtenida, se observa que $u_i^{n+1} = u(x_0 + i\Delta x, t^{n+1})$ depende de la función u evaluada en el punto $(x_i - a\Delta t, t^n)$, pues valen lo mismo. Al considerar un valor de c tal que $\Delta x/\Delta t > a$ se asegura que esté incluido el valor de $u(x_i - a * \Delta t, t^n)$ en los cálculos. Esto puede analizarse esquemáticamente en la figura (5.1)

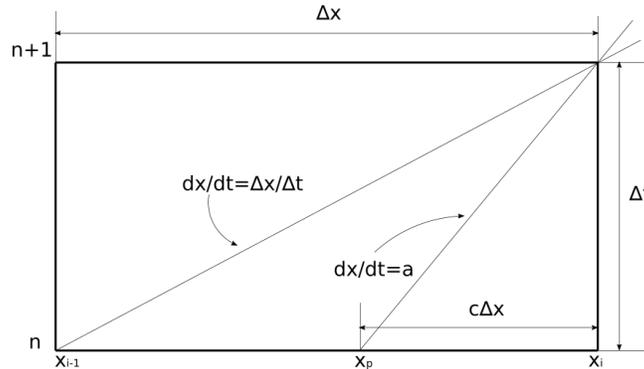


Figura 5.1: El factor de Courant c tiene que ser tal que el punto $x_p = x_i - a\Delta t$ de donde se propaga la información para el valor real de la función u_i^n esté contenido en $[x_{i-1}, x_i]$.

Por estas consideraciones se debe cumplir que

$$|c| < 1.$$

Algunos métodos numéricos que no se basan en diferencias finitas siguen manteniendo el enfoque de *Upwind*, *Downwind* y centrado, es decir que pueden seguir la dirección de la velocidad de propagación real o no. El código que se ha implementado en esta tesis es un esquema *Upwind*.

5.1. Método de líneas

A continuación se describe cómo es que se construye la solución global, incluyendo el dominio temporal para sistemas hiperbólicos con valores iniciales.

Para este estudio es conveniente observar un problema hiperbólico unidimensional

$$\begin{aligned} u_t(x, t) + F_x(u(x, t), x) &= S \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned} \quad (5.1)$$

El método de líneas es simplemente la aplicación del método de diferencias finitas para la parte temporal: Para encontrar el valor de la función una vez que se deja evolucionar el sistema a un tiempo Δt , se expande la función u usando la serie de Taylor con respecto al tiempo alrededor de $t = 0$

$$u(x, 0 + \Delta t) = u(x, 0) + u_t(x, 0)\Delta t + O(\Delta t^2).$$

Tomando de (5.1) los valores para $u(x, 0)$ y para $u_t(x, 0)$ se obtiene que

$$u(x, \Delta t) = u_0(x) - F_x(u_0(x))\Delta t + O(\Delta t^2).$$

Esto induce un sistema iterativo para encontrar una aproximación al valor de la función u en un tiempo $t = (n + 1)\Delta t$, tomando como referencia el valor de la función en un tiempo previo $t = n\Delta t$:

$$u(x, (n + 1)\Delta t) = u(x, n\Delta t) - F_x(u(x, n\Delta t))\Delta t + O(\Delta t^2). \quad (5.2)$$

Utilizando la misma convención que en diferencias finitas, se usa superíndice n para definir el paso temporal que se está realizando. El método numérico para evolucionar la solución del tiempo t^n al tiempo t^{n+1} queda expresado como

$$u^{n+1}(x) = u^n(x) - F_x(u^n(x))\Delta t + O(\Delta t^2). \quad (5.3)$$

Este esquema de diferencias finitas es muy básico y es posible obtener un mejor grado de precisión para la parte temporal usando integradores mas precisos que también pertenezcan al mismo esquema. El esquema utilizado en esta tesis es un Runge Kutta (RK) de orden 3 en el tiempo¹,

$$u^{n+1}(x) = \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{**}(x) + \frac{2}{3}rhs(u^{**})\Delta t, \quad (5.4)$$

donde

$$\begin{aligned} rhs(u) &= -F_x(u) \\ u^{**} &= \frac{3}{4}u^n(x) + \frac{1}{4}u^*(x) + \frac{1}{4}rhs(u^*)\Delta t \\ u^* &= u^n + rhs(u)\Delta t. \end{aligned}$$

Una de las ventajas que tiene éste método implementado es que tiene un error global de orden $O(\Delta t^4)$.

5.2. Volúmenes finitos

5.2.1. Metodos Conservativos

El esquema de volúmenes finitos es antes que nada un método que se clasifica dentro de los *Métodos Conservativos*, dichos métodos toman de base la forma integral de las leyes de conserva-

¹El esquema está presentado de la manera en la que fue programado. En esta forma se pueden reciclar arreglos ya definidos, de manera que se reduce la utilización de la memoria en el proceso.

ción.

Para ilustrar esto, considérese una ley de conservación

$$u_t + f_x(u) = 0. \quad (5.5)$$

Ahora, para encontrar una aproximación a la solución a (5.5), hay que incluir las soluciones débiles a esta ecuación.

Las soluciones débiles de (5.5) están definidas como todas las funciones $u(x, t)$ que satisfacen la forma integral de (5.5), es decir, todas aquellas en las cuales, para cualquier volumen rectangular $[t_1, t_2] \times [x_1, x_2]$ que esté contenido en el dominio del problema, se satisface que

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} [u_t + f_x(u)] dx dt = 0. \quad (5.6)$$

Distribuyendo y agrupando (5.6), se obtiene que

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) dx - \left[\int_{t_1}^{t_2} f(u(x_2, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} f(u(x_1, t)) dt \right], \quad (5.7)$$

se sigue de esta ecuación que

$$\bar{u}(t_2) = \bar{u}(t_1) - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\bar{f}_2 - \bar{f}_1], \quad (5.8)$$

donde $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$; \bar{u} es el promedio espacial de la variable u y \bar{f}_1, \bar{f}_2 son el promedio temporal de los flujos en x_1 y en x_2 , respectivamente.

Es natural la forma en la que se plantean los métodos numéricos conservativos a partir de la ecuación (5.8), pues basta con que, una vez discretizado el dominio, se evolucione la solución numérica u en cada celda utilizando la fórmula

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_{i+1/2} - f_{i-1/2}], \quad (5.9)$$

donde

$$f_{i+1/2} = f_{i+1/2}(u_{i-l}^n, u_{i-l+1}^n, \dots, u_{i+r-1}^n, u_{i+r}^n)$$

son funciones que dependen de los valores de u en las celdas contiguas a la celda con la etiqueta (i, n) . Una observación que debe realizarse es que l y r deben ser números enteros. A los valores de $f_{i+1/2}$ se les conoce como *flujos numéricos*.

Evidentemente es posible combinar el método de líneas para la evolución temporal con los métodos conservativos, basta con definir en la ecuación (5.4) los términos *rhs* como

$$rhs := -\frac{1}{\Delta x} (f_{i+1/2} - f_{i-1/2}).$$

A esta combinación de métodos es a lo que se conoce como volúmenes finitos, debido a que, a diferencia de diferencias finitas, es necesario calcular integrales en el "volumen" de cada celda.

5.2.2. Integración inter-celda

Al ser un método conservativo, el de volúmenes finitos considera promedios espaciales, por lo tanto es necesario definir sobre qué volúmen es donde se realizará la integración. La manera como se realiza esto es tomando como el centro de la i -ésima celda la posición en el punto x_i . Cada celda tendrá un ancho Δx , por lo tanto las fronteras de la i -ésima celda están posicionadas en $x_{i-1/2} := x_i - \frac{1}{2}\Delta x$, a la izquierda, y $x_{i+1/2} := x_i + \frac{1}{2}\Delta x$, a la derecha.

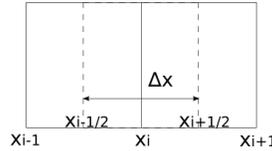


Figura 5.2: Al realizar la integración en cada celda hay que definir puntos nuevos de manera que el centro de las celdas esté en los puntos x_i .

Para realizar la integración una vez definido el dominio, se necesitan los valores de u en toda la celda $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$, y para esto se debe conocer a priori la solución a la ecuación (5.5), lo cual hace que parezca que se está en un callejón sin salida.

Una de las posibilidades es utilizar, como solución aproximada, la solución al problema de Riemann definido en cada frontera inter-celda

$$u_t + F_x(u) = 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L & x_{i-1/2} \leq x < x_i \\ u_R & x_i \leq x < x_{i+1/2} \end{cases} \quad (5.10)$$

donde se escoge $u_L = u_{i-1/2}^n$ y $u_R = u_{i+1/2}^n$.

Para definir de una manera razonable los valores $u_{i-1/2}^n$ y $u_{i+1/2}^n$ se pueden utilizar distintas aproximaciones reconstruyendo los valores esperados a partir de los valores definidos para u_i y sus vecinos cercanos.

A continuación se expresan los reconstructores utilizados en esta tesis.

- **Godunov.** Tiene este nombre debido a que se usa la aproximación del primer método de volúmenes finitos en la literatura, que fue expuesto por este autor. Se tienen los valores aproximados de u en la celda como

$$u_{i+1/2} = u_{i+1}$$

- **Minmod.** Este reconstructor utiliza aproximaciones lineales, es decir, se aproxima el valor de la función como

$$u_{i+1/2} = u_i + \sigma_i \frac{\Delta x}{2}$$

donde σ es una pendiente similar a la obtenida por una serie de Taylor. σ se obtiene utilizando la función minmod y el valor de las pendientes centradas en las fronteras intercelda:

$$\sigma_i = \text{minmod}(m_{i-1/2}, m_{i+1/2})$$

donde minmod está definida como

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| < |b| \text{ y } ab > 0 \\ b & \text{si } |b| < |a| \text{ y } ab > 0 \\ 0 & \text{si } ab < 0 \end{cases}$$

y la pendiente $m_{i+1/2}$ es

$$m_{i+1/2} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}.$$

- **MC (Monotonized Central)**. Aproximación lineal similar a minmod pero obtiene la pendiente de otra manera

$$\sigma_i = \text{minmod}[\text{minmod}(mc_i, 2m_{i-1/2}), \text{minmod}(mc_i, 2m_{i+1/2})]$$

donde

$$mc_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}.$$

- **WENO5 (Weighted Essentially Non Oscillatory)**. Interpolación obtenida utilizando 5 valores cercanos a u_i . Para este caso se utiliza u_L y u_R para referirse a los valores de la función en las fronteras izquierda y derecha de la celda x_i

$$u_R = \frac{1}{6}[\omega_{R_0}(2u_{i+3} - 7u_{i+2} + 11u_{i+1}) + \omega_{R_1}(-u_{i+2} + 5u_{i+1} + 2u_i) + \omega_{R_2}(-u_{i-1} + 5u_i + 2u_{i+1})]$$

$$u_L = \frac{1}{6}[\omega_{L_0}(-u_{i+2} + 5u_{i+1} + 2u_i) + \omega_{L_1}(-u_{i+1} + 5u_i + 2u_{i-1}) + \omega_{L_2}(2u_{i-2} + 7u_{i-1} + 11u_i)],$$

donde, para $k = 0, 1, 2$

$$\omega_{R_k} = \frac{a_{R_k}}{\sum_{j=0}^2 a_{R_j}},$$

$$\omega_{L_k} = \frac{a_{L_k}}{\sum_{j=0}^2 a_{L_j}}$$

$$a_{R_k} = \frac{d_{R_k}}{(\epsilon + b_{R_k})^2}$$

$$a_{L_k} = \frac{d_{L_k}}{(\epsilon + b_{L_k})^2}$$

$$d_{R_0} = 0.1d_0$$

$$d_{R_1} = 0.6d_0$$

$$d_{R_2} = 0.3d_0$$

$$d_{L_0} = 0.3d_0$$

$$d_{L_1} = 0.6d_0$$

$$d_{L_2} = 0.1d_0$$

$$b_{R_0} = \frac{13}{12}(u_{i+1} - 2u_{i+2} + u_{i+3})^2 + \frac{1}{4}(3u_{i+1} - 4u_{i+2} + u_{i+3})^2$$

$$b_{R_1} = \frac{13}{12}(u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(u_i - u_{i+2})^2$$

$$b_{R_2} = \frac{13}{12}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(u_{i-1} - 4u_i + 3u_{i+1})^2$$

$$b_{L_0} = \frac{13}{12}(u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2})^2$$

$$b_{L_1} = \frac{13}{12}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(u_{i-1} - u_{i+1})^2$$

$$b_{L_2} = \frac{13}{12}(u_{i-2} - 2u_{i-1} + u_i)^2 + \frac{1}{4}(u_{i-2} - 4u_{i-1} + 3u_i)^2,$$

donde se toma $\epsilon \ll 1$. En los trabajos de esta tesis $\epsilon = 1 \times 10^{-6}$.

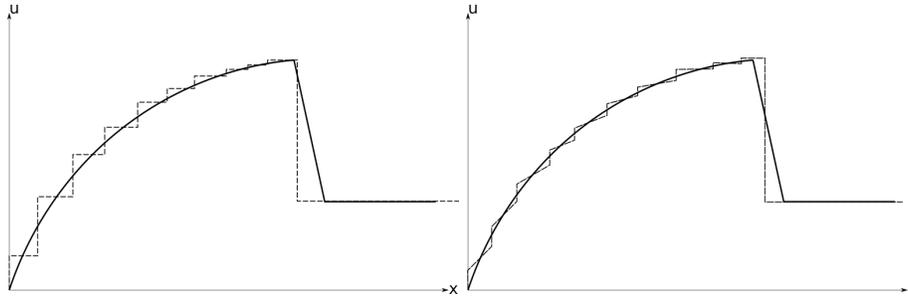


Figura 5.3: A la izquierda se presenta la reconstrucción de la función u utilizando la formula de Godunov y a la derecha utilizando la forma de la pendiente minmod.

Una vez obtenida esta solución para el problema de Riemann, a la cual se le llamará $u'(x, t)$, se evalúa la integral para obtener los flujos numéricos

$$f_{i+1/2}^n = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(u'(x_{1/2}, t)) dx, \quad (5.11)$$

que después serán utilizados para (5.9).

A pesar de que se tiene esta nueva aproximación, puede suceder que aún definiendo el problema de Riemann (5.10), encontrar la solución exacta u' no sea posible, o que también la integración de (5.11) resultante sea de mucha dificultad.

5.2.3. Aproximación HLL

Harten, Lax y van Leer propusieron una forma para aproximar numéricamente el valor de la integral (5.11), ya que no siempre es posible tener una solución analítica para el problema de Riemann intercelda (5.10). Antes de definir el valor aproximado de la integral se presentan a continuación ciertas observaciones de la solución a (5.10).

Considérese un volúmen de control $[x_L, x_R] \times [0, T]$. Donde T es un tiempo escogido y λ_L, λ_R son las velocidades de onda $\frac{\partial f}{\partial u}$ más rápidas posibles. En el caso de una sola variable conservativa, debido a que sólo hay dos valores para el problema de Riemann u_L, u_R , entonces sólo hay dos velocidades. Para el caso de leyes de conservación acopladas, las velocidades de onda posibles están dadas por los eigenvalores de la matriz Jacobiana de los flujos $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$. Se escoje la velocidad mayor para cada estado \mathbf{U}_L y \mathbf{U}_R .

La estructura de la solución está contenida en la región $[T\lambda_L, T\lambda_R]$ pues fuera de esta región, ya se tiene la solución, para $x_L \leq x \leq T\lambda_L$ la solución es $\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{U}_L$ y para $T\lambda_R \leq x \leq x_R$ la solución es $\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{U}_R$.

La forma integral para leyes de conservación (5.7) en el volúmen de control $[x_L, x_R] \times [0, T]$ se lee como

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{U}(x, T) dx = \int_{x_L}^{x_R} \mathbf{U}(x, 0) dx - \left[\int_0^T \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_R, t)) dt - \int_0^T \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_L, t)) dt \right] \quad (5.12)$$

La evaluación de la parte derecha de (5.12) resulta en

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{U}(x, T) dx = x_R \mathbf{U}_R - x_L \mathbf{U}_L + T(\mathbf{F}_L - \mathbf{F}_R) \quad (5.13)$$

donde $\mathbf{F}_L = \mathbf{F}(\mathbf{U}_L)$ y $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)$.

Por otra parte, la integral del lado izquierdo se puede dividir como sigue

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{U}(x, T) dx = \int_{x_L}^{T\lambda_L} \mathbf{U}(x, T) dx + \int_{T\lambda_L}^{T\lambda_R} \mathbf{U}(x, T) dx + \int_{T\lambda_R}^{x_R} \mathbf{U}(x, T) dx.$$

Evaluando el primer y el tercer término del lado derecho de la ecuación

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{U}(x, T) dx = \int_{T\lambda_L}^{T\lambda_R} \mathbf{U}(x, T) dx + (T\lambda_L - x_L) \mathbf{U}_L + (x_R - T\lambda_R) \mathbf{U}_L. \quad (5.14)$$

Comparando (5.13) y (5.14) resulta en

$$\int_{T\lambda_L}^{T\lambda_R} \mathbf{U}(x, T) dx = T(\lambda_R \mathbf{U}_R - \lambda_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_L - \mathbf{F}_R). \quad (5.15)$$

Dividiendo entre $T(\lambda_R - \lambda_L)$, se obtiene el promedio de la función \mathbf{U} sobre la región donde hay estructura. Esto es

$$\frac{1}{T(\lambda_R - \lambda_L)} \int_{T\lambda_L}^{T\lambda_R} \mathbf{U}(x, T) dx = \frac{\lambda_R \mathbf{U}_R - \lambda_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_L - \mathbf{F}_R}{\lambda_R - \lambda_L}. \quad (5.16)$$

Entonces, el valor promedio de la integral de la solución exacta al problema de Riemann entre las señales de menor y mayor velocidad a un tiempo T es una constante, suponiendo que las velocidades S_L y S_R son conocidas; tal constante es la parte derecha de (5.16) a la cual se le denotará \mathbf{U}^{hlie} .

Queda de esta manera definido un valor aproximado para la solución del problema de Riemann dentro del volumen $[x_L, x_R]$

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{si } \frac{x}{\Delta x} \leq \lambda_L, \\ \mathbf{U}^{\text{hlle}} & \text{si } \lambda_L \leq \frac{x}{\Delta x} \leq \lambda_R, \\ \mathbf{U}_R & \text{si } \lambda_R \leq \frac{x}{\Delta x}. \end{cases} \quad (5.17)$$

Utilizando (5.17) se puede obtener una aproximación para el flujo, a la cual se le denotará como \mathbf{F}^{hlle} , de manera similar a como se obtendría una aproximación en serie de Taylor

$$\mathbf{F}^{\text{hlle}} = \mathbf{F}_L + \lambda_L[\mathbf{U}^{\text{hlle}} - \mathbf{U}_L], \quad (5.18)$$

$$\mathbf{F}^{\text{hlle}} = \mathbf{F}_R + \lambda_R[\mathbf{U}^{\text{hlle}} - \mathbf{U}_R]. \quad (5.19)$$

Sustituyendo (5.16) en cualquiera de las ecuaciones (5.18) ó (5.19) se obtiene una fórmula para la aproximación del flujo en el volumen de control

$$\mathbf{F}^{\text{hlle}} = \frac{\lambda_R \mathbf{F}_L - \lambda_L \mathbf{F}_R + \lambda_L \lambda_R (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{\lambda_R - \lambda_L}. \quad (5.20)$$

Gracias a la ecuación (5.20), es posible obtener una fórmula para los flujos numéricos en el método de volúmenes finitos:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{\text{hlle}} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{si } 0 \leq \lambda_L \\ \frac{\lambda_R \mathbf{F}_L - \lambda_L \mathbf{F}_R + \lambda_L \lambda_R (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{\lambda_R - \lambda_L} & \text{si } \lambda_L \leq 0 \leq \lambda_R \\ \mathbf{F}_R & \text{si } \lambda_R \leq 0. \end{cases} \quad (5.21)$$

Dicha ecuación puede quedar sintetizada como

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{\text{hlle}} = \frac{\lambda_+ \mathbf{F}_L - \lambda_- \mathbf{F}_R + \lambda_- \lambda_+ (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{\lambda_+ - \lambda_-}, \quad (5.22)$$

tomando $\lambda_+ = \max[\lambda_R, 0]$ y $\lambda_- = \min[\lambda_L, 0]$.

5.2.4. Implementación en 3 dimensiones

Expandiendo los términos de la divergencia de (2.27) en las tres dimensiones se obtienen las leyes de conservación de la siguiente forma

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = \mathbf{S} \quad (5.23)$$

Donde \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} representan los flujos en la dirección x , y y z , respectivamente y \mathbf{S} es el término de la fuente de perturbación de las leyes conservativas, que se le llamará simplemente término fuente.

Para aplicar los métodos de volúmenes finitos en tres dimensiones, primero debe discretizarse el dominio espacial en cada dirección. Si el problema original está definido en el volumen $[x_{\min}, x_{\max}] \times$

$[y_{min}, y_{max}] \times [z_{min}, z_{max}]$, entonces el problema numérico se debe resolver sobre la malla

$$\begin{aligned} x_i &:= x_{min} + i\Delta x & i &= 0, 1, \dots, N_x \\ y_j &:= y_{min} + j\Delta y & j &= 0, 1, \dots, N_y \\ z_k &:= z_{min} + k\Delta z & k &= 0, 1, \dots, N_z \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{x_{max} - x_{min}}{N_x} \\ \Delta y &= \frac{y_{max} - y_{min}}{N_y} \\ \Delta z &= \frac{z_{max} - z_{min}}{N_z}. \end{aligned}$$

Para poder declarar un paso temporal Δt , se relaciona, por medio del factor de Courant c , con el incremento más pequeño entre las direcciones x, y, z , de la siguiente manera

$$\Delta t = c \text{mín}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

donde² $|c| < 1$.

Las variables conservativas quedan definidas en cada punto de la malla como

$$\mathbf{U}_{i,j,k}^n := \mathbf{U}(x_i, y_j, z_k, t^n).$$

Al aplicar los métodos de volúmenes finitos en tres dimensiones, la versión discretizada del problema es

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i,j,k}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j,k}^n &+ \Delta t \left[\frac{1}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i-1/2,j,k} - \mathbf{F}_{i+1/2,j,k}) + \frac{1}{\Delta y} (\mathbf{G}_{i,j-1/2,k} - \mathbf{G}_{i,j+1/2,k}) \right. \\ &\left. + \frac{1}{\Delta z} (\mathbf{H}_{i,j,k-1/2} - \mathbf{H}_{i,j,k+1/2}) + \mathbf{S}_{i,j,k}^n \right], \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde los flujos numéricos en las direcciones x, y, z se obtienen de la misma manera que en el caso unidimensional.

En el trabajo de esta tesis para poder utilizar el RK3 en la evolución temporal, se define el termino rhs de (5.4) como

$$\begin{aligned} rhs(\mathbf{U}) = &\left[\frac{1}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i-1/2,j,k} - \mathbf{F}_{i+1/2,j,k}) + \frac{1}{\Delta y} (\mathbf{G}_{i,j-1/2,k} - \mathbf{G}_{i,j+1/2,k}) \right. \\ &\left. + \frac{1}{\Delta z} (\mathbf{H}_{i,j,k-1/2} - \mathbf{H}_{i,j,k+1/2}) + \mathbf{S}_{i,j,k}^n \right], \end{aligned}$$

²Dado que las leyes de conservación son sistemas hiperbólicos con coeficientes no constantes, éste factor de Courant se define de manera que se espera que la velocidad de propagación de la solución numérica, $\Delta t / \text{mín}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, sea mayor que cualquiera de las velocidades características que pudieran presentarse. El tener un factor de Courant fijo tiene la ventaja de que es posible y más sencillo de realizar análisis de convergencia de la solución del código, pues la evolución temporal se mantiene constante, pero encontrar el valor de c adecuado se convierte en un proceso de ensayo y error. En la literatura se encuentran esquemas en el cual el factor de Courant es variable (y por lo tanto Δt también) que se manifiesta en la restricción de que se verifique en cada paso temporal que cualquier velocidad característica calculada en cualquier punto de la malla sea menor a la velocidad de propagación numérica, la ventaja de este tipo de acercamientos es que el problema evoluciona temporalmente de una manera más rápida y eficiente, pero hacer análisis de convergencia no es tan sencillo, además de que el control sobre el tiempo se tiene que hacer de una manera más cuidadosa.

y debido a que el error global de utilizar volúmenes finitos es de orden $O(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, se espera que el error global se mantenga de esta manera.

