Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
Universidad Nacional Autonoma de México
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Instituto de Física y Matemáticas

Tesis:

FUNTORES DE GREEN EN BICONJUNTOS Y SUS DISTINTAS DEFINICIONES

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

José Miguel Calderón León

Asesor: Dr. ALBERTO GERARDO RAGGI CARDENAS.

Morelia, Michoacán agosto de 2019.

A Ma. Guadalupe y Miguel

Contenido

Resumen:
En esta tesis se darán dos definiciones de categorías de biconjuntos, y las definiciones de funtores de Green asociadas a cada una de ellas. El objetivo de este trabajo sera ver la equivalencia de las dos definiciones de funtores de Green en biconjuntos cuando se den las hipótesis necesarias.

Abstract:
In this thesis, we give two definitions of bisets categories and the definition of the Green funtors associated to each of them. The aim of this document is to proof the equivalence of the two definitions of Green functors in biset when the necessary hypotheses are given

Palabras clave:
Algebra, teoria de categorías, funtores de Green, biconjuntos, categorías de biconjuntos

Agradecimientos

Primero que nada quiero agradecer a mi asesor, Gerardo Raggi quien fue parte esencial en el desarrollo de esta tesina. También quiero agradecer a mis grandes amigos, los nuevos y los viejos, quienes me brindan su amistad incondicional, por siempre escucharme, por sus consejos, por estar conmigo en los malos momentos y disfrutar los buenos. Y por último a mi gran motor, mi familia.

Introducción

A finales del siglo XX, el matemático Serge Bouc, dio la definición de una categoría de biconjuntos y la definición de funtores de Green en biconjuntos en el libro [1], la cual está inspirada en la definición de un funtor de Green, y para ello necesitó pedir que la categoría de biconjuntos con la que se trabaja sea repleta, y cerrada bajo producto. Pidiendo estas características en las categorías, se facilita el manejo de estos funtores, ya que las categorías son lo mejor posible.
Al inicio del siglo XXI los matemático Robert Boltje, Alberto G. Raggi Cárdenaz, y Luis Valero dieron otra definición de una categoría de biconjuntos, inspirada en la definición de una subcategoría de biconjuntos admisible, dada por Serge Bouc en [1], y también dieron otra definición de funtores de Green, la cual publicarón en [5]. Las ventajas de estas definiciones es que son más generales que las anteriores, ya que estas categorías de biconjuntos contiene a las categorías de biconjuntos definida por el Dr. Bouc. Por otro lado es más complicado trabajar con estas definiciones.
El objetivo de esta tesina es demostrar que las dos definiciones de funtores de Green en biconjuntos, son equivalentes cuando las dos definiciones de funtores de Green tiene sentido en una categorías de biconjuntos.

Capítulo 1

Preliminares

En esta tesina supondremos que los grupos son de orden finito, que R es un anillo con unidad, y que las R-álgebras tienen unidad. Primero daremos la definición del anillo de Burnside, ya que aparece en varias de las siguientes definiciones, y además podemos definir un ejemplo de un Funtor de Green usando este anillo.

Definición 1.0.1. Dado un grupo finito G, el anillo de Burnside de G, denotado por $B(G)$, se define como el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo de G-conjuntos finitos módulo el subgrupo

$$\langle [X \sqcup Y] - [X] - [Y] \mid X, Y \text{ } G\text{-conjuntos finitos } \rangle,$$

donde $[X]$ denota la clase de isomorfismo de X. El grupo $B(G)$ tiene estructura multiplicativa dada por

$$[X] \cdot [Y] = [X \times Y],$$

y a los elementos de $B(G)$ les llamaremos G-conjuntos virtuales.

Definición 1.0.2. Dados G y H dos grupos, un (G, H)-biconjunto, es un conjunto X con una acción de G por la izquierda y una acción de H por la derecha, de tal forma que las acciones conmutan, es decir $g \cdot (x \cdot h) = (g \cdot x) \cdot h$ para todas $g \in G$, $h \in H$ y $x \in X$. Lo denotaremos por ${}_GX_H$.
Decimos que el biconjunto ${}_GX_H$ es transitivo si dado $x \in X$, todo elemento en X puede escribirse como gxh para algunos $g \in G$ y $h \in H$.

Dado un (G, H)-biconjunto ${}_GX_H$, Al conjunto X se le puede dar estructura de $G \times H$-conjunto, con la acción

$$\begin{aligned} \cdot : (G \times H) \times X &\longrightarrow X \\ ((g, h), x) &\longmapsto gxh^{-1}. \end{aligned}$$

Así que, si ${}_GX_H$ es transitivo, entonces es isomorfo como $(G\times H)$-conjunto a $G\times H/\ D$, para algún D subgrupo de $G\times H$.

Definición 1.0.3. Dados G y H grupos. Decimos que los biconjuntos ${}_GX_H$ y ${}_GY_H$ son isomorfos como (G,H)-biconjuntos, si existe una función biyectiba $\alpha : X \longrightarrow Y$, tal que $\alpha(gxh) = g\alpha(x)h$, para todos $g\in G$, $h\in H$ y $x\in X$.

Definición 1.0.4. Dados G, H y K grupos, un (G,H)-biconjunto ${}_GX_H$ y un (H,K)-biconjunto ${}_HY_K$. Sean $x\in X$ y $y\in Y$, definimos a $(x,_H y) := \{(xh, h^{-1}y) \mid h\in H\}$, y al conjunto de todas las órbitas los denotaremos como ${}_GX_H \circ_H Y_K$,

$${}_GX_H \circ_H Y_K := \{(x,_H y) \mid x\in X, y\in Y\}.$$

Y este conjunto es un (G,K)-biconjunto con la acción

$$g\cdot (x,_H y)\cdot k := (gx,_H yk).$$

Ejemplo 1.0.5. Dados G, H grupos y un homomorfismo de grupos $\varphi : G\longrightarrow H$, a H se le pueda dar estructura de (H,G)-biconjunto con la acción

$$\begin{aligned} H\times H\times G &\longrightarrow H \\ (h,x,g) &\longmapsto hx\varphi(g), \end{aligned}$$

a este biconjunto se le denotarácomo ${}_HH_{\varphi G}$ y en caso de no causar confusión se le denotarácomo H_φ. Notemos que ${}_HH_{\varphi G}$ es transitivo y que

$${}_HH_{\varphi G} \cong \frac{H\times G}{\{(h,\varphi(h)) \mid h\in H\}}.$$

como (H,G)-biconjunto.
Además a H también se le puede dar estructura de (G,H)-biconjunto, con la acción

$$\begin{aligned} G\times H\times K &\longrightarrow H \\ (g,x,h) &\longmapsto \varphi(g)xh, \end{aligned}$$

el cual lo denotaremos como ${}_{G^\varphi}H_H$. Notemos que también es transitivo, y

$${}_{G^\varphi}H_H \cong \frac{G\times H}{\{(\varphi(h),h) \mid h\in H\}}$$

como (G,H)-biconjunto.

