

ANÁLISIS DE INESTABILIDAD DE VOLTAJE EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

FACULTAD DE INGENIERIA ELÈCTRICA

TESIS

Para Obtener el Título de
INGENIERO ELECTRISISTA

Presenta:

Miguel Roque Vásquez Hernández

Asesor de Tesis:

Dr. Claudio R. Fuerte Esquivel

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Morelia, Michoacán a Octubre 2008



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Facultad de Ingeniería Eléctrica

Oficio No.343/2006-2007

C. MIGUEL ROQUE VASQUEZ HERNANDEZ
PASANTE DE INGENIERIA ELECTRICA

Presente

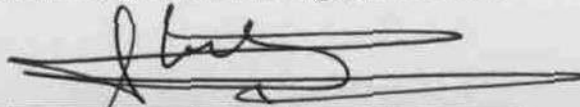
En atención a su solicitud de fecha 13 de Julio de 2007, me permito comunicarle que se aprueba el Tema de Tesis propuesto para presentar Examen Recepcional, en la carrera de Ingeniería Eléctrica.

El Tema de Tesis aprobado "**Análisis de Inestabilidad de Voltaje en Sistemas Eléctricos de Potencia**" deberá desarrollarse bajo el siguiente índice:

- Capítulo 1.- Introducción.
- Capítulo 2.- Conceptos de Sistemas Dinámicos no Lineales y Teoría de Bifurcación.
- Capítulo 3.- Herramientas para la Inestabilidad de Voltaje en Sistemas Eléctricos de Potencia.
- Capítulo 4.- Simulación de Modelos Dinámicos.
- Capítulo 5.- Conclusiones y Trabajos Futuros.**
- Referencias.**

Para tales efectos fungirá como asesor de su tesis el **Dr. Claudio Rubén Fuerte Esquivel**.

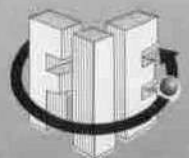
Atentamente
Morelia, Mich., a 1 de Agosto del 2007


Ing. Gilberto I. López Pedraza
Director de la Facultad de Ingeniería Eléctrica.

GILP/srd



Ciudad Universitaria,
Edificio "A" Primer Piso,
Av. Francisco J. Mújica S/N,
C.P. 58030, Morelia, Mich.
Tel. 01 (443) 3 223500 Ext. 1115,
Tel./Fax 01(443) 3265776,
<http://www.fie.umich.mx/>





Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Facultad de Ingeniería Eléctrica

Morelia, Mich., a 9 de Septiembre del 2008

Oficio No. 057/2008

L.F.M. Roberto Pérez Chávez
Jefe de Titulación y Certificación de la
Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo

Presente

Por medio del presente, me dirijo a Usted para comunicarle que le fue asignado al **C. MIGUEL ROQUE VASQUEZ HERNANDEZ**, la siguiente mesa de Jurado, así mismo, mencionarle que se titulará por la Opción de Tesis en la Facultad de Ingeniería Eléctrica.

Asesor:	Dr. Claudio Rubén Fuerte Esquivel	No. Empleado: 0003946-2
Vocal 1:	Dra. Elisa Espinosa Juárez	No. Empleado: 8200691-1
Vocal 2:	F.M. José Juárez Palafox	No. Empleado: 9500012-7
Suplente 1:	Ing. Ana María Maldonado Arceo	No. Empleado: 8403572-2
Suplente 2:	Dr. José Juan Rincón Pasayo	No. Empleado: 8500065-5

Sin otro particular agradezco las atenciones, que se sirva brindar al presente y aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

Atentamente

Dr. Leonardo Romero Muñoz
Director de la Facultad de Ingeniería Eléctrica

Vo.Bo.

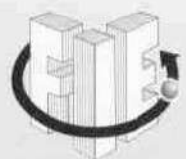
M.I. Nicolás Alvarado Báez
Secretario Académico.



FACULTAD DE
INGENIERIA ELECTRICA
DIRECCION

LRM/nab/srd

Ciudad Universitaria,
Edificio "A" Primer Piso,
Av. Francisco J. Mújica S/N,
C.P. 58030, Morelia, Mich.
Tel. 01 (443) 3 223500 Ext. 1115,
Tel./Fax 01(443) 3265776,
<http://www.fie.umich.mx/>



Para Dios y mis Padres. . . Mil Gracias!

Agradecimientos

- En Primer lugar le doy gracias a Dios por todo lo que tengo, tuve y tendré hasta este Día, mil gracias por estar vivo.
- A mis Padres *María Guadalupe Hernández y Roque Vázquez* por su apoyo incondicional durante todo este tiempo, el cariño y más por el constante aprendizaje que me transmiten siempre.
- A mi Hermana *Clara* por su cariño y apoyo.
- A todos aquellos maestros y profesores que creen en mí para llegar al final de este ciclo de mi vida, muchas gracias.
- A mi asesor el *Dr. Claudio* por darme la oportunidad de desarrollar este tipo de temas a pesar que no soy bueno en Sistemas Eléctricos de Potencia, he podido salir adelante.
- A *Mis abuelitas Trinidad E Ignacia, al Padre Moyita* y todas aquellas personas que existieron en mi vida y que ya dejaron este mundo. Que fueron y siguen siendo un ejemplo a seguir y porque no un reto a mejorar, descansen en paz.
- A todas aquellas mujeres que existieron y coexisten en mi vida, que con su forma natural de ser, constante diferencias y similares parecidos, han hecho de mi un mejor ser humano y un mejor caballero, mil gracias a todas ustedes y lo mejor del mundo hermosas damas.

Resumen

Debido a que en la actualidad los Sistemas Eléctricos de Potencia están funcionando cada día más cerca de sus límites de estabilidad operativa, lo cual se manifiesta cada vez más por su comportamiento no lineal, e incluso caótico, del sistema eléctrico. Por esta razón, se estudia en esta tesis los cambios de la estabilidad de voltaje en ciertos los puntos de equilibrio en un pequeño modelo de tres nodos. Este análisis permite observar la compleja evolución dinámica de los voltajes del sistema debido a pequeñas variaciones en sus parámetros eléctricos (cuasiestáticos), que en el peor de los casos el sistema eléctrico sufre un colapso de voltaje. Este análisis se realiza por medio de la aplicación de la teoría de bifurcaciones, la cual permite determinar de manera cualitativa el comportamiento dinámico del sistema eléctrico debido a pequeñas perturbaciones. Asimismo, se utiliza la herramienta computacional XPPAUT para cuantificar los puntos operativos en que el sistema eléctrico pierde estabilidad de voltaje debido a la presencia de una bifurcación.

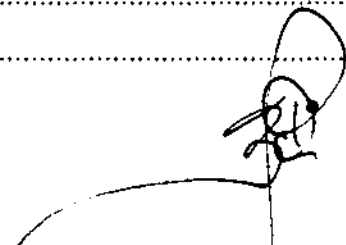
Índice

“Para las personas creyentes, Dios está al principio. Para los científicos está el final de todas sus reflexiones”.

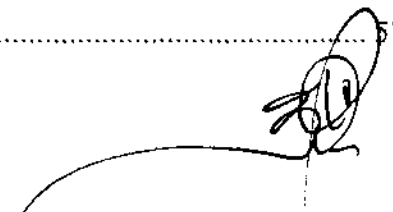
Max Planck

Índice de Contenido

Dedicatoria	ii
Agradecimientos.....	iii
Resumen	iv
Índice de Contenido.....	v
Glosario de términos	viii
Índice de Figuras	xii
Índice de Tablas.....	xiv
Capítulo 1	1
Introducción.....	1
1.1 Introducción.....	1
1.2 Objetivo	2
1.3 Antecedentes	2
1.3.1 Cambios en la estabilidad angular.....	5
1.3.2 Cambios en la estabilidad de voltaje	6
1.4 Justificación.....	7
1.4 Metodología propuesta.....	7
1.5 Contenido de la tesis.....	8
Capítulo 2	10
Conceptos de Sistemas Dinámicos no Lineales y Teoría de Bifurcación	10
2.1 Introducción.....	10
2.2 Definición de un sistema dinámico	11
2.3 Puntos de equilibrio y su estabilidad.....	13



2.3.1 Sistemas bidimensionales o de mayores dimensiones	16
2.4 Ciclos límite y su estabilidad.....	20
2.5 Planos de fase y flujo.....	22
2.6 Estabilidad estructural	23
2.7 Bifurcación	24
2.8 Bifurcaciones Locales	25
2.8.1 Bifurcación Saddle-Node (SNB).....	25
2.8.2 Bifurcación Transcrítica (TCB).....	27
2.8.3 Bifurcación Pitchfork (PFB)	28
2.8.4 Bifurcación Hopf (HB).....	31
2.9 Bifurcaciones Globales.....	33
2.9.1 Bifurcación de Doble de Ciclos (CFB).....	33
2.9.2 Bifurcación Homoclínica (HCB) o (BSKY)	34
2.9.4 Bifurcación de Toroide (TRB)	35
2.9.5 Bifurcación de Doble Periodo (PDB) y Caos.....	36
Capítulo 3	38
Herramientas para la Inestabilidad de Voltaje en Sistemas Eléctricos de Potencia	38
3.1 Introducción.....	38
3.2 Restricciones físicas de la línea.....	38
3.3 Límites impuestos por la red	39
3.4 Limite de estabilidad de voltaje en Estado Estable	39
3.5 Análisis de estabilidad de voltaje desde el punto de vista estático	43
3.6 Modelado de Componentes para análisis de estabilidad de voltaje	46
3.7 Generador síncrono	46
3.7.1 Ejes de referencia	48
3.7.2 Ecuación de oscilación	51
3.8 Red de transmisión.....	56
3.9 Cargas.....	57



Capítulo 4 61

Simulación de modelos dinámicos 61

4.1 Introducción..... 61

4.2 Herramienta computacional para simulación de sistemas dinámicos 61

4.3 Simulación de modelos 62

Capitulo 5 84

Conclusiones 84

Trabajos futuros..... 85

Referencias 87

Apéndice A 90

Apéndice B 92

Apéndice C 105



Glosario de términos

(SEP)	Sistemas Eléctricos de Potencia.
P_{ES}	Potencia activa transmitida desde el nodo de envío al nodo de recepción
E_E	Voltaje del nodo de envío.
E_R	Voltaje del nodo de recepción.
x_{ER}	Reactancia conectada entre los nodos de envío y recepción.
δ_{ER}	Diferencia angular entre los nodos de envío y recepción.
t_{eps}	Tiempo específico en segundos.
$\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1$	Espacio de estado extendido.
\mathfrak{R}^n	Espacio de estado o espacio de fase.
t	Tiempo en segundos.
ϕ^t	Operador de evolución del sistema.
f	Conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, reales, no lineales, analíticas y continuas, representando la dinámica de los equipos eléctricos en el sistema.
g	Conjunto de ecuaciones algebraicas reales, no lineales, analíticas y continuas, representando las relaciones voltaje-corriente en terminales de los elementos de transmisión en estado estacionario.
$\dot{x}(t)$	Vector de variables de estado dinámico.
J	Matriz Jacobiana o Jacobiano.
P	Potencia activa.
Q	Potencia reactiva.
θ	Ángulo del voltaje en nodo de carga.
V	Magnitud del voltaje nodal.
\dot{x}	Variabes de estado dinámico
λ	Parámetros algebraicos
\mathbf{x}_0	Un punto de equilibrio inicial

N	Red de transmisión.
u	Señal de entrada al sistema.
y	Variables instantáneas o algebraicas del sistema.
λ	Parámetro del sistema que se pueden variar cuasiestáticamente.
XPPAUT	Software de sistemas dinámicos (X-windows Phase Plane Plus Auto).
EDA	Sistemas de ecuaciones diferencial-algebraicas.
EDO	Sistema de ecuaciones ordinarias.
T_m	Par mecánico.
T_e	Par eléctrico.
ω_m	Velocidad mecánica.
ω_e	Velocidad eléctrica.
P_p	Número de polos.
ω_{Rm}	Velocidad angular del rotor.
f_{mm}	Fuerza magnetomotriz.
ω_{s0}, ω_0	Velocidad síncrona (mecánica y eléctrica).
abc	Devanados estáticos representando las fases del estator.
ABC	Ejes de referencia estacionarios en el estator.
d, q	Devanados giratorios representado los ejes directo y de cuadratura en el rotor.
θ_m	Ángulo mecánico del rotor medido con respecto al eje de referencia estacionario A del estator.
θ_0	Valor inicial de θ_m .
α_m	Ángulo del eje de referencia bus con respecto al eje A.
α_0	Valor inicial de α_m .
δ_m	Desplazamiento angular del rotor con respecto al eje de referencia Bus
J	Momento de inercia de la masa del rotor en Kg-m ² .
T_a	Par de aceleración.
T_d	Par de amortiguamiento.

P_m	Potencia mecánica de entrada.
P_{ge}	Potencia eléctrica de salida.
P_d	Potencia de amortiguamiento.
P_a	Potencia de aceleración.
$J\omega_{Rm}$	Momento angular del rotor en J-s.
M	Momento de inercia.
H	Constante de inercia del rotor en seg.
W_k	Energía cinética almacenada en el generador a velocidad síncrona en MJ/seg.
$S_{B(3\phi)}$	Capacidad nominal del generador síncrono.
ω	Es la velocidad relativa de la velocidad angular del rotor con respecto a la velocidad síncrona.
D_m	Par de fricción.
D_a	Par asíncrono
D	Coefficiente de amortiguamiento en seg/rad.
P_{L_i}	Potencia real de carga en el nodo de generación.
δ	Ángulo del voltaje en terminales de generador.
G_{ij}	Conductancia de la línea de transmisión
B_{ij}	Susceptancia de la línea de transmisión.
T_{d0}	Constante de tiempo transitoria del generador en el eje directo.
E'	Voltaje interno de cuadratura del generador.
x_d'	Reactancia transitoria de eje directo.
x_d	Reactancia de eje directo.
E_{fd}	Voltaje de campo del generador.
V_i	Voltaje de terminales del generador.
V_{ref}	Voltaje de Referencia.
P_0, Q_0	Potencias reales y reactivas nominales.

V_0	Voltaje nominal.
f_0, f	Frecuencia nominal y frecuencia del voltaje de bus.
a_f	Parámetro de sensibilidad de la frecuencia.
ZIP	modelo de carga que combina los modelos de impedancia, corriente y potencia constantes.
$z(t)$	Vector de variables de estado del bus de carga.
L_d	Demanda nominal en MVA en el bus de carga.
pf	Factor de potencia.
D, a, b, k	Coefficientes del modelo de carga dinámica tipo I.
P_{0i}, K_{pwi}	Coefficientes del modelo de carga dinámica tipo II.
K_{pvi}, T, Q_{0i}	Coefficientes del modelo de carga dinámica tipo II.
$K_{qwi}, K_{qvi}, K_{qv2i}$	Coefficientes del modelo de carga dinámica tipo II.
P_{1i}, Q_{1i}	Potencias constantes real y reactiva del modelo de carga dinámica tipo II.
(SNB)	Bifurcación Punto de silla (Saddle-Node Bifurcation).
(TCB)	Bifurcación Transcrítica (Trancritical Bifurcation).
(SPFB)	Bifurcación de Horquilla Supercrítica (Supercritical Pitchfork Bifurcation).
(UPFB)	Bifurcación de Horquilla Subcrítica (Unstable Hopf Bifurcation).
(SHB)	Bifurcación Hopo Supercrítica (Supercritical Hopf Bifurcation).
(UHB)	Bifurcación Hopo Subcrítica (Unstable Hopf Bifurcation).
(CFB)	Bifurcación de Doble de Ciclos (Cyclic Fold Bifurcation).
(IPB)	Bifurcación Periodo Infinito (infinite Period bifurcation).
(HCB)	Bifurcación Homoclinica (Homoclinic Bifurcation).
(TRB)	Bifurcación de Doble Periodo (Period Doubling Bifurcation).

Índice de Figuras

Figura 1.1 Representación grafica del Control de la demanda en México.....	3
Figura 1.2 Curva Potencia-Ángulo en un generador síncrono	5
Figura 2.1 Órbita y trayectoria de un sistema dinámico.....	13
Figura 2.2 Definición de estabilidad	14
Figura 2.3 Región de atracción.....	15
Figura 2.4 Ciclo límite estable.....	21
Figura 2.5 Ciclo límite inestable.	21
Figura 2.6 Plano de fase	22
Figura 2.7 Plano de fase con dirección de flujo	23
Figura 2.8 Destrucción de los puntos de equilibrio.....	25
Figura 2.9 Diagrama de una bifurcación Saddle-Node	26
Figura 2.10 Intercambio de tipo de estabilidad entre los puntos de equilibrio.....	27
Figura 2.11 Diagrama de una bifurcación Transcrítica	28
Figura 2.12 Creación de dos puntos fijos estables a partir de otro estable.....	29
Figura 2.13 Diagrama de una bifurcación Pitchfork supercrítica.....	29
Figura 2.14 Diagrama de una bifurcación Pitchfork subcrítica.....	30
Figura 2.15 Movimiento de los eigenvalores complejos conjugados.....	31
Figura 2.16 Planos de fase de la bifurcación Hopf supercrítica	32
Figura 2.17 Planos de fase de la bifurcación Hopf subcrítica	32
Figura 2.18 Planos de fase de la bifurcación de Dobleza de Ciclos.....	33
Figura 2.19 Diagrama de una bifurcación de dobleza.....	34
Figura 2.20 Planos de fase de una bifurcación Homoclínica	35
Figura 2.21 Bifurcación de Toroide	36
Figura 2.22 Atractor extraño del sistema de Lorenz	37
Figura 3.1 Sistema de dos nodos	40
Figura 3.2 Curva PV.....	42
Figura 3.3 Pares mecánicos y eléctricos en un generador	47
Figura 3.4 Diagrama esquemático de los devanados de un generador.....	49

