



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ingeniería Eléctrica

**IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL
TIEMPO UTILIZANDO MATRICES OPERACIONALES**

TESIS

Que para obtener el título de
INGENIERO ELECTRICISTA

presenta

Stalin Madrigal Salinas

Dr. Edmundo Barrera Cardiel

Director de Tesis

Morelia, Mich.

Marzo 2007

A María y María de Jesús, por tanto amor y tanta paciencia...

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Edmundo Barrera Cardiel, por haber sido un gran director de tesis; por su disponibilidad, paciencia, amabilidad y valioso apoyo en el momento más adverso de la carrera, sin su ayuda no hubiese sido posible culminar este proyecto. Conjuntamente agradezco a su esposa, Ing. María de los Ángeles Dueñas Corona, por haberme alentado y distinguido en más de una ocasión, pero sobre todo por haber apuntado en la dirección correcta.

El agradecimiento especial es para mi mamá María y mi tía María de Jesús porque siempre estuvieron ahí, incondicionalmente, y porque les debo absolutamente todo, qué más puedo decir. Importante es también agradecer a mi papá Abraham, a mis hermanos: Abraham, Marilú, Esmeralda, Xochitl y Elsa, quienes contribuyeron con su sutil presencia en mi formación.

Cómo olvidar mencionar a dos grandes amigos de la clase de 2005, Concha y Tzintzun, con quienes estudié, me desesperé, lloré, festejé y compartí gran parte de mi tiempo. Gracias por su amistad y nunca olvidaré las travesías de cada fin de semana en las que correr campo traviesa se convertía en una divertida odisea.

También quiero agradecer a Gerardo, el esposo de mi hermana Marilú, por la disponibilidad que siempre ha tenido para ayudarme cuando lo requiero.

Por último, pero no menos importante, agradezco a la señora de la biblioteca, Q.F.B. Cecilia Herrera Abarca, por su buena voluntad y por todas las facilidades otorgadas para consultar el material bibliográfico durante la elaboración de esta tesis.

Resumen

En esta tesis se presenta un estudio comparativo de dos algoritmos de identificación de sistemas lineales invariantes en el tiempo. Los algoritmos están basados en el uso de matrices operacionales. El primer método hace uso de una aproximación de las señales mediante la serie de Hartley. El segundo basa la aproximación en una serie de funciones de bloques de pulsos. Ambos algoritmos permiten estimar directamente los parámetros del modelo continuo del sistema; es decir, permiten llevar a cabo la estimación sin tener que discretizar el modelo. Los métodos se comparan en lo que respecta a rapidez y exactitud. Se presentan los resultados experimentales de la aplicación de los métodos para estimar los parámetros de un motor de CD de imanes permanentes.

Contenido

Resumen	iii
Contenido	iv
Lista de Figuras	vii
Lista de Tablas	viii
1 Introducción	1
1.1 Justificación	1
1.2 Motivación	3
1.3 Objetivos	4
1.4 Estructura	5
2 Identificación de Sistemas	7
2.1 Introducción	7
2.2 Sistemas Dinámicos	8
2.3 Modelos	9
2.3.1 Tipos de Modelos y su Uso	9
2.3.1.1 Clasificación de los Modelos Matemáticos o Paramétricos	10
2.3.2 Construcción de Modelos	11
2.4 Procedimiento de Identificación de Sistemas	12
2.4.1 Entidades Básicas	12
2.4.2 Validación del Modelo	13
2.5 Espacio de Estados	15
2.6 Conclusiones	17
3 Representación de Funciones Mediante Series Ortogonales y Matrices Operacionales	19
3.1 Introducción	19
3.2 Definición de Ortogonalidad	21
3.3 Descripción General de las Series Ortogonales	22
3.3.1 Descripción General de las Propiedades Operacionales	24
3.4 Aplicación del Cálculo Operacional en la Identificación de Sistemas	25

3.5	Serie de Hartley	27
3.5.1	Deducción de la Serie de Hartley a Partir de la Serie de Fourier	29
3.5.2	Propiedades de la función $\text{cas}(\cdot)$	31
3.5.3	Aproximación de Funciones	32
3.5.4	Propiedades Operacionales	33
3.5.5	Transformada de Hartley	36
3.5.6	Transformada Discreta de Hartley	36
3.5.7	Transformada Rápida de Hartley	37
3.6	Serie de Funciones de Bloques de Pulsos	37
3.7	Conclusiones	43
4	Estimación de Parámetros del Motor de CD de Imanes Permanentes	44
4.1	Introducción	44
4.2	Principio de Funcionamiento del Motor de CD	45
4.3	Motor de CD de Imanes Permanentes	48
4.3.1	Motor de CD de Imanes Permanentes de Núcleo de Hierro	50
4.4	Modelo Matemático del Motor de CD de Imanes Permanentes	50
4.4.1	Representación del Modelo en la Forma de Espacio de Estados	54
4.4.2	Relación Entre K_T y K_e	55
4.5	Identificación de Parámetros Utilizando Matrices Operacionales	56
4.6	Mínimos Cuadrados	59
4.6.1	Deducción	60
4.7	Conclusiones	61
5	Resultados Experimentales	63
5.1	Introducción	63
5.2	Experimento Para la Estimación de Parámetros del Motor de CD de Imanes Permanentes	64
5.2.1	Acondicionamiento de Señales	65
5.2.1.1	Medición de Voltaje de Alimentación	65
5.2.1.2	Medición de Corriente de Armadura	66
5.2.1.3	Medición de Velocidad Angular	67
5.3	Reporte de Pruebas	72
5.3.1	Coefficiente de Correlación	72
5.3.2	Estimación de Parámetros Mediante la Serie de Hartley	73
5.3.3	Estimación de Parámetros Mediante la Serie de Funciones de Bloques Pulsos	77
5.4	Conclusiones	83
6	Conclusiones	85
6.1	Conclusiones Generales	85
6.2	Trabajos Futuros	88

Apéndice

89

Bibliografía

94

Lista de Figuras

2.1	Sistema con salida y , entrada u , perturbación medible w , y perturbación no medible v	8
2.2	Diagrama de flujo del procedimiento de identificación de sistemas	14
3.1	Kernels de la serie de funciones de bloques de pulsos	38
3.2	Aproximación utilizando la serie de funciones de bloques de pulsos	39
3.3	Aproximación de la integral del bloque 1	41
3.4	Aproximación de la integral del bloque 2	41
3.5	Aproximación de la integral del bloque 3	41
4.1	Esquema de construcción básico de un motor de CD	45
4.2	Conmutador de un motor de CD	46
4.3	Fuerzas magnéticas producidas por el campo magnético sobre la espira	47
4.4	Sección transversal de un motor de CD de imanes permanentes de núcleo de hierro	51
4.5	Circuito equivalente de un motor de CD de imanes permanentes	51
5.1	Experimento para la estimación de parámetros del motor de CD	65
5.2	Divisor de voltaje para medir el voltaje de alimentación	66
5.3	Amplificador no inversor con ajuste de offset	66
5.4	Diagrama de conexión para la conversión F/V	67
5.5	Filtrado de la señal del convertidor F/V	68
5.6	Gráfica de magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro	68
5.7	Diagrama de bloques del filtro de orden 3.	71
5.8	Filtro pasa bajas Butterworth de orden 3	71
5.9	Diagrama de flujo del algoritmo de estimación de parámetros mediante la serie de Hartley.	75
5.10	Comparación de la corriente de armadura medida con la obtenida de la simulación del modelo del motor con los parámetros estimados aplicando la serie de Hartley	76

5.11	Comparación de la velocidad angular medida con la obtenida de la simulación del modelo del motor con los parámetros estimados aplicando la serie de Hartley . .	77
5.12	Diagrama de flujo del algoritmo de identificación de parámetros mediante la serie de funciones de bloques de pulsos	78
5.13	Comparación de la corriente de armadura medida con la obtenida de la simulación del modelo del motor con los parámetros estimados aplicando la serie de funciones de bloques de pulsos	82
5.14	Comparación de la velocidad angular medida con la obtenida de la simulación del modelo del motor con los parámetros estimados aplicando la serie de funciones de bloques de pulsos	83

Lista de Tablas

3.1	Propiedades trigonométricas de la función $\text{cas}(\cdot)$	31
4.1	Variables y parámetros del motor de CD	52
5.1	Niveles de exactitud del coeficiente de correlación	73
5.2	Parámetros estimados mediante la serie de Hartley	75
5.3	Parámetros estimados mediante la serie de funciones de bloques de pulsos	82

Capítulo 1

Introducción

1.1 Justificación

El funcionamiento de los procesos industriales ha evolucionado drásticamente en las últimas décadas, debido principalmente al gran avance de las computadoras y de la circuitería digital. La automatización de procesos ha dado lugar a un incremento en la productividad y competitividad de algunos sectores industriales, obligando así a la industria a adaptarse a las nuevas demandas del mercado y a establecer índices en sus sistemas de producción que no tenían tanto peso en el pasado; tales como disponibilidad, costo-eficiencia, confiabilidad, seguridad y efectos ambientales.

Puesto que los procesos industriales están sujetos a severos requerimientos de competitividad y seguridad, la complejidad de los mismos es cada día mayor y actualmente enfrentan la necesidad de incorporar herramientas autómatas novedosas, manipuladas por controladores de alta calidad que permiten maximizar su eficiencia. El diseño e implementación física de un controlador requiere de un modelo de la planta a controlar que describa suficientemente su comportamiento dinámico, y para obtenerlo se utiliza como herramienta auxiliar la *identificación de sistemas*. Este modelo permite al diseñador ajustar y validar, mediante simulación, los parámetros del controlador a fin de obtener la respuesta que satisfaga el comportamiento deseado del sistema.

La identificación de sistemas es un problema que ha tenido recientemente un auge importante debido a la aparición de procesadores digitales, tarjetas de adquisición de datos y

plataformas de simulación que facilitan la implementación de algoritmos matemáticos. Históricamente se ha colocado a esta línea de investigación dentro del área de control, aunque dentro de la identificación de sistemas hay una convergencia de varias áreas: sistemas digitales, control, instrumentación, procesamiento digital de señales, etc. La identificación de sistemas consiste básicamente en obtener modelos gráficos (no paramétricos) o matemáticos (paramétricos) de sistemas dinámicos utilizando datos experimentales de entrada-salida. La identificación de un sistema se lleva a cabo ajustando parámetros de un modelo dado hasta que su salida coincida de la mejor manera con los datos de salida medidos. La identificación de sistemas es aplicable en áreas tan diversas como: procesos químicos, sistemas biomédicos, sistemas eléctricos, sistemas socioeconómicos, meteorología, hidrología, etc. [1], [2], [3].

Ya que actualmente los sistemas dinámicos abundan en nuestro entorno, las técnicas de identificación de sistemas han cobrado gran relevancia, y por ello científicos e ingenieros dedican tiempo y esfuerzo considerable a la obtención de modelos de los diversos procesos estudiados [4], [5], [6]. En general, las diversas áreas del conocimiento requieren modelos exactos para fines de análisis, control, supervisión, predicción, simulación, optimización, etc.

Según [7], las estrategias actuales de diseño de controladores pueden clasificarse en dos grupos: control convencional y control avanzado. El control convencional consistente en el control: manual, PID, de relación, en cascada, en adelante o retardo de fase. Según dicho autor, en la actualidad el 90 % de los controladores de procesos industriales se desarrollan bajo el esquema de control convencional. Las estrategias de control avanzado se subdividen en: técnicas de control basadas en modelos numéricos (control predictivo, control adaptativo, control robusto, control con modelo interno) y técnicas de control basadas en conocimiento (sistemas expertos, control neuronal, control fuzzy). Tanto para el uso de técnicas de diseño convencionales como técnicas avanzadas y especialmente las basadas en modelos, es necesario un modelo matemático exacto del proceso estudiado.

También es importante mencionar que los procesos industriales requieren sistemas de supervisión, encargados de detectar y diagnosticar fallas. Con una rápida detección de las fallas se pueden reducir costos de mantenimiento y evitar que pequeñas anomalías del sistema se traduzcan en fallas con consecuencias catastróficas para la planta e incluso para el

personal que ahí labora [5], [8]. Los sistemas de detección de fallas se basan en la obtención de síntomas, de señales indicadoras de fallas, y su análisis para indicar la posible existencia y localización de las mismas. Uno de los métodos utilizados para ello es la comparación del proceso con un modelo de simulación; a esto se le denomina diagnóstico basado en modelos [5].

El diseño de controladores y de sistemas de supervisión es sólo un breve y claro ejemplo del porqué es necesario disponer de un modelo que se ajuste de la mejor manera al comportamiento real del sistema bajo estudio.

Los métodos numéricos y las técnicas de identificación de sistemas aplicados al diseño de controladores han evolucionado paralelamente [5]. El origen de las técnicas de identificación aplicadas a procesos con una entrada y una salida (SISO, de las siglas en inglés Simple Input Simple Output) data de principios de la década de los 1970's, pero fue hasta finales de la década de los 1980's que empezaron a aplicarse a procesos industriales [5], [9], [10], algunas de ellas útiles para el estudio de sistemas múltiple entrada múltiple salida (MIMO, de las siglas en inglés Multiple Input Multiple Output).

1.2 Motivación

Actualmente, los motores de CD son una de las fuentes motrices más utilizadas en la industria y también son muy utilizados en sistemas de control. Por ello, como ejemplo práctico de identificación de un sistema real se propone en esta tesis la obtención del modelo de una planta basada en un motor de CD de imanes permanentes. Tal modelo se puede obtener mediante varios métodos o, en la mayoría de los casos, mediante una combinación de los siguientes:

- *Conocimiento de las leyes físicas que rigen el comportamiento del motor.*
- *Información proporcionada por el fabricante sobre sus parámetros principales.*
- *Identificación experimental basada en el registro de datos de entrada-salida.*

Si bien el estudio del comportamiento físico de un motor de CD de imanes permanentes permite obtener un modelo teórico del mismo cuyos parámetros principales son proporcionados por el fabricante, es conveniente obtener y validar el modelo de forma

experimental, mediante técnicas de identificación. Esto permite eliminar las tolerancias de los datos proporcionados por el fabricante y modelar efectos de los cuales no informan, como puede ser el retardo entre la entrada y la salida.

1.3 Objetivos

El objetivo fundamental que se contempla en esta tesis es validar el procedimiento de identificación de sistemas en un motor de CD de imanes permanentes real, y estimar sus parámetros electromagnéticos en base a su modelo matemático en tiempo continuo representado en la forma de espacio de estados.

La manera común de estimar parámetros de sistemas es discretizar primeramente el modelo en tiempo continuo que describe la dinámica del sistema, posteriormente aplicar algún algoritmo de estimación de parámetros, tal como el método de mínimos cuadrados, y finalmente convertir los parámetros discretos del sistema en continuos. Sin embargo, tal planteamiento degrada la exactitud de la estimación [11].

Por lo tanto, en este trabajo se emplean dos algoritmos directos basados en el uso de series ortogonales y matrices operacionales para estimar los parámetros del motor. La formulación algebraica y el uso de cálculo operacional reducen el problema de identificación de parámetros a un problema de manipulación matricial; es decir, las aproximaciones involucradas en el procedimiento de conversión de ecuaciones dinámicas en ecuaciones algebraicas utilizan las propiedades operacionales de las series ortogonales a fin de transformar el modelo diferencial de entrada-salida del motor en un modelo lineal algebraico conveniente para la solución directa mediante el método de mínimos cuadrados. Primero se utiliza el dominio de la serie de Hartley y posteriormente el dominio de la serie de funciones de bloques de pulsos. Se presentarán los resultados obtenidos mediante ambos algoritmos para efecto de comparación.

Se pretende ilustrar la ventaja de utilizar series ortogonales en la identificación de sistemas lineales invariantes en el tiempo, ya que poseen la característica de resolver problemas descritos por ecuaciones diferenciales recurriendo únicamente a métodos algebraicos.

1.4 Estructura

El contenido de esta tesis está distribuido en seis capítulos, y se explica brevemente a continuación:

En el capítulo introductorio se presenta básicamente el planteamiento del problema que se abordará durante la tesis. También se justifica la aplicación de la identificación de sistemas para la obtención de modelos que describan la dinámica de procesos estudiados en diversas áreas del conocimiento, destacando principalmente la importancia de su aplicación en el modelado de procesos industriales, con la finalidad de desarrollar e implementar controladores para la automatización de plantas.

En el capítulo 2 se explica en qué consiste el procedimiento que debe seguirse para la identificación de sistemas lineales invariantes en el tiempo, también se presenta una definición amplia de conceptos importantes requeridos para tal propósito.

El capítulo 3 describe características esenciales de las herramientas matemáticas que se utilizarán posteriormente para estimar los parámetros del motor de CD de imanes permanentes. Se presenta una breve reseña de la aplicación de las series ortogonales en la solución de problemas descritos por ecuaciones diferenciales a través de sus diversos dominios. Se describen características relevantes de la estructura del cálculo operacional inherente al dominio de la serie de Hartley y al de la serie de funciones de bloques de pulsos.

En el capítulo 4 se lleva a cabo el análisis en base al conocimiento de las leyes físicas que rigen el comportamiento del motor de CD de imanes permanentes para obtener su modelo matemático en la forma de espacio de estados. Se desarrolla el procedimiento general de identificación de parámetros mediante matrices operacionales y se deduce el método de mínimos cuadrados para su posterior aplicación en tal objetivo.

El capítulo 5 presenta el experimento implementado para la estimación de parámetros del motor de CD de imanes permanentes, junto con los circuitos diseñados para medir y acondicionar las señales de interés. Se muestra también la comparación de los resultados

experimentales de la estimación de parámetros obtenidos mediante la serie de Hartley y mediante la serie de funciones de bloques de pulsos.

En el capítulo 6 se describen las conclusiones generales y sugerencias para trabajos de investigación futuros.

Finalmente, en el Apéndice se muestra el listado de los programas implementados en Matlab 7 que se desarrollaron para llevar a cabo la estimación de parámetros mediante la serie de funciones de bloques de pulsos y para comparar estos resultados con los obtenidos mediante la serie de Hartley en [8].

Capítulo 2

Identificación de Sistemas

2.1 Introducción

El propósito de la ciencia es deducir modelos a partir de observaciones y estudiar sus propiedades. Los modelos pueden ser de carácter formal en mayor o menor escala, pero tienen la característica principal de intentar relacionar observaciones dentro de algún patrón. La *identificación de sistemas* puede definirse como el área de teoría de sistemas que estudia metodologías para la obtención de modelos matemáticos de sistemas dinámicos a partir de datos observados del sistema [11].

Se puede decir que la identificación de sistemas se estableció como un campo de investigación reconocido dentro del área de control automático a mediados de la década de los 1960's, en el tercer congreso de la IFAC (de las siglas en inglés International Federation of Automatic Control) en Londres, 1966, en el que fue presentado un artículo de visión general sobre identificación de sistemas (Eykhoff *et al.* 1966). Un año después fue organizado el primer simposium IFAC sobre identificación de sistemas en Praga. En la actualidad es el simposium con la serie más larga de publicaciones en la materia [12].

Sin embargo, puesto que los sistemas dinámicos son abundantes en nuestro entorno, la identificación de sistemas se ha convertido en una herramienta fundamental ampliamente utilizada en el área de ingeniería y otras áreas tan diversas como ecología, biología y economía. En aplicaciones de control, es fundamental la obtención de un modelo matemático

más o menos exacto del sistema, ya que la mayoría de los métodos de diseño de controladores parten de la hipótesis de que se dispone de un modelo parametrizado del proceso [11].

2.2 Sistemas Dinámicos

En términos generales, un *sistema* es un objeto en el cual interactúan variables de diferentes tipos y producen señales observables. Las señales observables de interés son usualmente llamadas *salidas*. El sistema también es afectado por estímulos externos. Las señales externas que pueden ser manipuladas por el observador son llamadas *entradas*. Existen otras entradas llamadas *perturbaciones*, las cuales pueden ser divididas en aquellas que son directamente medibles y las que son solamente observables a través de su influencia en la salida. La distinción entre entradas y perturbaciones medibles es con frecuencia menos importante para el procedimiento de modelado. Ver Figura 2.1. Claramente, la noción de un sistema es un concepto amplio, y no es sorprendente que juegue un papel importante en la ciencia moderna. Muchos problemas en varias áreas son resueltos en un marco conceptual orientado al sistema [2].

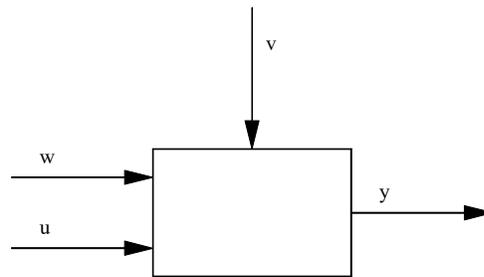


Figura 2.1 Sistema con salida y , entrada u , perturbación medible w , y perturbación no medible v .

Un ejemplo de sistema es un avión, para cuyo desarrollo se dedica un esfuerzo considerable a la construcción de un modelo matemático que describa su comportamiento dinámico. Esto se requiere para los simuladores, para la síntesis de piloto automático, y para el análisis de sus propiedades. A lo largo de este procedimiento, se utiliza un análisis físico a fondo considerable, así como también experimentos de túnel de viento, y la fuente de información más importante proviene de las pruebas de vuelo [2]. Otro ejemplo podría ser el

mecanismo vocal humano, el cual produce el habla mediante la creación de fluctuaciones en la presión acústica. Los diferentes sonidos corresponden a diferentes patrones en las variaciones de la presión acústica, y el sistema vocal humano produce un discurso inteligible al generar secuencias particulares de esos patrones. La salida de este sistema es la señal de voz, la cual puede ser representada matemáticamente por la presión acústica como una función del tiempo [13]. Los sistemas de estos ejemplos son dinámicos, lo que significa que el valor de salida actual depende no únicamente de los estímulos externos actuales, sino también de los valores previos.

2.3 Modelos

Al interactuar con un sistema, se requiere algún concepto de cómo sus variables se relacionan con otras. Con una definición amplia, se puede llamar a tal relación supuesta entre señales observadas un *modelo* del sistema; básicamente, un modelo es una herramienta que permite predecir el comportamiento de un sistema sin necesidad de experimentar sobre él. Evidentemente, dependiendo de la aplicación, los modelos varían en su grado de sofisticación y formalismo matemático [2]. En esta sección se describen, de manera general, los tipos de modelos, su uso y cómo se pueden construir.

2.3.1 Tipos de Modelos y su Uso

Sin duda, en la vida diaria muchos sistemas se relacionan con el uso de *modelos mentales*, también conocidos como *intuitivos* o *verbales*, los cuales no involucran ninguna formalización matemática. Por ejemplo, para conducir un auto se requiere saber que girar el volante a la izquierda induce una vuelta a la izquierda, junto con información sutil construida en la memoria muscular. La importancia y el grado de sofisticación de lo último debería, por supuesto, no ser subestimada [2].

Para ciertos sistemas es apropiado describir sus propiedades utilizando tablas numéricas y/o gráficas. A las descripciones de este tipo se les llama *modelos gráficos* o *no paramétricos*. Los sistemas lineales, por ejemplo, pueden ser descritos por su respuesta al impulso o escalón, o por medio de su función de transferencia. La representación gráfica de éstos es muy utilizada para varios propósitos de diseño.

