



UNIVERSIDAD MICHOCANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM-UMSNH

DISTRIBUCIÓN DE LOS NÚMEROS PRIMOS CON PONDERACIÓN

TESIS

Que para optar por el grado de:

Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Richar Nicolás Chacón Serna

Asesor:

Dr. Eugenio Balanzario Gutiérrez

Morelia, Michoacán, México
Agosto de 2019

Agradecimientos

Esta tesis se hace con el auspicio de la beca para maestría que otorga CONACYT y al proyecto de investigación 250747 a cargo del Doctor Noé Bárcenas Torres.

Quiero expresar mi agradecimiento al Doctor Eugenio Balanzario por ser el guía para realizar este trabajo, por sus observaciones y su constante apoyo. A todo el personal del Centro de Ciencias Matemáticas (CCM) y de la UMSNH, en especial a Morelia Álvarez, Lidia González, Valdemar Orozco, Elmar Wagner y Noé Bárcenas por su aliento para finalizar este trabajo. A todos mis compañeros del CCM por su apoyo y comprensión.

A mi familia de Colombia por su gran apoyo económico y emocional para poder estar acá, a la familia Zepeda Cancino por su calidez de vivir en su casa, a Ivett Pérez por su amor y compañía, y finalmente, a la familia de doña Ofe por su comida y calidad humana.

Resumen

Demostraremos cómo las sumas ponderadas de funciones aritméticas, nos permiten generalizar el Teorema de los Números Primos con ayuda de algunas propiedades analíticas de la función zeta de Riemann. Además, veremos las oscilaciones que surgen después de codificar el conteo de los números primos con ciertas ponderaciones.

Palabras clave: Teorema tauberiano de Wiener-Ikehara; función zeta de Riemann; teoremas de oscilación de Landau; transformada de Mellin-Stieltjes; funciones aritméticas.

Abstract

We show how weighted sums of arithmetic functions, allow us to generalize the Prime Number Theorem with the help of some analytical properties of the Riemann zeta function. Furthermore, we will study the oscillations that arise after encoding the counting function of prime numbers with certain weights.

Keywords: Wiener-Ikehara tauberian Theorem; Riemann zeta function; Landau's oscillation theorems; Mellin-Stieltjes transform; arithmetic functions.

Índice general

Introducción	I
1. Preliminares	1
1.1. Funciones aritméticas	1
1.1.1. El producto de Dirichlet	2
1.2. Funciones suma con ponderación	3
1.3. Integrales de Riemann-Stieltjes	8
2. Transformada de Mellin-Stieltjes	15
2.1. Definición de la transformada	15
2.2. Regiones de convergencia	18
2.2.1. Abscisa de convergencia y abscisa de convergencia absoluta	19
2.3. Propiedades multiplicativas de la transformada	21
2.4. Propiedades analíticas de la transformada	24
3. Teorema de los Números Primos (TNP) con ponderación	25
3.1. Sucesiones de Dirac	25
3.1.1. Convolución aditiva	29
3.2. Teorema tauberiano de Wiener-Ikehara	31
3.3. Continuación analítica de ζ y propiedades básicas	38
3.4. TNP con ponderación	41
4. Teoremas de oscilación	45
4.1. Motivación	45
4.2. Teorema de oscilación de Landau	46
4.2.1. Versión cualitativa	46
4.2.2. Versión cuantitativa	51

Introducción

Los matemáticos que estudian la aritmética (teoría de números), desde Euclides, pero sobre todo desde Euler, se han esforzado por reducir progresivamente la imprevisibilidad de la aparición de los números primos entre la sucesión de números enteros positivos,

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$$

Sea $x > 1$ un número real. La cantidad de primos que no exceden a x se denota usualmente por

$$\pi(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ primo}}} 1.$$

Esta función mide qué tan abundantes son los números primos entre los enteros. Examinaremos los resultados más básicos concernientes a ella. Se observa que $\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x) = \infty$ y se plantea el problema de expresar $\pi(x)$ en función de x cuando x tiende hacia el infinito. El problema se ha resuelto (parcialmente), de manera cada vez más precisa por los trabajos de Legendre, Gauss, Chebyshev, Riemann, Hadamard, La Vallée Poussin, Landau, etc.

Como primer resultado, Gauss y Legendre conjeturaron a finales del siglo XVIII que para x suficientemente grande, $\pi(x)$ tiene densidad asintótica $1/\log x$. Más precisamente,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1. \tag{1}$$

Esta relación se conoce como el Teorema de los Números Primos (TNP). Riemann fue el primero en descubrir el magnífico hecho de que éste teorema aritmético y el problema general, están estrechamente relacionados con las propiedades analíticas de su función zeta (ver Riemann (1859)), (mediante $\Re(s)$ se denota la parte real de s),

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \Re(s) > 1.$$

A finales del siglo XIX, Hadamard y La Vallée Poussin de manera independiente, demostraron por primera vez (1). En los años 1931 y 1932, Ikehara y Wiener demuestran el TNP como consecuencia inmediata de algunos teoremas tauberianos desarrollados por Wiener (ver Ikehara (1931) y Wiener (1932)).

Con el fin de desarrollar una teoría para demostrar (1), en vez de enfrentarse directamente con $\pi(x)$, los teóricos de la aritmética consideran primero la función de Chebyshev definida por

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

donde $\Lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de von Mangoldt dada mediante

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, \text{ para algún primo } p \text{ y } k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como veremos en la Proposición 1.1, el TNP es equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Más aún, en Ingham (1932), se demuestra en el Teorema 23 que

$$\psi(x) - x = O(xe^{-a\sqrt{\log x}}), \quad (x \rightarrow \infty).$$

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\log t} = O(xe^{-a\sqrt{\log x}}), \quad (x \rightarrow \infty),$$

donde a es una constante absoluta positiva ($f(x) = O(g(x))$, $(x \rightarrow \infty)$ significa que $|f(x)| \leq Cg(x)$, para todos los valores de x suficientemente grandes y C es una constante positiva). Se sabe que la mejor estimación posible es

$$\psi(x) - x = O(x^{1/2+\epsilon}) \quad (x \rightarrow \infty), \text{ para cualquier } \epsilon > 0, \quad (2)$$

la cual es equivalente a la Hipótesis de Riemann (ver Teorema 8.12 de Bateman & Diamond (2004)).

Nuestro primer objetivo en la tesis será demostrar el TNP via el Teorema tauberiano de Wiener-Ikehara (ver sección 3.2) que demostraremos usando ideas del análisis de Fourier. El

segundo objetivo (presentado en la sección 3.4) será generalizar el TNP mediante sumas de ponderaciones adecuadas, que son de la forma

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)W\left(\frac{n}{x}\right), \quad x \geq 1. \quad (3)$$

Aquí, $W : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es la ponderación que tomaremos como una función suficientemente suave. En particular, probaremos que si W es una función de densidad de una distribución de probabilidad, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{G(x)}{x} = 1.$$

Las funciones suma con ponderación como en (3) surgen de manera natural en la teoría analítica de números como un recurso técnico para resolver problemas concretos (ver Balanzario (2001) y Hernández (2002)).

En el Capítulo 1 definiremos los objetos aritméticos con los que trabajaremos (funciones suma con ponderación), además, definiremos la integral de Riemann-Stieltjes la cual será una herramienta básica y adecuada para nuestros propósitos de estudiar tales objetos. En el Capítulo 2, introduciremos la transformada de Mellin-Stieltjes, la cual nos permitirá representar nuestros objetos aritméticos en el mundo de lo continuo (variable compleja), y en este mundo es en el que están enunciados los teoremas más importantes de la tesis, como lo son el Teorema tauberiano de Wiener-Ikehara en el Capítulo 3, y las versiones cualitativa y cuantitativa del Teorema de oscilación de Landau en el Capítulo 4.

Nuestro tercer objetivo será demostrar que la estimación en (2) no es cierta cuando $\epsilon = 0$, y más aún, que la función $\psi(x) - x$ oscila una infinidad de veces cuando x tiende hacia el infinito. Es decir, que existen sucesiones $x_n \rightarrow \infty$ y $u_n \rightarrow \infty$ tales que

$$\psi(x_n) - x_n > \frac{1}{15}x_n^{1/2}, \quad \psi(u_n) - u_n < -\frac{1}{15}u_n^{1/2},$$

donde el factor $\frac{1}{15}$ se cuantifica en términos del primer cero no trivial de la función zeta de Riemann, en el sentido de que es el cero no trivial con parte imaginaria positiva más pequeña en el plano complejo.

Finalmente, en el Ejemplo 4.2 veremos como se reflejan estas oscilaciones en una función de la forma (3), que codifica el conteo de los números primos con signo positivo y negativo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Funciones aritméticas

Definición 1.1. Una **función aritmética** es una sucesión de números reales o complejos. Es decir, es una función

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C},$$

donde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Observación. Estaremos interesados únicamente en algunas funciones aritméticas con valores en \mathbb{R} , de esta forma, de ahora en adelante asumiremos esta condición.

Ejemplo 1.1.

(1) La función aritmética

$$\mathbf{1}(n) = 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

será llamada la función “uno”.

(2) La función μ de Möbius se define mediante

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^k & \text{si } n = p_1 \dots p_k, \quad p_1, \dots, p_k \text{ primos distintos,} \\ 0 & \text{si } p^2 \mid n, \quad \text{para algún primo } p. \end{cases}$$

(3) La función Λ de von Mangoldt se define mediante

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, \text{ para algún primo } p \text{ y } k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observación. Como es costumbre en teoría de números, “log” denotará el logaritmo natural.

La función de von Mangoldt juega un papel importante en el estudio de la distribución de los números primos, como veremos más adelante.

1.1.1. El producto de Dirichlet

El producto de Dirichlet, o también conocido **convolución** de Dirichlet, es una herramienta fundamental para la teoría de números multiplicativa.

Definición 1.2. Sean f y g funciones aritméticas. Definimos el **producto de Dirichlet** entre f y g , denotado $f * g$ como la función aritmética dada por

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Si definimos ahora la suma de f y g , mediante $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$, entonces esta suma, junto con el producto de Dirichlet, dan al conjunto de las funciones aritméticas la estructura de un anillo conmutativo con elemento identidad e definido por

$$e(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Propiedades básicas:

1. El inverso multiplicativo de la función μ de Möbius es $\mathbf{1}$, es decir

$$\mathbf{1} * \mu = e.$$

Para una prueba de esto ver página 12 de Balanzario (2003) o página 25 de Apostol (1980). La anterior ecuación junto con la asociatividad del producto de Dirichlet, nos proporcionan la **fórmula de inversión de Möbius**:

$$f = g * \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad g = f * \mu,$$

para cualesquiera funciones aritméticas f y g .

2. **Identidad de Chebyshev:** $1 * \Lambda = \log$, esto es,

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d). \quad (1.1)$$

En efecto, si

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

es la descomposición de n en factores primos, entonces $\log p_i$ aparece a_i veces como término en $\log n$ cuando este logaritmo se expande como una suma. Puesto que n tiene exactamente a_i divisores de la forma p_i^j , entonces $\log p_i = \Lambda(p_i^j)$ también aparece a_i veces como término en la suma del lado derecho de (1.1).

1.2. Funciones suma con ponderación

Dada una función aritmética $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, nos gustaría obtener una forma simple de saber su valor $f(n)$ para cada entero positivo n .

Este problema puede resultar bastante difícil, al menos para ciertas funciones aritméticas cuyo comportamiento sea bastante errático. Por ejemplo la función Λ oscila bastante entre valores grandes y pequeños. Pues, si p_k es el k -ésimo número primo, $\Lambda(p_k) = \log p_k$, y $\log p_k$ puede ser tan grande como se quiera cuando k es suficientemente grande. Mientras que $\Lambda(p_k p_{k+1}) = 0$, para todo k .

Por otra parte, con mucha frecuencia es posible calcular el **promedio** de los valores de $f(n)$ cuando n corre el intervalo $1 \leq n \leq x$. El promedio está dado por la expresión

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n).$$

En teoría analítica de números se estudia el cómo evaluar estos promedios para algunas funciones aritméticas específicas, con el objetivo de resolver problemas muy concretos relativos a los números enteros (ver página 41 de Hildebrand (2005)).

A lo largo de esta tesis, \mathbb{R}^+ denotará al conjunto de los números reales positivos.

Definición 1.3.

1. Sea f una función aritmética. La **función suma** de f se define por medio de $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, donde

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n) \quad \text{si } x \geq 1,$$

y $F(x) = 0$ si $0 < x < 1$.

2. Si además, $W : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $y \mapsto W(y)$ es una función con soporte compacto, o una función de clase C^∞ tal que W y todas sus derivadas tienden a cero cuando $y \rightarrow \infty$, definimos la **función suma ponderada** de f por medio de $G : \mathbb{R}^+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ($\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) donde,

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)W\left(\frac{n}{x}\right) \quad (1.2)$$

si $x \geq 1$ y la anterior serie converge, $G(x) = \infty$ si $x \geq 1$ y la serie anterior diverge, o $G(x) = 0$ si $0 < x < 1$.

W denotará la **ponderación** de la función G definida anteriormente.

Observación. Si la ponderación W es una función de soporte compacto, es decir, $W = 0$ en (A, ∞) para algún $A > 0$, entonces la serie en (1.2) converge porque

$$G(x) \leq \sum_{n \leq Ax} f(n)W\left(\frac{n}{x}\right),$$

y ésta última suma es finita.

El estudio del comportamiento de las funciones suma con ponderación surge de manera natural en una variedad de contextos. Por ejemplo, como recurso técnico para resolver un problema concreto: Teorema tauberiano de Shapiro (página 85 de Apostol (1980)) o ver corolario 8, página 32 de la tesis de Hernández (2002). También se usan para obtener el Teorema de los Números Primos (TNP) con ponderación arbitraria, como veremos más adelante.

Ejemplo 1.2.