Figura 3.5 Ángulos y referencias para la maquina síncrona.....	49
Figura 4.1 Sistema Eléctrico de Potencia con carga dinámica.....	62
Figura 4.2 Diagrama de bifurcación mostrando las regiones estables e inestables.....	66
Figura 4.3.1 Dinámica de las variables V y δ al solucionar (4.3) con condiciones iniciales dadas en $Q_1=10$ pu	67
Figura 4.3.2 Dinámica de las variables ω y δ_m al solucionar (4.3) con condiciones iniciales dadas en $Q_1=10$ pu	68
Figura 4.4 Diagrama de Bifurcaciones.....	69
Figura 4.5 Soluciones periódicas inestables que aparecen de la bifurcación Hopf subcrítica ...	70
Figura 4.6 Oscilación periódica de las variables V y δ en la bifurcación Hopf subcrítica.....	71
Figura 4.7 Ciclo límite para las variables V y δ en la bifurcación Hopf subcrítica.....	72
Figura 4.8 Oscilaciones de voltaje en $Q_1=10.995$ pu.....	73
Figura 4.9 Colapso de voltaje en $Q_1=11.19$ pu	73
Figura 4.10 Región de biestabilidad.....	74
Figuras 4.11 Oscilaciones estables de las variables V y δ , en $Q_1=10.84$ pu.....	75
Figuras 4.12 Oscilaciones estables de las variables δ_m y ω , en $Q_1=10.84$ pu	76
Figura 4.13 Proceso de estabilidad de voltaje del sistema en una bifurcación de doblez	77
Figura 4.14 Ciclo límite asociado a una valor de $Q_1=10.8718$	78
Figuras 4.15 Ciclos límites en $Q_1=10.876$ pu	78
Figuras 4.16 Orbitas periódicas en $Q_1=10.885$ pu.....	79
Figuras 4.17 Comportamiento caótico en $Q_1=10.886$ pu.....	79
Figura 4.18 Oscilación de voltaje de carga para $Q_1=10.872$ pu.....	80
Figura 4.19 Oscilación de voltaje de carga para $Q_1=10.876$ pu.....	80
Figura 4.20 Oscilación de voltaje de carga para $Q_1=10.885$ pu.....	81
Figura 4.21 Oscilación de voltaje de carga para $Q_1=10.886$ pu.....	81
Figura 4.22 Oscilación de voltaje de carga para $Q_1=10.887$ pu.....	82
Figura 4.23 Incremento de ángulo de voltaje en el nodo de carga para $Q_1=10.887$ pu	83

Índice de Tablas

Tabla 1.1 Clasificación de la estabilidad en sistemas de potencia	4
Tabla 4.1 Parámetros utilizados en el sistema de potencia con carga dinámica	65

Capítulo 1

Introducción

“La Materia y la Energía, no se crean ni se destruyen solo se transforman“

Ley Universal de la Materia y la Energía

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción

Un requerimiento esencial de cualquier sociedad moderna es la operación segura y económica de sus fuentes de energía, en especial el sistema eléctrico. Históricamente, los sistemas eléctricos fueron diseñados y operados conservadoramente de tal manera que la demanda de energía eléctrica era fácilmente satisfecha, manteniendo amplios márgenes de estabilidad. En este contexto, los sistemas eran normalmente operados en una región donde su comportamiento era casi lineal. Sin embargo, el incremento de la demanda de energía eléctrica, aunado con el retraso en la construcción de plantas de generación y de la expansión de la red de transmisión, ha obligado a operar los sistemas eléctricos cada vez más cerca de sus límites de estabilidad por mayores lapsos de tiempo. Este tipo de operación puede producir diversos problemas de estabilidad para determinadas condiciones de operación del sistema. En este trabajo se analiza el problema de estabilidad de voltaje que se refiere a la habilidad del sistema de potencia para mantener voltajes estables en todos los nodos del sistema, después de ser sujeto a un disturbio, partiendo de una condición operativa inicial. Este problema de estabilidad se manifiesta por medio de oscilaciones o fluctuaciones de voltaje, que incluso pueden llegar al colapso del mismo. Aunque las oscilaciones pueden ser estables desde el punto de vista matemático, estas son indeseables en la operación real de los sistemas eléctricos. La principal razón es que estas oscilaciones limitan la transferencia de potencia en las líneas de transmisión y pueden ocasionar daños irreparables a los equipos eléctricos y de control.

Dentro del estudio de oscilaciones no lineales existen diferentes teorías que ayudan a entender sus complejos comportamientos dinámicos, siendo una de las principales la teoría de bifurcaciones [1]. Esta teoría permite conocer de manera cualitativa como afectan

pequeños cambios en los parámetros del sistema a las variables de estado y a la estabilidad de los puntos de operación o de equilibrio del sistema bajo análisis [2-3].

En el caso de sistemas eléctricos de potencia, la teoría de bifurcaciones se ha aplicado para observar los cambios cualitativos en las respuestas dinámicas de las magnitudes de voltajes dentro del sistema, al variar sus parámetros eléctricos en especial el consumo de Potencia en los nodos de carga dentro de un rango especificado. Entre los tipos de comportamiento dinámico que pueden llegar a observar están: los ciclos límite, movimiento cuasiperiódico e incluso el caos.

1.2 Objetivo

El objetivo de esta tesis es el estudio de la inestabilidad de voltaje en los sistemas eléctricos de potencia en base a la teoría de bifurcaciones y el análisis de sus posibles respuestas dinámicas.

1.3 Antecedentes

En sus principios, los sistemas eléctricos de potencia se diseñaban de manera que los consumidores de energía se encontraran cerca de los puntos de generación, haciendo que la operación de este tipo de sistemas fuera muy simple. Sin embargo, el contexto operativo de los sistemas ha cambiado en forma radical a través del tiempo debido a que los centros de generación están cada vez más distantes de los centros de consumo, existe cada vez más consumo de energía eléctrica por la creación de nuevas industrias y nuevas zonas habitacionales, y debido a presiones económicas, políticas y ambientales se a retrasado la expansión de la red de transmisión.

Las condiciones anteriores han provocado que los sistemas eléctricos de potencia operen cada vez más cerca de sus límites de estabilidad con la finalidad de satisfacer la demanda eléctrica que presenta un comportamiento dinámico impredecible, tal como se muestra en la Figura 1.1. Esta grafica corresponde a la variación promedio del consumo de carga eléctrica

en el sistema eléctrico mexicano durante 24 horas asociado a la variación real de carga y la variación controlada lograda por la acción de interrumpir la operación de ciertas cargas eléctricas en un determinado tiempo [4].

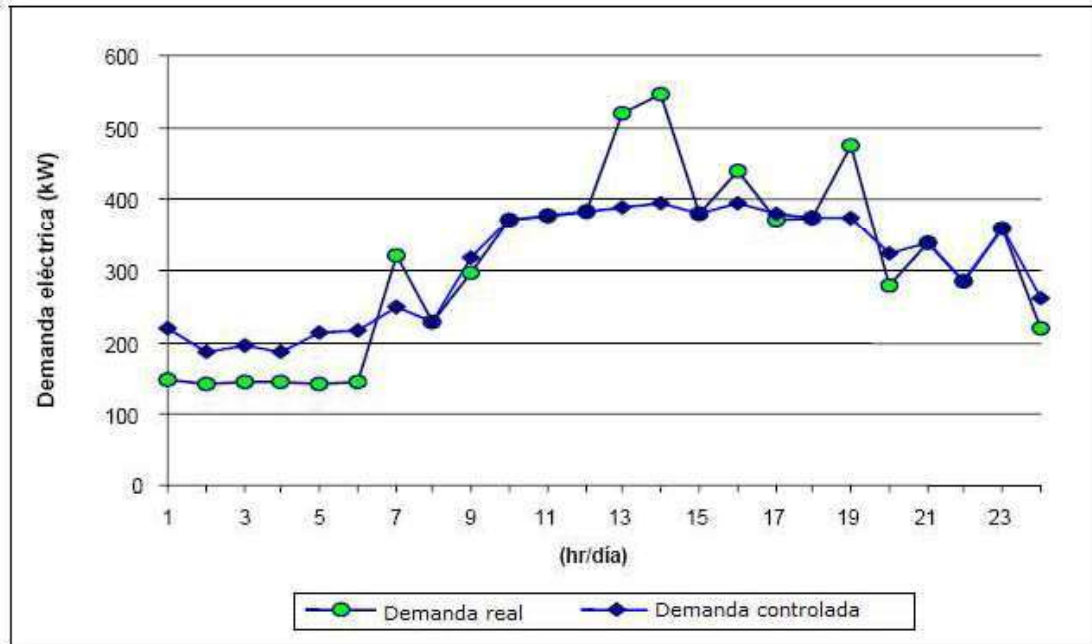


Figura 1.1 Representación gráfica del Control la demanda eléctrica en México.

Este tipo de operaciones han ocasionado el surgimiento de fenómenos dinámicos complejos no observados anteriormente, provocando cambios significativos en la estabilidad del sistema. Dentro del estudio de estos fenómenos han existido varios precursores con teorías que permiten su análisis de una manera aproximada. De las diferentes propuestas teóricas, aquellas asociadas a la teoría de bifurcaciones y teoría del caos, proporcionan una herramienta confiable para analizar dinámicos de sistemas no lineales, no solo presentes en los sistemas eléctricos, sino en todos los sistemas.

Los primeros problemas de inestabilidad que fueron observados en los sistemas eléctricos de potencia se manifestaron en el ángulo de carga del rotor de un generador síncrono. Esta inestabilidad se puede presentar en forma de oscilaciones electromecánicas no amortiguadas. Estas oscilaciones electromecánicas pueden ser ocasionadas por pequeños disturbios en las terminales del generador, los cuales se clasifican como problemas de estabilidad de pequeña señal o de estado estable. La pérdida total o parcial del sincronismo

del rotor se debe a su vez a grandes disturbios, y se denomina estabilidad transitoria o estado transitorio.

Las inestabilidades en los sistemas de potencia pueden clasificarse de forma general por la escala de tiempo y a partir de donde procede de la inestabilidad [5], como se muestra en la Tabla 1.1. La escala de tiempo a corto plazo se refiere a unos cuantos segundos; mientras que la escala de largo plazo se refiere a varios minutos.

Tabla 1.1 Clasificación de la estabilidad en sistemas de potencia.

Escala de tiempo	Generador	Carga
Corto plazo (segundos)	Estabilidad angular del rotor: Estado estable y Transitoria	Estabilidad de voltaje
Largo plazo (minutos)	Estabilidad de frecuencia	

La inestabilidad en el ángulo del rotor se presenta en el corto plazo debido a la dinámica presente en el generador y en la cargas un cambio inminente de voltaje. Existen sistemas de control que tienen como finalidad controlar una posible inestabilidad, algunos de estos equipos existentes son entre otros: los reguladores automáticos de voltaje y sistemas de excitación, que actúan en este periodo de tiempo.

En la escala de tiempo de largo plazo, se presentan los problemas de estabilidad de frecuencia y de voltaje. El primero está relacionado con el desbalance de potencia activa entre la generación y la carga. El segundo es debido a la variación de los parámetros eléctricos del sistema y déficit de generación de potencia reactiva en el sistema. Esta déficit de potencia reactiva ocasiona inestabilidad de voltaje en el corto plazo cuando cargas dinámicas requieran potencia reactiva importante durante periodos de tiempo que sean cortos [5], tales como los motores de inducción o cargas controladas electrónicamente.

1.3.1 Cambios en la estabilidad angular

Aunque en esta tesis no se analiza el cambio de estabilidad angular es importante definir este concepto que consiste en mantener en sincronismo el rotor del generador. La potencia que una máquina síncrona puede entregar cuando está conectado a un bus infinito por medio de una reactancia está dada por la siguiente ecuación [9]:

$$P_{ES} = \frac{E_E E_R}{x_{ER}} \text{sen} \delta_{ER} \quad (1.1)$$

En donde:

P_{ES} es la potencia activa transmitida desde el nodo de envío al nodo de recepción.

E_E es el voltaje del nodo de envío.

E_R es el voltaje del nodo de recepción.

x_{ER} es la reactancia conectada entre los nodos de envío y recepción.

δ_{ER} es la diferencia angular entre los nodos de envío y recepción.

Si los voltajes E_E , E_R y la reactancia x_{ER} se mantienen constantes, la potencia de transmisión está determinada por el ángulo de par δ_{ER} . En la Figura 1.2 se muestra esta característica de transmisión de potencia.

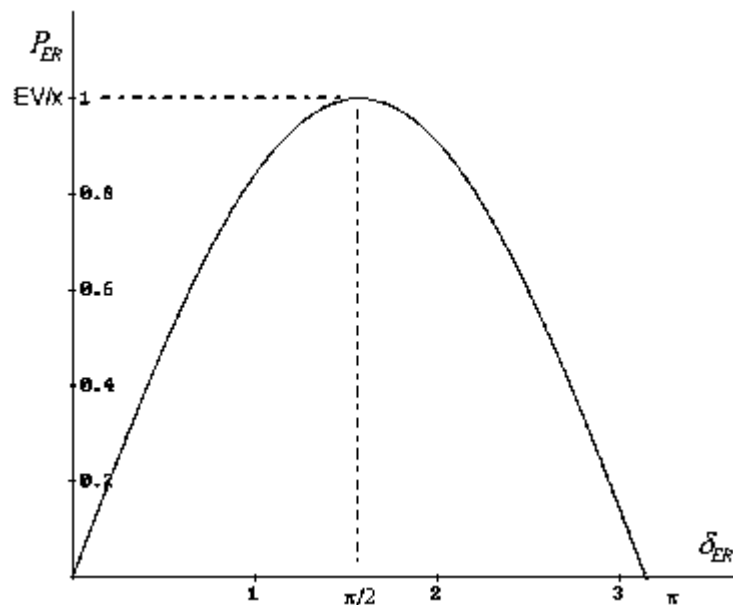


Figura 1.2 Curva Potencia-Ángulo en un generador síncrono.

Conforme el ángulo δ_{ER} se incrementa, se tiene una mayor transferencia de potencia P_{ER} activa hasta llegar al punto de máxima transferencia de potencia en $\delta_{ER}=90^\circ$. Si en este punto el ángulo δ_{ER} se incrementa, la transferencia de potencia decrece ocasionando una aceleración en el rotor del generador. Lo anterior puede producir una pérdida de sincronismo, es decir, la presencia de una inestabilidad angular. Este tipo de inestabilidad es la más común, ya que puede ser ocasionada por cualquier disturbio en el sistema.

1.3.2 Cambios en la estabilidad de voltaje

Este tipo de cambios de estabilidad se caracterizan por el llamado “colapso de voltaje”, este es muy especial, debido a que es del tipo catastrófico y se presenta repentinamente. Este fenómeno ocurre principalmente en sistemas muy sobrecargados en los que ocurre una falla o que tienen una gran pérdida de potencia reactiva.

Frecuentemente, este fenómeno involucra a todo el sistema eléctrico, y en ocasiones sólo puede afectar a partes de él; además, se ha encontrado que el colapso de voltaje provoca también variación en los ángulos de los generadores [6]. La pérdida de potencia reactiva ocasiona variaciones en la magnitud de voltaje, se debe regularmente al incremento en el consumo de este tipo de potencia en la carga o que los dispositivos compensadores de potencia reactiva han alcanzado su límite de eficiencia, tales como: los generadores, los bancos de capacitores y los Compensadores Estáticos de Vars (CEVs). Este aumento en la demanda energética es la principal causa del colapso de voltaje.

Cuando un sistema es estable en cierto punto de operación y se tiene un disturbio, ocurre un proceso transitorio donde las variables que definen el estado operativo del sistema cambian de valor con respecto al tiempo hasta llegar, en el mejor de los casos, a nuevos valores de estado estacionario. Si el disturbio es de tipo gradual o muy lento (cuasi-estático), normalmente el nuevo punto de operación se mueve o varía de la misma forma, siendo esto lo más normal en la operación del sistema. Pero como la teoría de bifurcaciones señala, no siempre los pequeños cambios producen un nuevo punto de operación normal; es decir, no

siempre existen puntos de operación estable para los nuevos parámetros del sistema. Esta característica permite relacionar cambios en la estabilidad angular y de voltaje con la teoría de bifurcaciones.

1.4 Justificación

La aplicación de la teoría de bifurcaciones y caos permite entender complejos comportamientos dinámicos no lineales que acontecen en un sistema eléctrico de potencia, los cuales no pueden ser explicados por medio de los estudios clásicos utilizados por los ingenieros electricistas para planear y operar la red eléctrica. Estas teorías permiten determinar de manera cualitativa como pueden evolucionar los sistemas eléctricos operando cerca de sus límites de estabilidad, y como controlar fenómenos tales como la inestabilidad y colapso de voltaje.

1.5 Metodología propuesta

Para analizar la inestabilidad de voltaje en un sistema eléctrico primeramente se obtiene un modelo matemático de los componentes eléctricos que lo conforman en base a un conjunto de ecuaciones diferenciales y algebraicas no lineales [7]. Este sistema de ecuaciones es resuelto numéricamente para obtener sus puntos de equilibrio y la estabilidad de los mismos. La estabilidad es relacionada con los conceptos de teoría de bifurcaciones para determinar de manera cualitativa como se comportará la dinámica del sistema, sin necesidad de realizar integración numérica de las ecuaciones diferenciales. Este proceso se repite conforme se varía un parámetro del sistema con la finalidad de evaluar el impacto de este parámetro en la estabilidad de voltaje del sistema; es decir, evaluar como los puntos de equilibrio u operación del sistema ganan o pierden estabilidad conforme se varía uno de sus parámetros.

Para la simulación del modelo matemático obtenido se utiliza el software XPPAUT [8], diseñado específicamente para realizar análisis en el dominio del tiempo de sistemas no lineales. Este software tiene la capacidad de obtener diagramas de bifurcación, indicando

soluciones estables e inestables de los puntos de equilibrio, y si son de tipo periódico u oscilatorio. Además, es posible simular y visualizar la dinámica de cualquier punto del diagrama de bifurcación. Aplicando estas características al análisis de sistemas eléctricos, es posible observar cambios en la estabilidad de voltaje.

Con respecto a la estabilidad, esta se puede evaluar también por medio de los eigenvalores en cualquier punto de operación en el diagrama de bifurcación, el software también proporciona de manera visual la estabilidad del sistema por medio de los multiplicadores de Floquet. Además, con el diagrama de bifurcación se puede mostrar claramente qué tan estable es el sistema por medio de los distintos atractores que se presentan en cada región operativa del sistema.

1.6 Contenido de la tesis

En este capítulo se menciona la importancia del estudio de estabilidad de voltaje en los sistemas eléctricos de potencia. Se define el objetivo del presente trabajo, se describen antecedentes relacionados con el fenómeno de estabilidad de voltaje y su relación con la teoría de bifurcación. Por último, se describe el contenido de la tesis.

El capítulo 2 describe los conceptos asociados a la teoría de bifurcación y su aplicación para el análisis de los sistemas no lineales. Se definen los conceptos de puntos de equilibrio y órbitas periódicas, así como su estabilidad. Además, se incluye una breve descripción de los diversos tipos de bifurcaciones locales y globales que presentan los sistemas no lineales.

En el capítulo 3 se describe de manera detallada el fenómeno de inestabilidad de voltaje, se define el marco de referencia en que se realiza este estudio, y se muestra como se aplica la teoría de bifurcación para el análisis de este fenómeno. También se describen los modelos matemáticos de los componentes eléctricos que conforman los sistemas eléctricos bajo estudio.

El capítulo 4 presenta el estudio de estabilidad de voltaje en un pequeño modelo de tres nodos, donde se observa la compleja evolución de sistemas eléctricos de potencia. Así como los resultados de este análisis en base a la teoría y a sus los diagramas de

bifurcaciones. También se observa la dinámica del sistema en los puntos de operación más importantes, indicando cuando y porque ocurren ciertos cambios en la estabilidad de voltaje.

Por último, el capítulo 5 contiene las conclusiones a las que he llegado y futuros estudios o aplicaciones para quienes deseen iniciar con el estudio no solo de la dinámica de los sistemas eléctricos de potencia, sino de cualquier otro sistema dinámico no lineal, desde el punto de vista de la teoría de Bifurcaciones.

