UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

LA CONJETURA TOPOLÓGICA DE VAUGTH Y COLORACIONES ABIERTAS

TESIS QUE PARA OBTENER EL TITULO MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA: DAVID VALENCIA GÓMEZ

TUTOR: DR. ULISES ARIET RAMOS GARCÍA

Morelia, Mich. Agosto 2019

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Índice

Resumen.

Una reformulación topológica de la conjetura de Vaught afirma que si X es un $G-$espacio polaco entonces $|X/G| = \omega$ o existe un conjunto perfecto P tal que para cualesquiera dos puntos en P se encuentran en órbitas distintas. Es esta versión de la conjetura de Vaught el tema central de este trabajo.

Abstract.

A topological reformulation of the Vaught conjecture says if X is a Polish $G-$space then $|X/G| = \omega$ or there is a perfect set P such that for any two points at P are in different orbits. Is this version of the Vaugh conjecture the central subject of this work.

Palabras Clave: espacios Polacos, axioma de coloraciones abiertas, OCA, conjunto perfecto y conjuntos analíticos.

1. Introducción

«Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros» estas fueron las palabras que David Hilbert pronunció tras quedar fascinado con la teoría de conjuntos. En el año de 1900, dentro del congreso internacional de matemáticas que se celebraba en París, Hilbert dio una ponencia sobre los problemas matemáticos más importantes de aquella época; que poco después se convertirían en los famosos veintitrés problemas que guiarían la matemática del siglo XX. El primer problema de esa lista fue la hipótesis del continuo, ¿existe un conjunto de números reales cuya cardinalidad sea estrictamente mayor a la de los números naturales pero menor que a la de los números reales? o en términos más conjuntistas ¿$2^\omega = \omega_1$? En contra de la intuición este problema no se puede responder ni con un sí, ni con un no; se puede demostrar, como lo hizo Cohen, que la axiomática de la teoría de conjuntos no puede decidir, sin caer en contradicción, que exista o no dicho conjunto.

Los matemáticos no tardaron mucho tiempo en darse cuenta que la indesirnibilidad de la hipótesis del continuo implicaba la posibilidad de que otros problemas matemáticos sean también indisernibles; como lo son los invariantes cardinales del continuo y probablemente la conjetura de Vaught. En 1961 Vaught conjeturo que si T es una teoría en un lenguaje contable de primer orden entonces T tiene una cantidad contable de modelos, salvo isomorfismo, o bien una cantidad continua. Como puede observarse, si la hipótesis del continuo es correcta entonces la conjetura de Vaught es cierta trivialmente.

Una reformulación topológica de la conjetura de Vaught afirma que si X es un $G-$espacio polaco entonces $|X/G| = \omega$ o existe un conjunto perfecto P tal que para cualesquiera dos puntos en P se encuentran en órbitas distintas. Es esta versión de la conjetura de Vaught el tema central de este trabajo.

Con el fin de otorgarle al lector las herramientas necesarias para comprender, con mayor facilidad, la última sección, titulada «la conjetura de Vaught», el contenido de las secciones previas es completamente puntual y no pretende desarrollar con profundidad esos temas. Además, un análisis más exhaustivo de las primeras secciones rebasaría los lineamientos de una tesina.

Quizá los dos teoremas más importantes que se presentarán en este trabajo son el teorema de Silver y el teorema de Sami. El primero nos dice que la conjetura de Vaught es cierta cuando la relación inducida por las órbitas de la acción es coanalítica, mientras que el segundo afirma que cuando el grupo G es abeliano también se satisface la conjetura de Vaught. Además de estos dos grandes resultados se usará el axioma de coloraciones abiertas ($OCA^*(X)$ dice que si $K_0 \sqcup K_1 = [X]^2$ es una partición abierta entonces existe $Y \subseteq X$ subespacio perfecto, no vacío, compacto y $0-$homogéneo o X es $\sigma - 1$ homogéneo) para demostrar algunos resultados relacionados con la conjetura de Vaught. Pese a que las demostraciones usando OCA^* son sencillas, los enunciados que se demuestran son muy reveladores y muy probablemente en un futuro se puedan probar más relaciones entre la conjetura de Vaught y OCA^*.

2. Espacios Polacos

Definición. Un espacio Polaco es un espacio topológico cuya topología está inducida por una métrica completa y contiene un subconjunto denso numerable.

Ejemplos Los siguientes son espacios Polacos:

- $\mathbb{R}$ con la topología usual
- ω con la topología discreta (que se genera con la métrica discreta)
- $C([0,1])$ el espacio de las funciones continuas del intervalo a $\mathbb{R}$ con la topología generada por la métrica $d(f,g) = sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$

Recordemos que en un espacio métrico la separabilidad equivale al segundo axioma de numerabilidad, luego un espacio Polaco puede definirse, alternativamente, como un espacio topológico completamente metrizable y segundo numerable; es decir, con una base numerable.

Teniendo en cuenta que todo subespacio de un espacio segundo numerable es segundo numerable y que todo subespacio cerrado de un espacio métrico completo es completo, concluimos que todo subespacio cerrado de un espacio Polaco es también un espacio Polaco. Mas aún, se puede demostrar que todo subespacio de un espacio Polaco es Polaco si y sólo si es un conjunto G_δ ([1]). De este resultado se sigue que $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un espacio Polaco ya que es un conjunto G_δ.

También podemos observar que todo espacio topológico homeomorfo a un espacio Polaco es también un espacio Polaco, pues un homeomorfismo entre ambos permite transportar la métrica completa que induce la topología de uno a una métrica completa que induzca la del otro.

Además, se puede mostrar que la clase de los espacios Polacos es cerrada bajo productos y uniones numerables. De ahí que el espacio de Baire ω^ω, el conjunto de Cantor 2^ω y el cubo de Hilbert $[0,1]^\omega$ sean espacios Polacos. Estos tres espacios polacos, como lo veremos en este trabajo, juegan un papel importante dentro de la teoría descriptiva de conjuntos; en particular se puede demostrar que todo espacio Polaco se encaja en el cubo de Hilbert ([2]).

Una forma útil e intuitiva de percibir los abiertos de ω^ω es por medio de los conos que generan las funciones de $\omega^{<\omega} = \{f : n \longrightarrow \omega : n \in \omega\}$. Dada $t \in \omega^{<\omega}$ se define el cono de t como $[t] = \{f \in \omega^\omega : t \subseteq f\}$; de este modo $\{[t] : t \in \omega^{<\omega}\}$ es una base para ω^ω. Análogamente $\{[t] : t \in 2^{<\omega}\}$ es una base para 2^ω. Tomando en cuenta esta relación que hay entre ω^ω y $\omega^{<\omega}$ parece natural pensar que ciertas estructuras en $\omega^{<\omega}$ nos pueden ser útiles para poder entender con mayor facilidad la topología en ω^ω. Las siguientes definiciones siguen esta linea de pensamiento.

Definición. Sea A un conjunto. Decimos que $T \subseteq A^{<\omega}$ es un árbol si y sólo si para toda $t \in T$ y $n \in dom(t)$ se cumple que $t \restriction_n \in T$. Además, diremos que un árbol $T \subseteq A^{<\omega}$ está bien podado si y sólo si para toda $t \in T$ existe $a \in A$ tal que $t \frown a \in T$, donde $t \frown a$ denota la función concatenación.

Definición. Dado $T \subseteq A^{<\omega}$ un árbol definimos el conjunto de las ramas de T como el conjunto

$$[T] = \{f \in A^\omega : \forall n \in dom(f)\,(f \restriction_n \in T)\}$$

Proposición 1. *La función $T \longmapsto [T]$ es una biyección entre los árboles bien podados en $A^{<\omega}$ y los subconjuntos cerrados no vacíos de A^ω.*

[1] Vid. Alexander S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, p.17
[2] Vid. Alexander S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, p.22

Demostración. Sean
$$\mathcal{F} = \{F \subseteq A^\omega : F \text{ es cerrado no vacío}\}$$
y
$$\mathcal{T} = \left\{T \subseteq A^{<\omega} : T \text{ es un árbol bien podado}\right\}$$
Veamos que si $T \in \mathcal{T}$ entonces $[T]$ es cerrado. Si $f \in A^\omega \setminus [T]$ entonces existe $n \in \omega$ tal que $f \restriction_n \notin T$, luego $[f \restriction_n] \cap [T] = \emptyset$. Como $[f \restriction_n]$ es un abierto contenido en $A^\omega \setminus [T]$, entonces este conjunto es un abierto; y así $[T]$ es un cerrado. De este modo la función $\varphi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{F}$ está bien definida. Notemos que si $T, S \in \mathcal{T}$ con $T \neq S$ entonces, como son arboles bien podados, $[T] \neq [S]$ (pues al tener un elemento distinto generan una rama distinta); de lo que se infiere que φ es inyectiva. Además, si definimos $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{T}$ como $\psi(F) = \{f \restriction_n : n \in \omega \text{ y } f \in F\}$ se sigue que $\varphi \circ \psi = Id_{\mathcal{F}}$ y $\psi \circ \varphi = Id_{\mathcal{F}}$ con lo que se concluye que φ es suprayectiva. $\square$

Proposición 2. *Sea X un espacio polaco. Existe $\pi : \omega^\omega \longrightarrow X$ continua y suprayectiva.*

Demostración. Sea $U = \{U_n : n \in \omega\}$ una base para X. Para cada $f \in \omega^\omega$ construimos la familia $V^f = \left\{V_n^f : n \in \omega\right\}$ de forma recursiva como sigue: $V_0^f = U_{f(0)}$ y supongamos que ya hemos definido V_n^f. Así,
$$V_{n+1}^f = \begin{cases} U_{f(n+1)} & cl\left(U_{f(n+1)}\right) \subseteq V_n^f \wedge diam\left(U_{f(n+1)}\right) < \frac{1}{2^{n+1}} \\ U_k & k = min\left\{m \in \omega : cl\left(U_k\right) \subseteq V_n^f \wedge diam\left(U_k\right) < \frac{1}{2^{n+1}}\right\} \end{cases}$$

Consideremos $H : \omega^\omega \longrightarrow X$ como $H(f) \in \bigcap V^f$. Como el espacio X es completo entonces $\bigcap V^f \neq \emptyset$ y por ser un espacio Hausdorff se cumple que $\left|\bigcap V^f\right| = 1$; por lo que la función H está bien definida.

Observemos que si $x \in X$ entonces podemos construir por recursión la familia $V = \{U_{k_n} : n \in \omega\}$, como U es base, existe $k_0 \in \omega$ tal que $x \in U_{k_0} \in U$. Si U_{k_n} ya está definida entonces $U_{k_{n+1}} \in U$ es tal que $k_{n+1} = min\left\{m \in \omega : cl\left(U_m\right) \subseteq U_{k_n} \wedge diam\left(U_m\right) < \frac{1}{2^n}\right\}$. Notemos que si definimos $f = \langle k_n : n \in \omega\rangle$ se tiene por construcción que $H(f) = \bigcap V = x$, de lo que se infiere que H es suprayectiva.

Por otra parte, si U_n es un abierto entonces
$$H^{-1}\left[U_n\right] = \bigcup \left\{t \in \omega^\omega : \exists k \in \omega \left[cl\left(U_{t(k)}\right) \subseteq U_n \wedge diam\left(U_{t(k)}\right) < \frac{1}{2^{k+1}}\right]\right\}$$
que es un abierto; de ahí que H sea una función continua. $\square$

Proposición 3. *Todo espacio no vacío métrico completo perfecto contiene un subespacio homeomorfo a 2^ω.*

Demostración. Como el espacio X es no vacío y perfecto, entonces X tiene al menos dos puntos digamos $x_{\langle 0\rangle}, x_{\langle 1\rangle} \in X$. Sean $A_{\langle 0\rangle}, A_{\langle 1\rangle} \in \tau$ abiertos tales que $x_{\langle 0\rangle} \in A_{\langle 0\rangle}$, $x_{\langle 1\rangle} \in A_{\langle 1\rangle}$, $cl\left(A_{\langle 0\rangle}\right) \cap cl\left(A_{\langle 1\rangle}\right) = \emptyset$ y
$$diam\left(A_{\langle 0\rangle}\right), diam\left(A_{\langle 1\rangle}\right) \leq \frac{1}{2}$$
Supongamos que $A_{\langle s\rangle}$ con $s \in 2^{<\omega}$ ya fue definido. Como $cl\left(A_{\langle s\rangle}\right)$ es un espacio perfecto entonces, del mismo modo que en el caso base, existen dos abiertos $cl\left(A_{\langle s\frown 0\rangle}\right), cl\left(A_{\langle s\frown 1\rangle}\right) \subseteq A_{\langle s\rangle}$ tales que
$$cl\left(A_{\langle s\frown 0\rangle}\right) \cap cl\left(A_{\langle s\frown 1\rangle}\right) = \emptyset$$

y $diam\left(A_{\langle s\frown 0\rangle}\right), diam\left(A_{\langle s\frown 1\rangle}\right) \leq \frac{1}{2^{|s|+1}}$. Así, podemos definir $\varphi : 2^{\omega} \longrightarrow X$ como $\varphi(f) \in \bigcap_{n\in\omega} A_{f\upharpoonright n}$. $\square$

Teorema 4. ***(Cantor-Bendixson)*** *Todo espacio polaco puede dividirse de forma única en un conjunto perfecto y en un conjunto abierto a lo más numerable. A dicho conjunto perfecto lo llamaremos el núcleo perfecto de X.*

Demostración. Sea X un espacio polaco y definimos

$$P = \{x \in X : x \text{ es punto de condensación en } X\}$$

que por definición es perfecto y $V = X \setminus P$.

P es un conjunto cerrado y V es abierto:

Sea $z \in X \setminus P$. Entonces existe $z \in U \in \tau$ tal que $|U| \leq \omega$, en consecuencia $U \cap P = \emptyset$; por consiguiente $U \subseteq X \setminus P = V$. Por lo tanto, V es abierto y P es cerrado.

V es numerable:

Como X es un espacio segundo numerable entonces existe una cantidad numerable de abiertos $\{U_n : n \in \omega\}$ tales que $V = \bigcup_{n\in\omega} U_n$ y para toda $n \in \omega$ se cumple que $|U_n| \leq \omega$. En consecuencia $|V| = \left|\bigcup_{n\in\omega} U_n\right| \leq \omega$ pues unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

La descomposición es única:

Supongamos que $X = P' \cup V'$ donde P' es un conjunto perfecto y V' es un conjunto abierto numerable.

Veamos que $P' \subseteq P$. Sea $x \in P'$ y supongamos que $x \in V = X \setminus P$. Como $x \notin P$ entonces existe $x \in U \in \tau$ tal que $|U| \leq \omega$. Sin embargo, $U \cap P'$ es un conjunto G_δ de X (todo conjunto cerrado en un espacio métrico es G_δ) que es un espacio polaco; luego $U \cap P'$ es un espacio polaco cerrado en P' (ya que $X \setminus U \cap P' = U \cap V'$ que es un abierto). Además, $U \cap P'$ es perfecto en P' pues si existe $z \in U \cap P'$ y $W \in \tau$ tal que $\{z\} = W \cap (U \cap P') = (W \cap U) \cap P'$ se seguiría que P' no es perfecto lo que es una contradicción. Por la proposición 3 se sigue que $2^{\omega} \hookrightarrow U \cap P'$ lo que contradice el hecho de que $|U| \leq \omega$. Por lo tanto $x \in P$, de donde $P' \subseteq P$.

Por otra parte, si $x \in P$ y $x \in V' = X \setminus P'$ entonces existe $U \in \tau$ un abierto con $x \in U \subseteq V'$; sin embargo como $x \in P$ se sigue que $|U| > \omega$ lo que contradice el hecho de que V' es numerable. Así, $P \subseteq P'$.

De lo anterior se deduce que $P = P'$, y por consiguiente $V = X \setminus P = X \setminus P' = V'$. $\square$

Observación 5. Del teorema anterior se deduce que todo espacio Polaco es o bien numerable o tiene cardinalidad 2^{ω}.

Observación 6. Siguiendo la demostración del teorema de Cantor-Bendixon se puede demostrar que si X es un espacio métrico hereditariamente Lindelöf entonces todo subconjunto cerrado no numerable de X tiene un núcleo perfecto no vacío.

3. Conjuntos Borel y Conjuntos Analíticos

Definición. Sea (X,τ) un espacio topológico. Decimos que $A\subseteq X$ es un conjunto Borel ($A\in Borel\,(X)$), si A pertenece a la sigma álgebra generada por la topología τ.

Teorema 7. *Sea (X,τ) un espacio Polaco y $A\in Borel\,(X)$. Existe τ_A una topología para X tal que $\tau\subseteq\tau_A$, A es clopen en τ_A, (X,τ_A) es polaco y $Borel\,(X,\tau)=Borel\,(X,\tau_A)$.*

Afirmación 1: Si A es un conjunto cerrado en (X,τ) entonces existe τ_A una topología para X tal que $\tau\subseteq\tau_A$, A es clopen en τ_A, (X,τ_A) es Polaco y $Borel\,(X,\tau)=Borel\,(X,\tau_A)$.

Demostración. Consideremos τ_A la topología generada por $\tau\cup\{A\}$. Observemos que se cumple que $\tau\subseteq\tau_A$, A es clopen en τ_A y $Borel\,(X,\tau)=Borel\,(X,\tau_A)$ (pues $A\in Borel\,(X)$). Además como A es cerrado se tiene que $(A,\tau\restriction_A)$ y $\left(X\setminus A,\tau\restriction_{X\setminus A}\right)$ son espacios Polacos; luego $(A,\tau\restriction_A)\bigoplus\left(X\setminus A,\tau\restriction_{X\setminus A}\right)$ es un conjunto Polaco. Como $(A,\tau\restriction_A)\bigoplus\left(X\setminus A,\tau\restriction_{X\setminus A}\right)\cong(X,\tau_A)$ se sigue que (X,τ_A) es un espacio Polaco. □

Afirmación 2: Sea (X,τ) un espacio Polaco, $\langle\tau_n:n\in\omega\rangle$ una sucesión de topologías Polacas de X tal que para toda $n\in\omega$ se cumple que $\tau\subseteq\tau_n$ y sea τ_ω la topología que tiene a $\bigcup_{n\in\omega}\tau_n$ como subbase. Entonces τ_ω es una topología Polaca; además se cumple que si $\tau_n\subseteq Borel\,(X,\tau)$ entonces $Borel\,(X,\tau_\omega)=Borel\,(X,\tau)$.

Demostración. Como cada (X,τ_n) es un espacio Polaco entonces $\prod_{n\in\omega}(X,\tau_n)$ es un espacio Polaco. Sea Δ la diagonal de $\prod_{n\in\omega}(X,\tau_n)$ que al ser un conjunto cerrado se sigue que también es un conjunto Polaco con la topología relativa del producto. Consideremos $\varphi:(X,\tau_\omega)\longrightarrow(\triangle,\tau*\restriction_\Delta)$ dada por $\varphi(x)=f_x$ donde f_x es la función constante x y $\tau*$ denota a la topología producto. Como φ es biyectiva basta probar que es continua y abierta;φ es continua ya que si $U\in\tau_n$ entonces $\varphi^{-1}\left[\pi^{-1}[U]\right]=U$. Además, φ es abierta pues si $U\in\tau_n$ entonces $\varphi[U]=\pi^{-1}[U]\cap\Delta$. De lo anterior se deduce que φ es un isomorfismo, de ahí que (X,τ_ω) es un espacio Polaco. □

Demostración. Regresando a la prueba del teorema. Sea S la colección de los subconjuntos de X para los cuales se satisface el teorema. Notemos que:

I) $\tau\subseteq S$. Si $A\in\tau$ entonces $X\setminus A$ es un conjunto cerrado y por la afirmación 1 existe $\tau_{X\setminus A}$ una topología para X tal que $\tau\subseteq\tau_{X\setminus A}$, $X\setminus A$ es clopen en $\tau_{X\setminus A}$ (que implica que A es clopen en $\tau_{X\setminus A}$), $\left(X,\tau_{X\setminus A}\right)$ es Polaco y $Borel\,(X,\tau)=Borel\left(X,\tau_{X\setminus A}\right)$. Observemos que $\tau_{X\setminus A}$ testifica que $A\in S$.