- (1) Algunas funciones suma que nos interesarán son:

- La función de Mertens

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n).$$

- La función de Chebyshev

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

- La función contadora de los números primos positivos definida por Gauss como

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

- (2) Las funciones suma como en **1.** de la Definición 1.3, son casos particulares de funciones suma ponderadas, en donde la ponderación esta dada por medio de

$$W(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y \leq 1, \\ 0 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

- (3) Otro ejemplo es la función suma de Λ con ponderación un núcleo de Landau alrededor de $x = 1$, definido por

$$W(y) = \begin{cases} 140(y(1-y))^3 & \text{si } 0 < y \leq 1, \\ 0 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

En este caso, la función suma ponderada es

$$G(x) = 140 \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(\frac{n}{x} \left(1 - \frac{n}{x} \right) \right)^3.$$

- (4) Consideremos $f(n) = \Lambda(n)$, y una ponderación con parámetro $L > 0$ dada por $W_L(y) = e^{-\frac{y}{L}}$. De modo que (1.2) se convierte en

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) e^{-\frac{n}{xL}}, \quad \text{si } x \geq 1. \quad (1.3)$$

Veremos en (2) del Ejemplo 1.3 que la anterior serie converge para todo $x \geq 1$. El parámetro L lo escogemos de ésta manera con la intención de que

$$\int_0^{\infty} W_L(y) dy = L,$$

veremos más adelante que esta ponderación ejemplifica de una forma adecuada el TNP con ponderación arbitraria.

Estudiaremos el comportamiento asintótico de algunas funciones suma ponderadas, y empezaremos con la siguiente definición.

Definición 1.4. (Notación de Vinogradov y Landau). Sean $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

1. Si en una vecindad de $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tenemos que $|f(x)| \leq K g(x)$ para una constante $K > 0$, entonces escribimos

$$f(x) \ll g(x) \quad \text{o bien} \quad f(x) = O(g(x)), \quad \text{cuando } x \rightarrow a.$$

2. Si para $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tenemos que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, escribimos

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow a).$$

3. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, escribimos

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow \infty),$$

y se lee “ f es asintóticamente equivalente a g ” cuando $x \rightarrow \infty$.

Observación. Cuando la notación de Vinogradov y Landau se usa sin un $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, entonces debe entenderse que $a = \infty$.

Ejemplo 1.3.

- (1) Cuando $x \rightarrow \infty$, $f(x) = o(g(x))$ implica $f(x) \ll g(x)$.
- (2) Para demostrar la convergencia de la serie en (1.3), sea $x \geq 1$. Por definición tenemos que $\Lambda(n) \leq \log n$, entonces

$$\Lambda(n) e^{-\frac{n}{Lx}} \leq \log n e^{-\frac{n}{Lx}}.$$

Por otra parte, $e^{-\frac{n}{Lx}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ cuando $n \rightarrow \infty$ porque

$$n^2 e^{-\frac{n}{Lx}} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Luego, cuando $n \rightarrow \infty$, $e^{-\frac{n}{Lx}} \ll \frac{1}{n^2}$ y por consiguiente $\Lambda(n) e^{-\frac{n}{Lx}} \ll \frac{\log n}{n^2}$. Debido a la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$, concluimos que la función $G(x)$ en (1.3) está bien definida. Más aún, por el test M de Weierstrass, hemos demostrado que $G(x)$ converge uniformemente para $x \geq 1$.

El Teorema de los Números Primos (TNP) asegura que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

El primer objetivo de nuestro trabajo será demostrar la anterior relación asintótica. Como primer paso reformulamos nuestro problema con la siguiente proposición.

Proposición 1.1. TNP es equivalente a $\psi(x) \sim x$.

Demostración. Esta demostración es tomada de Ash & Novinger (2007). Recordando que $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$, por la definición de Λ tenemos que

$$\psi(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ primo}}} m_p(x) \log p,$$

donde $m_p(x)$ es el natural más grande tal que $p^{m_p(x)} \leq x$. Observamos que

$$p^{m_p(x)} \leq x \Leftrightarrow m_p(x) \log p \leq \log x \Leftrightarrow m_p(x) \leq \frac{\log x}{\log p}.$$

Por lo tanto, $m_p(x) = \left[\left[\frac{\log x}{\log p} \right] \right]$, donde $[\cdot]$ es la función parte entera. De esta manera,

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left[\left[\frac{\log x}{\log p} \right] \right] \log p \leq \sum_{p \leq x} \frac{\log x}{\log p} \log p = \log x \pi(x). \quad (1.4)$$

Sin embargo, si $1 < y < x$, entonces

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \pi(y) + \sum_{y < p \leq x} 1 \leq \pi(y) + \sum_{y < p \leq x} \frac{\log p}{\log y} \\ &< y + \frac{1}{\log y} \sum_{y < p \leq x} \log p \\ &\leq y + \frac{1}{\log y} \psi(x), \end{aligned}$$

y así

$$\pi(x) \leq y + \frac{1}{\log y} \psi(x).$$

Ahora, tomamos $y = \frac{x}{(\log x)^2}$ en la desigualdad anterior y obtenemos para $x \geq 3$ que

$$\pi(x) \leq \frac{x}{(\log x)^2} + \frac{1}{\log x - 2 \log(\log x)} \psi(x).$$

Por lo tanto

$$\pi(x) \frac{\log x}{x} \leq \frac{1}{\log x} + \frac{\log x}{\log x - 2 \log(\log x)} \frac{\psi(x)}{x}. \quad (1.5)$$

De (1.4) y (1.5) se sigue que

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\log x}{x} \pi(x) \leq \frac{1}{\log x} + \frac{\log x}{\log x - 2 \log(\log x)} \frac{\psi(x)}{x}.$$

De donde $\psi(x) \sim x$ si y sólo si TNP. □

1.3. Integrales de Riemann-Stieltjes

Vamos a introducir la integral de Riemann-Stieltjes y mencionaremos algunas de sus propiedades que vamos a usar a lo largo de este trabajo. Si el lector no está familiarizado con la teoría, indicaremos qué teoremas básicos asumiremos citándolos del libro de Apostol (1988).

Definición 1.5. Sean F una función de variación acotada y g una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y con valores en \mathbb{C} . La integral de Riemann-Stieltjes se define mediante

$$\int_a^b g(x) dF(x) := \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N g(x_i^*) [F(x_i) - F(x_{i-1})],$$

donde $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$ es una partición de $[a, b]$, la norma de esta partición es $|P| = \max\{x_i - x_{i-1} : 1 \leq i \leq N\}$, y para cada $1 \leq i \leq N$, x_i^* es un número en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Observación. El límite que aparece en la ecuación anterior existe debido al Teorema 7.2 de Apostol (1988), las hipótesis impuestas sobre F y g son las que trabajaremos a lo largo de la tesis.

Ejemplo 1.4. Sea g una función continua en $[a, b]$, f una función aritmética y F su función suma. Entonces F es de variación acotada en $[a, b]$ y por lo tanto

$$\int_a^b g(x) dF(x)$$

existe. En efecto, F es de variación acotada porque si $V_F[a, b]$ denota la variación total de F en $[a, b]$, entonces

$$V_F[a, b] := \sup \left\{ \sum(P)_F : P \in \mathcal{P}[a, b] \right\} = \sum_{a \leq n \leq b} |f(n)| < \infty.$$

Donde $\mathcal{P}[a, b]$ denota la colección de todas las particiones de $[a, b]$, y $\sum(P)_F$ denota la suma $\sum_{i=1}^N |F(x_i) - F(x_{i-1})|$ correspondiente a la partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$ de $[a, b]$.

Proposición 1.2. (Integración por partes). Sean g una función continua y F una función de variación acotada definidas ambas en $[a, b]$. Entonces

$$\int_a^b g(x) dF(x) = g(b)F(b) - g(a)F(a) - \int_a^b F(x) dg(x).$$

La demostración de esta proposición puede verse en el Teorema 7.6 del libro de Apostol (1988).

Notación. Sea $X > 1$. Sean g una función continua y F una función de variación acotada definidas en $[1 - \eta, X]$, con $0 < \eta < 1$. Asumimos que g tiene derivada continua en 1 y denotamos

$$\int_{1^-}^X g(x) dF(x) := \lim_{\delta \rightarrow 1^-} \int_{\delta}^X g(x) dF(x).$$

Luego de realizar una integración por partes, el límite del lado derecho de la ecuación anterior existe debido a que g tiene derivada continua en 1 y al Teorema 7.32 de Apostol (1988).

Ejemplo 1.5. Sea F una función definida en \mathbb{R}^+ con soporte $[1, \infty)$ ($F = 0$ en $(0, 1)$) y de variación acotada en $[1, X]$. Entonces por la anterior proposición

$$\int_1^X dF = F(X) - F(1) - \int_1^X F d(1) = F(X) - F(1).$$

Por otra parte, aplicando de nuevo la integración por partes, tenemos que

$$\int_{1^-}^X dF = F(X).$$

Por lo tanto

$$\int_{1^-}^X dF = \int_1^X dF + F(1),$$

lo cual indica que si F es la función suma de una función aritmética, la integral $\int_{1^-}^X dF$ depende del salto inicial $F(1)$.

La siguiente proposición nos permite intuir que la integral de Riemann-Stieltjes proporciona, bajo hipótesis adecuadas, un buen “tránsito” entre lo discreto y lo continuo.

Proposición 1.3. Sean $X > 1$ y f una función aritmética. Sea g una función con derivada continua en $(0, X]$ y valores en \mathbb{C} . Sea F la función suma de f . Entonces

$$\sum_{n \leq X} f(n)g(n) = \int_{1^-}^X g(x)dF(x).$$

Demostración. Por la integración por partes tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{1^-}^X g(x)dF(x) &= g(X)F(X) - g(1^-)F(1^-) - \int_{1^-}^X F(x)g'(x)dx \\ &= g(X)F(X) - \int_1^X F(X)g'(x)dx \\ &= \int_{1/2}^X g(x)dF(x). \end{aligned}$$

Luego, es suficiente demostrar que

$$\sum_{n \leq x} g(n)f(n) = \int_{1/2}^X g(x)dF(x). \quad (1.6)$$

Sea $N = \llbracket X \rrbracket$ y sea $P = \{\frac{1}{2} = x_0 < x_1 < \dots < x_N = X\}$ una partición de $[\frac{1}{2}, X]$ con las siguientes propiedades:

1. $x_n \notin \mathbb{N}$ para cada $n = 0, \dots, N-1$ (posiblemente $X \in \mathbb{N}$).
2. Para cada natural n en $[\frac{1}{2}, X]$, existen únicos $x_{n-1}, x_n \in P$ tales que $x_{n-1} < n \leq x_n$.

Por definición de F , tenemos que

$$F(x_n) - F(x_{n-1}) = f(n), \quad \text{para cada } n = 1, \dots, N.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n \leq X} g(n)f(n) = \sum_{n=1}^N g(n)[F(x_n) - F(x_{n-1})]. \quad (1.7)$$

Por otra parte, sea Q un refinamiento de P , y sean x_{i-1}, x_i elementos en Q tales que no existe un entero en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = 0,$$

y no se producen nuevos términos no nulos en la suma de la parte derecha de (1.7). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^X g(x) dF(x) &= \lim_{|Q| \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N g(n) [F(x_n) - F(x_{n-1})] \\ &= \lim_{|Q| \rightarrow 0} \sum_{n \leq X} g(n) f(n) = \sum_{n \leq X} g(n) f(n), \end{aligned}$$

y obtenemos (1.6). □

Ejemplo 1.6. (Función zeta de Riemann). Sea $s = \sigma + it$ un número complejo con σ y t en \mathbb{R} . La función zeta de Riemann se define mediante

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{para } \sigma > 1.$$

Tomando $f(n) = \mathbf{1}(n) = 1$ y $g(x) = x^{-s}$ en la proposición anterior, obtenemos

$$\zeta(s) = \int_{1^-}^{\infty} x^{-s} d[x], \quad \text{para } \sigma > 1.$$

En este caso, $F(x) = \sum_{n \leq x} \mathbf{1}(n) = \llbracket x \rrbracket$ es la parte entera de x .

Ahora fijaremos una clase de funciones en las que será posible tomar ciertas transformadas en el futuro.

Definición 1.6. Definimos a \mathfrak{U} como el conjunto de aquellas funciones $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

- (i) $F = 0$ en $(0, 1)$.
- (ii) F es continua a la derecha de cada punto $x \in \mathbb{R}^+$.
- (iii) F es de variación acotada en $[1, X]$ para cada $X > 1$.

Ejemplo 1.7.

- (1) Ya vimos en el Ejemplo 1.4 que la función suma de una función aritmética está en \mathfrak{U} .
- (2) Probaremos que las funciones suma con ponderación que nos interesarán están en \mathfrak{U} . Sea f una función aritmética y G una función suma con ponderación W como en **2.** de la Definición 1.3. Dependiendo de qué f o W tomemos, resumiremos nuestra verificación en dos casos.

Caso 1. W tiene soporte compacto $[0, 1]$ y es acotada en este intervalo. Entonces $G(x) = \sum_{n \leq x} f(n)W(n/x)$, y para $X > 1$, G es de variación acotada en $[1, X]$. En efecto, aplicando el mismo argumento del ejemplo 1.4, la variación total de G en $[1, X]$ es finita:

$$V_G[1, X] \leq K \sum_{n \leq X} |f(n)| < \infty,$$

donde K es una cota superior de W en $[0, 1]$.

Caso 2. $f(n) = \Lambda(n)$ y $W_L(x) = e^{-\frac{x}{L}}$. Sea $X > 1$, probaremos que la función suma ponderada G definida por medio de

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)W_L\left(\frac{n}{x}\right) \quad \text{si } x \geq 1,$$

tiene derivada continua en $[1, X]$, y luego, por el Teorema 6.6 de Apostol (1988), G es de variación acotada en $[1, X]$ y por lo tanto está en \mathfrak{U} .

En efecto, si fijamos $L > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $g_n(x) := \Lambda(n)W_L(n/x)$ es de clase $C^\infty(0, \infty)$. Ahora, por el mismo razonamiento usado en (2) del Ejemplo 1.3 para probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)W_L\left(\frac{n}{x}\right)$$

converge uniformemente en $x \geq 1$, tenemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} g'_n(x) \quad \text{converge uniformemente para } x \geq 1, \quad (1.8)$$

donde g' es la derivada de g . Luego por el Teorema 9.14 de Apostol (1988), tenemos que $G'(x)$ existe y

$$G'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g'_n(x) \quad \text{si } x \geq 1.$$

Pero además, cada g'_n es continua y por (1.8), G' es continua para cada $x \geq 1$. En particular, G es una función con derivada continua en $[1, X]$.

Capítulo 2

Transformada de Mellin-Stieltjes

2.1. Definición de la transformada

Usaremos las ideas de Dirichlet y Riemann de asociar a una función aritmética una cierta serie infinita, hoy día llamada serie de Dirichlet. En este capítulo desarrollaremos una teoría introductoria basada en la noción de transformada de Mellin-Stieltjes, la cual generaliza la serie de Dirichlet.