5.3. Condiciones de Frontera

Para que el problema (5.23) esté bien planteado es necesario especificar las condiciones en las fronteras. Numéricamente esto implica definir el comportamiento de la función en las caras del cubo donde se define el dominio del problema. Las condiciones de frontera utilizadas en esta tesis son de flujo saliente y periódicas

5.3.1. Flujo Saliente

Este tipo de condiciones evita que el flujo que sale del dominio numérico regrese y contamine la evolución del sistema. Para satisfacer este comportamiento se define el valor de las variables en las fronteras con el mismo valor que sus vecinos próximos, por ejemplo, para las caras $x = x_{min}$ y $x = x_{max}$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{Nx,j,k}^n &= \mathbf{U}_{Nx-1,j,k}^n \\ \mathbf{U}_{0,j,k}^n &= \mathbf{U}_{1,j,k}^n. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Este tipo de condiciones de fronteras es conveniente para problemas en los cuales habrá un flujo saliente de materia, como es el caso del tubo de choque de Sod (Sod, 1978).

5.3.2. Condiciones Periódicas

Estas condiciones consisten en identificar las caras del dominio para que los flujos fluyan periódicamente. Una analogía que se puede entender es que lo que sale por una cara, entra por la otra. Para las fronteras en $x = x_{min}$ y $x = x_{max}$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{Nx,j,k}^n &= \mathbf{U}_{1,j,k}^n \\ \mathbf{U}_{0,j,k}^n &= \mathbf{U}_{Nx-1,j,k}^n \end{aligned} \quad (5.26)$$

Este tipo de condiciones de frontera es conveniente en sistemas que presenten cierto tipo de simetría, por ejemplo, al realizar la identificación en la coordenada x , se obtiene una simetría cilíndrica.

5.4. Implementación para la MHD

Con la herramienta anterior desarrollada para resolver problemas hiperbólicos se puede obtener resultados numéricos a partir de las ecuaciones de la MHD y por medio de estos resultados se pueden modelar ciertas situaciones físicas que son difíciles de representar en el laboratorio.

En esta sección se mostrará explícitamente cómo es que se implementó el método de volúmenes finitos para las ecuaciones de la MHD.

5.4.1. Limpieza hiperbólica de la Divergencia

Las ecuaciones de la MHD resistiva junto con la ecuación de estado ya conforman un sistema cerrado de ecuaciones diferenciales parciales. Dadas las condiciones iniciales es posible generar una solución numérica a estas ecuaciones; no obstante, es necesario verificar que la condición en la divergencia del campo magnético esté satisfecha

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5.27)$$

Esta restricción se puede violar debido a errores computacionales en el campo magnético que se van acumulando. Existen diversas técnicas para hacer que las componentes vuelvan a satisfacer la restricción y se mantenga la divergencia cercana a cero al menos en un error despreciable. En esta tesis se implementa el método de la limpieza hiperbólica de la divergencia por medio de los multiplicadores de Lagrange generalizados (GLM) (Dedner et al., 2002). Para poder deducir el método es suficiente considerar el caso ideal de la MHD ($\eta = 0$), pues los términos resistivos no sufren modificación al ser términos de la fuente. El método se deduce al considerar que el error que existe en el valor de la divergencia se le puede remover del campo magnético utilizando la ecuación de inducción y para esto definimos una función escalar ψ de manera que la nueva ecuación de inducción con el término de corrección tiene la forma

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nabla \psi = 0 \quad (5.28)$$

Esta función ψ se relaciona con la divergencia por medio de un operador diferencial \mathcal{D} , que por el momento permanecerá indefinido, por medio de la siguiente ecuación:

$$\mathcal{D}(\psi) + \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5.29)$$

Aplicando $\nabla \cdot$ a (5.28) se obtiene

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} + \nabla^2 \psi = 0, \quad (5.30)$$

aplicando \mathcal{D} a (5.30) se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{D}(\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} + \nabla^2 \mathcal{D}(\psi) = 0, \quad (5.31)$$

aplicando $\partial/\partial t$ a (5.29) se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{D}(\psi)}{\partial t} + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} = 0 \quad (5.32)$$

y aplicando ∇^2 a (5.29) se obtiene

$$\nabla^2 \mathcal{D}(\psi) + \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0. \quad (5.33)$$

De las ecuaciones (5.30)-(5.33) se obtiene que

$$\frac{\partial \mathcal{D}(\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} - \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}(\psi)}{\partial t} - \nabla^2(\psi) = 0. \quad (5.35)$$

De estas ecuaciones se tiene que $\nabla \cdot \mathbf{B}$ y ψ satisfacen las mismas ecuaciones para cualquier elección de \mathcal{D} .

- Una corrección parabólica consiste en escoger el operador diferencial como

$$\mathcal{D}(\psi) := \frac{1}{c_p^2} \psi \quad (5.36)$$

que sustituyendo en (5.35) resulta en una ecuación parabólica para ψ que tiene la forma de la ley de disipación de calor

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - c_p^2 \nabla^2(\psi) = 0 \quad (5.37)$$

Este tipo de corrección tiende a amortiguar el error en el valor de la divergencia.

- Una corrección hiperbólica consiste en escoger el operador diferencial como

$$\mathcal{D}(\psi) := \frac{1}{c_h^2} \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (5.38)$$

que sustituyendo en (5.35) resulta en una ecuación hiperbólica para ψ que tiene la forma de una ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c_h^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (5.39)$$

Este tipo de corrección tiende a transportar el error en el valor de la divergencia hacia las fronteras.

Para este trabajo se utilizó una combinación de ambos operadores diferenciales

$$\mathcal{D}(\psi) := \frac{1}{c_h^2} \frac{\partial}{\partial t} \psi + \frac{1}{c_p^2} \psi \quad (5.40)$$

Sustituyendo en (5.29) se obtiene

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{B}) = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi. \quad (5.41)$$

Ahora, debido a que en esta nueva formulación la ley de inducción está modificada

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} - \nabla(\psi) \quad (5.42)$$

y que se es conciente de que, aún a causa errores numéricos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0,$$

se tienen ligeras modificaciones en algunas de las otras leyes de conservación. Para la ley de conservación del momentum

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \left(P + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{I} \right] = (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \quad (5.43)$$

y para la ley de conservación de la energía, considerando las modificaciones en la ley de inducción al desarrollar el término $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$, se tiene que

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(E + P + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \right] = -\nabla \cdot (\eta \mathbf{J} \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \psi). \quad (5.44)$$

Es entonces que las nuevas ecuaciones considerando la limpieza de la divergencia, es decir las ecuaciones GLM-MHD quedan como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] &= 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \left(P + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{I} \right] &= (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(E + P + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \right] &= -\nabla \cdot (\eta \mathbf{J} \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \psi) \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{v} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{v} + \nabla(\psi) \mathbf{I}] &= \nabla \times [\eta \cdot \mathbf{J}] \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{B}) &= -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi \end{aligned} \quad (5.45)$$

Que contienen una variable conservativa más, y en consecuencia tres flujos numéricos extra, que las ecuaciones de la MHD (4.1).

5.4.2. Velocidades Características

Para poder implementar los flujos numéricos es necesario calcular las velocidades características presentes en cada flujo de la MHD. Esto se realiza calculando los eigenvalores de la matriz jacobiana $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$. Debido a que los flujos son esencialmente iguales para cada dirección, se calcularán las velocidades características de la matriz asociada al flujo en x , pues para las velocidades en y y en z el procedimiento es análogo.

Las ecuaciones de GLM-MHD en la dirección x para el caso unidimensional³ son

³A pesar de que el problema es en una dimensión, es decir que todas las variables dependen de la coordenada x , las ecuaciones de la MHD siguen presentando considerando la evolución de v_y y v_z , a diferencia del caso unidimensional de las ecuaciones de Euler. Esto se debe a que los flujos numéricos, tanto de la energía, como de las componentes del campo magnético B_y y B_z , dependen de estas velocidades. No obstante, tomando el campo magnético como cero inicialmente, hace que estas velocidades dejen de importar en la evolución del sistema.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v_x^2 + p + \frac{1}{2} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \right) &= (\nabla \cdot \mathbf{B}) B_x, \\
\frac{\partial (\rho v_y)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x v_y - B_x B_y) &= 0, \\
\frac{\partial (\rho v_z)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x v_z - B_x B_z) &= 0, \\
\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[v_x (E + P + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2) - B_x (v_x B_x + v_y B_y + v_z B_z) \right] &= 0, \\
\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (B_y v_x - B_x v_y) &= 0, \\
\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (B_z v_x - B_x v_z) &= 0, \\
\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \frac{\partial B_x}{\partial x} &= -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Para probar la hiperbolicidad del sistema unidimensional basta con mostrar que la matriz \mathcal{A} de la forma cuasilineal de la forma homogénea de (5.45)

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathcal{A}(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0 \tag{5.47}$$

es diagonalizable con eigenvalores reales. Aquí $\mathbf{W} = (\rho, v_x, v_y, v_z, B_x, B_y, B_z, P, \psi)$ es el vector de

variables primitivas y se encuentra que

$$\mathcal{A}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} v_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_x & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & v_x & 0 & -\frac{B_y}{\rho} & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_x & -\frac{B_z}{\rho} & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & -v_y & v_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & -v_z & 0 & v_x & 0 & 0 \\ 0 & \gamma P & 0 & 0 & (\gamma - 1)\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} & 0 & 0 & v_x & (1 - \gamma)B_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_h^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

De donde se obtienen nueve valores propios dados por

$$\begin{aligned} \lambda_{1_x} &= -c_h, & \lambda_{2_x} &= v_x - C_{f_x}, & \lambda_{3_x} &= v_x - C_{A_x}, \\ \lambda_{4_x} &= v_x - C_{s_x}, & \lambda_{5_x} &= v_x, & \lambda_{6_x} &= v_x + C_{s_x}, \\ \lambda_{7_x} &= v_x + C_{A_x}, & \lambda_{8_x} &= v_x - C_{f_x}, & \lambda_{9_x} &= c_h, \end{aligned} \quad (5.49)$$

donde

$$C_{A_x}^2 = \frac{B_x^2}{\rho} \quad (5.50)$$

$$C_{f_x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma P + \mathbf{B}^2}{\rho} - \sqrt{\left(\frac{\gamma P + \mathbf{B}^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma P B_x^2}{\rho^2}} \right] \quad (5.51)$$

$$C_{s_x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma P + \mathbf{B}^2}{\rho} + \sqrt{\left(\frac{\gamma P + \mathbf{B}^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma P B_x^2}{\rho^2}} \right], \quad (5.52)$$

son las velocidades de Alfvén, magnetosónica rápida y magnetosónica lenta, respectivamente.

Con estos eigenvalores es posible calcular los flujos numéricos (5.22) para el sistema (5.45), y utilizando las condiciones de frontera apropiadas es que se puede modelar numéricamente la evolución del sistema.

En este capítulo se presentaron las partes importantes del método numérico que se utilizó para

construir el código.

Una manera secuencial para construir el código puede ser descrita de la siguiente forma: primero se discretiza el dominio espacial, luego se define el valor de las variables conservativas al inicio de la simulación, posteriormente se utiliza una regla de evolución temporal, en este caso es según la ecuación (5.24) en conjunto con (5.4) y por último se imponen las condiciones de frontera apropiadas. La regla de evolución temporal utiliza flujos numéricos, que pueden modificarse de manera conveniente utilizando cualquiera de los tres reconstructores presentados, para después calcularse con la aproximación HLLE.

En el siguiente capítulo se presentan algunas pruebas que se encuentran en la literatura para métodos basados en volúmenes finitos; implementarlas consiste en definir las condiciones iniciales y de frontera, para después dejar evolucionar el sistema. Debido a que el código se ha implementado desde hace algunas décadas, es fácil encontrar resultados sobre los cuales comparar la capacidad del código.

Capítulo 6

Pruebas Numéricas

Es importante poder tener una idea de qué tan poderoso es el código que se propone para realizar simulaciones, en este sentido se realizan distintas pruebas en las cuales se puede observar qué tan eficiente es el código para manejar discontinuidades y propagar las ondas dadas condiciones de frontera específicas.

6.1. Pruebas de la MHD ideal en 1 dimensión

Para las pruebas numéricas de la magnetohidrodinámica en una dimensión se presentan las correspondientes al problema de Riemann, es decir que habrá dos valores para las variables primitivas: $\rho_L, P_L, v_{xL}, v_{yL}, v_{zL}, B_{xL}, B_{yL}$ y B_{zL} para el estado izquierdo; $\rho_R, P_R, v_{xR}, v_{yR}, v_{zR}, B_{xR}, B_{yR}$ y B_{zR} para el estado derecho.

El dominio espacial que se utilizó fue de $[-0.5, 0.5]$ y el factor de Courant utilizado en las simulaciones fue de 0.25 para las pruebas Brio-Wu, Ryu-Jones 2a y Ryu Jones 3b; para la prueba Ryu-Jones 2a se utilizó un factor de Courant de 0.08. Para la limpieza hiperbólica de la divergencia se utilizó un valor de $c_h = 0.01$ y $c_p = \sqrt{c_h}$. El número de celdas que se ha utilizado fue de 800 para la coordenada x y 4 para la coordenada y y z .

A continuación se muestra una tabla con los valores específicos para cada problema

Tests	γ	ρ	P	v_x	v_y	v_z	B_x	B_y	B_z
Brio-Wu									
Estado Izq.	5/3	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.75	1.0	0.0
Estado Derecho	5/3	0.125	0.1	0.0	0.0	0.0	0.75	-1.0	0.0
Ryu-Jones 1b									
Estado Izq.	5/3	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	$3/\sqrt{4\pi}$	$5/\sqrt{4\pi}$	0.0
Estado Derecho	5/3	0.1	10.0	0.0	0.0	0.0	$3/\sqrt{4\pi}$	$2/\sqrt{4\pi}$	0.0
Ryu-Jones 2a									
Estado Izq.	5/3	1.08	0.95	1.2	0.01	0.5	$2/\sqrt{4\pi}$	$3.6/\sqrt{4\pi}$	$2/\sqrt{4\pi}$
Estado Derecho	5/3	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	$2/\sqrt{4\pi}$	$4/\sqrt{4\pi}$	$2/\sqrt{4\pi}$
Ryu-Jones 3b									
Estado Izq.	5/3	1.0	1.0	-1.0	0.00	0.0	0.0	1.0	0.0
Estado Derecho	5/3	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0

6.1.1. Brio-Wu

La primera prueba que se realizó fue la de un tubo de choque, propuesta en (Brio and Wu, 1988). Esta prueba es importante por que es una extensión de la prueba del tubo de choque de Sod presente en las pruebas hidrodinámicas (Sod, 1978), así que, aunado a la estructura hidrodinámica de la evolución, se espera observar componentes magnetohidrodinámicas.

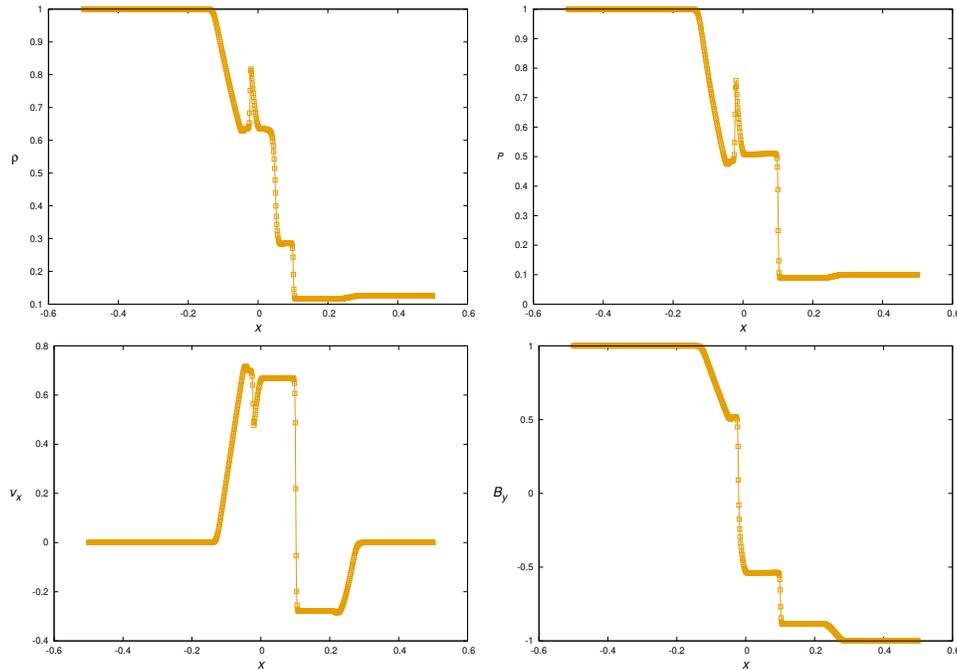


Figura 6.1: Densidad, presión, velocidad y campo magnético del tubo de choque Brio-Wu a un tiempo $t=0.1$

Se presentan en la figura 6.1 las gráficas de la presión, la densidad, la componente del campo magnético en y y la velocidad en x . Como se esperaba, se observa que están presentes las ondas de Rarefacción en la region entre $x \approx 0.2$ y 0.25 , las ondas de contacto en $x \approx 0.5$ y las ondas de choque en 0.1 . Se puede observar en la onda de contacto que la componente del campo magnético en y se mantiene constante al igual que la presión y la temperatura. Debido a que en el choque también hay una variación del campo magnético, este corresponde entonces a una onda magnetosónica rápida. El pico que se observa entre la onda de contacto y la de rarefacción corresponde a una onda magnetosónica lenta. Se observa en comparación con los resultados de la referencia que las discontinuidades los picos de las ondas magnetosónicas están localizados en las mismas regiones, la amplitud de estos picos está en el rango de precisión en el cual el error es menor que el 1 %.

6.1.2. Ryu-Jones 1b

Esta prueba se presenta en (Ryu and Jones, 1994). Es similar a la prueba del tubo de choque de Brio-Wu pero en este caso la diferencia entre el estado izquierdo y el derecho es de una magnitud

mayor. Debido a esta diferencia, la onda de choque tiene una velocidad de propagación mucho mayor.

Por medio de esta prueba se puede ver si el algoritmo numérico es capaz de capturar choques rápidos, dos rarefacciones de las cuales una es lenta, un choque lento y la discontinuidad de contacto.

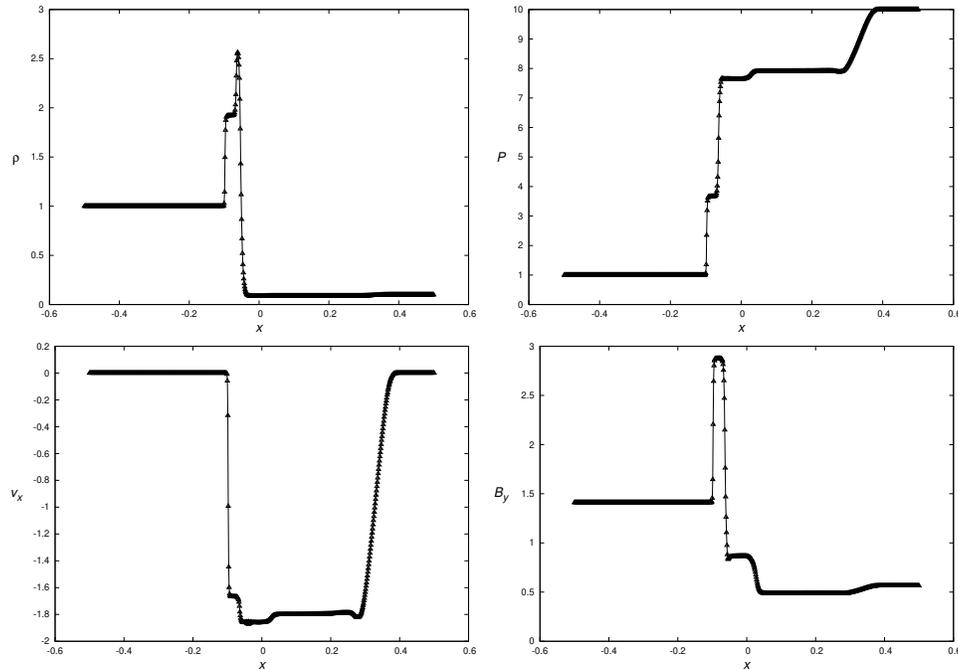


Figura 6.2: Densidad, presión, velocidad y campo magnético del tubo de choque Ryu-Jones 1b a un tiempo $t=0.03$

En la figura 6.2 se presentan los resultados de las simulaciones. El choque rápido está en $x \approx 0.1$, el choque lento está en $x \approx -0.075$, la discontinuidad de contacto aparece en $x \approx -0.061$ y la rarefacción lenta está en $x \approx 0.040$ y la rarefacción rápida se localiza en $x \approx 0.34$. La comparación con la referencia muestra en la gráfica que corresponde a la velocidad que hay una pequeña oscilación en la región $[-0.1, 0.0]$, no obstante la amplitud de esta oscilación tiene un valor menor que el 2%, la localización de las ondas de la simulación realizada con el código de esta tesis es consistente con la de la referencia.

6.1.3. Ryu-Jones 2a

Esta prueba está presentada en (Ryu and Jones, 1994). La prueba consiste en un tubo de choque que presenta un campo tridimensional y estructura de velocidad y rotación del plano del campo magnético.

En la figura 6.3 se presenta la densidad, presión, velocidad y campo magnético en un tiempo $t = 0.2$. Es importante por que presenta discontinuidades rotacionales que se propagan hacia los lados de la discontinuidad de contacto.

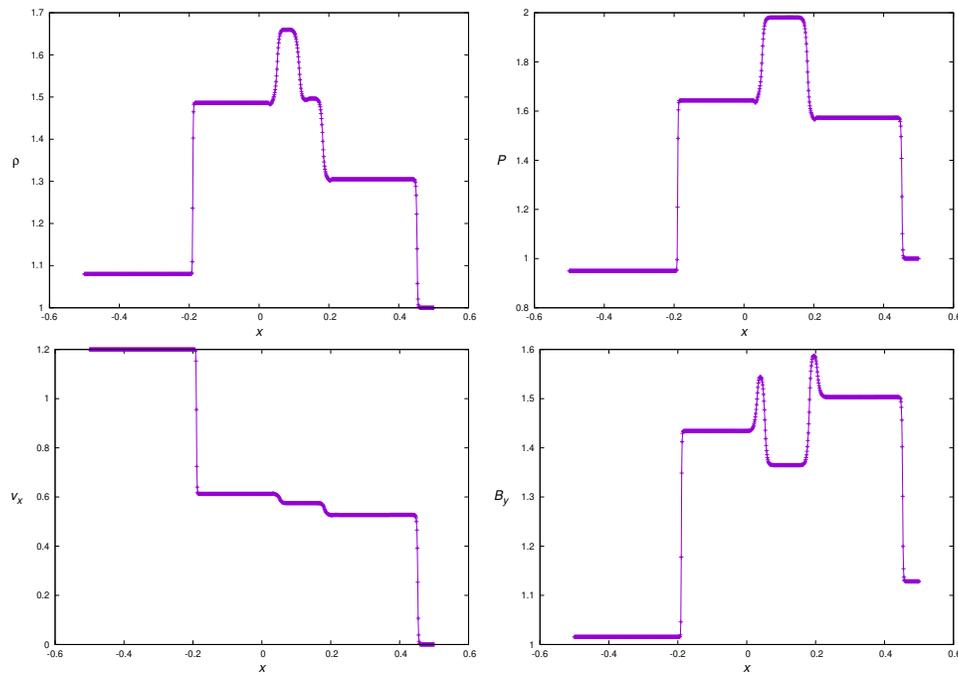


Figura 6.3: Densidad, presión, velocidad y campo magnético del tubo de choque Ryu-Jones 2a a un tiempo $t=0.2$

Se observa que la discontinuidad de contacto se localiza en el intervalo $[0, 0.2]$, esto es consistente con las gráficas mostradas en la referencia, no obstante, existe una pequeña oscilación presente en la gráfica de la presión justo a la izquierda de la discontinuidad de contacto. esta oscilación se debe al algoritmo integrador HLLE y corresponde al análisis planteado en (Gonzales-Aviles, 2017) en el cual se observa la misma oscilación en la presión. Las discontinuidades rotacionales del campo magnético B_y se localizan en satisfactoriamente a la izquierda y derecha de la discontinuidad de contacto en la misma región que en la referencia. Las gráficas presentan que el perfil de la onda de contacto ha sido suavizado, y que las ondas de choque que se encuentran cercanas a $x = 0.5$ se desplazan ligeramente más lentas, no obstante, este resultado es consistente con los obtenidos al utilizar el algoritmo HLLE.