II) $X\in S$ y S es cerrado por complementación: $X\in S$ pues τ misma satisface las propiedades. Además si $A\in S$ entonces existe τ_A donde A es clopen luego τ_A testifica que $X\setminus A\in S$.

III) S es cerrado por uniones numerables: Si $\{A_n:n\in\omega\}\subseteq S$ existen $\{\tau_n:n\in\omega\}$ tal que para cada $n\in\omega$, τ_n satisface las propiedades de S. Por la afirmación 2, τ_ω es una topología de X donde $\bigcup_{n\in\omega}A_n$ es un τ_ω-abierto (ya que τ_ω tiene a $\bigcup_{n\in\omega}\tau_n$ y A_n es un τ_n-abierto), $\tau\subseteq\tau_\omega$, (X,τ_ω) es Polaco y

$$Borel\,(X,\tau)=Borel\,(X,\tau_\omega)$$

Como $X\setminus\bigcup_{n\in\omega}A_n$ es τ_ω-cerrado, aplicando el lema 1 existe $\tau_{X\setminus\bigcup_{n\in\omega}A_n}$ una topología para X tal que $\tau\subseteq\tau_\omega\subseteq\tau_{X\setminus A}$, $X\setminus A$ es clopen en $\tau_{X\setminus\bigcup_{n\in\omega}A_n}$ (que implica que $\bigcup_{n\in\omega}A_n$ es clopen en $\tau_{X\setminus\bigcup_{n\in\omega}A_n}$),

$\left(X, \tau_{X \setminus \bigcup_{n\in\omega} A_n}\right)$ es Polaco y $Borel\,(X,\tau) = Borel\,(X,\tau_\omega) = Borel\left(X, \tau_{X \setminus \bigcup_{n\in\omega} A_n}\right)$. Observemos que $\tau_{X \setminus \bigcup_{n\in\omega} A_n}$ testifica que $\bigcup_{n\in\omega} A_n \in S$.

De los puntos anteriores se sigue que S es una sigma álgebra que contiene a la topología τ de X. De la minimalidad de la sigma álgebra se sigue que $Borel\,(X,\tau) \subseteq S$ lo que demuestra el teorema. Observemos que $S = Borel\,(X,\tau)$ ya que si $A \in S$ entonces

$$A \in \tau_A \subseteq Borel\,(X,\tau_A) = Borel\,(X,\tau)$$

$\square$

Corolario 8. *(PSP) Si (X,τ) es un espacio Polaco y $A \in Borel\,(X)$ entonces $|A| \leq \omega$ o A contiene un subconjunto perfecto de X.*

Demostración. Por el teorema 7 (A,τ_A) es un espacio polaco con $\tau \subseteq \tau_A$, luego por el teorema de Cantor Bendixon A se descompone en su núcleo perfecto P (según la topología τ_A) y un conjunto abierto numerable. De este modo si $|A| > \omega$ entonces $P \neq \emptyset$, por lo que el conjunto de Cantor se encaja en P; decir $2^\omega \cong (C,\tau_A) \subseteq P \subseteq A$. Sin embargo, como $\tau \subseteq \tau_A$ se sigue que $I_d : (C,\tau_A) \longrightarrow (C,\tau)$ es continua, biyectiva y cerrada (pues (C,τ_A) es compacto y (C,τ) es Hausdorff); es decir I_d es un isomorfismo. Por lo tanto A contiene un subconjunto perfecto de X en τ. $\square$

Corolario 9. *Sea X un espacio topológico y $A \in Borel\,(X)$. Existe $f : \omega^\omega \longrightarrow A$ continua y suprayectiva.*

Demostración. Por el teorema 7 (A,τ_A) es un espacio Polaco con $\tau \subseteq \tau_A$ y por una proposición anterior sabemos que existe $f : \omega^\omega \longrightarrow (A,\tau_A)$ una función continua tal que $f\,[F] = A$. Pero como $\tau \subseteq \tau_A$ entonces

$$id : (A,\tau_A) \longrightarrow (A,\tau)$$

es continua, luego $id \circ f : F \longrightarrow (A,\tau)$ es una función continua y suprayectiva. $\square$

Definición. Sea X un espacio Polaco y $A \subseteq X$. Decimos que A es un conjunto analítico si y sólo si existe un conjunto Polaco Y y $f : Y \longrightarrow X$ una función continua tal que $f\,[Y] = A$. Asimismo, diremos que $A \subseteq X$ es coanalítico si es el complemento de un conjunto analítico.

Ejemplo Los conjuntos Polacos y los Borelianos son conjuntos analíticos.

Proposición 10. *Sea X un espacio Polaco y $A \subseteq X$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. X es un conjunto analítico
2. X es la imagen continua del espacio de Baire ω^ω
3. Existe $F \subseteq \omega^\omega \times X$ un conjunto cerrado tal que $\pi_X\,[F] = A$
4. Existe $F \subseteq 2^\omega \times X$ un conjunto G_δ tal que $\pi_X\,[F] = A$
5. Existe Y un espacio Polaco y $B \subseteq Y \times X$ un conjunto Borel tal que $\pi_X\,[B] = A$

Para la prueba de esta proposición véase [2]

Observación 11. Del inciso 5 se sigue que si $B \subseteq X \times Y$ es un conjunto Borel, donde Y es un espacio Polaco, entonces $\{x \in X : \exists y \in Y\,(\langle x,y\rangle \in B)\}$ es un conjunto analítico y $\{x \in X : \forall y \in Y\,(\langle x,y\rangle \in B)\}$ es un conjunto coanalítico.

Definición. (Jerarquía de Borel) Dado X un espacio topológico y $1 \leq \alpha < \omega_1$ definimos por recursión los conjuntos $\sum_{\alpha}^{0}(X), \prod_{\alpha}^{0}(X), \Delta_{\alpha}^{0}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ como se muestra a continuación:

1. $\sum_{0}^{0}(X) = \{U \subseteq X : U \in \tau_X\}$
2. $\prod_{0}^{0}(X) = \left\{F \subseteq X : X \setminus F \in \sum_{0}^{0}(X)\right\}$
3. $\sum_{\alpha}^{0}(X) = \left\{\bigcup_{n\in\omega} A_n : A_n \in \prod_{\alpha_n}^{0}(X) \text{ con } \alpha_n < \alpha\right\}$
4. $\prod_{\alpha}^{0}(X) = \left\{F \subseteq X : X \setminus F \in \sum_{\alpha}^{0}(X)\right\} = \left\{\bigcap_{n\in\omega} B_n : B_n \in \sum_{\alpha_n}^{0}(X) \text{ con } \alpha_n < \alpha\right\}$
5. $\Delta_{\alpha}^{0}(X) = \sum_{\alpha}^{0}(X) \cap \prod_{\alpha}^{0}(X)$

Observación 12. Notemos lo siguiente:

1. $\sum_{2}^{0}(X)$ es el conjunto de los conjuntos F_σ de la topología y $\prod_{2}^{0}(X)$ es el conjunto de los conjuntos G_δ de la topología.
2. $\sum_{\alpha}^{0}(X)$ es cerrada bajo uniones numerables e intersecciones finitas.
3. $\prod_{\alpha}^{0}(X)$ es cerrada bajo intersecciones numerables y uniones finitas.
4. $\Delta_{\alpha}^{0}(X)$ es cerrada bajo uniones e intersecciones finitas.
5. $\sum_{\alpha}^{0}(X)$, $\prod_{\alpha}^{0}(X)$ y $\Delta_{\alpha}^{0}(X)$ son cerradas bajo imágenes inversas de funciones continuas; es decir, si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y $A \in \sum_{\alpha}^{0}(Y)$ entonces $f^{-1}[A] \in \sum_{\alpha}^{0}(X)$ (respectivamente para las clases $\prod_{\alpha}^{0}(X)$ y $\Delta_{\alpha}^{0}(X)$).
6. Si X es un espacio metrizable entonces $\sum_{\alpha}^{0}(X) \cup \prod_{\alpha}^{0}(X) \subseteq \Delta_{\alpha+1}^{0}(X)$,
$$Borel(X) = \bigcup_{1\leq\alpha\leq\omega_1} \sum_{\alpha}^{0}(X) = \bigcup_{1\leq\alpha\leq\omega_1} \prod_{\alpha}^{0}(X) = \bigcup_{1\leq\alpha\leq\omega_1} \Delta_{\alpha+1}^{0}(X)$$
y si además X es infinito y separable entonces $|Borel(X)| = 2^{\omega}$.

Definición. Decimos que $f : X \longrightarrow Y$ es una función Borel si la preimagen de un Boreliano en Y es un Boreliano en X.

Proposición 13. *Sea (X, τ) un espacio Polaco, Y un espacio topológico segundo numerable y una función Borel $f : X \longrightarrow Y$. Entonces existe τ_f una topología en X que hace continua a f, (X, τ_f) es Polaco y cumple que $Borel(X, \tau) = Borel(X, \tau_f)$. En particular, si Y es un espacio Polaco entonces $f[X]$ es un conjunto analítico.*

Demostración. Sea $B = \{U_n : n \in \omega\}$ una base numerable de Y. Como la función es Borel,
$$\left\{f^{-1}[U_n] : n \in \omega\right\}$$
es una colección de conjuntos Borel de X. Para cada $n \in \omega$ existe τ_n una topología que hace polaco a X tal que $f^{-1}[U_n] \in \tau_n$ y $Borel(X, \tau) = Borel(X, \tau_n)$, luego existe τ_ω una topología que hace Polaco a X tal que $\tau_n \subseteq \tau_\omega$ para toda $n \in \omega$ y $Borel(X, \tau) = Borel(X, \tau_\omega)$. Observemos que τ_ω es una topología en X que hace continua a f. □

Proposición 14. *Sea X un espacio Polaco. $\sum_{1}^{1}(X)$ y $\prod_{1}^{1}(X)$ son cerrados por intersecciones y uniones numerables.*

Demostración. Como $\prod_{1}^{1}(X)$ son los complementos de $\sum_{1}^{1}(X)$, basta demostrar la proposición únicamente para $\sum_{1}^{1}(X)$.

$I)$ $\sum_1^1(X)$ es cerrada bajo uniones numerables:

Sea $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \sum_1^1(X)$. Por la definición de conjunto analítico, para cada $n \in \omega$ existe

$$f_n : \omega^\omega \longrightarrow X$$

una función continua tal que $f_n[\omega^\omega] = A_n$. Definimos $F : \omega \times \omega^\omega \longrightarrow X$ como $F(n,x) = f_n(x)$, que es una función continua ya que si $U \subseteq X$ es un conjunto abierto entonces $F^{-1}[U] = \bigcup_{n\in\omega}\{n\} \times f_n^{-1}[U]$ que es un conjunto abierto en $\omega \times \omega^\omega$. Observemos que $F[\omega \times \omega^\omega] = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, por consiguiente $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ es la imagen continua de un espacio Polaco; es decir $\bigcup_{n\in\omega} A_n \in \sum_1^1(X)$.

$II)$ $\sum_1^1(X)$ es cerrada bajo intersecciones numerables:

Sea $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \sum_1^1(X)$. Por la definición de conjunto analítico, para cada $n \in \omega$ existe

$$f_n : \omega^\omega \longrightarrow X$$

una función continua tal que $f_n[\omega^\omega] = A_n$. Consideremos $F \subseteq (\omega^\omega)^\omega$ definido como

$$F = \{\langle y_n : n \in \omega\rangle \in (\omega^\omega)^\omega : \forall n, m\, (f_n(y_n) = f_m(y_m))\}$$

veamos que F es un conjunto cerrado (y por consiguiente, F es Polaco). Si $\langle y_n : n \in \omega\rangle \notin F$ existen $n \neq m$ tales que $f_n(y_n) \neq f_m(y_m)$, como X es Hausdorff, existen $U \in V(f_n(y_n))$ y $V \in V(f_m(y_m))$ conjuntos abiertos tales que $U \cap V = \emptyset$; luego $\pi^{-1}\left[f_n^{-1}[U]\right] \cap \pi^{-1}\left[f_n^{-1}[V]\right]$ es un conjunto abierto de $\langle y_n : n \in \omega\rangle$ contenido en $(\omega^\omega)^\omega \setminus F$, de lo que podemos inferir que F es un conjunto cerrado. Por otra parte, definimos $f : F \longrightarrow X$ como $f(\langle y_n : n \in \omega\rangle) = f_0(y_0)$ (que es continua ya que $f = f_0 \circ \pi_0$ que es la composición de dos funciones continuas) y notemos que $f[F] = \bigcap_{n\in\omega} A_n$. Esto es claro ya que si $\langle y_n : n \in \omega\rangle \in F$ y $n \in \omega$ entonces $f(\langle y_n : n \in \omega\rangle) = f_0(y_0) = f_n(y_n) \in f_n[\omega^\omega] = A_n$, lo que implica que $\langle y_n : n \in \omega\rangle \in \bigcap_{n\in\omega} A_n$. Por otra parte, si $x \in \bigcap_{n\in\omega} A_n$ consideremos $\langle y_n : n \in \omega\rangle$ tal que para cada $n \in \omega$ $f_n(y_n) = x$, en consecuencia $\langle y_n : n \in \omega\rangle \in F$ y $f(\langle y_n : n \in \omega\rangle) = f_0(y_0) = x$. De lo anterior hemos demostrado que $\bigcap_{n\in\omega} A_n$ es la imagen continua de un conjunto Polaco; es decir, $\bigcap_{n\in\omega} A_n \in \sum_1^1(X)$. □

Proposición 15. *Sean X, Y espacios polacos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si $A \in \sum_1^1(X)$ entonces $f[A] \in \sum_1^1(Y)$.*

Demostración. Por definición si $A \in \sum_1^1(X)$ entonces existe $g : \omega^\omega \longrightarrow X$ una función continua con $g[\omega^\omega] = A$. Luego, $f \circ g : \omega^\omega \longrightarrow X$ es continua y cumple que $f \circ g[\omega^\omega] = f[A]$; por consiguiente $f[A] \in \sum_1^1(Y)$. □

Proposición 16. *Sean X, Y espacios polacos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si $B \in \sum_1^1(Y)$ entonces $f^{-1}[B] \in \sum_1^1(X)$.*

Demostración. Por definición si $B \in \sum_1^1(Y)$, existe $F \subseteq Y \times \omega^\omega$ un conjunto cerrado tal que

$$\pi_Y[F] = B$$

Definiendo $\varphi : X \times \omega^\omega \longrightarrow Y \times \omega^\omega$ como $\varphi = \langle f, id\rangle$ se tiene que $\pi_X\left[\varphi^{-1}[F]\right] = f^{-1}[B]$; es decir $f^{-1}[B]$ es la proyección de un conjunto cerrado de $X \times \omega^\omega$ por lo que $f^{-1}[B] \in \sum_1^1(X)$. □

Definición. Sea X un espacio polaco y $A, B \subseteq X$. Se dice que A y B son Borel separados si existe C un conjunto Borel de X tal que $A \subseteq C$ y $C \cap B = \emptyset$.

Lema 17. *Si $\{P_i : i \in \omega\}$ y $\{Q_i : i \in \omega\}$ son familias de subconjuntos de un espacio polaco X tal que para cada $i, j < \omega$ se cumple que P_i y Q_j son Borel separados entonces $\bigcup_{n\in\omega} P_n$ y $\bigcup_{n\in\omega} Q_n$ son Borel separados.*

Demostración. Para cada $i, j < \omega$ existe $B_{i,j} \in Borel\,(X)$ tal que $P_i \subseteq B_{i,j}$ y $B_{i,j} \cap Q_j = \emptyset$. Luego

$$\bigcup_{i\in\omega} \bigcap_{j\in\omega} B_{i,j} \in Borel\,(X)$$

testifica que $\bigcup_{n\in\omega} P_n$ y $\bigcup_{n\in\omega} Q_n$ son Borel separados. $\square$

Teorema 18. ***Teorema de separación de Luzin*** *Sea X un espacio Polaco y $A, B \in \sum_1^1 (X)$ ajenos entonces A y B son Borel separados.*

Demostración. Supongamos para reducción al absurdo que A y B no son Borel separados. Por definición de conjunto analítico existen $f : \omega^\omega \longrightarrow A$ y $g : \omega^\omega \longrightarrow B$ dos funciones continuas y suprayectivas. Por recurción construiremos $x, y \in \omega^\omega$ tales que $f(x) \in A$, $f(y) \in B$ y para toda $n \in \omega$ se cumple que $f[[x \restriction_n]]$ y $g[[y \restriction_n]]$ no son Borel separados. El caso base es precisamente $f[[\emptyset]] = A$ y $g[[\emptyset]] = B$ que por suposición no son Borel separados. Supongamos por inducción que ya hemos construido $x \restriction_n$ y $y \restriction_n$ que no son Borel separado. Como $f[[x \restriction_n]] = \bigcup_{k\in\omega} f[[(x \restriction_n) \frown k]]$ y $g[[y \restriction_n]] = \bigcup_{k\in\omega} g[[(y \restriction_n) \frown k]]$ entonces, aplicando el lema anterior, existe p y q tales que $g[[(x \restriction_n) \frown p]]$ y $g[[(y \restriction_n) \frown q]]$ no son Borel separados; luego definimos $x(n) = p$ y $y(n) = q$. Sin embargo, como $f(x) \neq g(y)$ existe $U, V \in \tau_X$ tales que $f(x) \in U$, $g(y) \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por la continuidad de f y g existe $N \in \omega$ tal que $f[[x \restriction_N]] \subseteq U$ y $g[[y \restriction_N]] \subseteq V$, lo que implica que $f[[x \restriction_N]]$ y $g[[y \restriction_N]]$ son Borel separados que es una contradicción. $\square$

Corolario 19. *$A \in Borel\,(X)$ si y sólo si $A \in \sum_1^1 (X) \cap \prod_1^1 (X)$.*

Demostración. Basta demostrar el regreso. Sea $A \in \sum_1^1 (X) \cap \prod_1^1 (X)$, aplicando el teorema de separación de Luzin existe $B \in Borel\,(X)$ tal que $A \subseteq B$ y $B \cap (X \setminus A) = \emptyset$. De lo que podemos inferir que $A \subseteq B \subseteq A$, de ahí que $A = B \in Borel\,(X)$ $\square$

Corolario 20. *Sea X un espacio Polaco. Si $\{A_n : n \in \omega\}$ es una familia de conjuntos analíticos ajenos entre sí entonces existe una familia $\{B_n : n \in \omega\}$ de conjuntos Borel ajenos entre sí tales que $A_n \subseteq B_n$.*

Demostración. Se sigue del teorema de separación de Luzin y aplicando recursión. $\square$

Definición. (Operación de Suslin) Sea X un espacio Polaco y $B = \{B_s : s \in \omega^{<\omega}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ entonces al conjunto $\mathcal{A}(B) = \bigcup_{y\in\omega^\omega} \bigcap_{n\in\omega} B_{y\restriction n}$ se le conoce como la operación de Suslin.

Teorema 21. ***(Luzin)*** *Sea X y Y espacios polacos, $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y A un conjunto Borel de X. Si $f \restriction_A$ es inyectiva entonces $f[A] \in Borel\,(Y)$. Además, el resultado también es valido si sólo se pide que f sea una función Borel.*

Demostración. Como $A \in Borel\,(X)$ existe $F \subseteq \omega^\omega$ un conjunto cerrado y $g : F \longrightarrow X$ una función continua tal que $g[F] = A$. Por consiguiente podemos suponer sin perdida de generalidad que $X = \omega^\omega$ y $A \subseteq \omega^\omega$ es un conjunto cerrado. Dado que A es cerrado existe $T \subseteq \omega^{<\omega}$ un árbol tal que $[T] = A$. Para cada $s \in \omega^{<\omega}$ definimos $\langle A \rangle_s = A \cap [s]$ y $A_s = f[\langle A_s \rangle] \in \sum_1^1 (Y)$. Observemos que como $f \restriction_A$ es inyectiva si $s \perp t$ entonces $A_s \cap A_t = \emptyset$; es decir, $\{A_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ es una familia de conjuntos analíticos entre sí. Por el teorema de separación de Luzin existe $B = \{B_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ una familia de conjuntos Borel ajenos entre sí tales que $A_s \subseteq B_s \subseteq cl\,(A_s)$.