Los *modelos matemáticos* o *paramétricos* describen las relaciones entre las variables del sistema en términos de ecuaciones diferenciales o de diferencia. Estos modelos pueden ser posteriormente caracterizados por un número de adjetivos (continuo en el tiempo o discreto en el tiempo, concentrado o distribuido, determinístico o estocástico, lineal o no lineal, etc.) que significan el tipo de ecuación de diferencia o diferencial utilizada. El uso de modelos matemáticos es inherente a todas las áreas de ingeniería y física. De hecho, la mayor parte del área de ingeniería enfrenta el problema de cómo elaborar buenos diseños basados en modelos matemáticos. También son útiles para simulación y predicción, lo cual se utiliza ampliamente en áreas no técnicas como economía, ecología y biología.

El modelo utilizado en la simulación de un sistema en computadora es un programa. Para sistemas complejos, este programa puede ser construido por medio de muchas subrutinas interconectadas y tablas de búsqueda, y podría ser no viable resumirlo analíticamente como un modelo matemático. Se utiliza el término *modelo de software* para tales descripciones computarizadas. Estos modelos han venido a jugar un papel incrementalmente importante en la toma de decisiones para sistemas complicados.

2.3.1.1 Clasificación de los Modelos Matemáticos o Paramétricos

Se dice que un modelo es determinístico cuando expresa la relación entre entradas y salidas mediante una ecuación exacta. En contraparte, un modelo es estocástico si posee un cierto grado de incertidumbre. Estos últimos se definen mediante conceptos probabilísticos o estadísticos [4].

El modelo de un sistema es estático cuando la salida depende únicamente de la entrada en ese mismo instante, por ejemplo el modelo de un resistor. En estos modelos existe una relación directa entre entrada y salida, independiente del tiempo. Un modelo dinámico es aquél en el que las salidas evolucionan con el tiempo tras la aplicación de una determinada entrada, por ejemplo el modelo de un circuito RC. En estos últimos, para conocer el valor actual de la salida es necesario conocer el tiempo transcurrido desde la aplicación de la entrada.

Los modelos continuos trabajan con señales continuas, y describen al sistema mediante ecuaciones diferenciales. Los modelos discretos trabajan con señales muestreadas, y quedan descritos mediante ecuaciones de diferencias.

En los modelos concentrados no se considera la variación de parámetros en función del espacio, como ocurre en los modelos distribuidos.

Por lo tanto, todo modelo matemático o paramétrico consta de una o varias ecuaciones que relacionan la entrada y la salida. De ahí que a los modelos matemáticos se les conozca más comúnmente como modelos paramétricos, ya que pueden definirse mediante una estructura y un número finito de parámetros.

2.3.2 Construcción de Modelos

Básicamente, un modelo debe construirse a partir de datos observados. Por ejemplo, el modelo mental de la dinámica de conducir un auto se desarrolla a través de experiencia de manejo. Los modelos gráficos se construyen a partir de ciertas mediciones. Los modelos matemáticos pueden desarrollarse a través de dos trayectorias (o una combinación de ambas). La primera trayectoria consiste en dividir el sistema en subsistemas, cuyas propiedades son bien entendidas por la experiencia previa. Esto significa que se cuenta con trabajo empírico previo. Estos subsistemas se agrupan matemáticamente y se obtiene un modelo de todo el sistema. Esta trayectoria es conocida como *modelado* y no necesariamente involucra alguna clase de experimentación en el sistema real. El procedimiento de modelado es muy independiente de la aplicación y con frecuencia tiene sus raíces en la tradición y técnicas específicas en el área de aplicación en cuestión. Las técnicas básicas típicamente involucran la estructuración del proceso en diagramas de bloques consistentes de elementos simples. En la actualidad, se ha incrementado el uso de la computadora para llevar a cabo la reconstrucción del sistema a partir de estos bloques simples, dando como resultado un modelo de software en lugar de un modelo matemático [2].

La segunda trayectoria para obtener modelos tanto matemáticos como gráficos está directamente basada en experimentación. Las señales de entrada y salida del sistema son

registradas y sometidas a análisis de datos a fin de deducir un modelo. Esta trayectoria se llama *identificación de sistemas*.

De cierto modo, existe una pantalla impenetrable pero transparente entre el mundo de descripciones matemáticas y el mundo real. Se puede ver a través de esta ventana y comparar ciertos aspectos del sistema físico con su descripción matemática, pero nunca es posible establecer alguna conexión exacta entre ellos. En términos prácticos, se debe tomar una visión pragmática de los modelos, ya que un modelo complejo y detallado en demasía puede contener parámetros imposibles de estimar y/o difíciles de analizar. En contraparte, un modelo demasiado simplificado no es capaz de exhibir características importantes del sistema. Por consiguiente, la aceptación de modelos debe estar guiada por la “utilidad” antes que por la “verdad”; es decir, un modelo debe reproducir con suficiente exactitud, para los fines deseados, las características más importantes del sistema objeto de estudio.

2.4 Procedimiento de Identificación de Sistemas

La identificación de sistemas enfrenta el problema de construir modelos matemáticos de sistemas dinámicos basados en los datos observados del sistema, por ello, es necesario llevar a cabo el proceso siguiendo una metodología. En la siguiente sección se explica en qué consiste cada paso del procedimiento de identificación de sistemas.

2.4.1 Entidades Básicas

Esencialmente, la construcción de un modelo a partir de datos involucra tres entidades básicas [2]:

1. Un conjunto de datos.
2. Un conjunto de modelos candidatos; una *estructura modelo*.
3. Una regla mediante la cual los modelos candidatos pueden evaluarse utilizando los datos, tal como la regla de *mínimos cuadrados*.

El procedimiento de identificación de sistemas posee un flujo lógico natural. Recopila los datos, elige un conjunto de modelos y elige el mejor modelo del conjunto, como se describe a continuación.

1. *Registro de datos.* Se registran los datos de entrada-salida durante un experimento de identificación específicamente diseñado, donde el usuario puede determinar cuáles señales medir y cuándo medirlas, de modo que los datos ofrezcan la máxima información posible. En algunos casos el usuario puede no tener la posibilidad de manejar el experimento, pero puede utilizar los datos a partir de la operación normal del sistema.
2. *Conjunto de modelos.* Se determina un conjunto de modelos candidatos especificando dentro de cuál colección de modelos se buscará el adecuado. Esto es, sin duda, la elección más importante y, al mismo tiempo, la más difícil del procedimiento de identificación de sistemas. Es aquí donde se requiere combinar un conocimiento a priori, intuición, ingenio y análisis a fondo con propiedades formales de modelos. Algunas veces el conjunto de modelos se obtiene después del modelado cuidadoso. Un modelo con algunos parámetros físicos desconocidos se construye a partir de leyes físicas básicas y otras relaciones bien establecidas. En otros casos se pueden emplear modelos lineales estándar, sin hacer referencia a los principios físicos. A éstos se les llama modelos de *caja negra*. El conjunto de modelos con parámetros ajustables con interpretación física puede, por lo tanto, ser llamado conjunto de modelos de *caja gris*.
3. *Determinación del mejor modelo en el conjunto, guiado por los datos.* Éste es el método de identificación. La evaluación de la calidad del modelo está basada típicamente en cómo los modelos actúan cuando intentan reproducir los datos medidos. Las aproximaciones básicas a esto serán tratadas independientemente de la estructura modelo que se utilice.

En la Figura 2.2 se muestra el diagrama de flujo del procedimiento de identificación de sistemas [2].

2.4.2 Validación del Modelo

Una vez que se elige un modelo particular, el único en el conjunto que mejor describe los datos de acuerdo al criterio elegido, sólo resta probar si es suficientemente bueno; es

decir, si es válido para su propósito. Tales pruebas son conocidas como *validación del modelo*, e involucran varios procedimientos para evaluar cómo el modelo se relaciona con los datos observados, con el conocimiento previo, y con su propósito. Un comportamiento deficiente del modelo en estos aspectos lleva a rechazarlo, mientras que un buen desempeño desarrollará una cierta confianza en él. Un modelo nunca se puede aceptar como una descripción final y verdadera del sistema. Más bien, puede en el mejor de los casos ser considerado como una descripción suficientemente buena de ciertos aspectos que son de particular interés para el usuario [2].

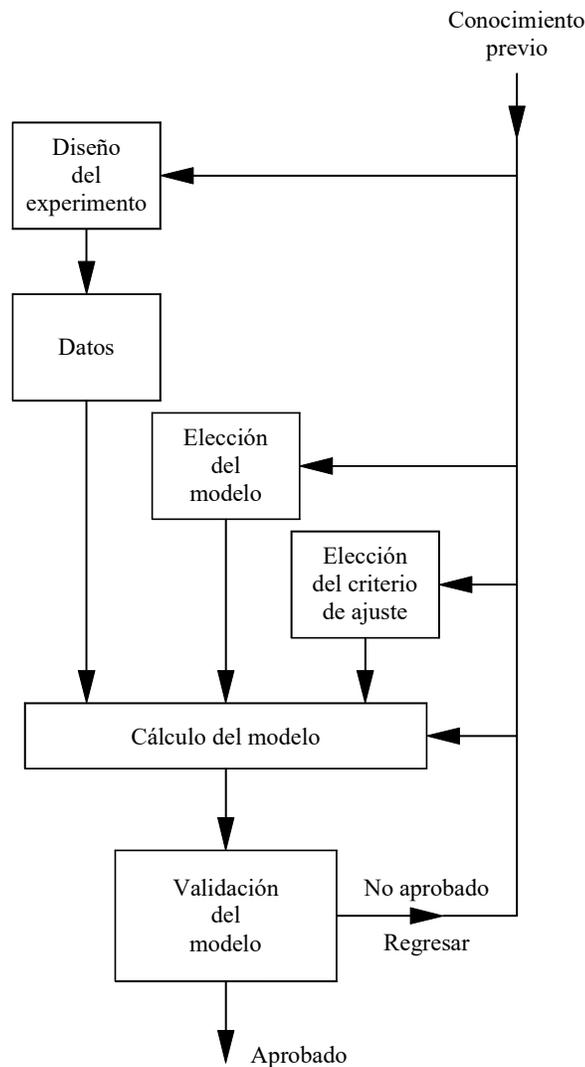


Figura 2.2. Diagrama de flujo del procedimiento de identificación de sistemas.

Posteriormente que se lleva a cabo el flujo lógico natural del procedimiento de identificación de sistemas, es altamente probable que el modelo obtenido no pase las pruebas de validación. En estos casos es necesario regresar y revisar los pasos del procedimiento. Si se llega a la conclusión de que el modelo no es válido, se deben revisar los siguientes aspectos como posibles causas [2]:

- El conjunto de datos de entrada-salida no proporciona suficiente información sobre la dinámica del sistema.
- La estructura modelo elegida no es capaz de proporcionar una descripción del sistema suficientemente buena.
- El criterio de ajuste de parámetros seleccionado no es el más adecuado.

La mayor parte de una aplicación de identificación consiste en realidad en enfrentar estos problemas, en particular el segundo, de modo iterativo, guiado por información previa y por los resultados de intentos anteriores.

2.5 Espacio de Estados

Es importante mencionar que la forma más apropiada de describir la dinámica de los sistemas continuos lineales invariantes en el tiempo es mediante ecuaciones diferenciales, por ello, los modelos en espacio de estados son muy utilizados para representar sistemas de control óptimo [11],

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.2)$$

donde $x(t)$ es el vector de estado n -dimensional, $u(t)$ es el vector de entrada p -dimensional, $y(t)$ es el vector de salida q -dimensional, A , B , C y D son matrices constantes que están definidas por los parámetros del sistema. Generalmente, el valor de p y q es menor que el de n . El caso especial de un sistema SISO (una entrada y una salida) ocurre cuando $p = q = 1$.

Las variables de estado de un sistema se definen como un conjunto mínimo de variables $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, cuyo conocimiento en cualquier tiempo t_0 , y el conocimiento de la información de la entrada de excitación que se aplica subsecuentemente, son suficientes para determinar el estado del sistema en cualquier tiempo $t > t_0$ [14].

La característica básica de la formulación en variables de estado es que los sistemas lineales y no lineales, variantes e invariantes en el tiempo, de una o múltiples variables se pueden modelar en una forma unificada. El estado de un sistema se refiere a las condiciones pasadas, presentes y futuras del mismo [14].

La representación de modelos mediante ecuaciones de estado posee atributos útiles: primero, su forma contribuye a un entendimiento intuitivo del comportamiento de muchos sistemas dinámicos; segundo, se dispone de técnicas computacionales eficientes para resolverlas; y tercero, se dispone de una gran cantidad de teoría para analizarlas [15].

Así, el problema de identificación de sistemas se puede plantear como la estimación de los elementos de las matrices A , B , C y D de (2.1) y (2.2), a partir del registro de datos de entrada-salida muestreados [11].

Una manera común de estimar parámetros de sistemas es convertir primeramente la ecuación diferencial (2.1) que describe la dinámica del modelo en tiempo continuo en una ecuación de diferencias para el modelo en tiempo discreto, posteriormente aplicar algún algoritmo de estimación de parámetros, tal como el método de mínimos cuadrados, y finalmente convertir los parámetros discretos del sistema en continuos. Tal planteamiento involucra dos conversiones, lo cual no solamente consume tiempo computacional, sino también degrada la exactitud de la estimación [11].

Por lo tanto, es ventajoso utilizar algoritmos directos para estimar parámetros de sistemas continuos. El primer paso es calcular la integral de la ecuación de estado (2.1) con respecto al tiempo, para ello se recurre a algún método que aproxime las integrales en términos de los datos muestreados de entrada-salida [11]. Al mismo tiempo, este método mantendrá sin cambios el significado físico de los parámetros. Existen muchos algoritmos

propuestos de ese tipo, tales como las series ortogonales, el planteamiento del filtro de estado, etc.

2.6 Conclusiones

En el presente capítulo se ha presentado la definición de conceptos importantes requeridos en el procedimiento de identificación de sistemas. También se dio una breve explicación del porqué es ventajoso utilizar métodos directos en la estimación de parámetros de sistemas continuos, la principal razón radica en que se puede llevar a cabo lo anterior sin necesidad de convertir la ecuación diferencial que describe la dinámica del modelo en tiempo continuo en una ecuación de diferencias para el modelo en tiempo discreto.

El punto clave para el éxito en la validación de la identificación de sistemas es elegir un modelo pragmático que describa suficientemente la dinámica del sistema; es decir, evitar que éste sea complejo y detallado en demasía, pero tampoco demasiado simplificado. La primera consideración que se debe tener en mente es si el proceso admite una descripción estándar preexistente (caja negra), o si es necesario construir un modelo a la medida. En el primer caso, las posibilidades de éxito son altas; en el segundo, es necesario recurrir a un análisis físico del sistema antes de construir el modelo. Este problema es claramente dependiente de la aplicación y por lo tanto no muy discutido dentro de la literatura de identificación de sistemas. Sin embargo, es necesario mencionar que el razonamiento, la intuición y el entendimiento del problema son imprescindibles en la obtención de buenos resultados, ya que no es posible la construcción automática de un modelo.

Además, el éxito del procedimiento de identificación de sistemas requiere que los datos utilizados para tal propósito contengan información significativa sobre el sistema. Esto implica un diseño cuidadoso del experimento de adquisición de datos; se deben seleccionar adecuadamente las señales a medir, el periodo de muestreo adecuado a fin de obtener datos no redundantes de buena calidad, la señal de entrada que contenga el mayor número de frecuencias posibles, el número suficiente de datos a almacenar sin desbordar la capacidad de memoria del dispositivo de almacenamiento, etc. Sin embargo, una mala estructura modelo

no es capaz de ofrecer un buen modelo final, independientemente de las características cuantitativas y cualitativas de los datos disponibles.

Por último, se puede decir que debido a la abundancia de los sistemas dinámicos en nuestro entorno, la identificación de sistemas se ha convertido en una herramienta versátil que se utiliza ampliamente en las diversas áreas de la ciencia e ingeniería para la obtención de modelos, y además ha presentado buenos resultados.

Capítulo 3

Representación de Funciones Mediante Series Ortogonales y Matrices Operacionales

3.1 Introducción

Una vez que se ha obtenido el modelo matemático que describe la dinámica de un sistema, se procede al siguiente paso, el cual consiste en la estimación de parámetros. Un método conocido y novedoso que ha presentado buenos resultados en la estimación de parámetros utiliza matrices operacionales para la aproximación de funciones mediante series ortogonales [16].

Las series ortogonales juegan un papel clave en la solución de un amplio rango de problemas encontrados en física e ingeniería. Éstas han sido utilizadas para aproximar características no lineales con buenos resultados. También pueden utilizarse para resolver problemas descritos por ecuaciones diferenciales, tales como el análisis de sistemas lineales variantes e invariantes en el tiempo, recurriendo únicamente a métodos algebraicos que pueden programarse fácilmente en paquetes de software de computación numérica tal como Matlab [16], [17]. Debido a sus interesantes características y alta eficiencia como solucionadoras de integrales, las series ortogonales han sido investigadas ampliamente en las

áreas de identificación de sistemas, reducción de modelos, control óptimo, análisis numérico y procesamiento de señales [16], [18], [19].

El problema de identificación de sistemas utilizando series ortogonales incluye sistemas lineales variantes o invariantes en el tiempo concentrados o distribuidos, así como sistemas no lineales. El uso de estas series tiene el objetivo común de representar modelos de modo eficiente, así como también calcular rápidamente los parámetros intermedios para el problema dado. A continuación se presentan los miembros (dominios) de la familia de las series ortogonales [16]:

- *Serie de Fourier*
- *Serie de funciones de bloques de pulsos (BPF)*
- *Serie de Hartley*
- *Serie de Walsh*
- *Polinomios de Chebyshev de primer y segundo tipo*
- *Polinomios de Laguerre*
- *Polinomios de Legendre*
- *Wavelet de Haar*

Se puede decir que los diversos dominios citados son perspectivas alternas para observar un mismo problema, y generalmente se desea emplear la perspectiva que proporcione la mejor vista del problema y el cálculo más eficiente. Aunque las soluciones son prácticamente las mismas en todos los dominios, el ancho de banda del problema y las características numéricas de las matrices intermedias utilizadas son diferentes. Por ejemplo, el conjunto de ecuaciones de un problema en particular puede ser menor en un dominio que en otros [16].

En el presente capítulo se describen particularmente la serie de Hartley y la serie de funciones de bloques de pulsos, que serán utilizadas posteriormente para aproximar los valores esperados del comportamiento dinámico de un motor de CD de imanes permanentes y los parámetros del sistema, a partir de un registro de datos de entrada-salida obtenidos de un experimento. Los métodos más tradicionales de identificación de parámetros convierten el problema de estimación de parámetros en un problema de estimación de estados, mientras

que en el método que se explicará en este capítulo, basado series ortogonales, ocurre lo contrario [17]. El punto clave de este método es el uso de cálculo operacional y un vector de coeficientes común a todos los dominios de las series ortogonales. Las aproximaciones adoptadas en esta tesis utilizan las matrices operacionales de integración Q , para la serie de Hartley y H , para la serie de funciones de bloques de pulsos, las cuales relacionan la función base correspondiente y los coeficientes de su integral. La formulación algebraica y el uso de cálculo operacional reducen el problema de identificación de parámetros a un problema de manipulación matricial; es decir, las aproximaciones utilizan las propiedades operacionales de las series ortogonales a fin de transformar el modelo diferencial de entrada-salida en un modelo lineal algebraico (o regresión) conveniente para la solución directa mediante el método de mínimos cuadrados. Estas aproximaciones también permiten la identificación de condiciones iniciales desconocidas simultáneamente a la identificación de parámetros, lo cual puede ser variante en el tiempo [16], [17].

3.2 Definición de Ortogonalidad

Se dice que un par de funciones $\lambda_n(t)$ y $\lambda_m(t)$ son ortogonales en el intervalo $0 < t < T_0$, si se cumple la siguiente propiedad básica [18]:

$$\int_0^{T_0} \lambda_n(t) \lambda_m(t) dt \quad \begin{cases} = 0 & \forall n \neq m \\ \neq 0 & \forall n = m \end{cases} \quad (3.1)$$

Para el caso en que la integral es igual a cero, $\lambda_n(t)$ y $\lambda_m(t)$ son funciones ortogonales, lo cual se denota por $\lambda_n(t) \perp \lambda_m(t)$.

Además, se dice también que las funciones son ortonormales si se cumplen las siguientes condiciones más restrictivas:

$$\int_0^{T_0} \lambda_n(t) \lambda_m(t) dt = \begin{cases} 0 & \forall n \neq m \\ 1 & \forall n = m \end{cases} \quad (3.2)$$

La serie de Fourier y la serie de Hartley son sólo algunos ejemplos de funciones ortonormales.

3.3 Descripción General de las Series Ortogonales

En esta sección se presentan los antecedentes generales de la aproximación de funciones mediante series ortogonales, así como también matrices operacionales que son relevantes para el material que se presentará posteriormente. La notación de la presentación es general, con la finalidad de incluir todos los dominios posibles. La mayor parte de las funciones comunes dependientes del tiempo $f(t)$ de interés en ingeniería, se pueden aproximar con determinada exactitud utilizando series ortogonales. La característica común de la familia de las series ortogonales es que las funciones base utilizadas en las series son ortogonales entre sí; es decir, cuando se integra un par de funciones base, la integral es cero si las funciones son diferentes y diferente de cero si son iguales. Esta propiedad se utiliza para encontrar fácilmente los coeficientes de las series. Las series ortogonales también comparten otras propiedades conocidas como *propiedades operacionales*. A pesar de tener muchas propiedades comunes, las series ortogonales son diferentes en su respectivo kernel o función base. Por ejemplo, mientras la función kernel de la serie de Fourier es la exponencial compleja $e^{-j\omega t}$, la serie de Hartley emplea $\cos(\omega t) + \sin(\omega t)$, también conocida como la función *coseno y seno* o $\text{cas}(\omega t)$. Existen series ortogonales donde los kernels son funciones cuadradas, tales como la serie de Walsh, la serie de funciones de bloques de pulsos y la wavelet de Haar. Algunos kernels son aperiódicos, algunos son transitorios, y algunos son de forma polinomial. El reto es seleccionar el kernel que involucre un número reducido de cálculos, pocos términos de la serie para la aproximación de $f(t)$, y un error casi despreciable [17].

Así, una función se puede aproximar mediante series ortogonales como,

$$f(t) = FT(t) \tag{3.3}$$

donde $T(t)$ es el vector de funciones base o kernels y F es el vector de coeficientes de la serie ortogonal. La estructura de tales vectores es variable; es decir, el ordenamiento de los elementos de cada vector dependerá del dominio que se elija para llevar a cabo la aproximación. Sin embargo, considerando que básicamente una función se puede aproximar

mediante kernels del dominio armónico y del dominio del tiempo, basta mostrar de forma general la estructura de los vectores de funciones base y de coeficientes para cada caso.

Para aproximar una función mediante kernels del dominio armónico, por ejemplo la serie de Hartley, se tiene,

$$f_a(t) = F_a T_a(t) \quad (3.4)$$

$$T_a(t) = [T_{-n}(t) \ \cdots \ T_{-1}(t) \ T_0(t) \ T_1(t) \ \cdots \ T_n(t)]^T \quad (3.5)$$

$$F_a = [F_{-n} \ \cdots \ F_{-1} \ F_0 \ F_1 \ \cdots \ F_n]_{(1,2n+1)} \quad (3.6)$$

donde el valor de n corresponde al número de armónicos empleados. Obviamente, la estructura de (3.5) y (3.6) diferirá ligeramente según el kernel del dominio armónico que se utilice.