Notación 1.0.6. Daremos la notación de algunos de los biconjuntos más importantes para esta tesina, pues se usarán con regularidad

- Sea H un subgrupo de G, i la inclusión de H en G, entonces al (H,G)-biconjunto ${}_{H^i}G_G$, lo denotaremos por Res^G_H.
- Sea H un subgrupo de G, i la inclusión de H en G, entonces al (G,H)-biconjunto ${}_GG_{^iH}$, lo denotaremos por Ind^G_H.
- Sea N un subgrupo normal de G. entonces al $(G,G/N)$-biconjunto ${}_{G^\pi}G/N_{G/N}$ donde $\pi : G \longrightarrow G/N$ es la proyección, lo denotaremos como $Inf^G_{H/N}$.
- Sea N un subgrupo normal de G. entonces al $(G/N,G)$-biconjunto ${}_{G/N}G/N_{G^\pi}$ donde $\pi : G \longrightarrow G/N$ es la proyección, lo denotaremos como $Def^G_{H/N}$.
- Dados G, H grupos y $\varphi : G \longrightarrow H$ un isomorfismo, entonces al (G,H)-biconjunto ${}_{G^\varphi}H_H$, lo denotaremos como $Iso(\varphi)$, o Iso^H_G si el isomorfismo φ es claro en el contexto.

Definición 1.0.7. (El producto $*$). Sean G, H, y K grupos, Para los subgrupos $E \leq G \times H$, y $F \leq H \times K$, definimos

$$E * F := \{(g,k) \in G \times K \mid \exists h \in H, \text{tal que } (g,h) \in E \wedge (h,k) \in F\}.$$

Proposición 1.0.8. Dados G, H y K grupos. Sean $\alpha : H \longrightarrow G$ y $\varphi : K \longrightarrow H$ homomorfismos de grupos, entonces

- ${}_{K^\varphi}H_H \circ_{H^\alpha} G_G \cong_{K^{\alpha\circ\varphi}} G_G$ como (K,G)-biconjuntos.
- ${}_GG_{^\alpha H} \circ_H H_{^\varphi K} \cong_G G_{^{\alpha\circ\varphi}K}$ como (G,K)-biconjuntos.

Demostración. La siguientes funciones son isomorfismo de biconjuntos

$$\begin{aligned} f :{}_{K^\varphi} H_H \circ_{H^\alpha} G_G &\longrightarrow_{K^{\alpha\circ\varphi}} G_G \\ (h,_H g) &\longmapsto \alpha(h)g. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g :\ {}_GG_{^\alpha H} \circ_H H_{^\varphi K} &\longrightarrow_G G_{^{\alpha\circ\varphi}K} \\ (g,_H h) &\longmapsto g\alpha(h). \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 1.0.9. Dados G, H y L grupos. Sean $\alpha : H \longrightarrow G$ y $\varphi : H \longrightarrow L$ homomorfismos de grupos, entonces

$${}_GG_{^\alpha H} \circ_{H^\varphi} L_L \cong \frac{G \times L}{\{(\alpha(h),\varphi(h)) \mid h \in H\}}$$

Demostración. La siguiente función es un isomorfismo de (G, L)-biconjuntos

$$\begin{aligned} f : {}_G G_{\alpha H} \circ_{H^{\varphi}} L_L &\longrightarrow \frac{G \times L}{\{(\alpha(h), \varphi(h)) \mid h \in H\}} \\ (g,_H l) &\longmapsto \overline{(g, l)}. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.0.10. Dados G, H y K grupos. Sean $\varphi : H \longrightarrow G$ y $\alpha : K \longrightarrow G$ homomorfismos de grupos, entonces

$${}_{H^{\varphi}} G_G \circ_G G_{\alpha K} \cong_{H^{\varphi}} G_{\alpha K}.$$

Demostración. Definamos a

$$\begin{aligned} f : {}_{H^{\varphi}} G_G \circ_G G_{\alpha K} &\longrightarrow_{H^{\varphi}} G_{\alpha K} \\ (g,_G l) &\longmapsto gl. \end{aligned}$$

Notemos que $h \cdot f(g,_G l) \cdot k = \varphi(h) g l \alpha(k) = f(h \cdot (g,_G l) \cdot k)$, para todos $h \in H$, $k \in K$ y $g, l \in G$, no es difícil demostrar que f es un isomorfismo de (H, K)-biconjuntos. □

Definición 1.0.11. Dado un grupos G. Decimos que (B, A) una sección de G, si $B \leq G$ y A es un subgrupo normal de B.

Lema 1.0.12. (Descomposición de Bouc) Sean G y H grupos, si L es un subgrupo de $H \times G$, entonces existen secciones (D, C) y (A, B) de H y G respectivamente, tales que existe un isomorfismo de grupos $f : C/D \longrightarrow B/A$ tal que

$$\frac{G \times H}{L} \cong Ind_D^G \circ Inf_{D/C}^D \circ Iso(f) \circ Def_{B/A}^B \circ Res_B^G.$$

Demostración. La demostración se encuentra en [1].

Dados H y G grupos, y L un subgrupo de $H \times G$, definiremos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} P_1(L) &= \{h \in H \mid \exists\ g \in G \text{ tal que } (h, g) \in L\}, \\ P_2(L) &= \{g \in G \mid \exists\ h \in H \text{ tal que } (h, g) \in L\}, \\ K_1(L) &= \{h \in H \mid (h, 1) \in L\}, \\ K_2(L) &= \{g \in G \mid (1, g) \in L\}. \end{aligned}$$

No es difícil demostrar que $P_1(L)$ y $P_2(L)$ son subgrupos de H y G respectivamente, y que $K_i(L)$ es un subgrupo normal de $P_i(L)$ para $i = 1, 2$.

□

Lema 1.0.13. (Formula de Mackey para biconjuntos): Dados G, H y K grupos. Si L es un subgrupo de $H \times G$, y M es un subgrupo de $K \times G$. entonces existe un isomorfismo de (K, G)-biconjuntos entre

$$\frac{K \times H}{M} \circ \frac{H \times G}{L} \cong \bigsqcup_{h \in [P_2(M) \backslash H / P_1(L)]} \frac{K \times G}{M *^{(h,1)} L}$$

donde $[P_2(M) \setminus H/P_1(L)]$ es un conjunto de representaste de las clases dobles.