De ahora en adelante, un número complejo s lo expresaremos en la forma $s = \sigma + it$ con $\sigma, t \in \mathbb{R}$. Si c es un número real, escribiremos $\sigma > c$ para denotar el conjunto $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > c\}$.

Dada $F \in \mathfrak{U}$, que no necesariamente se anule en $(0, 1)$ (ver definición 1.6), construimos la integral de Riemann-Stieltjes impropia

$$\int_{1^-}^{\infty} x^{-s} dF(x) := \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{1^-}^X x^{-s} dF(x),$$

si existe. Sea S el conjunto de puntos $s \in \mathbb{C}$ para los cuales esta integral converge.

Definición 2.1. La transformada de Mellin-Stieltjes (M-S) asociada a F es definida por

$$\widehat{F}(s) = \int_{1^-}^{\infty} x^{-s} dF(x), \quad s \in S.$$

Observación. Los teoremas más importantes que veremos en esta tesis implican que las singularidades de \widehat{F} determinan el comportamiento asintótico de $F(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Ejemplo 2.1.

- (1) Sea f una función aritmética y F su función suma. Por la Proposición 1.3 tenemos que

$$\widehat{F}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \quad s \in S.$$

Esta última serie es la conocida **serie de Dirichlet** asociada a f .

- (2) Sean $F_1(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $F_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F_2(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Aquí $F_1 \notin \mathfrak{U}$, mientras que $F_2 \in \mathfrak{U}$. Observamos que para $\sigma > 1$,

$$\widehat{F}_1(s) = \int_1^{\infty} x^{-s} dx = \frac{1}{s-1}.$$

Ahora, para calcular \widehat{F}_2 , observamos que para $X > 1$,

$$\int_{1^-}^X x^{-s} dF_2(x) = X^{-s} F_2(X) + s \int_1^X x^{-s} dx.$$

Luego, para $\sigma > 1$

$$\widehat{F}_2(s) = s \int_1^{\infty} x^{-s} dx = \frac{s}{s-1} = \frac{1}{s-1} + 1.$$

En el próximo teorema veremos que una condición necesaria y suficiente para que $\widehat{F}(s)$ converja, es que F sea de crecimiento polinomial, es decir, $F(x) \ll x^\sigma$. Pero la necesidad dice aun más: $F(x) = o(x^\sigma)$ si $\sigma > 0$, y ésto será crucial en lo que sigue.

Teorema 2.1. Sea $F \in \mathfrak{U}$. Supongamos que $F(x) \ll x^\alpha$ para algún $\alpha \geq 0$. Si $\sigma > \alpha$, entonces $\widehat{F}(s) = \int_{1^-}^{\infty} x^{-s} dF(x)$ converge. Recíprocamente, suponga que $\widehat{F}(s)$ converge para algún $s \in \mathbb{C}$. Entonces

$$F(x) = o(x^\sigma), \quad \text{si } \sigma > 0. \quad (2.1)$$

Demostración. Supongamos que $F(x) \ll x^\alpha$ para algún $\alpha \geq 0$. Sea $\sigma > \alpha$. Entonces

$$\begin{aligned}\widehat{F}(s) &= \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{1^-}^X x^{-s} dF(x) = \lim_{X \rightarrow \infty} \left[X^{-s} F(X) + s \int_1^X \frac{F(x)}{x^{s+1}} dx \right] \\ &= s \int_1^\infty \frac{F(x)}{x^{s+1}} dx,\end{aligned}$$

y esta última integral converge porque

$$\frac{F(x)}{x^{s+1}} \ll \frac{1}{x^{(\sigma-\alpha)+1}}.$$

Recíprocamente, supongamos que $\beta := \int_{1^-}^\infty x^{-s} dF(x)$ converge para algún $s = \sigma + it$ con $\sigma > 0$. Sean

$$C(y) := \int_{1^-}^y t^{-s} dF(t) \quad \text{y} \quad h(y) := - \int_y^\infty t^{-s} dF(t).$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo e integración por partes, tenemos que

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{1^-}^x dF(y) = \int_{1^-}^x y^s dC(y) \\ &= \int_{1^-}^x y^s d[C(y) - \beta] = \int_{1^-}^x y^s dh(y) \\ &= x^s h(x) + \int_{1^-}^\infty y^{-s} dF(y) - s \int_1^x y^{s-1} h(y) dy.\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\frac{F(x)}{x^\sigma} = x^{it} h(x) + \frac{\beta}{x^\sigma} - \frac{s}{x^\sigma} \int_1^x y^{s-1} h(y) dy.$$

Claramente

$$x^{it} h(x) + \frac{\beta}{x^\sigma} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty.$$

Ahora, por el Teorema del Valor Medio para integrales

$$\frac{1}{x-1} \int_1^x y^{s-1} h(y) dy = H(c),$$

con $H(x) := x^{s-1} h(x)$ y $c = c(x) \in [1, x]$. Luego

$$\frac{1}{x^\sigma} \int_1^x y^{s-1} h(y) dy = \frac{x-1}{x^\sigma} H(c) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } c \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto

$$\frac{s}{x^\sigma} \int_1^x y^{s-1} h(y) dy \rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty.$$

□

Corolario 2.1. Sea $F \in \mathfrak{U}$ y suponga que $\int_{1^-}^\infty x^{-s} dF(x)$ converge para algún $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > 0$. Entonces

$$\widehat{F}(s) = s \int_1^\infty \frac{F(x)}{x^{s+1}} dx. \quad (2.2)$$

Demostración. Sea $X > 1$. Haciendo integración por partes tenemos que

$$\int_{1^-}^X x^{-s} dF(x) = X^{-s} F(X) + s \int_1^X \frac{F(x)}{x^{s+1}} dx.$$

Debido a (2.1) del teorema anterior, se deduce que

$$\lim_{X \rightarrow \infty} X^{-s} F(X) = 0$$

y por lo tanto obtenemos (2.2). □

2.2. Regiones de convergencia

Queremos definir ahora cuándo una transformada de M-S $\widehat{F}(s)$ converge absolutamente para un $s \in \mathbb{C}$. Para ello necesitamos la siguiente definición.

Definición 2.2. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = 0$ si $x < 1$. Definimos la **función de variación total** de F como

$$F_v : \mathbb{R}^+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}},$$

donde $F_v(x) = V_F[0, x]$ es la variación total de F en $[0, x]$, como fue definida en el Ejemplo 1.4.

Algunas propiedades conocidas de F_v son las siguientes:

- F_v es creciente.
- Si F es creciente, entonces $F_v = F$.

Ejemplo 2.2. Si f es una función aritmética y F es su función suma, el Ejemplo 1.4 prueba que

$$F_v(x) = \sum_{n \leq x} |f(n)|.$$

Definición 2.3. Sea $F \in \mathfrak{U}$ y $s \in \mathbb{C}$. Decimos que \widehat{F} **converge absolutamente** en s si

$$\int_{1^-}^{\infty} x^{-\sigma} dF_v(x) < \infty,$$

donde $\sigma = \Re(s)$ denota la parte real de s .

Ejemplo 2.3. Si F es la función suma de una función aritmética f , entonces por el Ejemplo 2.1, $\widehat{F}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ y \widehat{F} converge absolutamente en s si, y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^{\sigma}}$ converge.

2.2.1. Abscisa de convergencia y abscisa de convergencia absoluta

Repasaremos lo que se conoce acerca de las regiones en las que una transformada de Mellin-Stieltjes converge.

Lema 2.1. Sean $F \in \mathfrak{U}$ y $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \mathbb{C}$ con $\sigma_0 = \Re(s_0) > 0$. Si $\int_{1^-}^{\infty} x^{-s_0} dF(x)$ converge, entonces $\int_{1^-}^{\infty} x^{-s} dF(x)$ converge en el semiplano abierto $\{s : \sigma > \sigma_0\}$.

Demostración. Si $\int_{1^-}^{\infty} x^{-s_0} dF(x)$ converge, entonces por (2.1) del Teorema 2.1,

$$F(x) = o(x^{\sigma_0}) = o(x^{\sigma_0 + \epsilon}), \quad \text{para cualquier } \epsilon > 0 \text{ fijo.}$$

Ahora, la primera parte de este mismo teorema garantiza que $\widehat{F}(s)$ converge en $\sigma > \sigma_0 + \epsilon$. Debido a que ϵ es arbitrario, $\widehat{F}(s)$ converge en el semiplano $\sigma > \sigma_0$. \square

En el caso en que \widehat{F} converja en algunos puntos $s \in \mathbb{C}$ y diverja en otros, el anterior lema nos dice que la región de convergencia es un semiplano de la forma $\{s : \sigma > \sigma_0\}$ y posiblemente en algunos puntos de la recta vertical $\sigma = \sigma_0$.

Definición 2.4. Para una transformada de M-S \widehat{F} , definimos

1. $\sigma_c = \sigma_c(\widehat{F})$, la **abscisa de convergencia** de \widehat{F} , por

$$\sigma_c = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : \widehat{F}(s) \text{ converge para algún } s, \text{ con } \sigma = \Re(s)\}.$$

2. $\sigma_a = \sigma_a(\widehat{F})$, la **abscisa de convergencia absoluta** de \widehat{F} , por

$$\sigma_a = \inf\{\sigma : \int_{1^-}^{\infty} x^{-\sigma} dF_v(x) < \infty\}.$$

3. Si \widehat{F} converge en un punto $s \in \mathbb{C}$, pero no absolutamente, decimos que la convergencia en s es **condicional**.

Observación. Para cualquier transformada de M-S, $\sigma_a \geq \sigma_c$. En efecto, sea $F \in \mathfrak{U}$ tal que \widehat{F} converge absolutamente en s , entonces

$$\begin{aligned} |\widehat{F}(s)| &= \left| \int_{1^-}^{\infty} x^{-s} dF(x) \right| \leq \int_{1^-}^{\infty} x^{-\sigma} d|F(x)| \\ &\leq \int_{1^-}^{\infty} x^{-\sigma} d|F_v(x)| = \int_{1^-}^{\infty} x^{-\sigma} dF_v(x). \end{aligned}$$

En la última igualdad, $d|F_v(x)| = dF_v(x)$ porque F_v es creciente.

Ejemplo 2.4.

- (1) La función zeta de Riemann definida en el Ejemplo 1.6 tiene

$$\sigma_c = \sigma_a = 1.$$

- (2) Sea $F(x) = \sum_{n \leq x} (-1)^{n+1}$. De modo que $\widehat{F}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$, claramente $\sigma_a = \sigma_a(\widehat{F}) = 1$. Por otra parte, tenemos que $\sigma_c = 0$.

En efecto, por el criterio de Leibniz para series alternadas, $\widehat{F}(s)$ converge para todo número real $s > 0$. Además, para $s \leq 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ diverge porque la sucesión $\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ no tiene límite cuando $n \rightarrow \infty$.

2.3. Propiedades multiplicativas de la transformada

En el próximo teorema vamos a calcular la transformada de Mellin-Stieltjes de cualquier función suma con ponderación. Antes introducimos otra transformada que siempre ha sido útil en la teoría analítica de números.

Definición 2.5 (Transformada de Mellin). Si $W : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definimos la **transformada de Mellin** asociada a W como

$$W^M(s) = \int_0^\infty W(x)x^{s-1}dx, \quad (2.3)$$

para aquellos números complejos s en los que la anterior integral converge.

Observación. Como en la transformada de M-S, la transformada de Mellin de una función tiene asociada una abscisa de convergencia y una abscisa de convergencia absoluta que son definidas de la misma forma. En este caso la transformada de Mellin converge absolutamente en un s si la integral en (2.3) converge absolutamente.

Ejemplo 2.5 (Función Gamma). La **función Gamma** se define por medio de la transformada de Mellin de la función e^{-x} :

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx, \quad \Re(s) > 0.$$

En este caso la abscisa de convergencia y la abscisa de convergencia absoluta son ambas iguales a cero.

Teorema 2.2. Sea G la función suma de f con ponderación W . Supongamos que la serie que define a G en (1.2) converge para todo $x > 0$, y que $G \in \mathfrak{U}$. Entonces

$$\widehat{G}(s) = \widehat{F}(s) s W^M(s), \quad (2.4)$$

para $\Re(s) =: \sigma > \max\{\sigma_a(\widehat{F}), \sigma_a(W), 0\}$. Donde F es la función suma de f , y $\sigma_a(W)$ es la abscisa de convergencia absoluta de la transformada de Mellin asociada a W .