Ahora, si se trata de aproximar una función mediante kernels del dominio del tiempo, por ejemplo la serie de funciones de bloques de pulsos, se tiene,

$$f_b(t) = F_b T_b(t) \quad (3.7)$$

$$T_b(t) = [T_1(t) \ T_2(t) \ \cdots \ T_m(t)]^T \quad (3.8)$$

$$F_b = [F_1 \ F_2 \ \cdots \ F_m]_{(1,m)} \quad (3.9)$$

donde el valor de m corresponde al número de muestras.

Cada coeficiente del vector F se calcula utilizando el producto interno de la siguiente ecuación (esta es la propiedad ortogonal),

$$F_j = k \int_0^{T_p} f(t) T_j(t) dt \quad (3.10)$$

Una ventaja numérica de la mayoría de los dominios de las series ortogonales es la disponibilidad de algoritmos poderosos para calcular los coeficientes de las series, tales como la Transformada Rápida de Fourier (FFT, de las siglas en inglés Fast Fourier Transform), Transformada Rápida de Hartley (FHT, de las siglas en inglés Fast Hartley Transform),

Transformada Rápida de Wavelet (FWT, de las siglas en inglés Fast Wavelet Transform), entre otras [19].

3.3.1 Descripción General de las Propiedades Operacionales

En esta sección es relevante mencionar detalladamente en qué consiste el procedimiento de convertir una ecuación diferencial en una ecuación algebraica. La idea es primero convertir la ecuación diferencial en una ecuación integral vía integración múltiple, posteriormente, las diversas señales involucradas en la ecuación integral se aproximan mediante algún dominio de las series ortogonales. Finalmente, se convierte la ecuación integral en una ecuación algebraica aplicando la matriz operacional de integración correspondiente al kernel elegido. Similarmente, una ecuación diferencial podría convertirse en una ecuación algebraica utilizando una matriz operacional de diferenciación, sin embargo, en este sentido su aplicación no ha sido explotada [19].

Así, las propiedades operacionales de las series ortogonales pueden escribirse en términos de las matrices operacionales de integración y diferenciación. El concepto principal alrededor de estas propiedades es el hecho de que la integral de una serie ortogonal puede expresarse también como una serie ortogonal. Lo mismo puede establecerse para las series ortogonales y sus derivadas. En términos generales, la matriz operacional de integración puede definirse como [17],

$$\int_0^t T(\tau) d\tau = PT(t) \quad (3.11)$$

donde P es la matriz operacional de integración. Es evidente de (3.11), que las matrices operacionales proporcionan una forma de transformar ecuaciones dinámicas en ecuaciones algebraicas como se mencionó anteriormente, y el concepto puede relacionarse enseguida con la propiedad similar vista en la transformada de Laplace. Similarmente, se puede definir una matriz operacional de diferenciación para sustentar la siguiente ecuación [17],

$$\frac{d}{dt} T(t) = DT(t) \quad (3.12)$$

donde D es la matriz operacional de diferenciación. Para calcular integrales y derivadas de orden superior se puede aplicar (3.11) y (3.12) recursivamente. Así, la n -ésima integral y derivada de una serie ortogonal se pueden escribir como [16]

$$\int_0^t \cdots \int_0^t T(\tau) d\tau = P^n T(t) \quad (3.13)$$

y

$$\frac{d^n}{dt^n} T(t) = D^n T(t) \quad (3.14)$$

En general, los métodos algebraicos de las matrices operacionales son una aproximación unificada independiente del dominio de la serie ortogonal empleada para resolver algún problema. Las particularidades de cada dominio se reflejan en las características numéricas de las matrices P , D y el vector de coeficientes F , sin modificar la característica cualitativa del método. Como ejemplo de esto, la estructura de la matriz operacional de integración para la serie de Hartley varía con respecto a la de la serie de funciones de bloques de pulsos. Además, la dispersidad de las matrices difiere en cada dominio, por ello algunos dominios son más eficientes que otros en aplicaciones tales como control óptimo y análisis de sistemas. En términos de aproximaciones, es relevante el uso de diferentes dominios para efecto de comparación [17].

3.4 Aplicación del Cálculo Operacional en la Identificación de Sistemas

Para ilustrar de manera general la aplicación del cálculo operacional en la identificación de sistemas lineales invariantes en el tiempo, se considera primeramente que su modelo matemático está descrito en la forma de variables de estado, como lo indica la ecuación (2.1),

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

donde $x(t)$ es el vector de estado de dimensión $p \times 1$, $u(t)$ es el vector de entrada de dimensión $q \times 1$, A y B son matrices constantes que están definidas por los parámetros del

sistema, cuyas dimensiones son $p \times p$ y $p \times q$, respectivamente. Ahora, suponiendo cero las condiciones iniciales $x(0)$ de (2.1) e integrando ambos lados,

$$x(t) = A \int_0^t x(t)dt + B \int_0^t u(t)dt \quad (3.15)$$

Aproximando $x(t)$ y $u(t)$ mediante series ortogonales, utilizando como ejemplo algún kernel del dominio armónico, se tiene:

$$x(t) = XT(t) \cong \underbrace{\begin{bmatrix} X_{1,-n} & \cdots & X_{1,0} & \cdots & X_{1,n} \\ \vdots \\ X_{p,-n} & \cdots & X_{p,0} & \cdots & X_{p,n} \end{bmatrix}}_{\text{COEFICIENTES DE LA SERIE ORTOGONAL}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_{-n}(t) \\ \vdots \\ T_0(t) \\ \vdots \\ T_n(t) \end{bmatrix}}_{\text{KERNEL}} \quad (3.16)$$

$$u(t) = UT(t) \cong \underbrace{\begin{bmatrix} U_{-n} & \cdots & U_0 & \cdots & U_n \end{bmatrix}}_{\text{COEFICIENTES DE LA SERIE ORTOGONAL}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_{-n}(t) \\ \vdots \\ T_0(t) \\ \vdots \\ T_n(t) \end{bmatrix}}_{\text{KERNEL}} \quad (3.17)$$

El ordenamiento del vector de kernels y de coeficientes mostrado en (3.16) y (3.17) corresponde a la estructura mostrada en (3.5) y (3.6), la cual se emplea generalmente en la serie de Hartley. Sin embargo, lo anterior no representa problema alguno, ya que el ordenamiento mostrado en esta sección resulta sumamente ilustrativo y se puede adaptar fácilmente a la estructura requerida por cualquier dominio de las series ortogonales.

Así, sustituyendo (3.16) y (3.17) en (3.15), se tiene,

$$XT(t) = AX \int_0^t T(t)dt + BU \int_0^t T(t)dt \quad (3.18)$$

recurriendo a (3.11) para aproximar la integral,

$$\int_0^t T(\tau) d\tau = PT(t)$$

donde P es la matriz operacional de integración y su estructura depende del dominio empleado. Por lo tanto, sustituyendo (3.11) en la ecuación integral (3.18), ésta se puede convertir en la siguiente ecuación algebraica,

$$XT(t) = AXPT(t) + BUPT(t) \quad (3.19)$$

cancelando $T(t)$ en ambos lados de (3.19), se obtiene:

$$X = AXP + BUP \quad (3.20)$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma compacta

$$X = \theta Z \quad (3.21)$$

donde

$$\theta = [A \quad B] \quad (3.22)$$

$$Z = \begin{bmatrix} XP \\ UP \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Finalmente, una vez que se factoriza (3.20), es trivial aplicar el método de mínimos cuadrados al arreglo matricial compacto (3.21) para calcular la pseudoinversa de θ , y así obtener los parámetros del sistema.

3.5 Serie de Hartley

La serie y la transformada de Hartley son una transformación integral que mapean una función de *valor real* en el tiempo o espacial en una función de *valor real* en la frecuencia mediante el kernel $\text{cas}(\cdot)$, definido por:

$$\text{cas}(\cdot) = \cos(\cdot) + \text{sen}(\cdot) \quad (3.24)$$

Esta novedosa formulación simétrica de la tradicional transformada de Fourier, atribuida a Ralph Vinton Lyon Hartley en 1942, conduce al paralelismo que existe entre la función de la variable original y de su transformada [8], [20].

El conjunto de funciones $\{\lambda_n(t)\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, donde $\{\lambda_n(t)\} = \text{cas}(nv_0t) / \sqrt{2\pi}$ es un conjunto ortonormal en el intervalo $-\pi \leq t \leq \pi$ [8], [20].

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda_n(t) \lambda_m(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{cas}(nv_0t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{cas}(mv_0t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{cas}(nv_0t) \text{cas}(mv_0t) dt \end{aligned}$$

Si cada función del integrando en la ecuación anterior se expande a $\text{cos}(\cdot) + \text{sen}(\cdot)$ y se multiplican, resultan cuatro términos: $\text{cos}(\cdot)\text{cos}(\cdot)$, $\text{sen}(\cdot)\text{sen}(\cdot)$, y dos productos cruzados: $\text{cos}(\cdot)\text{sen}(\cdot)$ y $\text{sen}(\cdot)\text{cos}(\cdot)$. La integral de los dos productos cruzados es cero debido a la propiedad de ortogonalidad de las funciones seno y coseno. Los otros dos integrandos, cuando se evalúan en el intervalo de $-\pi$ a π , son igual a 0 para $n \neq m$ y π cuando $n = m$. Por lo tanto se cumple la condición de (3.2), y las funciones base $\{\lambda_n\}$ son un sistema ortonormal en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Sea la señal periódica $x(t)$ con periodo T_0 ,

$$x(t + T_0) = x(t) \quad \forall t \quad (3.25)$$

reescrita como una expansión en series ortogonales; esto es, una combinación lineal que posee un conjunto de funciones base ortogonales

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \lambda_n(t) \quad (3.26)$$

donde $\lambda_n(t)$ son las funciones base ortogonales. Previamente se mostró que

$$\lambda_n(t) = \text{cas}(nv_0t) \quad (3.27)$$

es una función base ortogonal en el intervalo $[\tau, \tau + T_0]$

$$\int_{\tau}^{\tau+T_0} \text{cas}(nv_0t) \text{cas}(mv_0t) dt = \begin{cases} T_0, & \text{si } n = m \\ 0, & \text{si } n \neq m \end{cases} \quad (3.28)$$

donde $\nu_0 = 2\pi / T_0$. Por lo tanto, c_n en (3.26) se obtiene fácilmente utilizando la propiedad de ortogonalidad,

$$x(t) \text{cas}(mv_0t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \text{cas}(nv_0t) \text{cas}(mv_0t)$$

$$\frac{1}{T_0} \int_{\tau}^{\tau+T_0} x(t) \text{cas}(mv_0t) dt = 0 + 0 + 0 + \dots, c_n + 0 + 0 + \dots$$

Esto da lugar a la serie de Hartley, definida por,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \text{cas}(nv_0t) \quad (3.29)$$

$$\nu_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (3.30)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{\tau}^{\tau+T_0} x(t) \text{cas}(nv_0t) dt \quad (3.31)$$

3.5.1 Deducción de la serie de Hartley a partir de la Serie de Fourier

Partiendo de la serie trigonométrica de Fourier, con la frecuencia angular en radianes sobre segundo definida como ν_0 en lugar de ω_0 , para distinguir el dominio de Hartley del de Fourier [18],

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\nu_0t) + b_n \text{sen}(n\nu_0t)) \quad (3.32)$$

donde $\nu_0 = 2\pi / T_0$ y los coeficientes de la serie están dados por,

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) dt \quad (3.33)$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cos(nv_0 t) dt \quad (3.34)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \sen(nv_0 t) dt \quad (3.35)$$

por lo tanto, la serie (3.32) puede ser reescrita como

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} (a_n + b_n) \text{cas}(nv_0 t) + \frac{1}{2} (a_n - b_n) \text{cas}(-nv_0 t) \right) \quad (3.36)$$

puesto que $a_{-n} = a_n$ y $b_{-n} = -b_n$, entonces (3.36) se convierte en

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{cas}(nv_0 t) \quad (3.37)$$

o bien

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{cas}(nv_0 t) \quad (3.38)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n + b_n) \quad (3.39)$$

Sustituyendo (3.34) y (3.35) en (3.39) resulta,

$$c_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cos(nv_0 t) dt + \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \sen(nv_0 t) dt \right) \quad (3.40)$$

agrupando términos, lo anterior puede escribirse de la siguiente forma:

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \text{cas}(nv_0 t) dt \quad (3.41)$$

Así, la serie de Hartley queda definida por (3.38) y (3.41). Los coeficientes a_n y b_n se pueden obtener en forma trigonométrica,

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_n &= c_{-n} + c_n \\ b_n &= -c_{-n} + c_n \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.5.2 Propiedades de la función $\text{cas}(\cdot)$

Probablemente dos de las propiedades más importantes de la función $\text{cas}(\cdot)$ son su elegancia matemática y el hecho de que todas sus operaciones se llevan a cabo en el dominio real en lugar del dominio complejo [18]. En esta sección se describen algunas propiedades útiles para entender y aplicar eficientemente la serie de Hartley.

Las propiedades principales de la serie de Hartley son [20]:

- Los coeficientes c_n de la serie de Hartley son siempre reales.
- Para funciones par $x(t) = x(-t)$, coeficientes de Hartley $c_{-n} = c_n$, coeficientes de Fourier $a_{-n} = a_n$.
- Para funciones impar $x(t) = -x(-t)$, coeficientes de Hartley $c_{-n} = -c_n$, coeficientes de Fourier $b_{-n} = -b_n$.
- La serie de Hartley existe cuando la serie de Fourier existe.

En la Tabla 3.1 se presentan las propiedades trigonométricas más relevantes de la función $\text{cas}(\cdot)$ [18].

Tabla 3.1 Propiedades trigonométricas de la función $\text{cas}(\cdot)$.

$\text{cas}(\alpha) = \cos(\alpha) + \text{sen}(\alpha)$	$\text{cas}(-\alpha) = \cos(\alpha) - \text{sen}(\alpha)$
$\text{sen}(\alpha) = \frac{1}{2} \text{cas}(\alpha) - \frac{1}{2} \text{cas}(-\alpha)$	$\text{cas}(\pm\alpha) = \sqrt{2} \cos(\alpha \mp \frac{\pi}{4})$
$\text{cas}(\alpha) \text{cas}(-\alpha) = \cos(2\alpha)$	$\text{cas}^2(\alpha) - \text{cas}^2(-\alpha) = 2 \text{sen}(2\alpha)$

$\text{cas}^2(\alpha) + \text{cas}^2(-\alpha) = 2$	$\text{cas}^2(\alpha) \text{cas}^2(\alpha) = 2 + 2 \text{sen}(2\alpha)$
$\text{cas}(2\alpha) = \text{cas}^2(\alpha) - 2 \text{sen}^2(\alpha)$	$\text{cas}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \text{cas}(-\alpha)$
$\text{sen}(\alpha) \text{cas}(\beta) = \text{cas}(\alpha - \beta) - \text{cas}(-\alpha - \beta)$	$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \text{cas}(\alpha) + \frac{1}{2} \text{cas}(-\alpha)$
$\cos(\alpha) \text{cas}(\beta) = \text{cas}(-\alpha + \beta) + \text{cas}(\alpha + \beta)$	$\text{cas}(\alpha + \beta) = \cos(\beta) \text{cas}(\alpha) + \sin(\beta) \text{cas}(-\alpha)$
$\text{cas}(\alpha) \text{cas}(\beta) = \frac{1}{2} [\text{cas}(\alpha + \beta) + \text{cas}(\alpha - \beta) + \text{cas}(-\alpha + \beta) - \text{cas}(-\alpha - \beta)]$	$e^{j\alpha} = \frac{1}{2} [\text{cas}(\alpha) + \text{cas}(-\alpha)] + \frac{1}{2} j [\text{cas}(\alpha) - \text{cas}(-\alpha)]$
$\frac{d}{dt} \text{cas}(\alpha t) = \alpha \text{cas}(-\alpha t)$	$\int \text{cas}(\alpha t) dt = -\frac{1}{\alpha} \text{cas}(-\alpha t)$
$\frac{d}{dt} \text{cas}(-\alpha t) = -\alpha \text{cas}(\alpha t)$	$\int \text{cas}(-\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} \text{cas}(\alpha t)$

3.5.3 Aproximación de Funciones

Similarmente a la serie de Fourier, la serie de Hartley utiliza un kernel basado en frecuencia. Sin embargo, la metodología involucrada en la serie de Hartley no emplea números complejos. Las funciones base de la serie de Hartley se denotan por [16],

$$\Psi(t) = [\psi_{-n}(t) \ \cdots \ \psi_{-1}(t) \ \psi_0(t) \ \psi_1(t) \ \cdots \ \psi_n(t)]^T \quad (3.43)$$

donde

$$\psi_n(t) = \text{cas}(nv_0 t) = \cos(nv_0 t) + \text{sen}(nv_0 t)$$

Así, una función periódica con periodo T_0 se puede aproximar mediante $2n+1$ términos de la serie de Hartley,

$$f(t) = c\Psi(t) \quad (3.44)$$

$$c = [c_{-n} \ \cdots \ c_{-1} \ c_0 \ c_1 \ \cdots \ c_n]_{(1, 2n+1)} \quad (3.45)$$

Cada coeficiente del vector c , c_n se calcula utilizando

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \text{cas}(nv_0 t) dt \quad (3.46)$$

3.5.4 Propiedades Operacionales

Similarmente a otras series ortogonales, la serie de Hartley posee propiedades operacionales, particularmente una matriz operacional de integración y diferenciación. Las cuales se definen en esta sección, primeramente considérense las integrales [16], [19],

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi_{-n}(\tau) d\tau &= \int_0^t \text{cas}(-nv_0\tau) d\tau = \frac{1}{nv_0} (-1 + \text{cas}(nv_0t)) \\ &= \frac{T_0}{n2\pi} \left(-1 + \text{cas} \left(n \frac{2\pi}{T_0} t \right) \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\int_0^t \psi_0(\tau) d\tau = \int_0^t \text{cas}(0) d\tau = \int_0^t d\tau = t \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi_n(\tau) d\tau &= \int_0^t \text{cas}(nv_0\tau) d\tau = \frac{1}{nv_0} (1 - \text{cas}(-nv_0t)) \\ &= \frac{T_0}{n2\pi} \left(1 - \text{cas} \left(-n \frac{2\pi}{T_0} t \right) \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Con el periodo T_0 normalizado ($T_0 = 1$), las integrales (3.47) y (3.49) se pueden reescribir así,

$$\int_0^t \psi_{-n}(\tau) d\tau = \int_0^t \text{cas}(-nv_0\tau) d\tau = \frac{1}{n2\pi} (-1 + \text{cas}(n2\pi t)) \quad (3.50)$$

$$\int_0^t \psi_n(\tau) d\tau = \int_0^t \text{cas}(nv_0\tau) d\tau = \frac{1}{n2\pi} (1 - \text{cas}(-n2\pi t)) \quad (3.51)$$

Utilizando la serie de Hartley para aproximar (3.50), (3.48) y (3.51) se tiene,

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi_{-n}(\tau) d\tau &= \int_0^t \text{cas}(-nv_0\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -\frac{1}{n} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \frac{1}{n} \right] \Psi(t) \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\frac{d}{dt}\psi_{-n}(t) = -n\nu_0 \operatorname{cas}(n\nu_0 t) \quad (3.57)$$

$$\frac{d}{dt}\psi_0(t) = 0 \quad (3.58)$$

$$\frac{d}{dt}\psi_n(t) = n\nu_0 \operatorname{cas}(-n\nu_0 t) \quad (3.59)$$

Si se consideran n frecuencias, se tiene la siguiente expresión

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\psi_{-n}(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\psi_{-1}(t) \\ 0 \\ \frac{d}{dt}\psi_1(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\psi_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n\nu_0 \operatorname{cas}(n\nu_0 t) \\ \vdots \\ -\nu_0 \operatorname{cas}(\nu_0 t) \\ 0 \\ \nu_0 \operatorname{cas}(-\nu_0 t) \\ \vdots \\ n\nu_0 \operatorname{cas}(-n\nu_0 t) \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

o bien en forma matricial

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = D\Psi(t) \quad (3.61)$$

donde D es la matriz operacional de diferenciación que posee la siguiente forma,

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} H[k] \text{cas}(nk2\pi / N) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.66)$$

donde n es el índice de la salida de la DHT en el dominio de la frecuencia, k es el índice de las muestras de entrada en el dominio del tiempo y N es el número de muestras de la secuencia de entrada y el número de puntos de frecuencia en la salida de la DHT.

Debe notarse que $H[k]$ es la contraparte de c_n en (3.41). También, $f[n]$ es la contraparte de $f(t)$ en (3.38).

3.5.7 Transformada Rápida de Hartley

Similarmente al algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) encontrado en la teoría de Fourier, la transformada rápida también existe en la teoría de Hartley, la única gran diferencia radica en el hecho de que la FHT requiere $\frac{1}{2} N \log_2 N$ operaciones reales en contraparte a las $\frac{1}{2} N \log_2 N$ operaciones complejas de la FFT. Otra ventaja de la FHT sobre la FFT es que únicamente requiere la mitad de memoria de almacenamiento para el mismo número de muestras [18].

3.6 Serie de Funciones de Bloques de Pulsos

Este método de aproximación de funciones registra los datos muestreados de entrada-salida obtenidos de un experimento, y los expresa mediante la serie de funciones de bloques de pulsos a fin de transformar la ecuación diferencial del sistema dinámico a una forma algebraica; es decir, aproxima las integrales con respecto al tiempo de la ecuación de estado mediante una sumatoria de bloques de pulsos cuya altura es el promedio de dos datos consecutivos.

Puesto que la aproximación de funciones mediante la serie de funciones de bloques de pulsos se utilizará para estimar los parámetros de un motor de CD de imanes permanentes, la deducción del método se ilustrará utilizando el registro de datos de entrada (voltaje de alimentación) y salida (corriente de armadura y velocidad angular) de este sistema, obtenidos de un experimento.

Primeramente, se hace referencia a la ecuación de estado que describe la dinámica del motor de CD de imanes permanentes [21],

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu_{a,med}(t) \quad (3.67)$$

donde $x(t)$ es el vector de variables de estado y $u_{a,med}(t)$ es la entrada del sistema. Asumiendo que la condición inicial $x(0)$ de (3.67) es cero, e integrando ambos lados de la misma, se tiene:

$$x(t) = A \int_0^t x(t)dt + B \int_0^t u_{a,med}(t)dt \quad (3.68)$$

Ahora, $x(t)$ y $u_{a,med}(t)$ se pueden aproximar mediante m términos de la serie de funciones de bloques de pulsos $\Phi(t)$ [21],

$$\Phi(t) = [\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \quad \cdots \quad \varphi_m(t)]^T \quad (3.69)$$

el valor de m también corresponde al número de muestras de cada señal registrada que se utilizarán en la estimación de parámetros.

El vector $\Phi(t)$ incluye el conjunto de funciones base o kernels; que para este caso son pulsos, y se muestran en la Figura 3.1, para $m = 4$, donde $h = T_e / m$ es el periodo de muestreo, y T_e es la duración del experimento para adquirir las muestras.