Demostración. La demostración se puede ver en [1] $\square$

Definición 1.0.14. Dado una clase de grupos finitos Ω, y para todos H y G en Ω, damos un subconjunto $\Theta(H, G)$ del conjunto de todos los subgrupos de $H \times G$, y tales conjuntos cumplen que:

- Para todos G, y H elementos de Ω, el conjunto $\Theta(G, H)$ es cerrado bajo $H \times G$-conjugación, i.e. si X está en $\Theta(G, H)$, entonces ${}^{(g,h)}X$ está en $\Theta(G, H)$, para todo $(g, h) \in G \times H$.
- Para todos G, H, y K en Ω, si E es elemento de $\Theta(G, H)$, y F elemento de $\Theta(H, K)$, entonces $E * F$ es elemento de $\Theta(G, K)$.
- Además, para todo G en Ω, el subgrupo

$$\Delta(G) := \{(g, g) | g \in G\}$$

es elemento de $\Theta(G, G)$.

Podemos definir una categoría $D(\Omega, \Theta)$, tal que los Objetos de D son los elementos de Ω, y para todos H y K en Ω, podemos definir

$$Hom_D(H, K) = \left\langle \left\lfloor \frac{K \times H}{E} \right\rfloor \mid E \in \Theta(K, H) \right\rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq B(K \times H),$$

donde la composición es la extensión lineal de la definición 1.0.13, y la identidad en $Hom_D(G, G)$, es el elemento $G \times G/\Delta(G)$. A esta categoría la llamaremos una categoría de biconjuntos.

A los funtores que van de la categoría $D = D(\Omega, \Theta)$ a la categoría de los R-módulos, los llamamos funtores de biconjuntos, y a la clase de estos funtores la denotaremos por $F_{D,R}$

Decimos que una categoría $D = D(\Omega, \Theta)$ es repleta si se cumplen las siguientes condiciones

- Para todo G y H elementos de Ω, se tiene que $\Theta(G, H)$ es el conjunto de todos los subgrupos de $G \times H$.
- Para todo H elemento de Ω, y para todos subgrupos L y K de H tales que $L \trianglelefteq K \trianglelefteq H$, si un grupo T es isomorfo a K/L entonces T está en Ω

Capítulo 2

Funtores de Green

En este capitulo daremos dos definiciones de funtores de Green en biconjuntos. A pesar de que cada una de estas definiciones tiene diferentes hipótesis sobre la categoría de biconjuntos, daremos una demostración de que las dos definiciones son equivalentes bajo las hipótesis adecuadas.
Dados H, K grupos y un homomorfismo de grupos $\varphi : H \longrightarrow K$, denotaremos como:

$$\begin{aligned} D^{\varphi} &:= \{(h, \varphi(h)) \mid h \in H\}, \\ {}^{\varphi}D &:= \{(\varphi(h),) \mid h \in H\}. \end{aligned}$$

Primero daremos la definición dada por Bouc en el libro [1].

Definición 2.0.1. Sea $D = D(\Omega, \Theta)$ una categoría de biconjuntos, Sea $A \in F_{D,R}$, decimos que A es un funtor de Green en biconjuntos si :

1. Para todo $H \in \Omega$, se tiene que $A(H)$ es una R-álgebra unitaria, y si para todo $\varphi : H \longrightarrow K$ homomorfismo de grupos tal que $D^{\varphi} \in \Theta(H, K)$ se tiene que
$$A\left(\frac{H \times K}{D^{\varphi}}\right) : A(K) \longrightarrow A(H)$$
es homomorfismo de R- álgebras.

2. Las Fórmulas de Frobenius
Dados H y G en Ω, y $\varphi : H \longrightarrow K$ homomorfimso de grupos tal que si D^{φ} está en $\Theta(H, K)$ y si ${}^{\varphi}D$ está en $\Theta(K, H)$, entonces que para todo $a \in A(H)$ y para todo $b \in A(K)$:
$$\left(A\left(\frac{K \times H}{{}^{\varphi}D}\right)(a)\right) \cdot b = A\left(\frac{K \times H}{D^{\varphi}}\right)\left(a \cdot \left(A\left(\frac{H \times K}{D^{\varphi}}\right)(b)\right)\right)$$

y

$$b \cdot \left(A \left(\frac{K \times H}{{}^{\varphi}D} \right) (a) \right) = A \left(\frac{K \times H}{{}^{\varphi}D} \right) \left(\left(A \left(\frac{H \times K}{D^{\varphi}} \right) (b) \right) \cdot a \right)$$

Ahora daremos la Definición de funtor de Green dada en el articulo [5],

Definición 2.0.2. Dada una categoría de biconjuntos $D = D(\Omega, \Theta)$, Decimos que una función τ es natural por la izquierda, si para todos H, L, G en Ω, y $\alpha \in Hom_D(G, L)$, se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A(G) \times A(H) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "{(A(\alpha), Id_H)}"'] & A(G \times H) \arrow[d, "A(\alpha \times Id_H)"] \\
A(L) \times A(H) \arrow[r, "\tau"] & A(L \times H).
\end{tikzcd}$$

Análogamente podemos definir que una función sea natural por la derecha. Decimos que una función es natural si es natural por la izquierda y por la derecha.

Definición 2.0.3. Sea $D = D(\Omega, \Theta)$ una categoría de biconjuntos repleta y cerrada bajo productos, y sea $A \in F_{D,R}$. Decimos que A es funtor de Green en bicojuntos si para todo G, y H elementos de Ω, existe un función R-lineal y natural

$$\times : A(G) \times A(H) \longrightarrow A(G \times H),$$

tal que satisface:

1. Dados G, H, K elementos de Ω, y $f : (G \times H) \times K \longrightarrow G \times (H \times K)$ el isomorfismo canónico. Se tiene que para todos $a \in A(G)$, $b \in A(H)$ y $c \in A(K)$
$$A(f)((a \times b) \times c) = a \times (b \times c).$$

2. Existe un elemento ε en $A(1)$ tal que
$$A({}_G 1 \times G_{1 \times G})(\varepsilon \times a) = a = A({}_G G \times 1_{G \times 1})(a \times \varepsilon),$$
para todo G elemento de Ω

Teorema 2.0.4. Sea $D = D(\Omega, \Theta)$ una categoría de biconjuntos repleta y cerrada bajo producto. Entonces la Definición 2.0.3 es equivalente a la Definición 2.0.1.