Capítulo 2

Conceptos de Sistemas Dinámicos no Lineales y Teoría de Bifurcación

Eppur sí muove, “Pero se Mueve”

Galileo Galilei

Capítulo 2

Conceptos de Sistemas Dinámicos no Lineales y Teoría de Bifurcación.

2.1 Introducción

Desde siempre el estudio de fenómenos no lineales ha sido complicado debido a la dificultad de desarrollar un modelo matemático que explique sus comportamientos actual y futuro. Sin embargo, estos fenómenos se han tratado de explicar cualitativamente utilizando técnicas y métodos que permitan obtener la información necesaria sobre las propiedades del sistema, y sus posibles soluciones, sin tener que resolverlo plenamente. Dichos métodos y técnicas están constituidas dentro de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, iniciada a finales del siglo XIX con los trabajos de Poincare y A.M. Liapunov, que hoy en día se usan ampliamente [9].

Una manera de realizar el análisis dinámico cualitativo de sistemas no lineales esta basada en la teoría de bifurcaciones. La aplicación de esta teoría permite predecir cualitativamente el comportamiento dinámico de un sistema no lineal sujeto a pequeños cambios en sus parámetros por medio del análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio asociados a las ecuaciones diferenciales no lineales que representan al sistema bajo estudio. Es decir, en base a las pequeñas modificaciones en los parámetros del sistema, se determina la aparición y/o desaparición de puntos de equilibrio que representan las soluciones estables del sistema.

Dentro de los sistemas eléctricos de potencia, la teoría de bifurcaciones puede ser aplicada para analizar cambios cualitativos en su respuesta dinámica debido a pequeñas perturbaciones en sus parámetros. Entre los varios comportamientos dinámicos que pueden llegar a observarse, están los ciclos límite, movimiento cuasiperiódico e incluso el caos. A continuación, se explican los conceptos básicos asociados a sistemas dinámicos y la teoría

de bifurcaciones. Estos conceptos representan las bases teóricas de los análisis numéricos presentados en este trabajo.

2.2 Definición de un sistema dinámico

Debido a que toda nuestra realidad está en movimiento la dinámica es esencial para su entendimiento, ya que es la ciencia que se encarga del estudio de los cuerpos en movimiento. Los sistemas dinámicos están representados matemáticamente por medio de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. Estos sistemas de ecuaciones multiparamétricas dependen regularmente de un o más parámetros y por lo general son imposibles de solucionar de manera analítica.

La formulación matemática de un sistema dinámico se basa en el concepto general de un proceso evolutivo que puede determinarse. Esto indica que si se conoce el estado actual del sistema y el conjunto de leyes que gobiernan su evolución, los estados futuro y pasado pueden ser predichos dentro de un periodo de tiempo. En este contexto, la evolución de un sistema dinámico significa el cambio en su estado con respecto al tiempo.

En base a lo anterior, la representación de un sistema dinámico se realiza por medio de un conjunto de n variables que se modifican a través de un tiempo t , denominado vector de estados que esta dado de la forma $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$. La relación dinámica existente entre n vector de estado y la variable que representa al tiempo se realiza por medio de n ecuaciones diferenciables ordinarias de primer orden no lineales dadas por,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde

$$x_i = x_i(t), \dot{x} = \frac{dx_i}{dt} \quad i = 1, 2, \dots, n\tag{2.2}$$

La función vectorial $f: \mathfrak{R}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ se considera continuamente diferenciable. Debido a que la variable de estado $x(t)$ depende del tiempo t , la variable t se denomina variable independiente, mientras que la variable x se llama variable dependiente. Cuando la función f del lado derecho (llamada vector de campo) no depende explícitamente de la variable independiente de tiempo t , la ecuación se denomina autónoma, $f(t, x) = g(x)$. En cambio, cuando f depende de manera explícita de la variable independiente t , la ecuación diferencial se denomina no autónoma.

El espacio euclidiano \mathfrak{R}^n conformado solamente por las variables de estado $x_i(t) \forall i = 1, \dots, n$, y en el cual se representa la evolución en el tiempo de estas variables, es llamado espacio de estado o de fase. Para un tiempo específico t_{eps} existe un punto específico $x(t_{eps})$ en el espacio de fase. Existe también a su vez un espacio $(n+1), \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1$, donde la dimensión adicional corresponde a la consideración explícita del tiempo. Este espacio es denominado espacio de estado extendido.

Una solución analítica de (2.1) implica obtener una función o mapa $\varphi^t: \mathfrak{R}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{R}^n$, denominado ejecutor ó operador del sistema, que representa la evolución del sistema desde un estado $x(t_i)$, hasta un estado siguiente $x(t_{i+1})$; es decir: $x(t_{i+1}) = \varphi^t(x(t_i))$. En el contexto de sistemas dinámicos continuos, a los ejecutores $\{\varphi^t\}_{t \in T}$ se les llaman flujos, ya que representan la evolución dinámica del sistema. Debido a que la obtención analítica del mapa φ^t para el sistema de ecuaciones (2.1) es extremadamente difícil ó imposible; la solución de (2.1) puede determinarse por medio de métodos de integración numérica.

Independientemente de cómo se obtenga la solución de (2.1), esta consiste de un estado transitorio y un estado estable. Este último estado existe solamente si el sistema tiene un comportamiento asintótico conforme pasa el tiempo.

La solución de un sistema de dos ecuaciones diferenciales se representa esquemáticamente en la Figura 2.1 tanto en el espacio de estado como en el espacio de estado extendido. En el

espacio de estado extendido $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1$, la solución se conoce como una curva integral sobre la cual el vector de campo $f(x)$ describe un vector tangente (vector de velocidad), para cada punto x_{esp} y tiempo t_{esp} . La solución proyectada al espacio de estado \mathfrak{R}^n se llama órbita y la posible proyección dinámica en t_{esp} se le denomina curva o trayectoria del sistema.

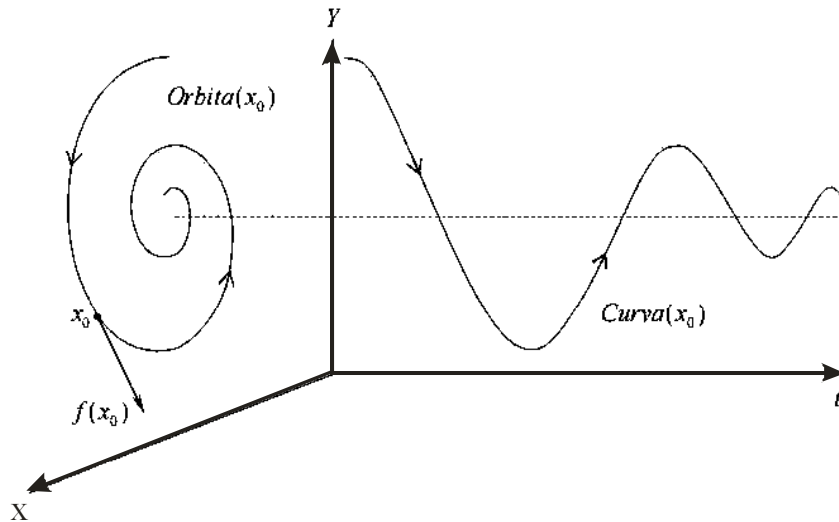


Figura 2.1 Órbita y trayectoria de un sistema dinámico.

2.3 Puntos de equilibrio y su estabilidad

Cuando no es necesario conocer de manera precisa la evolución de un sistema dinámico es posible aplicar teorías que pronostican cualitativamente el comportamiento de las orbitas y trayectorias posibles del sistema en base al análisis de estabilidad de sus puntos de equilibrio, sin necesidad de resolverlo plenamente por medio de integración numérica.

Un punto x_{eq} en el espacio de estados se nombra punto de equilibrio, punto estacionario, o solución en reposo del sistema $\dot{x}_i = f(x)$, si el vector de campo tiende a desaparecer; esto es $\dot{x}_i = f(x_{eq}) = 0$. Esto implica que el estado (trayectoria o solución) del sistema comienza en x_{eq} , y permanece en x_{eq} para todo tiempo futuro; es decir, $x(t_{i+1}) = \varphi^1 x(t_i)$ tal que $x(t_{i+1}) = x(t_i) = x_{eq} \quad \forall i = 0, \dots, \infty$.

Para los sistemas dinámicos autónomos los puntos de equilibrio son las raíces reales de la ecuación:

$$f(x) = 0 \quad (2.3)$$

De tal manera, los puntos de equilibrio se obtienen por medio de la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales o no lineales representado por $f(x)$. Si $f(x)$ es lineal y existe un punto de equilibrio o solución única, si $f(x) = Ax$ siempre que $\det(A) \neq 0$. Por el contrario, si $f(x)$ es no lineal, pueden existir múltiples soluciones que satisfacen la ecuación (2.3). Es muy importante aclarar que estos puntos de equilibrio son soluciones en reposo del sistema, más no definen si este estado de reposo es estable o inestable.

Para determinar si el sistema es estable es el estado de reposo obtenido, solo es necesario determinar si el punto de equilibrio es estable, sin tener que resolver todo el conjunto de ecuaciones diferenciales numéricamente. Esto se deduce a partir del teorema de Lyapunov ilustrado en la Figura 2.2, y cuya definición es: [4]:

“Un punto de equilibrio x^* es estable si para cada vecindario V de x^* se tiene un vecindario V_1 de x^* tal que para todo $x_0 \in V_1$ la solución existe y cae dentro de V para todo el tiempo $t > 0$ ”

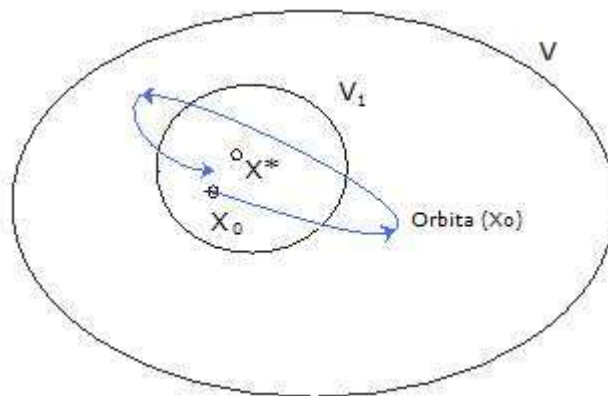


Figura 2.2 Definición de estabilidad.

En ocasiones V_1 puede seleccionarse de modo tal que la solución del sistema $x(x_0, t) \rightarrow x^*$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces se dice que x^* es asintóticamente estable; de lo contrario el sistema es inestable. En donde la región de atracción del punto de equilibrio x^* sería de cierta manera similar a la Figura 2.3. Ya que en esta figura se observa como las trayectorias con condiciones iniciales $x_0 \in B$ convergen de forma asintótica al punto de equilibrio x^* . Esta región de atracción se le llama dominio de x^* .

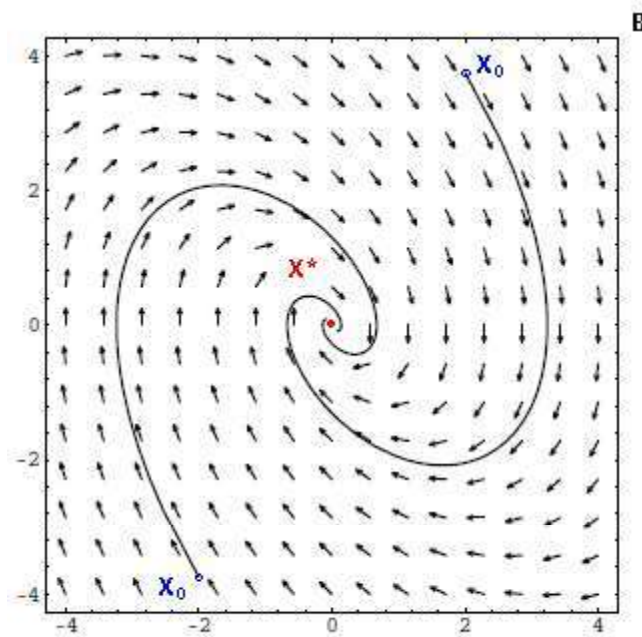


Figura 2.3 Región de atracción.

Lo anteriormente expuesto permite calcular la estabilidad de los puntos de equilibrio asociados a sistema de gran escala por medio de la aplicación de la teoría de los eigenvalores. Ambos conceptos se relacionan por medio del siguiente teorema de Lyapunov [10].

“Considerando un sistema dinámico definido por $\dot{x}(t) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ donde f es diferenciable. Asumiendo además que el sistema tiene un punto de equilibrio x^ ; es decir, $f(x^*) = 0$, y la matriz Jacobiana de $f(x)$ evaluada en el punto de equilibrio es $J = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x^*}$. Entonces x^* es asintóticamente estable si todos los eigenvalores de J tienen parte real negativa”.*

Cuando todos los eigenvalores de J tienen parte real diferente de cero, independientemente de sus partes imaginarias, el punto de equilibrio es denominado punto de equilibrio hiperbólico. Pero si existiera el caso de que por lo menos un eigenvalor tenga parte real cero, el punto de equilibrio es denominado punto de equilibrio no hiperbólico.

En el caso de los puntos de equilibrio hiperbólicos, si todos los eigenvalores tienen parte real negativa el punto de equilibrio es asintóticamente estable. Para un sistema lineal en este caso, la región de atracción es todo el espacio de estado. Por el contrario, si por lo menos un eigenvalor tiene parte real positiva el punto de equilibrio es inestable.

En el caso de los sistemas no lineales se tienen las siguientes características:

- ❖ El sistema puede tener uno, más de uno o ningún punto de equilibrio.
- ❖ La región de atracción de un punto de equilibrio puede estar limitada y esto no garantiza estabilidad.

2.3.1 Sistemas bidimensionales o de mayores dimensiones

De forma similar a los sistemas no lineales de una dimensión, los bidimensionales o de mayores dimensiones presentan: puntos de equilibrio, orbitas y trayectoria. Pero en el caso, de los de dos o más dimensiones existe un nuevo tipo de soluciones que son las periódicas, que más adelante se definirán y que además no existen en los sistemas lineales o no lineales de una dimensión.

Lo primero para determinar la estabilidad de cualquier punto de equilibrio de un sistema no lineal de n dimensión es linealizar el sistema alrededor de ese punto de equilibrio. Esta linealización se realiza de la manera siguiente:

Asumiendo el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.4}$$

Se escriben las ecuaciones algebraicas no lineales (2.5) y se resuelve para obtener el punto de equilibrio (x^*, y^*) :

$$\begin{aligned}0 &= f(x, y) \\ 0 &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.5}$$

Ahora, se define una pequeña perturbación de este punto, en dos variables:

$$\begin{aligned}u &= x - x^* \\ v &= y - y^*\end{aligned}\tag{2.6}$$

Desarrollando las derivadas de u con respecto a t (x^* es constante por ser punto de equilibrio) y formulando la ecuación resultante por una expansión de la series de Taylor:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{d}{dt}(x - x^*) = \dot{x} \\ \dot{u} &= f(x, y) = f(x^* + u, y^* + v) \\ \dot{u} &= f(x, y) + u \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} + v \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} + o(u^2, v^2, uv)\end{aligned}\tag{2.7}$$

De esto se considera lo siguiente:

- ❖ Las perturbaciones u y v son pequeñas, tal que los términos cuadráticos y de mayor orden de la expansión de Taylor se pueden despreciar (como el caso de $o(u^2, v^2, uv)$).
- ❖ Debido a que x^* y y^* son puntos de equilibrio se tiene que $f(x^*, y^*) = 0$.

El resultado de \dot{u} , es parte de un equivalente lineal del sistema no lineal (2.4).

$$\dot{u} = u \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} + v \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \quad (2.8)$$

Esto se realiza de igual forma para \dot{v} :

$$\dot{v} = u \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} + v \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \quad (2.9)$$

Agrupando los resultados de las ecuaciones (2.8) y (2.9) es posible expresar al sistema linealizado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{array} \right]_{(x^*, y^*)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = [J]_{(x^*, y^*)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Donde la matriz J (matriz Jacobiana o el Jacobiano de estado), es evaluada en el punto de equilibrio (x^*, y^*) .

También existen dos teoremas que nos permiten relacionar la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema linealizado (2.10) con la estabilidad de los puntos de equilibrio del

sistema no lineal (2.4). El primero es el teorema de Hartman-Grobman que se aplica a puntos de equilibrio hiperbólicos el cual nos menciona en forma semi-abstracta [10] [11]:

“Consideramos el sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$, con f suficientemente suave. Suponemos que x^* es un punto de equilibrio aislado. Además suponemos, que la función $J(x^*) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*}$ no tiene eigenvalores nulos o imaginarios puros. Entonces existe un homeomorfismo h (aplicación continua y con inversa continua) definida en un entorno $U \subset \mathbb{R}^2$ de x^* , $h:U \rightarrow \mathbb{R}^2$, que lleva las trayectorias del sistema no lineal sobre las del sistema linealizado. En particular $h(x^*) = 0$ ”.

Del teorema anterior se determina lo siguiente:

- a) El punto de equilibrio del sistema no lineal (2.4) es estable si el punto de equilibrio del sistema linealizado (2.10) es asintóticamente estable.
- b) El punto de equilibrio del sistema no lineal (2.4) es inestable si el punto de equilibrio del sistema linealizado (2.10) es inestable.
- c) La linealización no puede comprobar la estabilidad de los puntos de equilibrio que tienen algunos eigenvalores con parte real negativa y el resto de los eigenvalores con parte real cero. En este caso, es necesario un análisis no lineal para determinar la estabilidad; es decir, es preciso retener los términos cuadráticos, y algunas veces los términos de mayor orden, en la expansión de la serie de Taylor dada en (2.7).

De acuerdo a lo anterior, se concluye que la estabilidad del punto de equilibrio hiperbólico se puede obtener por medio de los eigenvalores del Jacobiano, y que si el punto de equilibrio del sistema linealizado es asintóticamente estable, de igual manera será en el sistema no lineal.

Desde el punto de vista conceptual, lo anterior implica que la evolución dinámica del sistema linealizado debido a una pequeña perturbación es cualitativamente semejante a la

evolución dinámica del sistema no lineal debida a la misma pequeña perturbación. Asimismo, cualquier cambio cualitativo en este último puede ser detectado, al examinar la dinámica del sistema lineal.

Por último, es importante mencionar que, aunque la linealización nos ayuda a determinar de manera más sencilla si un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal es estable, esta no proporciona ninguna información asociada al tamaño de su región o dominio de atracción.

2.4 Ciclos límite y su estabilidad

De los sistemas no lineales es importante mencionar que existen soluciones periódicas que se caracterizan por tener estados variantes en el tiempo. La solución periódica es una respuesta dinámica caracterizada por una frecuencia básica F . Matemáticamente, la solución $x(t)$ es periódica para todo tiempo t , si existe algún T que satisfice:

$$x(t+T) = x(t) \quad 0 < t < T \quad (2.11)$$

A una solución periódica se le llama ciclo límite si no existen otras soluciones periódicas cercanas a ella (es decir que se encuentra aislada). Siendo los ciclos límite inherentemente un fenómeno de los sistemas no lineales.