Afirmamos que $\mathcal{A}\,(B) = f\,[A]$ donde $\mathcal{A}\,(B)$ es la operación de Suslin.

$\supseteq\rfloor$ Si $x \in f\,[A]$ entonces existe $y \in A \subseteq \omega^{\omega}$ tal que $f\,(y) = x$. Luego

$$x \in \bigcap_{n\in\omega} A_{y\restriction n} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} B_{y\restriction n}$$

lo que implica que $x \in \mathcal{A}\,(B)$.

$\subseteq\rfloor$ Si $x \in \mathcal{A}\,(B)$ entonces existe $y \in \omega^{\omega}$ tal que $x \in \bigcap_{n\in\omega} B_{y\restriction n} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} cl\,(A_{y\restriction n})$. Entonces existe $(y_n)_{n\in\omega}$ tal que $y_n \in \langle A\rangle_{y\restriction_n} = A \cap [y\restriction_n]$ y $d\,(x, f\,(y_n)) \leq \frac{1}{n}$. Por la continuidad de f obtenemos que $f\,(lim_{n\longrightarrow\infty} y_n) = x$ y por construcción $lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = y$. Por tanto $x \in A$.

Por otra parte, como $B = \{B_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ es una familia de conjuntos entre sí se sigue que

$$f\,[A] = \mathcal{A}\,(B) = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{s\in\omega^n} B_s \in Borel\,(Y)$$

Notemos que este resultado también es válido si sólo se pide que f sea una función Borel ya que por la proposición 13 existirá β una topología Polaca que extiende a la topología de X y que hace a f continua. $\square$

Proposición 22. ***(Códigos Borel)*** *Existen $P^+, P^- \in \prod_1^1(\omega \times X)$ y $D \subseteq \omega$ tales que $i)$ para toda $n \in \omega$ $P_n^+ = X \setminus P_n^-$, donde P_n^+ y P_n^- denotan sus respectivas rebanadas en la coordenada n, y $ii)$ Si $A \in \Delta_1^1(X)$hay $n \in D$ tal que $A = P_n^+$.*

Para la demostración de esta proposición véase [7]

4. Teoría de Juegos

Definición. Sea X un espacio topológico. El juego de Choquet G_X es definido como sigue:

- En la primera jugada, el jugador I elige un abierto $U_0 \in \tau$
- Enseguida el jugador II elige un abierto $V_0 \in \tau$ tal que $V_0 \subseteq U_0$
- El jugador elije $U_1 \in \tau$ tal que $U_1 \subseteq V_0$, y así sucesivamente

Diremos que el jugador II gana si $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \bigcap_{n\in\omega} V_n \neq \emptyset$, en caso contrario el jugador I gana.

Definición. Decimos que un espacio topológico es de Choquet si el jugador II tiene estrategia ganadora en el juego de Choquet.

Teorema 23. ***(Oxtoby)*** *Un espacio topológico X es de Baire si y sólo si el jugador I no tiene estrategia ganadora en el juego de Choquet.*

Demostración.

$\Longleftarrow\rfloor$ Supongamos que X no es un espacio de Bare, entonces existe una familia $\{U_n : n \in \omega\}$ de densos abiertos tal que $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \emptyset$. De esta manera, si V_n representa cualquier respuesta del jugador II en el juego de Choquet entonces $\sigma = (U_0, V_0, V_0 \cap U_1, V_1, ...)$ es una jugada ganadora para el jugador I ya que $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \emptyset$.

$\Longrightarrow \rfloor$ Supongamos que existe σ una estrategia ganadora para el jugador I y que$X$ es un subespacio de Baire. Sea U_0 el primer movimiento de acuerdo a σ. Mostraremos que U_0 no es de Baire. Construiremos un arbol T bien podado cuyos elementos son jugadas finitas de σ que cumpla que si

$$p = (U_0, V_0, ..., U_n) \in T$$

entonces $U_p = \{U_{n+1} : (U_0, V_0, ..., U_n, V_n, U_{n+1}) \in \sigma\}$ consiste de conjuntos abiertos ajenos por pares y $W_n = \bigcup \{U_p : |p| = 2n\}$ es un conjunto denso en U_n (aplicando el lema de Zorn podemos construir una familia maximal ajena por pares. De la maximalidad concluiriamos que W_n es denso en U_n). Sin perdida de generalidad podemos suponer que $W_{n+1} \subseteq W_n$. Dado que $X = U_0$ es un espacio de Baire (ya que subespacios abiertos de un espacio de Baire también son de Baire) se sigue que $\bigcap_{n\in\omega} W_n \neq \emptyset$ que implica que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$ que contradice el hecho de que σ es una estrategia ganadora para el jugador I. $\square$

Definición. Decimos que un espacio topológico es de Choquet si el jugador II tiene estrategia ganadora en el juego de Choquet.

Observación 24. Si X es un espacio de Choquet entonces X es un espacio de Baire. Esto es claro ya que si el jugador II tiene estrategia ganadora entonces el jugador I no tiene estrategia ganadora; y por el teorema de Oxtoby se tiene que X es un espacio de Baire.

Definición. Sea X un espacio topológico. El juego fuerte de Choquet es definido como sigue:

- En la primera jugada, el jugador I elige un abierto $U_0 \in \tau$ y un punto $x_0 \in U_0$
- Enseguida el jugador II elige un abierto $V_0 \in \tau$ tal que $x_0 \in V_0 \subseteq U_0$
- El jugador elije $U_1 \in \tau$ y un punto x_1 tal que $x_1 \in U_1 \subseteq V_0$, y así sucesivamente

Diremos que el jugador II gana si $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \bigcap_{n\in\omega} V_n \neq \emptyset$, en caso contrario el jugador I gana.

Definición. Diremos que un espacio topológico X es fuertemente Choquet si en X el jugador II tiene estrategia ganadora.

Observación 25. Si X es fuertemente Choquet entonces es Choquet.

Proposición 26. *Si X es fuertemente Choquet, $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, sobreyectiva y abierta entonces Y es fuertemente Choquet.*

Demostración. Supongamos que X es fuertemente Choquet, $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, sobreyectiva y abierta. En resumen, un juego fuerte de Choquet en Y induce un juego fuerte de Choquet en X; como la función es abierta podemos regresar las respuestas del jugador II en X al juego en Y. A continuación procederemos a formalizar esta idea. Vamos a definir por recursión los conjuntos $\{V_n^Y : n \in \omega\}$ que son las respuestas del jugador II en Y, el conjunto $\{V_n^X : n \in \omega\}$ que son las respuestas del jugador II en X y $\{U_n^X : n \in \omega\}$ las respuestas del jugador I en X. Supongamos por hipótesis de inducción que ya hemos definido V_j^Y, V_j^X y U_j^X para toda $j \leq n$. Si $y_{n+1} \in U_{n+1}$ es una respuesta del jugador I en Y, entonces como f es continua y sobre entonces definimos $U_{n+1}^X = f^{-1}[U_n]$ que es un abierto no vacío. Así, definimos V_{n+1}^X como la respuesta del jugador II a la jugada $\left(U_0^X, V_0^X, ..., U_{n+1}^X\right)$ que existe porque X es fuertemente Choquet. Ahora, como f es un abierto entonces definimos $V_{n+1}^Y = f\left[V_{n+1}^X\right]$. Como X es fuertemente Choquet entonces $\bigcap_{n\in\omega} V_{n+1}^X \neq \emptyset$, luego $\bigcap_{n\in\omega} V_{n+1}^Y = \bigcap_{n\in\omega} f\left[V_{n+1}^X\right] \neq \emptyset$. Por consiguiente Y es fuertemente Choquet. $\square$

5. $OCA\left(X\right)$

Definición. (Todorchevich) Sea X un espacio topológico y $K \subseteq [X]^2$. Decimos que K es abierto si y sólo si para cualesquier $x \neq y \in K$ existen abiertos $U, V \subseteq X$ tales que $x \in U$ y $y \in V$ se satisface que $\{\{a,b\} : a \neq b,\ a \in U,\ b \in V\} \subseteq K$.

Definición. (Todorchevich) Decimos que $[X]^2 = K_0 \sqcup K_1$ es una partición 0-abierta (donde K_1 puede ser un conjunto vacío) si K_0 es abierto.

Definición. (Todorchevich) Dada una partición $K_0 \sqcup K_1 = [X]^2$, decimos que $Y \subseteq X$ es i-homogéneo para $i \in \{0,1\}$ si para cualesquier $x \neq y \in Y$ se tiene que $\{x,y\} \in K_i$.

Definición. (Todorchevich)[3] Decimos que X satisface $OCA\left(X\right)$ si y sólo si X es Hausdorff y para cualesquier partición 0-abierta $K_0 \sqcup K_1 = [X]^2$ existe $Y \in [X]^{\omega_1}$ 0-homogéneo o hay una familia $\{X_n : n \in \omega\}$ de conjuntos 1-homogéneos tales que $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$.

Definición. (Todorchevich) Decimos que X satisface $OCA^*\left(X\right)$ si y sólo si X es Hausdorff y para cualesquier partición 0-abierta $K_0 \sqcup K_1 = [X]^2$ existe $Y \subseteq X$ subespacio perfecto, no vacío, compacto y 0-homogéneo o hay una familia $\{X_n : n \in \omega\}$ de conjuntos 1-homogéneos tales que $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$.

Proposición 27. ***(Todorchevich)*** *Sean X y Y espacios topológicos, donde Y es Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva. Si X satisface $OCA(X)$ entonces Y satisface $OCA(Y)$.*

Demostración. Sean $L_0 \sqcup L_1 = [Y]^2$ una partición abierta. Consideremos

$$K_0 = \{\{x,y\} : f\left(x\right) \neq f\left(y\right),\ \ \{f\left(x\right), f\left(y\right)\} \in L_0\}$$

y $K_1 = [X]^2 \setminus K_0$. Veamos que K_0 es abierto. Si $x \neq y \in K_0$ entonces $f\left(x\right) \neq f\left(y\right)$ y $\{f\left(x\right), f\left(y\right)\}$ pertenece a L_0, como L_0 es abierto y Y es Hausdorff existen abiertos $U, V \subseteq Y$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$; dado que f es continua entonces $f^{-1}[U]$ y $f^{-1}[V]$ son abiertos en X y cumple que si $z \in f^{-1}[U]$ y $w \in f^{-1}[V]$ entonces, como $U \cap V = \emptyset$, $f\left(z\right) \neq f\left(w\right)$ y $\{f\left(z\right), f\left(w\right)\} \in L_0$ que implica que $\{z,w\} \in K_0$. Por consiguiente K_0 es abierto.

Por otra parte, por como definimos la partición se tiene que si $Z \subseteq X$ es i-homogéneo entonces $f[Z]$ es i-homogéneo con $i \in \{0,2\}$.

Como X satisface $OCA(X)$ entonces hay dos casos:

Caso I : existe $Z \in [X]^{\omega_1}$ 0-homogéneo entonces $f[Z]$ es 0-homogéneo

Caso II : existe una familia $\{X_n : n \in \omega\}$ de conjuntos 1-homogéneos tales que $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$. Entonces cada $f[X_n]$ es 1-homogéneo y como la función es suprayectiva se tiene que $Y = \bigcup_{n\in\omega} f[X_n]$.

De los casos anteriores se tiene que Y satisface $OCA(X)$. □

Proposición 28. ***(Todorchevich)*** *Sean X y Y espacios topológicos, donde Y es Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva. Si X satisface $OCA^*(X)$ entonces Y satisface $OCA^*(Y)$.*

Demostración. La demostración es igual que la anterior modificando el caso I: Si $Z \subseteq X$ es un subespacio compacto y perfecto entonces $f[Z] \subseteq Y$ es compacto, cerrado y 0-homogeneo, luego $der\left(f[Z]\right)$, el conjunto derivado de $f[Z]$, es un conjunto compacto, perfecto y $0-$homogeneo. □

[3]Vid. S. Todorchevich & I. Farah, *Some applications of the method of forcing*, p.79

Proposición 29. ***(Todorchevich)*** *ω^ω satisface $OCA^*(\omega^\omega)$.*

Demostración. Sea $K_0 \sqcup K_1 = [\omega^\omega]^2$ una partición abierta y supongamos que ω^ω no es $\sigma-1-$homogéneo (ω^ω no es la unión numerable de conjuntos 1-homogéneo). Sea

$$\Sigma = \left\{ \sigma \in \omega^{<\omega} : [\sigma] \text{ es 1-homogéneo} \right\}$$

Construiremos un esquema de cantor $\langle A_s : s \in \omega^{<\omega} \rangle$ de abiertos básicos en ω^ω tales que A_s no es $\sigma - 1-$homogéneo y si $x \in A_{s^\frown 0}$ y $y \in A_{s^\frown 1}$ entonces $\{x, y\} \in K_0$. Supongamos que ya hemos definido A_s con $s \in \omega^{<\omega}$. Como $|\Sigma| = \omega$, $A_s = 2^\omega$ y no es $\sigma-1$-homogéneo entonces existen $f \neq g \in A_s \setminus \bigcup_{\sigma \in \Sigma} [\sigma]$ tales que $\{f, g\} \in K_0$; dado que la partición es abierta existen abiertos $A_{s^\frown 0}$ y $A_{s^\frown 1}$ con $f \in A_{s^\frown 0}$ y $g \in A_{s^\frown 1}$ tales que si $x \in A_{s^\frown 0}$ y $y \in A_{s^\frown 1}$ entonces $\{x, y\} \in K_0$. Observemos que $A_{s^\frown i}$ no es $\sigma - 1-$homogéneo ya que $h \in A_{s^\frown i} \setminus \bigcup_{\sigma \in \Sigma} [\sigma]$ con $h \in \{f, g\}$, pues si $A_{s^\frown i}$ fuera $\sigma - 1-$homogéneo entonces $h \in \bigcup_{\sigma \in \Sigma} [\sigma]$. Con esto se concluye la recurción, así $\langle A_s : s \in \omega^{<\omega} \rangle$ es un esquema de cantor con la propiedad de que si $x \in A_{s^\frown 0}$ y $y \in A_{s^\frown 1}$ entonces $\{x, y\} \in K_0$.

Veamos que $\bigcap \bigcup_{s \in \omega} A_s$ que en un conjunto perfecto y compacto (pues es isomorfo al conjunto de Cantor) es 0-homogéneo. Sean $f \neq g \in \bigcap \bigcup_{s \in \omega} A_s$ y consideremos $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $f \in A_{s^\frown 0}$ y $g \in A_{s^\frown 1}$, por construcción tenemos que $\{f, g\} \in K_0$. De donde $\bigcap \bigcup_{s \in \omega} A_s$ es 0-homogeneo □

Corolario 30. ***(Todorchevich)*** *Si X es analítico entonces X satisface $OCA^*(X)$.*

Demostración. Si X es un conjunto analítico, existe una función continua $f : \omega^\omega \longrightarrow X$ suprayectiva. Como ω^ω satisface $OCA^*(\omega^\omega)$ entonces por la proposición anterior X satisface $OCA^*(X)$. □

Corolario 31. ***(PSP)*** *Si X es un conjunto analítico con $|X| > \omega$ entonces existe un conjunto perfecto y compacto $P \subseteq X$.*

Demostración. Consideremos $K_0 \sqcup \emptyset = [X]^2$ que es una partición abierta. Como X satisface $OCA^*(X)$ y X no puede ser σ-1-homogéneo entonces existe un conjunto perfecto y compacto $P \subseteq X$ que es K_0-homogéneo. □

Proposición 32. *Si X es Hausdorff, hereditariamente Lindelöf y fuertemente Choquet, entonces se satisface $OCA(X)$. Más aún, si X no es σ-1-homogeneo existe $H \subseteq X$ con $|H| = 2^\omega$ un conjunto 0-homogeneo.*

Demostración. Sea $[X]^2 = K_0 \sqcup K_1$ una partición abierta y supongamos que X no es $\sigma-1-$homogéneo. Consideremos $\mathcal{F} = \{U \in \tau : U \text{ es } \sigma - 1 \text{ homogeneo}\}$, como X es hereditariamente Lindelöf existe $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ con $|\mathcal{F}'| = \omega$ tal que $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}'$; de esto se sigue que $X \setminus \bigcup \mathcal{F}$ no es σ-1-homogéneo. Dado que K_0 es abierta y X Hausdorff, existen $x, y \in X \setminus \bigcup \mathcal{F}$ con $\{x, y\} \in K_0$ y $U_0, U_1 \subseteq X \setminus \bigcup \mathcal{F}$ tales que $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, $U_0 \times U_1 \subseteq K_0$, $x \in U_0$ y $y \in U_1$. Además, por la definición de $\mathcal{F}$ se sigue que U_0 y U_1 no son σ-1-homogéneo ya que $x, y \notin \bigcup \mathcal{F}$. Aplicando este mismo procedimiento podemos construir un esquema de Cantor $H = \bigcup_{f \in 2^\omega} \bigcap_{n \in \omega} (U_{f \restriction n})$, que es no vacío ya que al ser X fuertemente Choquet se cumple que $\bigcap_{n \in \omega} (U_{f \restriction n}) \neq \emptyset$ y sin perdida de generalidad podemos suponer que $\left| \bigcap_{n \in \omega} (U_{f \restriction n}) \right| = 1$ utilizando una función de elección. Así, H es un conjunto no numerable 0-homogeneo (ya que si $x, y \in H$ existe $n \in \omega$ y $s, t \in 2^n$ tal que $\{x, y\} \in U_s \times U_t \subseteq K_0$) . □

Teorema 33. ***(Dushnik-Miller)*** *Para cualquier cardinal k se cumple que $k \longrightarrow (k, \omega)^2$.*

Demostración. Sea $c : [k]^2 \longrightarrow 2$ una coloración.

Caso I: $\forall X \subseteq k \left(|X| = k \longrightarrow \exists \alpha \in X \left(\left|A'_\alpha \cap X\right| = k\right)\right)$ donde

$$A'_\alpha = \{\beta \in k : a < \beta \text{ y } c(\alpha, \beta) = 1\}$$

En este caso, por recurción, se puede construir el conjunto 1-homogeneo de cardinalidad ω.

Caso II: $\exists X \subseteq k \left(|X| = k \wedge \forall \alpha \in X \left(\left|A'_\alpha \cap X\right| < k\right)\right)$

Si k es regular:

En este caso, por recurción y la regularidad de k, se puede construir el conjunto 0-homogeneo de cardinalidad k.

Si k es singular:

En tal caso existe $\lambda < k$, $\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de subconjuntos de k ajenos entre sí y $\langle k_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ cardinales regulares tales que $k = \bigsqcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$ y $\lambda \leq |A_\alpha| = k_\alpha < k$.

Por el caso anterior, para cada $\alpha < \lambda$ se tiene que $k_\alpha \longrightarrow (k_\alpha, \omega)$; por lo que existe $K_\alpha \subseteq A_\alpha$ tal que $|K_\alpha| = k_\alpha$ y $c[K_\alpha]^2 = \{0\}$ (si existiera un $\alpha < \lambda$ tal que $K_\alpha$es un conjunto 1-homogeneo entonces habríamos terminado).

Por la hipótesis general para cada $\gamma \in K_\alpha$ se tiene que$\left|A'_\gamma \cap X\right| < k$, como k es límite existe k_γ tal que $\left|A'_\gamma \cap X\right| < k_\gamma$. Como $k_\alpha > \lambda$, por el principio de casillas existe ξ_α tal que $Z_\alpha = \left\{x \in K_\alpha : \left|A'_x \cap X\right| < k_{\xi_\alpha}\right\}$ tiene cardinalidad k_α. Sin perdida de generalidad supongamos que si $\xi_\alpha = \alpha$.