6.1.4. Ryu-Jones 3b

La prueba se encuentra en (Ryu and Jones, 1994). Esta prueba sirve para evaluar la capacidad del código para capturar ondas de rarefacción magnetosónicas.

En la figura 6.4 se muestra la densidad y la presión, en la figura 6.5 velocidad y campo magnético, ambas figuras están tomadas en un tiempo $t = 0.1$. La solución numérica presenta satisfactoriamente dos rarefacciones intensas, una localizada aproximadamente en $x \in [-0.25, -0.15]$ y $x \in [0.15, 0.25]$.

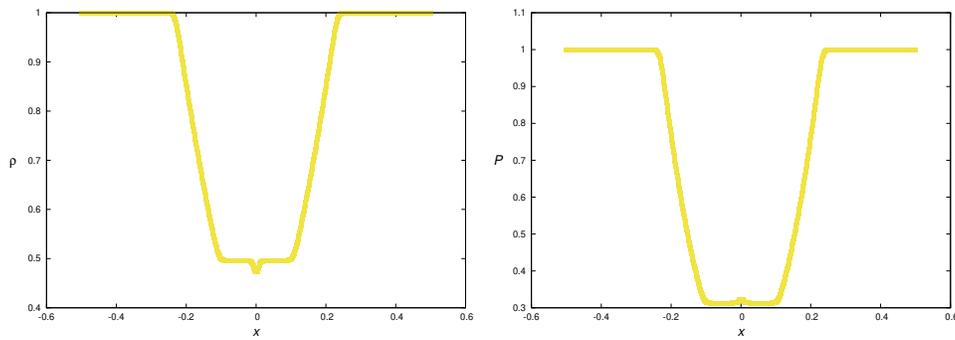


Figura 6.4: Densidad, presión del tubo de choque Ryu-Jones 3b a un tiempo $t=0.1$

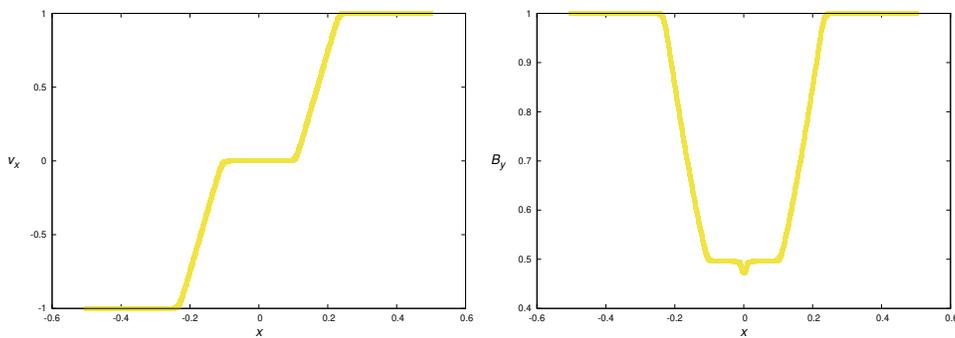


Figura 6.5: Velocidad y campo magnético del tubo de choque Ryu-Jones 3b a un tiempo $t=0.1$

La localización de las ondas de rarefacción es consistente con las gráficas presentadas en (Gonzales-Aviles, 2017), también para esta prueba se observa un pico en $x = 0$ para las gráficas del campo magnético, la densidad y la presión. Este pico se debe al algoritmo integrador y también se encuentra presente en los resultados del test de las referencias.

6.2. Pruebas de la MHD ideal en 2 dimensiones

6.2.1. Vortice de Orszag-Tang

Este problema fue presentado en (Orszag and Tang, 1979). Es una prueba muy utilizada para comparar simulaciones numéricas de la MHD. Sirve para medir la robustez del código en el manejo de la formación de choques y la transición para la turbulencia supersónica en la MHD de dos dimensiones.

Con esta prueba se pueden hacer estimaciones de la contribución de los monopolos magnéticos en la simulación magnética del problema, ya que se manifiestan regiones en las cuales $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$.

Para construir el test se utilizan las siguientes especificaciones

Dimensiones	$[0, 1] \times [0, 1]$
Número de celdas	$[512] \times [512]$
Factor CFL	0.25
Coficiente C_h	0.01
Coficiente C_p	$\sqrt{0.18}C_h$
Condiciones de frontera	Periódicas
Valor de γ	5/3
Reconstructor	Minmod

Para los valores iniciales se utilizan componentes periódicas con

ρ_0	$25/36\pi$
P_0	$5/12\pi$
v_x	$-v_0 \sin[2\pi y]$
v_y	$v_0 \sin[2\pi x]$
B_x	$-B_0 \sin[2\pi y]$
B_y	$B_0 \sin[4\pi x]$

donde $v_0 = 1$ y $B_0 = 1/\sqrt{4\pi}$.

Los datos iniciales para ρ y P se calculan usando $\beta = 10/3$ y el número Mach $M = 1$, se obtienen de la siguiente forma (Dai and Woodward, 1998)

$$\beta_0 = 8\pi P_0$$

$$M = \frac{\rho_0}{\gamma P_0}$$

El campo magnético se calcula a través de un potencial vectorial \mathbf{A} definido en dos dimensiones como

$$\mathbf{A} = B_0 \left(\frac{\cos(4\pi x)}{4\pi} + \frac{\cos(2\pi y)}{2\pi} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

De manera que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Esto garantiza que $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$ inicialmente.

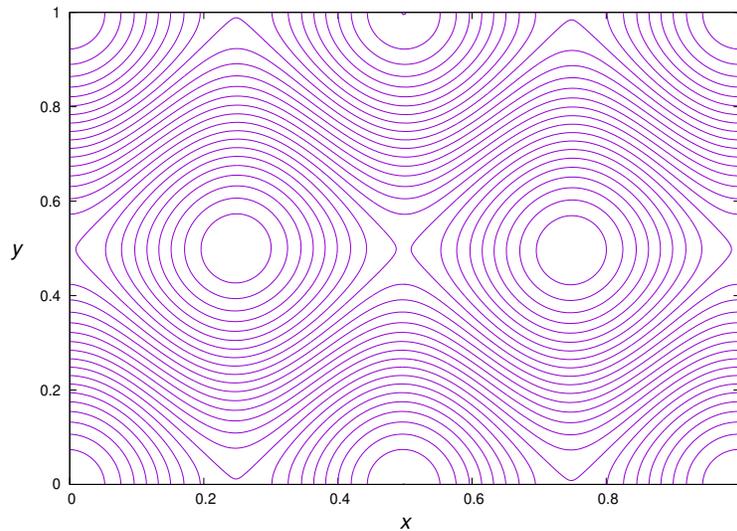


Figura 6.6: Gráfica de las líneas de campo del campo magnético en $t = 0$ de la prueba de vortice de Orszag-Tang

En la figura 6.7 se presentan las gráficas de la densidad, presión, valor absoluto de la divergencia y número de mach en $t = 0.5$.

En las gráficas de la presión y la densidad se aprecia que ambas cantidades presentan el mismo tipo de variación en las mismas regiones. Se puede observar que la velocidad Mach incrementa en las regiones en donde la densidad y la presión disminuyen y viceversa, es a este fenómeno que se le asocia la característica de la turbulencia. También es importante observar que el código numérico tiene problemas en mantener la divergencia nula en las regiones de alta turbulencia.

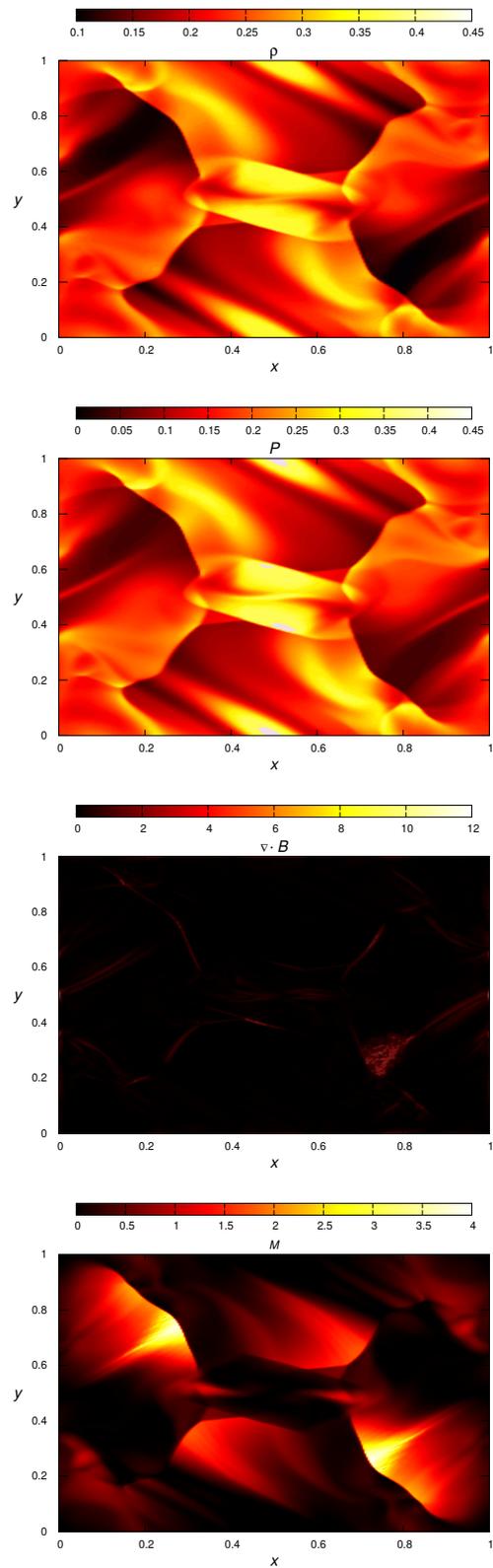


Figura 6.7: Gráficas de la densidad, presión, valor absoluto de la divergencia, y número Mach de la prueba del vortice de Orszag-Tang al tiempo $t = 0.5$

En la figura 6.8 se presenta una comparación de las resoluciones para la presión en $x = 0.5$ a lo largo del eje y . Se observa que al aumentar la resolución, se tiene mejor definición en la estructura del sistema, que los puntos donde se encuentran los máximos y mínimos se mantienen fijos y que el perfil va convergiendo en las últimas resoluciones.

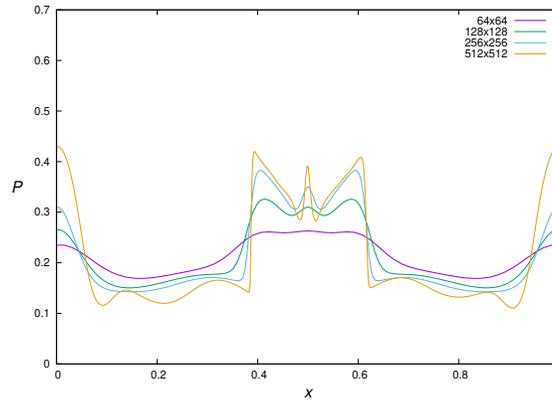


Figura 6.8: Presión en $x = 0.5$ a lo largo del eje y en un tiempo $t = 0.5$ usando distintas resoluciones para la prueba del vortice de Orszag-Tang

6.2.2. Rotor

El problema del rotor, presentado en (Balsara and Spicer, 1999) consiste en una distribución cilíndrica que gira rápidamente mientras está en un campo magnético uniforme en la dirección x . El cilindro rota uniformemente con velocidad angular constante ω y tiene una densidad mayor que el resto del ambiente.

Las especificaciones que se utilizan son

Dimensiones	$[0, 1] \times [0, 1]$
Número de celdas	$[512] \times [512]$
Factor CFL	0.05
Coficiente C_h	0.01
Coficiente C_p	$\sqrt{0.18}C_h$
Condiciones de frontera	Onda saliente
Valor de γ	1.4
Reconstructor	Minmod

Para representar el cilindro se utiliza una función de degradado f definida como

$$f = \frac{r_1 - r}{r_1 - r_0},$$

donde $r = \sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2}$, $r_0 = 0.1$ y $r_1 = 0.115$.

De esta manera se tiene que

$$(\rho, v_\phi) = \begin{cases} (10, \omega r) & \text{para } r < r_0 \\ (1 + 9f, f\omega r_0) & \text{para } r_0 \leq r \leq r_1 \\ (1, 0) & \text{para } r_1 < r \end{cases}$$

donde $\omega r_0 = 2$.

Las condiciones iniciales que se utilizan para el resto de las variables son

P_0	1.0
v_z	0.0
B_x	$5/\sqrt{4\pi}$
B_y	0.0
B_z	0.0

Los resultados de la evolución muestran que el rotor comienza a girar con la velocidad inicial. El campo magnético uniforme en dirección x hace que se generen ondas magnetosónicas que disiparán al rotor. El rotor comenzará a lanzar ondas de Alfvén hacia afuera del cilindro. Debido a la presión magnética, su forma circular será progresivamente deformada a una forma ovalada.

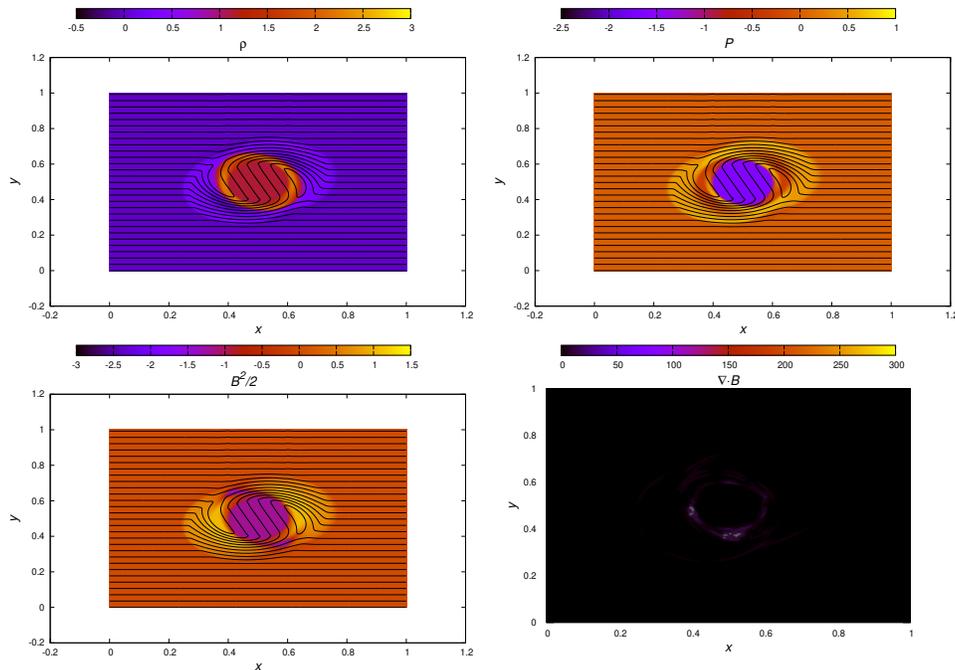


Figura 6.9: Logaritmo de la densidad, logaritmo de la presión, logaritmo de la presión magnética, divergencia junto con las líneas de campo magnético en un tiempo $t = 0.15$ para la prueba del rotor.

Imágenes de la densidad, presión del gas, presión magnética y las líneas de campo magnético al tiempo $t = 0.15$ se presentan en la figura 6.9.

La constricción de la nulidad de la divergencia del campo magnético tiene valores que son muy grandes en las regiones donde empieza a achatarse el rotor. A pesar de que el valor de la divergencia es bajo en la mayoría del dominio hay regiones donde la constricción no se satisface.

Para ver que la solución numérica sea consistente se calcula la componente y del campo magnético a lo largo del corte $x = 0.5$ para cuatro resoluciones distintas. La comparación de las gráficas se muestra en la figura 6.10

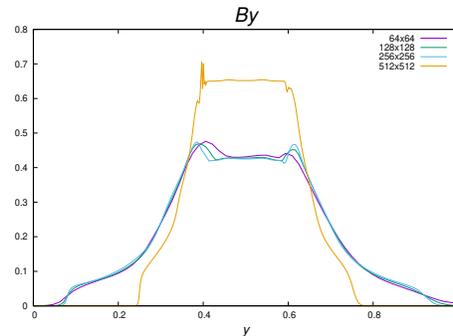


Figura 6.10: Valores de B_y usando distintas resoluciones en $x = 0.5$ a lo largo del eje y en un tiempo $t = 0.5$ para la prueba del Rotor

6.2.3. Ondas explosivas MHD

Esta prueba se caracteriza por una explosión que se propaga de una región de presión alta a una de presión baja donde la presión magnética domina.

La prueba es importante por que indica que si el código puede soportar sistemas en donde se desarrollen choques, regiones de flujos suaves y campos magnéticos intensos y se encuentra en (Shen et al., 2006).

Este tipo de problemas presenta la característica que el parámetro β del plasma es pequeño.

Las especificaciones son

Dimensiones	$[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$
Número de celdas	$[512] \times [512]$
Factor CFL	0.01
Coficiente C_h	0.01
Coficiente C_p	$\sqrt{0.18}C_h$
Condiciones de frontera	Onda saliente
Valor de γ	1.4
Reconstructor	Minmod

Para representar la onda expansiva se considera una diferencia de presión muy grande entre el interior de una circunferencia de radio 0.125 y el exterior. Así la presión inicial está definida como

$$P = \begin{cases} 10 & \text{si } r \leq 0.125 \\ 1 & \text{si } r > 0.125 \end{cases}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Las condiciones iniciales para el resto de las variables son

ρ_0	1.0
v_x	0.0
v_y	0.0
v_z	0.0
B_x	$10/\sqrt{2}$
B_y	$10/\sqrt{2}$
B_z	0.0

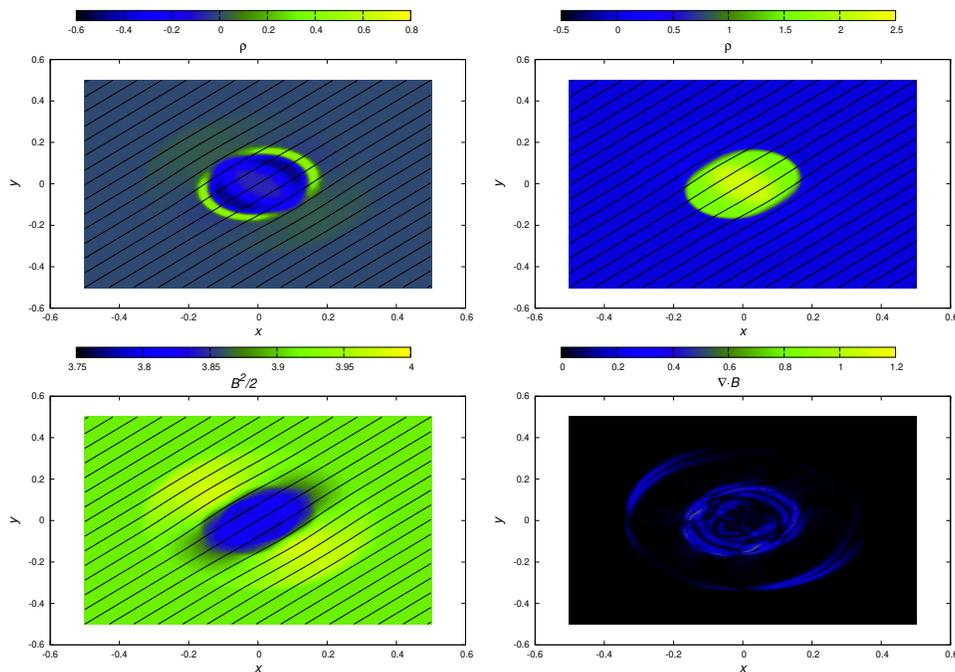


Figura 6.11: Logaritmo de la densidad, logaritmo de la presión, logaritmo de la presión magnética, divergencia y las líneas de campo magnético en un tiempo $t = 0.15$ para la prueba de la onda explosiva.

En la figura 6.11 se presenta la densidad, presión, presión magnética y la divergencia. Se observa que las líneas de campo magnético son poco perturbadas por la onda explosiva, sin embargo la forma esférica de la propagación se ve modificada debido al campo magnético.

6.2.4. Hoja de Corriente

La prueba de la hoja de corriente fue propuesta en (Gardiner and Stone, 2005) y estudiada en el contexto de refinamiento adaptativo de mallas por (Fromang et al., 2006). Esta prueba describe la evolución de dos hojas de corriente inicialmente definidas por una configuración de campo magnético discontinuo. La resolución juega un papel importante en la viscosidad y la difusión que se traduce en efectos que suavizan choques y producen una resistividad numérica, esta situación genera el fenómeno de reconexión magnética que no sucede teóricamente en el régimen ideal de la MHD.

Las especificaciones de la prueba son

Dimensiones	$[0.0, 2.0] \times [0.0, 2.0]$
Número de celdas	$[512] \times [512]$
Factor CFL	0.05
Coefficiente C_h	0.01
Coefficiente C_p	$\sqrt{0.18}C_h$
Condiciones de frontera	Periodica
Valor de γ	1.4
Reconstructor	WENO5

En este caso las condiciones iniciales se representan por el campo magnético producido por una hoja de corriente

$$B_y = \begin{cases} -1 & \text{si } |x - 1| \leq 0.5 \\ 1 & \text{si } |x - 1| > 0.5 \end{cases}$$

El resto de las condiciones iniciales está definido como

ρ_0	1.0
P	0.0
v_x	$0 + 0.1 \sin(\pi y)$
v_y	0.0
v_z	0.0
B_x	$10/\sqrt{2}$
B_z	0.0

donde se tiene que para generar las inestabilidades iniciales que conduzcan a la reconexión es importante la perturbación que se hace a la componente en x de la velocidad, que está descrita en la tabla anterior.

En la figura 6.12 se muestran las líneas de campo para la hoja de corriente de Gardiner en $t = 4$, se observa que para este tiempo ya existe el fenómeno de reconexión magnética, en las regiones donde se cierran las líneas de campo se generan “islas” sobre las cuales hay concentración de densidad y de presión hidrostática, mientras que en estas regiones la presión magnética disminuye, como se puede observar en la figura 6.13.

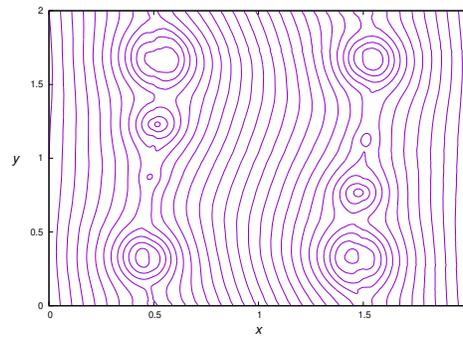


Figura 6.12: Líneas de campo magnético para la prueba de la hoja de corriente de Gardiner en $t = 4$

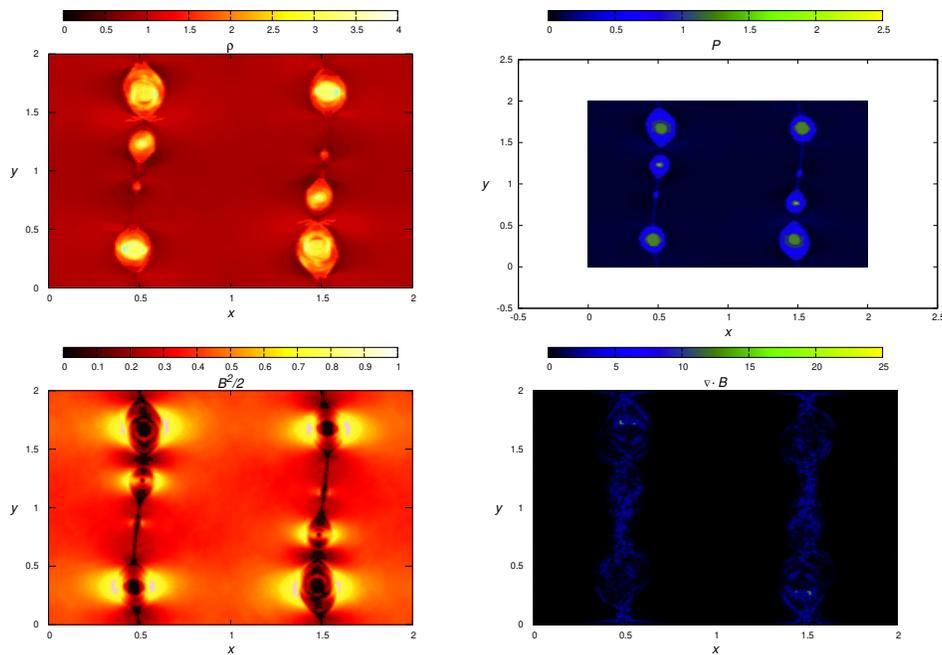


Figura 6.13: Densidad, presión, presión magnética y divergencia en un tiempo $t = 4$ para la prueba de hoja de corriente de Gardiner.