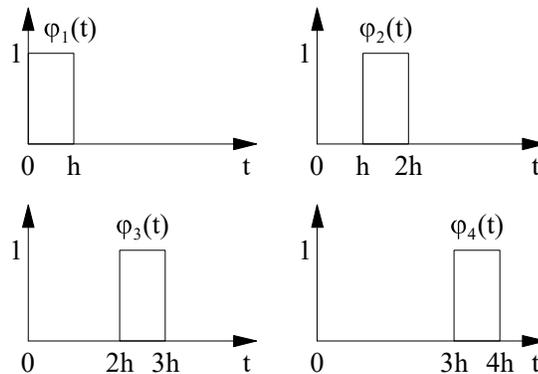


Figura 3.1 Kernels de la serie de funciones de bloques de pulsos.

$u_{a,med}(t)$ se puede aproximar utilizando $\Phi(t)$ de la siguiente forma:

$$u_{a,med}(t) \cong u_{a1}\varphi_1(t) + u_{a2}\varphi_2(t) + \dots + u_{am}\varphi_m(t) = U_a \Phi(t) \quad (3.70)$$

donde

$$U_a = [u_{a1} \quad u_{a2} \quad \dots \quad u_{am}] \quad (3.71)$$

es el vector de coeficientes de la serie de funciones de bloques de pulsos. Estos coeficientes se obtienen calculando mediante (3.72) los valores promedio de dos datos consecutivos de $u_{a,med}(t)$ medidos.

$$u_{ak} = \frac{1}{2} [u_{a,med}(kh-h) + u_{a,med}(kh)] \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (3.72)$$

$u_{a,med}(t)$ y la representación funcional de su aproximación mediante la serie de funciones de bloques de pulsos se muestran en la Figura 3.2.

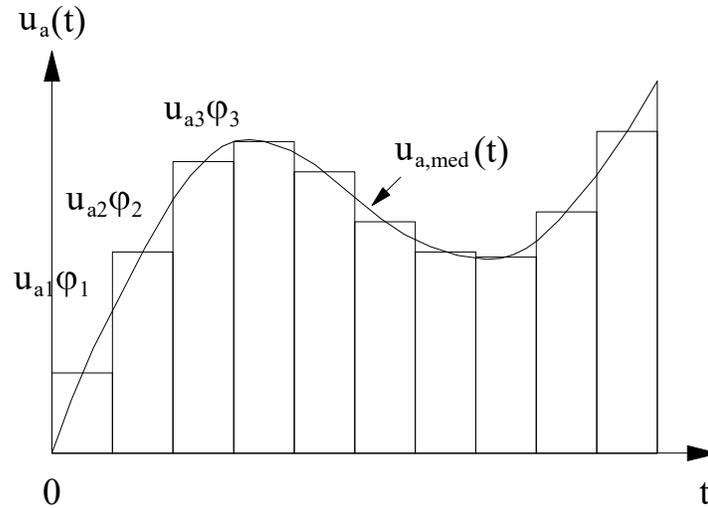


Figura 3.2 Aproximación utilizando la serie de funciones de bloques de pulsos.

Similarmente, para la corriente de armadura $i_{a,med}$ y para la velocidad angular ω_{med} se tiene:

$$i_{a,med}(t) \cong i_{a1}\varphi_1(t) + i_{a2}\varphi_2(t) + \dots + i_{am}\varphi_m(t) = I_a \Phi(t) \quad (3.73)$$

$$\omega_{med}(t) \cong \omega_1\varphi_1(t) + \omega_2\varphi_2(t) + \dots + \omega_m\varphi_m(t) = \Omega \Phi(t) \quad (3.74)$$

donde

$$I_a = [i_{a1} \quad i_{a2} \quad \cdots \quad i_{am}] \quad (3.75)$$

$$i_{ak} = \frac{1}{2} [i_{a,med}(kh-h) + i_{a,med}(kh)] \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (3.76)$$

$$\Omega = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_m] \quad (3.77)$$

$$\omega_k = \frac{1}{2} [\omega_{med}(kh-h) + \omega_{med}(kh)] \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (3.78)$$

Sean X y U las matrices que contienen los coeficientes de la serie de funciones de bloques de pulsos para la aproximación de las señales de salida (corriente de armadura y velocidad angular) y entrada (voltaje de alimentación) del motor, respectivamente.

$$X = \begin{bmatrix} i_{a1} & i_{a2} & \cdots & i_{am} \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a \\ \Omega \end{bmatrix}_{(2,m)}$$

$$U = [u_{a1} \quad u_{a2} \quad \cdots \quad u_{am}] = [U_a]_{(1,m)}$$

Entonces,

$$x(t) = X\Phi(t) \quad (3.79)$$

$$u_{a,med}(t) = U\Phi(t) \quad (3.80)$$

Sustituyendo (3.79) y (3.80) en (3.68), se tiene:

$$X\Phi(t) = AX \int_0^t \Phi(t) dt + BU \int_0^t \Phi(t) dt \quad (3.81)$$

La integral de la serie de funciones de bloques de pulsos $\Phi(t)$ se puede calcular como se muestra enseguida, considerando, como ejemplo, $m=3$; esto es, para señales con 3 muestras.

$$\Phi(t) = [\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \quad \varphi_3(t)]^T \quad (3.82)$$

Para el bloque 1, ver Figura 3.3, se puede escribir

$$\int \varphi_1(t) dt = \frac{h}{2} \varphi_1(t) + h\varphi_2(t) + h\varphi_3(t) \quad (3.83)$$

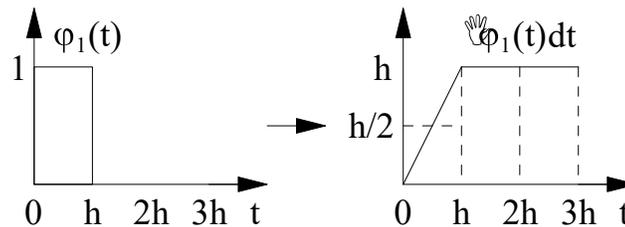


Figura 3.3 Aproximación de la integral del bloque 1.

Para el bloque 2, ver Figura 3.4, se puede escribir

$$\int \varphi_2(t) dt = \frac{h}{2} \varphi_2(t) + h\varphi_3(t) \quad (3.84)$$

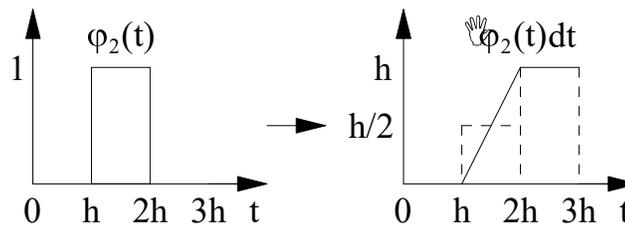


Figura 3.4 Aproximación de la integral del bloque 2.

Para el bloque 3, ver Figura 3.5, se puede escribir

$$\int \varphi_3(t) dt = \frac{h}{2} \varphi_3(t) \quad (3.85)$$

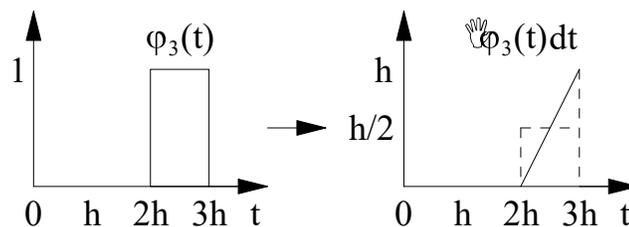


Figura 3.5 Aproximación de la integral del bloque 3.

Así, para señales con 3 muestras se tendrá:

$$\int_0^t \Phi(t) dt = \int_0^t [\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \quad \varphi_3(t)]^T dt = h \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

En general, para señales con m muestras se tendrá:

$$\int_0^t \Phi(t) dt = H\Phi(t) \quad (3.87)$$

donde

$$H = h \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{(m,m)} \quad (3.88)$$

Por lo tanto, (3.81) se transforma en la siguiente ecuación algebraica,

$$X\Phi(t) = AXH\Phi(t) + BUH\Phi(t) \quad (3.89)$$

cancelando $\Phi(t)$ en ambos lados de (3.89), se obtiene:

$$X = AXH + BUH \quad (3.90)$$

Factorizando (3.90),

$$X = \theta Z \quad (3.91)$$

donde

$$\theta = [A \quad B] \quad (3.92)$$

$$Z = \begin{bmatrix} XH \\ UH \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Así, como se mostrará en el siguiente capítulo, una vez que se forma el arreglo matricial compacto (3.91) se aplica directamente el método de mínimos cuadrados para identificar los parámetros.

3.7 Conclusiones

En el presente capítulo se presentó un panorama muy general de la aproximación de funciones mediante series ortogonales, citando sus diversos dominios; los cuales son perspectivas alternas para observar un mismo problema. Sin embargo, el énfasis fue para la serie de Hartley y para la serie de funciones de bloques de pulsos, ya que en esta tesis se emplean para convertir la ecuación diferencial que describe la dinámica del motor de CD de imanes permanentes en una ecuación algebraica, y posteriormente identificar los parámetros del mismo mediante el método de mínimos cuadrados. Así, mediante las propiedades de las matrices operacionales de integración, se demostró la eficacia del cálculo operacional en la solución de problemas descritos por ecuaciones diferenciales.

Además, al comparar la estructura de los vectores de funciones base y de coeficientes inherentes a la serie de Hartley y a la serie de funciones de bloques de pulsos, el lector puede analizar las posibles ventajas y desventajas de cada dominio para propósitos de programación; ya que el número de cálculos que involucra un dominio respecto al otro varía considerablemente. En teoría, se deben obtener los mismos resultados con ambos métodos, sin embargo, mientras que para calcular los coeficientes de la serie de funciones de bloques de pulsos se requiere calcular simples promedios, para calcular los de la serie de Hartley se requieren integrales, por ello es necesario programar la Transformada Rápida de Hartley (FHT) mediante un algoritmo que no es trivial. Por último, es importante mencionar que a diferencia de otros dominios, la serie de Hartley y la serie de funciones de bloques de pulsos no involucran números complejos.

Capítulo 4

Estimación de Parámetros del Motor de CD de Imanes Permanentes

4.1 Introducción

El motor de CD o motor de corriente continua (CC) fue uno de los primeros dispositivos eléctricos creados para la conversión de energía eléctrica en energía mecánica. Aunque con el paso del tiempo se han desarrollado variedad de diseños, el principio de funcionamiento es esencialmente el mismo y su entendimiento es relativamente simple, además, se controlan fácilmente por medio de dispositivos externos de bajo costo llamados controladores, y su comportamiento es altamente lineal. Tales características los convierten en una opción sumamente atractiva para diversas aplicaciones.

En la actualidad, los motores de CD se emplean en la mayoría de las aplicaciones de control donde se requiere variar la velocidad y el par a fin de manipular la posición de mecanismos. Por ello, son una de las fuentes motrices más utilizadas en la industria y, para propósitos de análisis es necesario establecer modelos matemáticos y procedimientos para determinar sus parámetros principales.

En el presente capítulo se describe el principio de funcionamiento del motor de CD; en particular se mencionan algunas características relevantes del motor de CD de imanes permanentes con escobillas, se desarrolla el modelo matemático en la forma de variables de

estado que describe su comportamiento dinámico; a partir del modelo mencionado se desarrolla el procedimiento general de identificación de parámetros mediante matrices operacionales y se deduce el método de mínimos cuadrados para su posterior aplicación en la obtención de los parámetros electromecánicos del motor.

Se pretende demostrar que las señales de entrada (voltaje de alimentación) y salida (corriente de armadura y velocidad angular), obtenidas experimentalmente, se pueden aproximar mediante cualquier dominio de las series ortogonales, ya que la clave consiste únicamente en variar la estructura de cada vector de coeficientes y de la matriz de integración P , acorde a los requerimientos del dominio elegido. Esto permite escribir un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales que se pueden resolver aplicando el método de mínimos cuadrados, y así, finalmente obtener los parámetros desconocidos.

4.2 Principio de Funcionamiento del Motor de CD

El motor de CD es básicamente un transductor de par que convierte energía eléctrica en energía mecánica por medio del electromagnetismo. El esquema típico de construcción de un motor de CD se muestra en la Figura 4.1 [22].

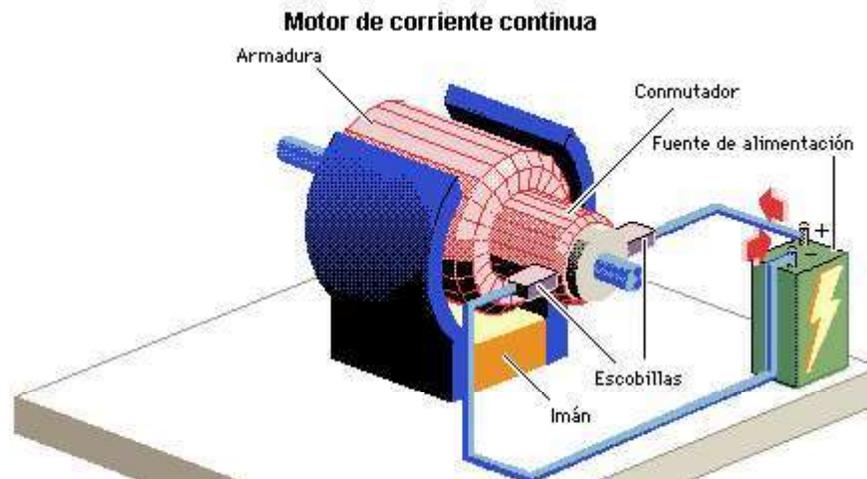


Figura 4.1 Esquema de construcción básico de un motor de CD.

Dos principios relacionados entre sí sirven de base al funcionamiento de los motores. El primero es el principio de la inducción electromagnética descubierto por el físico e inventor británico Michael Faraday (1791-1867) en 1831. Si un conductor se mueve a través

de un campo magnético, o si está situado en las proximidades de otro conductor por el que circula una corriente de intensidad variable, se induce una corriente en el primer conductor. El principio opuesto a éste fue observado en 1820 por el físico francés André Marie Ampère (1775-1836). Si una corriente circula a través de un conductor situado en el interior de un campo magnético, éste ejerce una fuerza mecánica sobre el conductor [22].

Un motor de CD utiliza la corriente eléctrica que fluye ininterrumpidamente en un solo sentido, y que es producida por la fuente de voltaje de alimentación. El motor está formado por una armadura que gira dentro de un campo magnético estacionario. La armadura es por lo general un núcleo cilíndrico de hierro dulce laminado, alrededor del cual se arrollan bobinas o espiras agrupadas en hendiduras longitudinales [22]. Es conveniente ilustrar el principio de funcionamiento de un motor de CD como una espira conductora que gira sobre un eje imaginario al estar situada dentro de un campo magnético y hacer circular corriente eléctrica a través de ella.

La fuente de alimentación se conecta a las escobillas de carbón que hacen contacto con el conmutador de la armadura. El conmutador se puede describir como un interruptor que cambia o invierte la dirección del flujo de corriente en la espira según va girando. El conmutador es en esencia un anillo conductor (de cobre) seccionado en dos segmentos (delgas), cada segmento está conectado a cada segmento de la espira y aislados eléctricamente uno del otro [23]. Ver Figura 4.2 [22].

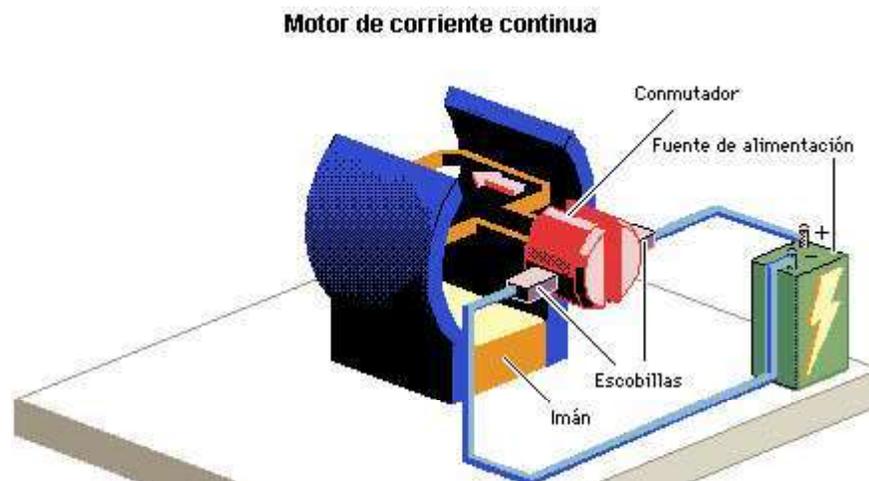


Figura 4.2 Conmutador de un motor de CD.

La corriente eléctrica fluye de la fuente al motor y otra vez a la fuente en un solo sentido. El conductor de la espira a través del cual circula la corriente experimenta una fuerza en presencia del campo magnético. Cuando la corriente fluye a través de la espira en el sentido que se muestra en la Figura 4.3 [22], el imán ejerce una fuerza hacia abajo sobre el segmento de conductor situado cerca del polo sur magnético, y una fuerza hacia arriba sobre el segmento situado cerca del polo norte. Por lo tanto, el par de fuerzas magnéticas paralelas, de igual magnitud y de dirección opuesta, crean un momento de torsión sobre la espira que la hace girar en dirección de las manecillas del reloj. Estas fuerzas y momentos de torsión son el principio de funcionamiento de un motor de CD y de algunos otros dispositivos como el galvanómetro [23].

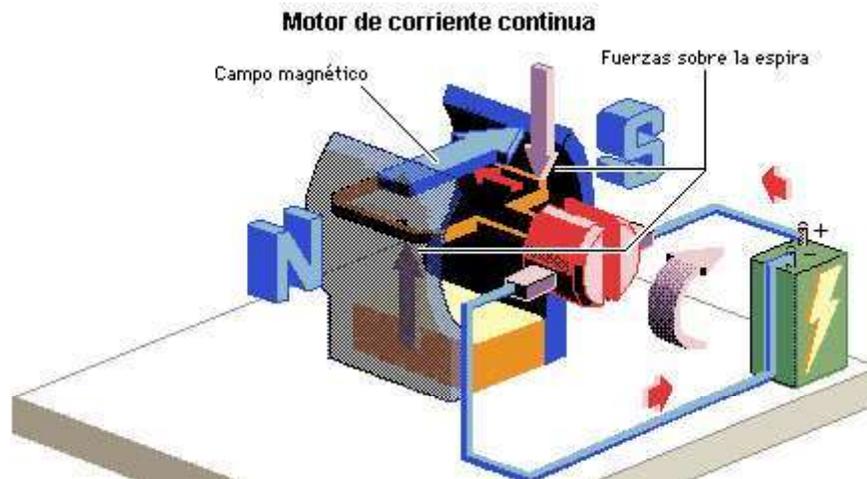


Figura 4.3 Fuerzas magnéticas producidas por el campo magnético sobre la espira.

Después de cada media revolución; es decir, cada 180° , justo en el instante en que la espira es perpendicular al campo magnético, el conmutador invierte la dirección del flujo de corriente, las fuerzas sobre la espira se invierten y el giro se completa en virtud de que el momento de torsión se mantiene siempre en el mismo sentido. Así, el ciclo se repite una y otra vez; cada escobilla toca alternadamente ambos segmentos del conmutador mientras la espira gira continuamente en el mismo sentido.

Generalmente la armadura es el elemento del motor de CD que se encuentra girando y los imanes son estacionarios; la parte giratoria se denomina rotor y la parte estacionaria se denomina estator.

El par desarrollado en el eje del motor es directamente proporcional al flujo en el campo magnético y a la corriente en la armadura. La relación entre el par desarrollado, el flujo ϕ , y la corriente i_a es [14]:

$$T_m = K_m \phi i_a \quad (4.1)$$

donde T_m es el par del motor, ϕ es el flujo magnético, i_a es la corriente de armadura, y K_m es la constante de proporcionalidad.

Además del par desarrollado por la espira conductora dentro de un campo magnético, la revolución de ésta genera un voltaje entre sus terminales. Este voltaje inducido es opuesto al voltaje exterior que se aplica a la armadura, y de ahí que se conozca como *fuerza contraelectromotriz (fcm)*. La cual es proporcional a la velocidad del eje y tiende a oponerse al flujo de corriente [14]; es decir, cuando el motor gira más rápido, el voltaje inducido aumenta hasta que es casi igual al aplicado, la corriente entonces es pequeña, y la velocidad del motor permanecerá constante siempre que éste gire en vacío. Bajo carga, la armadura gira más lentamente, reduciendo el voltaje inducido y permitiendo que fluya una corriente mayor en la armadura [22]. Por lo tanto, la *fcm* es equivalente a una “fricción eléctrica” que tiende a mejorar la estabilidad del motor, y en general la estabilidad del sistema [14]. La relación entre la *fcm* y la velocidad del eje es:

$$e_b = K_b \phi \omega \quad (4.2)$$

donde e_b denota la *fcm*, ω es la velocidad del eje del motor, y K_b es la constante de proporcionalidad. Las ecuaciones (4.1) y (4.2) forman la base del funcionamiento del motor de CD.

4.3 Motor de CD de Imanes Permanentes

En general, el campo magnético de un motor de CD se puede producir mediante bobinas o imanes permanentes. Dada la popularidad de los motores de CD de imanes permanentes en aplicaciones de sistemas de control, en esta sección se centra la atención en este tipo de motores.

En los motores de CD de imanes permanentes la armazón exterior está hecha de material ferromagnético y, los imanes permanentes que están radialmente magnetizados se montan en la periferia interior de la armazón exterior. Este tipo de motores se pueden clasificar de acuerdo al esquema de conmutación y al diseño de la armadura. Los motores de CD convencionales poseen escobillas mecánicas y conmutadores. Sin embargo, en una clase importante de motores de CD la conmutación se lleva a cabo electrónicamente mediante interruptores de estado sólido; a este tipo de motores se les llama *motores de CD sin escobillas* [14].

Los motores de CD de imanes permanentes son muy comunes en rangos de caballaje fraccional y subfraccional, en los cuales no puede justificarse espacio y costo de un circuito separado de campo. Puesto que estos motores no requieren un circuito de campo externo, las pérdidas se reducen. Se les encuentra en diversos productos, tales como juguetes, servo mecanismos, actuadores, robots, dispositivos electrónicos automotrices, etc.

Dado que los imanes permanentes producen un flujo magnético constante, la relación par-velocidad de este tipo de motores es altamente lineal. Pueden proporcionar un par relativamente alto a bajas velocidades, y el campo magnético permanente ocasiona un autofrenado cuando se retira el voltaje de alimentación del motor [24].

Sin embargo, una desventaja de los motores de CD de imanes permanentes es que no pueden producir la alta densidad de flujo magnético de un campo externo en derivación, por ejemplo. Además, corren el riesgo de desmagnetización; si la corriente de la armadura llega a ser muy grande, la fuerza magnetomotriz de la armadura puede desmagnetizar los imanes, reduciendo y reorientando permanentemente el flujo magnético residual en ellos [23]. La desmagnetización también puede causarse por calentamiento excesivo; el cual puede ocurrir durante un periodo prolongado de sobrecarga, y algunos imanes son proclives a perder intensidad si se desarma el motor.