Para cada $\alpha < \lambda$ sea $H_\alpha = Z_\alpha \setminus \bigcup \left\{A'_x : x \in \bigcup_{\gamma<\alpha} Z_\gamma\right\}$ y $H = \bigcup_{\alpha<\lambda} H_\alpha$. Como cada k_α es regular se tiene que $|H_\alpha| = k_\alpha$. Por construcción H es 0-homogeneo y

$$|H| = sup\{|H_\alpha| : \alpha < \lambda\} = sup\{k_\alpha : \alpha < \lambda\} = k$$

$\square$

Proposición 34. *Sea $[\omega^\omega]^2 = K_0 \sqcup K_1$ una partición 1-abierta tal que para cualesquier $V_1, ..., V_n$ abiertos que no son 1-homogéneos existen $\{x_i : i \leq n\} \subseteq \omega^\omega$ con $x_i \in V_i$ y se satisface que para toda $i \neq j$ $\{x_i, x_j\} \in K_0$ entonces existe $P \subseteq \omega^\omega$ un conjunto perfecto 0-homogéneo o existe $\{X_n : n \in \omega\}$ tal que $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ y cada X_n es $1-$homogéneo.*

Demostración. Sea $[\omega^\omega]^2 = K_0 \sqcup K_1$ una partición 1-abierta y supongamos que ω^ω no es $\sigma - 1$-homogéneo. Consideremos $\mathcal{F} = \{U \in \tau : U \text{ es } \sigma - 1 \text{ homogeneo}\}$, como ω^ω es hereditariamente Lindelöf existe $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ con $|\mathcal{F}'| = \omega$ tal que $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}'$; de esto se sigue que $\omega^\omega \setminus \bigcup \mathcal{F}$ no es σ-1-homogéneo. Dado que ω^ω es regular y $\omega^\omega \setminus \bigcup \mathcal{F}$ no es $\sigma - 1-$homogéneo, existen $x_{\langle 0\rangle}, x_{\langle 0\rangle} \in \omega^\omega \setminus \bigcup \mathcal{F}$ con $\left\{x_{\langle 0\rangle}, x_{\langle 0\rangle}\right\} \in K_0$ y $U_{\langle 0\rangle}, U_{\langle 1\rangle} \in \tau_G$ tales que $x_{\langle 0\rangle} \in U_{\langle 0\rangle}$, $x_{\langle 1\rangle} \in U_{\langle 1\rangle}$, $cl\left(U_{\langle 0\rangle}\right) \cap cl\left(U_{\langle 1\rangle}\right) = \emptyset$ y $d\left(U_{\langle 0\rangle}\right), d\left(U_{\langle 1\rangle}\right) \leq \frac{1}{2^1}$.

Supongamos por inducción que ya han sido definidos $\{x_\sigma : \sigma \in 2^n\}$ y $\{U_\sigma : \sigma \in 2^n\}$ tales que $x_\sigma \in U_\sigma \setminus \bigcup \mathcal{F}$, $cl(U_\sigma) \cap cl(U_{\sigma'}) = \emptyset$, $d(U_\sigma) \leq \frac{1}{2^{|\sigma|}}$ y para cualesquier $\sigma \neq \sigma'$ se tiene que $\{x_\sigma, x_{\sigma'}\} \in K_0$. Observemos que cada U_σ no es 1-homogéneo ya que $x_\sigma \in U_\sigma \setminus \bigcup \mathcal{F}$, por consiguiente para cada σ existen $x^{\sigma\frown 0}, x^{\sigma\frown 1} \in U_\sigma \setminus \bigcup \mathcal{F}$ tales que $\left\{x^{\sigma\frown 0}, x^{\sigma\frown 1}\right\} \in K_0$. Dado que ω^ω es Hausdorff, para cada σ existen $U_{\sigma\frown 0}, U_{\sigma\frown 1} \in \tau$ con $U_{\sigma\frown 0}, U_{\sigma\frown 1} \subseteq U_\sigma$ tales que $x^{\sigma\frown 0} \in U_{\sigma\frown 0}$, $x^{\sigma\frown 1} \in U_{\sigma\frown 1}$, $d(U_{\sigma\frown i}) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

y $U_{\sigma\frown 0} \cap U_{\sigma\frown 1} = \emptyset$. Como $\{U_{\sigma\frown i} : \sigma \in 2^n, i \in 2\}$ son abiertos que no son 1-homogéneos, aplicando la hipótesis existen $\{x_{\sigma\frown i} : \sigma \in 2^n, i \in 2\}$ tales que $x_{\sigma\frown i} \in U_{\sigma\frown i}$ y si $\sigma \neq \sigma'$ e $i, j \in 2$ entonces $\{x_{\sigma\frown i}, x_{\sigma\frown j}\} \in K_0$.

Por recursión podemos construir un esquema de Cantor $H = \bigcup_{f\in 2^\omega} \bigcap_{n\in\omega} (U_{f\restriction_n})$ tal que $\bigcap_{n\in\omega} (U_{f\restriction_n}) \neq \emptyset$ (pues ω^ω es un espacio métrico completo) y dado que $d(U_\sigma) \leq \frac{1}{2^{|\sigma|}}$ se cumple que $\left|\bigcap_{n\in\omega} (U_{f\restriction_n})\right| = 1$. Notemos que $\varphi : 2^\omega \longrightarrow (\omega^\omega, \tau)$ definida como $\{\varphi(f)\} = \bigcap_{n\in\omega} (U_{f\restriction_n})$ es un encaje, ya que es inyectiva y como veremos a continuación f es continua. En efecto, si $t \in \omega^{<\omega}$ y $f \in 2^\omega$ son tales que $\varphi(f) \in [t]$ entonces existe $n \in \omega$ tal que $U_{f\restriction_n} \subseteq [t]$ (pues $diam\,(U_{f\restriction_n}) \longrightarrow 0$), notemos que por construcción $\varphi[f \restriction_n] \subseteq U_{f\restriction_n} \subseteq [t]$; de lo que se infiere que φ es continua. Por consiguiente, $\varphi[2^\omega]$ es un conjunto perfecto.

Veamos que para cualesquier $x_f, x_g \in \varphi[2^\omega]$, $\{x_f, x_g\} \in K_0$. En efecto como $x_f \in \bigcap_{n\in\omega} (U_{f\restriction_n})$ y $x_g \in \bigcap_{n\in\omega} (U_{g\restriction_n})$ entonces $(x_{f\restriction n})_{n\in\omega} \longrightarrow x_f$ y $(x_{g\restriction n})_{n\in\omega} \longrightarrow x_g$. Por construcción $\langle x_{f\restriction n}, x_{g\restriction n}\rangle \subseteq K_0$ y $\langle x_{f\restriction n}, x_{g\restriction n}\rangle \longrightarrow \langle x_f, x_g\rangle$, al ser K_0 cerrado (pues la partición es 1-abierta) se tiene que $\langle x_f, x_g\rangle$ pertenece a K_0. $\square$

6. Propiedad de Baire

Definición. Sea X un espacio Polaco. Decimos que $A \subseteq X$ tiene la propiedad de Baire si hay un conjunto abierto U tal que $A \triangle U$ es magro.

Notación Denotaremos por $BP(X)$ a todos los subconjuntos de X que tengan la propiedad de Baire y por $M(X)$ el conjunto de todos los magros de X.

Observación 35. Las siguientes afirmaciones se satisfacen:

1. Todo conjunto abierto tiene la propiedad de Baire.
2. Todo conjunto cerrado tiene la propiedad de Baire (ya que si F es cerrado entonces $F \setminus int(F)$ es un conjunto denso en ninguna parte).
3. BP es cerrado por complementos (si $A \triangle U$ es magro entonces $(X \setminus A) \triangle int(X \setminus U)$ es magro).
4. BP es cerrada por uniones numerables (si $A_n \triangle U_n$ es magro entonces $\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) \triangle \left(\bigcup_{n\in\omega} U_n\right)$ es un conjunto magro.
5. Por los puntos anteriores se tiene que BP es una $\sigma-$álgebra que contiene a los Borelianos.

Proposición 36. *Sea X un espacio polaco. $A \in \sum_1^1(X)$ si y sólo si existe $\{B_\sigma : \sigma \in \omega^{<\omega}\}$ una familia de cerrados tales que $A = \mathcal{A}(B_\sigma)$.*

Demostración. Supongamos que existe $\{B_\sigma : \sigma \in \omega^{<\omega}\}$ una familia de cerrados tales que $A = \mathcal{A}(B_\sigma)$. Sin perdida de generalidad es una familia decreciente tal que $\delta(B_{f\restriction_n}) \longrightarrow 0$ para toda $f \in \omega^\omega$. Así existe $\varphi : \omega^\omega \longrightarrow A$ como $\varphi(f) \in \bigcap_{n\in\omega} B_{f\restriction_n}$, de lo que se infiere que A es un conjunto analítico.

Supongamos que A es un conjunto analítico, sea $\varphi : \omega^\omega \longrightarrow A$ una función continua y suprayectiva. Definimos $B_t = cl(\varphi[[t]])$ para toda $t \in \omega^{<\omega}$, así $A = \mathcal{A}(B_t)$ ya que $\varphi(f) \in \bigcap_{n\in\omega} B_{f\restriction_n}$. □

Proposición 37. *Sea X un espacio topológico segundo numerable y $A \subseteq X$. Entonces existe $B \subseteq X$ con $A \subseteq B$ tal que B tiene la propiedad de Baire y si $A \subseteq B'$ con $B' \in BP(X)$ entonces $B \setminus B'$ es magro.*

Demostración. Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una base numerable para X. Consideremos

$$U = \bigcup \{U_n : U_n \cap A \in M(X)\}$$

y $F = X \setminus U$. Observemos que $A \setminus F = A \cap U = \bigcup_{U_n \in U} U_n \cap A \in M(X)$. Por consiguiente

$$B = F \cup (A \setminus F) \in BP$$

(pues es la unión de dos conjuntos que tiene la propiedad de Baire). Por otra parte, si $B' \in BP$ y $A \subseteq B'$, entonces $B \setminus B' \in BP$; luego existe $V \in \tau$ tal que $V \triangle (B \setminus B') \in M(X)$. Veamos que $B \setminus B' \in M(X)$, supongamos que $B \setminus B' \notin M(X)$.

Si $\forall n \in \omega\, (U_n \subseteq V \longrightarrow U_n \cap (B \setminus B') = \emptyset)$ entonces $V \cap (B \setminus B') = \emptyset$, luego

$$(B \setminus B') = (B \setminus B') \setminus V \subseteq V \triangle (B \setminus B') \in M(X)$$

que contradice el hecho de que $B \setminus B' \notin M(X)$. Por lo tanto $\exists n \in \omega\, (U_n \subseteq V \wedge U_n \cap (B \setminus B') \neq \emptyset)$, luego $U_n \setminus (B \setminus B') \subseteq V \setminus (B \setminus B') \in M(X)$. Dado que $B \setminus B' \subseteq F \setminus A$ entonces

$$U_n \cap A \subseteq U_n \setminus (B \setminus B') \in M(X)$$

luego por definición $U_n \subseteq U = X \setminus F$ que implica que $U_n \cap (B \setminus B') \subseteq U_n \cap F \setminus A = \emptyset$ que contradice el hecho de que $U_n \cap (B \setminus B') \neq \emptyset$. Por reducción al absurdo $B \setminus B' \in M(X)$. $\square$

Proposición 38. *Sea X un espacio topológico segundo numerable. Si $\langle A_\sigma : \sigma \in \omega^{<\omega} \rangle \subseteq BP(X)$ entonces $\mathcal{A}(A_\sigma)$ tiene la propiedad de Baire.*

Demostración. Sin perdida de generalidad $A_t \subseteq A_s$ si $s \subseteq t$. Para cada $t \in \omega^{<\omega}$ definimos $A^t = \bigcup_{y \supseteq t} \bigcap_{n\in\omega} A_{y\restriction_n} \subseteq A_t$. Por la proposición anterior existe $B^t \subseteq X$ tal que $A^t \subseteq B^t$, $B^t \in BP(X)$ y si $W \supseteq A_t$ con $W \in BP(X)$ entonces $B^t \setminus W \in M(X)$ $(*)$. Sin perdida de generalidad $B^t \subseteq A_t$ $(**)$ y $B^t \subseteq B^s$ si $s \subseteq t$. Sea $C_t = B^t \setminus \bigcup_{n\in\omega} B^{t^\frown n}$. Notemos que $A^t \subseteq \bigcup_{n\in\omega} A^{t^\frown n} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} B^{t^\frown n}$, lo que implica $B^t \setminus \bigcup_{n\in\omega} B^{t^\frown n} \in M(X)$ por $(*)$, de ahí que $C = \bigcup_{t\in\omega^{<\omega}} \left(B^t \setminus \bigcup_{n\in\omega} B^{t^\frown n}\right) \in M(X)$ $(***)$.

Con la notación anterior $A^\emptyset = \mathcal{A}(A_\sigma)$. Afirmamos que $B^\emptyset \setminus C \subseteq A^\emptyset$. Si $x \in B^\emptyset \setminus C$ entonces existe $y(0) \in \omega$ tal que $x \in B^{\langle y(0)\rangle}$, y por recurción existe $y \in \omega^{<\omega}$ tal que $x \in \bigcap_{n\in\omega} B^{y\restriction_n} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} A_{y\restriction_n}$ (aplicando $(**)$). Como $B^\emptyset \setminus C \subseteq A^\emptyset$ entonces $B^\emptyset \setminus A^\emptyset \subseteq C \in M(X)$ (por $***$), que implica que $B^\emptyset \setminus A^\emptyset \in M(X)$. Luego $B^\emptyset \triangle A^\emptyset = B^\emptyset \setminus A^\emptyset \in M(X)$, de ahí concluimos que $A = A^\emptyset \in BP(X)$. $\square$

Corolario 39. *Sea X un espacio Polaco, $\sum_1^1(X), \prod_1^1(X) \subseteq BP(X)$.*

Demostración. Si $A \in \sum_1^1(X)$ entonces existe $\{B_\sigma : \sigma \in \omega^{<\omega}\}$ una familia de cerrados tales que $A = \mathcal{A}(B_\sigma)$. Como cada B_σ satisface la propiedad de Baire, entonces $A = \mathcal{A}(B_\sigma) \in BP(X)$.

Como $BP(X)$ es cerrado por complementos entonces $\prod_1^1(X) \subseteq BP(X)$. $\square$

Proposición 40. *Si $A \in \sum_1^1(\omega^\omega)$ entonces existe una familia $\{B_\sigma : \sigma \in \omega^{<\omega}\}$ de clopens basicos tales que $A = \mathcal{A}(B_\sigma)$.*

Demostración. Si $A \in \sum_1^1(\omega^\omega)$ entonces existe $T \subseteq \omega^\omega \times \omega^\omega$ tal que $A = \{x \in \omega^\omega : \exists y \in \omega^\omega\, (\langle x, y\rangle \in [T])\}$. Para cada $\sigma \in \omega^{<\omega}$ definimos $B_\sigma = \left\{x \in \omega^\omega : \left\langle x\restriction_{|\sigma|}, \sigma\right\rangle \in T\right\}$ y así $A = \mathcal{A}(B_\sigma)$. $\square$

Definición. Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es Baire medible si la imagen inversa de cualquier abierto de Y tiene la propiedad de Baire en X

Proposición 41. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ es Baire medible. Si Y es segundo numerable, hay un conjunto $G \subseteq X$ que es la intersección de abiertos densos tal que $f\restriction_G$ es continua.*

Demostración. Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ base numerable para Y. Como f es Baire medible, para cada $n \in \omega$ existe $V_n \subseteq X$ un abierto y F_n la unión numerable de cerrados densos en ninguna parte tales que $f^{-1}[U_n]\,\Delta V_n \subseteq F_n$. Sea $G = \bigcap_n X \setminus F_n$ observemos que por definición $X \setminus F_n$ es la intersección numerable de densos en ninguna parte, por lo que G es la intersección de abiertos densos. Por otra parte notemos que $f^{-1}[U_n] \cap G = V_n \cap G \in \tau_X\restriction_G$, por lo que $f\restriction_G$ es continua. $\square$

Proposición 42. *Sea X un espacio polaco perfecto y Y segundo numerable. Si*

$$\{f_i : X^{n_i} \longrightarrow Y : i \in \omega\}$$

es una familia de funciones Baire medibles entonces hay un conjunto de Cantor $C \subseteq X$ tal que $f_i\restriction_{C^{n_i}}$ es continua para toda i.

Demostración. Basta probar que si $f : X^2 \longrightarrow Y$ es Baire medible entonces hay un conjunto de Cantor $C \subseteq X$ tal que $f\restriction_{C^2}$ es continua y luego generalizar la prueba.

Dado que f es Baire medible existe $R \subseteq X^2$ tal que $f \upharpoonright_R$ es continua y R es un conjunto denso G_δ comagro. Sean $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq X^2$ una familia de cerrados densos en ninguna parte tales que $X^2 \setminus R = \bigcup_n A_n$.

Como A_0 es denso en ninguna parte y $X^2 \setminus A_0$ es un abierto no vació (es no vacío porque X es de segunda categoría) existen $V, W \subseteq X$ abiertos no vacíos tales que $(V \times W) \cap A_0 = \emptyset$. Nuevamente, dado que $W \times V$ es un abierto no vacío existe $V_0 \subseteq V$ y $W_0 \subseteq W$ tales que $(W_0 \times V_0) \cap A_0 = \emptyset$, y por lo anterior también se cumple que $(V_0 \times W_0) \cap A_0 = \emptyset$. Note que, como el espacio es perfecto, se puede garantizar que $V_0 \cap W_0 = \emptyset$ y $diam\,(V_0)\,, diam\,(W_0) \leq \frac{1}{2}$. De forma recursiva podemos construir un esquema de cantor

$$C = \left(\bigcup_{f \in 2^\omega} \bigcap_{n \in \omega} V_{f \upharpoonright_n} \right) \cup \left(\bigcup_{f \in 2^\omega} \bigcap_{n \in \omega} W_{f \upharpoonright_n} \right)$$

por construcción $C^2 \subseteq R$ y por lo tanto $f \upharpoonright_{C^2}$ es continua. □

Teorema 43. ***(Galvin)*** *Sea X un espacio Polaco perfecto y $[X]^2 = P_0 \sqcup ... \sqcup P_{k-1}$ una partición donde cada P_i tiene la propiedad de Baire (esto es $P_i^* = \left\{ \langle x, y \rangle \in X^2 : \{x, y\} \in P_i \right\}$ tiene la BP en X^2). Entonces hay un conjunto de cantor $C \subseteq X$ que es $i-$homogéneo.*

Demostración. Consideremos la función $f X^2 \longrightarrow \omega$ como

$$f\left(\langle x, y \rangle\right) = \begin{cases} i+1 & \langle x, y \rangle \in P_i^* \\ 0 & x = y \end{cases}$$

que es Baire medible pues si $i \neq 0$ entonces $f^{-1}\left[\{i+1\}\right] = P_i^* \in BP\,(X)$ y $f^{-1}\left[\{0\}\right] = \Delta \in BP\,(X)$. Por la proposición anterior existe $Y \subseteq X$ un conjunto de cantor tal que $f \upharpoonright_{Y^2}$ es continua. Sea $Q_i = P_i \cap [Y]^2$, observemos que $Q_i^* = \left\{ \langle x, y \rangle \in Y^2 : \{x, y\} \in Q_i \right\} = \left\{ \langle x, y \rangle \in Y^2 : f\,(x, y) = i \right\}$ es abierto en Y^2 (pues $Q_i^* = f^{-1}\left[\{i\}\right]$ es un abierto ya que $f \upharpoonright_{Y^2}$ es continua. Reemplazando X por Y y P_i por Q_i podemos suponer sin perdida de generalidad que cada P_i^* es abierto. Procediendo por inducción basta demostrar el caso cuando $[X]^2 = P_0 \sqcup P_1$ con P_0^* y P_1^* abiertos en X^2.

Consideremos la partición $P_0 \sqcup P_1$, como P_0^* es un conjunto abierto en X^2 se tiene que la coloración es $0-$abierta. Aplicando $OCA^*\,(X)$ (en realidad sería $OCA^*\,(Y)$ sin hacer la suposición) se tienen los siguientes dos casos:

Caso 1. Existe P un conjunto perfecto $0-$homogéneo. En tal caso existe un cantor $0-$homogéneo

Caso 2. X es $\sigma - 1-$homogéneo. Consideremos la partición $[X]^2 = P_1^* \sqcup P_0^*$ que es abierta, por lo que se tienen los siguientes casos.