6.2.5. Inestabilidad Kelvin Helmholtz

La inestabilidad de Kelvin Helmholtz es una prueba básica de la hidrodinámica presentada inicialmente en (Chandrasekhar, 1961), también se encuentra en el interesante artículo de (Jones et al., 1997).

Este tipo de inestabilidades se presentan cuando inicialmente hay una discontinuidad en la velocidad del fluido, que puede deberse a dos capas de distintas velocidades y densidad. La existencia de capas produce cierto tipo de vórtices. En esta versión de la prueba para generar la inestabilidad

se añade una perturbación δ en las componentes v_x y v_y de la velocidad.
 las especificaciones utilizadas son

Dimensiones	$[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$
Número de celdas	$[512] \times [512]$
Factor CFL	0.25
Coefficiente C_h	0.01
Coefficiente C_p	$\sqrt{0.18C_h}$
Condiciones de frontera	Periódicas
Valor de γ	1.4
Reconstructor	WENO5

para generar las inestabilidades se añade una perturbación δ a las velocidades tanto en x como en y . Esta perturbación se tiene como

$$\delta = 0.1 \cos(4\pi x) \sin(4\pi y)$$

Las condiciones iniciales para generar las dos capas de velocidades y densidades son:
 para $|y| < 0.25$

$$v_x = -0.5 + \delta,$$

$$\rho = 1;$$

para $|y| > 0.25$

$$v_x = 0.5 + \delta,$$

$$\rho = 2,$$

El resto condiciones iniciales están dadas como

P	2.5
v_y	$0.0 + \delta$
v_z	0.0
B_x	0.02
B_y	0.0
B_z	0.0

Las gráficas que se presentan en la figura 6.14 muestra la densidad, presión magnética, y la divergencia en tiempos distintos. En el tiempo $t = 1$ se observa que las perturbaciones iniciales han generado vorticidades, estas vorticidades tienen una resolución bastante aceptable que se deriva de la utilización del reconstructor WENO5 que resguarda muy bien las estructuras. Para el tiempo $t = 4.5$ se tiene que los vortices se encuentran en ambas regiones de densidades; la presión magnética ya presenta una dinámica bastante complicada, tomando en cuenta que inicialmente era homogénea; la divergencia del campo se mantiene cercana a cero en una gran porción del dominio, y se observa que las regiones donde no sucede esto se encuentran localizadas pero dispersas en una configuración casi uniforme.

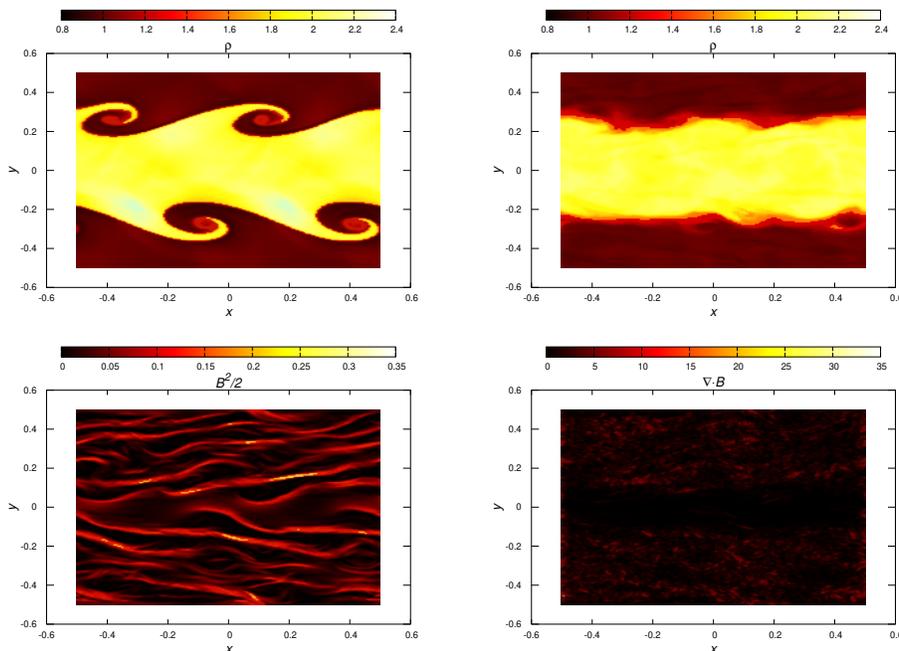


Figura 6.14: Densidad ρ a un tiempo $t = 1$, densidad ρ a un tiempo $t = 4.5$, presión magnética, divergencia a un tiempo $t = 4.5$.

6.3. Pruebas de la MHD Resistiva en 1 dimensión

6.3.1. Hoja de Corriente auto-similar

Esta prueba es sobre la advección del campo magnético considerando el efecto de la resistividad. Fue presentada por (Komissarov, 2007) y ha sido estudiada en (Palenzuela et al., 2009).

La magnitud de la presión magnética es mas pequeña que la presión hidrodinámica del gas en todas partes. Esta prueba representa físicamente la evolución de una hoja de corriente en la cual hay una difusión lenta expansiva causada por la resistividad, en este caso explícita en las ecuaciones.

Este comportamiento está descrito por una ecuación de difusión para la componente B_y :

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} - \eta \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = 0, \quad (6.1)$$

que tiene solución analítica dada por

$$B_y(x, t) = B_0 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\eta t}} \right), \quad (6.2)$$

donde se utiliza $B_0 = 1.0$. Para evitar las discontinuidades se utiliza un tiempo inicial de $t = 1$.

Las condiciones iniciales presentes en la prueba representan una distribución en equilibrio, por lo tanto la presión siempre será constante. A continuación se muestran los valores utilizados

ρ	1.0
P	50.0
v_x	0.0
v_y	0.0
v_z	0.0
B_x	0.0
B_z	0.0

Las especificaciones del problema son

Dimensiones	$[-1.5, 1.5]$
Número de celdas	[300]
Factor CFL	0.01
Coficiente C_h	0.01
Coficiente C_p	$\sqrt{0.18C_h}$
Condiciones de frontera	Saliente
Valor de γ	1.4
η	0.01
Reconstructor	Minmod y MC

En la figura 6.15 se muestra una comparación de la solución analítica con la simulación numérica

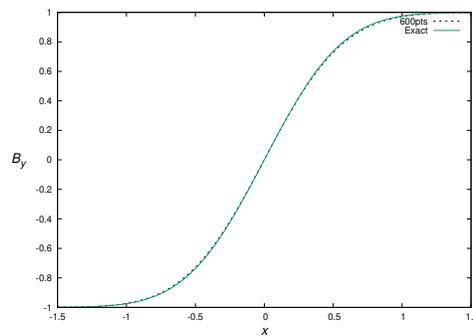


Figura 6.15: Componente del campo magnético B_y , en un tiempo $t = 10$, para la prueba de hoja de corriente resistiva

Se observa que los valores del campo magnético son casi los exactos para la evolución numérica, un análisis muestra que las variaciones oscilan entre -0.008 y 0.008 que corresponden a un error de aproximadamente 0.008% . Para tener observar entonces la precisión numérica, se calculó el error global utilizando las normas $L1$ y $L2$, en la figura 6.16 se presentan comparaciones de los errores globales para dos resoluciones, $\Delta x_1 = 1/300$ y $\Delta x_2 = 1/600$, en el intervalo de tiempo que se evolucionó el sistema.

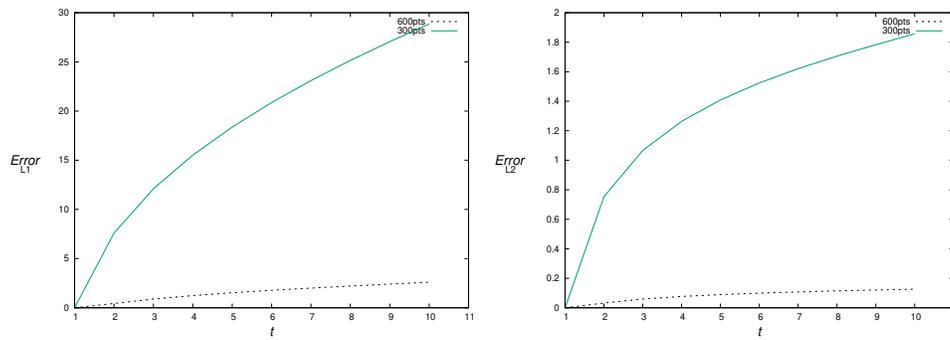


Figura 6.16: Comportamiento del error global en un tiempo $t \in [1, 10]$ para la prueba de la hoja de corriente resistiva.

Se puede observar que el error se comporta de una manera consistente con la referencia, aunque se encuentra en esta que el comportamiento convergente se observa incluso para resoluciones menores, pasando de 150 a 300 en comparación con la realizada en este trabajo.

6.4. Pruebas de la MHD Resistiva en 2 dimensiones

6.4.1. Hoja de corriente de Harris

Las condiciones iniciales de una hoja de corriente de Harris ayudan a estudiar el efecto de la resistividad en el fenómeno de reconexión magnética en el contexto del estudio geoespacial, la referencia a esta prueba se encuentra en (Birn et al., 2001).

En esta prueba se tiene una hoja de corriente que se extiende a lo largo de la dirección z , con un espesor no infinitesimal, para esta prueba se considera suave y continua la transición entre la región interna de la hoja de corriente y la externa. Esta configuración dentro del plasma genera, al someter el campo magnético a pequeñas perturbaciones, que las líneas de campo magnético fuera de la hoja entren a la región difusiva¹, es decir dentro de la hoja, esto genera que se reconecten las líneas de campo que están externas a la hoja de corriente.

Las condiciones iniciales representan un sistema en equilibrio, Para lograr esto se presupone una presión hidrostática dada por

$$p = \frac{B_0^2}{2}$$

La configuración del campo magnético para la hoja de corriente está descrita por

$$B_x(y) = B_0 \tanh(y/l),$$

$$B_y = 0.0$$

¹En la literatura es usual referirse al término de resistividad como el término de difusión, debido a que la parte de las ecuaciones de la MHD que gobierna la evolución del campo magnético, tiene una parte convectiva y una parte difusiva en la cual el coeficiente de difusión es precisamente la resistividad.

donde l es la mitad del espesor de una hoja de corriente. El perfil de densidad está dado por

$$\rho(y) = \rho_0 / \cosh^{-2}(y/l) + \rho_\infty.$$

La condicion de equilibrio es perturbada añadiendo variaciones pequeñas al campo magnético dadas por

$$dB_x = -\Psi_0(\pi/L_y) \sin(\pi y/L_y) \cos(2\pi x/L_x)$$

$$dB_y = \Psi_0(\pi/L_x) \sin(2\pi x/L_x) \cos(\pi y/L_y)$$

Las especificaciones del problema son

Dimensiones	$[-12.8, 12.8] \times [-6.4, 6.4]$
Número de celdas	$[512] \times [256]$
Factor CFL	0.05
Coefficiente C_h	0.01
Coefficiente C_p	$\sqrt{0.18}C_h$
Condiciones de frontera	Saliente en y Periódicas en x
Valor de γ	5/3
η	0.008
l	0.5
L_x	25.6
L_y	12.8
B_0	1.0
ρ_0	1.0
ρ_∞	0.2
Ψ_0	0.1
Reconstructor	Minmod

El resto de las condiciones iniciales está dada por

P	0.05
v_x	0.0
v_y	0.0
v_z	0.0
B_z	0.0

Los resultados de la evolución de la presión del gas, la componente z de la densidad de corriente, la función escalar ψ y la divergencia del campo magnético para el caso $\eta = 8 \times 10^{-3}$ se muestra en la figura 6.17. Como era de esperarse, debido a que dentro de la hoja de corriente existe un termino no nulo de la difusión, entonces se tienen líneas de campo que se cierran. Se observa que el espesor de las hojas de corriente se mantiene en un espesor casi constante.

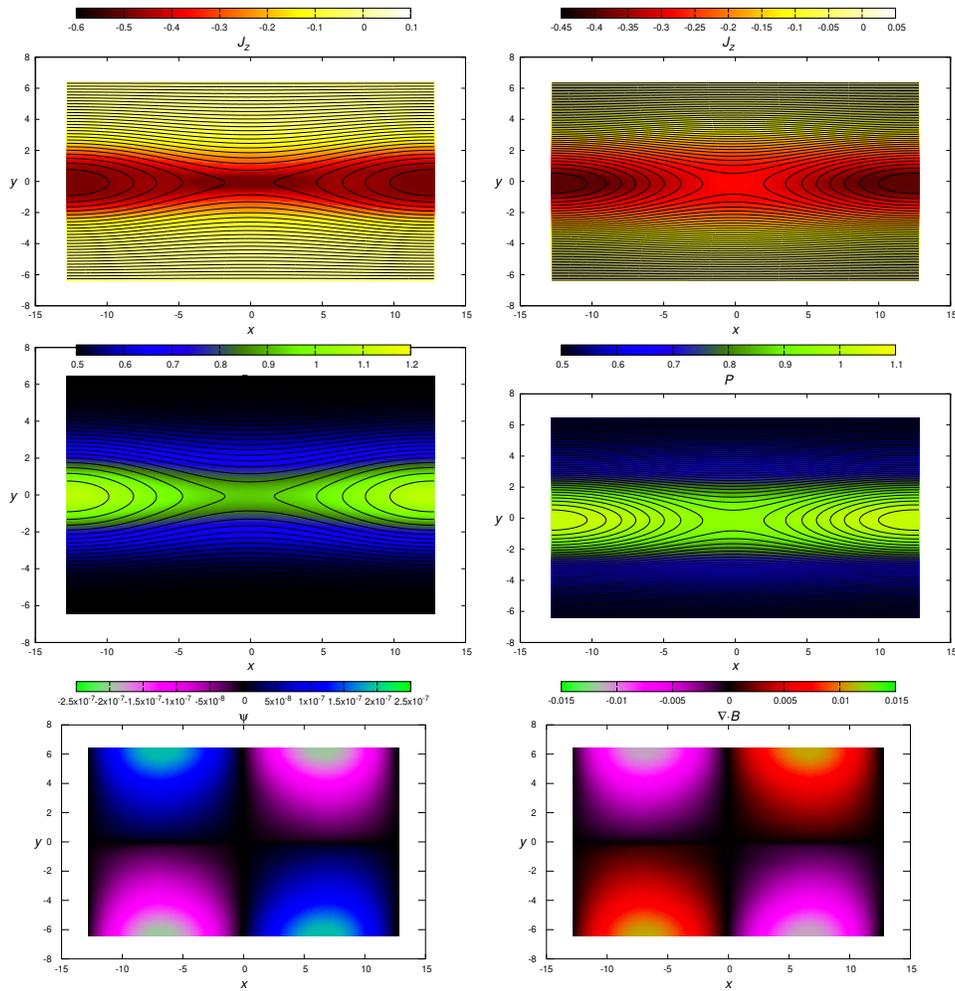


Figura 6.17: gráfica de la evolución a un tiempo $t = 50$ (izquierda) y a un tiempo $t = 100$ (derecha) para la componente en z corriente eléctrica (J_z) y la Presión. Se presenta también la función ψ y el valor de la divergencia del campo magnético en un tiempo $t=100$

Algunas de las pruebas de la magnetohidrodinámica que se realizaron se encuentran presentes en la literatura desde hace más de treinta años. A lo largo del desarrollo de la investigación de nuevos métodos numéricos que sean capaces de modelar situaciones críticas para plasmas, el acervo de pruebas va aumentando y de ninguna manera fue exhaustiva la lista de pruebas realizadas por el código. No obstante se observa que la habilidad de simular situaciones en las cuales haya variaciones grandes y discontinuas en las variables conservativas es aceptable, pues los resultados fueron consistentes con las referencias.

Observar el comportamiento de las soluciones numéricas con estas pruebas es adecuado como primer paso para poder mejorar e incrementar la robustez del código, en el siguiente capítulo se proponen algunas pruebas extras sobre las cuales se podría abrir una línea de simulaciones distintas a las habituales para el tipo de métodos numéricos que se basan en volúmenes finitos.

Capítulo 7

Simulaciones numéricas

En este capítulo se presenta la descripción de dos problemas interesantes que están relacionados con el confinamiento de plasmas: botellas magnéticas y campos magnéticos toroidales. Estas pruebas numéricas no se encuentran dentro de la literatura para los códigos basados en volúmenes finitos e implementarlas es un enfoque original que se deseó perseguir dentro de esta tesis. Para cada prueba se presenta primero una descripción teórica breve y después se presenta la simulación propuesta para estudiar el efecto.

A continuación se presenta un análisis teórico del fenómeno conocido como *espejos magnéticos*, este fenómeno es la base sobre la cual se construyen dispositivos que funcionan como botellas magnéticas. La base teórica para construir ambas pruebas se encuentra en los textos (Bittencourt, 2013) y (Gurnett and Bhattacharjee, 2005)

7.1. Espejos Magnéticos

Se estudiará a continuación el fenómeno de espejos magnéticos, se presentará una simulación numérica con simetría en dos dimensiones y finalmente se presentarán los resultados obtenidos de dicha simulación.

7.1.1. Dinámica de una partícula cargada en un campo estático y uniforme

En esta sección se presenta el enfoque hecho para describir la dinámica de una partícula inmersa en un campo electromagnético arbitrario, las limitantes de dicho acercamiento, y cómo se emplea para describir el fenómeno de espejos magnéticos.

La dinámica de una partícula cargada inmersa en un campo electromagnético está descrita por la fuerza de Lorentz

$$\frac{dm\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (7.1)$$

donde q es la carga de la partícula, m su masa, y se mueve con una velocidad \mathbf{v} . En el caso en el que el campo electromagnético (\mathbf{B}_0 denotará al campo magnético y \mathbf{E}_0 al campo eléctrico) sea estático, homogéneo y uniforme, obtener las trayectorias de la partícula se hace fácilmente descomponiendo,

tanto a la velocidad de la partícula como al campo electromagnético, en dos componentes. Una componente será paralela al campo magnético (\mathbf{v}_{\parallel} , $\mathbf{E}_{0\parallel}$) y una perpendicular (\mathbf{v}_{\perp} , $\mathbf{E}_{0\perp}$).

De la ecuación (7.1) se obtienen dos nuevas ecuaciones

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = q\mathbf{E}_{0\parallel}, \quad (7.2)$$

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q(\mathbf{E}_{0\perp} + \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}). \quad (7.3)$$

La primer ecuación describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado en la dirección $\hat{\mathbf{B}}_0$. Para la ecuación (7.3), es posible eliminar el campo eléctrico escogiendo un sistema de referencia que se mueva perpendicular al campo magnético

$$\mathbf{v}'_{\perp} = \mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_E,$$

$$\mathbf{B}'_0 = \mathbf{B}_0$$

$$\mathbf{E}'_{0\perp} = \mathbf{E}_{0\perp} + \mathbf{v}_E \times \mathbf{B},$$

donde

$$m\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E}_{0\perp} \times \mathbf{B}_0}{B_0^2}. \quad (7.4)$$

Dado que

$$\mathbf{E}_{0\perp} = -\frac{\mathbf{E}_{0\perp} \times \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2},$$

se tiene que

$$\frac{d\mathbf{v}'_{\perp}}{dt} = q(\mathbf{v}'_{\perp} \times \mathbf{B}_0). \quad (7.5)$$

Esta ecuación es la que se presenta en la dinámica de ciclotrón. Esquemáticamente se puede observar la dinámica de la partícula en la figura 7.1.

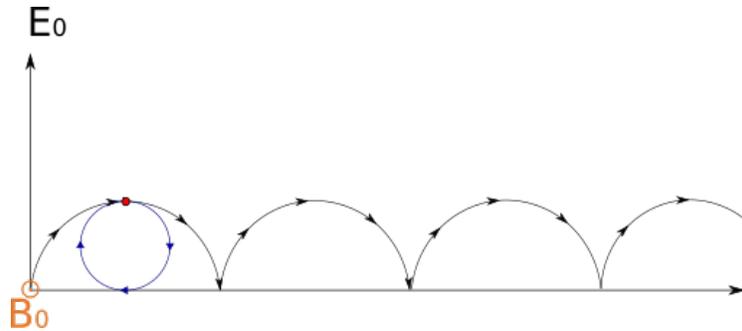


Figura 7.1: Partícula cargada (rojo) inmersa en un campo eléctrico y magnético homogéneo, estático y uniforme. El sistema de referencia \mathbf{v}'_{\perp} está representado con el azul; en este sistema la partícula describe movimiento circular de ciclotrón. Al considerar otro sistema de referencia en el que se considere la contribución del campo eléctrico, la partícula cargada presenta una trayectoria de cicloide.

A la velocidad \mathbf{v}_E se le conoce como velocidad de deriva (*drift velocity*) y se puede presentar en cualquier tipo de plasmas.

El tratamiento que se le dió a la componente electrostática de la fuerza de Lorentz se le puede hacer a otro tipo de fuerzas, al incluirlas en esta ley

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{q} \mathbf{F} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right), \quad (7.6)$$

de manera que si la fuerza es también estática y homogénea, producirá sus propias velocidades de deriva

$$\mathbf{v}_F = \frac{\mathbf{F}_{\perp} \times \mathbf{B}_0}{qB_0^2}. \quad (7.7)$$

A diferencia de las velocidades de deriva producidas por el campo electrostático, éstas dependen del signo de la carga de la partícula, en un plasma esto producirá corrientes eléctricas y polarizaciones.

7.1.2. Aproximación de Alfvén

Cuando los campos no son espacialmente uniformes o varían con el tiempo, integrar (7.1) puede ser un problema matemático de mucha dificultad, sin embargo hay un caso particular importante en el cual es posible obtener una solución que, aunque aproximada, representa un comportamiento general.

Para este caso se tiene que la magnitud del campo magnético es grande, que *varía lentamente* espacial y temporalmente, y que el campo eléctrico es débil.

A continuación se presenta cómo obtener aproximadamente la dinámica de una partícula cargada en un campo magnético estático que tiene una ligera perturbación espacial¹. Cuantitativamente

¹Para aproximar la solución a un campo que varía tanto en el espacio como en el tiempo se consideran perturbaciones temporales también de pequeña magnitud, esto se caracteriza considerando que la variación temporal del campo magnético tiene una escala temporal mucho mayor que la determinada por el movimiento ciclotrón de la partícula.

se tiene que, si δB representa la variación de la magnitud de \mathbf{B} en una distancia del orden del radio de Larmor ρ_c^2 , entonces la perturbación $\delta B \ll B$. Con estas consideraciones la partícula cargada presenta una dinámica de movimiento que es a primera aproximación de ciclotrón, esto se representa esquemáticamente en la figura 7.2.

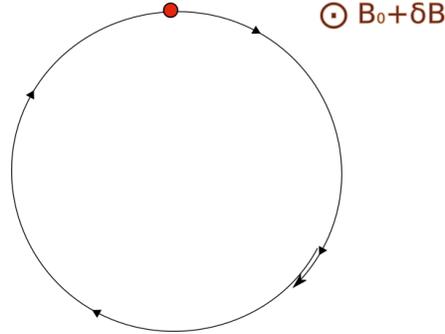


Figura 7.2: La partícula cargada en un campo magnético que es casi homogéneo presenta una trayectoria muy parecida a la de un movimiento ciclotrón.

Esta aproximación se le llama teoría de orbitas a primer orden (*first-order orbit theory*) debido a que se toma a la perturbación del campo magnético como $\delta B = \rho_c |\nabla B|$. Esta teoría fue primero usada sistemáticamente por el científico sueco Alfvén y se le conoce como *Aproximación de Alfvén*.

La aproximación de Alfvén tiene la característica de que se estudia la dinámica del centro de la circunferencia, al cual se le llama centro de guía (*guiding center*), que describe el movimiento ciclotrón de la partícula. Según las ecuaciones (7.2) y (7.3), la dinámica de la partícula es una superposición del movimiento circular alrededor del centro de guía y de un movimiento en dirección de \mathbf{B} .