De forma similar a los puntos de equilibrio, la estabilidad de los ciclos límites pueden ser estables o inestables.

- ❖ Un ciclo límite es asintóticamente estable si todas las órbitas, comenzando cerca de éste, alcanzan el ciclo límite conforme el tiempo se incrementa. Un ejemplo claro es la Figura 2.4 en la que se ve claramente como las órbitas convergen al ciclo límite estable.

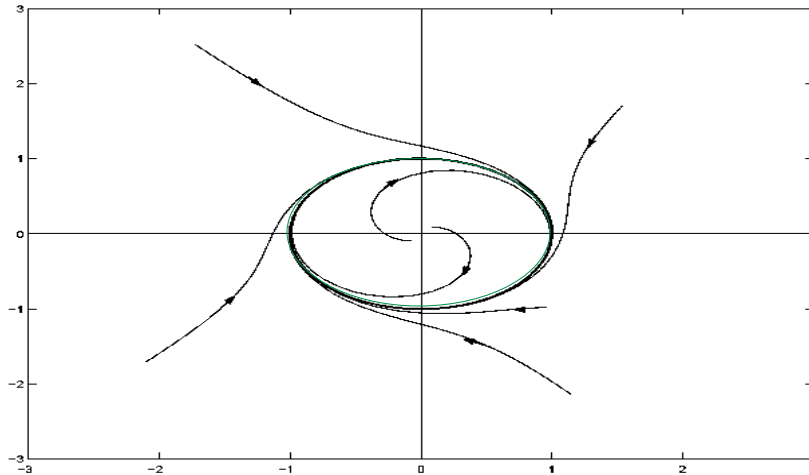


Figura 2.4 Ciclo limite estable.

- ❖ Un ciclo límite es inestable si todas las órbitas comenzando cerca de éste, se alejan o divergen del mismo. Esto se muestra en la Figura 2.5 donde se observa cómo se alejan la orbitas.

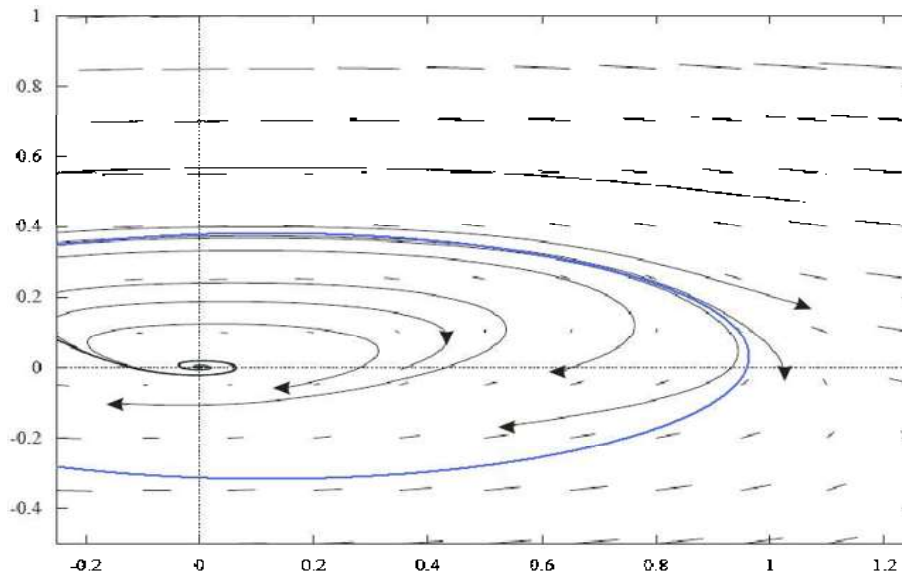


Figura 2.5 Ciclo limite inestable.

En algunos casos extraños se pueden tener ciclos límite semiestables. Otro ejemplo se muestra en la Figura 2.6 en la cual se observan algunos ciclos límite estable (como C).

2.5 Planos de fase y flujo

Para comprender el procedimiento cualitativo de la dinámica de los sistemas no lineales es común analizar el plano de fase, que no es más que un conjunto de trayectorias surgiendo de diferentes condiciones iniciales dentro del espacio de estado que contiene información del proceso transitorio y asintótico del sistema. Con esto, es posible saber el número y tipos de estados resultantes presentes en el sistema mientras $t \rightarrow \infty$.

Un ejemplo de un plano de fases que muestra la información de la dinámica del sistema es la Figura 2.6. Los puntos fijos A, B, D y G satisfacen a la ecuación $f(x^*)=0$, y corresponden a los puntos de equilibrio del sistema. Existen también soluciones periódicas o ciclos límites como es el caso de la órbita cerrada C, siendo estable debido a que las trayectorias cercanas al interior y exterior tienden a esta orbita; tal que $x(t+T) = x(t)$ para todo el tiempo t .

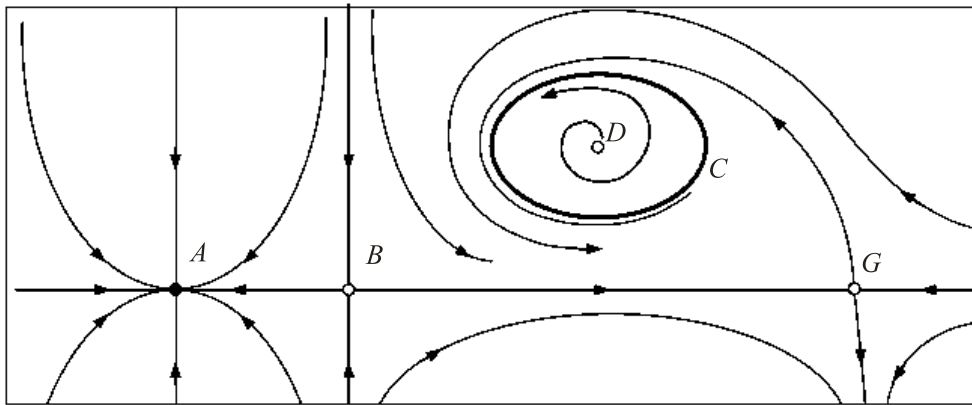


Figura 2.6 Plano de fase.

Es claro que los puntos B, D y G son inestables ya que las trayectorias cercanas tienden a alejarse de ellos, al contrario del punto A que es estable debido a que las trayectorias cercanas tienden a él.

Una idea en la que se puede interpretar al plano de fases de un sistema dinámico continuo es como la imagen de un fluido. Por esta relación con el flujo de un fluido se le ha

nombrado con el término de análisis de flujo para ciertos sistemas continuos (siendo este el control de la evolución del sistema).

La dirección del campo en el plano de fase se puede representar gráficamente con “Nullclines” que son segmentos de líneas y curvas. Cuando la dirección del flujo es totalmente horizontal y vertical, implica que la dinámica del sistema es cero, es decir se tiene un punto de equilibrio. Un ejemplo claro de lo anterior se observa en la Figura 2.7.

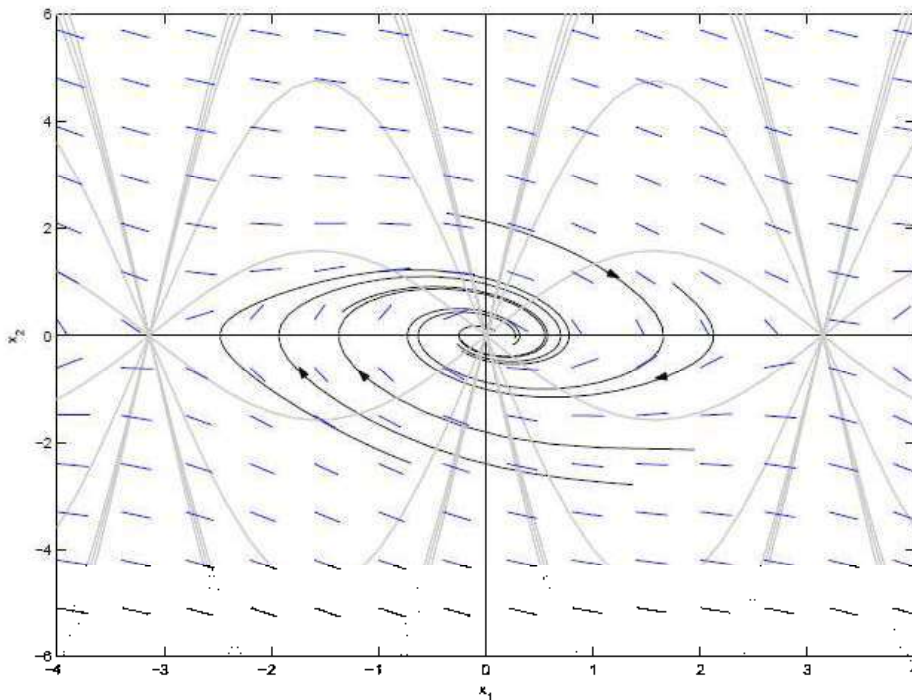


Figura 2.7 Plano de fase con dirección de flujo. .

2.6 Estabilidad estructural

Un sistema es estructuralmente estable si su dinámica no cambia de manera cualitativa bajo pequeñas perturbaciones. Es decir que la topología de las trayectorias en el plano de fases del sistema, a pesar de las perturbaciones, sigue cualitativamente igual.

El fin del análisis de este concepto es su relación con la teoría de bifurcaciones, que a continuación se ejemplifica. De un sistema no lineal de la forma $\dot{x} = f(x, \lambda)$, donde λ es un parámetro del sistema independiente del tiempo. En el caso de que se presenten cambios

cualitativos en el plano de fase del sistema por pequeñas variaciones en este parámetro, el sistema es cualitativamente inestable. Siendo un fenómeno de la teoría de bifurcaciones; es decir, cuando se pierde la estabilidad estructural en el sistema ocurre una bifurcación.

2.7 Bifurcación

Frecuentemente dentro de las ecuaciones dinámicas existen parámetros que son constantes. Que en ciertas circunstancias se desea conocer como será el comportamiento dinámico del sistema conforme estos parámetros autónomos cambian de valor cuasi-estáticamente.

Una forma de solucionar este tipo de problema es por medio del concepto de bifurcaciones. Una bifurcación indica un cambio cualitativo en las características topológicas del flujo del sistema. Estos cambios cualitativos están asociados al cambio en el número, tipo y estabilidad de los puntos de equilibrio u órbitas periódicas del sistema; conforme se presentan cambios cuasi-estáticos de uno o más de sus parámetros de control λ .

Las bifurcaciones pueden ser locales o globales. Bifurcaciones locales se refieren al cambio de la estabilidad que sucede en el plano de fase en la vecindad de una sola solución periódica o punto fijo del sistema. Las bifurcaciones globales se asocian a cambios en el periodo de las soluciones asociadas a los puntos de equilibrio.

Las bifurcaciones locales solo pueden ocurrir cuando un cambio en los valores de los parámetros de control conviertan al punto de equilibrio en no hiperbólico. Entonces, una forma sencilla de establecer cuando está ocurriendo una bifurcación local consiste en determinar los valores paramétricos que produzcan que el Jacobiano asociado al sistema linealizado un eigenvalor cero o un par de eigenvalores complejos puramente imaginarios.

A continuación, se detalla de manera más amplia las características que presenta el plano de fase cuando acontecen algunas bifurcaciones locales y globales.

2.8 Bifurcaciones Locales

Es claro que solo estas bifurcaciones están relacionadas con el cambio de estabilidad en un punto de equilibrio al existir cambios significativos antes y después de un punto de equilibrio no hiperbólico. La pérdida de estabilidad puede ser provocada por medio de cualquiera de las siguientes bifurcaciones: Bifurcación Saddle-Node (o Punto de Silla), Bifurcación Transcrítica, Bifurcación Pitchfork y Bifurcación Hopf. Las tres primeras bifurcaciones son llamadas bifurcaciones estáticas porque a ellas solo convergen soluciones asociadas a puntos de equilibrio; es decir, soluciones estáticas. Por el contrario, en la Bifurcación Hopf convergen a soluciones estáticas y soluciones periódicas, por lo que se denomina bifurcación dinámica. A continuación, se detalla cada una de ellas [1] [12].

2.8.1 Bifurcación Saddle-Node (SNB)

Esta bifurcación se asocia con la aparición y desaparición de puntos de equilibrio conforme cambia el parámetro de control λ . En el caso de la ecuación diferencial no lineal $\dot{x} = -x^2 - \lambda$, se tienen las soluciones mostradas en la Figura 2.8.

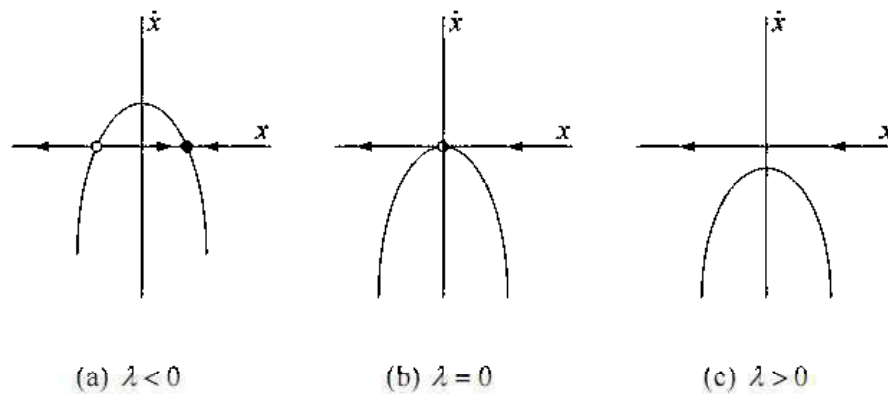


Figura 2.8 Destrucción de los puntos de equilibrio.

Cuando el parámetro de bifurcación λ es menor que cero, existen dos puntos de equilibrio en el sistema, uno estable y otro inestable; es decir, coexisten diversas soluciones que satisfacen las ecuaciones algebraicas no lineales. En el caso de que el parámetro λ sea igual a cero, los puntos de equilibrio estable e inestable chocan, y se produce el punto de

bifurcación Saddle-Node (o punto de silla ya que toma forma de silla de montar). En la cual el Jacobiano del sistema se vuelve singular, $J(x^*) = 0$, y no es posible obtener una solución del conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales. Por último, si el parámetro de control es mayor a cero no existen puntos de equilibrio, lo cual implica que nunca se obtendrá una solución del sistema algebraico no lineal. De acuerdo a lo anterior, la ecuación diferencial $\dot{x} = -x^2 - \lambda$, tiene una respuesta en base a un valor inicial del parámetro λ como se muestra en la Figura 2.9.

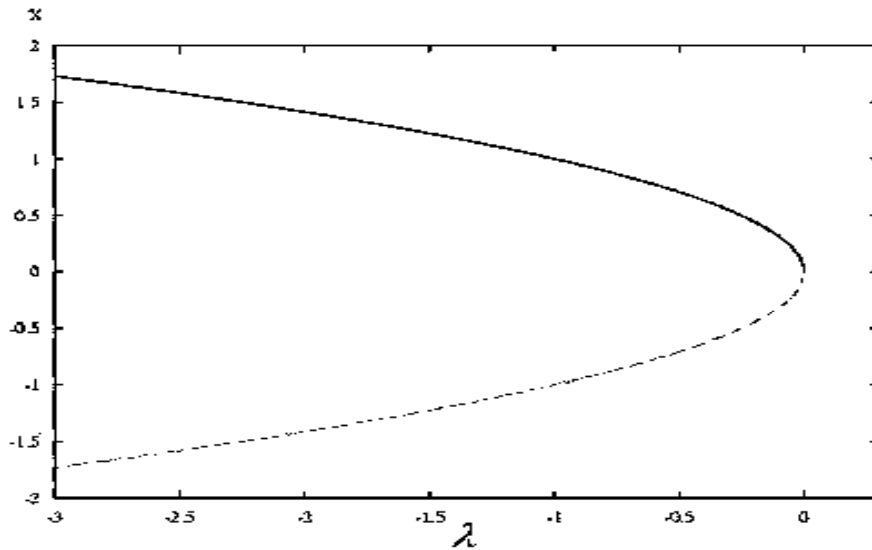


Figura 2.9 Diagrama de una bifurcación Saddle-Node.

De la grafica anterior debe mencionarse que la línea negra representa a los puntos de equilibrio estables, mientras que las líneas discontinuas representan a los puntos de equilibrio inestable. Este tipo de bifurcaciones existe siempre que se cumplan la siguientes condiciones matemáticas [4] [14]:

$$\begin{aligned}
 f(x, \lambda) &= 0 \\
 \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*} &= 0 \\
 \frac{\partial f}{\partial \lambda} &\neq 0 \\
 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x^*} &\neq 0
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

La primera ecuación en (2.12) implica que la solución es un punto de equilibrio. La segunda ecuación prueba que este punto es no hiperbólico. La tercera significa que coexiste en el punto de bifurcación (x^*, λ) una función continua diferenciable $\lambda = h(x)$, que se intersecta con la línea $x = x^*$ de manera transversal. Por último, la cuarta ecuación significa que el punto de equilibrio permanece de manera local a un lado de la línea $\lambda = \lambda_0$. Estas dos últimas ecuaciones se denominan condicionantes de transversabilidad.

2.8.2 Bifurcación Transcrítica (TCB)

En esta bifurcación, y al contrario de la bifurcación Saddle-Node, los puntos de equilibrio no desaparecen por el cambio del parámetro de control λ , sino que intercambian el tipo de estabilidad. Este se muestra esquemáticamente en la Figura 2.10 y 2.11 asociadas a la ecuación diferencial $\dot{x} = \lambda x - x^2$.

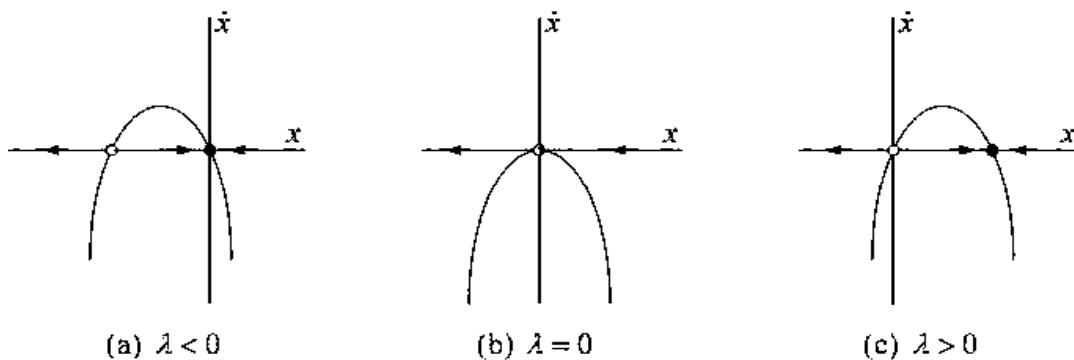


Figura 2.10 Intercambio de tipo de estabilidad entre los puntos de equilibrio.