Se han desarrollado diversos materiales magnéticos con características deseables para imanes permanentes en motores. Entre los principales se encuentran los materiales ceramicomagnéticos como la ferrita, y los materiales magnéticos de tierras raras como neodimio-hierro-boro o samario-cobalto.

Debido a que el flujo magnético en los motores de CD de imanes permanentes es fijo, no es posible controlar su velocidad variando la corriente o el flujo magnético de campo, como en los motores de CD en derivación. La única forma de controlar la velocidad de este tipo de motores es variar el voltaje de alimentación (ya que es directamente proporcional a la velocidad del eje) o la corriente de armadura [23], [25]. El par desarrollado en el eje del motor es directamente proporcional a la corriente de armadura. En la práctica, el control de la velocidad y el par de los motores de CD de imanes permanentes se lleva a cabo mediante algún esquema de modulación de ancho de pulso (PWM, de las siglas en inglés Pulse Width Modulation).

De acuerdo a la construcción y diseño de la armadura, los motores de CD de imanes permanentes pueden dividirse en tres tipos: *motores de núcleo de hierro*, *devanado superficial* y *bobina móvil* [14]. Sin embargo, el motor de interés en esta tesis es el motor de CD de imanes permanentes de núcleo de hierro, por ello se describe brevemente a continuación.

4.3.1 Motor de CD de Imanes Permanentes de Núcleo de Hierro

La configuración del rotor y estator de un motor de CD de imanes permanentes de núcleo de hierro se muestra en la Figura 4.4. El material del imán permanente puede ser bario-ferrita, álnico, o un compuesto de “tierras raras”. El flujo magnético producido por el imán pasa a través de la estructura laminada del rotor que tiene ranuras. Los conductores de la armadura están localizados en las ranuras del rotor. Este tipo de motor de CD está caracterizado por una inercia del rotor relativamente alta (ya que la parte giratoria está formada por las bobinas de la armadura), inductancia alta, bajo costo y alta confiabilidad [14].

4.4 Modelo Matemático del Motor de CD de Imanes Permanentes

Ya que se requiere analizar la dinámica del motor de CD de imanes permanentes a fin de obtener sus parámetros electromecánicos, en esta sección se desarrolla el modelo matemático. En la Figura 4.5 se muestra el circuito equivalente de un motor de CD de imanes permanentes con escobillas. La armadura está modelada como un circuito con resistencia R_a

conectada en serie a una inductancia L_a , y a una fuente de voltaje e_b , que representa la f_{cem} en la armadura cuando el rotor gira [14]. La flecha que apunta hacia arriba en la Figura 4.5 representa el flujo magnético ϕ constante producido por los imanes permanentes. Las variables y parámetros del motor se definen en la Tabla 4.1 [23].

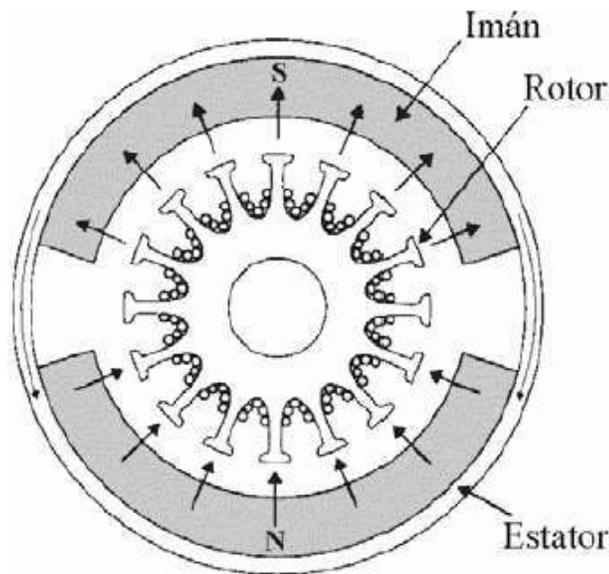


Figura 4.4 Sección transversal de un motor de CD de imanes permanentes de núcleo de hierro.

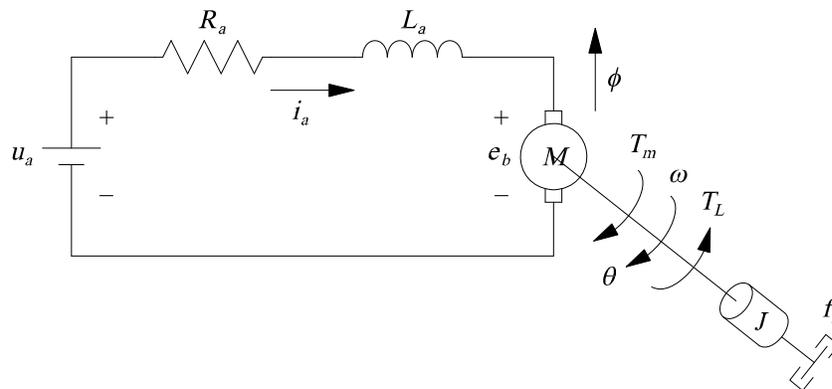


Figura 4.5 Circuito equivalente de un motor de CD de imanes permanentes.

Con referencia al diagrama del circuito de la Figura 4.5, el control del motor de CD de imanes permanentes se aplica a las terminales de la armadura en la forma del voltaje aplicado $u_a(t)$. Para un análisis lineal, se supone que el par desarrollado por el motor es proporcional al flujo magnético en el entrehierro y a la corriente de armadura [14],

$$T_m(t) = K_m(t)\phi i_a(t) \quad (4.3)$$

Ya que ϕ es constante, el par del motor de CD de imanes permanentes es directamente proporcional a la corriente de armadura $i_a(t)$ y (4.3) se reescribe como,

$$T_m(t) = K_T i_a(t) \quad (4.4)$$

donde $K_T = K_m(t)\phi$ es la constante de par. La corriente de armadura $i_a(t)$ produce el par $T_m(t)$, y éste produce la velocidad angular $\omega(t)$ y el desplazamiento $\theta(t)$.

Tabla 4.1 Variables y parámetros del motor de CD.

<i>Símbolo</i>	<i>Definición</i>	<i>Unidades</i>
$i_a(t)$	Corriente de armadura	A
R_a	Resistencia de armadura	Ω
L_a	Inductancia de armadura	H
$u_a(t)$	Voltaje aplicado a la armadura	V
$e_b(t)$	Fuerza contraelectromotriz (f_{cem})	V
K_e	Constante de la f_{cem}	$V / rad / s$
ϕ	Flujo magnético en el entrehierro	Wb
$T_m(t)$	Par desarrollado por el motor	$N \cdot m$
$T_p(t)$	Par desarrollado debido a la inercia del rotor	$N \cdot m$
$T_n(t)$	Par de pérdidas debidas al coeficiente de fricción viscosa del motor	$N \cdot m$
$T_L(t)$	Par de carga	$N \cdot m$
$\theta(t)$	Desplazamiento angular del eje del rotor	rad
$\omega(t)$	Velocidad angular del eje del rotor	rad / s
J	Inercia del rotor	$Kg \cdot m^2$
f_r	Coefficiente de fricción viscosa	$N \cdot m / rad / s$
K_T	Constante del par desarrollado	$N \cdot m / A$

Similarmente, para la f_{cem} se tiene,

$$e_b(t) = K_b(t)\phi \frac{d}{dt}\theta(t) \quad (4.5)$$

Al igual que en el caso anterior, ϕ es constante y la f_{cem} es directamente proporcional a la velocidad angular $\omega(t)$, entonces (4.5) se reescribe como,

$$e_b(t) = K_e \omega(t) \quad (4.6)$$

donde $K_e = K_b(t)\phi$ es la constante de la f_{cem} , determinada por la densidad de flujo magnético de los imanes permanentes, la reluctancia del núcleo de hierro de la armadura, y el número de vueltas del devanado de la armadura [8].

El motor de CD de imanes permanentes se puede modelar mediante dos ecuaciones diferenciales, considerando sus características eléctricas y mecánicas. La primera ecuación se obtiene aplicando la ley de voltajes de Kirchoff al circuito de armadura, obteniéndose así [14],

$$u_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{d}{dt} i_a(t) + e_b(t) \quad (4.7)$$

donde $u_a(t)$ es el voltaje de armadura, $i_a(t)$ la corriente de armadura, R_a la resistencia de armadura, L_a la inductancia del devanado de armadura, y $e_b(t)$ el voltaje inducido en el interior de la máquina.

Sustituyendo (4.6) en (4.7) se obtiene,

$$u_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{d}{dt} i_a(t) + K_e \omega(t) \quad (4.8)$$

Para obtener la ecuación diferencial que relaciona la aceleración con el par producido por el motor, se aplica la segunda ley de Newton [14], [23],

$$T_m(t) = T_p(t) + T_n(t) + T_L(t) \quad (4.9)$$

donde $T_m(t)$ es el par desarrollado por el motor, $T_p(t)$ es el par que se desarrolla debido a la inercia del rotor, $T_n(t)$ es el par de pérdidas debidas al coeficiente de fricción viscosa del motor, y $T_L(t)$ representa el par de carga que normalmente se hace cero en el experimento de estimación de parámetros.

A la vez, se tiene,

$$T_p(t) = J \frac{d}{dt} \omega(t) \quad (4.10)$$

$$T_n(t) = f_r \omega(t) \quad (4.11)$$

Sustituyendo (4.4), (4.10) y (4.11) en (4.9) se obtiene,

$$K_T i_a(t) = J \frac{d}{dt} \omega(t) + f_r \omega(t) + T_L \quad (4.12)$$

donde J es la inercia del rotor y f_r es el coeficiente de fricción viscosa asociado con el sistema mecánico rotacional de la máquina.

4.4.1 Representación del Modelo en la Forma de Espacio de Estados

La corriente de armadura $i_a(t)$ y la velocidad angular $\omega(t)$ se pueden definir como las variables de estado del sistema. Así, reescribiendo las ecuaciones diferenciales (4.8) y (4.12), se tiene la siguiente representación [21]:

$$\frac{d}{dt} i_a(t) = -\frac{R_a}{L_a} i_a(t) - \frac{K_e}{L_a} \omega(t) + \frac{u_a(t)}{L_a} \quad (4.13)$$

$$\frac{d}{dt} \omega(t) = \frac{K_T}{J} i_a(t) - \frac{f_r}{J} \omega(t) - \frac{T_L(t)}{J} \quad (4.14)$$

Estas ecuaciones describen la dinámica del motor de CD de imanes permanentes, y su representación en la forma de espacio de estados es la siguiente,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_e}{L_a} \\ \frac{K_T}{J} & -\frac{f_r}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a(t) \\ T_L(t) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a(t) \\ T_L(t) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Así mismo, las ecuaciones anteriores pueden expresarse simbólicamente como (2.1) y (2.2),

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

donde $x(t)$ es el vector de estado, $u(t)$ es el vector de entrada, y $y(t)$ es el vector de salida; es decir,

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_e}{L_a} \\ \frac{K_T}{J} & -\frac{f_r}{J} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_a(t) \\ T_L(t) \end{bmatrix}$$

donde A , B , C y D son matrices de coeficientes constantes. Las matrices A y B están definidas por los parámetros electromecánicos del motor (R_a , L_a , K_T , K_e , f_r y J).

4.4.2 Relación Entre K_T y K_e

Aunque funcionalmente la constante de par K_T y la constante de la *fcem* K_e son dos parámetros separados, sus valores están estrechamente relacionados. Para mostrar esta relación, la potencia desarrollada en la armadura se escribe como [14],

$$P_e = e_b(t)i_a(t) \tag{4.17}$$

La potencia mecánica se expresa como,

$$P_m = T_m(t)\omega(t) \quad (4.18)$$

Si se consideran despreciables las pérdidas en el motor, sustituyendo (4.4) y (4.6) en (4.18) y (4.17), respectivamente, se tiene

$$P_e = P_m \quad (4.19)$$

$$K_e\omega(t)i_a(t) = K_T i_a(t)\omega(t) \quad (4.20)$$

así, se obtiene,

$$K_e = K_T \quad (4.21)$$

Esta relación es relevante, ya que permitirá obtener los parámetros individuales del modelo matemático.

4.5 Identificación de Parámetros Utilizando Matrices Operacionales

Una vez elegida la estructura modelo del motor de CD de imanes permanentes, es necesario determinar el valor de los parámetros del mismo que ajustan la respuesta del modelo a los datos de entrada-salida experimentales. Existen varios métodos o criterios para llevar a cabo este ajuste de parámetros, siendo el más destacado el método de mínimos cuadrados.

Los parámetros electromecánicos del motor de CD de imanes permanentes podrían determinarse directamente a través de pruebas experimentales. Sin embargo, evaluar los parámetros del motor directamente o individualmente puede no resultar práctico o eficiente en algunas situaciones, como en la que el motor no pueda separarse de su carga mecánica, por ejemplo [23], [26].

En la actualidad existen diversos procedimientos, técnicas y criterios para determinar los parámetros característicos de un motor de CD, éstos se emplean principalmente para estimar sus parámetros con propósitos de control de calidad, detección y diagnóstico de fallas, y/o en el caso del modelado de un motor para control en lazo cerrado.

En esta sección se concluye la descripción del procedimiento basado en el uso de series ortogonales y matrices operacionales, descrito brevemente en el capítulo anterior, para la identificación de parámetros de sistemas lineales invariantes en el tiempo. El problema planteado es la identificación de los parámetros del motor de CD de imanes permanentes en base a su modelo continuo en espacio de estados; primeramente se convierte la ecuación diferencial que describe su comportamiento dinámico en una ecuación algebraica vía integración múltiple, utilizando la serie de Hartley y la serie de funciones de bloques de pulsos en la aproximación de las integrales y de las señales muestreadas de entrada (voltaje de alimentación) y salida (corriente de armadura y velocidad angular). El uso del cálculo operacional permite aplicar fácilmente el método de mínimos cuadrados para estimar los parámetros del sistema.

En el capítulo anterior se mencionó que una característica importante de estas aproximaciones es que también permiten la identificación de condiciones iniciales desconocidas simultáneamente a la identificación de parámetros. A continuación se aplica la teoría del cálculo operacional al modelo del motor de CD de imanes permanentes, considerando que el motor gira en vacío y que se desconocen las condiciones iniciales. Primeramente, se integran ambos lados de las ecuaciones diferenciales (4.13) y (4.14),

$$i_a(t) - i_a(0) = -\frac{R_a}{L_a} \int_0^t i_a(t) dt - \frac{K_e}{L_a} \int_0^t \omega(t) dt + \frac{1}{L_a} \int_0^t u_a(t) dt \quad (4.22)$$

$$\omega(t) - \omega(0) = \frac{K_T}{J} \int_0^t i_a(t) dt - \frac{f_r}{J} \int_0^t \omega(t) dt \quad (4.23)$$

La condición inicial se puede aproximar con ayuda del vector elemental [8],

$$e = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T \leftarrow \text{iésima posición} \quad (4.24)$$

Con este vector elemental es posible escribir,

$$x(0) = X_{(0)}eT(t) \quad (4.25)$$

Así, aproximando las funciones involucradas en (4.22) y (4.23), incluyendo las condiciones iniciales, mediante la serie de Hartley y la serie de funciones de bloques de pulsos (o en general por medio de cualquier otro dominio de las series ortogonales), se tiene,

$$I_a T(t) - I_{a(0)} eT(t) = -\frac{R_a}{L_a} I_a \int_0^t T(t) dt - \frac{K_e}{L_a} \Omega \int_0^t T(t) dt + \frac{1}{L_a} U_a \int_0^t T(t) dt \quad (4.26)$$

$$\Omega T(t) - \Omega_{(0)} eT(t) = \frac{K_T}{J} I_a \int_0^t T(t) dt - \frac{f_r}{J} \Omega \int_0^t T(t) dt \quad (4.27)$$

Recurriendo a la matriz operacional de integración P (3.11), se tiene,

$$I_a T(t) - I_{a(0)} eT(t) = -\frac{R_a}{L_a} I_a P T(t) - \frac{K_e}{L_a} \Omega P T(t) + \frac{1}{L_a} U_a P T(t) \quad (4.28)$$

$$\Omega T(t) - \Omega_{(0)} eT(t) = \frac{K_T}{J} I_a P T(t) - \frac{f_r}{J} \Omega P T(t) \quad (4.29)$$

Ahora, eliminando el vector de kernels $T(t)$,

$$I_a - I_{a(0)} e = -\frac{R_a}{L_a} I_a P - \frac{K_e}{L_a} \Omega P + \frac{1}{L_a} U_a P \quad (4.30)$$

$$\Omega - \Omega_{(0)} e = \frac{K_T}{J} I_a P - \frac{f_r}{J} \Omega P \quad (4.31)$$

Reorganizando las ecuaciones anteriores a fin de despejar incógnitas; es decir, los parámetros electromecánicos del motor de CD de imanes permanentes,

$$I_a = -\frac{R_a}{L_a} I_a P - \frac{K_e}{L_a} \Omega P + \frac{1}{L_a} U_a P + I_{a(0)} e \quad (4.32)$$

$$\Omega = \frac{K_T}{J} I_a P - \frac{f_r}{J} \Omega P + \Omega_{(0)} e \quad (4.33)$$

Finalmente, escribiendo las ecuaciones anteriores en forma matricial, se tiene,

$$\begin{bmatrix} I_a \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_e}{L_a} & \frac{1}{L_a} & I_{a(0)} \\ \frac{K_T}{J} & -\frac{f_r}{J} & 0 & \Omega_{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a P \\ \Omega P \\ U_a P \\ e \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

en forma compacta,

$$X = \theta Z \quad (4.35)$$

donde,

$$X = \begin{bmatrix} I_a \\ \Omega \end{bmatrix}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_e}{L_a} & \frac{1}{L_a} & I_{a(0)} \\ \frac{K_T}{J} & -\frac{f_r}{J} & 0 & \Omega_{(0)} \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} I_a P \\ \Omega P \\ U_a P \\ e \end{bmatrix}$$

La matriz θ representa los parámetros desconocidos del motor de CD de imanes permanentes, X los coeficientes de la aproximación de la corriente de armadura $i_a(t)$ y de la velocidad angular $\omega(t)$, y Z un vector cuyos elementos son los productos de los coeficientes de las aproximaciones y las matrices operacionales de integración.

4.6 Mínimos Cuadrados

El método de mínimos cuadrados fue postulado casi simultáneamente por el matemático francés Adrien Marie Legendre (1752-1833) y por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a principios del siglo XIX, no obstante, se le atribuye a Gauss por haber sido él quien lo formalizó matemáticamente. En sus orígenes, este método era utilizado para calcular las órbitas de los cuerpos celestes, y posteriormente incursionó en el

área de estimación de parámetros. Actualmente, debido en parte a la sencillez de su aplicación, sigue siendo el método más utilizado en la estimación de parámetros. Sin embargo, existen otros métodos; tales como el método de las variables instrumentales, el método de máxima verosimilitud, la estimación bayesiana y el estimador de Chebyshev [27].

De acuerdo con Gauss, el principio de mínimos cuadrados es aquél en el que los parámetros desconocidos de un modelo se pueden elegir en forma tal que [28],

La suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores reales observados y los valores calculados multiplicados por números que miden el grado de precisión es un mínimo.

Para ser capaz de proporcionar una solución analítica, los valores calculados deben ser funciones lineales de los parámetros desconocidos. La clase de modelos es tal que el de salida es lineal en los parámetros, y el criterio es una función cuadrática. Se introduce un criterio para proporcionar una medición de qué tan bien un modelo se ajusta a la información experimental.

4.6.1 Deducción

Puesto que (4.35) posee soluciones infinitas, se requiere elegir la que minimice el error entre la salida estimada por el modelo y la salida real del sistema. Para ello se aplica el método de mínimos cuadrados planteando la siguiente función de error a minimizar,

$$V_N(\theta, X) = (X - \hat{X})^2 = (X - \theta Z)^2 \quad (4.36)$$

Existe un valor de θ que minimiza la función anterior y que constituye el argumento mínimo; es decir,

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} V_N(\theta, X) \quad (4.37)$$

donde X son los valores obtenidos a partir de las mediciones y \hat{X} los valores obtenidos a partir de la simulación del modelo matemático empleando los parámetros estimados, $\hat{\theta}$.

Derivando (4.36) e igualando a cero se obtiene el mínimo de la función

$$\frac{d}{d\theta}(X - \hat{\theta}Z)^2 = 0 \quad (4.38)$$

$$2(X - \hat{\theta}Z)Z^T = 0 \quad (4.39)$$

Así,

$$XZ^T = \hat{\theta}ZZ^T \quad (4.40)$$

$$\hat{\theta} = XZ^T(ZZ^T)^{-1} \quad (4.41)$$

Finalmente, una vez definidas las matrices del arreglo compacto (4.35), la estimación de los parámetros del sistema se obtendrá como resultado de evaluar la expresión (4.41).

4.7 Conclusiones

En el presente capítulo se describió brevemente el principio de funcionamiento del motor de CD, se desarrolló el modelo matemático del motor de CD de imanes permanentes en la forma de variables de estado, el cual es necesario para estimar los parámetros electromecánicos del mismo. Además, se presentó un procedimiento basado en el uso de matrices operacionales para determinar los parámetros electromecánicos del motor de CD de imanes permanentes en base a su modelo matemático en tiempo continuo.

Es necesario resaltar que una característica importante de los motores de CD de imanes permanentes es la alta linealidad de su relación par-velocidad, debido al flujo magnético constante creado por los imanes permanentes. Estos motores pueden proporcionar un par relativamente alto a bajas velocidades.

Por otra parte, como se mencionó en el capítulo anterior, la aplicación del cálculo operacional como medio para identificar los parámetros de un sistema puede presentar una solución elegante en mayor o menor grado, dependiendo del dominio de las series ortogonales que se elija para llevar a cabo la aproximación de funciones. Algunos dominios son muy eficientes y requieren un número reducido de cálculos, lo cual es deseable para propósitos de programación. Sin embargo, el dominio que se elija mantendrá sin cambios considerables el significado físico de los parámetros.

Finalmente, está claro que sin importar el dominio, el objetivo es formar el arreglo matricial compacto (4.35) para aplicar directamente el método de mínimos cuadrados.

Capítulo 5

Resultados Experimentales

5.1 Introducción

En el presente capítulo se presentan los resultados experimentales de la estimación de parámetros de un motor de CD de imanes permanentes real en base a su modelo matemático en tiempo continuo. Para tal propósito, previamente se explicó teóricamente en qué consiste el procedimiento de estimación de parámetros mediante matrices operacionales; se explicó cómo convertir la ecuación diferencial que describe la dinámica del motor en una ecuación algebraica, aproximando las señales e integrales involucradas en los cálculos intermedios mediante dos dominios de las series ortogonales; el primero basa la aproximación en el kernel de la serie de Hartley y el segundo en el kernel de la serie de funciones de bloques de pulsos. Además, se ilustra en qué consiste el experimento para llevar a cabo el procedimiento de estimación de parámetros del motor mencionado y éste se valida de forma práctica.

Se pretende demostrar la potencialidad y aplicabilidad de las matrices operacionales en la identificación de sistemas lineales invariantes en el tiempo y como método directo en el problema de estimación de parámetros, ya que en base a la comparación de las estimaciones obtenidas mediante ambos dominios de las series ortogonales se puede decir que los resultados son muy buenos.