Demostración. Sea $\sigma > \max\{\sigma_a(\widehat{F}), \sigma_a(W), 0\}$. Supondremos que $\widehat{G}(s)$ existe y al final de la prueba explicaremos la razón de su existencia a partir de la hipótesis impuesta sobre σ . Como $\sigma > 0$, del Corolario 2.1 tenemos que

$$\widehat{G}(s) = s \int_1^\infty x^{-s-1}G(x)dx = s \int_0^\infty x^{-s-1}G(x)dx.$$

Por otra parte, de la Proposición 1.3 se deduce que

$$G(x) = \int_{1^-}^{\infty} W\left(\frac{t}{x}\right) dF(t),$$

donde $F(t) = \sum_{n \leq t} f(n)$ es la función suma de f . Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \widehat{G}(s) &= s \int_0^{\infty} x^{-s-1} G(x) dx = s \int_0^{\infty} x^{-s-1} \int_{1^-}^{\infty} W\left(\frac{t}{x}\right) dF(t) dx \\ &= s \int_{1^-}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{-s-1} W\left(\frac{t}{x}\right) dx dF(t). \end{aligned}$$

El intercambio en el orden de integración en la última igualdad se justifica debido a que las transformadas de F y W convergen absolutamente en s . Dejando a t fijo y haciendo el cambio de variable $y = \frac{t}{x}$, tenemos que

$$\int_0^{\infty} x^{-s-1} W\left(\frac{t}{x}\right) dx = \int_0^{\infty} t^{-s} y^{s-1} W(y) dy.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \widehat{G}(s) &= s \int_{1^-}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{-s} y^{s-1} W(y) dy dF(t) \\ &= s \int_{1^-}^{\infty} t^{-s} dF(t) \int_0^{\infty} y^{s-1} W(y) dy \\ &= s \widehat{F}(s) W^M(s). \end{aligned}$$

Finalmente, bajo nuestra suposición sobre σ , $\widehat{F}(s)$ y $W^M(s)$ existen y por lo tanto, debido a la última cadena de igualdades, $\widehat{G}(s)$ existe. \square

Corolario 2.2. Sean f, h funciones aritméticas y $g = f * h$ su producto de Dirichlet. Si G, F y H son las funciones suma de g, f y h respectivamente, y si $\sigma > \max\{\sigma_a(\widehat{F}), \sigma_a(H), 0\}$. Entonces

$$\widehat{G}(s) = \widehat{F}(s) \widehat{H}(s).$$

Equivalentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f * h)(n)}{n^s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} \right).$$

Demostración. Primero observamos que

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n \leq x} (f * h)(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{kj=n} f(k)h(j) \\ &= \sum_{kj \leq x} f(k)h(j) \\ &= \sum_{k \leq x} f(k) \sum_{j \leq x/k} h(j) = \sum_{k \leq x} f(k)H\left(\frac{x}{k}\right). \end{aligned}$$

Luego $G(x) = \sum_{n \leq x} f(n)H\left(\frac{x}{n}\right)$. Consideremos la ponderación

$$W(y) = \begin{cases} H\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } 0 < y \leq 1, \\ 0 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

Así, G es la función suma ponderada $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)W\left(\frac{n}{x}\right)$. Por otra parte, si hacemos el cambio de variable $x = \frac{1}{y}$, tenemos que

$$sW^M(s) = s \int_0^1 y^{s-1} H\left(\frac{1}{y}\right) dy = s \int_1^{\infty} \frac{H(x)}{x^{s+1}} dx = \widehat{H}(s),$$

y debido al teorema anterior,

$$\widehat{G}(s) = \widehat{F}(s)\widehat{H}(s).$$

□

Ejemplo 2.6. Las series $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ y $\sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s}$ convergen absolutamente para $\sigma > 1$. Debido a que $1 * \mu = e$, donde e es el elemento identidad en el producto de Dirichlet, tenemos por el corolario anterior que

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(n)}{n^s} = 1.$$

Lo anterior demuestra que la función ζ no tiene ceros en $\sigma > 1$.

2.4. Propiedades analíticas de la transformada

Una serie de potencias define una función, la cual es analítica en al menos su disco abierto de convergencia. Vamos a exponer el resultado correspondiente para transformadas de Mellin-Stieltjes. Su demostración la podemos encontrar en la página 125 del libro de Bateman & Diamond (2004).

Teorema 2.3. Sea $F \in \mathfrak{U}$ una función de crecimiento polinomial. Entonces \widehat{F} es analítica en $\{s : \Re(s) = \sigma > \sigma_c(\widehat{F})\}$. Sobre este semiplano, las derivadas de \widehat{F} están dadas por

$$\widehat{F}^{(k)}(s) = \int_{1^-}^{\infty} x^{-s} (-\log x)^k dF(x), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Ejemplo 2.7. Sea f una función aritmética y F su función suma. Entonces

$$-\frac{d}{ds} \widehat{F}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} f(n), \quad \sigma > \sigma_c(\widehat{F}).$$

En efecto, por el teorema anterior y la Proposición 1.3, tenemos que

$$-\frac{d}{ds} \widehat{F}(s) = \int_{1^-}^{\infty} x^{-s} \log x dF(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} f(n).$$

Proposición 2.1. La transformada de Mellin-Stieltjes de la función de Chebyshev está dada por

$$\widehat{\psi}(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}, \quad \sigma > 1. \quad (2.6)$$

Demostración. Empezamos asumiendo la estimación bien conocida $\psi(x) \ll x$ cuando $x \rightarrow \infty$ (ver página 51 de Balanzario (2003) o páginas 13 y 14 de Ingham (1932)). Esta estimación nos permite ver que $\widehat{\psi}(s)$ es absolutamente convergente en $\sigma > 1$, pues, la integral impropia

$$\int_{1^-}^{\infty} x^{-\sigma} d\psi(x) = \lim_{X \rightarrow \infty} \left[X^{-\sigma} \psi(X) + s \int_1^X \frac{\psi(x)}{x^{\sigma+1}} dx \right]$$

converge absolutamente para $\sigma > 1$. Ahora, como $\Lambda * 1 = \log$, tenemos que en $\sigma > 1$

$$\widehat{\psi}(s)\zeta(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} = -\zeta'(s).$$

□

Capítulo 3

Teorema de los Números Primos (TNP) con ponderación

3.1. Sucesiones de Dirac

Definición 3.1. Una sucesión de funciones $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de valores reales y definidas en todo \mathbb{R} es una **sucesión de Dirac** si satisface las siguientes propiedades:

(D1) $K_n(x) \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(D2) Cada K_n es continua en \mathbb{R} , y $\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x) dx = 1$.

(D3) Para todo $\delta > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > \delta} K_n(x) dx = 0$.

Observación. La condición (D2) significa que el área bajo la curva $y = K_n(x)$ es igual a 1. Además, la condición (D3) significa que esta área se concentra cerca de 0 si n toma valores suficientemente grandes.

Ejemplo 3.1 (Núcleo de Fejér). Para cada $\lambda > 0$ definimos el **Núcleo de Fejér** por medio de

$$K_\lambda(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen}^2(\lambda x)}{\lambda x^2}, \quad (3.1)$$

si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y $K_\lambda(0) := \frac{\lambda}{\pi}$.

Verifiquemos que $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Dirac:

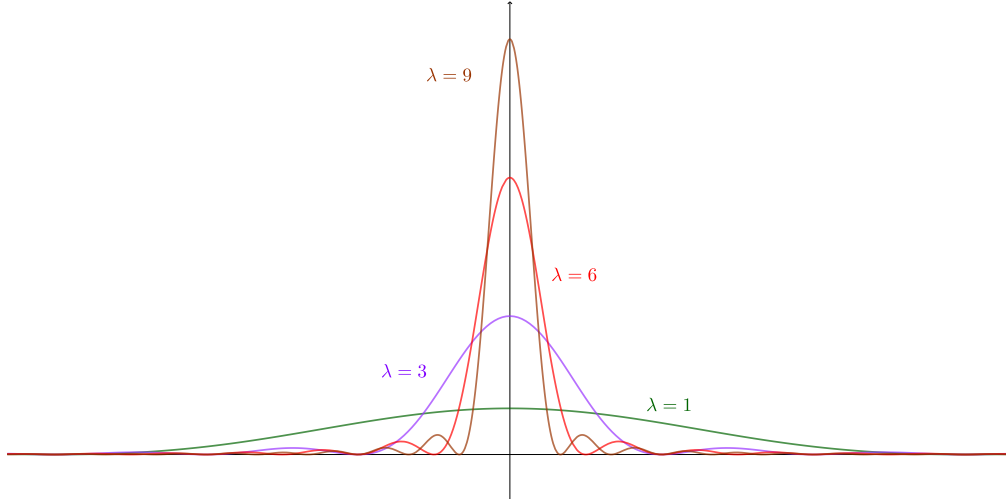


Figura 3.1: $\{K_\lambda\}$ para algunos valores de λ

(D1) es inmediato.

(D2) K_λ es continua en 0 porque

$$\lim_{x \rightarrow 0} K_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\pi} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2(\lambda x)}{(\lambda x)^2} = \frac{\lambda}{\pi}.$$

Además, por el Lema 3.1 tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^2(\lambda x)}{\lambda x^2} dx = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^2(x)}{\frac{1}{\lambda} x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} dx = \pi.$$

Por lo tanto, tenemos que $\int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(x) dx = 1$.

(D3) Es suficiente probar que para todo $\delta > 0$,

$$\int_{|x|>\delta} K_\lambda(x) dx \leq \frac{2}{\lambda \delta \pi}.$$

En efecto,

$$\int_{|x|>\delta} K_\lambda(x) dx \leq \frac{1}{\lambda \pi} \int_{|x|>\delta} \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{\lambda \pi \delta}.$$

Lema 3.1. Se cumple la siguiente identidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^2 t}{t^2} dt = \pi.$$

Demostración. Por la paridad del integrando es suficiente demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Probaremos primero que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}^2 t}{t^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} dt, \quad (3.2a)$$

y luego que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \quad (3.2b)$$

Para (3.2a) hacemos integración por partes con

$$\begin{aligned} u &= \text{sen}^2 t & dv &= \frac{dt}{t^2}, \\ du &= 2 \text{sen } t \cos t dt & v &= -\frac{1}{t} \end{aligned}$$

Luego, para cada $b > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{\text{sen}^2 t}{t^2} dt &= \left[-\frac{\text{sen}^2 t}{t} \right]_0^b + \int_0^b \frac{2 \text{sen } t \cos t}{t} dt \\ &= -\frac{\text{sen}^2 b}{b} + 2 \int_0^b \frac{\text{sen } 2t}{2t} dt = -\frac{\text{sen}^2 b}{b} + \int_0^{2b} \frac{\text{sen } z}{z} dz. \end{aligned}$$

Haciendo que $b \rightarrow \infty$ obtenemos (3.2a). Para demostrar (3.2b), probaremos primero que la integral

$$g(x) = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} e^{-tx} dt,$$

converge uniformemente para cada $x > 0$.

En efecto, sea $f(t, x) = \frac{\text{sen } t}{t} e^{-tx}$. Para cada $a > 0$, si $x \geq a$ tenemos que

$$|f(t, x)| \leq e^{-tx} \leq e^{-at},$$

como $\int_0^\infty e^{-at} dt$ converge, entonces por el test de Weierstrass $g(x)$ converge uniformemente para cada $x > 0$. Por otra parte, observamos que

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t, x) = -e^{-tx} \text{sen } t,$$

y por un argumento similar al anterior tenemos que $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dt$ converge uniformemente para todo $x > 0$, de modo que por Lang (1983), Teorema 3.4 del capítulo 13, obtenemos para $x > 0$ que

$$g'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dt = - \int_0^\infty e^{-tx} \text{sen } t dt.$$

Integrando por partes tenemos que $g'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$. Luego

$$g(x) = -\tan^{-1}(x) + k, \quad k \text{ constante.}$$

Ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(t, x) = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, luego la constante k debe ser $\pi/2$. Por tanto

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen } t}{t} e^{-tx} dt = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(x).$$

Finalmente, tomando el límite $x \rightarrow 0$, y por la convergencia uniforme de $g(x)$ para cada $x > 0$, concluimos que

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen } t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

□

Vamos ahora a representar el Núcleo de Fejér en una forma integral que será útil en la sección 3.2

Proposición 3.1. El Núcleo de Fejér definido en (3.1) lo podemos expresar como

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) e^{ixt} dt. \quad (3.3)$$

Demostración. Primero, se observa que

$$K_\lambda(0) = \frac{\lambda}{\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) dt.$$

Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Observamos que la parte derecha de la ecuación (3.3) es igual a

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\lambda} \left(1 - \frac{t}{2\lambda}\right) \cos(xt) dt.$$

Realizando una integración por partes, tenemos que la anterior expresión es igual a

$$\pi^{-1} \frac{1}{2\lambda x} \int_0^{2\lambda} \operatorname{sen}(xt) dt = \pi^{-1} \frac{1 - \cos(2\lambda x)}{2\lambda x^2} = \pi^{-1} \frac{\operatorname{sen}^2(\lambda x)}{\lambda x^2} = K_\lambda(x).$$

□

3.1.1. Convolución aditiva

Ahora definiremos la convolución de dos funciones. Este es un operador que permite en análisis real y armónico, aproximar uniformemente funciones continuas f en $[a, b]$ por polinomios $\sum_{n=0}^N a_n x^n$ y, funciones continuas y periódicas f en $[0, 2\pi]$ por polinomios trigonométricos $\sum_{n=0}^N e^{inx}$ respectivamente (ver pág 391 de Apostol (1980) o pág 265 de Lang (1983)).

Definición 3.2. Sean f y g funciones con valores reales y continuas a trozos en todo \mathbb{R} . La **convolución** entre f y g esta definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por medio de

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Observación. La existencia de la integral impropia en la definición anterior, se puede garantizar si $f \in L^1(\mathbb{R})$ ($\int_{-\infty}^{\infty} |f| < \infty$), y g es una función acotada en todo \mathbb{R} (aplicaremos la convolución bajo éstas condiciones).

Propiedades básicas:

- 1) $f \star g = g \star f$,
- 2) $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$,
- 3) $f \star (g + h) = f \star g + f \star h$.

4) Si $g(x)$ es un polinomio, entonces $(f \star g)(x)$ es un polinomio.

La siguiente proposición nos dice que cuando n tiende a infinito, una sucesión de Dirac se comporta como el elemento identidad en el producto convolución, y por tanto como la “función” delta de Dirac (ver Stein (2005)).

Proposición 3.2. Sea $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua a trozos, y acotada en todo \mathbb{R} . Sea $\{K_n\}$ una sucesión de Dirac y sea $h_n := K_n \star h$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{h_n\}$ converge puntualmente a h en todo punto x en el cual h es continua, y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)K_n(x-t)dt = h(x). \quad (3.4)$$

Demostración. Empezamos observando que por definición de h_n ,

$$h_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t)K_n(t)dt.$$

Ahora, por (D2)

$$h(x) = h(x) \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)K_n(t)dt.$$

Por tanto

$$h_n(x) - h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [h(x-t) - h(x)]K_n(t)dt.$$

Fijemos x en el cual h es continua. Sea $\epsilon > 0$, escogemos $\delta = \delta(x, \epsilon)$ tal que $|t| < \delta$ implica

$$|h(x-t) - h(x)| < \epsilon.$$

Sea M una cota de h en \mathbb{R} . Por (D3) seleccionamos $N > 0$ tal que si $n \geq N$,

$$\int_{-\infty}^{-\delta} K_n(t)dt + \int_{\delta}^{\infty} K_n(t)dt < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Por otra parte, tenemos que

$$|h_n(x) - h(x)| \leq \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right) |h(x-t) - h(x)|K_n(t)dt.$$

Para estimar la primera y la tercera integral, observamos que $|h(x-t) - h(x)| \leq 2M$, para todo $t \in \mathbb{R}$. En este caso, obtenemos que

$$\left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right) |h(x-t) - h(x)| K_n(t) dt \leq 2M \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right) K_n(t) dt < \epsilon.$$

Para la integral del medio, tenemos la estimación

$$\int_{-\delta}^{\delta} |h(x-t) - h(x)| K_n(t) dt \leq \int_{-\delta}^{\delta} \epsilon K_n(t) dt \leq \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t) dt = \epsilon.$$

Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = h(x)$.