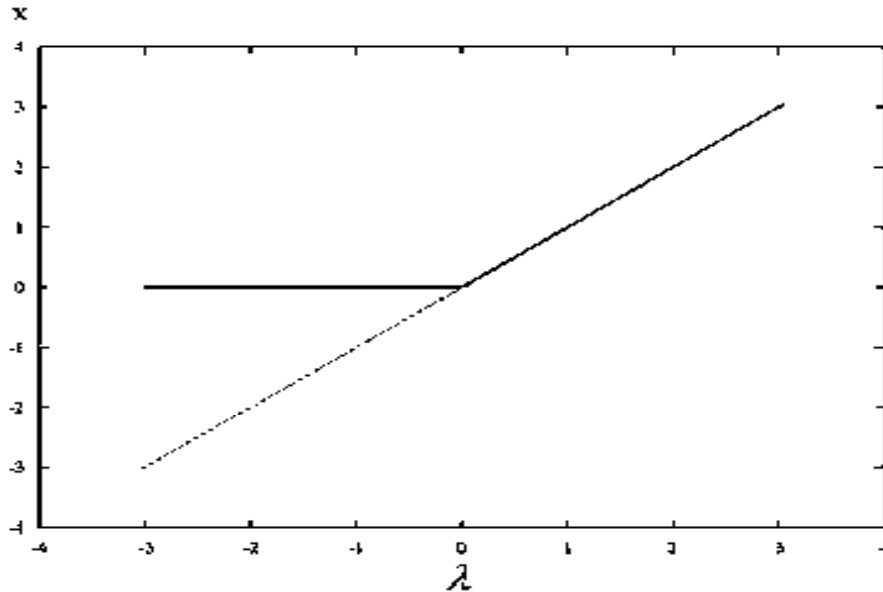


Figura 2.11 Diagrama de una bifurcación Transcrítica.

Cuando el parámetro de control inicia es $\lambda < 0$, existen dos puntos de equilibrio, uno estable cuando $x^* = 0$ (línea continua y marcada) y otro inestable en $x^* = \lambda$ (líneas discontinuas y suaves). Estas dos líneas convergen cuando el parámetro es $\lambda = 0$. Cuando $\lambda > 0$, el tipo de estabilidad de los puntos se invierte, siendo ahora el punto de equilibrio $x^* = 0$ inestable y el punto $x^* = \lambda$ estable.

2.8.3 Bifurcación Pitchfork (PFB)

En este tipo de bifurcación conforme se varía el parámetro de control un punto de equilibrio estable se convierte en inestable, y al mismo tiempo se originan dos puntos de equilibrio estables; de manera que la forma de la bifurcación se asemeja a un tenedor o trinche. Existen dos diferentes tipos de esta bifurcación, una llamada Subcrítica (**UPFB**) y otra Supercrítica (**SPFB**).

La bifurcación supercrítica (**SPFB**) es directamente relacionada a la creación de dos puntos de equilibrios estables a partir de otro que se volvió inestable conforme varia el parámetro de bifurcación λ , tal como se muestra en la Figura 2.12.

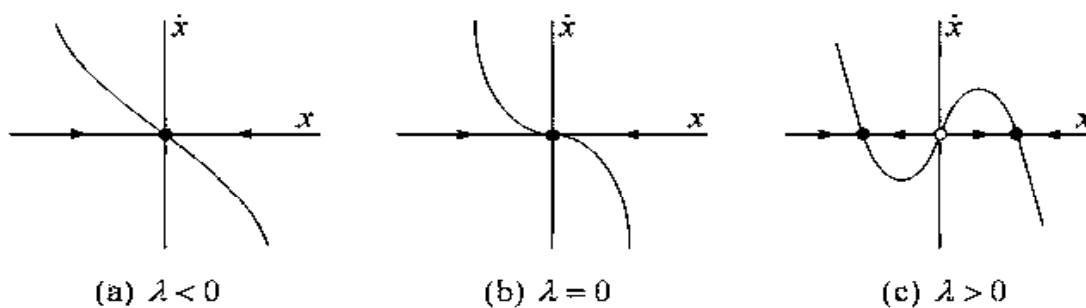


Figura 2.12 Creación de dos puntos fijos estables a partir de otro estable.

Cuando el parámetro $\lambda < 0$, solo existe un punto de equilibrio estable. Cuando $\lambda = 0$, este punto de equilibrio es críticamente estable dado que la linealización se desvanece; pero sigue siendo estable. Sin embargo, para valores de $\lambda > 0$, el punto de equilibrio se convierte inestable, y además se tienen dos puntos de equilibrio estables de forma simétrica. Un ejemplo numérico de la bifurcación Pitchfork supercrítica se muestra en el diagrama de bifurcación dado en la Figura 2.13, correspondiente de la ecuación $\dot{x} = \lambda x - x^3$. Los puntos de equilibrio estables corresponden a las líneas gruesas y los inestables a la línea delgada y discontinua.

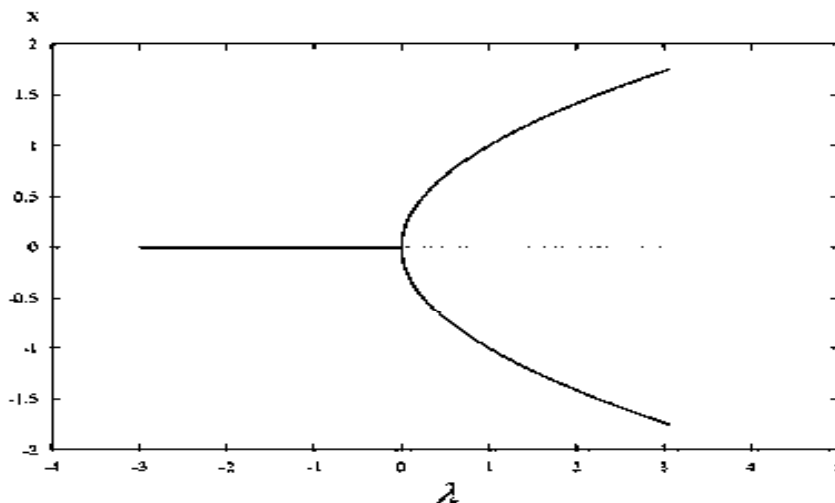


Figura 2.13 Diagrama de una bifurcación Pitchfork supercrítica.

En el caso de la bifurcación Pitchfork subcrítica (**UPFB**), el sistema convierte en inestable en el punto de bifurcación y pueden ocurrir los siguientes dos caso conforme se el parámetro de bifurcación o control.

- ❖ Si λ disminuye, se forman dos ramas simétricas conformadas por puntos de equilibrio inestables, hasta que se presentan en ambas ramas una bifurcación Saddle-Node y en los puntos de equilibrio son estables nuevamente.
- ❖ Si λ aumenta, el sistema pasa a un estado de reposo definido por cualquiera de los dos puntos de equilibrio estables. Ya situado en cualquiera de estos puntos de equilibrios pasa lo siguiente: si λ se incrementa se tiene una rama estable; pero si el valor disminuye, surgen nuevamente puntos de equilibrio estables hasta llegar a la bifurcación Saddle-Node, y de ahí el sistema pasa a un estado de reposo definido por el punto de equilibrio estable original.

El comportamiento de los estados de reposo del sistema conforme se varía el parámetro de control o bifurcación y acontece una bifurcación Pitchfork subcrítica (**UPFB**) suele nombrarse histéresis, ya que siempre se llega al mismo punto de equilibrio inicial. Un ejemplo claro es este comportamiento es mostrado en la Figura 2.14, correspondiente a la ecuación diferencial $\dot{x} = \lambda x + 2x^3 - x^5$.

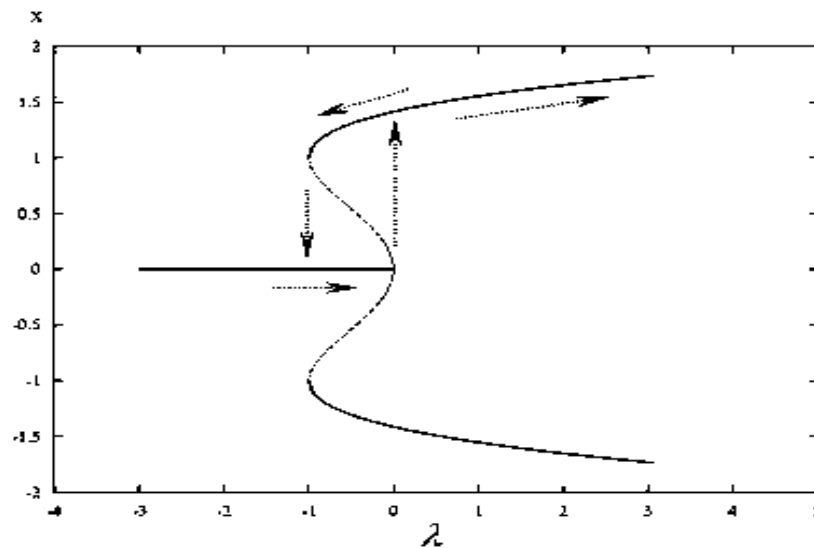


Figura 2.14 Diagrama de una bifurcación Pitchfork subcrítica.

2.8.4 Bifurcación Hopf (HB)

Este tipo de bifurcaciones surge en el choque de un punto de equilibrio y un ciclo limite. En este caso la inestabilidad sucede porque un eigenvalor real (o dos eigenvalores complejos conjugados), cruza(n) el eje imaginario hacia la parte derecha del plano complejo, dando origen a la bifurcación Hopf. Esto se observa en la Figura 2.15 para los eigenvalores complejos conjugados.

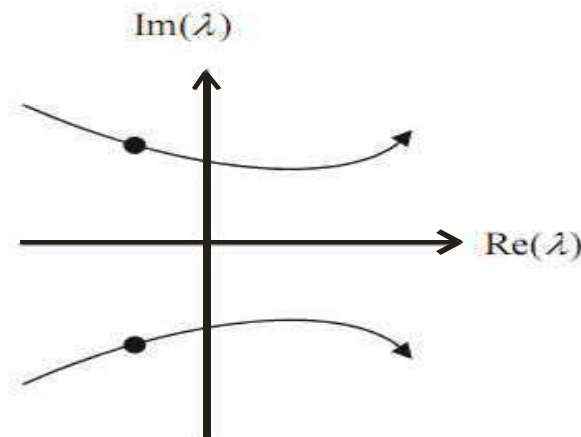


Figura 2.15 Movimiento de los eigenvalores complejos conjugados.

Matemáticamente existen dos condiciones para que aparezcan las bifurcaciones Hopf [14] [28]:

- ❖ El Jacobiano tiene un simple par de eigenvalores imaginarios puros en el punto de bifurcación: $\gamma(\lambda_b) = \alpha(\lambda_b) \pm j\omega(\lambda_b)$, entonces $\alpha(\lambda_b) = 0$ y $\omega(\lambda_b) > 0$

$$\text{❖ } \left. \frac{d \operatorname{Re}\{\gamma(\lambda)\}}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_b} = \left. \frac{d\alpha(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_b} \neq 0 \quad (\text{Condición de transversalidad})$$

La primera condición implica que se tiene un punto de equilibrio no hiperbólico. La segunda indica el cruce de los eigenvalores complejos conjugados hacia el lado derecho del plano complejo. La parte importante de este tipo de bifurcaciones es que después de que cambia la estabilidad del punto de equilibrio, se origina una órbita periódica (o ciclo límite) de pequeña amplitud al variar el parámetro de control. Al seguir variando λ , las variables

que determinan el estado del sistema oscilarán de manera estable o inestable, dependiendo si la bifurcación Hopf es Supercrítica (**SHB**) o es Subcrítica (**UHB**) [1] [2].

El caso de la bifurcación Hopf supercrítica (SHB) acontece cuando el punto de equilibrio pierde estabilidad y se convierte en un ciclo límite estable para valores más grandes que el punto de bifurcación. En la Figura 2.16 se muestran los planos de fase característicos de este tipo de bifurcaciones.

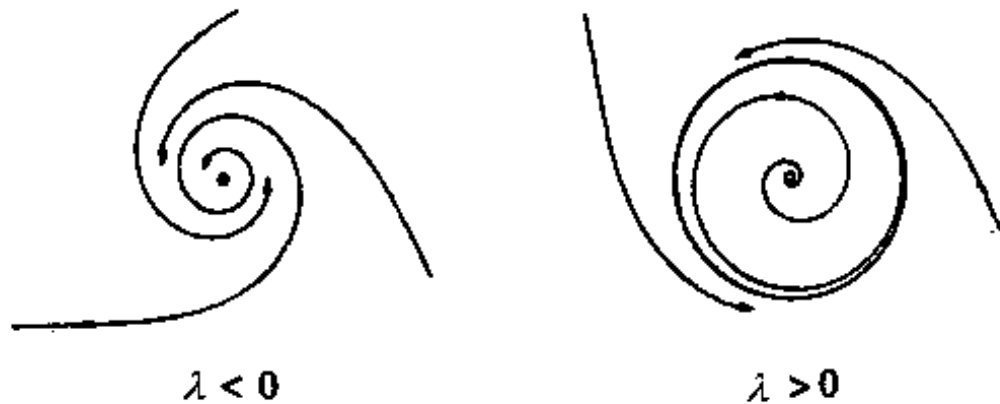


Figura 2.16 Planos de fase de la bifurcación supercrítica.

Las bifurcaciones Hopf Subcríticas (UHB) aparecen cuando el punto de equilibrio estable se transforma en un ciclo límite inestable. Los planos de fase de estas bifurcaciones se observan en la Figura 2.17. Este tipo de bifurcaciones es muy peligrosa ya puede llevar el comportamiento del sistema a un estado caótico conforme se varía el parámetro de control.

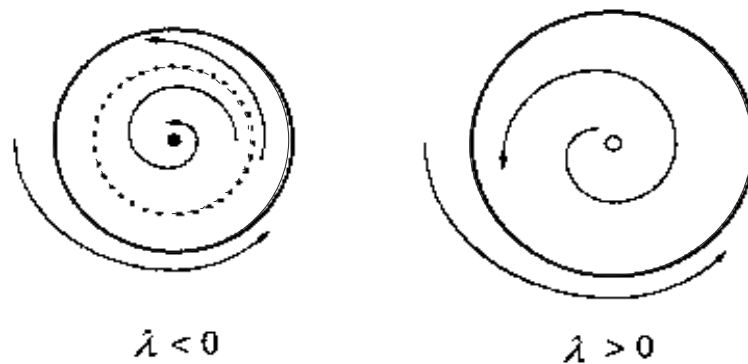


Figura 2.17 Planos de fase de la bifurcación subcrítica

2.9 Bifurcaciones Globales

Estas bifurcaciones son de tipo global porque se trata de la creación o destrucción de ciclos límites; al contrario de las anteriores que se trataba de la creación o destrucción de puntos de equilibrio. Este tipo de bifurcaciones es más difícil de encontrar ya que su búsqueda debe realizarse en toda la región del plano de fase, en lugar pequeñas regiones alrededor de los puntos de equilibrio.

2.9.1 Bifurcación de Doble de Ciclos (CFB)

Esta bifurcación ocurre por la destrucción de dos ciclos límites, uno estable y el otro inestable, tal como se observa en los planos de fase de la Figura 2.18.

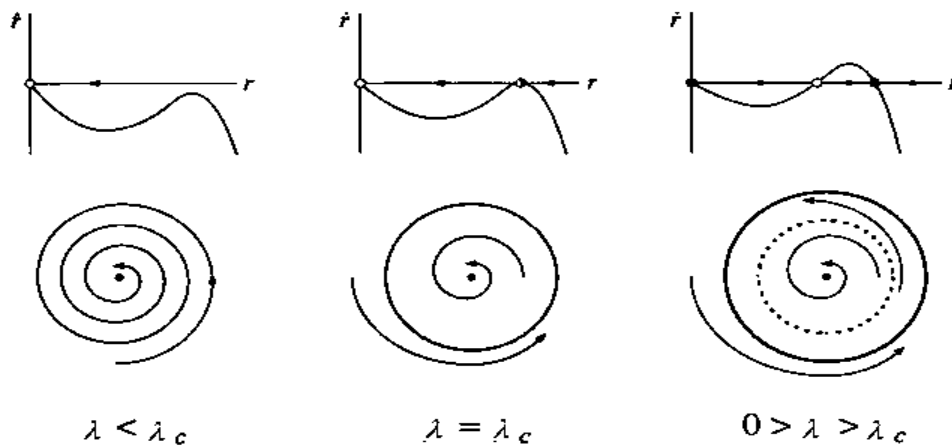


Figura 2.18 Planos de fase de la bifurcación de Doble de Ciclos.

Para valores del parámetro de bifurcación menores al valor crítico λ_c , solo existe un punto de equilibrio estable. En el instante en que el parámetro toma el valor crítico se tiene un ciclo límite semiestable. Por último, en rangos de valores del parámetro de control $0 > \lambda > \lambda_c$, del ciclo límite semiestable se originan dos ciclos límite uno estable y otro inestable. En la Figura 2.19 se muestra el diagrama de bifurcación de este tipo, donde los ciclos límite estables son los círculos rellenos y los inestables son los círculos vacíos. Debido a que siempre coexiste un doble ciclo, cada uno de distinto comportamiento, es el nombre de doblez.

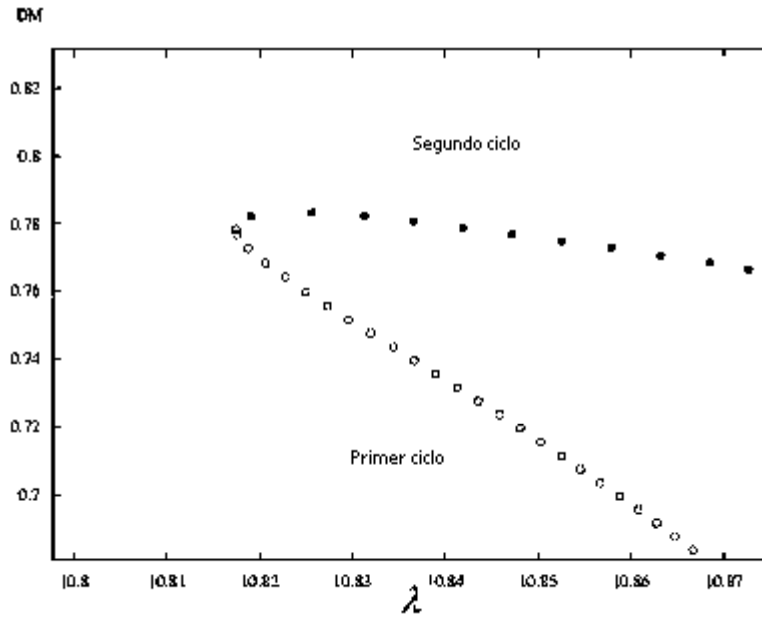


Figura 2.19 Diagrama de una bifurcación de doblez.

En el caso de la grafica anterior se aclara que los círculos rellenos representan a respuestas periódicas estables, mientras que los círculos vacíos representan respuestas periódicas inestables.