La perturbación δB produce una fuerza que se puede modelar con la fuerza descrita en (7.6), es decir que, por un lado, produce una aceleración en dirección de \mathbf{B} y, por otro lado, produce una velocidad de deriva dada por (7.7).

Considerando un sistema de referencia en el que en el origen

$$\mathbf{B}(0, 0, 0) = B_0 \hat{\mathbf{z}}$$

se puede caracterizar las componentes de

$$\nabla \mathbf{B} = (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}) \begin{pmatrix} \partial B_x / \partial x & \partial B_y / \partial x & \partial B_z / \partial x \\ \partial B_x / \partial y & \partial B_y / \partial y & \partial B_z / \partial y \\ \partial B_x / \partial z & \partial B_y / \partial z & \partial B_z / \partial z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix},$$

como

■ Términos de Divergencia.

²Al igual que en el caso de la perturbación en el tiempo en el que se necesita que la escala temporal de la perturbación sea mucho mayor que la escala de movimiento ciclotrón, la aproximación espacial necesita que la escala espacial de la perturbación sea mucho mayor que el radio del movimiento ciclotrón.

Los términos de divergencia presentes en $\nabla\mathbf{B}$ son

$$\partial B_x/\partial x, \quad \partial B_y/\partial y, \quad \partial B_z/\partial z.$$

Estos términos establecen la convergencia o divergencia de las líneas de campo magnético. Dado que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, se tiene que estos términos son dependientes entre sí.

■ Términos de deformación

Los términos de deformación son

$$\partial B_x/\partial y, \quad \partial B_y/\partial x.$$

Estos términos entran en la componente z de $\nabla \times \mathbf{B}$, es decir, en $\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ y causan una torsión de las líneas de campo sobre sí mismas. A primer orden no producen ninguna velocidad de deriva pero pueden modificar la forma de la órbita de la partícula alrededor del centro de guía.

■ Términos de Gradiente

Los términos de gradiente expresan hacia qué dirección varía la magnitud de \mathbf{B} . estos términos son

$$\partial B_z/\partial x, \quad \partial B_z/\partial y.$$

Los términos de gradiente junto con los de la divergencia producen una fuerza³ dada por

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \boldsymbol{\mu} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (7.8)$$

que es la expresión para una fuerza que actúa en un anillo pequeño de corriente inmerso en un campo magnético (Jackson, 2007).

La componente perpendicular al campo magnético de esta fuerza produce una velocidad de deriva, según la ecuación (7.7), dada por

$$\mathbf{v}_G = -\frac{|\boldsymbol{\mu}|}{q} \frac{(\nabla B) \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (7.9)$$

donde B es la magnitud del campo magnético.

La componente paralela al campo magnético, en el sistema de referencia planteado al inicio, se expresa como

$$\mathbf{F}_{\parallel} = -|\boldsymbol{\mu}| \frac{\partial B}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (7.10)$$

y muestra que cuando el campo magnético tiene una variación longitudinal, una fuerza axial actúa a lo largo de $\hat{\mathbf{z}}$, acelerando la partícula en dirección de donde decrece el campo magnético, independientemente de la carga de la partícula.

³Todos los cálculos realizados para obtener esta fuerza se realizan promediando a lo largo de toda la órbita circular que describe la partícula, la finalidad de esto es poder considerar sólo la dinámica del centro de guía.

■ **Términos de curvatura.**

Los términos de curvatura expresan hacia donde se curvan las líneas de campo. Estos términos son

$$\partial B_x / \partial z, \quad \partial B_y / \partial z.$$

Estos términos producen una fuerza prependicular a \mathbf{B} dada por

$$-\frac{2W_{\parallel}}{B^2} [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{B}}], \quad (7.11)$$

donde $W_{\parallel} = 1/2mv_{\parallel}^2$ es la energía cinética producida por la velocidad paralela al campo magnético.

La fuerza (7.11) produce una velocidad de deriva dada por

$$\mathbf{v}_c = \frac{-2W_{\parallel}}{qB^4} [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \times \mathbf{B}. \quad (7.12)$$

En regiones en las cuales no hay corriente eléctrica se tiene que $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, así que si hay términos de curvatura, entonces debe haber términos de gradiente.

Invariancia del momento magnético y del flujo magnético

De la ecuación (7.10) es tiene que

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} \hat{\mathbf{z}} = -|\mu| \frac{\partial B}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}, \quad (7.13)$$

donde m es la masa de la partícula, v_{\parallel} es la componente paralela al campo magnético de su velocidad. Multiplicando ambos lados por $v_{\parallel} = dz/dt$, y sustituyendo, según (3.9), $|\mu|$ por W_{\perp}/B , se tiene que

$$mv_{\parallel} \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_{\parallel}^2 \right) = -\frac{W_{\perp}}{B} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \quad (7.14)$$

donde W_{\perp} es la energía cinética producida por la componente perpendicular al campo magnético. Puesto que un campo magnetostático no puede aumentar la energía cinética total, entonces se debe cumplir que

$$W_{\parallel} + W_{\perp} = \text{constante},$$

entonces

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = -\frac{dW_{\parallel}}{dt}, \quad (7.15)$$

usando que $W_{\parallel} = 1/2mv_{\parallel}^2$ y que $dB/dt = \partial B/\partial z dz/dt$, entonces de (7.14) se tiene que

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \frac{W_{\perp}}{B} \frac{dB}{dt}. \quad (7.16)$$

Comparando estos resultados con

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{W_{\perp} B}{B} \right) = \left(\frac{W_{\perp}}{B} \right) \frac{dB}{dt} + B \frac{d}{dt} \left(\frac{W_{\perp}}{B} \right),$$

se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{W_{\perp}}{B} \right) = 0, \quad (7.17)$$

o, equivalentemente según (3.9),

$$|\mu| = \text{constante}. \quad (7.18)$$

El flujo magnético Φ_m que encierra una órbita de la partícula está dado por

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \pi \rho_c^2 B, \quad (7.19)$$

tomando el radio de Larmor según (3.6), se tiene que

$$\Phi_m = \pi \frac{m^2 v_{\perp}^2}{q^2 B^2} B = \frac{2\pi m}{q^2} \left(\frac{W_{\perp}}{B} \right), \quad (7.20)$$

por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} (\Phi_m) = \frac{2\pi m}{q^2} \frac{d}{dt} |\mu| = 0. \quad (7.21)$$

gracias a que $|\mu|$ es invariante. Tanto a la invariancia del momento magnético como a la del flujo magnético se les conoce como *invariantes adiabáticas* y es posible obtenerlas gracias a la aproximación de Alfvén.

7.1.3. Efecto de espejo magnético

Como consecuencia de la invariancia adiabática de $|\mu|$ y de Φ_m , mientras la partícula se mueve a una región en la cual convergen las líneas de campo magnético, su energía cinética transversa W_{\perp} incrementa, y en consecuencia su energía cinética paralela W_{\parallel} disminuye, esto pasa para poder mantener $|\mu|$ invariante y la energía cinética total constante. Si el campo \mathbf{B} aumenta lo suficiente de magnitud, la componente de la velocidad en dirección paralela a \mathbf{B} será eventualmente cero y posteriormente se invertirá. Después de la inversión, en un mecanismo similar, la velocidad paralela aumentará en el sentido hacia el cual decrece \mathbf{B} mientras que su velocidad transversal disminuirá. Es así que la partícula es reflejada de la región donde convergen las líneas de campo magnético. A este fenómeno se le conoce como *efecto de espejo magnético*, esquemáticamente se representa en la figura 7.3.

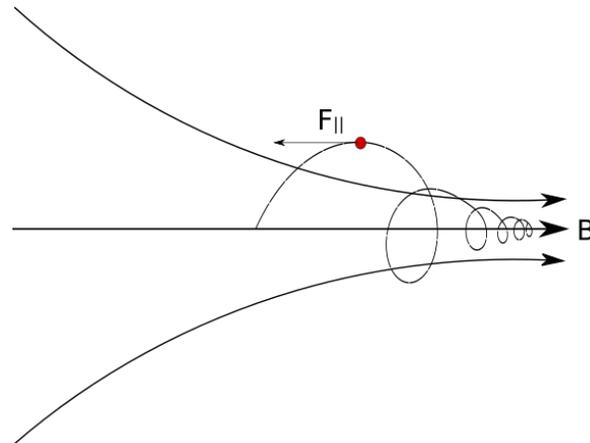


Figura 7.3: Representación del efecto de espejo magnético. La partícula siente una fuerza de en dirección opuesta a la región de convergencia de las líneas de campo magnético. Al ir avanzando la partícula hacia la región de convergencia de las líneas de campo, para mantener el flujo de campo magnético, debe aumentar su energía cinética transversal y por lo tanto las órbitas de ciclotrón se hacen más pequeñas.

Este efecto tiene aplicaciones desde el confinamiento de plasmas hasta la aceleración de partículas.

7.2. Botellas Magnéticas

Al superponer el campo magnético de dos espejos magnéticos coaxiales se crea una región de confinamiento que se le conoce como *botella magnética*. El confinamiento sucede debido a que las partículas cargadas *pueden ser reflejadas de un espejo al otro*, como se representa esquemáticamente en la figura 7.4.

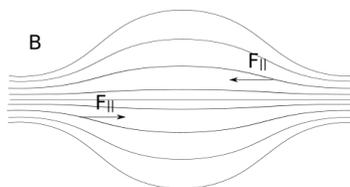


Figura 7.4: Al superponer dos espejos magnéticos, las partículas pueden ser reflejadas entre un espejo y el otro creando una región de confinamiento.

7.2.1. Ángulo de Paso

Cuando una partícula atraviesa un campo electromagnético, el ángulo entre la velocidad de la partícula con la línea de campo tiene el nombre de ángulo de paso (*pitch angle*). Este ángulo es importante para establecer qué tanto puede confinar el sistema coaxial de espejos magnéticos, ya que este confinamiento presenta fugas que pueden relacionarse con el ángulo de paso.

Para tener una idea de la pérdida de materia del plasma dentro de la botella magnética se utiliza la razón B_m/B_0^4 , donde B_m representa la intensidad del campo magnético en el punto de reflexión, en el cual el ángulo de paso es $\pi/2$, y B_0 la intensidad del campo magnético en el centro de la botella. La manera de realizar esto se explica a continuación.

Considérese una partícula cargada que posee un ángulo de paso α_0 al centro de la botella magnética. Sea v la velocidad de la partícula, que en el caso de estar inmersa en un campo casi magnetostático permanece constante. La invariante de $|\mu| = W_{\perp}/B$ establece que

$$\frac{1}{2}mv^2 \sin^2(\alpha)/B = \frac{1}{2}mv^2 \sin^2(\alpha_0)/B_0, \quad (7.22)$$

se tiene entonces que a lo largo de toda la línea de campo magnético

$$\frac{\sin^2(\alpha)}{B} = \frac{\sin^2(\alpha_0)}{B_0}. \quad (7.23)$$

Si se tiene que la partícula en algún momento es reflejada, esto implica que $\alpha = \pi/2$, lo que resulta en

$$\frac{1}{B} = \frac{\sin^2(\alpha_0)}{B_0},$$

de esta relación se puede despejar el valor del ángulo de paso en el centro de la botella para partículas que se reflejaron.

Ahora bien, si se considera el punto de retorno donde el campo magnético tiene la mayor intensidad, se tiene entonces que las partículas reflejadas en este punto tuvieron un ángulo de paso en el centro de la botella de

$$\alpha_0 = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{B_0}{B_m}} \right). \quad (7.24)$$

Es este el punto donde el campo magnético es más intenso, por lo tanto, partículas cuyo ángulo de paso en el centro de la botella sea menor que α_0 no serán reflejadas, mientras que las partículas cuyo ángulo de paso sea mayor que α_0 serán reflejadas antes de llegar al punto de máxima intensidad. Por estos razonamientos existe una región donde las partículas logran escapar de la botella, conocida como *cono de pérdida*. Esquemáticamente se representa el cono de pérdida en la figura 7.5.

⁴conocida como *mirror ratio*.

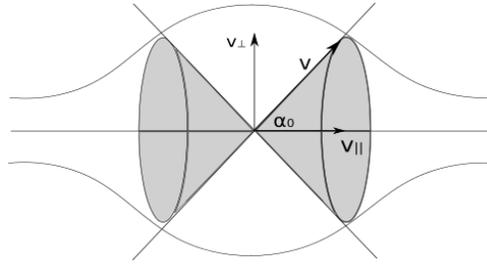


Figura 7.5: Representación del cono de pérdida de la botella magnética. Todas las partículas que presenten un ángulo menor que α_0 podrán escapar del dispositivo.

El cono de pérdida, representa todas las partículas cuyo ángulo de paso en el centro es menor que α_0 y que nunca lograrán alcanzar un ángulo de paso de $\pi/2$, es decir que nunca se reflejarán.

7.2.2. Modelación de la Botella Magnética

Para modelar una configuración de campo magnético que represente dos espejos magnéticos coaxiales se considera primero el campo magnético producido por una línea de corriente que apunta en dirección \hat{z} . En este caso el potencial vectorial magnético producido por la línea de carga es⁵

$$\mathbf{A} \propto \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \hat{z}, \quad (7.25)$$

donde \mathbf{r}_0 es la posición de la línea de carga y \mathbf{r} es el punto donde se observa el campo magnético.

El modelo que se propone para crear un espejo magnético consiste en superponer el campo magnético de dos líneas de corriente, estas líneas de corriente deben de tener un sentido contrario y la misma intensidad, de manera que al superponerlas se genere una configuración parecida a un dipolo magnético⁶. Para conseguir esto se debe tomar una distancia pequeña entre las líneas de corriente en comparación con las dimensiones del problema.

Es así que dadas dos líneas de corriente, la configuración que asemeja a un dipolo magnético tiene un potencial vectorial magnético como

$$\mathbf{A} \propto [\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|] \hat{z}, \quad (7.26)$$

donde la distancia entre las líneas de corriente es $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

Para lograr la configuración de botella magnética se deben de tener dos espejos magnéticos en simetría coaxial. La manera como se realizó esto fue superponiendo la configuración dipolar creada en (7.26) y el campo magnético producido por otras dos líneas de corriente con la misma configuración alineando los puntos de mayor intensidad de campo magnético de cada configuración

⁵En esta Tesis, para la derivación de las ecuaciones de Maxwell se están utilizando sistemas de unidades en las cuales la susceptibilidad magnética y la permitividad eléctrica en el vacío tienen un valor de 1, se dejará indeterminado los valores exactos de \mathbf{A} y \mathbf{B} ya que estos pueden obtenerse definiendo la cantidad proporcional como un parámetro que se puede controlar.

⁶Presentar este tipo de configuraciones tiene la ventaja de que las líneas de campo magnético son similares a las de un dipolo y que presenta una simetría que permite evolucionar el sistema en dos dimensiones.

dipolar. El potencial vectorial magnético de esta superposición es

$$\mathbf{A} = \xi ([\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ld}| - \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{lu}|] + [\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{rd}| - \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ru}|]) \hat{z}, \quad (7.27)$$

donde ξ es un parámetro que determinará la intensidad del campo magnético; \mathbf{r}_{lu} y \mathbf{r}_{ld} son las posiciones de las líneas de corriente, entrante y saliente respectivamente, a la izquierda; \mathbf{r}_{ru} y \mathbf{r}_{rd} son las posiciones de las líneas de corriente a la derecha, entrante y saliente respectivamente.

Para obtener el campo magnético simplemente se calcula el rotacional del potencial vectorial

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (7.28)$$

En la figura 7.6 se puede observar gráficamente el campo magnético obtenido según (7.28) en algunos puntos del dominio.

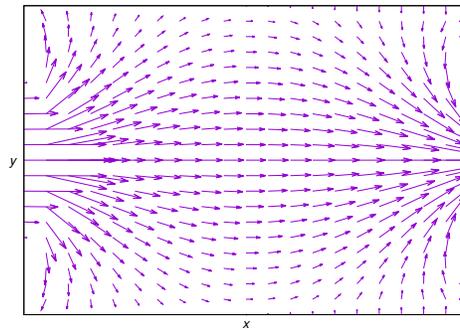


Figura 7.6: En la configuración propuesta para modelar el sistema se puede observar que el campo magnético tiene líneas de campo convergentes hacia las fronteras izquierda y derecha, es así que debe presentarse localización del plasma en el centro.

7.2.3. Especificaciones de la Simulación

El potencial magnético planteado como en (7.27) es un problema esencialmente de dos dimensiones, por lo tanto la evolución se realizó específicamente en las direcciones x y y . Se tomó como nula la resistividad del plasma, debido a que se supone para esta simulación que el plasma está totalmente ionizado. Se supone que el plasma está en equilibrio hidrostático inicialmente, la velocidad del fluido es cero en el dominio y las presiones y densidades son constantes. Gracias a que la configuración de las líneas de campo de botella magnética se mantuvo durante la evolución, a pesar de que se dejó evolucionar el campo magnético, fue posible calcular el ángulo de paso α_0 de la ecuación (7.24), tomando como B_m la magnitud del campo magnético en la frontera derecha y B_0 la magnitud del campo magnético al centro de la malla, para el final de la evolución, el valor era muy cercano a $\pi/2$.

■ Parámetros del problema.

A continuación se especifican los valores de los parámetros del problema

Dimensiones	$[-1, 1] \times [-1, 1]$
Número de celdas	$[200] \times [200]$
Factor CFL	0.1
Coficiente C_h	0.01
Coficiente C_p	$2 \times C_h$
Condiciones de frontera	Salientes
Valor de γ	5/3
Reconstructor	WENO 5
η	0

■ Valores Iniciales

Los valores iniciales de las variables primitivas se presentan en la siguiente tabla

ρ	1.0
P	1.0
v_x	0
v_y	0
v_z	0
B_z	0

La posición de las líneas de corriente se establece fuera del dominio numérico para evitar singularidades, es así que las posiciones para definir \mathbf{A} de la ecuación (7.27) son

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{r}_{lu} = (-x_0, y_0) & \mathbf{r}_{ru} = (x_0, y_0) \\ \mathbf{r}_{ld} = (-x_0, -y_0) & \mathbf{r}_{rd} = (x_0, -y_0) \end{array}$$

con $x_0 = 1.5$ y $y_0 = 1 \times 10^{-3}$, se toman estos valores para las líneas de corriente para lograr que las líneas de campo converjan de manera satisfactoria en las fronteras izquierda y derecha del dominio. Por otra parte se toma $\xi = 1 \times 10^2$ para que la magnitud de la presión magnética sea consistente con la magnitud de la presión hidrostática.

Dado que $\mathbf{A} = A\hat{\mathbf{z}}$, se tiene de (7.28) que

$$B_x = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}$$

$$B_y = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}$$

para obtener dichas derivadas se utilizó el esquema de diferencias finitas con el método centrado, presentado en el capítulo 5.

7.2.4. Resultados

En la figura 7.7 se presenta la evolución de la presión magnética junto con el campo magnético en algunos puntos de la malla para tiempos $t = 0, 1, 2, 4$, se observa que el campo magnético sigue preservando la forma de botella magnética a lo largo de la evolución del problema, es decir que las líneas de campo siguen juntándose en las fronteras izquierda y derecha, mientras que en el centro se separan.

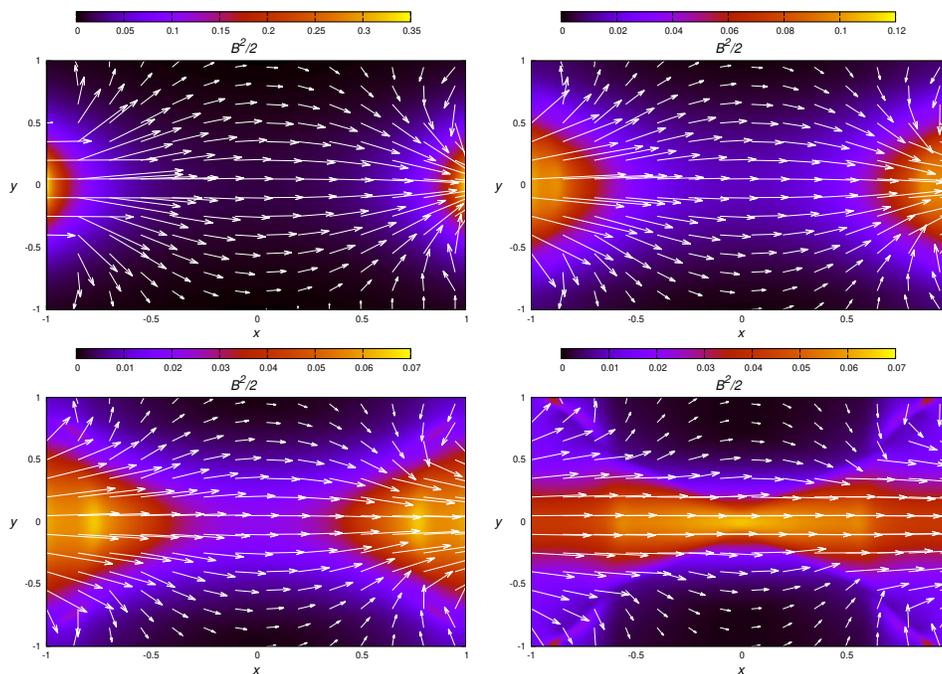


Figura 7.7: Presión magnética, $t = 0$ arriba izquierda, $t = 1$ arriba derecha, $t = 2$ abajo izquierda, $t = 4$ abajo derecha, está sobrepuesta a la gráfica una representación vectorial del campo magnético perpendicular a \hat{z} en algunos puntos de la malla.

Aún teniendo que se preserva la configuración de botella magnética, la intensidad del campo magnético tiende a homogeneizarse, de manera que para tiempos posteriores deja de existir el efecto de espejo magnético, así que en realidad el sistema deja de tener configuración de botella magnética.

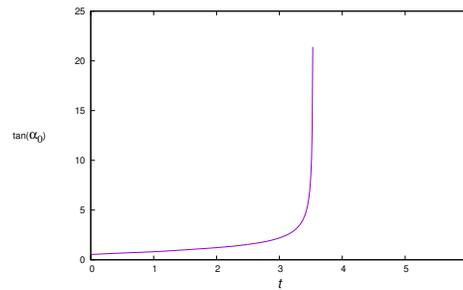


Figura 7.8: Evolución de la tangente del ángulo de paso α_0 con respecto al tiempo, la evolución temporal se realizó en $t \in [0, 5]$.

En la figura 7.8 se observa este efecto, ya que para tiempos posteriores a $t = 3.5$, la tangente del ángulo de paso α_0 diverge, mostrando que se alcanzan valores cercanos a $\pi/2$ es así que prácticamente todas las partículas que tengan la componente x de su velocidad distinta de cero, podrán escapar de la botella magnética.

Se muestra en las figuras 7.9 y 7.10 la evolución de la densidad del plasma. Como era de esperarse, en regiones cercanas a las fronteras izquierda y derecha la densidad del gas tiende a disminuir, esto es debido a que el efecto de espejo magnético es prácticamente inexistente en estas zonas y se expulsan por las fronteras.

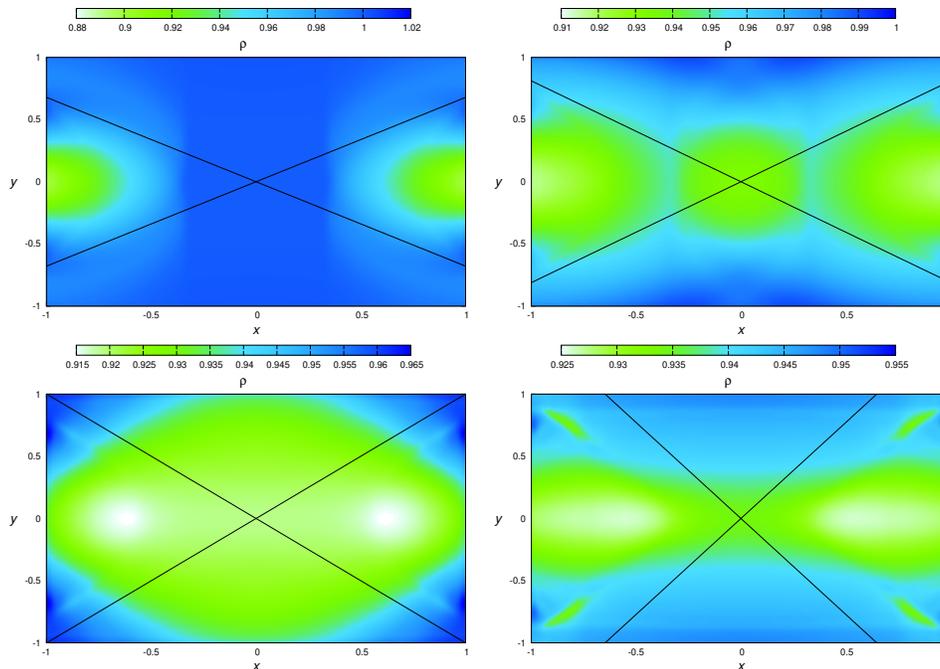


Figura 7.9: Densidad del plasma en $t = 0.5, 1.0, 1.5, 2.5$, la línea negra representa el cono de pérdida.