□

3.2. Teorema tauberiano de Wiener-Ikehara

Presentamos ahora el primer teorema central que usaremos en la tesis. Tal y como lo indican Bateman & Diamond (2004), la demostración del Teorema de Wiener-Ikehara que aquí presentaremos hace uso del análisis de Fourier. El primer ingrediente es lo que presentamos en la sección 3.1 sobre sucesiones de Dirac y el segundo es un caso particular del Lema de Riemann-Lebesgue que enunciamos a continuación.

Lema 3.2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua con soporte compacto, y sea $y \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ity} dt = 0.$$

Demostración. Sea $I(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ity} dt$. Por un cambio de variable,

$$I(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + \frac{\pi}{y}\right) e^{i[t+(\pi/y)]y} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + \frac{\pi}{y}\right) e^{ity} dt.$$

Luego

$$2I(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{y}\right) \right] e^{ity} dt.$$

Ya que f es uniformemente continua en \mathbb{R} , la expresión anterior en corchetes cuadrados tiende a cero uniformemente cuando $y \rightarrow \infty$. Además, el anterior integrando se anula afuera de un conjunto acotado. Por lo tanto

$$\lim_{y \rightarrow \infty} I(y) = 0.$$

□

Recordemos que estamos denotando un número complejo s como

$$s = \sigma + it; \quad \sigma, t \in \mathbb{R}.$$

Lema 3.3. Sea g una función continua en $\sigma \geq 0$. Entonces $g(\sigma + it)$ converge uniformemente a $g(it)$ en $[-\lambda, \lambda]$, conforme $\sigma \rightarrow 0^+$, en donde λ es una constante real positiva.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\lambda = 1$. Para $t \in [-1, 1]$, sea $\theta_t = \{s \in \mathbb{C} : |s - it| < \delta_t/2\}$ en donde δ_t es tal que $|s - it| < \delta_t$ implica $|g(s) - g(it)| < \epsilon/2$. Sea $\theta_{t_1}, \theta_{t_2}, \dots, \theta_{t_n}$ una cubierta finita de $[-1, 1]$. Sea $\delta = \min\{\delta_{t_j}/2\}$. Sea $t \in [-1, 1]$ y t_j tal que $t \in \theta_{t_j}$. Si $0 \leq \sigma \leq \delta$ entonces

$$|\sigma + it - it_j| < \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{t_j} < \delta_{t_j}.$$

Por lo tanto

$$|g(\sigma + it) - g(it)| \leq |g(\sigma + it) - g(it_j)| + |g(it_j) - g(it)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Teorema 3.1 (Wiener-Ikehara). Sea F una función no decreciente en \mathfrak{u} (ver definición 1.6). Sea $\alpha > 0$ la abscisa de convergencia de F . Suponga que existen un número real L y una función g analítica en el semiplano cerrado $\{s \in \mathbb{C} : \sigma \geq \alpha\}$, tales que

$$\widehat{F}(s) = \frac{L}{s - \alpha} + g(s)$$

es válido en el semiplano abierto $\sigma > \alpha$. Entonces

$$F(x) \sim \frac{L}{\alpha} x^\alpha, \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Demostración. Empezamos reformulando nuestro enunciado pasando de la transformada de Mellin-Stieltjes asociada a F , en términos de una transformada de Laplace-Stieltjes, y luego en términos de la transformada de Laplace clásica. Hacemos el cambio de variable $u = \alpha \log x$ y definimos a f por medio de

$$f(u) := F(e^{u/\alpha}) = F(x).$$

Entonces para $\sigma > 1$,

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-su} df(u) = \int_{1^-}^{\infty} x^{-\alpha s} dF(x) = \widehat{F}(\alpha s) = \frac{L}{\alpha(s-1)} + g(\alpha s).$$

Ahora, debido al Corolario 2.1,

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-su} df(u) = \widehat{F}(\alpha s) = \alpha s \int_1^{\infty} \frac{F(x)}{x^{\alpha s+1}} dx = s \int_0^{\infty} f(u) e^{-su} du.$$

De esta forma, para $\sigma > 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(u) e^{-su} du &= s^{-1} \int_{0^-}^{\infty} e^{-su} df(u) \\ &= \frac{L}{\alpha s(s-1)} + \frac{g(\alpha s)}{s} = \frac{\ell}{s-1} + g_1(s), \end{aligned}$$

donde $\ell := L/\alpha$ y $g_1(s) := s^{-1}g(\alpha s) - s^{-1}\ell$, de modo que por hipótesis de g , g_1 es continua en $\{s : \sigma \geq 1\}$. Si expresamos $\ell/(s-1)$ como una transformada de Laplace, obtenemos

$$g_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} (f(u) - \ell e^u) du, \quad (\sigma > 1). \quad (3.6)$$

A partir de este momento vamos a dividir la demostración en dos partes. La primera consiste en probar que la siguiente relación integral es válida para cada $\lambda > 0$:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) K_{\lambda}(y-x) dx = \ell, \quad (3.7)$$

donde $\{K_{\lambda}\}$ es el Núcleo de Fejér definido en el ejemplo 3.1. La segunda parte consiste en usar el hecho de que $\{K_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Dirac y dar un argumento tauberiano basado en (3.7), para demostrar que $f(u) \sim \ell e^u$ cuando $u \rightarrow \infty$, lo cual es equivalente a (3.5).

Primera parte. Puesto que α es la abscisa de convergencia de \widehat{F} , por el Teorema 2.1 tenemos que para todo $\delta > 0$

$$F(x) = o(x^{\alpha+\delta}), \quad (x \rightarrow \infty).$$

Debido al cambio de variable que hicimos al inicio, la anterior estimación implica que para todo $\delta > 0$,

$$f(u) = o(e^{u+\delta u}), \quad (u \rightarrow \infty). \quad (3.8)$$

Por otra parte, sean ϵ, λ números reales positivos e $y \in \mathbb{R}$, escribimos $s = 1 + \epsilon + it$. Debido a (3.6) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) e^{iyt} g_1(1 + \epsilon + it) dt &= \frac{1}{2} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) e^{iyt} \left[\int_0^\infty (f(u) - \ell e^u) e^{-u(1+\epsilon+it)} du \right] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-u-\epsilon u} (f(u) - \ell e^u) \left[\frac{1}{2} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) e^{it(y-u)} dt \right] du. \end{aligned}$$

El intercambio en el orden de integración se justifica por la convergencia de

$$\int_0^\infty e^{-u-\epsilon u} |f(u) - \ell e^u| du,$$

y debido al Teorema de Tonelli-Hobson (ver página 504 de Apostol (1988)). La anterior integral converge porque tomando $\delta = \epsilon/2$ en (3.8), $|f(u) - \ell e^u| = o(e^{u+\frac{\epsilon}{2}u})$, y así,

$$\begin{aligned} e^{-u-\epsilon u} |f(u) - \ell e^u| &= e^{-\frac{\epsilon}{2}u} [e^{-u} e^{-\frac{\epsilon}{2}u} |f(u) - \ell e^u|] \\ &\ll e^{-\frac{\epsilon}{2}u} \quad \text{cuando } u \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por (3.3), escribimos lo anterior en términos de K_λ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) e^{iyt} g_1(1 + \epsilon + it) dt = \int_0^\infty e^{-u-\epsilon u} f(u) K_\lambda(y-u) du - \ell \int_0^\infty e^{-\epsilon u} K_\lambda(y-u) du. \quad (3.9)$$

Ahora, puesto que g_1 es continua en $\sigma \geq 1$, debido al Lema 3.3, $g_1(1 + \epsilon + it)$ tiende a $g_1(1 + it)$ uniformemente en $[-2\lambda, 2\lambda]$ si $\epsilon \rightarrow 0^+$. Luego, la expresión del lado izquierdo de la anterior ecuación tiende a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) e^{iyt} g_1(1 + it) dt,$$

si $\epsilon \rightarrow 0^+$. Debido al Teorema de Convergencia Dominada (ver Apostol (1988) Teorema 10.27), tenemos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon u} K_{\lambda}(y - u) du = \int_0^{\infty} K_{\lambda}(y - u) du.$$

Por otra parte, ya que $f \in \mathbf{u}$ y f es no decreciente, $f \geq 0$, así, $e^{-u-\epsilon u} f(u) K_{\lambda}(y - u) \geq 0$ y creciente cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$. Debido al Teorema de Convergencia Monótona (Apostol (1988) Teorema 10.24), obtenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} e^{-u-\epsilon u} f(u) K_{\lambda}(y - u) du = \int_0^{\infty} e^{-u} f(u) K_{\lambda}(y - u) du.$$

Por lo tanto, si hacemos que $\epsilon \rightarrow 0^+$ en la ecuación (3.9), obtenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) e^{iyt} g_1(1 + it) dt = \int_0^{\infty} e^{-u} f(u) K_{\lambda}(y - u) du - \ell \int_0^{\infty} K_{\lambda}(y - u) du.$$

Debido al Lema 3.2, la expresión del lado izquierdo de la anterior ecuación tiende a 0 cuando $y \rightarrow \infty$. De esta forma,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-u} f(u) K_{\lambda}(y - u) du - \ell \int_0^{\infty} K_{\lambda}(y - u) du \right] = 0.$$

Pero, si hacemos un cambio de variable, tenemos que

$$\int_0^{\infty} K_{\lambda}(y - u) du = \int_{-\infty}^y K_{\lambda}(x) dx.$$

De modo que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} K_{\lambda}(y - u) du = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda}(x) dx = 1,$$

y de lo anterior, obtenemos (3.7).

Antes de hacer una demostración formal de la segunda parte, podemos terminar procediendo por un argumento heurístico. Sea

$$J(y, \lambda) := \int_0^\infty e^{-x} f(x) K_\lambda(y-x) dx.$$

Acabamos de demostrar que $\lim_{y \rightarrow \infty} J(y, \lambda) = \ell$. Por la Proposición 3.2, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J(y, \lambda) = e^{-y} f(y)$. Luego, si asumimos el siguiente intercambio de límites

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} J(y, \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} J(y, \lambda),$$

obtenemos que $\lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y} f(y) = \ell$, y con esto terminamos.

Segunda parte. Empezamos el argumento tauberiano probando que

$$f(y) \ll e^y, \quad (y \rightarrow \infty).$$

Sea $\delta > 0$. Ya que el integrando de $J(y, \lambda)$ es no negativo, y tanto f como la función exponencial son monótonas, tenemos que para cualquier $y > \delta$

$$J(y, \lambda) \geq \int_{y-\delta}^{y+\delta} e^{-x} f(x) K_\lambda(y-x) dx \geq f(y-\delta) e^{-y-\delta} \int_{-\delta}^\delta K_\lambda(u) du.$$

Combinando la última desigualdad con la estimación $J(y, \lambda) = \ell + o(1)$, ($y \rightarrow \infty$), tenemos que

$$f(y-\delta) e^{-(y-\delta)} \leq \frac{e^{2\delta} \ell}{\int_{-\delta}^\delta K_\lambda(u) du} + o(1), \quad (y \rightarrow \infty). \quad (3.10)$$

Lo cual implica que $f(y) e^{-y}$ es acotada para toda $y \geq 0$.

Ahora escogemos $\delta = (\frac{2}{\lambda\pi})^{1/2}$. Por (D3) del ejemplo 3.1 tenemos que

$$\int_{|u|>\delta} K_\lambda(u) du \leq \frac{2}{\lambda\delta\pi} = \delta,$$

y por lo tanto

$$\int_{-\delta}^\delta K_\lambda(u) du \geq 1 - \delta. \quad (3.11)$$

Sea $\epsilon > 0$. Escogemos λ suficientemente grande (y por tanto δ suficientemente pequeño) para asegurar que $e^{2\delta}(1-\delta)^{-1} < 1 + \epsilon$. Con esta elección de λ , se deduce de (3.10) y (3.11) que

$$f(y)e^{-y} \leq (1 + \epsilon)\ell + o(1), \quad y \rightarrow \infty.$$

Debido a que esta relación se cumple para cualquier $\epsilon > 0$, obtenemos

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} f(y)e^{-y} \leq \ell.$$

Vamos ahora a obtener una desigualdad en el sentido opuesto. Ya que $f(y)e^{-y}$ es acotada, existe un $b > 0$ tal que $f(y)e^{-y} \leq b$ para todo $y \geq 0$. Para cualesquiera λ e y positivos, tenemos que

$$\begin{aligned} J(y, \lambda) &\leq b \int_{|u| > \delta} K_\lambda(u) du + f(y + \delta)e^{-y+\delta} \int_{-\delta}^{\delta} K_\lambda(u) du \\ &\leq b\delta + f(y + \delta)e^{-(y+\delta)} e^{2\delta}. \end{aligned}$$

Por la última desigualdad y (3.7), tenemos que

$$f(y)e^{-y} \geq e^{-2\delta}\ell - b\delta e^{-2\delta} + o(1) \quad (y \rightarrow \infty),$$

para cada par de λ y δ fijos que satisfacen la relación $\lambda\delta^2 = 2/\pi$. Luego, para cada $\delta > 0$ tenemos que

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} f(y)e^{-y} \geq e^{-2\delta}\ell - b\delta e^{-2\delta},$$

y por lo tanto

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} f(y)e^{-y} \geq \ell.$$

Las dos desigualdades implican que $\lim_{y \rightarrow \infty} f(y)e^{-y} = \ell$. □

Observación. Para demostrar el TNP, queremos aplicar el teorema anterior a $F(x) = \psi(x)$ y $\alpha = 1 = L$. Para esto, recordemos de la Proposición 2.1 que

$$\widehat{\psi}(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}, \quad \sigma > 1.$$

Donde ζ es la función zeta de Riemann definida en el ejemplo 1.6. Luego, si demostramos que

1. ζ se puede extender analíticamente a la izquierda de la recta vertical $\sigma = 1$, excepto en $s = 1$,
2. $\widehat{\psi}$ tiene un polo simple con residuo 1 en $s = 1$, y
3. ζ no tiene ceros en la recta vertical $\sigma = 1$.