Caso 2.1. Existe $R \subseteq X$ perfecto tal que $[R]^2 \subseteq P_1^*$. En tal caso existe un cantor $1-$homogéneo

Caso 2.2. X es $\sigma - 0-$homogéneo. En tal caso $X = \bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$ donde A_n es $0-$homogéneo y B_n es $1-$homogéneo. Observemos que $|B_n \cap A_m| = 1$ para cualesquier $n, m \in \omega$, por lo que $|B_n| \leq \omega$; así $|X| = |\bigcup_n B_n| \leq \omega$ que contradice el hecho de que X sea un espacio Polaco perfecto. □

7. Teoría Descriptiva Efectiva

Sea $X = \omega^k \times (\omega^\omega)^l$ con $k, l \in \omega$,

$$S_X = \left\{ \left((m_1, ..., m_k, \sigma_1, ..., \sigma_l) : \forall i \leq k \, (m_i \in \omega) \text{ y } \forall j \leq l \left(\sigma_j \in \omega^{<\omega} \right) \right) \right\}$$

y dado $\sigma = (m_1, ..., m_k, \sigma_1, ..., \sigma_l) \in S_X$ definimos

$$N_\sigma = \{(n_1, ..., n_k, f_1, ..., f_l) : \forall i \leq k \, (n_i = m_i) \text{ y } \forall i \leq l \, (f_i \supseteq \sigma_i)\}$$

es decir, N_σ es el cono definido por σ.

Definición. Sea $X = \omega^k \times (\omega^\omega)^l$.

1. Decimos que $A \subseteq X$ es $\sum_1^0 (X, rec)$ si existe $f : \omega \longrightarrow X$ una función recursiva tal que $A = \bigcup_{n \in \omega} N_{f(n)}$.
2. Decimos que $A \subseteq X$ es $\prod_1^0 (X, rec)$ si $X \setminus A \in \sum_1^0 (X, rec)$.
3. Decimos que $A \subseteq X$ es $\sum_1^1 (X, rec)$ si existe $B \in \prod_1^0 (X \times \omega^\omega, rec)$ tal que
$$A = \{x \in X : \exists y \in \omega^\omega \, (\langle x, y \rangle \in B)\}.$$
4. Decimos que $A \subseteq X$ es $\prod_1^1 (X, rec)$ si $X \setminus A \in \sum_1^1 (X, rec)$.

Observación 44. Sea $X = \omega^k \times (\omega^\omega)^l$.

$$\Sigma_1^0 (X, rec) \subseteq \Sigma_1^0 (X)$$
$$\Pi_1^0 (X, rec) \subseteq \Pi_1^0 (X)$$
$$\Sigma_1^1 (X, rec) \subseteq \Sigma_1^1 (X)$$

y

$$\Pi_1^1 (X, rec) \subseteq \Pi_1^1 (X)$$

Del mismo modo, usando funciones recursivas f con oráculos (una función fija $x \in \omega^\omega$ que podemos utilizar para definir el valor $f(n)$ en la recursión) definimos los conjuntos $\sum_1^0 (X, x, rec)$, $\prod_1^0 (X, x, rec)$, $\sum_1^1 (X, x, rec)$ y $\prod_1^1 (X, x, rec)$

Observación 45. Los conjuntos $\sum_1^0 (X, x, rec)$, $\prod_1^0 (X, x, rec)$, $\sum_1^1 (X, x, rec)$ y $\prod_1^1 (X, x, rec)$ son numerables ya que sólo existe una cantidad numerable de funciones recursivas.

Proposición 46. *Sea* $X = \omega^k \times (\omega^\omega)^l$.

$$\Sigma_1^0 (X) = \bigcup_{x \in \omega^\omega} \Sigma_1^0 (X, x, rec)$$
$$\Pi_1^0 (X) = \bigcup_{x \in \omega^\omega} \Pi_1^0 (X, x, rec)$$
$$\Sigma_1^1 (X) = \bigcup_{x \in \omega^\omega} \Sigma_1^1 (X, x, rec)$$

y

$$\Pi_1^1 (X) = \bigcup_{x \in \omega^\omega} \Pi_1^1 (X, x, rec)$$

Demostración. Basta probar que $\sum_1^0(X) \subseteq \bigcup_{x\in\omega^\omega} \sum_1^0(X, x, rec)$. Sea $A \subseteq X$ abierto, como X tiene una base numerable existe $x \in \omega^\omega$ tal que $A = \bigcup_{n\in\omega} N_{\sigma_{x(n)}}$. Definimos $f : \omega \longrightarrow X$ como $f(n) = \sigma_{x(n)}$ que es una función recursiva con oráculo $x \in \omega^\omega$ y se cumple que que $A = \bigcup_{n\in\omega} N_{f(n)}$. □

Observación 47. Por la proposición anterior si se quiere probar una propiedad para todos los conjuntos $\sum_1^1(X)$ bastará probarla para todos los conjuntos $\sum_1^1(X, x, rec)$ y análogamente para las demás clases. Y generalmente, si se da una prueba para todos los conjuntos $\sum_1^1(X, rec)$ sólo se tiene que relativizar las funciones recursivas empleando el oráculo x y se tendrá una prueba para todos los conjuntos $\sum_1^1(X, x, rec)$.

Definición. La topología Gandy-Harrington sobre X es la topología generada por los conjuntos $\sum_1^1(X, rec)$. A esta topología la denotaremos como $\tau_G(X)$.

Observación 48. Las siguientes afirmaciones se satisfacen:

1. Como $\sum_1^1(X, rec)$ es numerable entonces τ_G es segundo numerable.
2. Por la observación 1 se tiene que τ_G es hereditariamente Lindelöf.
3. Para toda $t \in \omega^{<\omega}$ se tiene que $[t] \in \tau_G$ (pues $f : \omega \longrightarrow S_X$ tal que $f(n) = t$ para toda n es una función recursiva).
4. $\tau(G) \times \tau(G) \subsetneq \tau_G(X \times X)$ (La diagonal pertenece a $\tau_G(X \times X)$ pero no se puede ver como un cuadrado).
5. Las proyecciones $\pi : (X \times X, \tau_G(X \times X)) \longrightarrow (X, \tau(G))$ son abiertas (sabemos que los conjuntos analíticos se preservan bajo funciones continuas).

Proposición 49. (ω^ω, τ_G) *es un espacio fuertemente Choquet. Esto implica que es Choquet y satisface el teorema de Baire* ([4]).

Demostración. Sea (x_0, U_0) la tirada del jugador I tal que $x_0 \in U_0$. Sin perdida de generalidad $U_0 \in \sum_1^1(X, rec)$, entonces existe $T \subseteq \omega^\omega \times \omega^\omega$ un árbol recursivo tal que $\pi[T_0] = U_0$. Como $x_0 \in \pi[T_0]$ existe $y_0 \in \omega^\omega$ tal que $\langle x_0, y_0\rangle \in [T_0]$. Sea $s_0 = x_0 \restriction_1$, $t_0^0 = y_0 \restriction_1$ y sea

$$T_0\left(s_0, t_0^0\right) = \left\{(a, b) \in T_0 : (a \subseteq s_0 \vee s_0 \subseteq a) \wedge \left(b \subseteq t_0^0 \vee t_0^0 \subseteq b\right)\right\}$$

Consideremos $V_0 = \pi\left[T_0\left(s_0, t_0^0\right)\right] \subseteq \pi[T_0] = U_0$, observemos que $x_0 \in V_0$ y al ser $T_0\left(s_0, t_0^0\right)$ un árbol recursivo se tiene que $V_0 \in \sum_1^1(X, rec)$, es decir V_0 es un abierto en la topología τ_G. Así el jugador II juega V_0.

Sea $((x_0, U_0), V_0, (x_1, U_1))$ una jugada parcial. Sin perdida de generalidad $U_1 \in \sum_1^1(X, rec)$, entonces existe $T_1 \subseteq \omega^\omega \times \omega^\omega$ un árbol recursivo tal que $\pi[T_1] = U_1$. Como $x_1 \in \pi[T_0]$ existe $y_0' \in \omega^\omega$ tal que $\langle x_1, y_0'\rangle \in [T_0]$. Sea $s_1 = x_1 \restriction_2$, $t_1^0 = y_0' \restriction_2$ (observemos que $s_0 \subseteq s_1$ y $t_0^0 \subseteq t_1^0$). Por otra parte como $x_1 \in \pi[T_1]$ existe $y_1 \in \omega^\omega$ tal que $\langle x_0, y_1\rangle \in [T_1]$ y sea $t_1^1 = y_1 \restriction_1$. Tomando $V_1 = \bigcap_{i\leq 1} \pi\left[T_i\left(s_{k-i}, t_{k-i}^i\right)\right]$ obtenemos que $V_1 \in \sum_1^1(X, rec)$ $x_1 \in V_1 \subseteq U_1$. Así el jugador II juega V_0.

Por recursión, dada $((x_0, U_0), V_0, ..., (x_n, U_n))$ una jugada parcial existe $T_i \subseteq \omega^\omega \times \omega^\omega$ un árbol recursivo con $i \leq n$ de tal manera que $\pi[T_n] = U_n$, junto con secuencias $s_0 \subseteq ... \subseteq s_n$ y $t_0^n \subseteq ... \subseteq t_n^n$ tal que $(s_k, t_k^n) \in T_n$ y $V_k = \bigcap_{i\leq n} \pi\left[T_i\left(s_{k-i}, t_{k-i}^i\right)\right]$. Tomando $x = \bigcup_{k\in\omega} s_k$ y $y_n = \bigcup_{k\in\omega} t_k^n$ se tiene

[4]Vid. L. A. Harrington, A. S. Kechris, & A. Louveau, «A Glimm-Effross Dichotomy for Borel equivalence relarions», p.917.

que $x \in \pi[T_n] = U$ para toda $n \in \omega$, ya que $\langle x, y_n \rangle \in [T_n]$ pues por construcción $(s_k, t_k^n) \in T_n$. Por consiguiente $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$, lo que implica que el jugador II tiene estrategia ganadora. De lo anterior podemos concluir que τ_G es fuertemente Choquet. $\square$

Proposición 50. *Si $[\omega^\omega]^2 = K_0 \sqcup K_1$ es una coloración abierta en (ω^ω, τ_G) y ω^ω no es σ-1-homogéneo entonces existe $P \subseteq \omega^\omega$ tal que P es un conjunto perfecto en (ω^ω, τ) y 0-homogéneo, donde τ es la topología de Baire.*

Demostración. Sea $[\omega^\omega]^2 = K_0 \sqcup K_1$ una partición abierta y supongamos que (ω^ω, τ_G) no es $\sigma-1-$homogéneo. Consideremos $\mathcal{F} = \{U \in \tau : U \text{ es } \sigma - 1 \text{ homogeneo}\}$, como ω^ω es hereditariamente Lindelöf existe $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ con $|\mathcal{F}'| = \omega$ tal que $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}'$; de esto se sigue que $\omega^\omega \setminus \bigcup \mathcal{F}$ no es $\sigma - 1-$homogéneo. Dado que K_0 es abierta y (ω^ω, τ_G) es Hausdorff, existen $x_{\langle 0 \rangle}, x_{\langle 0 \rangle} \in \omega^\omega \setminus \bigcup \mathcal{F}$ con $\{x_{\langle 0 \rangle}, x_{\langle 0 \rangle}\} \in K_0$ y $U_{\langle 0 \rangle}, U_{\langle 1 \rangle} \in \tau_G$ tales que $U_{\langle 0 \rangle} \cap U_{\langle 1 \rangle} = \emptyset$, $(*)$ $U_{\langle 0 \rangle} \times U_{\langle 1 \rangle} \subseteq K_0$, $x_{\langle 0 \rangle} \in U_{\langle 0 \rangle}$, $x_{\langle 1 \rangle} \in U_{\langle 1 \rangle}$, $U_{\langle 0 \rangle} \subseteq [x_{\langle 0 \rangle} \restriction_1]$ y $U_{\langle 1 \rangle} \subseteq [x_{\langle 1 \rangle} \restriction_1]$. Dado que (ω^ω, τ_G) es fuertemente Choquet existen $V_{\langle 0 \rangle}, V_{\langle 1 \rangle} \in \tau_G$ en la estrategia ganadora tales que $V_{\langle 0 \rangle} \subseteq U_{\langle 0 \rangle}$, $V_{\langle 1 \rangle} \subseteq U_{\langle 1 \rangle}$, $x_{\langle 0 \rangle} \in V_{\langle 0 \rangle}$, $x_{\langle 1 \rangle} \in V_{\langle 1 \rangle}$. Además, por la definición de $\mathcal{F}$ se sigue que $V_{\langle 0 \rangle}$ y $V_{\langle 1 \rangle}$ no son $\sigma - 1-$homogéneo ya que $x_{\langle 0 \rangle}, x_{\langle 1 \rangle} \notin \bigcup \mathcal{F}$. Aplicando este mismo procedimiento podemos construir un esquema de Cantor $H = \bigcup_{f\in 2^\omega} \bigcap_{n\in\omega} (V_{f\restriction_n})$ tal que $\bigcap_{n\in\omega} (V_{f\restriction_n}) \neq \emptyset$ (pues cada V_σ pertenece a la estrategia ganadora) y dado que $U_\sigma \subseteq [x_\sigma \restriction_{|\sigma|}]$ se cumple que $\left|\bigcap_{n\in\omega} (U_{f\restriction_n})\right| = 1$. Notemos que $\varphi : 2^\omega \longrightarrow (\omega^\omega, \tau)$ definida como $\{\varphi(f)\} = \bigcap_{n\in\omega} (U_{f\restriction_n})$ es un encaje, ya que es inyectiva y como veremos a continuación f es continua. En efecto, si $t \in \omega^{<\omega}$ y $f \in 2^\omega$ son tales que $\varphi(f) \in [t]$ entonces existe $n \in \omega$ tal que $U_{f\restriction_n} \subseteq [t]$ (pues $diam(U_{f\restriction_n}) \longrightarrow 0$), notemos que por construcción $\varphi[f\restriction_n] \subseteq U_{f\restriction_n} \subseteq [t]$; de lo que se infiere que φ es continua. Por consiguiente $\varphi[2^\omega]$ es un conjunto perfecto y por $(*)$ satisface que para cualesquier $x, y \in \varphi[2^\omega]$, $\{x, y\} \in K_0$. $\square$

Corolario 51. *(ω^ω, τ_G) satisface OCA^*.*

Demostración. Por la proposición 50 sabemos que si (ω^ω, τ_G) no es $\sigma - 1-$homogéneo entonces existe $P \subseteq \omega^\omega$ tal que P es un conjunto perfecto en (ω, τ) y $0-$homogéneo, donde τ es la topología de Baire. Como $\tau \subseteq \tau_G$ entonces P es un conjunto cerrado en τ_G. Dado que (ω^ω, τ_G) es hereditariamente Lindenloff podemos considerar $N(P) \subseteq P$ el núcleo perfecto de P; es decir $N(P)$ es $(P, \tau_G\restriction_P)-$perfecto pero como P es cerrado en τ_G, entonces $N(P)$ es (ω^ω, τ_G) perfecto. $\square$

Teorema 52. ***(Becker)*** *Sea (X, τ) un espacio Polaco. Si $\beta \supseteq \tau$ es una topología que hace a X segundo numerable (o hereditariamente Lindenlöf) y fuertemente Choquet entonces $\beta \subseteq \sum_1^1 (X, \tau)$.*

Demostración. Sea $A \in \beta$ y σ una estrategia ganadora para el jugador II. Como $(A, \beta\restriction_A)$ es fuertemente Choquet podemos construir un árbol T con las siguientes características

$$T(0) = \{cl_\tau(A)\}$$

$$T(1) = \{V \in \beta : ((x, A), V) \in \sigma\}$$

$$T(2k) = \left\{cl_\tau(U_n) \in \Sigma_1^1(X) : \{U_n : n \in \omega\} \subseteq \beta \text{ es una cubierta abierta de } V \in T(2k-1) \text{ y } diam_\tau(cl_\tau(U_n)) \leq \frac{1}{2^k}\right\}$$

$$T(2k+1) = \{V_k \in \beta : ((x_0, A), V_0, ..., (x_k, U_k), V_k) \in \sigma \text{ y } (A, V_0, ..., U_k) \in T(2k)\}$$

Afirmamos que $A = \bigcup_{y \in \omega^\omega} \bigcap_{n \in \omega} cl_\tau (U_{y \restriction 2n}) := \mathcal{A}(U_n)$ donde $U_{y \restriction 2n} \in T(2n)$. Por construcción para cada $2k$, si $\{cl_\tau (U_n) : n \in \omega\} \subseteq T(2k)$ se tiene que $\{U_n : n \in \omega\} \subseteq \beta$ es una cubierta abierta de $V \in T(2k-1)$, lo que implica que $A \subseteq \mathcal{A}(U_n)$. Por otra parte, si $x \in \mathcal{A}(U_n)$ entonces existe $y \in \omega^\omega$ tal que $x \in \bigcap_{n \in \omega} cl_\tau (U_{y \restriction 2n})$ pero como como σ es una estrategia ganadora se tiene que $\bigcap_{n \in \omega} U_{y \restriction 2n} \neq \emptyset$; y por el hecho de que $diam_\tau (cl_\tau (U_n)) \leq \frac{1}{2^k}$ se tiene que $x = \bigcap_{n \in \omega} cl_\tau (U_{y \restriction 2n}) = \bigcap_{n \in \omega} (U_{y \restriction 2n}) \subseteq A$. De lo anterior inferimos que A es el resultado de aplicar la operación de Suslin a una familia de cerrados en τ, por consiguiente $A \in \sum_1^1 (X)$. □

Proposición 53. *Si* $A \subseteq \omega^\omega \times \omega^\omega$ *es* $\tau_G (\omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega)$ *−denso en ninguna parte entonces*

$$A^* = \{\langle x, y, z\rangle : \langle x, z\rangle \in A\}$$

es $\tau_G (\omega^\omega \times \omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega)$ *denso en ninguna parte.*

Demostración. Sean $B \in \tau_G (\omega^\omega \times \omega^\omega)$ y $C \in \tau_G (\omega^\omega)$. Como $A \subseteq \omega^\omega \times \omega^\omega$ es $\tau_G (\omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega)$ −denso en ninguna parte existe $B_1 \subseteq \pi_0 [B] \in \tau_G (\omega^\omega)$ y $C_1 \subseteq C$ tal que $(B_1 \times C_1) \cap A = \emptyset$, luego $[B \cap (\omega^\omega \times B_1) \times C_1] \cap A^* = \emptyset$. Por lo que A^* es denso en ninguna parte. □

Proposición 54. $\sum_1^1 (\omega^\omega), \prod_1^1 (\omega^\omega) \subseteq BP(\omega^\omega, \tau_G (\omega^\omega))$ *y*

$$\Sigma_1^1 (\omega^\omega \times \omega^\omega), \Pi_1^1 (\omega^\omega \times \omega^\omega) \subseteq BP(\omega^\omega \times \omega^\omega, \tau_G (\omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega))$$

Demostración. Se sigue del hecho de que todo conjunto analítico es la operación de Suslin de clopens básicos y del hecho de que BP es cerrado por la operación de Suslin (como los clopens básicos también son abiertos en la topología de Gandy entonces tiene la propiedad de Baire) .

En el caso del producto sólo hay que generalizar la proposición anterior con más variables. □

8. Grupos Topológicos

Definición. Un grupo topológico es una terna $\langle G, \tau, \cdot \rangle$ tal que:

1. $\langle G, \tau \rangle$ es un espacio topológico
2. $\langle G, \cdot, e \rangle$ es un grupo
3. la función $f : G \times G \longrightarrow G$ definida como $f(x, y) = x \cdot y$ es continua. Es decir, para cualquier abierto $U \subseteq G$ con $x \cdot y \in U$ existen abiertos $V \subseteq G$ y $W \subseteq G$ tales que $x \in V$, $y \in W$ y
$$VW = \{a \cdot b : a \in V, b \in W\} \subseteq U$$
4. la función $f : G \times G \longrightarrow G$ definida como $f(x) = x^{-1}$ es continua. Es decir, para cualquier abierto $U \subseteq G$ con $x^{-1} \in U$ existe $V \subseteq G$ abierto tal que $x \in V$ y $V^{-1} = \left\{a^{-1} : a \in V\right\} \subseteq U$.