2.9.2 Bifurcación Homoclínica (HCB) o (BSKY)

Este tipo de bifurcaciones acontece cuando un ciclo estable o inestable llega a tocar un punto inestable o Saddle, formándose una órbita homoclínica. Esta orbita no es más que una serie de atractores en forma de espiras, pero a su vez semejantes unos de otros, que convergen de forma muy cercana a un punto de equilibrio. Este tipo de orbitas se muestran en la figura 2.20.

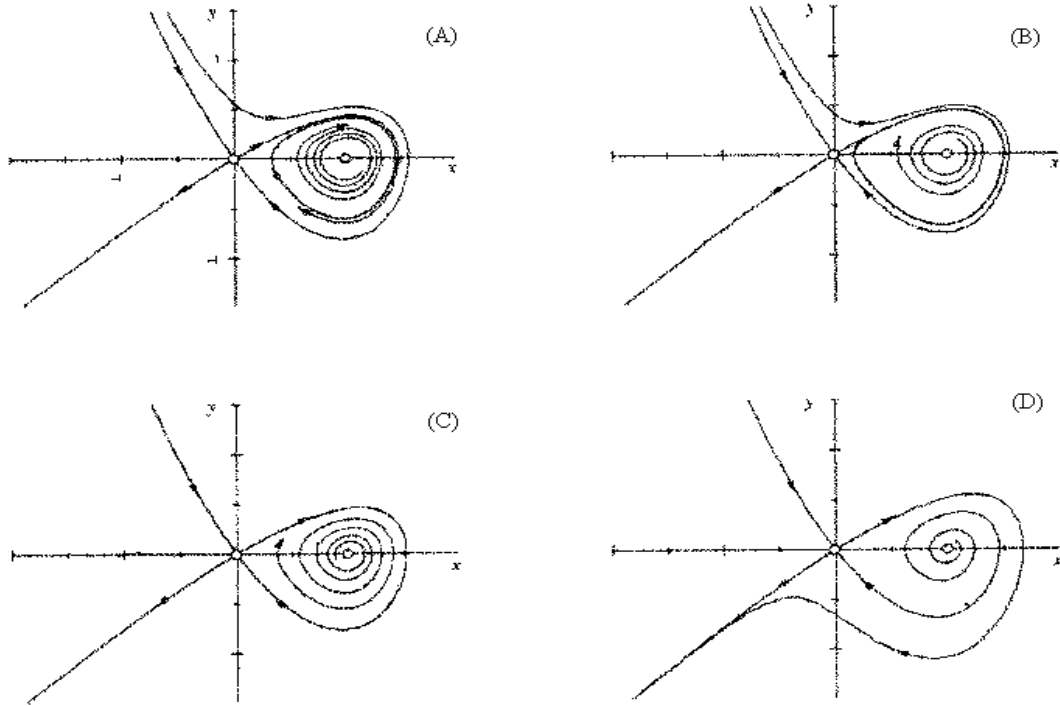


Figura 2.20 Planos de fase de una bifurcación Homoclínica.

En el caso de que el parámetro de bifurcación es $\lambda < \lambda_c$, se genera una órbita estable que pasa muy cerca de un punto de equilibrio inestable, sin llegar a él (Figura 2.23A). Al acercarse el parámetro de control al valor crítico λ_c , la órbita se agranda cerca del punto de equilibrio Saddle (Figura 2.23B). Sin embargo, si el parámetro toma el valor crítico ($\lambda = \lambda_c$), la órbita choca con el punto Saddle o inestable (Figura 2.23C), formándose una órbita homoclínica. Cuando el parámetro es $\lambda > \lambda_c$, el ciclo límite estable e inestable se destruyen, a lo cual se le llama “Crisis Limitada”.

2.9.3 Bifurcación de Toroide (TRB)

La bifurcación de Toroide se puede entenderse como una Bifurcación Hopf de órbitas periódicas, donde la oscilación de las variables del sistema tiene una doble frecuencia; por ejemplo, una primera órbita periódica es rodeada en forma de espiral por una segunda órbita periodica, como se observa en la Figura 2.21.

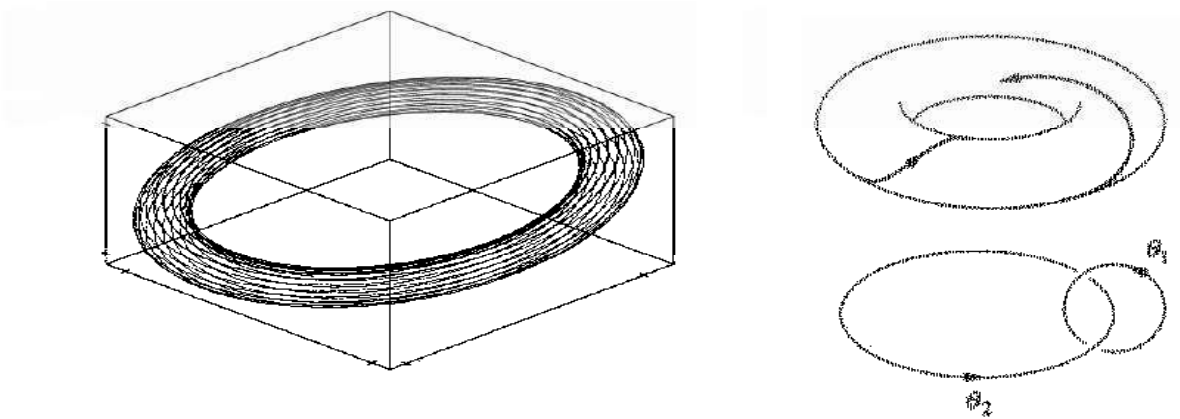


Figura 2.21 Bifurcación de Toroide.

Estas bifurcaciones puede ser de dos tipos: supercrítica (de forma que se atraen se ambos ciclos) y subcrítica (de forma que se repelen ambos ciclos).

2.9.4 Bifurcación de Doble Periodo (PDB) y Caos

Al contrario del tipo doblez donde existen solo dos ciclos limites, estas bifurcaciones empiezan por tener un ciclo límite estable a un determinado valor inicial del parámetro de bifurcación $\lambda = X$, dentro de un plano de fases. En el instante en que se presenta una variación en el parámetro $\lambda \neq X$, las órbitas asociadas a las variables del sistema comienzan a dividirse en un par de órbitas, formándose una primera bifurcación de doble periodo. Pero si el parámetro λ sigue cambiando, en el sistema pueden ocurrir otras bifurcaciones de doble periodo; es decir, que de las dos anteriores órbitas, cada una de ellas se volverá a dividir en dos órbitas, originándose cuadro órbitas. Al seguir variándose el parámetro de bifurcación se pueden seguir formando más pares de órbitas en cascada dentro del sistema; conduciendo al sistema a un estado caótico. La Figura 2.22 representa el ejemplo clásico de este tipo de bifurcaciones.

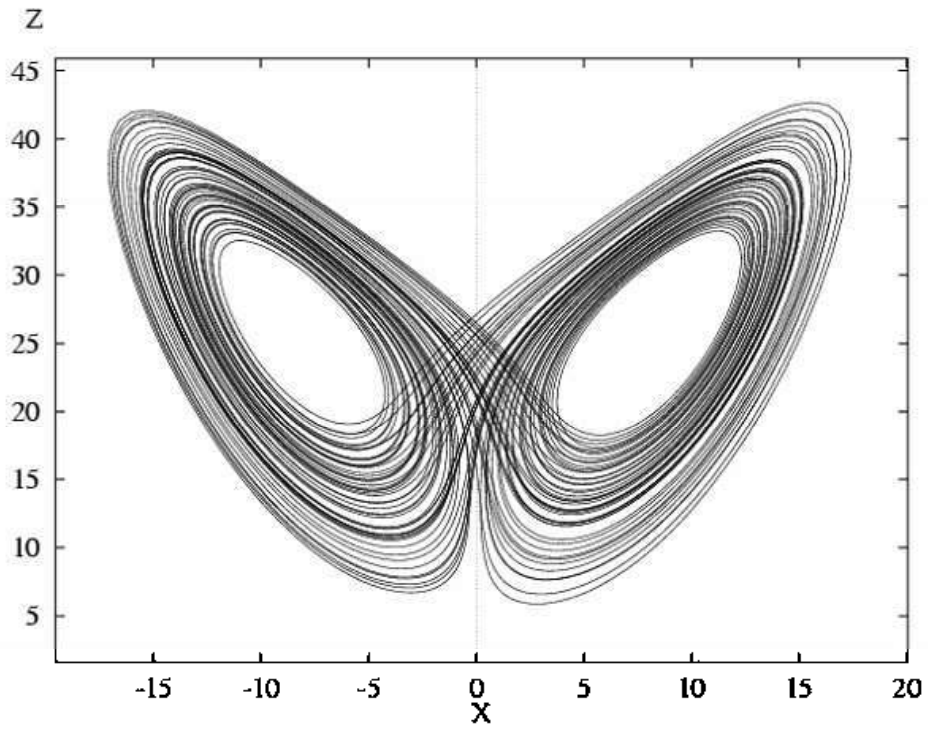


Figura 2.22 Atractor extraño del sistema de Lorenz.

Capítulo 3

Herramientas para la Inestabilidad de Voltaje en Sistemas Eléctricos de Potencia.

“Cuando las leyes de la matemática se refieren a la realidad, no son ciertas; cuando son ciertas, no se refieren a la realidad”.

Albert Einstein

Capítulo 3

Herramientas para la Inestabilidad de Voltaje en Sistemas Eléctricos de Potencia.

3.1 Introducción

En este capítulo se describe la manera en que se realiza el análisis de inestabilidad de voltaje en sistemas eléctricos de potencia y su relación con la teoría de bifurcación presentada en el capítulo 2. El fenómeno de inestabilidad de voltaje generalmente aparece cuando el sistema eléctrico esta operando cerca de sus límites de estabilidad, lo cual implica que el sistema opera dentro de una región no lineal. De tal manera, es necesario saber cuales son estos límites de estabilidad con la finalidad de entender conceptualmente como puede acontecer una inestabilidad de voltaje. Aunado a lo anterior, la precisión que se obtiene al realizar este tipo de estudio depende de la manera en que se modelan los componentes del sistema eléctrico. Debido a que el análisis se realiza ante pequeñas variaciones en algún parámetro del sistema, si los elementos que lo integran no son modelados de la manera correcta no será posible determinar de manera precisa las bifurcaciones que dan lugar al fenómeno de inestabilidad de voltaje. En este capítulo también se presenta una descripción de los modelos de los componentes eléctricos que integran al sistema de potencia, y que serán utilizados para el análisis de este fenómeno eléctrico.

3.2 Restricciones físicas de la línea.

Cualquier conductor eléctrico tiene pequeñas variaciones en su resistividad eléctrica debido al flujo de corriente, que aumenta su temperatura. Es así que la principal limitación física de la línea es la impuesta por sus límites térmicos. En el contexto de sistemas de transmisión, temperaturas excesivas ocasionan deformaciones de los conductores e incrementos importantes de pérdidas de energía por efecto Joule. Las deformaciones producen elongación del conductor, el cual puede no recuperar su longitud original cuando se enfría. Esto produce

un cambio en las propiedades físicas de la línea cuantificadas por su resistencia, inductancia y capacitancia, modificándose todas las características topológicas del sistema.

3.3 Límites impuestos por la red.

Estos límites son principalmente impuestos por la máxima capacidad de energía que puede ser transmitida a través del sistema de transmisión y están asociados a la estabilidad de magnitud de voltaje y estabilidad angular. Este trabajo solo se enfoca a la estabilidad de voltaje y se describe en la próxima sección.

3.4 Estabilidad del voltaje en condiciones de Estado Estable.

La estabilidad de voltaje se define como la habilidad del sistema eléctrico de potencia para mantener en todos sus nodos las magnitudes de voltaje de estado estacionario dentro de rangos operativos, después de que el sistema sufre un disturbio. Esto se logra manteniendo un equilibrio entre la potencia generada y demandada por el sistema. La inestabilidad de voltaje que puede resultar al no mantener este equilibrio se manifiesta por una caída o aumento progresivo de la magnitud de voltaje en ciertos nodos del sistema. Para propósitos de este trabajo, el disturbio producido en el sistema se considera de pequeña perturbación debido a pequeñas variaciones en la demanda eléctrica del sistema.

El estudio conceptual del problema de inestabilidad de voltaje puede realizarse al analizar el sistema eléctrico mostrado en la Figura 3.1. Este sistema consiste de un generador conectado en el nodo 1, y que satisface la demanda de energía eléctrica conectada en el nodo 2, a través de la línea de transmisión ideal que conecta ambos nodos. Para propósitos de análisis se considera que el generador tiene una gran capacidad de generación, tal que la magnitud y ángulo de fase de voltaje en sus terminales se mantiene constante, independientemente de la cantidad de energía demandada.

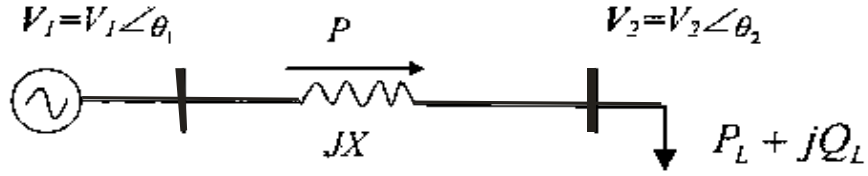


Figura 3.1 Sistema de dos nodos.

En base a las leyes de Kirchhoff, la potencia que se está suministrando a la carga es,

$$P_{21} = -\frac{|V_2||V_1|}{|X|} \sin \theta_{12} \quad (3.1)$$

$$Q_{21} = \frac{|V_2|^2}{|X|} - \frac{|V_2||V_1|}{|X|} \cos \theta_{12} \quad (3.2)$$

A partir de estas expresiones se puede considerar el balance de potencia en el nodo 2, tal que la potencia suministrada debe ser igual a la potencia demandada; es decir,

$$-P_L - P_{21} = -P_L + \frac{|V_2||V_1|}{|X|} \sin \theta_{12} = 0 \quad (3.3)$$

$$-Q_L - Q_{21} = -Q_L - \frac{|V_2|^2}{|X|} + \frac{|V_2||V_1|}{|X|} \cos \theta_{12} = 0 \quad (3.4)$$

Despejando las funciones trigonométricas de (3.3) y (3.4),

$$\sin \theta_{12} = \frac{P_L |X|}{|V_2||V_1|} \quad (3.5)$$

$$\cos \theta_{12} = \frac{[Q_L |X| + |V_2|^2]}{|V_2||V_1|} \quad (3.6)$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y aplicando la identidad trigonométrica $\sin^2 \theta_{12} + \cos^2 \theta_{12} = 1$, se obtiene una expresión matemática en función solo de la magnitud de voltaje dada por,

$$\left[\frac{P_L |X|}{|V_2| |V_1|} \right]^2 + \left[\frac{Q_L |X| + |V_2|^2}{|V_2| |V_1|} \right]^2 = 1 \quad (3.7)$$

De la ecuación anterior es posible deducir una expresión matemática que relacione la magnitud de voltaje en el nodo 2 con los parámetros conocidos del sistema eléctrico.

Resolviendo la ecuación (3.7) para el término $|V_2|^2$,

$$|V_2|^4 + |V_2|^2 (2Q_L |X| - |V_1|^2) + Q_L^2 |X|^2 + P_L^2 |X|^2 = 0 \quad (3.8)$$

$$|V_2|^2 = \frac{(|V_1|^2 - 2Q_L |X|) \pm \sqrt{(2Q_L |X| - |V_1|^2)^2 - 4|X|^2 (Q_L^2 + P_L^2)}}{2} \quad (3.9)$$

Finalmente, se despejar el valor cuadrático de la (3.9), se obtiene una raíz cuadrada para toda la expresión, dado que es evidente que la magnitud de voltaje es positiva.

$$|V_2| = \sqrt{\frac{(|V_1|^2 - 2Q_L |X|) \pm \sqrt{(2Q_L |X| - |V_1|^2)^2 - 4|X|^2 (Q_L^2 + P_L^2)}}{2}} \quad (3.10)$$

De acuerdo a la ecuación (3.10) es posible simular el modo de operación para el sistema de la Figura 3.3. En este caso se cuantifica la variación de la magnitud de voltaje en función del incremento de carga, considerando la solución positiva del subradical, ya que el voltaje a considerar en la carga es positivo. De esta ecuación se observa que para cada valor de incremento de potencia activa y reactiva existen dos soluciones para el valor de magnitud de voltaje (por el signo \pm dentro del radical). Las soluciones obtenidas considerando la variación de carga con factor de potencia unitario, $V_1=1$ y $X=0.1$ se muestran en la Figura 3.1 como una curva *PV*. Cuando dicha curva se obtiene graficando una variable de estado en el eje vertical y el parámetro que produce la bifurcación graficado en el eje horizontal, el diagrama es llamado diagrama de bifurcación [3]. Así mismo, el parámetro variante que produce la bifurcación es llamado parámetro de continuación. Para este ejemplo este parámetro es la potencia activa de carga P_L .

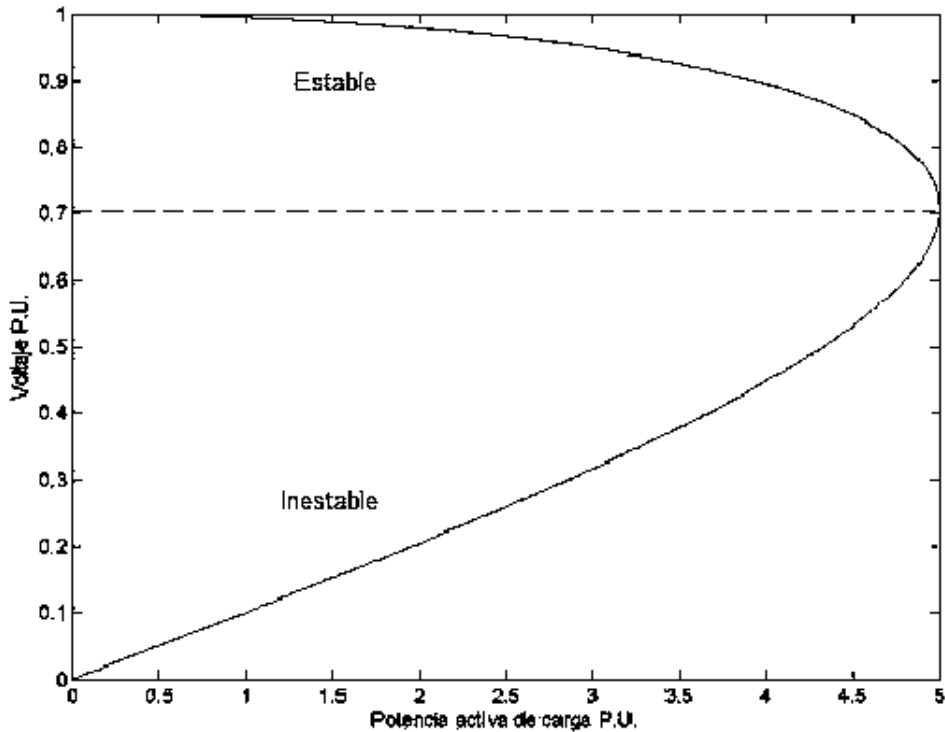


Figura 3.2 Curva PV .