Demostración. Para demostrar que la Definición 2.0.1 implica la Definición 2.0.3 primero tenemos que definir la función $\times$. Sean G, y H elementos de Ω, entonces definimos la función

$$\begin{aligned} \times : A(G) \times A(H) &\longrightarrow A(G \times H) \\ (a, b) &\longmapsto A({}_{G \times H}{}^{P_2}G_G)(a) \cdot A({}_{G \times H}{}^{P_1}H_H)(b). \end{aligned}$$

Donde P_1 y P_2 son la primera proyección y la segunda proyección respectivamente. Ahora demostraremos que $\times$ cumple con todas las propiedades de la Definición 2.0.3:

- R-bilineal.
  Dados G, y H elementos de Ω, la función
  $$\times : A(G) \times A(G) \longrightarrow A(G \times H)$$
  es R-lineal, ya que $A({}_{G\times H^{P_1}}H_H)$ y $A({}_{G\times H^{P_2}}G_G)$ son homomorfismo de R-álgebras.

- Naturalidad.
  Por la bilinealidad de $\times$, basta demostrar la naturalidad para los biconjuntos transitivos. Primero demostraremos que $\times$ es natural por la izquierda.
  Sean G, H, y L elementos de Ω, y ${}_LX_G$ un (L, G)-biconjunto. Ahora demostremos que el siguiente diagrama conmuta
  $$\begin{tikzcd} A(G) \times A(H) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "(A({}_LX_G),Id_H)"'] & A(G \times H) \arrow[d, "A({}_{L\times H}X\times H_{G\times H})"] \\ A(L) \times A(H) \arrow[r, "\times"] & A(L \times H), \end{tikzcd}$$
  es decir, lo que debemos demostrar es que
  $$A\left({}_{L\times H^{P_1}}L_L \circ_L X_G\right)(a) \cdot A({}_{L\times H^{P_2}}H_H)(b)$$
  es igual a
  $$A\left({}_{L\times H}X \times H_{G\times H}\right)\left(A({}_{G\times H^{P_1}}G_G)(a) \cdot A({}_{G\times H^{P_2}}H_H)(b)\right).$$

  Notemos que los elementos de la descomposición de Bouc (Lema 1.0.12) se ven de la forma ${}_{L^\varphi}G_G$ con $\varphi : L \longrightarrow G$ un homomorfimo de grupos, o de la forma ${}_LL_{\rho G}$ con $\rho : G \longrightarrow L$ un homomorfismo de grupos. Ahora demostraremos que el diagrama anterior conmuta para todos los elementos en la descomposición de Bouc.

  1. Primer caso ${}_{L^\varphi}G_G$.
     $$\begin{tikzcd} A(G) \times A(H) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "(A({}_{L^\varphi}G_G),Id_H)"'] & A(G \times H) \arrow[d, "A({}_{L\times H^{(\varphi,1)}}G\times H_{G\times H})"] \\ A(L) \times A(H) \arrow[r, "\times"] & A(L \times H). \end{tikzcd}$$
     Sean a en $A(G)$, b en $A(H)$, por hipótesis $A\left({}_{L\times H^{(\varphi,1)}}G \times H_{G\times H}\right)$ es un homomorfismo de R-álgebra, así que
     $$A\left({}_{L\times H^{(\varphi,1)}}G \times H_{G\times H}\right)\left(A({}_{G\times H^{P_1}}G_G)(a) \cdot A({}_{G\times H^{P_2}}H_H)(b)\right)$$

es igual a

$$A\left({}_{L\times H^{(\varphi,1)}}G\times H_{G\times H}\circ_{G\times H^{P_1}} G_G\right)(a)\cdot A\left({}_{L\times H^{(\varphi,1)}}G\times H_{G\times H}\circ_{G\times H^{P_2}} H_H\right)(b).$$

Ahora por la Proposición 1.0.8

$$\begin{aligned}{}_{L\times H^{(\varphi,1)}}G\times H_{G\times H}\circ_{G\times H^{P_1}} G_G &\cong_{L\times H^{P_1\circ(\varphi,1)}} G_G\\ &\cong_{L\times H^{\varphi\circ P_1}} G_G,\end{aligned}$$

como $(L\times H, G)$-biconjuntos, y

$${}_{L\times H^{(\varphi,1)}}G\times H_{G\times H}\circ_{G\times H^{P_2}} H_H\cong_{L\times H^{P_2}} H_H$$

como $(L\times H, H)$-biconjuntos. Por lo tanto

$$A\left({}_{L\times H^{(\varphi,1)}}G\times H_{G\times H}\right)\left(A({}_{G\times H^{P_1}}G_G)(a)\cdot A({}_{G\times H^{P_2}}H_H)(b)\right)$$

es igual a

$$A\left({}_{L\times H^{P_1}}L_L\circ_{L^{\varphi}} G_G\right)(a)\cdot A({}_{L\times H^{P_2}}H_H)(b).$$

Por lo tanto el diagrama conmuta.

2. Segundo caso ${}_L L_{\rho G}$.
Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A(G)\times A(H) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "(A({}_L L_{\rho G}), Id_H)"'] & A(G\times H) \arrow[d, "A({}_{L\times H}L\times H_{(1,\rho)_{G\times H}})"] \\ A(L)\times A(H) \arrow[r, "\times"] & A(L\times H). \end{tikzcd}$$

Sean $a\in A(G)$, y $b\in A(H)$. Si seguimos el diagrama, obtenemos

$$\left(A\left({}_L L_{\rho G}\right)(a)\right)\times b = A\left({}_{L\times H^{P_1}}L_L\circ_L L_{\rho G}\right)(a)\cdot A\left({}_{L\times H^{P_2}}H_H\right)(b),$$

y que

$$A\left({}_{L\times H}L\times H_{(\rho,1)_{G\times H}}\right)(a\times b)$$

es igual a

$$A\left({}_{L\times H}L\times H_{(\rho,1)_{G\times H}}\right)\left(A\left({}_{G\times H^{P_1}}G_G\right)(a)\cdot A\left({}_{G\times H^{P_2}}H_H\right)(b)\right).$$

Notemos que por la Proposición 1.0.8

$$_{L\times H^{P_2}}H_H \cong_{G\times H^{(\rho,1)}} L\times H_{L\times H} \circ_{L\times H^{P_2}} H_H.$$