Observación 55. Las traslaciones, izquierdas y derechas ($g \longmapsto ag$ y $g \longmapsto ga$), e inversiones $g \longmapsto g^{-1}$ son homeomorfismos de G.

Observación 56. Sea G un grupo topológico y $g \in G$. Si $\mathcal{U}$ es una base para el elemento neutro e entonces $\{gU : U \in \mathcal{U}\}$ es una base local para g. Así, $\{gU : U \in \mathcal{U}, g \in G\}$ es una base para G.

Demostración. Si $W \subseteq G$ es un abierto con $g \in G$, entonces $g^{-1}W$ es un abierto para e. Como $\mathcal{U}$ es una base existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq g^{-1}W$; por consiguiente $gU \subseteq W$. $\square$

Proposición 57. *Sea G un grupo topológico y $\mathcal{U}$ una base para el elemento neutro e. Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

1. Para toda $U \in \mathcal{U}$ hay $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subseteq U$
2. Para toda $U \in \mathcal{U}$ hay $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^{-1} \subseteq U$
3. Para toda $U \in \mathcal{U}$ y $x \in U$ hay $V \in \mathcal{U}$ tal que $xV \subseteq U$
4. Para toda $U \in \mathcal{U}$ y $x \in U$ hay $V \in \mathcal{U}$ tal que $xVx^{-1} \subseteq U$

Las afirmaciones 1, 2 y 4 se siguen de la continuidad de los mapeos respectivos: $(x, y) \longmapsto x \cdot y$, $(x, y) \longmapsto x^{-1}$ y $g \longmapsto xgx^{-1}$. La afirmación 3 se sigue de que U es un abierto.

Proposición 58. *Todo grupo topológico tiene una base local $\mathcal{U}$ para e que consiste de conjuntos simétricos; es decir, si $U \in \mathcal{U}$ entonces $U = U^{-1}$.*

Demostración. Dado W un abierto con $e \in W$ definimos $U = W \cap W^{-1} \subseteq W$ y satisface que $U = U^{-1}$. $\square$

Proposición 59. *Sea G un grupo topológico. Para cualquier vecindad U de e existe V un abierto de e tal que $cl(V) \subseteq U$.*

Demostración. Consideremos V un abierto de e tal que $V = V^{-1}$ y $V^2 \subseteq U$. Afirmamos que $cl(V) \subseteq U$. En efecto, si $x \in cl(V)$ entonces por definición de conjunto cerrado se tiene que $xV \cap V \neq \emptyset$; por lo que existe $xv_1 = v_2 \in xV \cap V$. Así, $x = v_2 v_1^{-1} \in VV^{-1} = VV = V^2 \subseteq U$. $\square$

Corolario 60. *Si G es un grupo topológico T_0 entonces G es regular.*

Demostración. Por la proposición 59 se sigue que G satisface el axioma de regularidad para e y aplicando traslaciones se tiene que G satisface el axioma de regularidad para cualquiera de sus puntos. $\square$

Proposición 61. *Sea G un grupo Polaco con elemento neutro e y $\{U_n : n \in \omega\} \subseteq V(e)$ una familia de vecindades simétricas tales que $U_{n+1} \subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$. Entonces existe d una pseudométrica izquierda invariante tal que:*

1. $d(x,y) = 0$ si y sólo si $y^{-1}x \in \bigcap_{n\in\omega} U_n$
2. Si $y^{-1}x \in U_k$ entonces $d(x,y) \leq 2^{-k+2}$
3. Si $y^{-1}x \notin U_k$ entonces $d(x,y) \geq 2^{-k}$
4. Si para todo $x \in G$ y $n \in \omega$ se cumple que $xU_nx^{-1} = U_n$ entonces d es derecha invariante y
$$d(x,y) = d\left(x^{-1}, y^{-1}\right)$$
([5])

Demostración. Para cada $n \in \omega$ definimos $V_{2^{-n}} = U_n$, si r es diádico con $r = 2^{l_1} + ... + 2^{l_r} < 1$ entonces definimos $V_r = V_{2^{-l_1}} V_{2^{-l_2}} ... V_{2^{-l_r}}$ y si $r \geq 1$ definimos $V_r = G$. Observemos que si $r < s$ entonces $V_r \subseteq V_s$. Para cada $x \in G$ definimos $\varphi(x) = inf\{r : x \in V_r\}$ y $d : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ como $d(x,y) = sup\{|\varphi(gx) - \varphi(gy)| : g \in G\}$. Notemos que d es una pseudométrica izquierda invariante ya que

$$d(ax,ay) = sup\{|\varphi(gax) - \varphi(gay)| : g \in G\} = sup\{|\varphi(gx) - \varphi(gy)| : g \in G\} = d(x,y)$$

Además satisface las propiedades buscadas:

1. $d(x,y) = 0$ si y sólo si para toda $g \in G$ se cumple que $|\varphi(gx) - \varphi(gy)| = 0$, en particular para $g = y^{-1}$ se tiene que $\varphi\left(y^{-1}x\right) = 0$; lo que implica que $y^{-1}x \in \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Inversamente, si $y^{-1}x \in \bigcap_{n\in\omega} U_n$ entonces $\varphi\left(y^{-1}x\right) = 0$, lo que implica que

$$d(x,y) = sup\{|\varphi(gx) - \varphi(gy)| : g \in G\} \leq \left|\varphi\left(y^{-1}x\right) - \varphi\left(y^{-1}y\right)\right| = \varphi\left(y^{-1}x\right) = 0$$

2. Si $y^{-1}x \in U_k = V_{2^{-k}}$ entonces $d(x,y) \leq \varphi\left(y^{-1}x\right) \leq 2^{-k} \leq 2^{-k+2}$.

3. Si $y^{-1}x \notin U_k = V_{2^{-k}}$ entonces, como la familia es decreciente, para toda $n \geq k$ $y^{-1}x \notin U_n = V_{2^{-n}}$; de ahí que $d(x,y) \geq 2^{-k}$

4. si para todo $x \in G$ y $n \in \omega$ se cumple que $aU_na^{-1} = U_n$ entonces $\varphi\left(axa^{-1}\right) = \varphi(a)$, de ahí que

$$d(xa,ya) = sup\{|\varphi(gxa) - \varphi(gya)| : g \in G\} = \left\{\left|\varphi\left(agxaa^{a-1}\right) - \varphi\left(agyaa^{-1}\right)\right| : g \in G\right\} =$$

$$= sup\{|\varphi(agx) - \varphi(agy)| : g \in G\} = sup\{|\varphi(gx) - \varphi(gy)| : g \in G\} = d(x,y)$$

Es decir, d es derecha invariante. Por ser d izquierda y derecha invariante se sigue que

$$d(x,y) = d\left(e, y^{-1}x\right) = d\left(x^{-1}, y^{-1}\right)$$

□

Teorema 62. ***(Birkoff-Kakutani)*** *Sea G un grupo topológico T_0 con elemento neutro e. Entonces G es metrizable si y sólo si existe una base numerable de e.*

[5] Vid. Edwin Hewiitt & Kenneth A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, p. 68

Demostración. Sea $\{U_n : n \in \omega\} \subseteq V(e)$. Por la proposición 61 existe $d : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ una pseudométrica que cumple las propiedades $1-4$. Como G un grupo Polaco T_0 entonces $\{e\} = \bigcap_{n\in\omega} U_n$, de ahí que, por 1, $d(x, y) = 0$ si y sólo si $y^{-1}x \in \bigcap_{n\in\omega} U_n = \{e\}$ que equivale a que $y = x$. Por consiguiente d es una métrica. Además d es compatible con la topología ya que, por 2 y 3, $B_d\left(e, 2^{-k}\right) \subseteq U_k \subseteq B_d\left(e, 2^{-k+2}\right)$. Así, podemos concluir que d es metrizable. □

Proposición 63. *Sea G un grupo topológico, $F \subseteq G$ cerrado y $a \notin F$. Existe una función $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 0$ y $f[F] = \{1\}$. En particular, si G es T_0 entonces G es Tychonoff.*

Demostración. Sea $\{U_n : n \in \omega\} \subseteq V(e)$ tales que $U_{n+1} \subseteq U_n$ y $aU_n \cap F = \emptyset$. Sea d la pseudométrica generada por dicha familia que cumple que si $y^{-1}x \notin U_n$ entonces $d(x, y) \geq 2^{-n}$. Definimos $f(x) = min\{1, 2d(a, x)\}$. Observemos que $f(a) = min\{1, 2d(a, a)\} = 0$ y si $x \in F$ entonces $a^{-1}x \notin U_1$ luego $d(x, a) \geq 2^{-1}$; por consiguiente, $f(x) = 1$. □

Definición. Decimos que un grupo topológico $\langle G, \tau, \cdot\rangle$ es un grupo polaco si $\langle G, \tau\rangle$ es un espacio polaco.

Proposición 64. *Un subgrupo H de un grupo polaco G es polaco si y sólo si H es G_δ si y sólo si H es cerrado ([6]).*

Demostración. Sabemos que un subespacio H de un espacio polaco es polaco si y sólo si H es G_δ y que todo subconjunto cerrado de un espacio polaco es G_δ, por lo cual sólo basta probar que si H es G_δ entonces H es cerrado.

Supongamos que existe $x \in cl(H) \setminus H$. Como H es G_δ y denso en $cl(H)$ entonces existe una familia de densos abiertos $\left\{U_n^{xH} : n \in \omega\right\}$ (relativos a $cl(H)$) tales que $H = \bigcap_{n\in\omega} U_n^H$. Como H es isomorfo a las clases laterales de H; es decir $H \cong xH$, existe una familia de densos abiertos $\left\{U_n^{xH} : n \in \omega\right\}$ tal que $xH = \bigcap_{n\in\omega} U_n^{xH}$. Por el teorema de Baire (aplicado al espacio polaco $cl(H)$) la intersección numerable de abiertos densos es no vacía, se tiene que $\emptyset \neq \bigcap_{n\in\omega} U_n^H \cap \bigcap_{n\in\omega} U_n^{xH} = H \cap xH$ lo que es una contradicción ya que las clases laterales son ajenas. Así podemos concluir que $H = cl(H)$ que es un conjunto cerrado. □

Observación 65. Si G es un espacio Polaco y H subgrupo de G entonces la función cociente canónica q de G a $G/_H$ es abierta.

Demostración. Sea $U \subseteq G$ abierto. Notemos que $q^{-1}[q[U]] = UH = \bigcup_{h\in H} Uh$ que es un abierto, luego $q[U]$ es un abierto en el cociente. □

Proposición 66. *Si G es un espacio Polaco y H subgrupo cerrado de G entonces $G/_H$ es polaco.*

Demostración. Sea G un espacio polaco y H subgrupo cerrado de G. Como G es Polaco entonces G es fuertemente Choquet. Por otra parte sabemos que si X es fuertemente Choquet, $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, sobreyectiva y abierta entonces Y es fuertemente Choquet. Tomando $q : G \longrightarrow G/_H$ la función cociente que es continua, sobreyectiva y abierta, se sigue que $G/_H$ es fuertemente Choquet.

Por otra parte, como G es segundo numerable y $q : G \longrightarrow G/_H$ es suprayectiva y abierta, entonces $G/_H$ es segundo numerable. Además si d es una métrica en G entonces $d^* : G/_H \times G/_H \longrightarrow$

[6] Vid. Alexander S. Kechris, *The descriptive set theory of Polish group actions*, p. 4.

$[0,1]$ con $d^*(xH, yH) = inf\{d(a,b) : a \in xH$ y $b \in yH\}$ es una métrica compatible con la topología cociente.

De lo anterior tenemos que $G/_H$ es fuertemente Choquet, metrizable y segundo numerable; luego $G/_H$ es un espacio Polaco. $\square$

Corolario 67. *Si G es un grupo Polaco, H es un subgrupo normal de G y cerrado como subespacio, entonces el grupo cociente $G/_H$ es un grupo Polaco con la topología cociente.*

Se sigue de la proposición 66

Corolario 68. *Si G es un grupo Polaco, H es un subgrupo cerrado entonces $[G:H] \leq \omega$ o $[G:H] = 2^\omega$*

Demostración. Si G es un grupo Polaco y H es un subgrupo cerrado entonces H es un espacio polaco; luego $G/_H$ es un espacio polaco entonces $[G:H] = |G/_H| \in \{\omega, 2^\omega\}$. $\square$

Corolario 69. *Si G es un grupo Polaco, H es un subgrupo cerrado y abierto entonces $[G:H] \leq \omega$.*

Demostración. Como H es abierto y $gH \cong H$ entonces gH es abierto. Así, $\{gH : g \in G\}$ es una partición de abiertos de G. Como G es separable, cualquier partición de abiertos tiene que ser numerable; por consiguiente

$$[G:H] = |G/_H| = |\{gH : g \in G\}| \leq \omega$$

$\square$

Definición. Sea G un grupo y X un conjunto. Una acción de G en X es una función $\cdot : G \times X \longrightarrow X$ tal que:

1. $e \cdot x = x$
2. $gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ para cualesquier $g, h \in G$

Observación 70. Toda $J : G \times X \longrightarrow X$ una acción es abierta. En efecto si $U \times V \subseteq G \times X$ es un abierto, entonces $J[U \times V] = \bigcup_{u \in U} J[\{u\} \times V]$. Como $J \upharpoonright_{\{u\} \times X}$ es un isomorfismo topológico entonces cada $J[\{u\} \times V]$ es un conjunto abierto, lo que lo implica que $J[U \times V]$ es un abierto.

Definición. Sea G un grupo topológico y X un espacio topológico. Decimos que X es un $G-$espacio topológico si existe una acción continua de G en X. En particular, si G es un grupo Polaco y X es un espacio polaco diremos que X es un $G-$espacio Polaco.

Si X es un $G-$espacio topológico podemos definir la siguiente relación de equivalencia sobre X: xEy si y sólo si existe algún $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$.

Definición. A las clases de equivalencia formadas por la relación E las llamamos órbitas y las denotamos por Gx. Asimismo al conjunto de todas las órbitas lo denotamos como X/G.

Definición. Sea X un $G-$espacio y $x \in X$. Definimos el estabilizador como el conjunto

$$G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$$

que es un subgrupo de G.

Notación Si $J : G \times X \longrightarrow X$ es una acción entonces denotaremos por E_J a la relación inducida por las órbitas generadas por la acción J.

Observación 71. Si G, X son espacios Polacos y $\alpha : G \times X \longrightarrow X$ es una acción continua, entonces para toda $x \in X$ podemos definir $\varphi_x : G \longrightarrow X$ como $\varphi_x(g) = \alpha(g, x)$. Observemos que $G_x = (\varphi_x)^{-1}[\{x\}]$, lo que implica que $G_x \leq G$ es un conjunto cerrado; y por lo tanto es un grupo Polaco. Por esto último también se tiene que $G/_{G_x}$ es un espacio polaco. Así, hay morfismo $G \longrightarrow Gx$ y $G \longrightarrow G_x$, por el teorema de transgresión existe un morfismo $G_x \longrightarrow Gx$.

Definición. Sea X un espacio topológico y $F(X)$ el conjunto de los cerrados de X. $F(X)$ es el espacio de Effros Borel con la topología generada por los conjuntos de la forma

$$\langle U \rangle = \{F \in F(X) : F \cap U \neq \emptyset\}$$

donde $U \in \tau$.

Definición. (Kuratowski-Ryll-Narzewski) Sea X un espacio Polaco. Entonces existe una sucesión de funciones Borel $d_n : F(X) \longrightarrow X$ tal que si $F \in F(X)$ es no vacío entonces $\{d_n(F) : n \in \omega\}$ es denso en F.

Demostración. Como X es segundo numerable existe $\{U_n : n \in \omega\}$ una base numerable para X. Dada esta base podemos construir un esquema de Suslin $\langle U_\sigma : \sigma \in \omega^{<\omega}\rangle$ de elementos de la base tales que: $U_\emptyset = X$, $U_\sigma = \bigcup_{n\in\omega} U_{\sigma\frown n}$, $cl(U_{\sigma\frown n}) \subseteq U_\sigma$ y $diam(U_\sigma) \leq \frac{1}{|\sigma|}$ ([7]).

Definimos $f : \omega^\omega \longrightarrow X$ como $f(x) = \bigcap_{n\in\omega} U_\sigma$ que es continua. Por otra parte, para cada $F \in F(X)$ no vacío definimos $T_F = \{s \in \omega^{<\omega} : F \cap U_s \neq \emptyset\}$ y a_F la mínima rama (con el orden lexicografico) que pertenece a T_F. Sea $d : F(X) \longrightarrow X$ como $d(F) = f(a_F) \in F$ si $F \neq \emptyset$ y $d(\emptyset) = x_0$ fijo. Consideremos $g : F(x) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \omega^\omega$ como $g(F) = a_F$, observemos que $d = f \circ g$. Notemos que $g(F) \in [s]$ si y sólo si $F \cap U_s \neq \emptyset$ y $\forall t <_{lex} s\,(F \cap U_t = \emptyset)$, luego $g^{-1}[s] = \langle U \rangle \cap \bigcap_{t<_{lex}s} F(X) \setminus \langle U_t \rangle$; es decir $g^{-1}[s]$ es la intersección de un conjunto abierto con un conjunto cerrado, de lo que podemos inferir que g es una función Borel. Por consiguiente, al ser d la composición de dos funciones Borel, d es una función Borel. Análogamente para cada $n \in \omega$ existe $d'_n : F(X) \longrightarrow X$ existe una función Borel tal que si $F \cap U_n \neq \emptyset$ entonces $d'_n(F) \in F \cap V_n$. Definimos $d_n : F(X) \longrightarrow X$ como

$$d_n(F) = \begin{cases} d'_n(F) & F \cap U_n \neq \emptyset \\ d(F) & F \cap U_n = \emptyset \end{cases}$$

Como d_n se define por medio de dos funciones Borel se sigue que ella también es Borel y por construcción $\{d_n(F) : n \in \omega\}$ es denso en F. □

Definición. Sea X un conjunto, $A \subseteq X$ y E una relación de equivalencia. Decimos que

$$[A]_E = \{x \in X : \exists y \in A\,(\langle x, y\rangle \in A)\}$$

es la $E-$saturación de A.

Definición. Sea X un conjunto, $A \subseteq X$ y E una relación de equivalencia. $S : X \longrightarrow X$ es un selector Borel si xEy implica que $s(x) = s(y)$ y $s(x)\,Ex$. Asimismo, decimos que $T \subseteq X$ es una transversal si las clases de equivalencia intersectan a T en un sólo punto.