El caso normal de operación corresponde a la parte superior de la curva PV , que no es más que la condición de estado factible de operación del sistema ya que sus magnitudes de voltaje pueden estar dentro de rango de operación (solución considerando el signo positivo del segundo miembro del numerador dentro del radical). Esta solución se denomina solución estable. Partiendo de una solución estable, es claro de la curva PV que conforme se incrementa demanda en la carga, se degrada la magnitud de voltaje. Disminuyendo progresivamente la seguridad del sistema al punto de límite de estabilidad de voltaje o punto crítico. Desde el punto de vista de operación del sistema eléctrico, el punto crítico corresponde al máximo nivel de cargabilidad del sistema eléctrico. Cuando se llega a este límite, la acción de control efectuada por los operadores del sistema eléctrico es tirar carga para incrementar la magnitud de voltaje. Sin embargo, debido a la no linealidad del sistema y ecuaciones que lo representan, al disminuir la carga el valor de magnitud de voltaje sigue decreciendo, siendo los nuevos puntos de operación del sistema los correspondientes a la parte inferior de la curva PV .

El caso indeseable de operación del sistema eléctrico corresponde a la parte inferior de la trayectoria PV (Solución considerando el signo negativo del segundo miembro del numerador dentro del radical). En este caso los valores de magnitud de voltaje no son los adecuados para la operación del sistema eléctrico, ya que los dispositivos conectados al sistema operan con voltajes alrededor del 1 pu. Aunado a lo anterior, ya que la magnitud de voltaje es muy pequeña, se tienen grandes valores de magnitudes de corriente para satisfacer la demanda de energía eléctrica del sistema, $P=VI$. Esto en sistemas reales ocasiona grandes pérdidas por efecto Joule y la posible violación del límite térmico por el sobrecalentamiento de los conductores. Esta solución se denomina solución inestable.

De la gráfica PV se observa que conforme aumenta el nivel de carga, ambas soluciones convergen hacia un mismo punto de operación, llamado punto crítico. Al analizar este comportamiento por medio de la teoría de bifurcaciones, el punto crítico corresponde al punto donde convergen las soluciones estables e inestables que se asocia a una bifurcación punto de silla o saddle node SNB. Asimismo, más allá de ese punto no existen soluciones, lo cual se observa también en la Figura 3.2. Lo anterior comprueba la posibilidad de aplicar la teoría de bifurcaciones al análisis del fenómeno de inestabilidad de voltaje.

3.5 Análisis de estabilidad de voltaje desde el punto de vista estático.

La dinámica de un sistema de eléctrico potencia puede ser representada matemáticamente por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, no lineales, de primer orden de la forma,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) \quad (3.11)$$

donde \mathbf{x} representa las variables de estado tales como magnitudes y ángulos de voltajes nodales, y λ representa parámetros algebraicos tales como demandas de energía, estados de equipos, etc.

En caso de cualquier fluctuación del parámetro λ , el sistema evolucionará hacia otro punto de operación. Esta evolución de la magnitud de voltaje en los diversos nodos que integran el sistema eléctrico puede ser cuantificada por medio de la integración numérica de la ecuación

(3.11), tomando como condición inicial el punto de equilibrio del sistema previo a la ocurrencia del disturbio. Dependiendo de la magnitud del disturbio que produce la variación del parámetro λ , el fenómeno de estabilidad de voltaje se puede clasificar en dos categorías [8]: estabilidad de voltaje de disturbio grande y estabilidad de voltaje de disturbio pequeño. Los disturbios grandes se producen entre otras cosas por fallas en el sistema, salidas repentinas de carga y generación y fallas en las líneas. Disturbios pequeños pueden ser producidos por cambios graduales de carga. Dependiendo del tipo de disturbio es la metodología de análisis empleada, y la forma en que se modelan los diversos componentes eléctricos que integran al sistema de transmisión.

Si la perturbación en λ es pequeña, por ejemplo si λ representa una fluctuación regular en la demanda de energía, los puntos de equilibrio de pre y pos disturbio están cercanos entre sí. Debido a esto, se puede usar análisis de pequeña señal con el fin de determinar la estabilidad de voltaje, evitando la integración numérica del sistema de ecuaciones (3.11). En este tipo de estudio la ecuación (3.11) es linealizada alrededor de un punto de equilibrio \mathbf{x}_0 ,

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_0, \lambda) \Delta \mathbf{x} \quad (3.12)$$

La condición de estabilidad es determinada cualitativamente calculando los eigenvalores del sistema linealizado dado por la ecuación (3.12). El sistema evoluciona a un nuevo punto de equilibrio en estado estacionario si todos los eigenvalores de la matriz \mathbf{A} se encuentran en la mitad izquierda del plano complejo. En caso contrario el sistema es inestable.

Cuando λ cambia de un valor $\lambda_{(1)}$ a $\lambda_{(2)}$ en un periodo de tiempo prolongado, los puntos de equilibrio no presentan variaciones abruptas. Basándose en este argumento, el comportamiento dinámico del sistema puede ser obtenido capturando condiciones de operación instantáneas del sistema en varios intervalos de tiempo. Las derivadas de las variables de estado de la ecuación (3.12) se consideran cero en cada uno de estos intervalos y el sistema completo es representado por un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales de la forma,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) = 0 \quad (3.13)$$

Debido al hecho de que algunos componentes del sistema pueden presentar cierto grado de no linealidad bajo determinadas condiciones de operación, para una condición operativa $\lambda = \lambda_0$, diversos puntos de equilibrio $\mathbf{x}_0(1), \mathbf{x}_0(2), \dots, \mathbf{x}_0(n_0)$, satisfacen la ecuación (3.13). Conforme λ continúa cambiando, el sistema puede no llegar a un nuevo estado estacionario, haciéndose inestable. Esta pérdida de estabilidad puede acontecer en una condición operativa λ_{ls} en la cual las múltiples soluciones de la ecuación (3.13) convergen a un mismo punto de equilibrio, es decir, $\mathbf{x}_{ls}(1) = \mathbf{x}_{ls}(2) = \dots = \mathbf{x}_{ls}(n_{ls})$. El punto en el cual el equilibrio del sistema desaparece es el punto crítico o de bifurcación punto de silla, previamente analizado en la sección 3.4 [3].

En general se utiliza el método de Newton-Raphson para encontrar, de manera iterativa, el punto de equilibrio que satisface al conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales (3.13). Este método obtiene una solución aproximada al problema no lineal descrito por (3.13) al resolver para $\Delta \mathbf{x}$ en el problema lineal $\mathbf{J}^i \Delta \mathbf{x}^i = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^i, \lambda)$, donde \mathbf{J} es conocida como matriz Jacobiana. El método comienza su proceso iterativo con un conjunto de condiciones iniciales \mathbf{x}^0 , y mejora la solución en cada iteración i , i.e. $\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \Delta \mathbf{x}^i$, esta que se satisface un criterio de convergencia preestablecido.

Con la finalidad de obtener el diagrama de bifurcación, el parámetro λ se incrementa en pasos finitos a lo largo de una trayectoria especificada [8]. En cada paso, se determina el nuevo punto de equilibrio para (3.13), considerando como condición inicial la solución previamente obtenida. En el intervalo en el que la matriz Jacobiana se mantiene no singular, existirá un punto de equilibrio. El procedimiento se repite hasta el punto en el que el método de Newton-Raphson diverge. Esta divergencia indica una singularidad en la matriz Jacobiana con lo que las ecuaciones (3.13) no pueden ser resueltas, y por lo tanto se ha encontrado el punto crítico o de bifurcación punto de silla.

3.6 Modelado de los Componentes para análisis de estabilidad de voltaje

El análisis de la estabilidad de voltaje en un sistema eléctrico de potencia requiere de modelar adecuadamente los componentes eléctricos que conforman al sistema. El problema de estabilidad de voltaje abordado en este trabajo se considera de dinámica lenta debido a las pequeñas perturbaciones cuasi-estáticas en la demanda de energía. Lo anterior requiere de un modelado detallado de generadores síncronos, sistemas de excitación, cargas y dispositivos de control. Por el contrario, como la dinámica de la red de transmisión es mucho más rápida que la de estos componentes, se considera que las variables de estado asociadas a la red varían de manera instantánea con respecto a la variación de las variables de estado de los dispositivos eléctricos mencionados. A continuación se describen los modelos matemáticos de los componentes eléctricos mencionados.

3.7 Generador síncrono.

La generación de potencia reactiva es un parámetro íntimamente ligado a la estabilidad de voltaje dentro de los SEP, siendo el generador síncrono la principal fuente de este tipo de energía. Asimismo, debido a la dinámica lenta considerada para el fenómeno de estabilidad, es necesario modelar el generador síncrono en base a sus ecuaciones dinámicas dadas por las ecuaciones de oscilación. Estas ecuaciones son derivadas de manera detallada a continuación.

El generador puede ser representado como una gran masa rotatoria sobre la que actúan dos fuerzas de rotación opuestas, tal como se muestra en la Figura 3.3. Una fuerza de rotación está asociada al par mecánico T_m que tiende a acelerar ó aumentar la velocidad de rotación del rotor ω_{Rm} , mientras que la segunda fuerza de rotación es el par eléctrico T_e que tiende a frenar o disminuir ω_{Rm} .

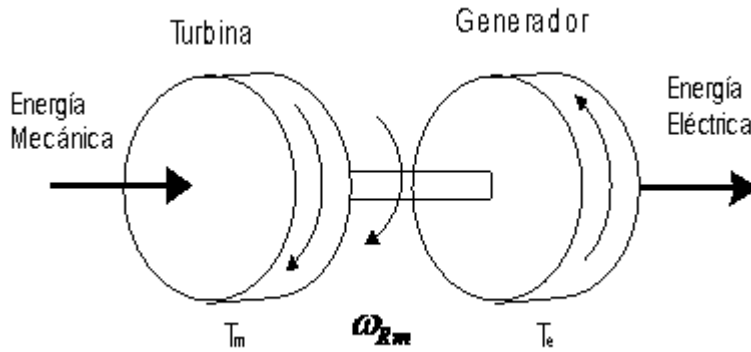


Figura 3.3 Pares mecánicos y eléctricos en un generador

El par mecánico T_m es regulado por la acción de un sistema gobernador de la turbina, de forma que la velocidad del rotor ω_{Rm} puede ser controlada. Para propósitos del análisis realizado en este trabajo se considera que esta potencia mecánica se mantiene constante ante cualquier pequeño disturbio ocurrido en el sistema.

El par eléctrico T_e es originado por la interacción de los campos magnéticos producidos por las corrientes circulantes en los devanados del rotor y el estator del generador síncrono. La corriente directa circulando a través del devanado del rotor crea una fuerza magnetomotriz. Debido a la forma en que se distribuyen el devanado del rotor, esta fuerza magnetomotriz tiene una distribución sinusoidal en el entrehierro de la máquina, y como gira a la misma velocidad de rotación del rotor, produce un voltaje inducido sinusoidal en los devanados estáticos del estator de la máquina. Este voltaje inducido produce corrientes circulantes en las tres fases del devanado del estator, las cuales a su vez producen un campo magnético de magnitud constante y velocidad de giro igual a la velocidad síncrona dada por $\omega_{s,0} = 2\pi f$, siendo f la frecuencia de operación del sistema eléctrico. En el caso estacionario, la velocidad de giro del rotor y el campo magnético del estator es igual. La interacción de ambos campos magnéticos, rotor y estator, produce el par eléctrico T_e .

La relación entre la velocidad angular mecánica del rotor y la velocidad angular de las variables eléctricas del generador está dada por el número de polos de la máquina; es decir,

$$\omega_e = \frac{P}{2} \omega_m \quad (3.14)$$

Donde ω_e es la velocidad angular eléctrica, ω_m la velocidad angular mecánica ó del rotor ω_{Rm} y P es el número de polos.

3.7.1 Ejes de referencia.

El modelo matemático de un generador síncrono varía desde un modelo clásico hasta un modelo mas detallado que considera la dinámica en devanados amortiguadores. En está tesis se utiliza el modelo clásico de un eje, despreciando los efectos transitorios del eje de cuadratura.

En el desarrollo del modelo matemático del generador es muy importante definir los ejes de referencia debido a la característica rotatoria del rotor y la característica estática de los devanados del estator. Ambos devanados se muestran en la figura 3.5. Los devanados a , b y c están situados en el estator, donde a través de los conductores a , b y c la corriente esta saliendo, mientras que en los conductores a' , b' y c' la corriente está entrando. Los devanados del rotor se muestran también en esta figura sobre el rotor mismo. Los ejes magnéticos están definidos por la manera en que circulan las corrientes en los diferentes devanados y la utilización de la regla de la mano derecha. En el caso del rotor se definen dos ejes denominados eje directo y eje en cuadratura. El eje directo esta a lo largo del rotor y el eje en cuadratura es perpendicular a aquel. Con la finalidad de medir de manera instantánea el desplazamiento del rotor se considera como referencia estática el eje magnético de la fase a del estator. Esto se ilustra en la Figura 3.6. El movimiento angular del rotor, caracterizado por el ángulo mecánico θ_m , es medido con respecto al eje de referencia estacionario del estator. Consecuentemente, θ_m se incrementa continuamente con el tiempo y a la velocidad de sincronismo, definiéndose como:

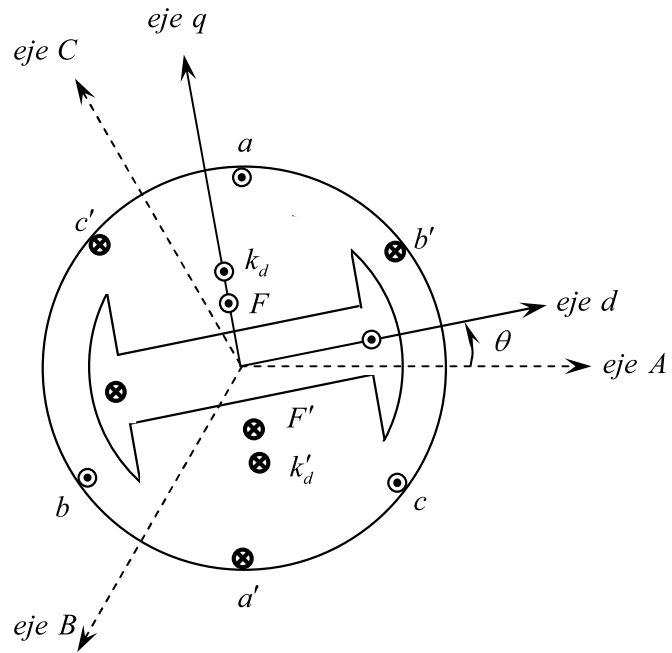


Figura 3.4 Diagrama esquemático de los devanados de un generador.

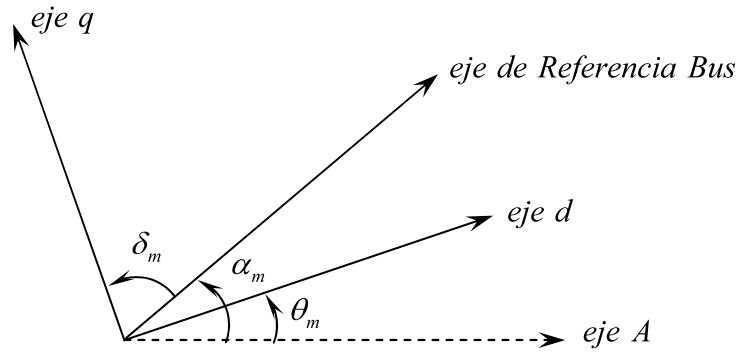


Figura 3.5 Ángulos y referencias para la máquina síncrona

$$\theta_m = \omega_{s0}t + \theta_0 \quad (3.15)$$

donde θ_m es el ángulo instantáneo entre los ejes magnéticos d y A , mientras θ_0 es el valor inicial de θ_m .

De igual forma es útil definir un eje de referencia que gira a la velocidad síncrona ω_{s0} . El movimiento angular de este eje con respecto al eje estacionario es definido por la ecuación:

$$\alpha_m = \omega_{s0}t + \alpha_0 \quad (3.16)$$

donde α_m es el ángulo instantáneo del eje de referencia con respecto al eje magnético estacionario A y α_0 es la condición inicial de α_m .

Un aspecto importante de analizar es el proceso transitorio, ya que conforme transcurre el periodo de tiempo asociado a este proceso, el ángulo del rotor θ_m no gira de manera uniforme con respecto al eje estacionario. Por lo anterior, es conveniente expresar la posición angular del rotor θ_m con respecto al eje de referencia girando a velocidad síncrona con la finalidad de saber si durante el proceso transitorio el rotor se acelera o desacelera con respecto a ω_{s0} . En base a la Figura 3.6 es posible obtener la relación entre ambas posiciones, dada por,

$$\theta_m + \frac{\pi}{2} = \delta_m + \alpha_m \quad (3.17)$$

donde δ_m corresponde al desplazamiento angular del eje de cuadratura del rotor, en radianes mecánicos, con respecto al eje de referencia girando a la velocidad síncrona. Substituyendo las ecuaciones (3.15) y (3.16) en (3.17), se obtiene:

$$\theta_0 = \delta_m + \alpha_0 - \frac{\pi}{2} \quad (3.18)$$

De tal forma que ahora (3.15) se convierte en:

$$\theta_m = \omega_{s0}t + \delta_m + \alpha_0 - \frac{\pi}{2} \quad (3.19)$$

La derivada de (3.19) con respecto al tiempo es,

$$\frac{d\theta_m}{dt} = \omega_{s0} + \frac{d\delta_m}{dt} \quad (3.20)$$

Donde $\frac{d\theta_m}{dt}$ es la velocidad angular del rotor con respecto al eje estacionario A y $\frac{d\delta_m}{dt}$ es la velocidad angular del rotor con respecto al eje de referencia girando a velocidad sincrónica. Es claro que $\frac{d\delta_m}{dt}$ será diferente de cero solo cuando ocurra algún evento transitorio; es decir, este valor representa la variación de la velocidad del rotor con respecto a la velocidad sincrónica. Por lo tanto, en estado estable $\omega_{Rm} = \omega_{s0}$ (Velocidad_{rotor} = Velocidad_{sincrónica}). La aceleración del rotor se obtiene al derivar la ecuación (3.20) con respecto al tiempo,

$$\frac{d^2\theta_m}{dt^2} = \frac{d^2\delta_m}{dt^2} \quad (3.21)$$

3.7.2 Ecuación de oscilación.

Un sistema eléctrico se encuentra operando en estado estacionario cuando todos los generadores conectados al sistema se encuentran girando a la velocidad sincrónica. Al ocurrir un disturbio en el sistema, se presenta un desbalance energético entre la cantidad de energía producida por los generadores y la demandada por las cargas eléctricas. Este desbalance ocasiona que la velocidad de los rotores de los generadores sea diferente a la velocidad sincrónica, tal que $\frac{d\delta_m}{dt} \neq 0$, produciéndose una modificación en la diferencia angular de los campos magnéticos del estator y rotor. Esta diferencia angular origina variaciones entre los pares mecánico T_m y eléctrico T_e , produciéndose oscilaciones de potencia eléctrica en el sistema. La representación matemática de esta dinámica del rotor, referido a la velocidad sincrónica, se le llama ecuación de oscilación.