Entonces

$$\widehat{\psi}(s) = \frac{1}{s-1} + g(s),$$

con g analítica en el semiplano cerrado $\sigma \geq 1$, y así, obtenemos el TNP:

$$\psi(x) \sim x, \quad x \rightarrow \infty.$$

3.3. Continuación analítica de ζ y propiedades básicas

La función zeta de Riemann ζ se definió originalmente en el semiplano $\sigma > 1$. Un proceso análogo al de integración por partes permite extender la definición de ζ al semiplano $\sigma > 0$, y esto es consecuencia del siguiente resultado.

Proposición 3.3. Existe una función h analítica en el semiplano abierto $\sigma > 0$ tal que

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + h(s),$$

y por lo tanto, ζ tiene un polo simple con residuo 1 en $s = 1$.

Demostración. Por el Ejemplo 1.6, tenemos para $\sigma > 1$ que

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \int_{1^-}^{\infty} x^{-s} d\llbracket x \rrbracket = \frac{1}{s-1} - \int_{1^-}^{\infty} x^{-s} d(x - \llbracket x \rrbracket) \\ &= \frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^{\infty} \frac{x - \llbracket x \rrbracket}{x^{s+1}} dx. \end{aligned}$$

Puesto que la última integral converge absolutamente para $\sigma > 0$, el Teorema 2.3 nos garantiza que

$$h(s) := 1 - s \int_1^\infty \frac{x - \llbracket x \rrbracket}{x^{s+1}} dx \quad (3.12)$$

es analítica en $\sigma > 0$. □

Observación La función zeta de Riemann se puede continuar analíticamente a todo el plano complejo excepto en el polo simple $s = 1$, via la siguiente ecuación funcional que Riemann demostró en su famoso artículo en 1859,

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}(\pi s/2) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

Lema 3.4. $\widehat{\psi}$ tiene un polo simple con residuo 1 en $s = 1$.

Demostración. Consideremos la función h definida en (3.12). Debido a la Proposición 3.3, tenemos que para $\sigma > 0$

$$\zeta(s) = \frac{H(s)}{s-1},$$

donde $H(s) := 1 + (s-1)h(s)$. Luego,

$$\zeta'(s) = \frac{H'(s)}{s-1} - \frac{H(s)}{(s-1)^2} = \frac{H(s)}{s-1} \left[\frac{-1}{s-1} + \frac{H'(s)}{H(s)} \right].$$

Por lo tanto, para $\sigma > 0$ tenemos que

$$\widehat{\psi}(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} - \frac{H'(s)}{H(s)}.$$

□

Observación. (TNP) Para terminar de justificar la demostración del TNP nos hace falta probar que ζ no tiene ceros en la recta vertical $\sigma = 1$. Recordemos que para $\sigma > 1$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \widehat{\psi}(s) = \int_1^\infty u^{-s} d\psi(u) = \int_0^\infty e^{-sx} d\psi(e^x).$$

Probaremos un resultado más general que tomamos de Coppel (2009).

Proposición 3.4. Sea f una función analítica en el semiplano cerrado $\Re(s) \geq 1$, excepto por un polo simple en $s = 1$ con residuo 1. Si para $\Re(s) > 1$, $f(s) \neq 0$ y

$$-\frac{f'(s)}{f(s)} = \int_0^\infty e^{-sx} d\phi(e^x),$$

donde ϕ es una función no decreciente en $[0, \infty)$. Entonces

$$f(1+it) \neq 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Demostración. Recordemos nuestra notación $s = \sigma + it$; $\sigma, t \in \mathbb{R}$. Sea

$$g(\sigma, t) = -\Re(f'(s)/f(s)) \quad \sigma > 1.$$

De modo que

$$g(\sigma, t) = \int_0^\infty e^{-\sigma x} \cos(tx) d\phi(x), \quad \sigma > 1.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} g(\sigma, t)^2 &\leq \int_0^\infty e^{-\sigma x} d\phi(x) \int_0^\infty e^{-\sigma x} \cos^2(tx) d\phi(x) \\ &= g(\sigma, 0) \int_0^\infty e^{-\sigma x} [1 + \cos(2tx)] d\phi(x) / 2 \\ &= g(\sigma, 0)[g(\sigma, 0) + g(\sigma, 2t)] / 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$g(\sigma, t)^2 \leq g(\sigma, 0)[g(\sigma, 0) + g(\sigma, 2t)] / 2. \quad (3.13)$$

Ya que f tiene un polo simple con residuo 1 en $s = 1$, por el mismo argumento dado en el Lema 3.4, $-\frac{f'}{f}$ también tiene un polo simple en $s = 1$ con residuo 1, y así

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} (\sigma - 1)g(\sigma, 0) = 1.$$

Ahora, si f tiene un cero de multiplicidad $m = m(t) \geq 0$ en $a = a(t) := 1 + it$, escribimos $f(s) = (s - a)^m q(s)$, donde q es analítica en a y $q(a) \neq 0$. De esta forma, en una vecindad de a sin este punto,

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{m}{s - a} + \frac{q'(s)}{q(s)},$$

Por definición de g y la anterior ecuación,

$$(\sigma - 1)g(\sigma, t) = -(\sigma - 1)\Re\left(\frac{f'(\sigma + it)}{f(\sigma + it)}\right) = -\Re\left[(\sigma - 1)\left(\frac{m}{\sigma + it - 1 - it} + \frac{q'(\sigma + it)}{q(\sigma + it)}\right)\right].$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} (\sigma - 1)g(\sigma, t) = -m(t).$$

Finalmente, si en la desigualdad (3.13) multiplicamos por $(\sigma - 1)^2$ y hacemos tender $\sigma \rightarrow 1^+$, obtenemos que

$$m(t)^2 \leq [1 - m(2t)]/2 \leq 1/2.$$

Por lo tanto, como $m(t) \in \mathbb{N}$, $m(t) = 0$. □

Corolario 3.1. La función ζ no tiene ceros en la recta vertical $\sigma = 1$.

Corolario 3.2. $\zeta(s) \neq 0$, para $\Re(s) \geq 1$.

3.4. TNP con ponderación

Nuestro próximo objetivo es ilustrar la distribución de los números primos con una ponderación adecuada. En términos técnicos vamos a encontrar el comportamiento asintótico de una función suma de Λ (función de von Mangoldt) con algunas ponderaciones.

Sea G la función suma de Λ con ponderación W . Por la segunda parte de la Definición 1.3, G esta definida formalmente por medio de

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)W\left(\frac{n}{x}\right), \quad x \geq 1. \quad (3.14)$$

Debido al Teorema 2.2 y a la Proposición 2.1,

$$\widehat{G}(s) = \widehat{\psi}(s) s W^M(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} s W^M(s). \quad (3.15)$$

Ejemplo 3.2.

(1) En este primer ejemplo observamos que es posible obtener TNP con la ponderación

$$W(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y \leq 1, \\ 0 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

Pues, en este caso (3.14) se convierte en

$$G(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \psi(x).$$

De esta manera, aplicando el Teorema de Wiener-Ikehara (Teorema de W-I) a $G = \psi$, obtenemos como vimos en la sección anterior que

$$\psi(x) \sim x, \quad x \rightarrow \infty.$$

(2) Consideremos la ponderación $W_L(y) := e^{-\frac{y}{L}}$ con parámetro fijo $L > 0$. Ya vimos en el Ejemplo 1.3 que

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) e^{-\frac{n}{xL}}$$

converge para $x \geq 1$. En este caso (3.15) se convierte en

$$\widehat{G}(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} s L^s \Gamma(s) \quad \text{para } \Re(s) > 1,$$

donde Γ es la función Gamma que definimos en el Ejemplo 2.5. Ahora, por el Lema 3.4 y el hecho de que ζ no tiene ceros en la recta vertical $\sigma = 1$, se deduce que

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} + h(s),$$

donde h es una función analítica en $\sigma \geq 1$. Sea $\omega(s) := s L^s \Gamma(s)$, ω es analítica en $\sigma > 0$ y al expresarla como una serie de Taylor alrededor de $s = 1$, tenemos que

$$\omega(s) = L + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{(n)}(1)}{n!} (s-1)^n.$$

Por lo tanto

$$\widehat{G}(s) = \frac{L}{s-1} + g(s), \quad \sigma > 1.$$

Donde g es una función analítica en $\sigma \geq 1$, y por el Teorema de W-I,

$$G(x) \sim Lx, \quad x \rightarrow \infty.$$

Antes de continuar, observamos que

$$W_L^M(1) = \int_0^\infty W_L(x) dx = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{L}} = L = \omega(1),$$

y esto será la base de nuestra próxima digresión.

Tomemos como ponderación a una función de densidad de una distribución de probabilidad, de modo que

$$\int_0^\infty W(y) dy = 1, \quad \text{y así,} \quad W^M(1) = 1.$$

Supongamos que la abscisa de convergencia absoluta de W^M es menor o igual que 1. Por lo tanto

$$\widehat{G}(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} s W^M(s), \quad \sigma > 1.$$

Usando el mismo argumento del ejemplo anterior y aplicando el Teorema de W-I, obtenemos que $G(x) \sim x$. Así, hemos probado lo siguiente.

Corolario 3.3. Sea G una función suma ponderada de Λ , de tal forma que la ponderación W sea una función de densidad de probabilidad tal que $\sigma_a(W^M) < 1$. Entonces

$$G(x) \sim x, \quad (x \rightarrow \infty).$$

Finalizamos con el siguiente ejemplo que ilustra como podemos aplicar el Teorema de Wiener-Ikehara para un $\alpha \neq 1$.

Ejemplo 3.3. Sea G como en (3.14) y consideremos la ponderación $W(y) = y^{-2}e^{-y}$. De esta forma (3.15) se convierte en

$$\widehat{G}(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} s \Gamma(s-2), \quad \sigma > 2.$$

Aquí $\sigma_c(\widehat{G}) = 2$ y \widehat{G} tiene una singularidad en $s = 2$.

La función Gamma tiene un polo simple con residuo 1 en $s = 0$ (ver página 63 de Guelfond (2010)). Luego, \widehat{G} tiene un polo simple en $s = 2$ con residuo

$$-2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} =: L,$$

y debido al Teorema de W-I tenemos que

$$G(x) \sim -\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} x^2, \quad (x \rightarrow \infty).$$

Recordemos que por la última igualdad de la Proposición 2.1,

$$\zeta'(2) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} < 0.$$

Capítulo 4

Teoremas de oscilación

4.1. Motivación

El TNP el cual demostramos en el capítulo anterior, lo podemos expresar como

$$\psi(x) = x + o(x), \quad (x \rightarrow \infty).$$

La anterior estimación se puede mejorar con la siguiente

$$\psi(x) = x + O(xe^{-a\sqrt{\log x}}) \quad (x \rightarrow \infty),$$

donde a es una constante absoluta positiva (ver Teorema 23 de Ingham (1932)). Se sabe que la mejor estimación posible es

$$\psi(x) = x + O(x^{1/2+\epsilon}) \quad (x \rightarrow \infty), \quad \text{para cualquier } \epsilon > 0,$$

la cual es equivalente a la Hipótesis de Riemann (ver Teorema 8.12 de Bateman & Diamond (2004)). Uno de los objetivos de este capítulo es ver qué sucede cuando $\epsilon = 0$. Empezaremos introduciendo la siguiente notación.

Definición 4.1 (Notación “omega” grande). Sean $f, g : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y tal que g tome valores positivos.

1. $f(x) = \Omega(g(x))$ significa que existen una sucesión $x_n \rightarrow \infty$ y una constante $K > 0$ independiente de $\{x_n\}$ tal que $|f(x_n)| \geq Kg(x_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
2. $f(x) = \Omega_+(g(x))$ significa que existen una sucesión $x_n \rightarrow \infty$ y una constante $K > 0$ independiente de $\{x_n\}$ tal que $f(x_n) > Kg(x_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
3. Si $f(x_n) < Kg(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces escribimos $f(x) = \Omega_-(g(x))$.

4. Utilizamos Ω_{\pm} para denotar que ambos Ω_+ y Ω_- tienen lugar.

Observación. La notación “omega” grande es la negación de la “o” pequeña:

$$f(x) = \Omega(g(x)) \Leftrightarrow f(x) \neq o(g(x)).$$

4.2. Teorema de oscilación de Landau

4.2.1. Versión cualitativa

En esta sección veremos una versión cualitativa del Teorema de oscilación de Landau, un primer paso para luego ver y aplicar una versión cuantitativa de este teorema.

Teorema 4.1. (Teorema de oscilación de Landau). Sea $F \in \mathbf{U}$ (ver definición 1.6), y supongamos que \widehat{F} tiene abscisa de convergencia $\sigma_c > 0$. Si \widehat{F} tiene una continuación analítica a una región que incluye el punto $s = \sigma_c$, entonces F cambia de signo una infinidad de veces.

Demostración. Supongamos por el contrario que existe $x_0 > 1$ de tal manera que

$$F(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \geq x_0,$$

Vamos a demostrar que la integral que define a \widehat{F} converge a la izquierda de σ_c , lo cual es imposible, ya que σ_c es la abscisa de convergencia de \widehat{F} .

Para $\sigma = \Re(s) > \sigma_c$ definimos

$$f(s) := \int_1^{\infty} \frac{F(x)}{x^{s+1}} dx.$$

Por el Corolario 2.1 tenemos que $f(s) = \frac{1}{s} \widehat{F}(s)$, si $\sigma > \sigma_c$.

Luego, la abscisa de convergencia de f también es σ_c , y por hipótesis, f tiene una continuación analítica en σ_c . Expandimos a f en una serie de Taylor alrededor de un punto real $\beta > \sigma_c$:

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\beta)}{n!} (s - \beta)^n.$$

A partir de la definición de f ,

$$f(s) = \int_1^{\infty} x^{-s} x^{-1} F(x) dx = \int_1^{\infty} x^{-s} dH(x) = \widehat{H}(s),$$

con

$$H(x) := \begin{cases} \int_1^x t^{-1} F(t) dt & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Debido al Teorema 2.3, tenemos que

$$f^{(n)}(\beta) = \int_1^\infty \frac{(-\log x)^n F(x)}{x^{\beta+1}} dx.$$

Luego, para cualquier $X \geq x_0$,

$$(-1)^n f^{(n)}(\beta) = \int_1^\infty \frac{F(x)(\log x)^n}{x^\beta} dx \geq \int_1^X \frac{F(x)(\log x)^n}{x^\beta} dx.$$

Ya que \hat{F} es analítica en σ_c , entonces f es analítica en $\{\sigma : \sigma > \sigma_c\} \cup \{\sigma : |\sigma - \sigma_c| < \delta\}$ para algún $\delta > 0$. Sea R un número positivo tal que el disco con centro en β y radio R está contenido en el dominio de analiticidad pero no en $\{\sigma : \sigma \geq \sigma_c\}$. Sea s un número real tal que $s < \sigma_c$, $|s - \sigma_c| < \delta$ y $|s - \beta| < R$ (Ver figura 4.1).