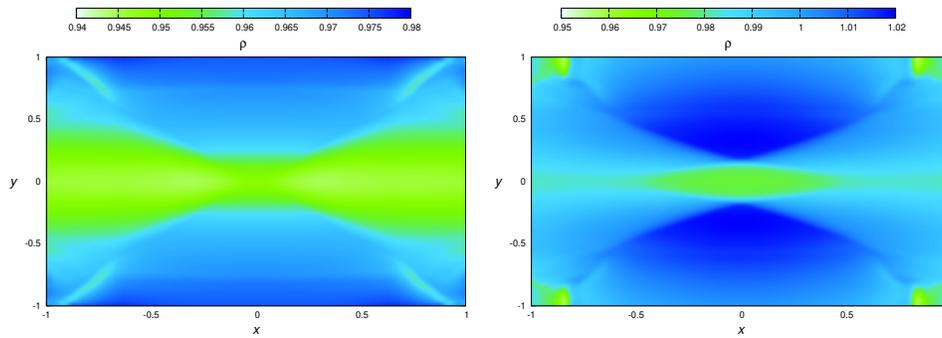


Figura 7.10: Densidad del plasma en $t = 3.5$ izquierda, $t = 5$ derecha.

En la gráfica de $t = 0.5$ de la figura 7.9, existe una especie de confinamiento en las regiones cercanas a la frontera de arriba y a la de abajo, no obstante, la magnitud de la densidad no aumenta significativamente. Para $t = 1.0$ empiezan a existir regiones rarificadas al centro de la botella, y para $t = 2.5$ prácticamente ya no hay confinamiento dentro de la botella. En la gráfica de $t = 5$ de la figura 7.10 se observa que se encontró una localización mayor de materia al centro del dominio, esta concentración fue la mayor observada con un valor de densidad de $\rho = 1.02$, no obstante, para este tiempo ya no se tiene un campo magnético autoconsistente que produzca el efecto de espejos magnéticos sin embargo el perfil de densidad observado en $t = 5$ es consistente pues el plasma se confina en el centro, que es la región esperada de confinamiento.

En la figura 7.11 y 7.12 se puede comparar las componentes x y y de la velocidad. Se observa que durante todo el fenómeno de botella magnética, la velocidad en x es positiva del lado derecho del cono de escape y negativa del lado izquierdo; como era de esperarse fuera del cono de escape, v_x tiene valores cercanos a cero. La velocidad en y dentro del cono de escape tiene una disposición que puede interpretarse en el sentido que hace que las partículas no escapen hacia afuera del cono; fuera del cono v_y es negativa en la región superior y positiva en la región inferior, que esto produciría una localización de materia al centro, como era de esperarse.

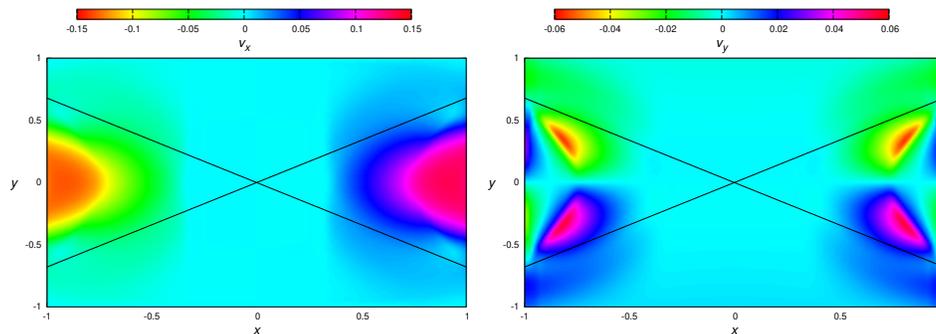


Figura 7.11: Componentes v_x , a la izquierda, y v_y , a la derecha, de la velocidad del plasma para un tiempo $t = 0.5$, la línea negra representa el cono de pérdida

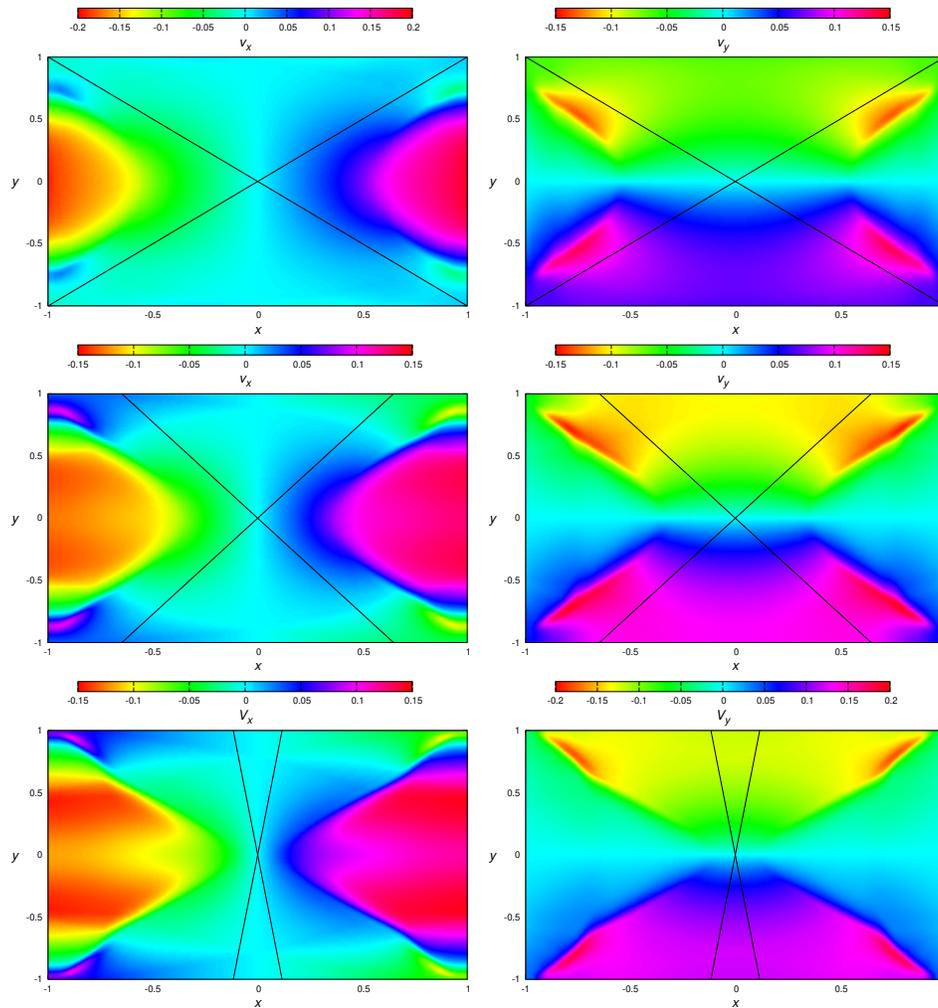


Figura 7.12: Componentes v_x , a la izquierda, y v_y , a la derecha, de la velocidad del plasma para tiempos $t = 1.5, 2.5, 3.5$ en forma descendente, la línea negra representa el cono de pérdida

La evolución de la divergencia del campo magnético se muestra en la figura 7.13 para tiempos $t \in [0, 3.5]$.

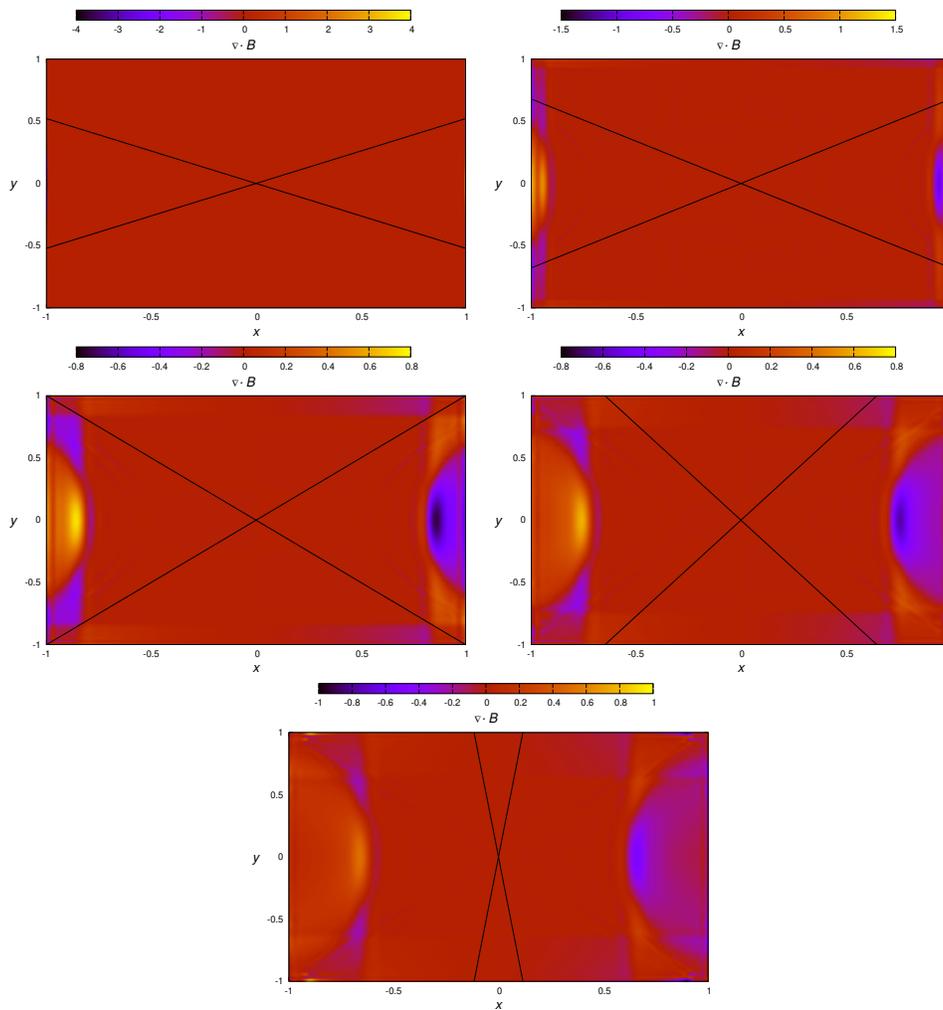


Figura 7.13: Divergencia del campo magnético en $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2.5, 3.5$ de izquierda a derecha y en orden descendente. Las líneas negras representan el cono de escape.

La ventaja de haber obtenido B_x y B_y de acuerdo a la ecuación (7.28) es que en $t = 0$ la divergencia es cero. Para tiempos posteriores se observa que el código no mantiene de manera adecuada que el valor de la divergencia cercano a cero dentro del cono de escape. Dentro de la región de confinamiento se observa que $\nabla \cdot \mathbf{B} \sim 0$ durante toda la evolución temporal en la que se mantiene la configuración de botella magnética para las líneas de campo magnético.

7.3. Campos magnéticos Toroidales

Los campos magnéticos con simetría toroidal son importantes en el estudio de los plasmas pues están presentes en fenómenos astrofísicos y de confinamiento. En esta sección se presentan dos configuraciones de campo magnético con simetría toroidal.

Un ejemplo de campo magnético con simetría toroidal es el que está presente en un embobinado. La expresión matemática general de este campo magnético es

$$\mathbf{B}_\phi = \frac{B_0 R_0}{R_0 + r \cos(\theta)} \hat{\phi}, \quad (7.29)$$

donde B_0 define la intensidad del campo magnético al centro de la sección transversal poloidal del toro, R_0 es el radio mayor del toro, r es la posición de un punto inscrito en el toro con respecto al centro de la sección transversal, θ es el ángulo poloidal y ϕ el ángulo toroidal. En la figura 7.14 se muestra esquemáticamente estas direcciones, considerando que el radio menor del toro al valor a .

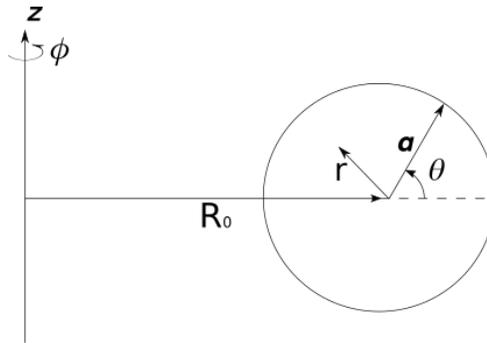


Figura 7.14: sistema de coordenadas usado para describir la sección transversal poloidal.

Es posible caracterizar al toro tomando la relación entre el radio mayor y el radio menor, definida como

$$\varepsilon_t = \frac{a}{R_0}. \quad (7.30)$$

El campo magnético definido por la ecuación (7.29) tiene la particularidad que es más intenso en el borde interior del toro que en el borde exterior, se tiene entonces que

$$B_{\max} = \frac{B_0 R_0}{(R_0 - a)}, \quad (7.31)$$

$$B_{\min} = \frac{B_0 R_0}{(R_0 + a)}, \quad (7.32)$$

Esta diferencia de intensidades genera una configuración similar a la de espejo magnético, donde, utilizando la invariancia de $|\mu|$ de manera análoga al efecto de espejo magnético, se obtiene la relación obtenida en (7.24) para el ángulo de paso, que en este caso se denotará por α_t ⁷, para las partículas reflejadas

$$\alpha_t = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{B_{\min}}{B_{\max}}} \right)$$

⁷La diferencia de efectos magnéticos que existen entre la botella y entre el toro es que el efecto de reflexión en el toro sucede en la dirección perpendicular a las líneas de campo magnético, en la botella la dirección de reflexión es paralela a las líneas de campo.

$$\alpha_t = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{R_0 - a}{R_0 + a}} \right).$$

Se sigue entonces que todas las partículas que estén atrapadas entre las frontera interior y la exterior del toro deben satisfacer que su velocidad paralela a las líneas de campo magnético satisfaga que

$$v_{\parallel}^2 < v^2 \cos^2(\alpha_t) = v^2 \left(1 - \frac{R_0 - a}{R_0 + a} \right). \quad (7.33)$$

Las partículas que están atrapadas según la ecuación (7.33) exhiben un comportamiento particular en la trayectoria de sus centros de guía, pues los centros de guía describen una órbita con *forma de banana*, como se muestra en la figura 7.15.

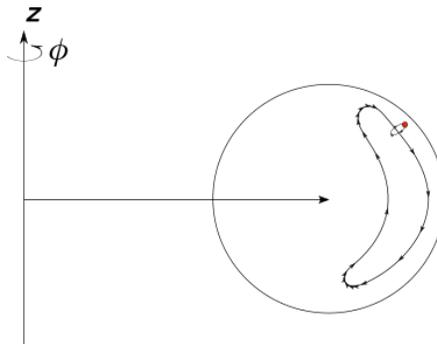


Figura 7.15: Trayectoria del centro de guía de una partícula atrapada en el campo magnético toroidal

Esto es resultado de que la configuración expuesta en la ecuación (7.29) tiene tanto un gradiente de magnitud como una curvatura y, según las ecuaciones (7.9) y (7.12), se producirán velocidades de deriva que están en la misma dirección, puesto que las fuerzas debidas a la curvatura y al gradiente apuntan hacia donde mismo.

7.3.1. Superposición de campos toroidales y poloidales

Uno de los modelos propuestos para lograr confinamiento es el presentado en los Tokamaks, dispositivos en los cuales se superpone un campo poloidal producido por una columna interna en el plasma junto con un campo toroidal. Se espera obtener, para este tipo de configuraciones, que tanto el tiempo de confinamiento, como la región de confinamiento sean mejores que en el caso en el que sólo se tenga el campo toroidal.

Los campos magnéticos producidos por columnas internas de un plasma se presentan debido a un fenómeno conocido como *efecto pinch*⁸.

Tomando una sección del toro en dirección del ángulo toroidal de espesor pequeño, se puede considerar la columna del plasma como una producida por un campo magnético auto-consistente

⁸En la literatura se le llama *pinch effect*, debido a que no se encontró una traducción del nombre del efecto, se deja como se presenta en inglés. La traducción literal es “efecto de pellizco”, debido a que el campo magnético de la columna tiende a producir inestabilidades que “pellizcan” ciertas secciones de la columna, haciendo que la forma de esta ya no sea regular.

azimutal, es decir $\mathbf{B} = B(r)\hat{\theta}$; si se considera la corriente interna en el plasma con dirección toroidal $\hat{\phi}$, entonces existirá una fuerza $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ que contrae a la columna radialmente. Esta contracción de la columna del plasma es la que recibe el nombre de efecto pinch.

Existen dos situaciones de efectos pinch, que la columna esté en equilibrio o que no lo esté, y ambas tienen que ver con la presión hidrostática del gas. En el caso en el que la presión hidrostática esté en equilibrio con la presión magnética, el sistema se mantendrá en equilibrio estático, bajo la condición de que la corriente eléctrica total que atraviesa la columna cumpla la *relación de Bennett*

$$I^2 \propto (T_e + T_i)$$

donde I^2 es la intensidad de la corriente eléctrica total de la columna, T_e es la temperatura de los electrones, T_i la temperatura de los iones, y la constante de proporcionalidad depende de la densidad de partículas por unidad de volumen. En el caso donde la presión magnética y la presión hidrostática no estén en equilibrio, se producirá una fuerza que comprime o expande ciertas regiones de la columna. Para configuraciones en las cuales el radio de la columna varía lentamente como función del tiempo, se considera que el sistema está en equilibrio.

Hay dos cosas que mencionar con respecto al efecto pinch para esta configuración, la primera es que el campo magnético fuera de la columna se comporta como el de una línea de corriente, es decir

$$B(r) \propto \frac{1}{r}. \quad (7.34)$$

La segunda observación es que para situaciones en las cuales se alcanza el equilibrio, según la ecuación (4.33), considerando que el campo eléctrico sea muy débil en comparación con el campo magnético, se debe cumplir que hay un equilibrio de fuerzas, es decir

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (7.35)$$

por lo tanto, tanto \mathbf{J} como \mathbf{B} se deben encontrar en superficies equipotenciales de la presión, conocidas como *superficies isobáricas*. Para considerar que el sistema es cuasi-estático es entonces recomendable observar el comportamiento de las superficies isobáricas.

7.3.2. Modelación de la sección transversal del toro

Para modelar el campo magnético del toro, se utilizó un dominio en dos dimensiones, en el cual se reinterpreta al campo (7.29) como

$$\mathbf{B} = \frac{B_0 R_0}{R_0 + r \cos(\theta)} \hat{z} \quad (7.36)$$

Hacer el modelo en dos dimensiones implica cierta imposición en la dirección \hat{z} , aún si no se analizará la evolución del sistema en esa dirección, pues se debe determinar que el espesor del dominio en z sea pequeño. Esto es a causa de que al hacer el campo magnético como (7.36) se está discriminando los efectos de la curvatura del campo magnético. No obstante, según las ecuaciones (7.9) y (7.12), ambas velocidades de deriva producidas por el gradiente y la curvatura del campo magnético apuntan hacia la misma dirección, es así que se comete solo un error en la intensidad de

la velocidad final de las partículas, pero la dinámica es, a grandes rasgos, la misma.

Según la ecuación (7.36), se toman como parámetros iniciales B_0 , R_0 , también se toma al radio menor a como parámetro, esto es con la finalidad de representar el carácter poloidal del campo magnético, de otra manera la dinámica de las partículas simplemente consiste en un desplazamiento en dirección opuesta al gradiente del campo.

Es así que se define \mathbf{B} en todo el dominio como

$$\mathbf{B} = \begin{cases} 0 & \text{para } r > a \\ \frac{B_0 R_0}{R_0 + r \cos(\theta)} \hat{z} & \text{para } r \leq a \end{cases} \quad (7.37)$$

Para esta configuración de campo magnético, se debe tener que, de acuerdo con la ecuación (7.33), las partículas atrapadas satisfagan

$$v_z^2 < v^2 \left(1 - \frac{R_0 - a}{R_0 + a} \right), \quad (7.38)$$

donde v_z es la componente de la velocidad en z y v es la velocidad total de la partícula. Se tomará entonces que los elementos de volumen, que satisfagan (7.38), consistirán en su mayoría de partículas atrapadas dentro del campo toroidal.

Para la superposición de campos magnéticos toroidales con poloidales, se tiene que establecer primero una columna estable de plasma con un campo magnético autoconsistente, para realizar esto se propuso un campo magnetostático debido a una línea de carga con una función de apantallamiento para evitar la singularidad en el origen. El potencial magnético vectorial que produce este campo está dado por

$$\mathbf{A} = 0.05 * \ln((\xi^2 r)) \tanh(6.25 \times 10^{-5}(\xi r)^2) \hat{z} \quad (7.39)$$

donde ξ es un parámetro numérico que define qué tan ancha será la columna.

Para obtener el campo magnético se calculo $\nabla \times \mathbf{A}$ al igual que en (7.28).

Una vez impuesto este campo se dejó evolucionar el sistema hasta llegar a una configuración casi en equilibrio. Para obtener un criterio para definir cuándo es que se había obtenido un equilibrio fue comparando las superficies isobáricas en cada paso temporal. Debido a que el problema se planteó en dos dimensiones, se observó que las curvas de nivel de la presión hidrostática fueran más o menos constantes, junto con que la magnitud de la velocidad en el entorno de la columna fuera pequeña.

Una vez alcanzado un nivel deseable de estabilidad, se perturbó el sistema añadiendo a la componente B_z , el campo magnético dado por la ecuación (7.37) y se observó el comportamiento del sistema.

El resto de las variables primitivas del sistema se tomaron constantes inicialmente.

7.3.3. Especificaciones de la simulación

Se considera que el plasma está totalmente ionizado y en consecuencia la resistividad es nula.

■ Parámetros del problema.

A continuación se especifican los valores de los parámetros del problema

Dimensiones	$[-1, 1] \times [-1, 1] \times [0.01, 0.01]$
Número de celdas	$[200] \times [200] \times [4]$
Factor CFL	0.25
Coefficiente C_h	0.01
Coefficiente C_p	$\sqrt{0.18}C_h$
Condiciones de frontera	Periódicas en z , Salientes en x, y
Valor de γ	5/3
Reconstructor	minmod
Valor de η	0

■ Valores Iniciales

Los valores iniciales de las variables primitivas se presentan en la siguiente tabla

ρ	1.0
P	1.0
v_x	0
v_y	0
v_z	0
Ψ	0

Para implementar (7.39) se tuvo que modificar ligeramente la fórmula, debido a que en el origen no queda bien determinada la ecuación, por lo tanto se impone que

$$A_z(0, 0, 0) = 0.$$

El parámetro que se utilizó para definir el potencial fue $\xi = 200$, los parámetros para definir las dimensiones del toro fueron el radio mayor de $R_0 = 1.5$, el radio menor de $a = 0.75$ y $B_0 = 1$.

El tiempo al cuál se perturbó la columna de plasma con el campo magnético toroidal fue de $t = 8.75$.

7.3.4. Resultados

En esta sección se presentarán los resultados de las dos simulaciones hechas, una en la cual se enciende un campo toroidal en un sistema homogéneo y la otra en la cual se enciende el campo en un sistema que presenta una columna de plasma con un campo magnético autoconsistente.

Campo magnético toroidal

En la figura 7.16 se observa la evolución temporal de la presión magnética.