Para llevar a cabo el estudio comparativo de los dos algoritmos de identificación, se utilizaron los archivos de los resultados experimentales obtenidos en [8]. Esto es, los

archivos de las señales medidas de entrada (voltaje de alimentación) y salida (corriente de armadura y velocidad angular) del motor de CD de imanes permanentes.

El procedimiento de identificación de parámetros se realizó implementando el programa computacional correspondiente a la serie de funciones de bloques de pulsos en el paquete de software Matlab 7.

Además, en Matlab 7 se comparan gráficamente las señales medidas de corriente de armadura y velocidad angular con las respectivas señales obtenidas a partir de la simulación del modelo matemático del motor empleando los parámetros estimados mediante ambos dominios, y así se verifica si tales parámetros ajustan la respuesta del modelo a los datos de entrada-salida experimentales; es decir, se valida el modelo. También se desarrolla una rutina para calcular el coeficiente de correlación de las señales, y se mide el tiempo de ejecución de cada programa.

5.2 Experimento Para la Estimación de Parámetros del Motor de CD de Imanes Permanentes

El experimento diseñado para estimar los parámetros del motor de CD de imanes permanentes, marca Pittman modelo GM8724S023, se ilustra en la Figura 5.1. El registro de las señales de entrada-salida del motor (sin carga) se llevó a cabo mediante la tarjeta de adquisición de datos National Instruments PCI-MIO-16E-4, cuyo convertidor A/D posee una resolución de 12 bits y una velocidad máxima de muestreo de 500,000 muestras/seg; la cual es lo suficientemente alta como para que no se presente el fenómeno de aliasing, ya que la constante eléctrica del motor es de 0.54 ms y es menor que la constante mecánica del mismo. Conjuntamente con la tarjeta de adquisición de datos se utilizó el paquete de software LabView 6i.

Se aplicó una entrada de voltaje escalón y se adquirieron los datos de entrada-salida con un periodo de muestreo de 20 μ s. El tiempo total de estudio fue de 0.3277 s, suficiente para analizar el transitorio, y se elaboró un registro total de 16,384 datos de cada señal.

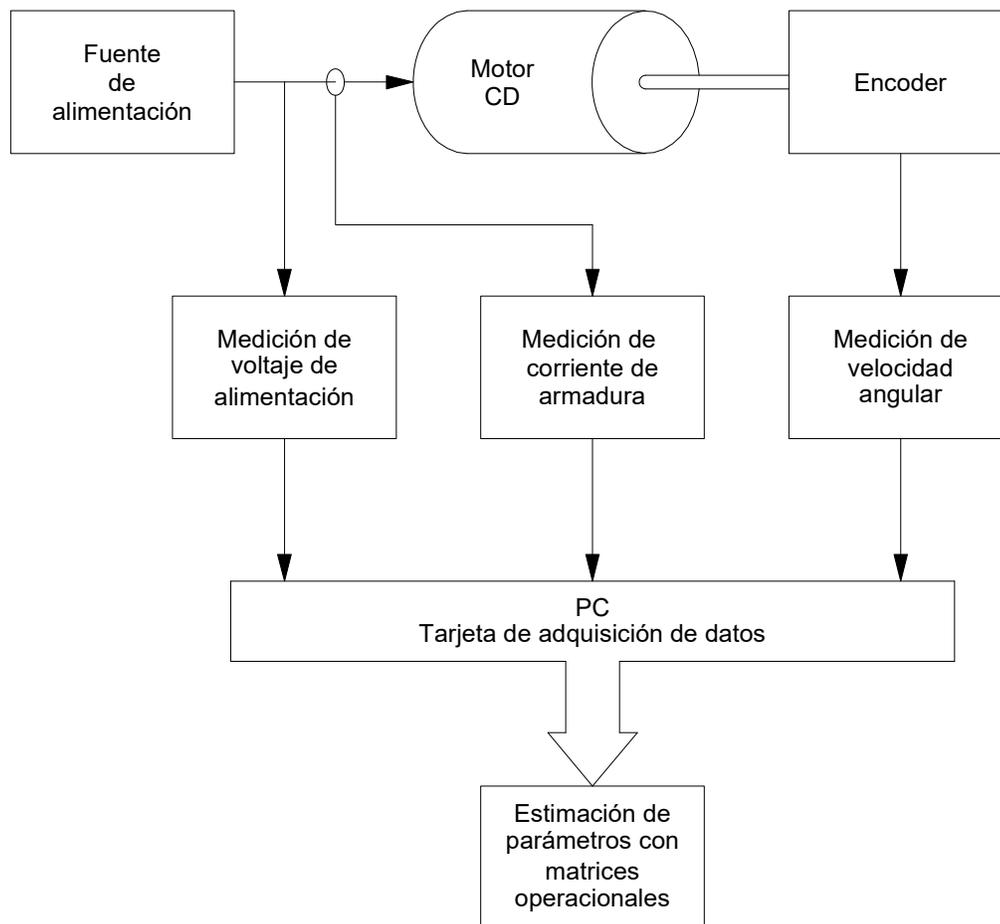


Figura 5.1 Experimento para la estimación de parámetros del motor de CD.

5.2.1 Acondicionamiento de Señales

Puesto que el rango de voltaje de entrada de la tarjeta de adquisición de datos es de -10 V a +10 V, es necesario acondicionar a tal rango la señal de entrada.

5.2.1.1 Medición de Voltaje de Alimentación

El voltaje nominal del motor de CD utilizado en las pruebas es de 24 V, por lo que en este caso se requiere emplear un divisor de voltaje para disminuir el voltaje de alimentación al rango de entrada de la tarjeta de adquisición de datos. En la Figura 5.2 se muestran los valores de resistencia del divisor de voltaje, así como también su función de transferencia.

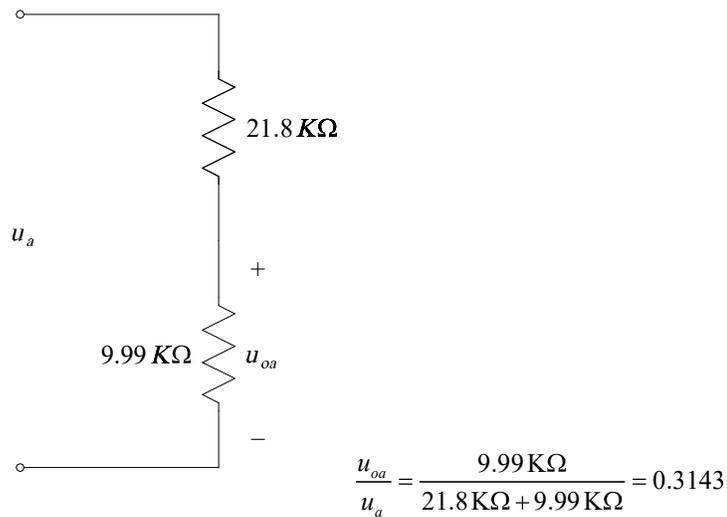


Figura 5.2 Divisor de voltaje para medir el voltaje de alimentación.

5.2.1.2 Medición de Corriente de Armadura

En la medición de corriente se empleó un transductor que entrega 10 mV/A. El motor empleado en las pruebas tiene un pico máximo de corriente en el transitorio de aproximadamente 1.8 A. El circuito de la Figura 5.3, además de anular el offset del transductor de corriente, coloca en el rango deseado la medición de la corriente de armadura.

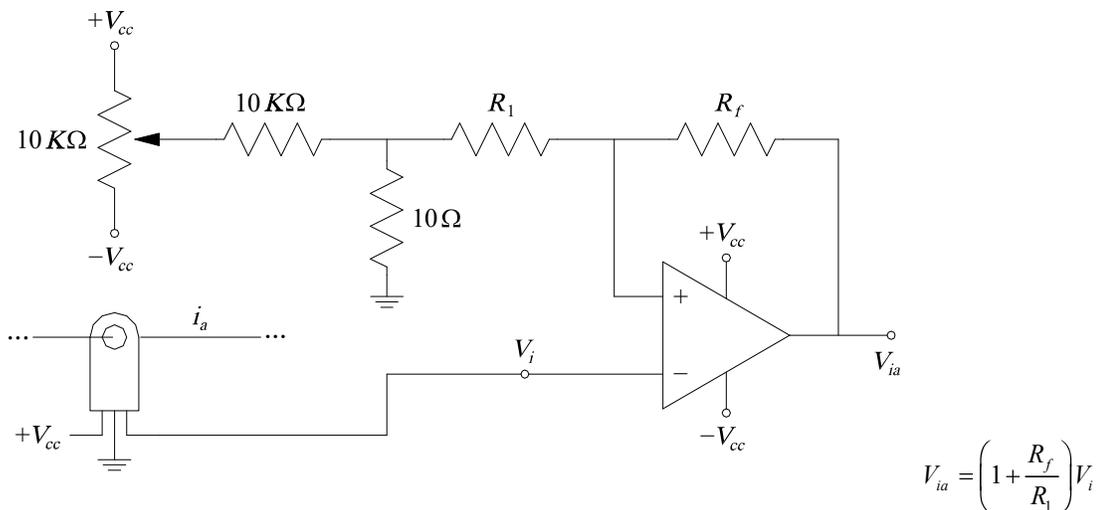


Figura 5.3 Amplificador no inversor con ajuste de offset.

Los valores de resistencia del amplificador son los siguientes,

$$R_1 = 997 \Omega$$

$$R_f = 325 \text{ K}\Omega$$

Por lo tanto, la función de transferencia es,

$$\frac{V_{ia}}{V_i} = 1 + \frac{R_f}{R_1} = 1 + \frac{325 \text{ K}\Omega}{997 \Omega} = 326.9779$$

5.2.1.3 Medición de Velocidad Angular

El motor empleado cuenta con un encoder de tres canales, dos de ellos en cuadratura (canal A y B) y un índice (canal C). Para duplicar la resolución del encoder se utilizan los canales A y B con una compuerta lógica XOR. Para adquirir la velocidad angular mediante el convertidor A/D de la tarjeta de adquisición de datos se utilizó el convertidor de frecuencia a voltaje VFC32. En la Figura 5.4 se muestra el arreglo del circuito.

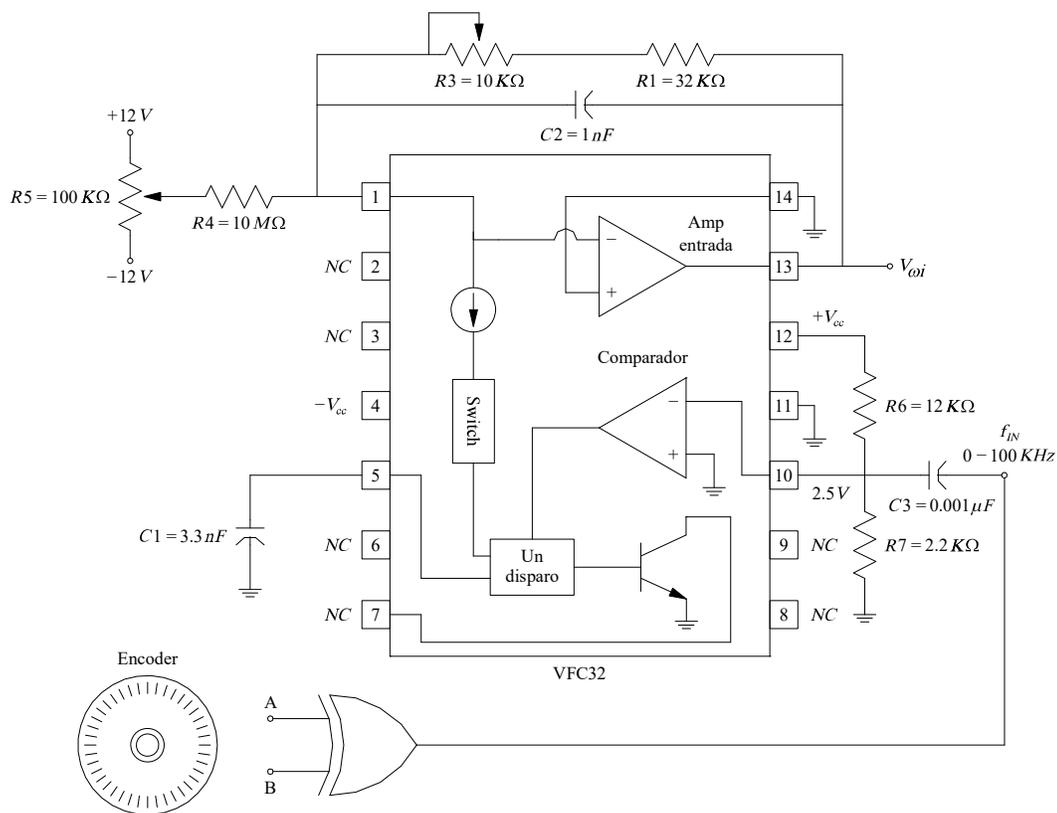


Figura 5.4 Diagrama de conexión para la conversión F/V.

Puesto que a la salida del convertidor de frecuencia a voltaje aparece un rizado, se requiere diseñar un filtro que lo elimine, cuidando que su velocidad de respuesta sea adecuada, de modo que la constante eléctrica del motor sea menor que la constante mecánica del mismo, ya que de lo contrario afectaría la estimación de la dinámica de éste. En la Figura 5.5 se muestra el diagrama de bloques que describe este procedimiento.

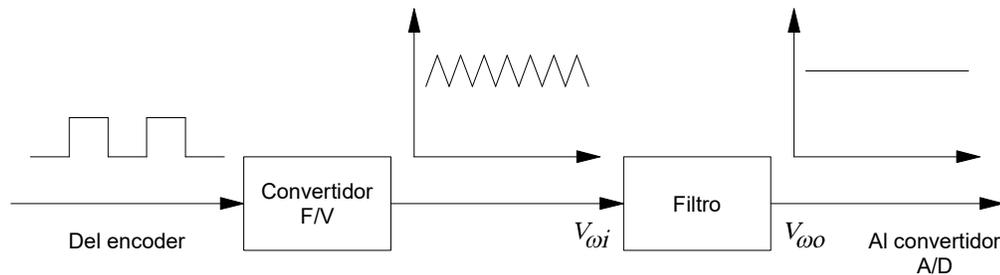


Figura 5.5 Filtrado de la señal del convertidor F/V.

Se observó en V_{oi} un rizado máximo de 2 V de pico a pico a la frecuencia de 83 KHz. Por lo tanto, se requiere un filtro con el perfil mostrado en la Figura 5.6.

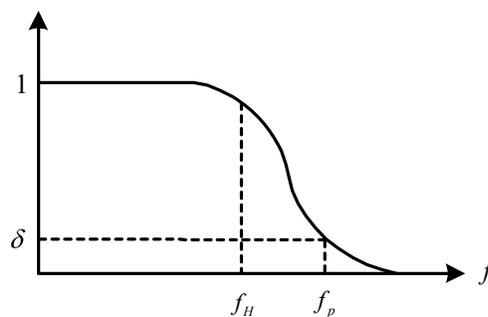


Figura 5.6 Gráfica de magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro.

Donde,

$$f_p = \text{Frecuencia de paro} = 83 \text{ KHz}$$

$$\delta = \text{Ganancia del filtro a la frecuencia de paro}$$

La ganancia δ debe ser un valor tal que la salida del filtro a la frecuencia de paro sea un valor despreciable para el convertidor A/D. En este caso se tiene un convertidor A/D de 12 bits con un rango de voltaje de entrada de 0 a 10 V, por ello se tiene,

$$\text{Resolución} = \Delta V = \frac{10}{2^{12}} = 2.44 \text{ mV}$$

Así, la ganancia δ a la frecuencia de paro se puede calcular como sigue,

$$\delta = \frac{V_{\omega o}(f_p)}{V_{\omega i}(f_p)} \quad (5.1)$$

donde,

$$V_{\omega i}(f_p) = 1 \text{ V de magnitud a } 83 \text{ KHz}$$

$$V_{\omega o}(f_p) < \Delta V = 2.44 \text{ mV}$$

$$\delta = \frac{2.44 \text{ mV}}{1 \text{ V}} = 2.44 \times 10^{-3}$$

En este caso la frecuencia de corte estará determinada por la velocidad de respuesta requerida para el filtro.

Para un filtro de segundo orden la función de transferencia está dada por,

$$\frac{V_{\omega o}}{V_{\omega i}} = \frac{A_F \omega_H^2}{s^2 + 2\xi \omega_H s + \omega_H^2} = \frac{A_F \omega_H^2}{s^2 + \frac{\omega_H}{Q} s + \omega_H^2} \quad (5.2)$$

La constante de tiempo está dada por,

$$\tau_F = \frac{1}{\xi \omega_H} = \frac{2Q}{\omega_H} \quad (5.3)$$

Si se desea monitorear motores con constantes de tiempo del orden de 15 ms y si se consideran hasta 10 mediciones en una constante de tiempo; esto es,

$$\Delta t = 0.15 \text{ ms}$$

Si se consideran tiempos de establecimiento (retardos) de 4 constantes de tiempo del filtro; esto es,

$$\tau_F = \frac{\Delta t}{4} = \frac{2Q}{\omega_H} \quad (5.4)$$

resolviendo para ω_H ,

$$\omega_H = \frac{8Q}{\Delta t} \quad (5.5)$$

$$f_H = \frac{8Q}{2\pi\Delta t} \quad (5.6)$$

$$f_H = \frac{4Q}{\pi\Delta t} \quad (5.7)$$

Suponiendo un filtro de segundo orden; se tendrá $Q = 0.707$

$$f_H = \frac{4(0.707)}{\pi(0.15 \times 10^{-3})} = 6 \text{ KHz}$$

El orden del filtro está dado por,

$$n \geq \frac{\log \left[\left(\frac{1}{\delta} \right)^2 - 1 \right]}{2 \log \left(\frac{f_p}{f_H} \right)} \quad (5.8)$$

Verificando el orden,

$$n \geq \frac{\log \left[\left(\frac{1}{2.44 \times 10^{-3}} \right)^2 - 1 \right]}{2 \log \left(\frac{83 \text{ KHz}}{6 \text{ KHz}} \right)} = \frac{5.225}{2.281} = 2.29$$

Se observa que se requiere un filtro de orden $n = 3$ con la configuración en diagrama de bloques de la Figura 5.7.



Figura 5.7 Diagrama de bloques del filtro de orden 3.

Para la etapa de segundo orden, se tiene $Q = 1$, con lo cual se tendrá

$$f_H = \frac{4}{\pi(0.15 \times 10^{-3})} = 8.488 \text{ KHz}$$

Verificando nuevamente el orden,

$$n \geq \frac{\log \left[\left(\frac{1}{2.44 \times 10^{-3}} \right)^2 - 1 \right]}{2 \log \left(\frac{83 \text{ KHz}}{8.488 \text{ KHz}} \right)} = 2.64$$

Por lo tanto, el diseño del filtro de orden $n = 3$ se muestra en la Figura 5.8.

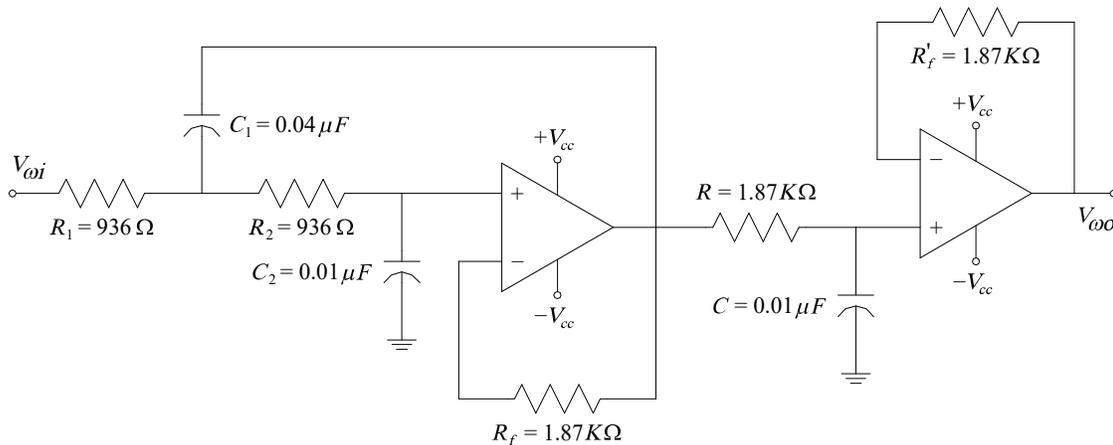


Figura 5.8 Filtro pasa bajas Butterworth de orden 3.

Además del filtrado analógico, se requiere implementar un filtrado digital en LabView 6i para eliminar el ruido ocasionado por la discretización durante la conversión A/D de la tarjeta de adquisición de datos. Se filtra la medición de corriente de armadura con un filtro digital pasa bajas Butterworth de quinto orden con una frecuencia de corte de 4

KHz. La medición de la velocidad angular se filtra con un filtro digital pasa bajas Butterworth de quinto orden con una frecuencia de corte de 3 KHz.

5.3 Reporte de Pruebas

En el procedimiento de identificación de parámetros del motor de CD de imanes permanentes se aplicó primeramente la serie de Hartley y posteriormente la serie de funciones de bloques de pulsos, considerando que el motor trabaja en vacío y asumiendo cero las condiciones iniciales de su modelo matemático en espacio de estados. El criterio para determinar la exactitud en la estimación de parámetros es comparar gráficamente las señales medidas de corriente de armadura y velocidad angular con las respectivas señales obtenidas a partir de la simulación del modelo matemático del motor empleando los parámetros estimados. Posteriormente se calculan los coeficientes de correlación r de tales señales.

5.3.1 Coeficiente de Correlación

La medida utilizada para validar los modelos obtenidos es el coeficiente de correlación [29]. Para la aplicación de este método de validación es necesario simular el modelo obtenido para comparar su respuesta con la señal observada. La expresión matemática para calcular el coeficiente de correlación r se presenta a continuación,

$$r = \pm \sqrt{\frac{\sum(\hat{y} - \bar{y})^2}{\sum(y - \bar{y})^2}} \quad (5.9)$$

donde \hat{y} es la señal estimada, y es la señal observada y \bar{y} es el promedio de la señal observada.

El coeficiente de correlación r compara la varianza de \hat{y} con la de y . Este valor está confinado dentro del intervalo $[-1, 1]$. Cuando $r = 1$ representa una perfecta correlación positiva entre los datos. Cuando $r = -1$ representa una perfecta correlación negativa entre los datos; es decir, los datos varían en direcciones opuestas. Cuando $r = 0$ no hay correlación entre los datos. Los valores intermedios describen correlaciones parciales. Por ejemplo, si

$r = 0.88$ significa que el ajuste entre la salida del modelo y los datos es razonablemente bueno. La Tabla 5.1 muestra los rangos de los posibles valores de r y sus respectivos niveles de aceptación [29].

Tabla 5.1 Niveles de exactitud del coeficiente de correlación.

<i>Coefficiente de Correlación</i>	<i>Exactitud</i>
$r = 1.0$	Excelente
$0.90 \leq r \leq 0.99$	Muy buena
$0.80 \leq r \leq 0.89$	Buena
$r \leq 0.79$	Regular

5.3.2 Estimación de Parámetros Mediante la Serie de Hartley

El procedimiento para la identificación de parámetros del motor de CD de imanes permanentes mediante la serie de Hartley se describe en el diagrama de flujo de la Figura 5.9.