Entonces

$$\begin{aligned} f(s) &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta - s)^n}{n!} \int_1^X \frac{F(x)(\log x)^n}{x^{\beta+1}} dx \\ &= \int_1^X \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta - s)^n (\log x)^n}{n!} \frac{F(x)}{x^{\beta+1}} dx \\ &= \int_1^X \frac{F(x)}{x^{\beta+1}} e^{(\beta-s)\log x} dx = \int_1^X \frac{F(x)}{x^{s+1}} dx. \end{aligned}$$

La primera igualdad es válida porque la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta-s)^n (\log x)^n}{n!} \frac{F(x)}{x^{\beta+1}}$ converge uniformemente para $1 \leq x \leq X$. Para ver esto, si M es una cota de $\frac{F(x)}{x^{\beta+1}}$ en $1 \leq x \leq X$, entonces

$$\left| \frac{(\beta - s)^n (\log x)^n}{n!} \frac{F(x)}{x^{\beta+1}} \right| \leq \frac{M(\beta - s)^n (\log X)^n}{n!},$$

y como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M(\beta - s)^n (\log X)^n}{n!} = M e^{(\beta-s)\log X} < \infty,$$

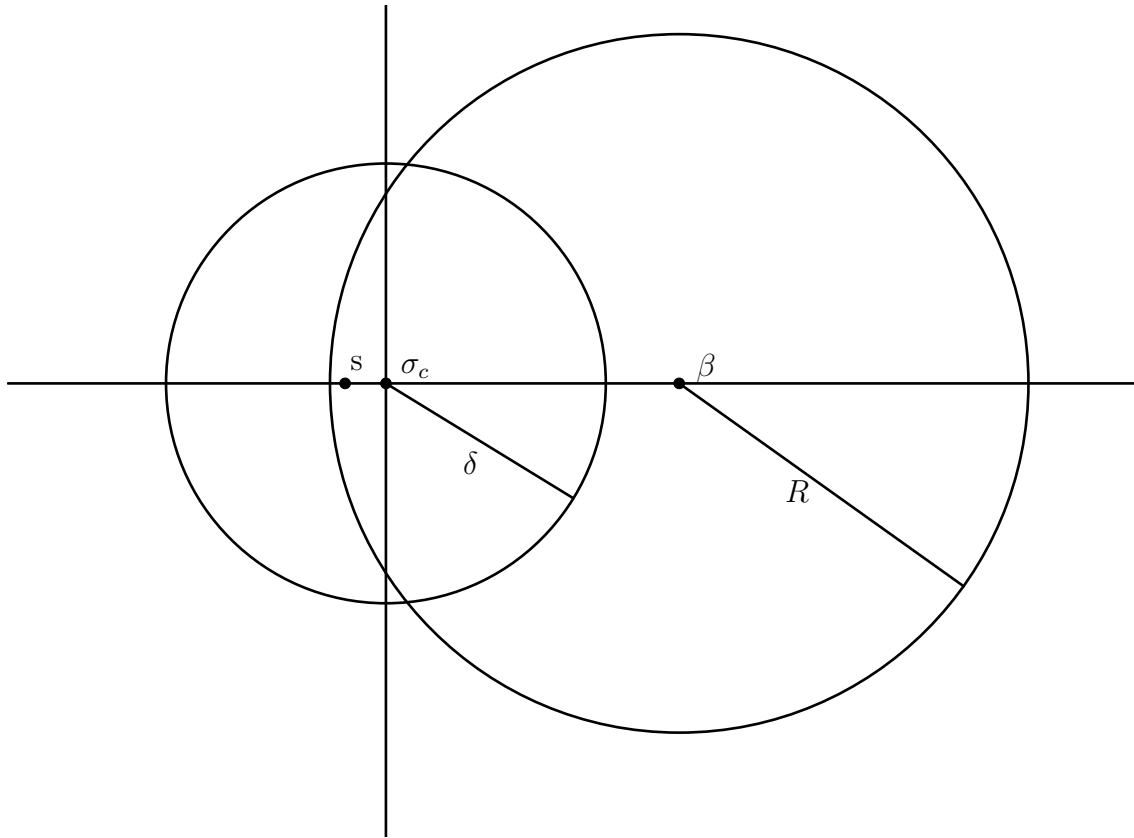


Figura 4.1: Extensión de la región de convergencia

por el test M de Weierstrass obtenemos la convergencia uniforme requerida. Bajo nuestra suposición hemos probado que $\int_1^\infty \frac{F(x)}{x^{s+1}} dx$ converge y así, $\widehat{F}(s)$ converge (contradicción!). Por lo tanto, existe una sucesión $x_n \rightarrow \infty$ tal que $F(x_n) < 0$.

Análogamente, si existe algún $x_1 > 1$ de modo que

$$F(x) \leq 0 \quad \text{para todo } x \geq x_1,$$

llegamos a una contradicción y en este caso existe una sucesión $y_n \rightarrow \infty$ tal que $F(y_n) > 0$. \square

Ejemplo 4.1.

(1) Sea

$$F(x) = \begin{cases} \psi(x) - x & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Por (2) del Ejemplo 2.1 y la Proposición 2.1, tenemos que

$$\widehat{F}(s) = \widehat{\psi}(s) - \frac{s}{s-1} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} - 1.$$

Debido al Lema 3.4 y a la ecuación anterior, se cancela el polo simple de $\widehat{\psi}$ en $s = 1$. Luego, debido al teorema anterior, F cambia de signo una infinidad de veces.

$$(2) \quad \psi(x) - x = \Omega_{\pm}(x^{\alpha}), \quad \text{para } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \text{ fijo.}$$

En efecto, sea

$$F(x) = \begin{cases} \psi(x) - x + x^{\alpha} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Por linealidad de la transformada de M-S,

$$\widehat{F}(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{s}{s-1} + \frac{s}{s-\alpha}.$$

Sea σ_c la abscisa de convergencia de \widehat{F} . Luego $\sigma_c \geq \frac{1}{2} > \alpha$. Ahora, debido a que la función ζ no tiene ceros en el eje real positivo (Corolario 3.2 y ver página 96 de Edwards (2001)), entonces \widehat{F} es analítica en σ_c . Así, por el teorema anterior, existe $x_n \rightarrow \infty$ tal que

$$\psi(x_n) - x_n < -x_n^{\alpha}.$$

Argumentando de forma similar, tomando $F(x) = \psi(x) - x - x^{\alpha}$, se prueba que existe $y_n \rightarrow \infty$ tal que

$$\psi(y_n) - y_n > y_n^{\alpha},$$

y por lo tanto,

$$\psi(x) - x = \Omega_{\pm}(x^{\alpha}).$$

De acuerdo a la discusión en la primera parte de la sección 1.2 y al TNP, el promedio de los valores de $\Lambda(n)$ es 1 en el sentido de

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \sim 1, \quad (x \rightarrow \infty).$$

La observación anterior nos lleva al siguiente resultado.

Corolario 4.1. Sean $f(n) = \Lambda(n) - 1$ y G la función suma de f con ponderación W , de tal forma que la abscisa de convergencia absoluta de la transformada de Mellin de W sea menor que 1, es decir, $\sigma_a(W^M) < 1$. Además, supongamos que $G \in \mathfrak{U}$ y que la serie que define a G converge para $x > 0$, es decir,

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\Lambda(n) - 1) W\left(\frac{n}{x}\right) < \infty, \quad x > 0,$$

Entonces G cambia de signo una infinidad de veces.

Demostración. La función suma de f es dada por

$$F(x) = \sum_{n \leq x} (\Lambda(n) - 1) = \psi(x) - \llbracket x \rrbracket.$$

Tomando la transformada de M-S tenemos que

$$\widehat{F}(s) = \widehat{\psi}(s) - \int_{1^-}^{\infty} x^{-s} d\llbracket x \rrbracket = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s).$$

De modo que ζ cancela el polo simple de $-\frac{\zeta'}{\zeta}$ en $s = 1$. Por el Teorema 2.2,

$$\widehat{G}(s) = -s \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s) \right) W^M(s), \quad \Re(s) > 1.$$

De esta forma, \widehat{G} tiene abscisa de convergencia $\sigma_c = 1$ y tiene una continuación analítica en este punto. Por lo tanto, debido al Teorema 4.1, G cambia de signo una infinidad de veces. \square

4.2.2. Versión cuantitativa

Queremos ahora explicar por qué

$$\psi(x) - x = \Omega_{\pm}(x^{\frac{1}{2}}).$$

La siguiente versión del Teorema de oscilación de Landau nos permitirá probar esta estimación, y aún más, cuantificar la constante K que aparece en la definición 4.1. Empezaremos con el siguiente lema.

Lema 4.1. Sea β un número real, m un entero positivo y supongamos que $\sigma = \Re(s) > \beta$. Entonces

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{\beta}(\log x)^{m-1}}{x^{s+1}\Gamma(m)} dx = \frac{1}{(s-\beta)^m}.$$

Recordando que en este caso, $\Gamma(m) = (m-1)!$.

Demostración. Sea $h(x) = x^{\beta}$. Entonces

$$\hat{h}(s) = \int_1^{\infty} x^{-s} dh(x) = \beta \int_1^{\infty} x^{-s} x^{\beta-1} dx = \frac{\beta}{s-\beta},$$

por lo tanto, \hat{h} es analítica en $\sigma > \beta$ y además, tenemos por el Teorema 2.3 que

$$\begin{aligned} (-1)^{m-1} \int_1^{\infty} \frac{x^{\beta}(\log x)^{m-1}}{x^{s+1}} \beta dx &= \int_1^{\infty} x^{-s} (-\log x)^{m-1} \beta x^{\beta-1} dx \\ &= \hat{h}^{(m-1)}(s) \\ &= \frac{(-1)^{m-1} \beta \Gamma(m)}{(s-\beta)^m}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se verifica haciendo inducción sobre m . □

Teorema 4.2. (Versión cuantitativa del Teorema de oscilación). Sea F una función en \mathfrak{U} . Suponga que \widehat{F} existe y tiene una continuación a una función meromorfa que tiene un polo de orden $m \geq 1$ en algún punto $\beta + i\gamma$, con $\beta > 0$ y $\gamma > 0$, y que la parte principal es

$$\sum_{j=-1}^{-m} c_j (s - \beta - i\gamma)^j.$$

Además, suponga que \widehat{F} no tiene singularidades en la semirrecta real $[\beta, \infty]$. Entonces

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x^\beta (\log x)^{m-1}} \geq \frac{|c_{-m}|}{|\beta + i\gamma|(m-1)!} \quad (4.1)$$

y

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x^\beta (\log x)^{m-1}} \leq \frac{-|c_{-m}|}{|\beta + i\gamma|(m-1)!} \quad (4.2)$$

Demostración. Llamaremos $H(x) := x^\beta (\log x)^{m-1}$. Demostraremos (4.2) y al final de la prueba veremos como se deduce (4.1). Supondremos que existe $c > 0$ tal que

$$F(x) + \frac{c}{\Gamma(m)} H(x) > 0,$$

para todos los valores de x suficientemente grandes. Si tal c no existiera, tendríamos que

$$(\forall c > 0)(\forall X > 0)(\exists x > X) \left[\frac{F(x)}{H(x)} \leq \frac{-c}{\Gamma(m)} \right],$$

y esto significa que existe una sucesión $x_n \rightarrow \infty$ tal que $\frac{F(x_n)}{H(x_n)} \rightarrow -\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Por lo tanto $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{H(x)} = -\infty$, y no hay nada que demostrar.

Ahora, sea $\sigma > \beta$ de tal manera que $s = \sigma + it$ sea cercano a $\beta + i\gamma$ (los polos de una función meromorfa son aislados). Tenemos que

$$\frac{\widehat{F}(s)}{s} = \int_1^\infty x^{-s-1} F(x) dx.$$

En efecto, recordemos que esta igualdad se cumple para $\sigma > \sigma_c = \sigma_c(\widehat{F}) \geq \beta$, además, debido a que \widehat{F} tiene una continuación a una función meromorfa, $\int_1^\infty x^{-s-1} F(x) dx$ también y coincide con $\frac{\widehat{F}(s)}{s}$ cerca de $\beta + i\gamma$ por la unicidad en la continuación analítica.