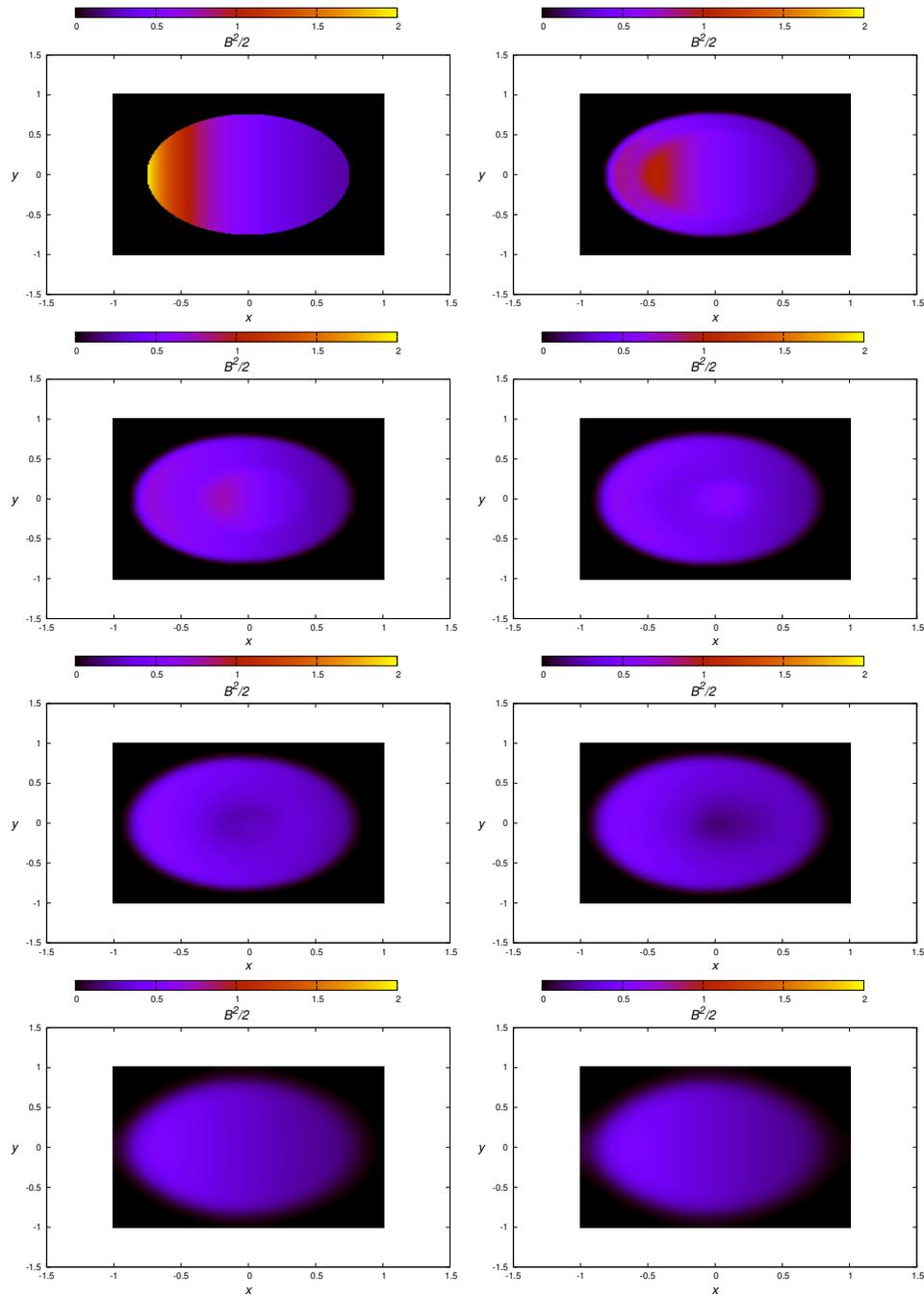


Figura 7.16: Evolución de la presión magnética para tiempos $t = 0, 0.125, 0.25, 0.325, 0.5, 0.625, 1.25, 1.875$ las gráficas están ordenadas de izquierda a derecha y luego de arriba a abajo

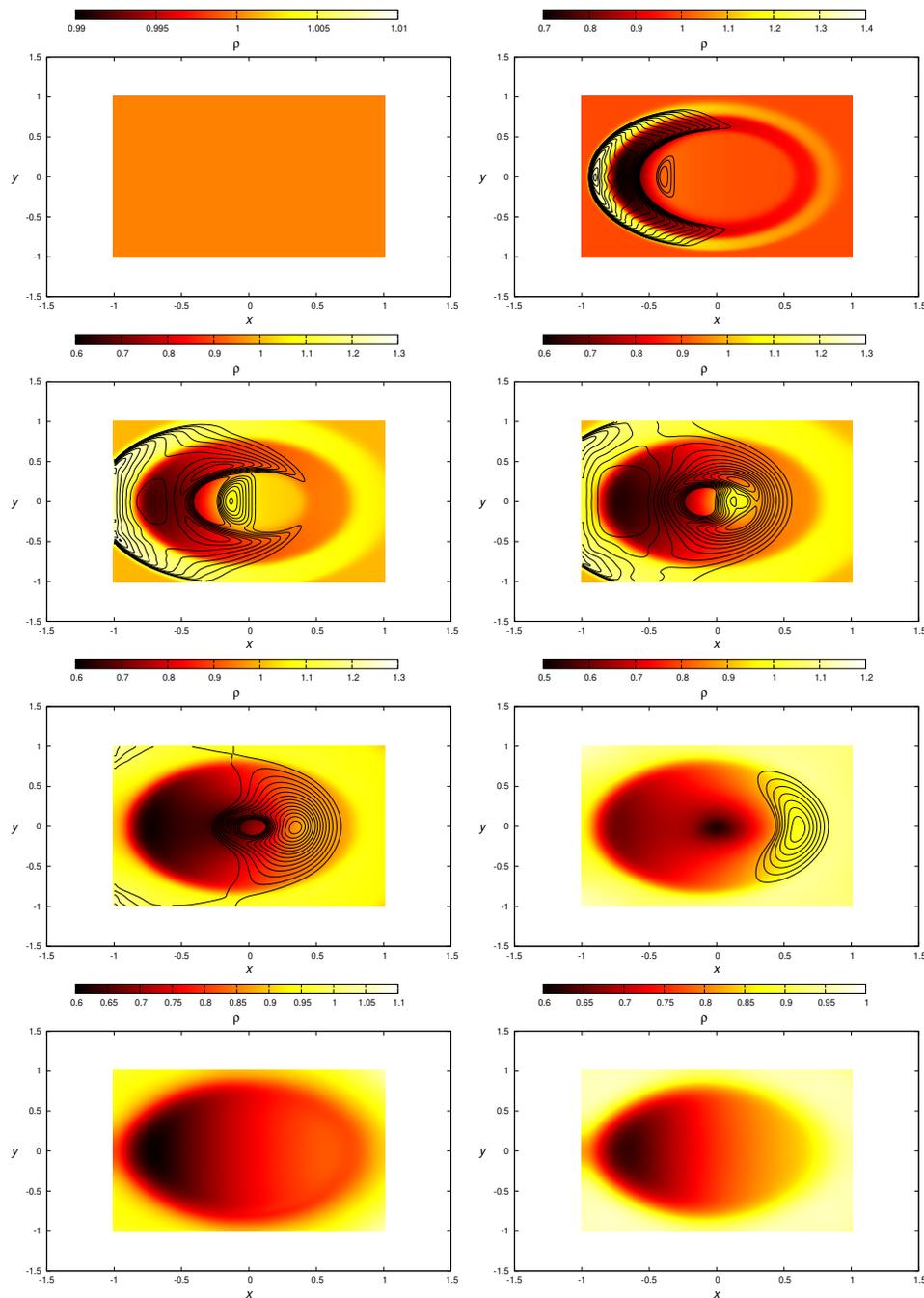


Figura 7.17: Evolución de la densidad para tiempos $t = 0, 0.125, 0.25, 0.325, 0.5, 0.625, 1.25, 1.875$, el orden es de izquierda a derecha y luego de arriba a abajo. Se muestran las isocurvas de v_z que satisface la ecuación (7.38).

Se puede observar que para tiempos mayores a $t = 1.25$ la presión magnética alcanza una

configuración cuasi estacionaria y casi uniforme. En el intervalo de tiempo de $t \in [0, 0.625]$, que corresponde a los últimos tres cuadros, es donde se observa la mayor variación de la presión magnética y es en este intervalo temporal donde se encuentra la localización y compresión del plasma.

En la figura 7.17 se observa que la mayor concentración de materia para el campo magnético propuesto se encuentra casi en el centro con un valor de $\rho = 1.3$, es decir que en la región localizada, el plasma presenta 30 % de aumento en la densidad. Para tiempos posteriores a $t = 0.625$ ya no se encuentran las isocurvas de v_z pues la velocidad promedio de los elementos de volumen tiende a ser cercana a cero, como se observa en la figura 7.18. En este sentido, para estos tiempos ya no existen partículas atrapadas dentro del dispositivo aún teniendo que, para $t \in [1.25, 1.875]$, sigue existiendo un gradiente de campo magnético.

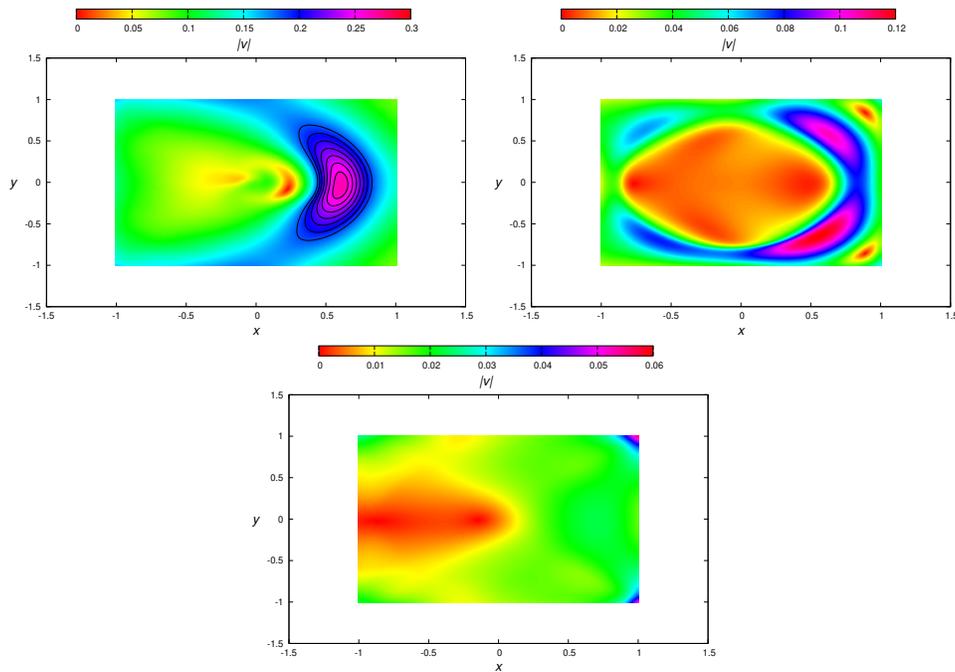


Figura 7.18: Evolución de la magnitud de la velocidad para tiempos $t = 0.625, 1.25, 1.875$.

Se observa que en $t = 0.625$ las isocurvas de la velocidad tiene una forma similar a la trayectoria de los centros de guía de las partículas atrapadas, es decir en forma de banana, no obstante en esta región la densidad del plasma no es mucho mayor que 1.

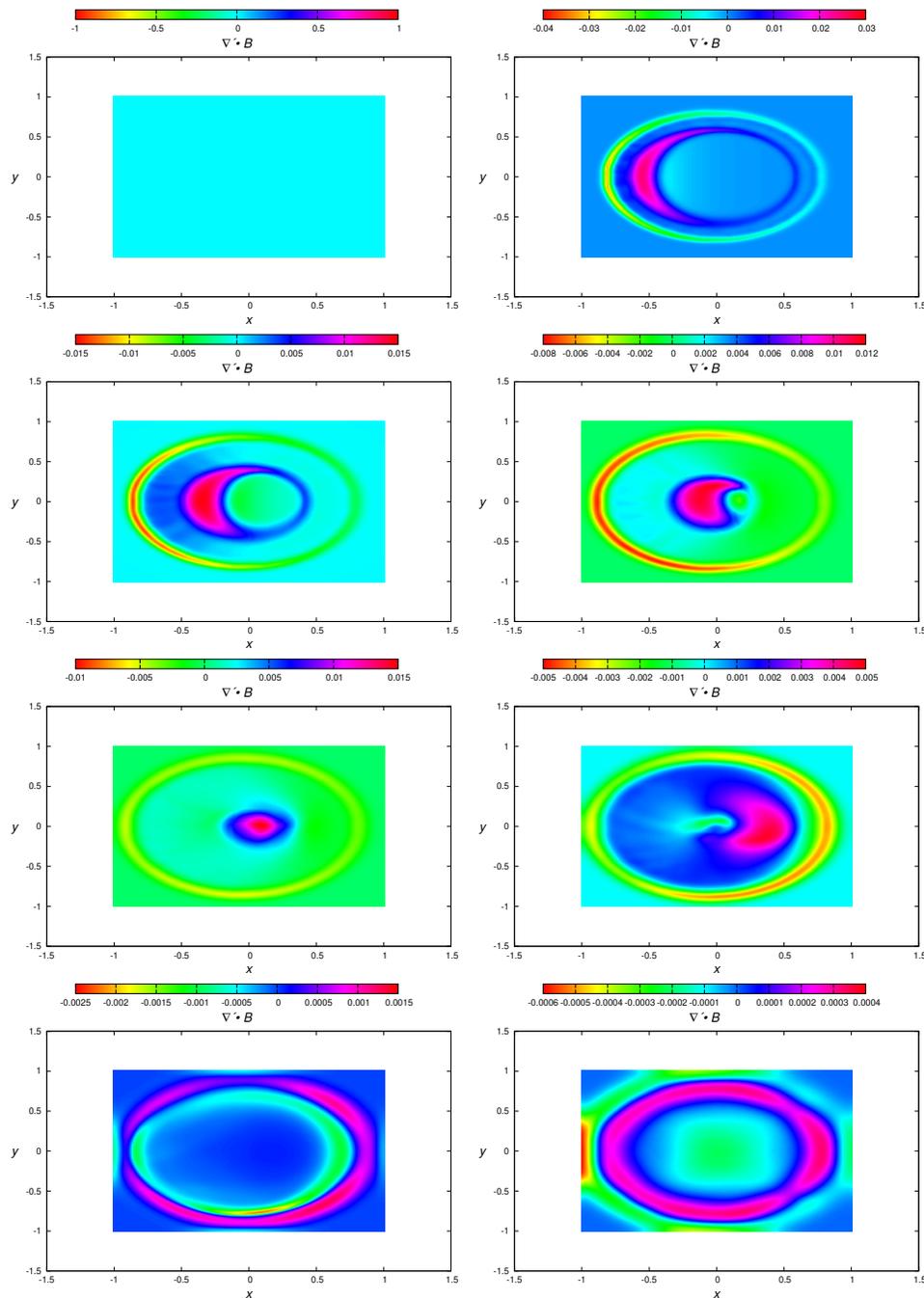


Figura 7.19: Evolución de la Divergencia de \mathbf{B} para tiempos $t = 0, 0.125, 0.25, 0.325, 0.5, 0.625, 1.25, 1.875$

En la Figura 7.19 se presenta que la divergencia del campo magnético la cual, a pesar de variar en su forma, se mantiene cercana a cero durante toda la evolución.

Superposición de Campo Poloidal y Toroidal

Dado que en la evolución del campo magnético toroidal se tuvo que la dinámica de localización del plasma ocurre en el intervalo de tiempo $[0, 0.625]$, se necesita que la columna de plasma se mantenga casi estacionaria por lo menos en esta lapso de tiempo.

Para generar la columna de plasma casi estacionaria se dejó evolucionar el sistema sólo con el campo descrito en la ecuación (7.39) tomando capturas aproximadamente cada 1.25 unidades temporales, que representa más del doble de tiempo que duró la dinámica del confinamiento puramente toroidal.

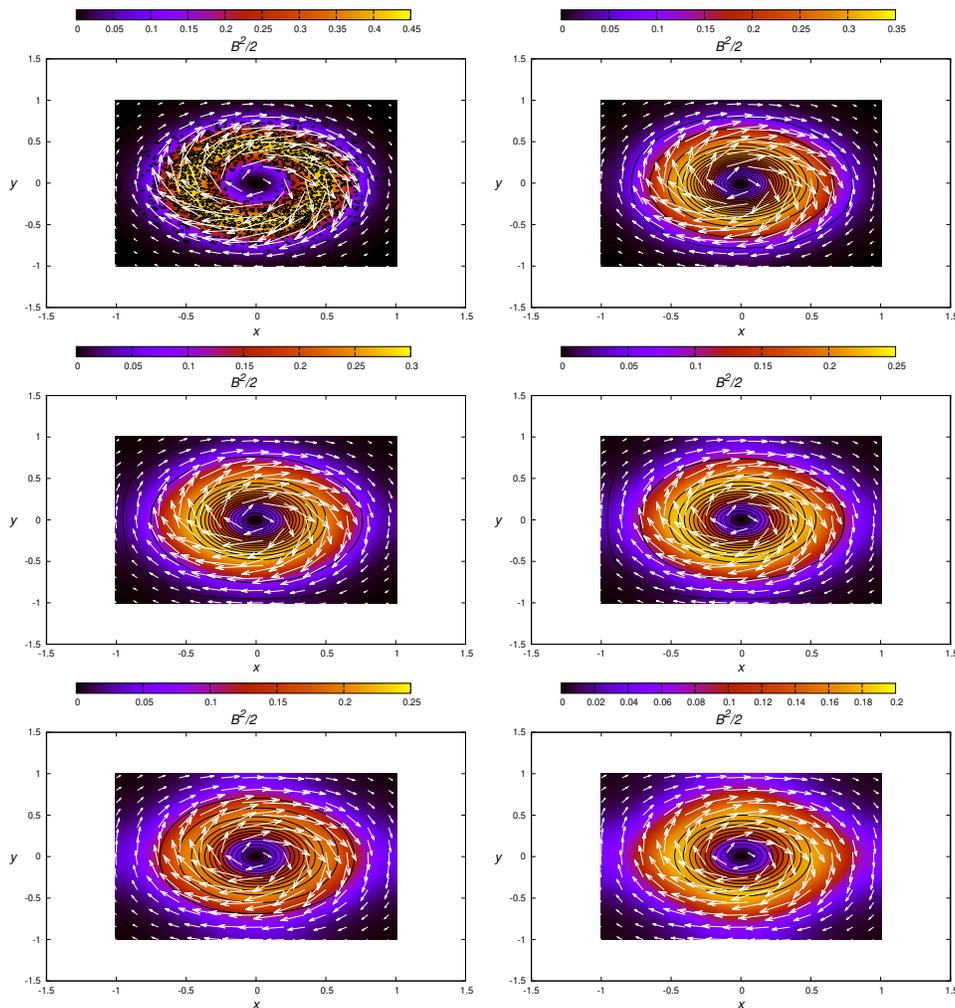


Figura 7.20: Evolución de la presión magnética para tiempos $t = 0, 1.25, 2.5, 3.75, 5$, las líneas negras representan las curvas isobáricas; se presenta también una representación vectorial del campo magnético en algunos puntos de la malla.

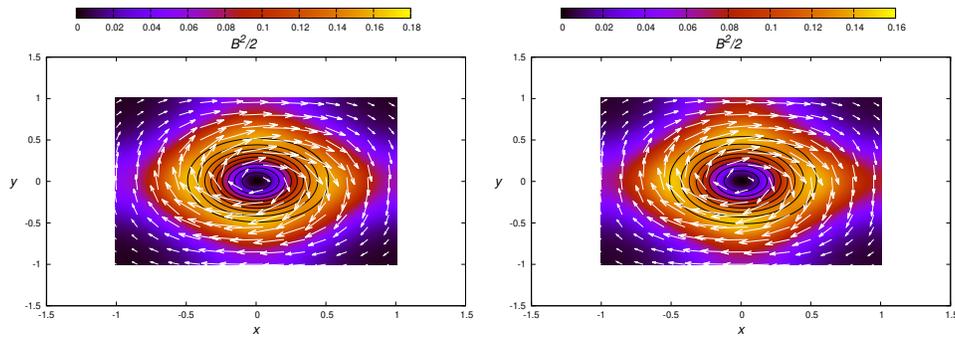


Figura 7.21: Evolución de la presión magnética para tiempos $t = 6.25, 7.5, 8.75$, las líneas negras representan las curvas isobáricas; se presenta también una representación vectorial del campo magnético en algunos puntos de la malla.

En las figuras 7.20 y 7.21 se observa la evolución de la presión magnética para $t \in [0, 8.75]$, junto con el comportamiento de las curvas isobáricas y una representación vectorial del campo magnético en algunos puntos de la malla. Para establecer cuándo se tenía un equilibrio, se comparó la variación de la magnitud de la presión magnética, así como la dinámica de las curvas isobáricas.

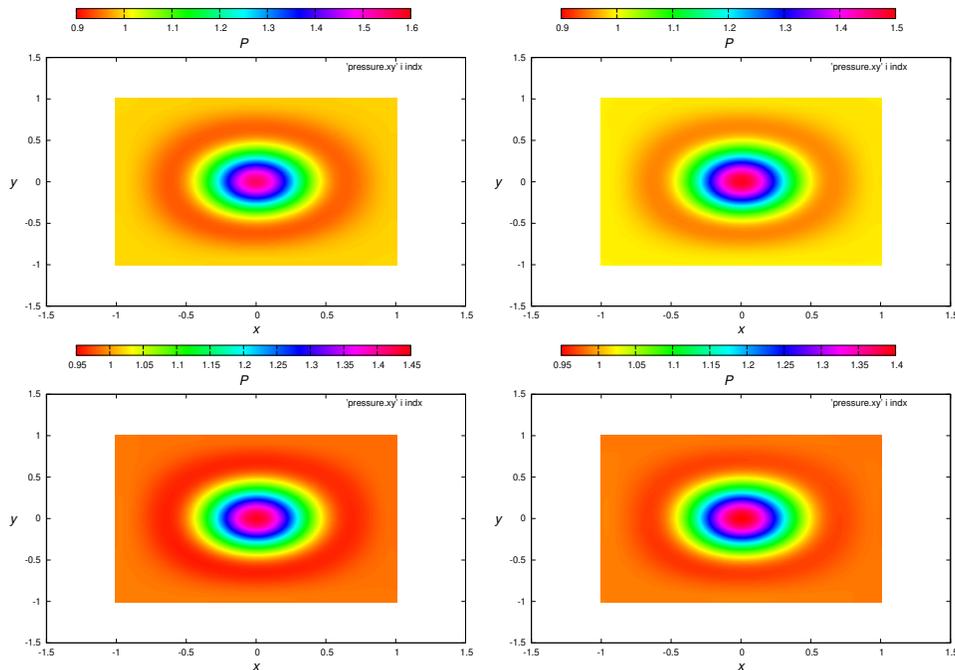


Figura 7.22: Evolución de la presión hidrostática para tiempos $t = 5$ arriba izquierda, $t = 6.25$ arriba derecha, $t = 7.5$ abajo izquierda, $t = 8.75$ abajo derecha.

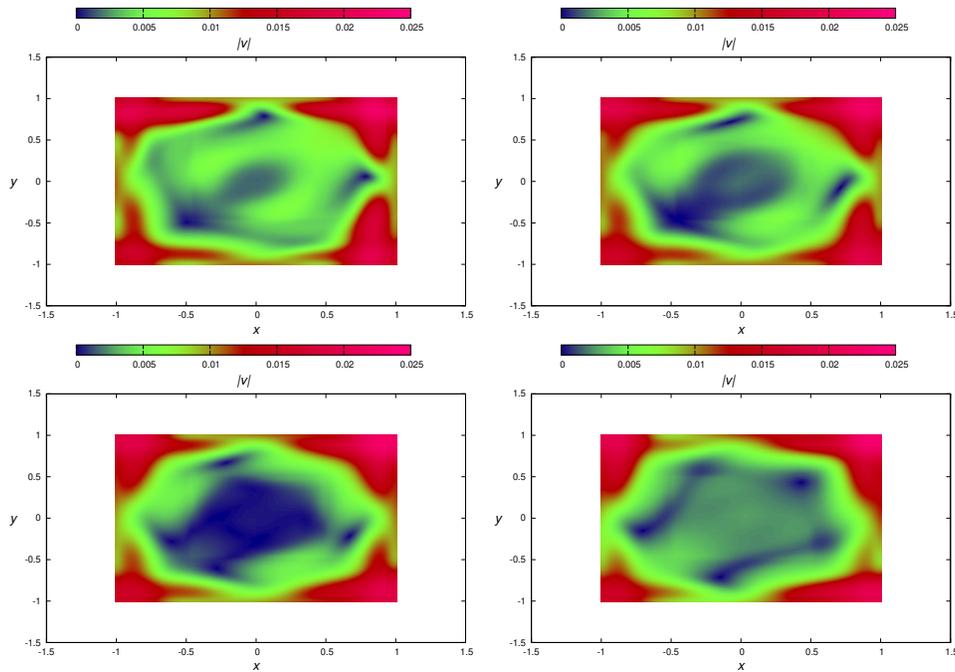


Figura 7.23: Evolución de la magnitud de la velocidad para tiempos $t = 5$ arriba izquierda, $t = 6.25$ arriba derecha, $t = 7.5$ abajo izquierda, $t = 8.75$ abajo derecha.