[7]Para más detalles véase la prueba de que todo espacio Polaco es imagen continua del espacio ω^ω

Proposición 72. *Sea X un espacio Polaco y E una relación de equivalencia. Si las clases de equivalencia son cerradas y la $E-$saturación de todo conjunto abierto es Borel entonces X admite un selector Borel.*

Demostración. Sea $\varphi : X \longrightarrow F(X)$ definida como $\varphi(x) = [x]$ (dado que las clases son cerradas φ está bien definida) y $d : F(X) \longrightarrow X$ como $d(F) = f(a_F) \in F$ (definida en la demostración del teorema de Kuratowski-Ryll-Narzewski) que es una función Borel. Definimos $S : X \longrightarrow X$ como $S = d \circ \varphi$. Basta probar que φ es Borel para concluir que S es Borel. Notemos que $\varphi^{-1}(\langle U \rangle) = [U]_E$ que por hipótesis es un conjunto Borel, de lo que inferimos que φ es Borel. □

Teorema 73. ***(Dixmier)*** *Sea G un grupo polaco y H un subgrupo cerrado de G. Hay una función Borel $s_H : G/_H \longrightarrow G$ tal que $s_H(xH) \in xH$; es decir s_H es un selector Borel para las clases izquierdas del cociente de H. En particular hay una transversal T_H para H; es decir, un conjunto Borel que intersecta a cualquier clase izquierda xH en exactamente un punto.*

Demostración. Por la proposición 72 basta demostrar que la saturación de todo conjunto abierto es Borel. Sea $U \subseteq G$ un abierto y E la relación inducida por las clases laterales izquierdas, observemos que $[U]_E = UH = \bigcup_{h \in H} Uh$ que es un abierto (en particular un conjunto Borel). □

9. Conjetura de Vaught

La conjetura de Vaught original, CVO, proviene de la lógica matemática; esta nos dice que si T es una teoría en un lenguaje contable de primer orden entonces T tiene una cantidad contable de modelos, salvo isomorfismo, o bien una cantidad continua de modelos. La versión topológica de la conjetura de Vaught, CVT, afirma que si X es un $G-$espacio polaco entonces el espacio de órbitas $X/_G$ es numerable o existe un conjunto perfecto P tal que para cualesquiera dos puntos en P se encuentran en órbitas distintas. A continuación mostraremos la relación que hay entre CVT y CVO.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje numerable de primer orden formado unicamente por una relación binaria R y denotemos por $Mod(\mathcal{L})$ el conjunto de todas las estructuras del lenguaje $\mathcal{L}$ que tienen a ω como dominio. A $Mod(\mathcal{L})$ se le puede dotar de la topología generada por los conjuntos de la forma $\{\mathfrak{A} \in Mod(\mathcal{L}) : \mathfrak{A} \models \varphi(k_1, ..., k_n)\}$ donde φ es una fórmula de lenguaje $\mathcal{L}$ y $k_1, ..., k_n \in \omega$. Observemos además que $Mod(\mathcal{L})$ se puede encajar abiertamente en $\{0,1\}^{\omega\times\omega}$ mediante la asignación $\mathfrak{A} \longmapsto \chi_{R^{\mathfrak{A}}}$ donde $\chi_{R^{\mathfrak{A}}}$ es la función característica de la interpretación de R bajo $\mathfrak{A}$, lo que implica que $Mod(\mathcal{L})$ es un espacio polaco. Por otra parte, si denotamos por $S_\infty \subseteq \omega^\omega$ el conjunto de biyecciones de ω en ω, entonces S_∞ es un grupo polaco con la operación de grupo «composición». Además, S_∞ actúa sobre $Mod(\mathcal{L})$ con la acción $\cdot$ donde $\pi \cdot \mathfrak{A}$ denota a la estructura tal que $\pi \cdot \mathfrak{A} \models R(n,m)$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models R(\pi(n), \pi(m))$. De esta manera, $Mod(\mathcal{L})$ es un $S_\infty-$espacio polaco donde las órbitas son precisamente las clases de equivalencia formadas por la relación de isomorfismo entre estructuras. De ahí que si se satisface la conjetura de Vaught topológica, CVT, entonces $Mod(\mathcal{L})$ tiene una cantidad contable o continua de órbitas, luego habría una cantidad numerable o continua de modelos salvo isomorfismo; con lo que se satisface la conjetura de Vaught original, CVO, para el lenguaje $\mathcal{L}$.

Dado X un espacio polaco, G un grupo Polaco y $J : G \times X \longrightarrow X$ una acción diremos que se satisface $CVT(G, X, J)$ cuando la conjetura de Vaught topológica es verdadera para G, X y J. Análogamente, si $E \subseteq X \times X$ es una relación de equivalencia diremos que se satisface $CVT(X, E)$ si $|X/_E| = \omega$ o existe un conjunto perfecto P tal que para cualesquiera dos puntos en P se encuentran en $E-$órbitas distintas.

Observación 74. Sea X es un espacio topológico con $d(X) = \omega$ y G es un grupo topológico que actúa sobre X, donde $d(X)$ denota la mínima cardinalidad de un conjunto denso sobre X. Si las órbitas, Gx, son abiertas entonces $|X/_G| \leq \omega$ (pues $|X/_G| \leq d(X) = \omega$); en particular se satisface $CVT(G, X, J)$. El resultado también es cierto si se pide que cada órbita contiene un abierto.

Definición. Sea X un espacio topológico. Decimos que $x \in X$ es un $p-$punto si para cada familia $\{V_n : n \in \omega\}$ de vecindades de x existe $V \in V(x)$ tal que $V \subseteq \bigcap_{n\in\omega} V_n$.

Proposición 75. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua, Y es un espacio métrico y $x \in X$ es un $p-$punto, entonces f es constante en una vecindad de x.*

Por la continuidad de f para cada $n \in \omega$ elegimos $V_n \in V(x)$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{n+1}$ para toda $y \in V_n$. Al ser x un $p-$punto, existe $V \in V(x)$tal que $V \subseteq V_n$ para toda n. Observemos que por construcción si $y \in V$ entonces $d(f(x), f(y)) = 0$; es decir f es constante en V.

Proposición 76. *Sea X un espacio métrico separable y G un grupo topológico que actúa sobre X con la acción J. Si para toda $x \in X$ existe $g \in G$ y $y \in X$ tales que $y \in Gx$ y $\langle g, y\rangle \in G \times X$ es un $p-$punto, entonces $|X/_G| \leq \omega$.*

Demostración. Si $\langle g, y\rangle \in G \times X$ es un $p-$punto existen abiertos U_y y V_y tales que $\langle g, y\rangle \in U_y \times V_y$ y J es constante en $U_y \times V_y$. Por consiguiente $V_y \subseteq Gy$ y de la observación 74 se tiene que $|X/_G| \leq \omega$. □

Proposición 77. *Si para cualquier relación de equivalencia $R \subseteq \omega^\omega \times \omega^\omega$ se satisface $CVT(\omega^\omega, R)$ entonces $CVT(X, E)$ es cierto para cualquier espacio Polaco X y toda relación de equivalencia E.*

Demostración. Sea X un espacio Polaco, E una relación sobre X y $f : \omega^\omega \longrightarrow X$ una función continua (que existe porque X es Polaco). Consideremos $R \subseteq \omega^\omega \times \omega^\omega$ definida como xRy si y sólo si $f(x) E f(y)$. Por hipótesis se satisface $CVT(\omega^\omega, R)$ de lo que obtenemos dos casos

Caso I: $|\omega^\omega/_R| \leq \omega$. Esto implica que $|X/_E| \leq |\omega^\omega/_R| \leq \omega$.

Caso II : Existe $P \subseteq \omega^\omega$ un conjunto perfecto tal que para toda $x, y \in P$ $\langle x, y\rangle \notin R$.

Notemos que $f\restriction_P$ es inyectiva, pues si $x, y \in P$ y $f(x) = f(y)$ entonces

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle \in E$$

lo que implica que $\langle x, y\rangle \in R$ que es una contradicción

Como P es polaco (pues es un conjunto cerrado) y perfecto, $2^\omega \hookrightarrow P \overset{f}{\hookrightarrow} X$. Por consiguiente $2^\omega \overset{g}{\hookrightarrow} X$, luego $g[2^\omega] \subseteq X$ es cerrado (pues al ser g es continua y 2^ω compacto, entonces $g[2^\omega]$ es compacto dentro de un espació Hausdorff; de lo que se infiere que $g[2^\omega]$ es cerrado). Además, al ser g un encaje se sigue que $g[2^\omega]$ no tiene puntos aislados. En resumen $g[2^\omega]$ es un conjunto perfecto tal que para toda para cualesquier $x, y \in g[2^\omega]$, $\langle x, y\rangle \notin E$.

De los casos anteriores concluimos que se satisface $CVT(X, E)$. □

El siguiente teorema nos dice que la conjetura de Vaught es cierta para espacios y grupos topológicos que no son necesariamente Polacos.

Proposición 78. *Sea (X, τ) un espacio topológico que satisface $OCA^*(X)$ y $E \subseteq X \times X$ una relación de equivalencia. Si para cualesquier $x, y \in X$, con $[x] \neq [y]$, existen $U, V \in \tau_X$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $[U]_E \cap V = \emptyset$, donde $[U]_E = \{z \in X : \exists w \in U(\langle w, z\rangle \in E)\}$, entonces se satisface $CVT(X, E)$. Si además X es de segunda categoría y $X \times X \setminus E$ es un conjunto denso abierto entonces existe $P \subseteq X$ un conjunto perfecto no vacío tal que para cualesquier $x, y \in P$ se tiene que $\langle x, y\rangle \notin E$.*

Demostración. Sea $K_0 \sqcup K_1 = [X]^2$ la siguiente partición: $K_0 = \Big\{\{x, y\} \in [X]^2 : [x] \neq [y]\Big\}$ y $K_1 = [X]^2 \setminus K_0$. Observemos que la hipótesis nos garantiza que $K_0 \sqcup K_1 = [X]^2$ es una partición abierta. Aplicando $OCA^*(X)$ tenemos dos casos.

Caso 1: Existe $P \subseteq X$ un subespacio perfecto, no vacío, compacto y $0-$homogéneo. Por la definición de K_0 se cumple que para cualesquier $x, y \in P$, $[x] \neq [y]$; es decir cualesquiera dos elementos del perfecto P se encuentran en clases de equivalencia distintas.

Caso 2: Hay una familia $\{X_n : n \in \omega\}$ de conjuntos $1-$homogéneos tales que $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ y sin perdida de generalidad podemos suponer que los conjuntos X_n son maximales. Por la definición de K_1 y la maximalidad de X_n se tiene que cada X_n es una órbita; de ahí que $|X/_E| \leq \omega$

Por ambos casos concluimos que se satisface $CVT\,(X,E)$.

Ahora, supongamos que X es de segunda categoría y $X \times X \setminus E$ es un conjunto denso abierto. Bajo tales hipótesis el caso 2 es imposible, como veremos a continuación. Como X es de segunda categoría, existe $n \in \omega$ tal que $int\,(cl\,(X_n)) \neq \emptyset$. Dado que $X \times X \setminus E$ es un conjunto denso entonces existe $a, b \in X$ tales que $\langle a,b\rangle \in (X \times X \setminus E) \cap [int\,(cl\,(X_n)) \times int\,(cl\,(X_n))]$. Bajo la hipótesis de que $X \times X \setminus E$ es abierto existen $A, B \in \tau$ tales que

$$\langle a,b\rangle \in A \times B \subseteq (X \times X \setminus E) \cap [int\,(cl\,(X_n)) \times int\,(cl\,(X_n))] \subseteq cl\,(X_n \times X_n)$$

que es una contradicción ya que $A \times B \subseteq X \times X \setminus E$ y $(A \times B) \cap (X_n \times X_n) \neq \emptyset$; es decir hay una pareja que es de color 0 y color 1 al mismo tiempo. Al ser el caso 2 imposible, entonces siempre se satisface el caso 1; por lo tanto existe $P \subseteq X$ un conjunto perfecto no vacío tal que para cualesquier $x, y \in P$ se tiene que $\langle x,y\rangle \notin E$. □

Corolario 79. *Sea X un espacio topológico que satisfaga $OCA^*\,(X)$ y $E \subseteq X \times X$. Si $X/_E$, el espacio de órbitas, es Hausdorff entonces se satisface $CVT\,(X,E)$.*

Se sigue de la proposición 78.

Corolario 80. *Sea (X,τ) un espacio topológico que satisface $OCA^*\,(X)$ y $E \subseteq X \times X$ es una relación de equivalencia. Si $X \times X \setminus E$ es abierto en la topología producto entonces se satisface $CVT\,(X,E)$*

Se sigue de la proposición 78.

Corolario 81. *Sea X un espacio topológico que satisface $OCA^*\,(X)$ y G un grupo que actúa sobre X con la acción J. Si G es compacto entonces se satisface $CVT\,(G,X,J)$.*

Demostración. Sea $E = \{\langle x,y\rangle : \exists g \in G\,(\langle g,x,y\rangle \in G_J)\}$ la relación inducida por las órbitas de J donde G_J es la gráfica de J. Veamos que E es un conjunto cerrado. Sea $\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle_{\alpha\in\lambda} \subseteq E$ una red tal que $\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle_{\alpha\in\lambda} \longrightarrow \langle x,y\rangle$. Para cada $\alpha \in \lambda$ existe $g_\alpha \in G$ tal que $\langle g_\alpha, x_\alpha, y_\alpha\rangle \in G_J$. Como G es compacto existe $\left(g_{\alpha_\gamma}\right)_{\gamma\in\Delta} \subseteq (g_\alpha)_{\alpha\in\lambda}$ una subred tal que $\left(g_{\alpha_\gamma}\right)_{\gamma\in\Delta} \longrightarrow g$; por consiguiente $\left\langle g_{\alpha_\gamma}, x_{\alpha_\gamma}, y_{\alpha_\gamma}\right\rangle_{\gamma\in\Delta} \longrightarrow \langle g,x,y\rangle$. Como J es continua, entonces $\langle g,x,y\rangle \in G_J$, por consiguiente $\langle x,y\rangle \in E$; que muestra que E es un conjunto cerrado. Dado que X satisface $OCA^*\,(X)$ y E es un conjunto cerrado entonces, por la proposición 78, se satisface $CVT\,(G,X,J)$. □

Corolario 82. *Sea (X,τ) un espacio polaco y $E \subseteq X \times X$ una relación de equivalencia. Si X es $\sigma-$cerrado, es decir, $X = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ donde cada F_n es un conjunto cerrado, y si $(*)$ para cualesquier $x, y \in X$, con $[x] \neq [y]$, existen $U, V \in \tau_{F_n}$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $[U]_E \cap V = \emptyset$; entonces se satisface $CVT\,(X,E)$.*

Demostración. Como X es un espacio Polaco y cada F_n es un conjunto cerrado, entonces todo F_n es un espacio Polaco; en particular, cada F_n satisface $OCA^*(F_n)$. Por la hipótesis $(*)$ y la proposición 78 se satisface $CVT(F_n, E\restriction_{F_n\times F_n})$ para cada $n\in\omega$; de ahí que se tengan los siguientes dos casos.

Caso I: Existe $n\in\omega$ y $P_n\subseteq F_n$ un conjunto perfecto tal que para cualesquier $x,y\in P$, $[x]_{F_n}\neq[y]_{F_n}$ donde $[x]_{F_n}$ es la órbita de x de la relación $E\restriction_{F_n\times F_n}$.

Como F_n es un conjunto cerrado, entonces $P_n\subseteq X$ es un conjunto perfecto en (X,τ). Además, observe que si $[x]_{F_n}\neq[y]_{F_n}$ entonces $[x]\neq[y]$. Por consiguiente existe $P\subseteq X$ un conjunto (X,τ) perfecto tal que para cualesquier $x,y\in P$, $[x]\neq[y]$.

Caso II. Para toda $n\in\omega$, $\left|F_n/_{E\restriction_{F_n\times F_n}}\right|\leq\omega$.

Dado que $X=\bigcup_{n\in\omega}F_n$, entonces para toda $x\in X$ existe una sucesión $(x_n)_{n\in D_x}$ con $D_x\subseteq\omega$ tal que $[x]=\bigcup_{n\in D_x}[x_n]_{F_n}$. De este modo, $|X/_E|\leq\sum_{n\in\omega}\left|F_n/_{E\restriction_{F_n\times F_n}}\right|\leq\omega$.

De los casos anteriores se sigue que $CVT(X,E)$ se satisface. □

El corolario anterior da pie a la siguiente definición

Definición. Sea (X,τ) un espacio topológico y $E\subseteq X\times X$ una relación de equivalencia. Decimos que $Y\subseteq X$ es una reducción OCA^* de X y E, si y sólo si, $I)$ Y es cerrado, $II)$ Y satisface $OCA^*(Y,\tau\restriction_Y)$, $III)$ para todo $x\in X$ se cumple que $[x]_E\cap Y\neq\emptyset$ y $IV)$ para cualesquier $x,y\in Y$, con $[x]\neq[y]$, existen $U,V\in\tau\restriction_Y$ tales que $x\in U$, $y\in V$ y $[U]_E\cap V=\emptyset$. Además, diremos que Y es una cuasi reducción OCA^* de X y E si se satisface I, II y IV.

Corolario 83. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $E\subseteq X\times X$ una relación de equivalencia. Si Y es una reducción OCA^* de X y E, entonces se satisface $CVT(X,E)$.*

Demostración. Como se satisface $OCA^*(Y)$ y para cualesquier $x,y\in Y$ existen $U,V\in\tau\restriction_Y$ tales que $x\in U$, $y\in V$ y $[U]_E\cap V=\emptyset$, entonces, por la proposición 78, se satisface $CVT(Y,E\restriction_{Y\times Y})$; de ahí que se tengan los siguientes dos casos:

Caso I: Existe $P\subseteq Y$ un conjunto perfecto tal que para cualesquier $x,y\in P$, $[x]_Y\neq[y]_Y$ donde $[x]_Y$ es la órbita de x de la relación $E\restriction_{Y\times Y}$.

Como Y es un conjunto cerrado, entonces $P\subseteq X$ es un conjunto perfecto en (X,τ). Además, observe que si $[x]_Y\neq[y]_Y$ entonces $[x]\neq[y]$. Por consiguiente existe $P\subseteq X$ un conjunto (X,τ) perfecto tal que para cualesquier $x,y\in P$, $[x]\neq[y]$.

Caso II. $\left|Y/_{E\restriction_{Y\times Y}}\right|\leq\omega$.

Dado que para todo $x\in X$ se cumple que $[x]_E\cap Y\neq\emptyset$, entonces

$$|X/_E|\leq\left|Y/_{E\restriction_{Y\times Y}}\right|\leq\omega$$

De los casos anteriores se sigue que $CVT(X,E)$ se satisface. □

Observación 84. Sea X un espacio Polaco y $E\subseteq X\times X$ una relación de equivalencia. Si existe $P\subseteq X$ un conjunto perfecto tal que para cualesquier $(*)$ $x,y\in P$, con $x\neq y$, se cumple que $[x]\neq[y]$; entonces P es una cuasi reducción OCA^* para X y E.

Demostración. Como P es perfecto, entonces P es cerrado. Por esto mismo, P es Polaco; lo que implica que P satisface OCA^*. Ademas, al ser P Hausdorff, si $x\neq y$ existen $U,V\in\tau\restriction_P$ tales que $x\in U$, $y\in V$ y $U\cap V=\emptyset$; aplicando $(*)$ se sigue que $[U]\cap V=U\cap V=\emptyset$. □

Proposición 85. *Sea X un espacio Polaco, G un grupo topológico que actúa sobre X y E la relación inducida por las órbitas. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $X/_G$ es Hausdorff
2. E es un conjunto cerrado.

Demostración. En lo sucesivo sea $p : X \longrightarrow X/_G$ la proyección natural.

$\Longrightarrow\rfloor$ Como $(p,p) : X \times X \longrightarrow X/_G \times X/_G$ es continua y $D \subseteq X/_G \times X/_G$ la diagonal es un conjunto cerrado entonces $E = (p,p)^{-1}[D]$ es un conjunto cerrado.