De donde concluimos que

$$A\left(_{L\times H}L\times H_{(\rho,1)}{}_{G\times H}\right)\left(A\left(_{G\times H^{P_1}}G_G\right)(a)\cdot A\left(_{G\times H^{P_2}}H_H\right)(b)\right)$$

es igual a

$$A\left(_{L\times H}L\times H_{(\rho,1)}{}_{G\times H}\right)\left(A\left(_{G\times H^{P_1}}G_G\right)(a)\cdot A\left(_{G\times H^{(\rho,1)}}L\times H_{L\times H}\circ_{L\times H^{P_2}} H_H\right)(b)\right).$$

Usando Frobenius, lo anterior nos queda

$$A\left(_{L\times H}L\times H_{(\rho,1)}{}_{G\times H}\ \circ_{G\times H^{P_1}} G_G\right)(a)\cdot A\left(_{L\times H^{P_2}}H_H\right)(b),$$

notemos que por las proposiciones 1.0.8 y 1.0.9 tenemos que

$$_{L\times H}L\times H_{(\rho,1)}{}_{G\times H}\ \circ_{G\times H^{P_1}} G_G \qquad \text{y} \qquad _{L\times H^{P_1}}L_L\circ_L L_{\rho G}$$

Son isomorfos como $((L\times H),(G))$- biconjuntos, por lo tanto el diagrama anterior conmuta.

De donde concluimos que el diagrama conmuta con todos los elementos de la descomposición de Bouc, Ahora demostraremos que si el diagrama conmuta para el (L,G)-biconjunto $_LX_G$ y para el (G,N)-biconjunto $_GW_N$, entonces el diagrama conmuta para $_LX_G\circ_G W_N$. Primero notemos que los siguientes conjuntos

$$_LX_G\circ_G W_N\times_H H_H \qquad \text{y} \qquad _{L\times H}(X\times H)_{G\times H}\circ_{G\times H}(W\times H)_{N\times H}$$

son isomorfos como $((L\times H),(N\times H))$- biconjuntos, con el isomorfismo

$$\begin{aligned} _LX_G\circ_G W_N\times_H H_H &\longrightarrow_{L\times H} (X\times H)_{G\times H}\circ_{G\times H}(W\times H)_{N\times H}\\ ((x,_G\ w),h) &\longmapsto ((x,1),_{G\times H}\ (w,h)) \end{aligned}$$

Por un lado tenemos que

$$A\left(_{L\times H}X\circ W\times H_{N\times H}\right)\left(A(_{G\times H^{P_1}}G_G)(a)\cdot A(_{N\times H^{P_2}}H_H)(b)\right).$$

es igual a

$$A\left(_{L\times H}(X\times H)_{G\times H}\circ_{G\times H}(W\times H)_{N\times H}\right)\left(A(_{G\times H^{P_1}}G_G)(a)\cdot A(_{N\times H^{P_2}}H_H)(b)\right),$$

ya que el diagrama conmuta para ${}_GW_N$, entonces es igual a

$$A\left({}_{L\times H}X \times H_{G\times H}\right)\left(A({}_{G\times H^{P_1}}G_G \circ_G W_N)(a) \cdot A({}_{G\times H^{P_1}}H_H)(b)\right)$$

lo cual es igual a

$$A({}_{L\times H^{P_1}}L_L \circ_L X_G \circ_G W_N)(a) \cdot A({}_{L\times H^{P_2}}H_H)(b).$$

Por lo tanto el diagrama conmuta para ${}_LX_G \circ_G W_N$, es decir el diagrama conmuta para todo elemento de $Hom_D(G, L)$, para todos los elementos G, y L en Ω. i.e. $\times$ es natural por la izquierda. La demostración de que $\times$ es natural por la derecha es análoga.

- Asosiatividad de $\times$.
  Sean G, H y K elementos de Ω, y

  $$\alpha : (G \times H) \times K \longrightarrow G \times (H \times K)$$

  el isomorfismo canónico. Para demostrar la asociatividad de $\times$ tememos que demostrar que el siguiente diagrama conmuta.

  $$\begin{tikzcd} A(G)\times A(H)\times A(K) \arrow[r, "{(1,\times)}"] \arrow[d, "{(\times, Id_H)}"'] & A(G)\times A(H\times K) \arrow[d, "\times"] \\ A(G\times H)\times A(K) \arrow[r, "\alpha\circ\times"] & A(G\times H\times K). \end{tikzcd}$$

  Sean $a \in A(G)$, $b \in A(H)$, y $c \in A(K)$. Por definición

  $$\begin{aligned}(a\times b)\times c =& A\left({}_{(G\times H)\times K^{P_1}}G\times H_{G\times H}\right)\left(A({}_{G\times H^{P_1}}G_G)(a)\cdot A({}_{G\times H^{P_2}}H_H)(b)\right)\\ &\cdot A({}_{(G\times H)\times K^{P_2}}K_K)(c),\end{aligned}$$

  ya que $A({}_{(G\times H)\times K^{P_1}}G\times H_{G\times H})$ es un homomorfismo de R-álgebras, obtenemos

  $$\begin{aligned}(a\times b)\times c =& A\left({}_{(G\times H)\times K^{P_1}}G\times H_{G\times H}\circ_{G\times H} G_G\right)(a)\\ &\cdot A\left({}_{(G\times H)\times K^{P_1}}G\times H_{G\times H}\circ_{G\times H} H_H\right)(b)\cdot A({}_{(G\times H)\times K^{P_2}}K_K)(c),\end{aligned}$$

  por la proposición 1.0.8, obtenemos los siguientes isomorfismo de biconjuntos.

  $$\begin{aligned}{}_{(G\times H)\times K^{P_1}}G\times H_{G\times H}\circ_{G\times H^{P_1}} G_G &\cong {}_{(G\times H)\times K^{P_1\circ P_1}} G_G\\ {}_{(G\times H)\times K^{P_1}}G\times H_{G\times H}\circ_{G\times H^{P_2}} H_H &\cong {}_{(G\times H)\times K^{P_1\circ P_2}H} H_H.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}(a\times b)\times c =& A\left({}_{(G\times H)\times K^{P_1\circ P_1}}G_G\right)(a)\cdot A\left({}_{(G\times H)\times K^{P_1\circ P_2}H}H_H\right)(b)\\ &\cdot A({}_{(G\times H)\times K^{P_2}}K_K)(c),\end{aligned}$$

por ser $A(\alpha)$ un homomorfismo de R-álgebra, y la proposición 1.0.8

$$\begin{aligned}A(\alpha)\left((a\times b)\times c\right) =& A\left({}_{G\times (H\times K)^{P_1}}G_G\right)(a)\cdot A\left({}_{G\times (H\times K)^{P_2\circ P_1}H}H_H\right)(b)\\ &\cdot A({}_{G\times (H\times K)^{P_2\circ P_2}}K_K)(c).\end{aligned}$$