La dimensión de la matriz de integración Q de la serie de Hartley es $(2n + 1) \times (2n + 1)$, donde n es el número de armónicos; se emplearon sólo 512 armónicos ya que al aumentar su número no mejoraba de forma considerable la exactitud de la identificación de parámetros y la dimensión de la matriz Q desbordaba la memoria de la computadora particular donde se implementó el programa del algoritmo. Por lo tanto, con 512 armónicos la matriz de integración Q requiere 1,050,625 localidades de memoria (1.002 MB); es decir, $(2(512) + 1) \times (2(512) + 1)$.

Los vectores de las 16,384 mediciones o muestras de voltaje de alimentación, corriente de armadura y velocidad angular son los siguientes:

$$u_a = \begin{bmatrix} 24.0217 \\ 24.0062 \\ 23.9751 \\ 23.9440 \\ 23.9285 \\ \vdots \\ 24.0062 \end{bmatrix}_{16384 \times 1} \quad i_a = \begin{bmatrix} 0.00003 \\ 0.00031 \\ 0.00163 \\ 0.00572 \\ 0.01520 \\ \vdots \\ 0.06956 \end{bmatrix}_{16384 \times 1} \quad \omega = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.0020 \\ -0.0100 \\ -0.0320 \\ -0.0740 \\ \vdots \\ 539.9130 \end{bmatrix}_{16384 \times 1}$$

Para aproximar cada una de las funciones anteriores con la serie de Hartley se aplica la Transformada Rápida de Hartley (FHT, de las siglas en inglés Fast Hartley Transform) para cambiarlas al dominio de la frecuencia, y se obtiene el siguiente orden de coeficientes,

$$c = [c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad \cdots \quad c_{-4} \quad c_{-3} \quad c_{-2} \quad c_{-1}] \quad (5.10)$$

Al aplicar la FHT a los vectores de las señales medidas, éstos adquieren la siguiente forma,

$$U_a = \begin{bmatrix} 23.9841 \\ -0.0288 \\ -0.0285 \\ -0.0244 \\ -0.0204 \\ \vdots \\ -0.0151 \end{bmatrix}_{16384 \times 1} \quad I_a = \begin{bmatrix} 0.1742 \\ 0.0800 \\ 0.0805 \\ 0.0745 \\ 0.0666 \\ \vdots \\ 0.0459 \end{bmatrix}_{16384 \times 1} \quad \Omega = \begin{bmatrix} 518.8844 \\ -26.9490 \\ -27.1107 \\ -24.8410 \\ -22.0413 \\ \vdots \\ -15.7372 \end{bmatrix}_{16384 \times 1}$$

El ordenamiento de los vectores de coeficientes como requiere el cálculo operacional del dominio de Hartley está determinado por (3.45),

$$c = [c_{-n} \quad \cdots \quad c_{-1} \quad c_0 \quad c_1 \quad \cdots \quad c_n]_{(1,2n+1)}$$

así, dado que el número de armónicos n es 512, el número de coeficientes de cada vector se trunca a 1,025; es decir, $2n+1=2(512)+1$. Ordenados y truncados adquieren la siguiente forma,

$$U_a = \begin{bmatrix} -0.0000 \\ \vdots \\ -0.0151 \\ 23.9841 \\ -0.0288 \\ \vdots \\ -0.0000 \end{bmatrix}_{1025 \times 1} \quad I_a = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ \vdots \\ 0.0459 \\ 0.1742 \\ 0.0800 \\ \vdots \\ 0.0003 \end{bmatrix}_{1025 \times 1} \quad \Omega_m = \begin{bmatrix} 0.1056 \\ \vdots \\ -15.7372 \\ 518.8844 \\ -26.9490 \\ \vdots \\ -0.1830 \end{bmatrix}_{1025 \times 1}$$

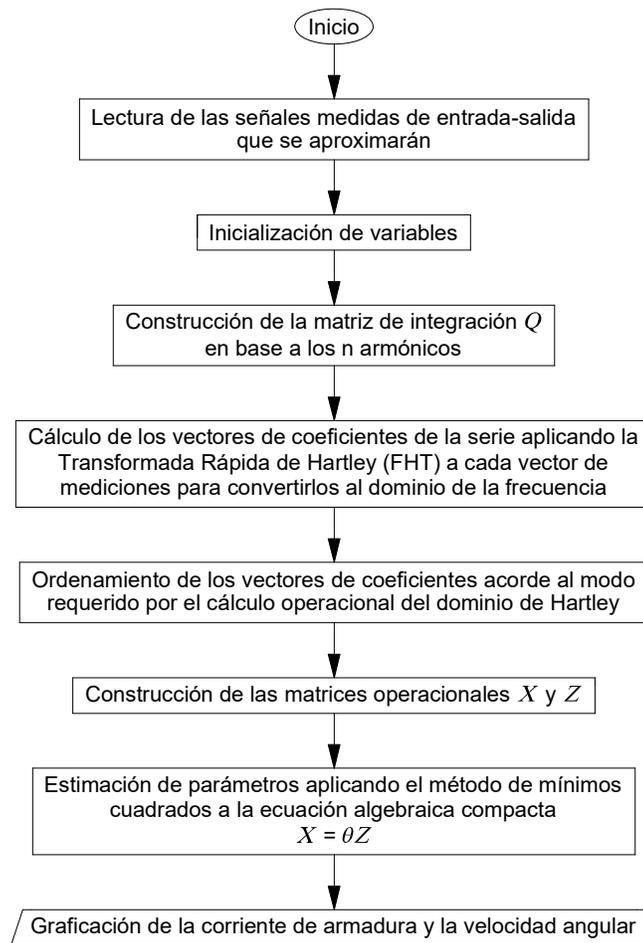


Figura 5.9 Diagrama de flujo del algoritmo de estimación de parámetros mediante la serie de Hartley.

Los vectores U_a , I_a y Ω junto con la matriz de integración Q intervienen en la estimación de parámetros. En la Tabla 5.2 se presentan los parámetros estimados mediante la serie de Hartley.

Tabla 5.2 Parámetros estimados mediante la serie de Hartley.

<i>Parámetros del motor</i>	<i>Valor</i>
Resistencia R_a	13.6114 Ω
Inductancia L_a	9.0375×10^{-3} H
Coefficiente de f_{cem} K_e	4.1643×10^{-2} V/rpm
Coefficiente de torque K_T	4.1643×10^{-2} N · m/A
Inercia del rotor J	1.8080×10^{-6} N · m · s
Coefficiente de fricción f_r	8.1194×10^{-6} N · s/rpm

En la Figura 5.10 se muestra la comparación gráfica de la señal medida de corriente de armadura con la correspondiente señal obtenida a partir de la simulación del modelo matemático del motor empleando los parámetros estimados mediante la serie de Hartley. Similarmente, en la figura 5.11 se muestra la comparación gráfica de la señal de velocidad angular con la correspondiente señal obtenida a partir de la simulación.

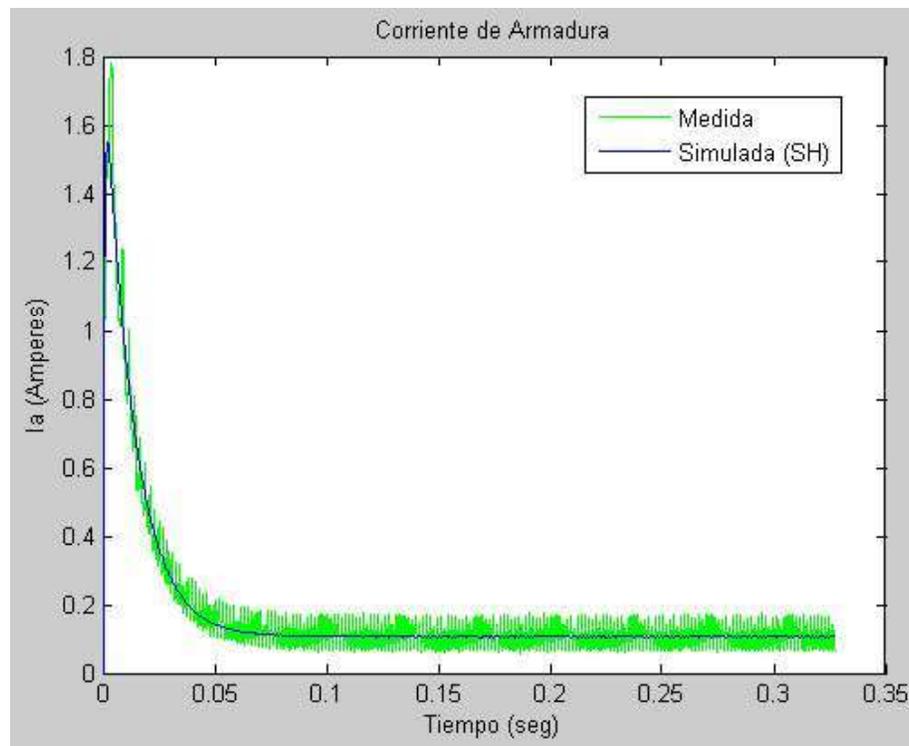


Figura 5.10 Comparación de la corriente de armadura medida con la obtenida de la simulación del modelo del motor con los parámetros estimados aplicando la serie de Hartley.

Con la finalidad de distinguir las señales medidas de corriente de armadura y velocidad angular de las respectivas señales obtenidas a partir de la simulación del modelo matemático del motor empleando los parámetros estimados mediante la serie de Hartley, se utilizan los colores verde y azul, respectivamente, para representarlas en las gráficas de las Figuras 5.10, 5.11, 5.13 y 5.14.

Claramente se puede observar que la señal medida de corriente de armadura oscila ligeramente, probablemente debido al roce alternado de las escobillas con las delgas del conmutador del motor.

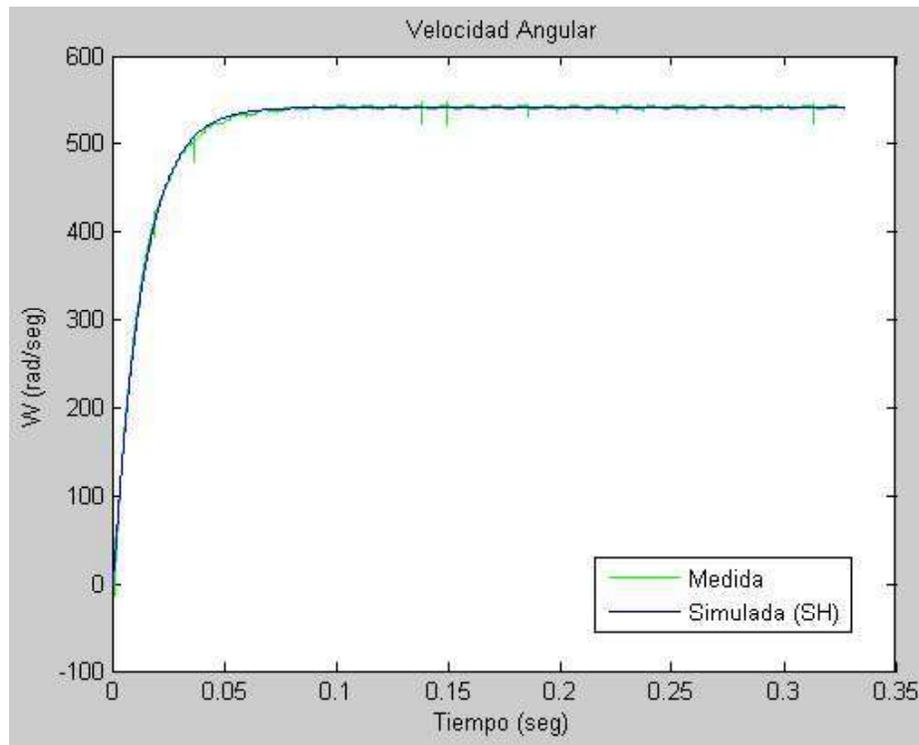


Figura 5.11 Comparación de la velocidad angular medida con la obtenida de la simulación del modelo del motor con los parámetros estimados aplicando la serie de Hartley.

En ambas figuras se observa una muy buena aproximación de las señales. Se obtuvieron los coeficientes de correlación 0.972 y 1.000 para las señales de corriente de armadura y velocidad angular, respectivamente. Respecto a la rapidez del método basado en la serie de Hartley, en una computadora particular, el tiempo de CPU reportado por Matlab fue de 11.48 s.

5.3.3 Estimación de Parámetros Mediante la Serie de Funciones de Bloques de Pulsos

El procedimiento para la identificación de parámetros del motor de CD de imanes permanentes mediante la serie de funciones de bloques de pulsos se describe en el diagrama de flujo de la Figura 5.12.

La dimensión de la matriz de integración H de la serie de funciones de bloques de pulsos es $m \times m$, donde m es el número de muestras de entrada-salida que se utilizarán en la estimación; se emplearon 16,384 muestras de cada señal. Sin embargo, para formar la matriz

de integración H con $m = 16,384$ se requerirían 268,435,456 localidades de memoria (256 MB), lo cual obviamente desbordaría la memoria de muchas computadoras comunes de uso personal. Por ello, es necesario implementar un algoritmo que permita optimizar los cálculos prescindiendo de la matriz de integración H . En esta sección se explicará en qué consiste el algoritmo mencionado.

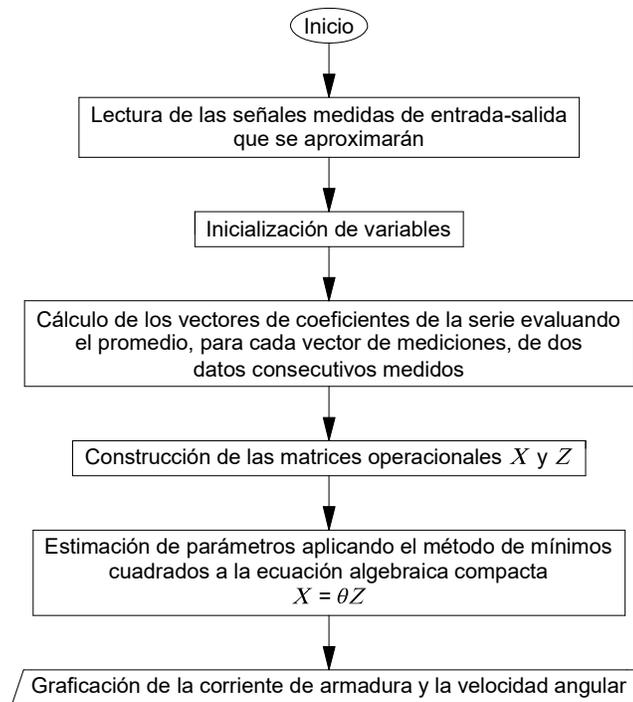


Figura 5.12 Diagrama de flujo del algoritmo de identificación de parámetros mediante la serie de funciones de bloques de pulsos.

Los vectores de las 16,384 mediciones o muestras de voltaje de alimentación, corriente de armadura y velocidad angular son los siguientes:

$$u_a = \begin{bmatrix} 24.0217 \\ 24.0062 \\ 23.9751 \\ 23.9440 \\ 23.9285 \\ \vdots \\ 24.0062 \end{bmatrix}_{16384 \times 1} \quad i_a = \begin{bmatrix} 0.00003 \\ 0.00031 \\ 0.00163 \\ 0.00572 \\ 0.01520 \\ \vdots \\ 0.06956 \end{bmatrix}_{16384 \times 1} \quad \omega = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.0020 \\ -0.0100 \\ -0.0320 \\ -0.0740 \\ \vdots \\ 539.9130 \end{bmatrix}_{16384 \times 1}$$

Una vez que se calculan los promedios o coeficientes de la serie de funciones de bloques de pulsos, los vectores de coeficientes adquieren la siguiente forma,

$$U_a = \begin{bmatrix} 24.0140 \\ 23.9910 \\ 23.9596 \\ 23.9363 \\ 23.9207 \\ \vdots \\ 24.0062 \end{bmatrix}_{16383 \times 1} \quad I_a = \begin{bmatrix} 0.0002 \\ 0.0010 \\ 0.0037 \\ 0.0104 \\ 0.0240 \\ \vdots \\ 0.0690 \end{bmatrix}_{16383 \times 1} \quad \Omega = \begin{bmatrix} -0.0010 \\ -0.0060 \\ -0.0210 \\ -0.0530 \\ -0.1075 \\ \vdots \\ 539.9130 \end{bmatrix}_{16383 \times 1}$$

Los vectores U_a , I_a y Ω intervienen en la estimación de parámetros. La matriz de integración H está dada por (3.88)

$$H = h \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \dots & 1 \\ 2 & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{(m,m)}$$

e interviene específicamente en la construcción de la matriz operacional Z (3.93),

$$Z = \begin{bmatrix} XH \\ UH \end{bmatrix}$$

donde X y U son las matrices que contienen los coeficientes de la serie para la aproximación de las señales de salida (corriente de armadura y velocidad angular) y entrada (voltaje de alimentación) del motor, respectivamente.

Se observa la sencillez de la estructura de la matriz de integración H , ya que está constituida por una matriz muy particular que sin importar la dimensión $m \times m$, el valor de los elementos de la diagonal principal es $\frac{1}{2}$, los elementos de la parte triangular superior son 1 y los elementos de la parte triangular inferior son 0. Esta característica permite optimizar el cálculo de los productos matriciales XH y UH a fin de evitar el problema del

desbordamiento de memoria. Tales productos matriciales se pueden calcular no de la forma tradicional, sino implementando un artificio matemático que permite prescindir de la matriz de integración H en su forma original, así como también reducir sustancialmente el número de operaciones aritméticas, ya que evidentemente es innecesario gastar tiempo y memoria computacional multiplicando elementos por los ceros de la parte triangular inferior.

La matriz operacional Z es equivalente a lo siguiente,

$$Z = \underbrace{\begin{bmatrix} i_{a1} & i_{a2} & \cdots & i_{am} \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_m \\ u_{a1} & u_{a2} & \cdots & u_{am} \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} \frac{h}{2} & h & \cdots & h \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & h \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{h}{2} \end{bmatrix}_{(m,m)} \quad (5.11)$$

o bien

$$Z = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1m} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2m} \\ F_{31} & F_{22} & \cdots & F_{3m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{h}{2} & h & \cdots & h \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & h \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{h}{2} \end{bmatrix}_{(m,m)} \quad (5.12)$$

Es importante recordar que la teoría elemental del álgebra matricial establece que dos matrices son compatibles bajo la multiplicación sólo si el número de columnas de la primera es igual al número de renglones de la segunda, y la dimensión de la matriz producto está determinada por el número de renglones de la primera matriz por el número de columnas de la segunda. Así, evidentemente la matriz de coeficientes F de $3 \times m$ y la matriz de integración H de $m \times m$ son compatibles bajo la multiplicación, por lo tanto, la dimensión de la matriz operacional Z es $3 \times m$.

Básicamente, el algoritmo que se implementó para optimizar el cálculo de (5.12) está descrito por,

$$Z_{ij} = h \sum_{k=1}^{j-1} F_{ik} + \frac{h}{2} F_{ij} \quad (5.13)$$

y para demostrar su veracidad a continuación se presenta una prueba de escritorio para calcular los tres primeros elementos del renglón uno de la matriz operacional Z ; es decir, Z_{11} , Z_{12} y Z_{13} .

Para la iteración $i = 1$ y $j = 1$:

$$Z_{11} = \underbrace{h \sum_{k=1}^{1-1} F_{1k}}_{\text{NO SE CUMPLE}} + \frac{h}{2} F_{11} = 0 + \frac{h}{2} F_{11} = \frac{h}{2} F_{11}$$

Para la iteración $i = 1$ y $j = 2$:

$$Z_{12} = h \sum_{k=1}^{2-1} F_{1k} + \frac{h}{2} F_{12} = h F_{11} + \frac{h}{2} F_{12}$$

Para la iteración $i = 1$ y $j = 3$:

$$Z_{13} = h \sum_{k=1}^{3-1} F_{1k} + \frac{h}{2} F_{13} = h(F_{11} + F_{12}) + \frac{h}{2} F_{13}$$

De lo anterior se puede deducir que al implementar el algoritmo en cualquier lenguaje de programación todavía sería posible ahorrar ciclos, tiempo, operaciones aritméticas y memoria computacional si se crea una variable auxiliar, inicializada en cero, que almacene el valor de la sumatoria de elementos que se multiplican por h . Así, sólo será necesario actualizar tal variable en cada iteración y con ello se evita calcular nuevamente en la iteración actual la sumatoria calculada en la iteración anterior. Sin embargo, se debe mencionar que el algoritmo descrito anteriormente sólo es válido para el producto matricial (5.12) dadas sus características, y está sujeto a la sintaxis del lenguaje de programación donde se implemente.

En la Tabla 5.3 se presentan los parámetros estimados mediante la serie de funciones de bloques de pulsos.

Tabla 5.3 Parámetros obtenidos mediante la serie de funciones de bloques de pulsos.

<i>Parámetros del motor</i>	<i>Valor</i>
Resistencia R_a	13.6397 Ω
Inductancia L_a	9.3419×10^{-3} H
Coefficiente de f_{cem} K_e	4.1637×10^{-2} V/rpm
Coefficiente de torque K_T	4.1637×10^{-2} N·m/A
Inercia del rotor J	1.8233×10^{-6} N·m·s
Coefficiente de fricción f_r	9.2877×10^{-6} N·m/rpm

En la Figura 5.13 se muestra la comparación gráfica de la señal medida de corriente de armadura con la correspondiente señal obtenida a partir de la simulación del modelo matemático del motor empleando los parámetros estimados mediante la serie de funciones de bloques de pulsos. Similarmente, en la figura 5.14 se muestra la comparación gráfica de la señal de velocidad angular con la correspondiente señal obtenida a partir de la simulación.

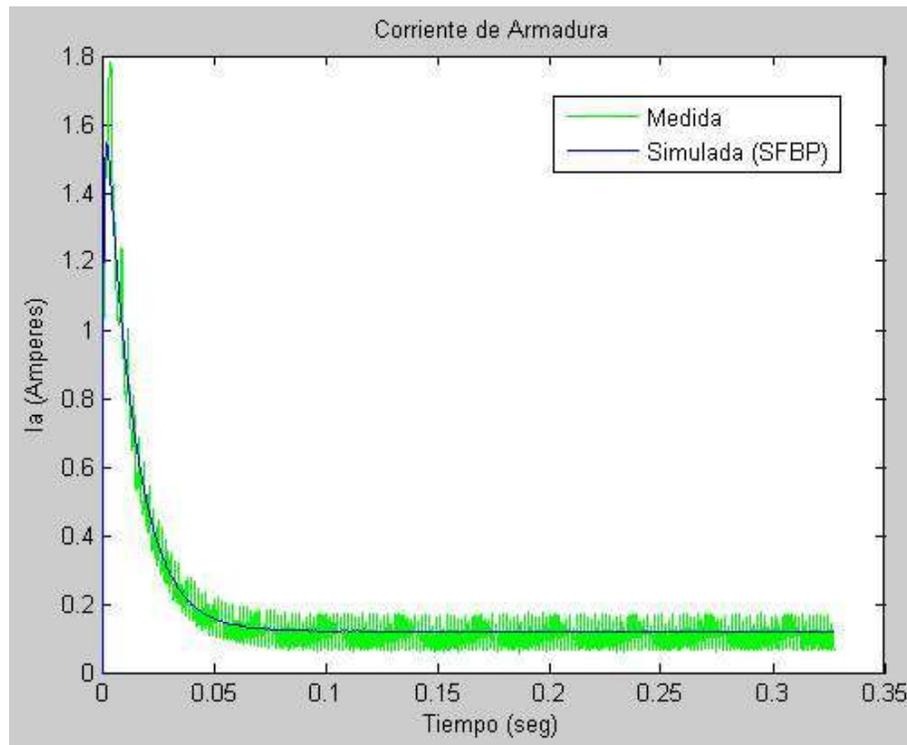


Figura 5.13 Comparación de la corriente de armadura medida con la obtenida de la simulación del modelo del motor con los parámetros estimados aplicando la serie de funciones de bloques de pulsos.