$\Longleftarrow\rfloor$Sea $q : X \times X \longrightarrow X \times X/_{G\times G}$ la proyección orbital de la acción producto es decir,

$$(g,h)\langle x,y\rangle = \langle gx, hy\rangle$$

Usando el teorema de transgresión $q(p,p)^{-1} : X/_G \times X/_G \longrightarrow X \times X/_{G\times G}$ es un isomorfismo. En particular, $q(p,p)^{-1}$ es cerrada que implica (por el teorema de transgresión) que q es cerrada para los conjuntos (p,p)-saturados (decimos que U es g saturado si $g^{-1}[g[U]] = U$). Observemos que $E = (p,p)^{-1}[D]$ es un conjunto (p,p)-saturado. Por consiguiente $q[E] = q\left[(p,p)^{-1}[D]\right]$ es un conjunto cerrado, luego (por ser $q(p,p)^{-1}$ un isomorfismo) D es un conjunto cerrado. □

Proposición 86. *Sea $E \in \prod_1^1(\omega^\omega \times \omega^\omega)$ una relación de equivalencia. Si existen A_1 y A_2 conjuntos analíticos en ω^ω tales que $\omega^\omega \times \omega^\omega \setminus E = A_1 \times A_2$ entonces se satisface $CVT(\omega^\omega, E)$.*

Demostración. Por hipótesis $\omega^\omega \times \omega^\omega \setminus E \in \tau_G(\omega^\omega) \times \tau_G(\omega^\omega)$ donde $\tau_G(\omega^\omega)$ es la topología de Gandy. Luego, la partición $K_0 \sqcup K_1 = [X]^2$ con

$$K_0 = \left\{\{x,y\} \in [X]^2 : \langle x,y\rangle \notin E\right\}$$

y $K_1 = [X]^2 \setminus K_0$ es una partición $0-$abierta. Si (ω^ω, τ_G) es $\sigma - 1-$homogéneo entonces $|X/_E| \leq \omega$ y en caso contrario, aplicando la proposición 50, existe $P \subseteq \omega^\omega$ un conjunto perfecto en (ω^ω, τ) y $0-$homogéneo donde τ es la topología de Baire; por la definición de K_0 se cumple que para cualesquier $x, y \in P$, $\langle x,y\rangle \notin E$. □

Proposición 87. *Sea X un espacio topológico con $|X| = k$ y $E \subseteq X \times X$ una relación de equivalencia. Si las clases de equivalencia inducidas por la relación E tienen cardinalidad finita, entonces $|X/_E| = k$. En particular, si X es un espacio Polaco no numerable cuyas clases de equivalencia son de cardinalidad finita, entonces $|X/_E| = 2^\omega$.*

Demostración. Consideremos la partición $K_0 = \{\{x,y\} : \langle x,y\rangle \notin E\}$ y $K_1 = [X]^2 \setminus K_0$. Por el teorema 33 de Dushnik-Miller sabemos que $k \longrightarrow (k,\omega)^2$. Sin embargo, por hipótesis, no puede existir un conjunto 1-homogeneo de tamaño ω porque todas las órbitas son de cardinalidad finita; por lo que existe $H \subseteq X$ un conjunto $0-$homogeneo tal que $|H| = k$ (esto significa que hay al menos k clases de equivalencia). Por consiguiente $k \leq |X/_G| \leq |X| = k$. □

Proposición 88. *Sea X un espacio Polaco perfecto y $E \subseteq X \times X$ una relación de equivalencia. Si E tiene la propiedad de Baire y las clases de equivalencia inducidas por la relación E no admiten* *un conjunto perfecto, entonces existe $P \subseteq X$ un conjunto perfecto no vacío tal que para cualesquier $x, y \in P$ se tiene que $\langle x, y\rangle \notin E$.*

Demostración. Consideremos la partición $[X]^2 = K_0 \sqcup K_1$ donde $K_0 = \{\{x,y\} : \langle x,y\rangle \in E\}$ y $K_1 = \{\{x,y\} : \langle x,y\rangle \notin E\}$. Dado que E tiene la propiedad de Baire y X es un espacio Polaco perfecto, aplicando el teorema 43 de Galvin, existe $P \subseteq X$ un conjunto perfecto no vacío tal que P es 0-homogéneo o $1-$homogéneo. Bajo la hipótesis de que las clases de equivalencia inducidas por la relación E no admiten un conjunto perfecto, entonces P es 0-homogéneo; lo que implica que para cualesquier $x, y \in P$ se tiene que $\langle x, y\rangle \notin E$. □

Proposición 89. *Sea E una relación de equivalencia sobre ω^ω y U un abierto no vacío tal que $E \cap (U \times U)$ es magro. Existe un conjunto perfecto tal que cualesquiera dos de sus puntos se encuentran en órbitas distintas.*

Demostración. Sea $E \cap (U \times U) = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ donde cada A_n es un conjunto denso en ninguna parte. Para demostrar la proposición basta construir un esquema de Cantor $\langle U_\sigma : \sigma \in 2^{<\omega}\rangle$ de clopens no vacíos con las siguientes propiedades:

$U_\emptyset \subseteq U$

$U_{\sigma^\frown 0}, U_{\sigma^\frown 1} \subseteq U_\sigma$

$diam\,(U_\sigma) < \frac{1}{|\sigma|}$

$U_{\sigma^\frown 0} \cap U_{\sigma^\frown 1} = \emptyset$

Si $|\sigma| = n$ entonces $E \cap (U_{\sigma^\frown 0} \times U_{\sigma^\frown 1}) \cap \bigcup_{i\leq n} A_i = \emptyset$

Sea $U_\emptyset \subseteq U$ cualquier clopen básico y supongamos por hipótesis inductiva que ya fue construido U_σ con $|\sigma| = n$. Como A_{n+1} es un conjunto denso en ninguna parte y $U_\sigma \times U_\sigma \neq \emptyset$ existen $U_{\sigma^\frown 0} \subseteq U_\sigma$ y $U_{\sigma^\frown 1} \subseteq U_\sigma$ tal que $E \cap (U_{\sigma^\frown 0} \times U_{\sigma^\frown 1}) \cap \bigcup_{i\leq n+1} A_i = \emptyset$ con $U_{\sigma^\frown 0} \cap U_{\sigma^\frown 1} = \emptyset$ (esto último se puede pedir gracias a la topología de ω^ω ya que si $U_{\sigma^\frown 0} \cap U_{\sigma^\frown 1} \neq \emptyset$ sólo hay que tomarse dos conos ajenos dentro de $U_{\sigma^\frown 0}$ y $U_{\sigma^\frown 1}$ respectivamente). Así queda construido el esquema de cantor

Observemos que si $\{x_f\} = \bigcap_{n\in\omega} U_{f\restriction_n}$ entonces por la propiedad 4 y 5 se cumple que si $f, g \in 2^\omega$ entonces x_f y x_g no están E relacionados. □

Teorema 90. ***(Silver)*** *Sea X un espacio Polaco y E una relación de equivalencia sobre X. Si $E \in \Pi^1_1(X \times X)$ entonces se satisface $CVT\,(X, E)$ ([8]).*

Demostración. Sin perdida de generalidad supongamos que $X = \omega^\omega$ y $E \in \Pi^1_1(\omega^\omega, rec)$. Podemos asumir esto ya que al ser X Polaco existe $f : \omega^\omega \longrightarrow X$ una función continua y suprayectiva y $f^{-1}[E] \in \Pi^1_1(\omega^\omega)$.

Definimos

$$V = \left\{x \in X : \neg\exists U \in \triangle^1_1(\omega^\omega, rec)\,(x \in U \subseteq [x]_E)\right\}$$

Observemos que si $V = \emptyset$ entonces sólo hay una cantidad numerable de órbitas (pues cada órbita contiene un conjunto Borel recursivo y $\left|\triangle^1_1(\omega^\omega, rec)\right| = \omega$); por lo que podemos suponer que $V \neq \emptyset$.

[8]Vid. David Marker, *Descriptive Set Theory*, p. 76

$I)$ Si $x \in V$ entonces $\neg\exists U \in \sum_1^1 (\omega^\omega, rec)\, (x \in U \subseteq [x]_E)$. En particular

$$V = \left\{x \in X : \neg\exists U \in \Sigma_1^1 (\omega^\omega, rec)\, (x \in U \subseteq [x]_E)\right\}$$

Por contradicción supongamos que $x \in V$ y existe $U \in \sum_1^1 (\omega^\omega, rec)$ tal que $x \in U \subseteq [x]_E$. Notemos que las órbitas son coanalíticas ya que $y \in [x]_E$ si y sólo si $\forall z \in U\, (\langle y, z\rangle \in E)$, lo que implica que

$$X \setminus [x]_E = \pi_1 \left[(\omega^\omega \times \omega^\omega \setminus E) \cap (\omega^\omega \times U)\right] \in \Sigma_1^1 (\omega^\omega, rec)$$

Aplicando el teorema de separación de conjuntos analíticos para U y $X \setminus [x]_E$, existe $W \in \Delta_1^1 (\omega^\omega, rec)$ tal que $x \in U \subseteq W \subseteq [x]_E$ que contradice el hecho de que $x \in V$.

$II)$ Afirmamos que $V \in \sum_1^1 (\omega^\omega, rec)$

Por definición $x \in V$ si y sólo si $\forall U \in \Delta_1^1 (\omega^\omega, rec)\, (x \in U \longrightarrow \exists y \in U\, (x, y) \notin E)$. Aplicando códigos de Borel se tiene que $x \in V$ si y sólo si $\forall n \in \omega\, [(n \in D \wedge x \in P_n^+) \longrightarrow \exists y \in \omega^\omega\, (y \in P_n^+ \wedge \langle x, y\rangle \notin E)]$. De ahí que

$$V = \bigcap_{n \in D} \pi_1 \left[P_n^+ \times P_n^+ \setminus E\right] \in \Sigma_1^1 (\omega^\omega, rec)$$

$III)$ E tiene la propiedad de Baire en $\tau_G (\omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega)$

Es claro ya que $E \subseteq (\omega^\omega \times \omega^\omega, \tau \times \tau)$ es coanalítico.

$IV)$ $E \cap V \times V$ es magro en $\tau_G (\omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega)$

Supongamos por contradicción que $E \cap (V \times V)$ no es magro en $\tau_G (\omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega)$. Como E tiene la propiedad de Baire en $\tau_G (\omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega)$ existe $W \in \tau_G (\omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega)$ tal que $E \Delta W$ es un conjunto magro. Como $E \cap V \times V$ no es magro entonces $(E \cap V \times V) \cap W \neq \emptyset$. Dado que $V \times V$ es un abierto en $\tau_G (\omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega)$ y $(E \cap V \times V) \cap W \neq \emptyset$, existen $A, B \in \tau_G (\omega^\omega)$ abiertos no vacíos tales que $E \cap (V \times V) \subseteq A \times B \subseteq V \times V$ y E es comagro en $A \times B$.

Sea

$$A_1 = \{\langle x_0, x_1\rangle \in A \times A : \langle x_0, x_1\rangle \notin E\} = (A \times A) \cap (\omega^\omega \times \omega^\omega \setminus E) \in \tau_G (\omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega)$$

Observemos que si $A_1 = \emptyset$ entonces $A \subseteq \omega^\omega \setminus V$ que es una contradicción (si $A_1 = \emptyset$ entonces $x \in A \subseteq [x]_E$ y $A \in \sum_1^1 (\omega^\omega, rec)$ de lo cual se infiere que $x \notin V$). Así A_1 es un abierto no vacío en $\tau_G (\omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega)$.

Sea $C_i = \{(x_0, x_1, y) : (x_0, x_1) \in A_1,\ y \in B \text{ y } \langle x_i, y\rangle \notin E\}$ para $i = 0, 1$.

Afirmamos que C_i es $\tau_G (\omega^\omega \times \omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega)$ es magro para $i = 0, 1$. Como E es $\tau_G (\omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega)$ comagro en $A \times B$ existe $\{D_n : n \in \omega\}$ $\tau_G (\omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega)$ $-$densos en ninguna parte tales que

$$\{\langle x, y\rangle \in A \times B : \langle x, y\rangle \notin E\} = \bigcup_{n \in \omega} D_n$$

Para cada $n \in \omega$ definimos $D_n^i = \{(x_0, x_1, y) : (x_i, y) \in D_n\}$ es $\tau_G (\omega^\omega \times \omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega)$-denso en ninguna parte y notemos que $C_i \subseteq \bigcup_{n \in \omega} D_n^i$. Por lo tanto C_i es magro.

Como $\tau_G (\omega^\omega \times \omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega)$ satisface el teorema de categoría de Baire, $A_1 \times B$ es un abierto en $\tau_G (\omega^\omega \times \omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega)$ y $C_0 \cup C_1$ es magro entonces $(A_1 \times B) \setminus (C_0 \cup C_1)$ no es un conjunto magro; en particular $(A_1 \times B) \setminus (C_0 \cup C_1) \neq \emptyset$. Sin embargo, si $\langle x_0, x_1, y\rangle \in (A_1 \times B) \setminus (C_0 \cup C_1)$ entonces $\langle x_0, x_1\rangle \notin E$, $\langle x_0, y\rangle \in E$ y $\langle x_1, y\rangle \in E$; lo que contradice que E sea una relación de equivalencia. Por reducción al absurdo concluimos que $E \cap V \times V$ es magro en $\tau_G (\omega^\omega) \times \tau_G (\omega^\omega)$.

Sean $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ densos en ninguna parte en $\tau_G(\omega^\omega) \times \tau_G(\omega^\omega)$ tales que $E \cap (V \times V) = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Consideremos $T \subseteq \omega^{<\omega} \times \omega^{<\omega}$ un árbol tal que $V = \{x \in \omega^{<\omega} : \exists y \in \omega^{<\omega}((x,y) \in [T])\}$. Construyendo por recursión un esquema de Cantor $\langle U_\sigma : \sigma \in 2^{<\omega}\rangle \subseteq \Sigma^1_1(\omega^\omega, rec)$, $\langle T^\sigma : \sigma \in 2^{<\omega}\rangle$ una familia de árboles, $\langle \mu_\sigma : \sigma \in 2^{<\omega}\rangle \subseteq \omega^{<\omega}$ y $\langle \eta^\sigma_\tau : \sigma \subseteq \tau \in \omega^{<\omega}\rangle$ tales que

1. $U_\emptyset \subseteq U$
2. $U_\sigma \subseteq U_\tau$ si $\tau \subseteq \sigma$
3. $E \cap (U_{\sigma\frown 0} \times U_{\sigma\frown 1}) \cap \bigcup_{i\leq|\sigma|} A_i = \emptyset$
4. $T^\sigma \subseteq \omega^{<\omega} \times \omega^{<\omega}$, $U_\sigma = \{x \in \omega^\omega : \exists y \in \omega^{<\omega}((x,y) \in [T^\sigma])\}$ y si $\sigma \subseteq \tau$ entonces $T^\tau \subseteq T^\sigma$
5. Si $\sigma \subseteq \tau$ entonces $\mu_\sigma \subseteq \mu_\tau$ y $U_\sigma \subseteq [\mu_\sigma]$
6. Si $\sigma \subseteq \tau_0 \subseteq \tau_1$ entonces $\eta^\sigma_{\tau_0} \subseteq \eta^\sigma_{\tau_1}$ y $\exists x \exists y (\mu_\tau \subseteq x \wedge \eta^\sigma_\tau \subseteq y \wedge (x,y) \in [T^\sigma])$

Notemos que $\varphi : 2^\omega \longrightarrow (\omega^\omega, \tau)$ definida como $\varphi(f) = \bigcup_{n\in\omega} \mu_{f\restriction_n}$ es un encaje, luego $\varphi[2^\omega]$ es un conjunto perfecto y por 3) satisface que para cualesquier $x, y \in \varphi[2^\omega]$, $\langle x, y\rangle \notin E$. $\square$

Teorema 91. ***(Ramez L. Sami)*** *Sea $J : G \times S \longrightarrow S$ una acción de un grupo polaco G a un conjunto polaco. Si para toda $x \in S$ se cumple que el estabilizador G_x es un subgrupo normal de G, entonces se satisface $CVT(G, X, J)$* ([9])

Demostración. Observemos que si $x, y \in S$ y $g \in G$ son tales que $J(g,x) = y$ entonces $gG_xg^{-1} = G_y$ (pues si $f \in G_x$ entonces $gfg^{-1}(y) = gf(x) = gx = y$ y si $f \in G_y$ entonces $g^{-1}fg(x) = g^{-1}fy = g^{-1}y = x$, lo que implica que $g^{-1}fg \in G_x$ y así $f = gg^{-1}fgg^{-1} \in gG_xg^{-1}$). Como G_x es normal entonces $gG_xg^{-1} = G_x$, luego si $J(g,x) = y$ entonces $G_x = G_y$.

Por otra parte, consideremos la siguiente relación xRy si y sólo si $G_x = G_y$ que podemos escribir como xRy si y sólo si $\forall g \in G (J(g,x) = x \longleftrightarrow J(g,y) = y)$; así,

$$R = \{\langle x, y\rangle : \forall g \in G (J(g,x) = x \longleftrightarrow J(g,y) = y)\}$$

que es un conjunto cerrado (en particular es un conjunto Borel y por lo tanto coanalítico), ya que si $\langle x_n, y_n\rangle$ es una sucesión en R y es tal que $\langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$ entonces por la continuidad de J se sigue que

$$J(g,x) = J(g, lim_{n\longrightarrow\infty} x_n) = lim_{n\longrightarrow\infty} J(g, x_n) = lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$$

si y sólo si

$$J(g,y) = J(g, lim_{n\longrightarrow\infty} y_n) = lim_{n\longrightarrow\infty} J(g, y_n) = lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = y$$

para toda $g \in G$, luego $\langle x, y\rangle \in T$. Aplicando el teorema de Silver para R se tienen dos casos.

Caso I: Hay un conjunto perfecto de $R-$clases. Este mismo conjunto perfecto testifica que hay una cantidad perfecta de $J-$órbitas, ya que como lo observamos anteriormente se cumple que si $J(g,x) = y$ entonces $G_x = G_y$; es decir si xE_Jy implica que xRy.

Caso II: Hay una cantidad contable de $R-$clases. Veamos que en este caso se cumple que E_J es una relación Borel y aplicando el teorema de Silver para E_J se tendría el resultado deseado. Sea $\langle C_n : n \in \omega\rangle$ una enumeración de las $R-$clases tal que G_{x_n} es el estabilizador de los elementos de C_n. Notemos que para cada n número natural se satisface que C_n es un conjunto cerrado pues

$$C_n = \{y \in S : \forall g \in G (J(g, x_n) = x_n \longleftrightarrow J(g,y) = y)\}$$

[9] Vid. Ramez L. Sami., «Polish group actions and the Vaught conjecture», p. 338

Aplicando el teorema de Dixmier sabemos que para cada $n \in \omega$ existe K_n un selector Borel de $G/_{G_{x_n}}$. Observemos que si $x, y \in C_n$ y $xE_J y$ entonces $A = \{g \in G : J(g, x) = y\} = gG_{x_n} \in G/_{G_{x_n}}$con $g \in A$, por lo que $|K_n \cap A| = 1$. En consecuencia, para cualquier $x, y \in C_n$, $xE_J y$ si y sólo si existe una única $g \in K_n$ tal que $J(g, x) = y$. Consideremos

$$D = \{\langle g, x, y\rangle : x, y \in C_n \text{ y } \exists! g \in K_n\,(J(g, x) = y)\} = \left[\bigcup_{n\in\omega} (G \times C_n \times C_n)\right] \cap G_J \cap \left[\bigcup_{n\in\omega} (K_n \times X \times X)\right]$$

que es un conjunto Borel ya que cada C_n y K_n son Borel y la gráfica G_J también es Borel. Luego, $E_J \restriction_{C_n} = \{\langle x, y\rangle \in E_J : x, y \in C_n\} = \pi_{1,2}[D]$ es un conjunto Borel (ya que$\pi_{1,2}$ es una función Borel inyectiva) de ahí que $E_J = \bigcup_{n\in\omega} E_J \restriction_{C_n}$ es un conjunto Borel. □

Corolario 92. ***(Ramez L. Sami)*** *La conjetura de Vaught topológica se satisface para grupos Hamiltonianos y grupos abelianos.*

Demostración. Se sigue directamente del teorema 91. □

Referencias

[1] Edwin Hewiitt & Kenneth A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, segunda edición, vol. I, Springer Verlag, New York, 1979.

[2] Kechris, Alexander S., *Clasical Descriptive Set Theory*, Springer Verlag, New York, 1995.

[3] Kechris, Alexander S, *The Descriptive Set Theory of Polish Group Actions*, Cambridge university press, New York, 1996.

[4] L. A. Harrington, A. S. Kechris, & A. Louveau, 1990, «A Glimm-Effross Dichotomy for Borel Equivalence Relarions», *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 3, no. 4, pp. 903-928.

[5] Marker David, *Descriptive Set Theory*, 2002.

[6] Ramez L. Sami., 1994, «Polish Group Actions And The Vaught Conjecture», *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 341, no. 1, pp. 335-353

[7] Su Gao, *Invariant Descriptive Set Theory*, CRC Press, New York, 2009.

[8] S. Todorchevich & I. Farah, *Some applications of the method of forcing,* Yenisei, Moscow 1995.