Por otro lado $a\times(b\times c)$ es igual a

$$A\left({}_{G\times (H\times K)^{P_1}}G_G\right)(a)\cdot A\left({}_{G\times (H\times K)^{P_2}}H\times K_{H\times K}\right)\left(A\left({}_{H\times K^{P_1}}H_H\right)(a)\cdot A\left({}_{H\times K^{P_2}}K_K\right)(c)\right).$$

Ya que $A\left({}_{G\times (H\times K)^{P_2}}H\times K_{H\times K}\right)$ es un homomorfismo de R-álgebras y la Proposición 1.0.8, obtenemos que $a\times(b\times c)$ es igual a

$$\begin{aligned}A(\alpha)\left((a\times b)\times c\right) =& A\left({}_{G\times (H\times K)^{P_1}}G_G\right)(a)\cdot A\left({}_{G\times (H\times K)^{P_2\circ P_1}H}H_H\right)(b)\\ &\cdot A({}_{G\times (H\times K)^{P_2\circ P_2}}K_K)(c).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$a\times(b\times c) = (a\times b)\times c.$$

Es decir, $\times$ es asociativo.

- Unidad.
  Sea ε la unidad multiplicativa de $A(1)$. Sean $G\in\Omega$ y $a\in A(G)$, notemos que

$$\begin{aligned}A({}_GG_{G\times 1})(a\times\varepsilon) &= \left(A\left({}_{G\times 1}G_G\right)(a)\cdot A({}_{G\times 1}1_1)(\varepsilon)\right)\\ &= A\left({}_GG\times 1_{G\times 1}\circ_{G\times 1^{P_1}}G_G\right)(a)\cdot A\left({}_GG\times 1_{G\times 1}\circ_{G\times 1^{P_2}}1_1\right)(\varepsilon),\end{aligned}$$

por la Proposición 1.0.8 y el hecho de que $A({}_{G\times 1}1_1)$ es un homomorfismo de R-álgebra, obtenemos que

$$\begin{aligned}A({}_GG_{G\times 1})(a\times\varepsilon) &= A({}_GG_G)(a)\cdot\varepsilon_G\\ &= a\end{aligned}$$

donde ε_G es la unidad de $A(G)$.

Ahora demostraremos que la Definición 2.0.3 implica la Definición 2.0.1. Primero demostraremos que $A(G)$ es una R-álgebra para todo G en Ω.
Definamos el homomorfismo

$$\begin{aligned} \cdot\ : A(G) \times A(G) &\longrightarrow A(G) \\ (a,b) &\longmapsto A({}_{G^d}G \times G_{G\times G})(a \times b) \end{aligned}$$

donde d es la función diagonal

$$\begin{aligned} d : G &\longrightarrow G \times G \\ a &\longmapsto (a,a). \end{aligned}$$

De ahora en adelante denotaremos el biconjunto ${}_{G^d}G \times G_{G\times G}$ por ${}_dG \times G$

- Asociatividad de $\cdot$.
  Por la naturalidad de $\times$, obtenemos los siguientes diagramas conmutativos.

$$\begin{tikzcd} A(G\times G)\times A(G) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "(A({}_dG\times G), Id_G)"'] & A\left((G\times G)\times G\right) \arrow[d, "A\left({}_{(d,1)}(G\times G)\times G\right)"] \\ A(G)\times A(G) \arrow[r, "\times"] & A(G\times G). \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A(G)\times A(G\times G) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "(Id_G, A({}_dG\times G))"'] & A\left(G\times (G\times G)\right) \arrow[d, "A\left({}_{(1,d)}G\times (G\times G)\right)"] \\ A(G)\times A(G) \arrow[r, "\times"] & A(G\times G) \end{tikzcd}$$

  Donde ${}_{(1,d)}G \times (G \times G)$ es ${}_{G\times G^{(1,d)}}G \times (G \times G)_{G\times(G\times G)}$, y ${}_{(d,1)}(G \times G) \times G$ es ${}_{G\times G^{(d,1)}}(G \times G) \times G_{(G\times G)\times G}$.
  Usando la conmutatividad del primer diagrama, tenemos

$$\begin{aligned} (a\cdot b)\cdot c &= A\left({}_dG\times G\right)\left((A({}_dG\times G)(a\times b))\times c\right) \\ &= A\left({}_dG\times G\right)\Big(A({}_{(d,1)}(G\times G)\times G)((a\times b)\times c)\Big) \\ &= A({}_dG\times G_{G\times G} \circ_{G\times G^{(d,1)}} (G\times G)\times G_{(G\times G)\times G})((a\times b)\times c). \end{aligned}$$

  Por hipótesis

$$A(\psi)\left((a\times b)\times c\right) = a\times (b\times c).$$

donde $\psi : (G \times G) \times G \longrightarrow G \times (G \times G)$ es el isomorfismo canónico.
Por lo tanto $(a \times b) \times c$ es igual a

$$A({}_dG \times G_{G\times G} \circ_{G\times G^{(d,1)}} (G \times G) \times G_{(G\times G)\times G} \circ \psi) \, (a \times (b \times c)) \, .$$

Ahora, por la conmutatividad del segundo diagrama

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) &= A \left({}_dG \times G\right) (a \times (A({}_dG \times G)(b \times c))) \\ &= A({}_dG \times G) \left(A({}_{(1,d)}G \times (G \times G))(a \times (b \times c))\right), \end{aligned}$$

notemos que

$${}_dG \times G_{G\times G} \circ_{G\times G^{(d,1)}} (G \times G) \times G_{(G\times G)\times G} \circ_\psi G \times (G \times G)_{G\times(G\times G)}$$

es isomorfo a

$${}_dG \times G_{G\times G} \circ_{G\times G^{\psi\circ(d,1)}} G \times (G \times G)_{G\times(G\times G}$$

como $(G, G \times (G \times G))$-biconjuntos. Claramente $\psi \circ (d, 1) = (1, d)$, por lo tanto

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

- Distributividad de $\cdot$.
  Sean $G \in \Omega$, a, b, c en $A(G)$, y $\lambda \in R$. Por definición

  $$a \cdot (b + c) = A({}_dG \times G) \, (a \times (b + c))$$

  por ser $\times$ una función R-lineal, y el hecho que $A({}_dG \times G)$ abre sumas, obtenemos

  $$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= A({}_dG \times G) \, ((a \times b) + (a \times c)) \\ &= A({}_dG \times G)(a \times b) + A({}_dG \times G)(a \times c) \\ &= a \cdot b + a \cdot c. \end{aligned}$$