Por otra parte, debido al Lema 4.1, tenemos para $\sigma > \beta$ que

$$\begin{aligned}
g(s) &:= \frac{\widehat{F}(s)}{s} + \frac{c}{(s-\beta)^m} \\
&= \int_1^\infty x^{-s} \left[F(x) + \frac{c}{\Gamma(m)} x^\beta (\log x)^{m-1} \right] x^{-1} dx =: \int_1^\infty x^{-s} f(x) dx.
\end{aligned}$$

Ya que f es positiva para todo $x \geq X$, con algún $X \geq 1$, podemos escribir

$$g(s) = \int_1^X x^{-s} f(x) dx + \int_X^\infty x^{-s} f(x) dx.$$

Luego

$$\begin{aligned}
|g(s)| &\leq \int_1^X |x^{-s}| |f(x)| dx + \int_X^\infty |x^{-s}| f(x) dx \\
&= \int_1^X x^{-\sigma} |f(x)| dx - \int_1^X x^{-\sigma} f(x) dx + \int_1^\infty x^{-\sigma} f(x) dx \\
&= \int_1^X x^{-\sigma} (|f(x)| - f(x)) dx + g(\sigma) \\
&= g(\sigma) + O(1), \quad \text{cuando } \sigma \rightarrow \beta^+.
\end{aligned}$$

Observe que $g(\sigma) = \int_1^\infty x^{-\sigma} f(x) dx < \infty$ porque, por definición de g ,

$$g(\sigma) = \frac{\widehat{F}(\sigma)}{\sigma} + \frac{c}{(\sigma-\beta)^m},$$

y por hipótesis, \widehat{F} es analítica en $[\beta, \infty)$. Sea $s = \sigma + i\gamma$, con $\sigma > \beta$. Al hacer $\sigma \rightarrow \beta^+$ tendremos que

$$|g(\sigma + i\gamma)| = \frac{|c_{-m}|}{|\sigma + i\gamma|(\sigma - \beta)^m} [1 + o(1)]. \quad (4.3)$$

En efecto, por definición de g tenemos que

$$g(\sigma + i\gamma) = \frac{\widehat{F}(\sigma + i\gamma)}{\sigma + i\gamma} + \frac{c}{(\sigma - \beta + i\gamma)^m}.$$

Así,

$$(\sigma - \beta)^m g(\sigma + i\gamma) = \frac{(\sigma - \beta)^m \widehat{F}(\sigma + i\gamma)}{\sigma + i\gamma} + \frac{c(\sigma - \beta)^m}{(\sigma - \beta + i\gamma)^m}.$$

Por hipótesis,

$$\widehat{F}(\sigma + i\gamma) = \sum_{j=-1}^{-m} c_j (\sigma - \beta)^j + K(\sigma + i\gamma),$$

donde K es una función analítica en $\beta + i\gamma$. Luego

$$(\sigma - \beta)^m \widehat{F}(\sigma + i\gamma) = c_{-m} + (\sigma - \beta)L(\sigma),$$

con L analítica en $\beta + i\gamma$, de donde

$$g(\sigma + i\gamma) = \frac{c_{-m}}{(\sigma + i\gamma)(\sigma - \beta)^m} + \frac{L(\sigma)}{(\sigma + i\gamma)(\sigma - \beta)^{m-1}} + \frac{c}{(\sigma - \beta + i\gamma)^m}.$$

Por lo tanto

$$g(\sigma + i\gamma) = \frac{c_{-m}}{(\sigma + i\gamma)(\sigma - \beta)^m} \left[1 + \frac{(\sigma - \beta)L(\sigma)}{c_{-m}} + \frac{c(\sigma + i\gamma)(\sigma - \beta)^m}{c_{-m}(\sigma - \beta + i\gamma)^m} \right], \quad (4.4)$$

y de esto obtenemos (4.3). Además, hemos visto que

$$|g(\sigma + i\gamma)| \leq g(\sigma) + O(1), \quad (\sigma \rightarrow \beta^+).$$

Por definición de g ,

$$g(\sigma) = \frac{\widehat{F}(\sigma)}{\sigma} + \frac{c}{(\sigma - \beta)^m}, \quad (4.5)$$

y además, por ser \widehat{F} analítica en $[\beta, \infty)$, $\lim_{\sigma \rightarrow \beta^+} \frac{\widehat{F}(\sigma)}{\sigma} = \frac{\widehat{F}(\beta)}{\beta}$. Luego

$$g(\sigma) = \frac{c}{(\sigma - \beta)^m} + O(1), \quad (\sigma \rightarrow \beta^+).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{|c_{-m}|}{|\sigma + i\gamma|(\sigma - \beta)^m} [1 + o(1)] &= |g(\sigma + i\gamma)| \\
&\leq g(\sigma) + O(1) \\
&= \frac{c}{(\sigma - \beta)^m} + O(1) \quad \text{cuando} \quad (\sigma \rightarrow \beta^+).
\end{aligned}$$

De (4.4), (4.5) y la anterior desigualdad, tenemos que

$$\frac{|c_{-m}|}{|\beta + i\gamma|} \leq c.$$

Con lo que hemos demostrado, concluimos que para cada c' con $0 < c' < \frac{|c_{-m}|}{|\beta + i\gamma|}$ y suficientemente cercano a $\frac{|c_{-m}|}{|\beta + i\gamma|}$, existen valores de x arbitrariamente grandes tales que

$$F(x) + \frac{c'}{\Gamma(m)} H(x) \leq 0,$$

y esto implica (4.2). Veamos lo anterior en detalle: Fijemos $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{|c_{-m}|}{|\beta + i\gamma|} - \frac{1}{M} < \frac{|c_{-m}|}{|\beta + i\gamma|},$$

y denotemos $c' = c'(N) := \frac{|c_{-m}|}{|\beta + i\gamma|} - \frac{1}{N}$. Hemos demostrado que

$$(\forall N \geq M)(\forall A > 0)(\exists x > A) \left[F(x) + \frac{c'}{\Gamma(m)} H(x) \leq 0 \right].$$

Pero al observar que esta última desigualdad es equivalente a $\frac{F(x)}{H(x)} \leq \frac{-c'}{\Gamma(m)}$, y que $c' = c'(N) \rightarrow \frac{|c_{-m}|}{|\beta + i\gamma|}$ cuando $N \rightarrow \infty$, concluimos que

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{H(x)} \leq \frac{-|c_{-m}|}{\Gamma(m)|\beta + i\gamma|}.$$

Finalmente, después de probar la estimación (4.2), vamos a obtener (4.1) haciendo la misma demostración usando $-F$ en vez de F : Como al principio de la demostración, supondremos que existe $c > 0$ tal que

$$-F(x) + \frac{c}{\Gamma(m)} H(x) > 0, \quad \text{para todo } x \geq X, \quad \text{con algún } X \geq 1.$$

De lo contrario, existe $x_n \rightarrow \infty$ tal que $\frac{F(x_n)}{H(x_n)} \rightarrow \infty$ y obtenemos (4.1). Para $\sigma > \beta$ (suficientemente cercano a β) definimos

$$g(s) := \frac{-\widehat{F}(s)}{s} + \frac{c}{(s - \beta)^m}.$$

Siguiendo los mismos pasos de la demostración llegamos a que $c \geq \frac{|c-m|}{|\beta+i\gamma|}$, y de igual forma, si escogemos $c' < \frac{|c-m|}{|\beta+i\gamma|}$ suficientemente cercano a $\frac{|c-m|}{|\beta+i\gamma|}$, llegamos a que

$$\frac{c'}{\Gamma(m)} H(x) \leq F(x),$$

para algunos valores de x arbitrariamente grandes, y por lo tanto

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{H(x)} \geq \frac{|c-m|}{\Gamma(m)|\beta+i\gamma|}.$$

□

Corolario 4.2. $\psi(x) - x = \Omega_{\pm}(x^{\frac{1}{2}})$. Más aún,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{1/2}} > \frac{1}{15}, \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{1/2}} < -\frac{1}{15}.$$

Demostración. Sea $\rho_1 = \frac{1}{2} + i\gamma_1$ el cero no trivial con parte imaginaria positiva más cercano al origen de la función ζ de Riemann (ver página 96 de Edwards (2001)), con una aproximación de 6 cifras decimales, $\gamma_1 = 14.134725$. Sea

$$F(x) = \begin{cases} \psi(x) - x & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

En (1) del Ejemplo 4.1 verificamos que

$$\widehat{F}(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} - 1. \quad (4.6)$$

De esta forma se cancela el polo simple en $s = 1$ de $-\frac{\zeta'}{\zeta}$. Se sabe que ρ_1 es un cero simple de ζ , luego, por lo que vimos en la demostración de la Proposición 3.4, ρ_1 es un polo simple de $-\frac{\zeta'}{\zeta}$ con residuo -1 . Además, como mencionamos en (2) del Ejemplo 4.1, la función ζ no tiene ceros en el eje real positivo. Entonces, por el teorema anterior,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{1/2}} \geq \frac{1}{|\frac{1}{2} + i\gamma_1|} > \frac{1}{15}, \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{1/2}} \leq \frac{-1}{|\rho_1|} < -\frac{1}{15}.$$

Lo anterior implica que existen sucesiones $x_n \rightarrow \infty$ y $u_n \rightarrow \infty$ tales que

$$\psi(x_n) - x_n > \frac{1}{15}x_n^{1/2}, \quad \psi(u_n) - u_n < -\frac{1}{15}u_n^{1/2}.$$

□

Ejemplo 4.2. Sea

$$\omega(x) = \begin{cases} 30(x(1-x))^2 & \text{si } x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

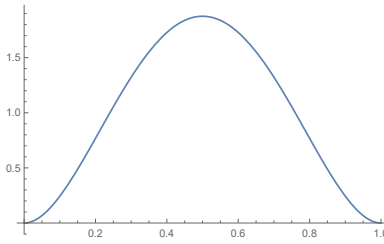


Figura 4.2: Gráfica de ω .

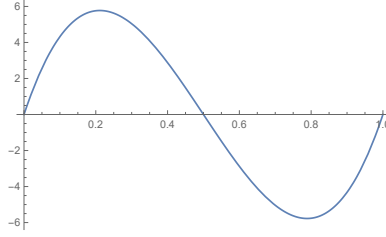
El factor 30 se ajusta para que la integral de $\omega(x)$ en el intervalo $[0, 1]$ sea igual a 1. Sea H la función suma de Λ con ponderación ω , entonces el Corolario 3.3 garantiza que $H(x) \sim x$ cuando $x \rightarrow \infty$, de modo que la ponderación ω no modifica la distribución de los números primos. Ahora, consideremos

$$W(x) := \omega'(x) = \begin{cases} 60x(1-x)(1-2x) & \text{si } x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Nuestro próximo objetivo consiste en demostrar que si G es la función suma de Λ con ponderación W , entonces G codifica el conteo de los números primos con signo positivo y negativo. En particular, que G cambia de signo una infinidad de veces, y queremos dar una primera estimación cuantitativa de su oscilación.

Empezamos con la cualidad que se tiene al transformar en el sentido de Mellin la derivada de una función, en nuestro caso particular

$$W^M(s) = -(s-1)\omega^M(s-1).$$

Figura 4.3: Gráfica de W .

La anterior relación se verifica integrando por partes. De modo que aplicando la transformada de Mellin-Stieltjes a G y usando el Teorema 2.2,

$$\widehat{G}(s) = \widehat{\psi}(s) s W^M(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}(s-1)[-s \omega^M(s-1)], \quad (4.7)$$

y así, se cancela el polo simple en $s = 1$ de $-\frac{\zeta'}{\zeta}$, concluyendo por el Teorema 4.1 que G cambia de signo una infinidad de veces. Para dar una primera estimación cuantitativa, debemos primero escribir en detalle la transformada de Mellin de ω :

$$\begin{aligned} \omega^M(s) &= 30 \int_0^1 (x(1-x))^2 x^{s-1} dx \\ &= 30 \left(\frac{1}{s+2} - \frac{2}{s+3} + \frac{1}{s+4} \right) = \frac{60}{(s+2)(s+3)(s+4)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\omega^M(s) = \frac{60}{(s+2)(s+3)(s+4)}, \quad \Re(s) > -2.$$

Sea $\rho_1 = \frac{1}{2} + i\gamma_1$ el cero no trivial con parte imaginaria positiva más cercano al origen de la función ζ . Como ya mencionamos en la demostración del corolario anterior, ρ_1 es un polo simple de $-\frac{\zeta'}{\zeta}$ con residuo -1 . Luego, debido a (4.7), ρ_1 es un polo simple de \widehat{G} con residuo

$$c_{-1} := \rho_1(\rho_1 - 1)\omega^M(\rho_1 - 1).$$

Haciendo un cálculo numérico, tenemos que $|c_{-1}| = 4.039841$ con una aproximación de 6 cifras decimales. Por lo tanto, debido a la versión cuantitativa del Teorema de oscilación de Landau, concluimos que

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{G(x)}{x^{1/2}} \geq \frac{|c_{-1}|}{|\frac{1}{2} + i\gamma_1|} > \frac{7}{25}, \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{G(x)}{x^{1/2}} \leq -\frac{|c_{-1}|}{|\rho_1|} < -\frac{7}{25}.$$

Bibliografía

- [1] **Apostol, T.M. (1988)** *Análisis Matemático*, Segunda Edición. Reverté España, 1988.
- [2] **Apostol, T.M. (1979)** *Calculus, Volumen 1*, Segunda Edición. Reverté España.
- [3] **Apostol, T.M. (1980)** *Introducción a la Teoría Analítica de los Números*. Reverté España, 1980.
- [4] **Ash, R.B. & Novinger, W.P. (2007)** *Complex Variables*, Segunda Edición. Dover Publications.
- [5] **Balanzario, E.P. (2003)** *Breviario de Teoría Analítica de los Números*, Sociedad Matemática Mexicana.
- [6] **Balanzario, E.P. (2001)** *Some Infinite Series Identities*
- [7] **Bateman, P.T. & Diamond H.G. (2004)** *Analytic Number Theory - An Introductory Course*. World Scientific, 2004.
- [8] **Chandrasekharan, K. (1968)** *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag, 1968.
- [9] **Coppel, W.A. (2009)** *Number Theory. An introduction to Mathematics*. Springer, Second Edition. Australia.
- [10] **Edwards, H.M. (2001)** *Riemann's Zeta Function* Dover Publications, Inc. New York.
- [11] **Galaz, F.F. (2002)** *Medida e integral de Lebesgue en \mathbb{R}^N* . Oxford, University Press, México.
- [12] **Guelfond, A.Ó. (2010)** *Residuos y sus aplicaciones*. Tercera Edición, KRASAND. URSS, Moscú.
- [13] **Hernández, H.S. (2002)** *Sobre enteros libres de cuadrados*. Tesis de Maestría. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas. Morelia, Michoacán, 2002.
- [14] **Hildebrand, A.J. (2005)** *Introduction to Analytic Number Theory*. Lecture Notes, Math 531.

- [15] **Ikehara, S. (1931)** “*An extension of Landau’s theorem in the analytic theory of numbers*”. Journal of Mathematics and Physics of the Massachusetts Institute of Technology.
- [16] **Ingham, A.E. (1932)** *The Distribution of Prime Numbers*. Cambridge Tracts in Mathematics, 1932.
- [17] **Lang, S. (1983)** *Undergraduate Analysis*. Springer-Verlag, 1983.
- [18] **Riemann, B. (1859)** *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. Monatsber. Akad. Berlin, 671-680.
- [19] **Rotman, J.J. (2010)** *Advanced Modern Algebra*. Second Edition, American Mathematical Society.
- [20] **Sautoy, M.D. (2007)** *La música de los números primos*. Acantilado Barcelona, 2007.
- [21] **Stein, E.M. & Shakarchi, R. (2003)** *Fourier Analysis. An Introduction*. Princeton University Press, 2003.
- [22] **Stein, E.M. & Shakarchi, R. (2005)** *Real Analysis*. Princeton University Press, 2005.
- [23] **Wiener, N. (1932)** “*Tauberian Theorems*” Annals of Mathematics, Second Series, 33 (1): 1-100.