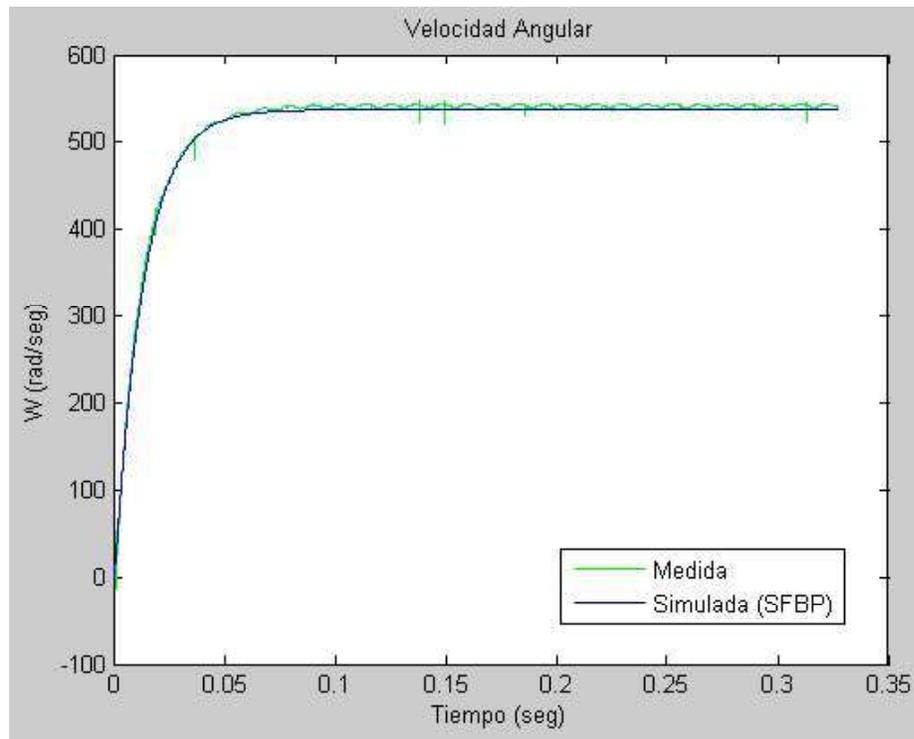


Figura 5.14 Comparación de la velocidad angular medida con la obtenida de la simulación del modelo del motor con los parámetros estimados aplicando la serie de funciones de bloques de pulsos.

Al igual que en el caso previo, en ambas figuras se observa una muy buena aproximación de las señales. Se obtuvieron los coeficientes de correlación 0.963 y 1.000 para las señales de corriente de armadura y velocidad angular, respectivamente. Respecto a la rapidez del método basado en la serie de funciones de bloques de pulsos, en una computadora particular, el tiempo de CPU reportado por Matlab fue de 5.34 s.

En el Apéndice se muestra el programa en Matlab que se desarrolló para llevar a cabo la estimación de parámetros mediante la serie de funciones de bloques de pulsos.

5.4 Conclusiones

En el presente capítulo se validó experimentalmente el procedimiento de estimación de parámetros del motor de CD de imanes permanentes. Para tal propósito se utilizó el cálculo operacional inherente a dos dominios de las series ortogonales; serie de Hartley y serie de funciones de bloques de pulsos. La principal ventaja de la aplicación de estos

algoritmos es que se pueden determinar los parámetros desconocidos de este motor u otro sistema empleando únicamente el conjunto de mediciones de las variables de entrada-salida. Esto permite eliminar las tolerancias de los datos proporcionados por el fabricante y modelar efectos de los cuales no informan, como puede ser el retardo entre la entrada y la salida.

Para obtener correctamente los parámetros del motor es importante que se eviten las mediciones contaminadas por ruido generado por la tarjeta de adquisición de datos o por otras fuentes, por ello se recomienda diseñar el filtrado adecuado en la etapa de acondicionamiento de señales.

Se pudo observar que con ambos métodos se obtiene una muy buena exactitud de la estimación de parámetros, con una ligera mejor exactitud del método basado en la serie de Hartley. En lo que respecta a la rapidez, se observa que el método basado en la serie de funciones de bloques de pulsos resultó aproximadamente 2.15 veces más rápido. Este resultado era de esperarse, dada la sencillez de la aproximación basada en la serie de funciones de bloques de pulsos, comparada con la aproximación basada en la serie de Hartley. Por lo tanto, en este capítulo queda verificada la potencialidad y aplicabilidad de estas series como método directo en la estimación de parámetros de sistemas lineales invariantes en el tiempo.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Conclusiones Generales

Debido a la abundancia de los sistemas dinámicos en nuestro entorno, la identificación de sistemas se ha convertido en una herramienta versátil ampliamente utilizada en las diversas áreas de la ciencia e ingeniería para la obtención de modelos de forma experimental, a partir de datos observados del sistema.

Los modelos deben ser una descripción pragmática del comportamiento dinámico del sistema objeto de estudio, y es deseable que logren reproducir fielmente el comportamiento real del sistema.

No es posible la construcción automática de un modelo, por ello, el razonamiento, la intuición y el entendimiento del problema son imprescindibles en la obtención de buenos resultados. La primera consideración que se debe tener en mente es si el sistema admite una descripción estándar preexistente (caja negra), o si es necesario construir un modelo a la medida. En el primer caso, las posibilidades de éxito son altas; en el segundo, es necesario recurrir a un análisis físico del sistema antes de construir el modelo.

Además, el éxito del procedimiento de identificación de sistemas requiere que los datos utilizados para tal propósito contengan información significativa sobre el sistema. Esto implica un diseño cuidadoso del experimento de adquisición de datos; se deben seleccionar adecuadamente las señales a medir, el periodo de muestreo adecuado a fin de obtener datos

no redundantes de buena calidad, la señal de entrada que contenga el mayor número de frecuencias posibles, el número suficiente de datos a almacenar sin desbordar la capacidad de memoria del dispositivo de almacenamiento, etc. Sin embargo, una mala estructura modelo no es capaz de ofrecer un buen modelo final, independientemente de las características cuantitativas y cualitativas de los datos disponibles.

La elección de una estructura modelo requiere de algún método para determinar el valor de los parámetros del sistema que ajustan la respuesta del modelo a los datos de entrada-salida experimentales. El método o criterio de mínimos cuadrados es el más utilizado para llevar a cabo este ajuste de parámetros.

Puesto que el análisis de sistemas lineales invariantes en el tiempo generalmente conduce a un modelo descrito por ecuaciones diferenciales, es conveniente recurrir a métodos de estimación de parámetros directos que realicen esta tarea mediante cálculos meramente algebraicos.

En las últimas dos décadas, la estimación de parámetros utilizando series ortogonales para aproximar funciones se ha convertido en un método conocido y novedoso, ya que estas series presentan buenos resultados como solucionadoras de integrales y aplican matrices operacionales para aproximarlas.

El problema de identificación de sistemas mediante matrices operacionales incluye sistemas lineales variantes o invariantes en el tiempo concentrados o distribuidos, así como sistemas no lineales. Las matrices operacionales permiten identificar condiciones iniciales desconocidas, para modelos de sistemas en espacio de estados, simultáneamente a la estimación de parámetros, lo cual puede ser variante en el tiempo.

Existen diversos dominios dentro de la familia de las series ortogonales, también llamados kernels o funciones base, sin embargo, tienen el propósito común de aproximar funciones mediante matrices operacionales, cuyas características y estructura difiere en cada dominio. Así, el mayor o menor número de cálculos dependerá del kernel base que se elija. Por lo tanto, se puede decir que los dominios son perspectivas alternas para observar un mismo problema, y es relevante el uso de más de uno para comparar la calidad de los resultados.

En esta tesis se validó el procedimiento de identificación de sistemas en un motor de CD de imanes permanentes real, y se presentó la comparación entre dos algoritmos basados en el uso de matrices operacionales para estimar sus parámetros electromecánicos en base a su modelo matemático en tiempo continuo. El primer método está basado en la serie de Hartley, mientras que el segundo se basa en la serie de funciones de bloques de pulsos. Finalmente, en base a los resultados obtenidos en la presente tesis, se concluye que:

Con ambos métodos se obtiene una muy buena exactitud de la estimación de parámetros, con una ligera mejor exactitud del método basado en la serie de Hartley. En lo que respecta a la velocidad, se observa que el método basado en la serie de funciones de bloques de pulsos resultó aproximadamente 2.15 veces más rápido debido a la sencillez de la aproximación. La forma sencilla de la matriz H permitió implementar un algoritmo que optimiza los cálculos requeridos para la construcción de las matrices operacionales inherentes a la estructura del cálculo operacional de la serie de funciones de bloques de pulsos. Este algoritmo permite prescindir de la matriz H en los cálculos, ya que no es posible formarla con 16,384 muestras debido a que se requieren 268,435,456 localidades de memoria (256 MB), y tal dimensión desborda la memoria de la computadora particular donde se implementó el programa.

La principal ventaja de la aplicación de estos algoritmos es que se pueden determinar parámetros de otros sistemas, empleando únicamente un conjunto de datos muestreados de entrada-salida.

También es importante mencionar que el uso de matrices operacionales tiene la ventaja de no requerir una señal de excitación especial, la fuente de alimentación del motor puede emplearse para llevar a cabo la estimación.

Los datos muestreados están generalmente acompañados de ruido u otro tipo de imperfecciones que es necesario corregir mediante filtros analógicos y digitales, con ello se mejora el procedimiento de identificación de sistemas.

6.2 Trabajos Futuros

En base a los resultados obtenidos, se demostró la potencialidad y viabilidad de la aplicación de matrices operacionales en la identificación de sistemas lineales invariantes en el tiempo, por ello se propone como trabajos futuros implementar tal metodología en:

- Identificación de sistemas no lineales.
- Estimación de parámetros de motores de inducción y transformadores, así como en motores de CD de mayor potencia.
- Detección y diagnóstico de fallas de algún sistema en particular.

Apéndice

Programa en Matlab Para la Identificación De Parámetros Mediante la Serie de Funciones de Bloques de Pulsos

SFBP.m

```
% IDENTIFICACION DE PARAMETROS DE UN MOTOR DE CD DE IMANES PERMANENTES  
% REAL MEDIANTE LA SERIE DE FUNCIONES DE BLOQUES DE PULSOS (SFBP)
```

```
clear all;  
format long;
```

```
% A continuacion se leen las mediciones desde archivos de texto
```

```
load t.txt           % Tiempo  
load uMed.txt       % Voltaje de entrada  
load iMed.txt       % Corriente de amadura  
load wMed.txt       % Velocidad angular
```

```
t0=cputime;         % Tiempo inicial
```

```
m=length(iMed);    % Numero de mediciones (16,384)  
h=t(m)/(m-1);      % Periodo de muestreo
```

```
% Coeficientes
```

```
for k=1:m-1  
    ik(k)=(1/2)*(iMed(k)+iMed(k+1));  
    wk(k)=(1/2)*(wMed(k)+wMed(k+1));  
    uk(k)=(1/2)*(uMed(k)+uMed(k+1));  
end
```

```
% Construccion de la matriz operacional X

X=[ik
   wk];

U=uk;

% Construccion de la matriz operacional F

F=[X
   U];

% Construccion de la matriz operacional Z

DimF=size(F);      % Vector fila que contiene el numero de filas
                   % y columnas de la matriz F

Rows=DimF(1);      % Variable que contiene el numero de filas de F
Cols=DimF(2);      % Variable que contiene el numero de columnas de F

% Dos matrices son compatibles bajo la multiplicacion solo si el numero
% de columnas de la primera es igual al numero de renglones de la segunda.
% Por lo tanto, la dimension de la matriz Z esta determinada por el numero
% de renglones de la matriz F y el numero de columnas de la matriz H; es
% decir, 3x(m-1).

h2=h/2;           % Guarda el cociente h/2 con el proposito de reducir el numero
                 % de operaciones aritmeticas dentro del ciclo.

% Artificio matematico para optimizar el calculo de la matriz operacional
% Z

for k=1:Rows
    sumZ=0;      % Almacena el valor de las sumatorias
    for l=1:m-1
        Z(k,l)=sumZ*h+F(k,l)*h2;
        sumZ=sumZ+F(k,l);
    end
end

THETA=X*Z'*inv(Z*Z');      % Metodo de minimos cuadrados

fprintf('Tiempo de ejecucion del metodo basado en la SFBP (seg)\r')
t1=cputime-t0      % Tiempo final (tiempo transcurrido)

% A continuacion, se obtiene la estimacion de parametros igualando cada
% uno de los elementos de la matriz THETA con el respectivo elemeto de
% la matriz A del modelo matematico del motor en espacio de estados,
% posteriormente se despeja cada uno de los parametros de interes.

% A fin de distinguir los parametros estimados mediante la serie de
% funciones de bloques de pulsos, se agrega a cada variable la
% extension SFBP.
```

```
La_SFBP=abs(1/THETA(1,3)); % Inductancia de armadura
Ra_SFBP=abs(THETA(1,1)*La_SFBP); % Resistencia de armadura
Ke_SFBP=abs(THETA(1,2)*La_SFBP); % Constante de fcem
Kt_SFBP=Ke_SFBP; % Constante de par y de fcem
J_SFBP=abs(Kt_SFBP/THETA(2,1)); % Inercia del rotor
fr_SFBP=abs(THETA(2,2)*J_SFBP); % Friccion viscosa

A_SFBP=[-Ra_SFBP/La_SFBP -Ke_SFBP/La_SFBP % Matriz A
         Kt_SFBP/J_SFBP -fr_SFBP/J_SFBP];

B_SFBP=[1/La_SFBP % Matriz B
        0];

C_SFBP=[1 0
        0 1];

D_SFBP=[0 0
        0 0];

X0_SFBP=[0 % Condiciones iniciales
        0];

% La siguiente instruccion simula el modelo matematico del motor con
% los parametros estimados mediante la serie de funciones de bloques
% de pulsos a fin de obtener las senales de corriente de armadura (Ia)
% y velocidad angular (W).

[Y_SFBP,X_SFBP]=LSIM(A_SFBP,B_SFBP,C_SFBP,0,uMed,t,X0_SFBP);

iSim_SFBP=X_SFBP(:,1);
wSim_SFBP=X_SFBP(:,2);

% -----

% Comparacion grafica de las senales medidas de corriente de armadura y
% velocidad angular (linea verde), con las respectivas señales obtenidas
% a partir de la simulacion del modelo matematico del motor empleando los
% parametros estimados mediante la SFBP (linea azul).

figure(1);

plot(t,iMed,'g',t,iSim_SFBP,'b');
xlabel('Tiempo (seg)'); ylabel('Ia (Amperes)');
title('Corriente de Armadura (medida verde/SFBP azul)');

figure(2);

plot(t,wMed,'g',t,wSim_SFBP,'b');
xlabel('Tiempo (seg)'); ylabel('W (rad/seg)');
title('Velocidad Angular (medida verde/SFBP azul)');

% -----

% Llamado a la rutina SH a fin de capturar los vectores que contienen
% los valores de las senales de corriente de armadura (Ia) y velocidad
```

```
% angular (W) obtenidas a partir de la simulacion del modelo matematico  
% del motor con los parametros estimados mediante la serie de Hartley [8].
```

```
[Sim1, Sim2]=SH(t, uMed, iMed, wMed);      % Serie de Hartley  
iSim_SH=Sim1;  
wSim_SH=Sim2;
```

```
% Comparacion grafica de las senales medidas de corriente de armadura y  
% velocidad angular (linea verde), con las respectivas señales obtenidas  
% a partir de la simulacion del modelo matematico del motor empleando los  
% parametros estimados mediante la SH (linea azul).
```

```
figure(3);
```

```
plot(t, iMed, 'g', t, iSim_SH, 'b');  
xlabel('Tiempo (seg)'); ylabel('Ia (Amperes)');  
title('Corriente de Armadura (medida verde/SH azul)');
```

```
figure(4);
```

```
plot(t, wMed, 'g', t, wSim_SH, 'b');  
xlabel('Tiempo (seg)'); ylabel('W (rad/seg)');  
title('Velocidad Angular (medida verde/SH azul)');
```

```
% -----
```

```
% Coeficientes de correlacion de las senales (SFBP)
```

```
% Señales obtenidas de la simulacion: iSim_SFBP (Ia) y wSim_SFBP (W)  
% Señales observadas: iMed (Ia) y wMed (W)
```

```
fprintf('Coeficientes de correlacion de las senales (SFBP)\r')
```

```
r_Ia=rCoef(iMed, iSim_SFBP, m)      % Calcula el coeficiente de correlacion  
                                   % para Ia
```

```
r_W=rCoef(wMed, wSim_SFBP, m)      % Calcula el coeficiente de correlacion  
                                   % para W
```

```
% -----
```

```
% Coeficientes de correlacion de las senales (SH)
```

```
% Señales obtenidas de la simulacion: iSim_SH (Ia) y wSim_SH (W)  
% Señales observadas: iMed (Ia) y wMed (W)
```

```
fprintf('Coeficientes de correlacion de las senales (SH)\r')
```

```
r_Ia=rCoef(iMed, iSim_SH, m)       % Calcula el coeficiente de correlacion  
                                   % para Ia
```

```
r_W=rCoef(wMed, wSim_SH, m)       % Calcula el coeficiente de correlacion  
                                   % para W
```

rCoef.m

```
% COEFICIENTE DE CORRELACION

function r=rCoef(sMed, sSim, m)

sMedProm=mean(sMed);      % Promedio de la señal observada

sumNum=0; sumDen=0;

% Sumatorias del numerador y denominador segun a formula del
% coeficiente de correlacion.

for k=1:m
    sumNum=(sSim(k)-sMedProm)^2+sumNum;
    sumDen=(sMed(k)-sMedProm)^2+sumDen;
end

R=sqrt(sumNum/sumDen);

r=R;

if (R>1)
    r=1;
end
```

Bibliografía

- [1] Juan García López, *Procesamiento Digital de Señales*, Tesis de Maestría, Libro en revisión por el CIC, IPN, México, 1999.
- [2] Lennart Ljung, *System Identification: Theory for the User*, Second Edition, Prentice Hall, 1999.
- [3] José Jaime Esqueda Elizondo, *Identificación de Sistemas Lineales e Invariantes Usando un Procesador Digital de Señales*, Tesis de Maestría, Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital, IPN, México, 2001.
- [4] L. Ljung and T. Glad, *Modeling of Dynamic Systems*, Prentice Hall, 1994.
- [5] *Introducción a la Identificación de Sistemas Dinámicos*.
<http://www-eupm.upc.es/~esaii/assign/ident/assign.html>
- [6] Cristian Kunusch, *Identificación de Sistemas Dinámicos*, Notas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de la Plata, Argentina, 2003.
- [7] D. E. Seborg, T. F. Edgar and D. A. Mellichamp, *Process Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, Inc., Somerset, New Jersey, USA, 1989.
- [8] F. D. Díaz, *Detección y Diagnóstico de Fallas en Motores de CD Utilizando Identificación de Parámetros y Redes Neuronales*, Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería Eléctrica, UMSNH, México, 2003.
- [9] Lennart Ljung, *System Identification: Theory for the User*, Prentice Hall, 1987.

- [10] T. Söderström and P. Stoica, *System Identification*, Prentice Hall, 1989.
- [11] Naresh K. Sinha, *Identification of Continuous-Time Systems From Samples of Input-Output Data: An Introduction*, Sādhanā, Vol. 25, No. 2, pp. 75-83, April 2000.
- [12] Santiago Garrido, *Identificación, Estimación y Control de Sistemas No-lineales Mediante RGO*, Tesis de Doctorado, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad Carlos III de Madrid, España, 1999.
- [13] A. V. Oppenheim and A. S. Willsky, *Signals and Systems*, Second Edition, Prentice Hall, 1996.
- [14] Benjamin C. Kuo, *Sistemas de Control Automático*, Séptima Edición, Prentice Hall, México, 1996.
- [15] Dwight J. Aplevich, *The Essentials of Linear State-Space Systems*, John Wiley & Sons, Ltd., 2000.
- [16] J. J. Rico, G. T. Heydt, A. Keyhani, B. L. Agrawal and D. Selin, *Synchronous Machine Parameter Estimation Using the Hartley Series*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 16, No. 1, pp. 49-54, March 2001.
- [17] J. J. Rico, G. T. Heydt, A. Keyhani, B. L. Agrawal and D. Selin, *An Algebraic Approach for Identifying Operating Point Dependent Parameters of Synchronous Machines Using Orthogonal Series Expansions*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 16, No. 1, pp. 92-98, March 2001.
- [18] E. Acha and M. Madrigal, *Power Systems Harmonics Computer Modelling and Analysis*, John Wiley & Sons, Ltd., 2001.
- [19] I. I. Lázaro, *Análisis Transitorio y de Estado Estable en el Dominio de la Frecuencia de Redes Eléctricas Invariantes y Variantes en el Tiempo Utilizando el Enfoque Algebraico de las Matrices Operacionales*, Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería Eléctrica, UMSNH, México, 1999.
- [20] Alexander D. Poularikas, *The Transforms and Applications Handbook*, CRC Press, 1996.

- [21] X-Q. Liu, H-Y. Zhang, J. Liu, and J. Yang, *Fault Detection and Diagnosis of Permanent-Magnet DC Motor Based on Parameter Estimation and Neural Network*, IEEE transactions on Industrial Electronics, Vol. 47, No. 5, pp. 1021-1030, October 2000.
- [22] “Motores y Generadores Eléctricos”, *Enciclopedia Microsoft® Encarta® 2000*. © 1993-1999 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.
- [23] José Luis López Mercado, *Control en Posición de Servomecanismos de Corriente Directa*, Tesis de Maestría, CINVESTAV, IPN, México, 2005.
- [24] “PC in Control”, *DC Motors*.
www.pc-control.co.uk/dc-motors.htm
- [25] Stephen J. Chapman, *Máquinas Eléctricas*, McGraw Hill, Tercera Edición, Colombia, 2000.
- [26] “Fusing Mechanics and Electronics to Design Intelligent Machines”, *Procedure for Identifying Permanent Magnet DC Motors*.
<http://www.mechatronics.me.vt.edu/book/Section3/motormodelling.htm>
- [27] Eduardo Fernández Camacho, *Identificación de Sistemas Dinámicos Discretos No-lineales, Ajuste y Estimación de Parámetros*, Tesis de Doctorado, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Sevilla, España, 1977.
- [28] Karl J. Åström and Björn Wittenmark, *Computer Controlled Systems: Theory and Design*, Prentice Hall, 1990.
- [29] R. E. Walpole y R. H. Myers, *Probabilidad y Estadística Para Ingenieros*, Tercera Edición, McGraw Hill, 1989.