  Análogamente podemos demostrar que $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. También notemos que

  $$\begin{aligned} a \cdot (\lambda b) &= A({}_dG \times G) \, (a \times \lambda b) \\ &= A({}_dG \times G) \, (\lambda(a \times b)) \\ &= \lambda \left(A({}_dG \times G) \, (a \times b)\right) \\ &= \lambda a \cdot b \end{aligned}$$

- La existencia de la unidad multiplicativa de $A(G)$.
  Por hipótesis existe ε en $A(1)$ tal que
  $$a \times \varepsilon \cong a \cong \varepsilon \times a$$
  para todo $a \in A(G)$. Definamos
  $$\varepsilon_G := A({}_G 1_1)(\varepsilon).$$
  Ahora demostremos que ε_G es la unidad multiplicativa de $A(G)$. Sea $a \in A(G)$, entonces
  $$\begin{aligned}\varepsilon_G \cdot a &= A({}_dG \times G)\left(A({}_G 1_1)(\varepsilon) \times a\right)\\ &= A\left({}_dG \times G_{G\times G} \circ_{G\times G} 1 \times G_{G\times G}\right)(\varepsilon \times a)\\ &= A\left({}_G 1 \times G_{1\times G}\right)(\varepsilon \times a)\\ &= a.\end{aligned}$$
  De manera análoga podemos demostrar que $a \cdot \varepsilon_G = a$. Por lo tanto $A(G)$ es una R-álgebra unitaria, para todo G en Ω.

- Dados G, H en Ω, y $\varphi : H \longrightarrow G$ un homomorfismo de grupos. Demostraremos que $A({}_H\varphi G_G)$ es un morfismo de R-álgebras.
  Por definición $A({}_H\varphi G_G)$ abre sumas y saca el producto por un escalar. Ahora, por la naturalidad de $\times$ y el hecho de que A es un funtor, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo
  $$\begin{tikzcd} A(G)\times A(G) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "{(A({}_H\varphi G_G),A({}_H\varphi G_G))}"'] & A(G\times G) \arrow[r, "A({}_dG\times G)"] \arrow[d, "A\left({}_{(\varphi,1)}G\times G\right)"'] & A(G) \arrow[d, "A({}_H\varphi G_G)"] \\ A(H)\times A(H) \arrow[r, "\times"'] & A(H\times H) \arrow[r, "A({}_d(H\times H))"'] & A(H) \end{tikzcd}$$
  Sean a, $b \in A(G)$, entonces
  $$\begin{aligned}A({}_H\varphi G_G)(a \cdot b) &= A({}_H\varphi G_G)\left(A({}_dG \times G)(a \times b)\right)\\ &= A({}_dH \times H)\left(A({}_H\varphi G_G)(a) \times A({}_H\varphi G_G)(b)\right)\\ &= A({}_H\varphi G_G)(a) \cdot A({}_H\varphi G_G)(b),\end{aligned}$$
  por lo tanto $A({}_H\varphi G_G)$ abre la multiplicación. También notemos que
  $$\begin{aligned}A({}_H\varphi G_G)(\varepsilon_G) &= A({}_H\varphi G_G)\left(A({}_G 1_1)(\varepsilon)\right)\\ &= A({}_H\varphi G_G \circ_G 1_1)(\varepsilon)\\ &= A({}_H 1_1)(\varepsilon)\\ &= \varepsilon_H.\end{aligned}$$

Así que $A({}_{H\varphi}G_G)$ es un morfismo de R-álgebra.

- La formula de Frobenius
  Por naturalidad de $\times$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A(G)\times A(G) \arrow[r, "\times"] & A(G\times G) \\
A(H)\times A(G) \arrow[r, "\times"] \arrow[u, "{(A({}_G G_{\varphi H}), Id_G)}"] \arrow[d, "{(Id_H, A({}_{H\varphi}G_G))}"'] & A(H\times G) \arrow[u, "A({}_G G_{\varphi H}\times G)"'] \arrow[d, "A(H\times {}_{H\varphi}G_G)"] \\
A(H)\times A(H) \arrow[r, "\times"'] & A(H\times H)
\end{tikzcd}$$

Sean $a\in A(H)$ y $b\in A(G)$, del diagrama anterior obtenemos que

$$\begin{aligned}
A({}_G G_{\varphi H})(a)\cdot b &= A({}_d G\times G)\left(A({}_G G_{\varphi H})(a)\times b\right)\\
&= A({}_d G\times G)\left(A({}_G G_{\varphi H}\times G)(a\times b)\right)\\
&= A\left({}_d G\times G\circ({}_G G_{\varphi H}\times G)\right)(a\times b)
\end{aligned}$$

Por el otro lado

$$\begin{aligned}
A({}_G G_{\varphi H})\left(a\cdot A({}_{H\varphi}G_G)(b)\right) &= A({}_G G_{\varphi H})\left(A({}_d H\times H)(a\times A({}_{H\varphi}G_G)(b))\right)\\
&= A\left({}_G G_{\varphi H}\circ_d H\times H\circ(H\times_{H\varphi} G_G)\right)(a\times b).
\end{aligned}$$

Ahora por la Proposición 1.0.8

$${}_G G_{\varphi H}\circ_d H\times H\circ(H\times_{H\varphi} G_G)\cong_G G_{\varphi H}\circ_{H^{(1,\varphi)\circ d}} H\times G_{H\times G},$$

de la Proposición 1.0.9, obtenemos que

$${}_G G_{\varphi H}\circ_d H\times H\circ(H\times_{H\varphi} G_G)\cong\frac{G\times H\times G}{\{(\varphi(h),h,\varphi(h))\mid h\in H\}},$$

y por la Proposición 1.0.10

$$\begin{aligned}
{}_d G\times G\circ({}_G G_{\varphi H}\times G) &={}_{G^d}\, G\times G_{G\times G}\circ_{G\times G} G\times G_{(\varphi,1)}{}_{H\times G}\\
&\cong\frac{G\times H\times G}{\{(\varphi(h),h,\varphi(h))\mid h\in H\}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$A({}_G G_{\varphi H})\left(a\cdot A({}_{H\varphi}G_G)(b)\right)=A({}_G G_{\varphi H})(a)\cdot b.$$

De manera análoga podemos demostrar que

$$b\cdot\left(A({}_G G_{\varphi H})(a)\right)=A({}_G G_{\varphi H})\left(A({}_{H\varphi}G_G)(b)\cdot a\right).$$

Concluimos que se cumplen las igualdades de Frobenius, y por lo tanto la Definición 2.0.3 es equivalente a la Definición 2.0.1.