Se tomó la configuración en equilibrio en $t \approx 8.75$ debido a que la variación de la magnitud de la presión magnética entre $t = 7.5$ y este tiempo fue de 3.45 %, aunado a que el cambio de las curvas isobáricas en este tiempo fue nulo, por otra parte observando la figura 7.22 y la figura 7.23 se tiene que para $t = 7.5$ y $t = 8.75$, la velocidad de los elementos de volumen es mínima y la presión se mantiene, para motivos prácticos, constante.

Posterior a $t = 8.75$ se encendió el campo magnético dado por (7.37). Para poder contrastar los resultados obtenidos para la simulación puramente toroidal se establecerá una escala de tiempo t' en la cual se toma $t' = 0$ como el tiempo en el cual se encendió la perturbación.

En la figura 7.24 se observa la evolución de la presión magnética, el hecho de que exista el campo magnético como en (7.37) hace que la presión magnética sea dominada por este término, ya que presenta la misma forma que la mostrada por la figura 7.16 en $t = 0$. A diferencia del campo puramente toroidal, se observa que existe un gradiente de presión magnética para $t' = 1.25$ y $t' = 1.5$, que genera una configuración poco estable en el plasma.

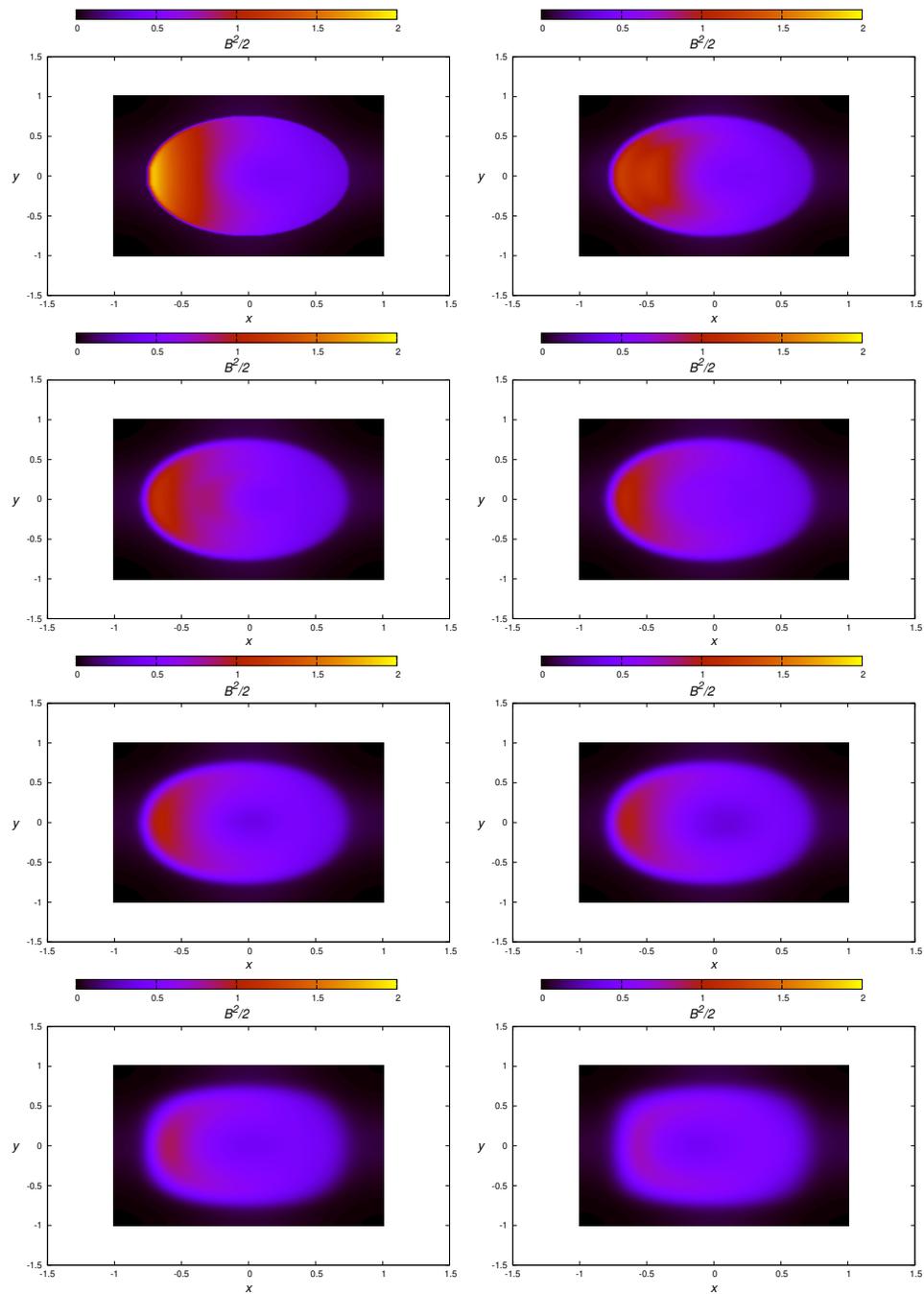


Figura 7.24: Evolución de la presión magnética para tiempos $t' = 0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 1.25, 1.5$

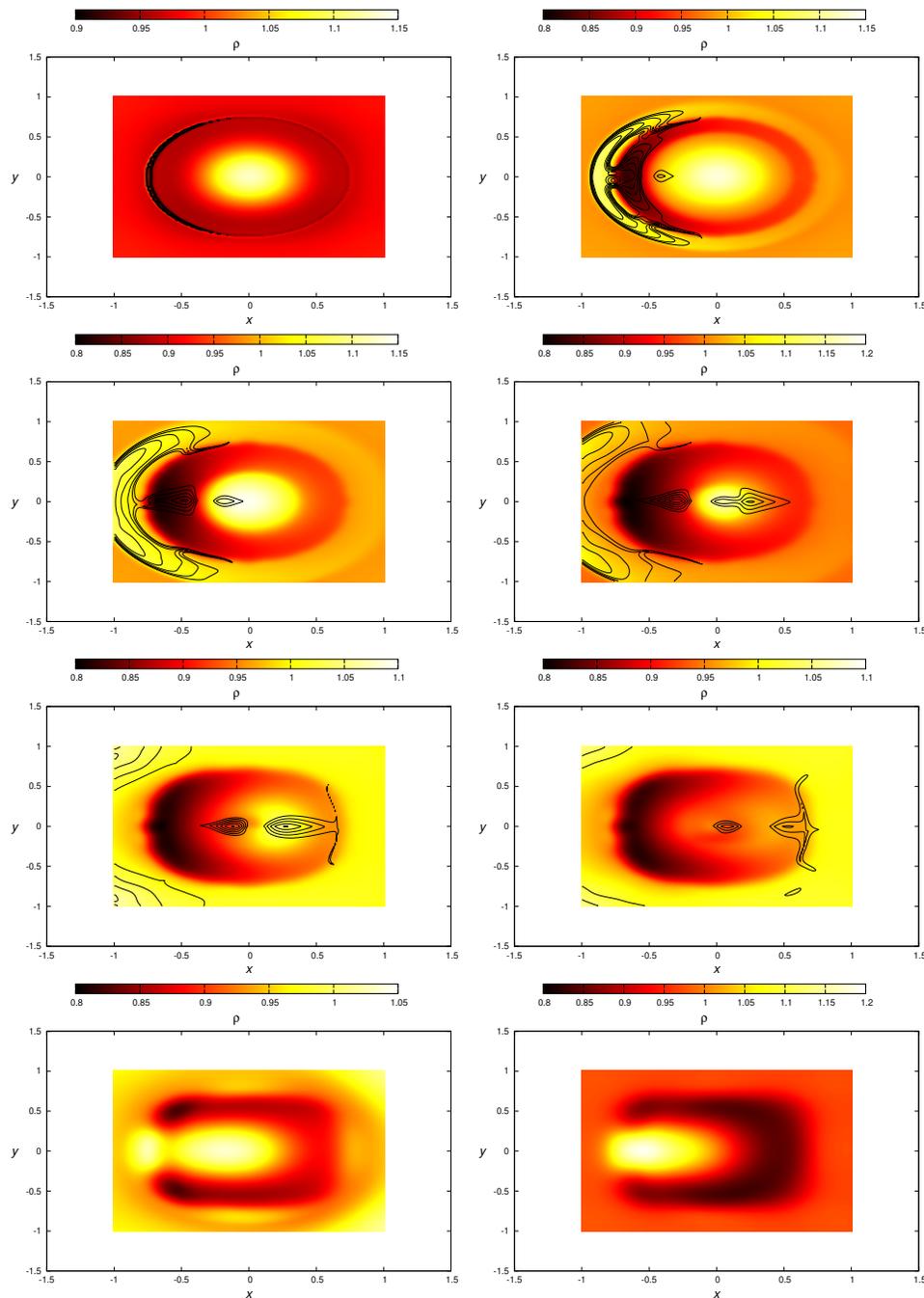


Figura 7.25: Evolución de la densidad para tiempos $t' = 0, 0.125, 0.25, 0.325, 0.5, 0.625, 1.25, 1.5$, las curvas mostradas son las isocurvas en las cuales la componente de la velocidad v_z satisface la ecuación (7.38)

En la figura 7.25 se muestra la evolución de la densidad para tiempos $t' = 0, 0.125, 0.25, 0.325,$

0.5, 0.625, 1.25, 1.875, de acuerdo con las isocurvas, se encuentra que es similar al caso en el que sólo se tiene el campo toroidal, las partículas atrapadas se mantienen en tiempos previos a $t' = 0.625$. No obstante, se observa que la densidad se localiza y tiene un máximo que se desplaza hacia la izquierda para tiempos $t' = 1.25$ y $t' = 1.5$ y que la región de localización comprende áreas similares a la del sistema puramente toroidal. Para éste sistema, el tiempo en el que se presentó la mayor densidad fue en $t' = 1.5$ y la densidad presente fue de 1.2 que representa un aumento de aproximadamente 4.34 % con respecto a la configuración inicial de la columna cuasi estática y un aumento de 20 % con respecto a la configuración inicial homogénea en la cual la densidad vale $\rho = 1$, esto significa que el campo poloidal no modificaría la variación en la magnitud de la intensidad pero sí la región de localización, pues la hace más compacta.

Contrastando la figura 7.26 con la figura 7.18 se observa que el sistema poloidal-toroidal aún sigue presentando velocidades significativas que modifican la región de localización en el plasma. Esto implica que el sistema evoluciona de una manera poco estable.

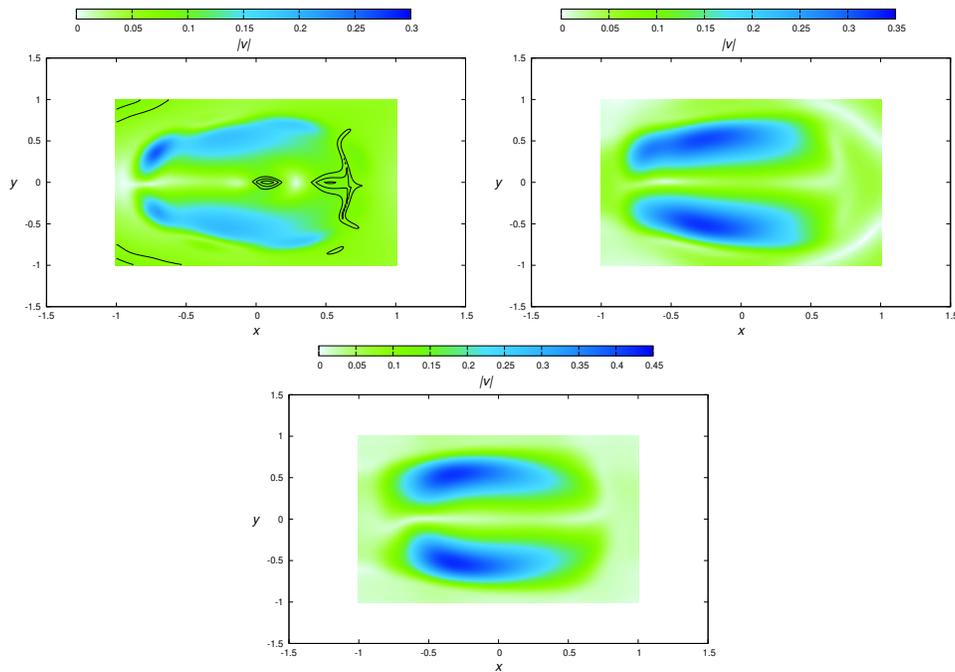


Figura 7.26: Evolución de la magnitud de la velocidad para tiempos $t' = 0.625, 1.25, 1.5$, las curvas mostradas son las isocurvas en las cuales la componente de la velocidad v_z satisface la ecuación (7.38)

Finalmente, en la figura 7.27 se muestra la evolución de $\nabla \cdot \mathbf{B}$. Es apreciable que su valor es cercano a cero dentro de la región donde el plasma se localiza y es un comportamiento similar sistema puramente toroidal, así que los valores no nulos se encuentran en las fronteras, y estos se deben a los campos magnéticos iniciales que generan la columna del plasma.

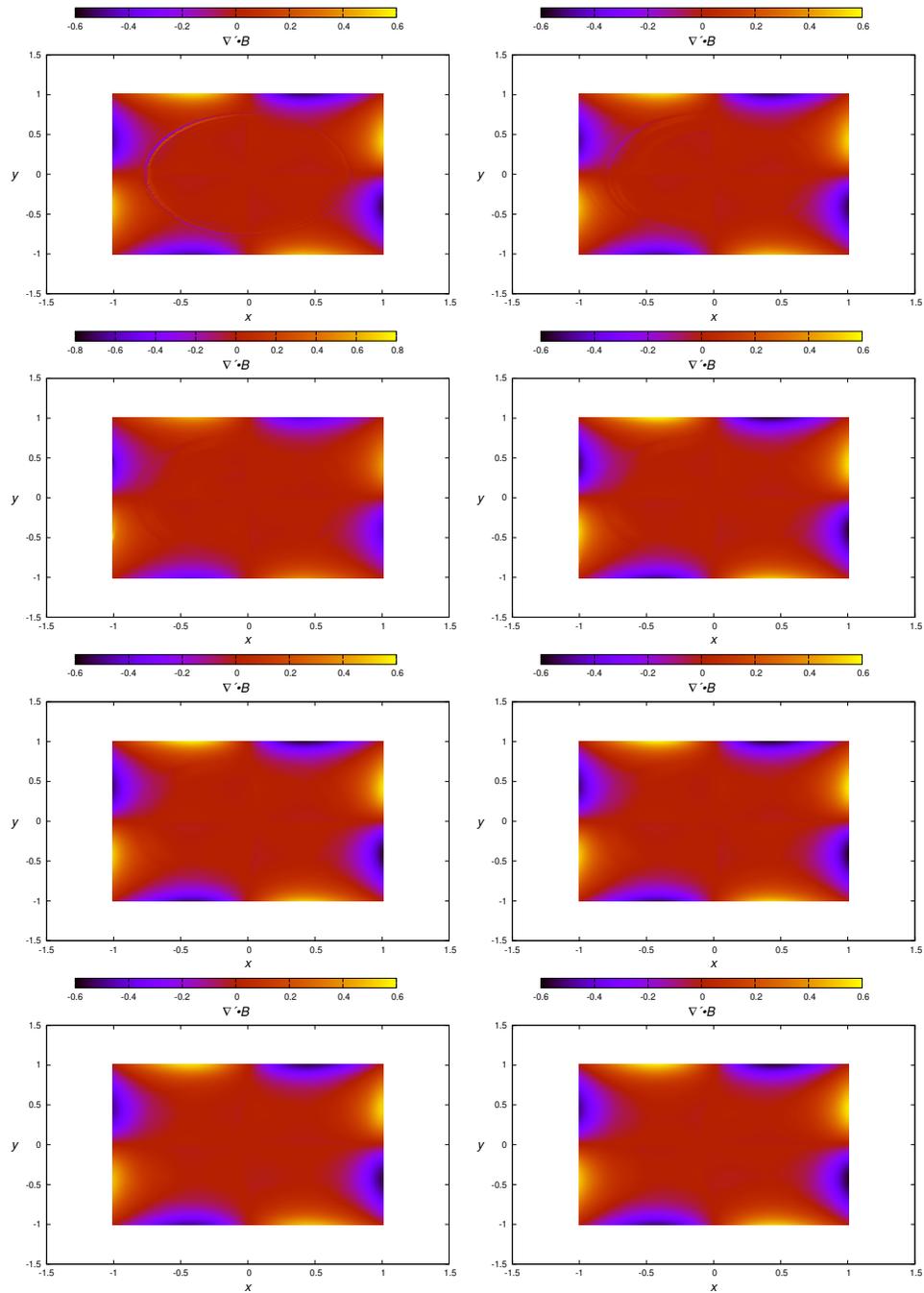


Figura 7.27: Evolución de la divergencia para tiempos $t' = 0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 1.25, 1.5$

Capítulo 8

Comentarios Finales

Dentro de la física de plasmas existen una gran y vasta categoría de experimentos, teorías y simulaciones numéricas, así como diversos enfoques incluso para los mismos fenómenos. Dentro de este trabajo se buscó mostrar tanto la capacidad del código para evolucionar los sistemas dinámicos, como la capacidad para generar escenarios y mecanismos de confinamiento aprovechando que el código está especializado en problemas dinámicos.

Aunque no se ha buscado representar los sistemas reales de confinamiento, las pruebas propuestas sí presentan localización de la densidad en las regiones esperadas teóricamente. Tanto la simulación de la botella magnética como la del campo magnético toroidal son pruebas que no se encuentran aún en la literatura para códigos que funcionan con el mismo esquema que el propuesto en este trabajo y vale la pena explorar este tipo de simulaciones aún más¹. Esto motiva a buscar condiciones iniciales que generen evoluciones del sistema que sean más propensas al equilibrio pero que sigan manteniendo cierta complejidad. Eventualmente es necesario buscar condiciones iniciales que representen a los experimentos.

Las pruebas resistivas e ideales presentadas para sistemas dinámicos en la literatura muestran total concordancia, lo cual era de esperarse ya que los códigos que evolucionan estas simulaciones numéricas también se basan en volúmenes finitos.

Dentro de las proyecciones que se tienen con este trabajo es poder implementar en el código, pruebas de confinamiento en modelos en tres dimensiones. En el caso del toro se planea aprovechar las simetrías del sistema y contrastarlo con los tiempos de vida experimentales en los cuales se obtiene el equilibrio. En el caso de las columnas de plasma confinado que presenten el efecto pinch, poder observar la dinámica de estas perturbaciones.

También se espera poder mejorar y fortalecer el código desde dos puntos principales. Uno de las maneras de fortalecer el código es utilizando mecanismos integradores distintos a HLLE, como son los de Roe (Roe, 1981), el HLLC y HLLD². Durante la redacción de este trabajo se han encontrado integradores que logran manejar densidades cercanas a cero para el problema de Riemann de las ecuaciones de Euler. Es muy probable que exista una extensión para las ecuaciones de la MHD, y con estas herramientas se podría modelar el vacío y el implementar estas rutinas lograría extender el rango de acción del código. Otra de las maneras de fortalecer el código es a través de la flexibilidad a

¹Esta es la contribución más importante de este trabajo.

²Estos están descritos en (Gonzales-Aviles, 2017).

la hora de discretizar el dominio, esto se puede lograr manejando resoluciones espaciales dinámicas y también al buscar otro tipo de mallas distintas a las cuadrículas. También es necesario buscar mecanismos de paralelización más eficientes y ciertamente se puede mejorar el rendimiento del código reescribiendo ciertas rutinas.

Bibliografía

- Balsara, D. S. and Spicer, D. (1999). Maintaining pressure positivity in magnetohydrodynamic simulations. *Journal of Computational Physics*, 148(1):133–148.
- Birn, J., Drake, J., Shay, M., Rogers, B., Denton, R., Hesse, M., Kuznetsova, M., Ma, Z., Bhattacharjee, A., Otto, A., et al. (2001). Geospace environmental modeling (gem) magnetic reconnection challenge. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 106(A3):3715–3719.
- Bittencourt, J. A. (2013). *Fundamentals of plasma physics*. Springer Science & Business Media.
- Brio, M. and Wu, C. C. (1988). An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. *Journal of computational physics*, 75(2):400–422.
- Chandrasekhar, S. (1961). The stability of superposed fluids: The kelvin-helmholtz instability. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, pages 418–514.
- Dai, W. and Woodward, P. R. (1998). On the divergence-free condition and conservation laws in numerical simulations for supersonic magnetohydrodynamical flows. *The Astrophysical Journal*, 494(1):317.
- Dedner, A., Kemm, F., Kröner, D., Munz, C.-D., Schnitzer, T., and Wesenberg, M. (2002). Hyperbolic divergence cleaning for the mhd equations. *Journal of Computational Physics*, 175(2):645–673.
- Fromang, S., Hennebelle, P., and Teyssier, R. (2006). A high order godunov scheme with constrained transport and adaptive mesh refinement for astrophysical magnetohydrodynamics. *Astronomy & Astrophysics*, 457(2):371–384.
- Gardiner, T. A. and Stone, J. M. (2005). An unsplit godunov method for ideal mhd via constrained transport. *Journal of Computational Physics*, 205(2):509–539.
- Goldston, R. J. and Rutherford, P. H. (1995). *Introduction to plasma physics*. CRC Press.
- Gonzales-Aviles, J. (2017). *Solución numérica de las ecuaciones de la MHD resistiva aplicada al estudio de la formación de jets en la atmósfera solar*. PhD thesis, Universidad Michoacana de san Nicolás de Hidalgo.
- Gurnett, D. A. and Bhattacharjee, A. (2005). *Introduction to plasma physics: with space and laboratory applications*. Cambridge university press.

- Jackson, J. D. (2007). *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons.
- Jardin, S. (2010). *Computational methods in plasma physics*. CRC Press.
- Jones, T., Gaalaas, J. B., Ryu, D., and Frank, A. (1997). The mhd kelvin-helmholtz instability. ii. the roles of weak and oblique fields in planar flows. *The Astrophysical Journal*, 482(1):230.
- Jonscher, A. (1964). Solid state plasma phenomena. *British Journal of Applied Physics*, 15(4):365.
- Komissarov, S. S. (2007). Multidimensional numerical scheme for resistive relativistic magnetohydrodynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 382(3):995–1004.
- LeVeque, R. J. (2002). *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31. Cambridge university press.
- Lora-Clavijo, F., Cruz-Pérez, J., Siddhartha Guzmán, F., and González, J. (2013). Exact solution of the 1d riemann problem in newtonian and relativistic hydrodynamics. *Revista mexicana de física E*, 59(1):28–50.
- Orszag, S. A. and Tang, C.-M. (1979). Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 90(1):129–143.
- Palenzuela, C., Lehner, L., Reula, O., and Rezzolla, L. (2009). Beyond ideal mhd: towards a more realistic modelling of relativistic astrophysical plasmas. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 394(4):1727–1740.
- Roe, P. L. (1981). Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of computational physics*, 43(2):357–372.
- Ryu, D. and Jones, T. (1994). Numerical magnetohydrodynamics in astrophysics: algorithm and tests for one-dimensional flow. *arXiv preprint astro-ph/9404074*.
- Shen, Y., Stone, J. M., and Gardiner, T. A. (2006). Three-dimensional compressible hydrodynamic simulations of vortices in disks. *The Astrophysical Journal*, 653(1):513.
- Sod, G. A. (1978). A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Journal of computational physics*, 27(1):1–31.
- Toro, E. F. (2013). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer Science & Business Media.
- Van Dijk, J., Kroesen, G., and Bogaerts, A. (2009). Plasma modelling and numerical simulation. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 42(19):190301.