2.1. Ejemplos

□

Ahora daremos algunos ejemplos de funtores de Green, y para ello siempre consideraremos que todas las categorías de biconjuntos son regulares y cerradas bajo producto.

Ejemplo 2.1.1.

- Anillo de Burnside.
  Dado una categoría de biconjuntos $D = D(\Omega, \Theta)$, podemos definir el funtor de R-Burnside, RB, como
  $$RB(G) := R \otimes_{\mathbb{Z}} B(G),$$
  para todo $G \in \Omega$, donde $B(G)$ es el anillo de Burnside (Definición 1.0.1), el conjunto $RB(G)$ es una R-álgebra con el siguiente producto
  $$\begin{aligned} \cdot : R \otimes B(G) \times R \otimes B(G) &\longrightarrow R \otimes B(G) \\ (r_1 \otimes [X], r_2 \otimes [Y]) &\longmapsto r_1 r_2 \otimes [X \times Y]. \end{aligned}$$
  Ahora, dados K y H elementos de Ω. Para definir a RB en los elementos de $Hom_D(H; K)$, basta definirlo en los elementos generadores. Dado $K \times H/L$ elemento de $Hom_D(H, K)$, definimos a RB en $K \times H/L$ como
  $$\begin{aligned} RB\left(\frac{K \times H}{L}\right) : B(H) &\longrightarrow B(K) \\ [X] &\longmapsto [(K \times H/L) \circ X], \end{aligned}$$
  usando la definición de 2.0.1, no es difícil demostrar que RB es un funtor de Green.

- El anillo de caracteres.
  La definición de anillo de caracteres para un grupo finito G se encuentra en la página 272 de [2]. Al anillo de caracteres de G lo denotaremos como $Char(G)$. Ahora podemos definir el funtor $Char$, de la siguiente manera. Para todo G en Ω, $Char(G)$ es el anillo de caracteres de G, el cual es una R-álgebra. Dados G y H elementos de Ω, basta definir a $Char$ en los generadores de $Hom_D(H, G)$, sea $X = H \times G/L$ elemento de $Hom_D(H, G)$, definimos
  $$\begin{aligned} Char\left(\frac{H \times G}{L}\right) : Char(G) &\longrightarrow Char(H) \\ \mu_S &\longmapsto \mu_{RX \otimes_{RG} S} \end{aligned}$$
  donde S es un RG-modulo simple y μ_S es su carácter. No es difícil demostrar que $Char$ es un funtor de Green.

- Anillo de caracteres de Brauer.
  Los caracteres de Brauer son los caracteres de los KG-módulos, donde K es un campo algebraicamente cerrado de característica p, la definición la podemos encontrar en [2]. Dado una categoría de biconjuntos $D = D(\Omega, \Theta)$, podemos definir un funtor, $Br \in F_{D,K}$, de manera análoga al ejemplo anterior. donde $Br(G)$ es el anillo de caracteres de Brauer de G, el cual es una R-álgebra.
  Dados G y H elementos de Ω y $G \times H/L \in Hom_D(H, G)$, definimos a

$$Br\left(\frac{H \times G}{L}\right) : Br(G) \longrightarrow Br(H)$$
$$\overline{\mu}_S \longmapsto \overline{\mu}_{KX \otimes_{KG} S},$$

  con lo cual podemos demostrar que Br es un funtor de Green.

- El anillo global
  Podemos ver la definición del anillo global para un grupo G en [4], el cual lo denotaremos como $\mathfrak{D}(G)$, y podemos definir un funtor $\mathfrak{D} \in F_{D,R}$, tal que para todo $G \in \Omega$, el funtor $\mathfrak{D}$ manda a G, al anillo global de G, el cual lo podemos ver como

$$\mathbf{D}(G) = \bigoplus_{\substack{H \in [S_G] \\ S \in [Irr(H]}} \mathbb{Z}[G/H, \mathbb{CG} \otimes_{\mathbb{C}H} S]$$

  donde $[S_G]$ es un conjunto de representantes de las clases de conjugación de los subgrupos de G, y $[Irr(H)]$ es un conjunto de representantes de las clases de isomorfismos de los $\mathbb{C}H$-módulos irreducibles.
  Dados G, H elementos de Ω, Para definir $\mathfrak{D}$ en los elementos de $Hom_D(G, H)$ sólo hay que definirlos en los generadores. Dado ${}_HX_G = H \times G/L \in Hom_D(G, H)$, definimos a

$$\mathfrak{D}\left({}_HX_G\right) : \mathfrak{D}(G) \longrightarrow \mathfrak{D}(H)$$
$$[G/K, \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} W] \longmapsto [{}_HX_G \circ G/K, \mathbb{C}X \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} W],$$

  la prueba de que éste es un funtor de Green en biconjuntos la encontramos en [3].

- Anillo monomial
  Dado un grupo G, al anillo monomial de G lo denotaremos como $\mathcal{D}(G)$, el cual esta definido de la siguiente manera:

$$\mathcal{D}(G) = \bigoplus_{\substack{H \in [S_G] \\ S \in [Irr_1(H]}} \mathbb{Z}[G/H, \mathbb{CG} \otimes_{\mathbb{C}H} S]$$

  donde $[S_G]$ es un conjunto de representantes de las clases de conjugación de los subgrupos de G, y $[Irr_1(H)]$ es un conjunto de representantes de las clases de isomorfismos de los $\mathbb{C}H$-módulos irreducibles de dimensión 1, el cual es un subanillo del anillo global. De la manera obvia podemos definir un subfuntor de $\mathfrak{D}$, el cual resulta es un funtor de Green en biconjuntos.

Bibliografía

[1] Serge Bouc. Biset Functors for Finite Groups. Springer, Berlin, 2010.

[2] Charles W Curtis and Irving Reiner. Representation theory of finite groups and associative algebras, volume 356. American Mathematical Soc., 1966.

[3] Karley Tatiana Cardona Echenique. El funtor global de representaciones como funtor de biconjuntos de Green. Master's thesis, Centro de Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH, 2016.

[4] Alberto G Raggi-Cardenas and Luis Valero-Elizondo. Global representation rings. Journal of Algebra, 441:426–440, 2015.

[5] Boltje Robert Raggi-Cardenas Gerardo and Luis Valero-Elizondo. The $+-$ and $+-$ constructions for biset functors. Journal of Algebra, 523:241–273, 2019.