De acuerdo a la segunda ley de Newton se establece que la aceleración que tiene un cuerpo es proporcional a la fuerza neta externa que se le aplica, esto es $a = \frac{F}{m} = \frac{T}{J}$. En el contexto del

generador síncrono, el par de aceleración del rotor es el producto escalar de su momento de inercia y su aceleración angular; es decir,

$$T_a = J \frac{d^2\theta_m}{dt^2} = J \frac{d^2\delta_m}{dt^2} \quad (3.22)$$

donde J es el momento de inercia de la masa del rotor en Kg-m².

Otra manera de expresar el par de aceleración es por la diferencia existente entre el par mecánico y el par eléctrico, $(T_m - T_e)$. En la realidad también existe un par de amortiguamiento T_d en la máquina ocasionado por el acoplamiento entre el rotor del generador y la turbina. Lo anterior se expresa matemáticamente como,

$$T_a = T_m - T_e - T_d \quad (3.23)$$

donde los pares están actuando sobre el rotor, en N-m.

Ya que la potencia es igual al producto de la velocidad angular del rotor ω_{Rm} y el par de aceleración T_a , la ecuaciones (3.22) y (3.23) se pueden expresarse en función de potencias,

$$J\omega_{Rm} \frac{d^2\theta_m}{dt^2} = J\omega_{Rm} \frac{d^2\delta_m}{dt^2} = P_a = P_m - P_{ge} - P_d \quad (3.24)$$

donde P_m es la potencia mecánica de entrada, P_{ge} es la potencia eléctrica de salida, P_d es la potencia de amortiguamiento y P_a es la potencia de aceleración, todas expresadas en Watts. El término $J\omega_{Rm}$ es el momento angular del rotor en Joules-segundos por radianes mecánicos. Pero cuando el rotor está girando a la velocidad síncrona ω_{s0} , el momento angular se define como la constante de inercia M .

En base a lo anterior M no siempre es constante, debido a que depende de la velocidad angular ω_{Rm} , la cual no es igual a la velocidad síncrona (ω_{s0}) bajo las condiciones transitorias. Debido a que en el análisis de estabilidad de voltaje ω_{Rm} no es muy diferente de ω_{s0} , la constante de inercia puede ser considerada constante. Entonces, la ecuación (3.24) es,

$$M \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} = M \frac{d^2 \delta_m}{dt^2} = P_a = P_m - P_{ge} - P_d \quad (3.25)$$

En estudios dinámicos es factible encontrar como dato a la constante de inercia H . Esta variable relaciona la energía cinética almacenada en el generador con su carga nominal de potencia. Esta relación se expresa matemáticamente como,

$$H = \frac{W_k}{S_{B(3\phi)}} = \frac{\frac{1}{2} J \omega_{s0}^2}{S_{B(3\phi)}} = \frac{\frac{1}{2} M \omega_{s0}}{S_{B(3\phi)}} S \quad [\text{en Segundos}]. \quad (3.26)$$

De tal forma que si despejamos la constante de inercia M de (3.25) y sustituimos en (3.26); se obtiene,

$$\frac{2H}{\omega_{s0}} S_{B(3\phi)} \frac{d^2 \delta_m}{dt^2} = P_a = P_m - P_{ge} - P_d \quad [\text{en MW}] \quad (3.27)$$

Finalmente, dividiendo (3.27) entre $S_{B(3\phi)}$:

$$\frac{2H}{\omega_{s0}} \frac{d^2 \delta_m}{dt^2} = \frac{P_a}{S_{B(3\phi)}} = \frac{P_m - P_{ge} - P_d}{S_{B(3\phi)}} \quad [pu] \quad (3.28)$$

En base a esta ultima ecuación, se observa lo siguiente:

- ❖ Que δ_m está en radianes mecánicos [rad] en el numerador, mientras que ω_{s0} esta en radianes mecánicos por segundo [rad/seg] en el denominador. Es decir que δ_m y ω_{s0} tienen unidades consistentes, y se pueden expresar los ángulos mecánicos o eléctricos.

- ❖ La variable H tiene unidades en segundos [seg], (3.26), mientras que W_k tiene unidades en megajoules por segundo [MJ*seg], y se normaliza en base a los MVA nominales del generador síncrono. Asimismo, el termino t esta en segundos [seg].
- ❖ Los términos de las potencias están normalizados sobre la misma base de H [seg].

De acuerdo a las tres observaciones anteriores, la ecuación (3.28) puede expresarse en por unidad como,

$$\frac{2H}{\omega_{s0}} \frac{d^2 \delta}{dt^2} = P_a = P_m - P_{ge} - P_d \quad [pu] \quad (3.29)$$

donde δ es el ángulo del rotor medido en radianes eléctricos [rad] con respecto al eje de referencia girando a velocidad síncrona y ω_{s0} es la velocidad síncrona en radianes eléctricos por segundo [rad/seg].

La ecuación (3.29) es conocida como ecuación de oscilación de la máquina síncrona, y determina rotación dinámica de la misma. La ecuación diferencial de segundo orden se puede reescribir por las siguientes dos ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\begin{aligned} \frac{2H}{\omega_{s0}} \frac{d\omega}{dt} &= P_a = P_m - P_{ge} - P_d \\ \frac{d\delta}{dt} &= \omega_R - \omega_{s0} = \omega_{R|s0} = \omega \end{aligned} \quad (3.30)$$

Donde ω es la velocidad angular relativa del rotor con respecto a la velocidad síncrona.

Para propósitos de análisis, la potencia mecánica P_m es constante. Las potencias eléctrica y de amortiguamiento son obtenidas de la siguiente manera.

La potencia de amortiguamiento P_d esta compuesta de dos partes: del amortiguamiento mecánico y el asíncrono. El primero es proporcional a la velocidad del rotor, y el segundo es

proporcional a la diferencia entre la velocidad del rotor y la velocidad síncrona. En base a estas observaciones, la potencia de amortiguamiento está definida:

$$P_d = D_m \left(\omega_0 + \frac{d\delta}{dt} \right) + D_a \frac{d\delta}{dt} \quad (3.31)$$

Donde el parámetro $D_m \omega_0$ se relaciona con las pérdidas por fricción. Tradicionalmente este término se de la potencia mecánica de entrada P_m con el propósito de obtener una potencia mecánica total neta de entrada a velocidad síncrona. Por lo tanto, la potencia de amortiguamiento se puede expresar solamente en función de la diferencia de la velocidad del rotor con respecto a la de sincronismo,

$$P_d = D \frac{d\delta}{dt} \quad (3.32)$$

Donde la expresión $D = D_m + D_a$ es el coeficiente de amortiguamiento con unidades en [seg/rad]. Estos dos términos corresponden al par de fricción y al par asíncrono, respectivamente.

La potencia activa P_{ge} de salida en terminales del generador se calcula asumiendo que se tienen n nodos generadores y m nodos de carga donde no se tienen unidades generadoras. Entonces la ecuación de potencia eléctrica en terminales del generador i es:

$$P_{ge}^i = V_i^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n V_i V_j \left(G_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \text{sen}(\delta_i - \delta_j) \right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m V_i V_k \left(G_{ik} \text{sen}(\delta_i - \theta_k) - B_{ik} \cos(\delta_i - \theta_k) \right) + P_L^i \quad (3.33)$$

Donde δ el ángulo de voltaje en terminales del generador, y que es igual al ángulo del rotor dado por la ecuación de oscilación, si no se indica lo contrario. La variable θ simboliza al ángulo de voltaje en los nodos de carga. El termino V representa a el valor de voltaje nodal, independientemente del tipo de nodo. La admitancia nodal del elemento de transmisión que

enlaza a los nodos del sistema i y j es dada por $\vec{Y}_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$. La admitancia total vista desde terminales del generador es G_{ii}^g . Por último, el término P_L^i representa la carga conectada en el i -ésimo nodo generador.

Sustituyendo las ecuaciones (3.32) y (3.33) en la ecuación (3.30), se obtienen las siguientes ecuaciones de oscilación para el generador i -ésimo,

$$\frac{2H_i}{\omega_{s0}} \frac{d\omega_i}{dt} = P_a^i = P_m^i - P_{ge}^i - P_d^i \quad (3.34)$$

$$\frac{d\delta_i}{dt} = \omega_R^i - \omega_{s0} = \omega_{R|s0}^i = \omega^i$$

3.8 Red de transmisión.

La red de transmisión es uno de los elementos más complejos en su análisis dinámico debido a que las líneas de transmisión son elementos de parámetros distribuidos. Sin embargo, debido a que la dinámica asociada al fenómeno de estabilidad de voltaje es considerada lenta; menor a 5 Hz, se puede asumir que la dinámica de la red de transmisión es mucho más rápida que la de generadores y cargas. Esto implica que las variables de estado asociadas a la red varían de manera instantánea con respecto a la variación de las variables de estado de los dispositivos eléctricos mencionados. Por lo tanto el modelo de la red de transmisión se realiza por medio de ecuaciones algebraicas no lineales considerando parámetros concentrados.

En base a lo anterior, el modelo de un elemento de transmisión está dado por las ecuaciones de flujos de potencia inyectada en sus terminales. Asumiendo que el elemento de transmisión está conectado entre los nodos de carga i y j , las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} P_{ij} &= V_i^2 G_{ii} + V_i V_j \left[G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) \right] \\ Q_{ij} &= -V_i^2 B_{ii} + V_i V_j \left[G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde G_{ij} es la parte real y B_{ij} es la parte imaginaria del elemento de la matriz de admitancia nodal Y_{ij} .

De forma similar, la ecuación que representa a un elemento que está conectado entre un nodo de generación i y un nodo carga j , sería:

$$\begin{aligned} P_{ij} &= V_i^2 G_{ii} + V_i V_j \left[G_{ij} \cos(\delta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\delta_i - \theta_j) \right] \\ Q_{ij} &= -V_i^2 B_{ii} + V_i V_j \left[G_{ij} \sin(\delta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\delta_i - \theta_j) \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

Puesto que en cada nodo del sistema se debe cumplir el balance de potencia, en el i -ésimo nodo del sistema se debe de satisfacer la ecuación,

$$\begin{aligned} P_{ge}^i &= P_L^i + P_e^i = P_L^i + \sum_{j \in \Omega_i} P_{ij} \\ Q_{ge}^i &= Q_L^i + Q_e^i = Q_L^i + \sum_{j \in \Omega_i} Q_{ij} \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde el conjunto de nodos del sistema conectados al nodo i a través de un elemento de transmisión está definido por $\Omega_i = \{j : |Y_{ij}| \neq 0, j \neq i\}$. La expresión para las potencias de demanda en el bus i dependerá del tipo de modelo de carga empleado. Por último, P_{ge}^i corresponde a la ecuación (3.33) en el caso de que el nodo i contenga uno o más generadores.

3.9 Cargas.

Las cargas se clasifican en cargas estáticas y cargas dinámicas, y su representación matemática se puede obtener de la relación existente entre la potencia (activa y/o reactiva) y el voltaje nodal (en magnitud y ángulo), o también por medio de la relación entre el voltaje nodal y la corriente que fluye hacia la carga [16].

El modelo de cargas estáticas se realiza por medio de ecuaciones algebraicas que caracterizan las potencias activas y reactivas demandadas en cualquier instante de tiempo en función del voltaje nodal y frecuencia de operación del sistema. Los modelos clásicos de cargas estáticas son los siguientes [8],

- ❖ *Impedancia Constante*: es una carga donde la potencia demandada cambia directamente con respecto al cuadrado de la magnitud de voltaje nodal, $P_L^i = \frac{V_i^2}{Z_i^{cte}}$.
- ❖ *Corriente Constante*: la potencia varía directamente con la magnitud del voltaje nodal, $P_L^i = V_i * I_{cte}$.
- ❖ *Potencia Constante*: en esta carga la potencia no varía con cambios en el valor voltaje $P_L^{i-cte} = V_i * I$.
- ❖ *Modelo Polinomial*: este tipo de carga está representado por la relación entre la potencia y el voltaje en una ecuación polinomial, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} P_L^i &= P_0 \left[a_1 \left(\frac{V_i}{V_0} \right)^2 + a_2 \left(\frac{V_i}{V_0} \right) + a_3 \right] \\ Q_L^i &= Q_0 \left[a_4 \left(\frac{V_i}{V_0} \right)^2 + a_5 \left(\frac{V_i}{V_0} \right) + a_6 \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde las variables V_0 , P_0 y Q_0 , son la magnitud de voltaje, potencia activa y potencia reactiva nominales, respectivamente.

Este tipo de carga es llamada modelo ZIP, ya que están integrados los tres primeros tipos de cargas: Impedancia constante (Z), Corriente constante (I) y Potencia constante (P).

- ❖ *Modelo Exponencial*: esta carga se modela por relación entre la potencia y el la magnitud de voltaje nodal mediante una ecuación exponencial, como se indica en las ecuaciones (3.39). El valor de los exponentes puede ser cualquiera, incluso valores negativos.

$$\begin{aligned}
P_L^i &= P_0 \left(\frac{V_i}{V_0} \right)^p \\
Q_L^i &= Q_0 \left(\frac{V_i}{V_0} \right)^q
\end{aligned}
\tag{3.39}$$

- ❖ *Modelo dependiente de la frecuencia:* este tipo de modelo está representado por el producto del factor dado en la ecuación (3.40) y un modelo polinomial o exponencial.

$$\left[1 + a_f (f^i - f_0) \right]
\tag{3.40}$$

En este caso f^i es el valor de la frecuencia del voltaje medido en el i -ésimo nodo, f_0 es la frecuencia nominal y a_f es un término de la sensibilidad de la frecuencia en este modelo. Este modelo no es muy utilizado ya que la frecuencia no es una variable de estado en el estudio estático convencional de redes eléctricas.

Las cargas dinámicas se representan por medio de ecuaciones diferenciales o de diferencias, que en el caso de los SEP pueden ser variados. Ya que pueden mostrarnos los cambios de las potencias activa y reactiva en un periodo de tiempo. Pero a su vez pueden estar en función del voltaje y de la frecuencia, durante ese mismo periodo; así como se puede llevar a cabo un análisis en un instante de tiempo pasado. Una forma genérica de obtener un modelo de las diferentes cargas es por medio de sustituir las ecuaciones de flujos de potencia en un modelo, obteniendo una ecuación de la forma (3.41).

$$\dot{z}(t) = h[z(t), y(t)]
\tag{3.41}$$

Que en estos casos, $z(t)$ es el vector de variables de estado del nodo de carga. Dos de estos modelos dinámicos se describen a continuación.

- ❖ *Modelo dinámico I:* En este modelo representa una carga dinámica dependiente del voltaje y la frecuencia de la siguiente manera[15],

$$\begin{aligned} L_d(pf) + D\dot{\theta} + a\dot{V} &= P_L \\ L_d\sqrt{1-pf^2} + b\dot{\theta} + k\dot{V} &= Q_L \end{aligned} \quad (3.42)$$

Donde L_d representa la demanda nominal (en MVA) en el nodo de carga, pf es el factor de potencia de la carga, θ y V son el ángulo de fase y magnitud de voltaje nodal; respectivamente. Por último, las variables D , a , b , k son coeficientes de carga.

- ❖ *Modelo Dinámico II:* Este modelo de carga es mixto, ya que incluye una combinación en paralelo de un modelo estático de carga basado en potencia constante y un modelo dinámico. En el caso de este trabajo se considera como carga dinámica a un motor de inducción. El modelo a considerar es el propuesto por Walve [16], que representa las potencias activa y reactiva como función de los valores de magnitud y ángulo de fase del voltaje nodal medido en el nodo de carga. La ecuación es,

$$\begin{aligned} P_L &= P_0 + P_1 + K_{pw}\dot{\theta} + K_{pv}(V + T\dot{V}) \\ Q_L &= Q_0 + Q_1 + K_{qw}\dot{\theta} + K_{qv}V + K_{qv2}V^2 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Donde P_1 y Q_1 son las potencias constantes, P_0 y Q_0 son las potencias constantes del motor de inducción, K_{pw} , K_{pv} , T , K_{qw} , K_{qv} , K_{qv2} son coeficientes de carga.

Debe aclararse que este último modelo es el más utilizado en el estudio del fenómeno dinámico de los sistemas de potencia [2], [17-23].

Capítulo 4

Simulación de modelos dinámicos

*“Un Matemático es un quijote moderno
que lucha en un mundo real con armas
imaginarias”.*

Anónimo (P. Corcho)

Capítulo 4

Simulación y análisis de inestabilidad de voltaje

4.1 Introducción

En este capítulo se presenta el estudio de la inestabilidad de voltaje, mediante la teoría de bifurcaciones, de un sistema eléctrico de potencia de tres nodos representado por un conjunto de ecuaciones diferenciales obtenidas en base a los modelos matemáticos presentados en el capítulo 3. Como parte del análisis de los resultados obtenidos, se discuten los diferentes tipos de bifurcaciones acontecidas y sus implicaciones en el comportamiento de un pequeño sistema eléctrico.

El estudio de inestabilidad de voltaje se realiza de la siguiente manera, primeramente se obtiene un punto de equilibrio estable al solucionar el conjunto de ecuaciones diferenciales que representan el comportamiento del sistema bajo análisis. A partir de este punto de equilibrio, se obtiene una rama de soluciones de puntos de equilibrio variando el parámetro de bifurcación seleccionado. Simultáneamente se va realizando un análisis de estabilidad de cada punto de equilibrio obtenido, con la finalidad de determinar si se ha encontrado una bifurcación. Para la ejecución de estas simulaciones, y su representación gráfica mediante un diagrama de bifurcación, se utiliza el programa del dominio público llamado XPPAUT [24-25]. Los archivos ODE que describen el sistema bajo análisis se presentan en el Apéndice A de esta tesis.

4.2 Herramienta computacional para simulación de sistemas dinámicos

El Software XPPAUT (X-Windows Phase Plane Plus Auto) y su respectiva versión para Windows® WINPP (Windows Phase Plane) son programas para simulación numérica de sistemas dinámicos, representados por ecuaciones diferenciales, ecuaciones de retardo, integrales de Volterra, entre otras técnicas de modelado.

Ambos programas consisten fundamentalmente de dos subprogramas: el primero llamado XPP (X-Windows Phase Plane) que permite obtener el comportamiento dinámico de un sistema con base a las condiciones iniciales o puntos de equilibrio. El segundo programa llamado AUTO, o en el caso del WINPP el LOCBIF, obtiene los diagramas de bifurcaciones y la estabilidad de los puntos de equilibrio de cada sistema simulado, con base a un método de continuación y los multiplicadores de Floquet, respectivamente. Estos programas se usan de manera conjunta, ya que los resultados de un programa se usan en el otro como parámetros de simulación y viceversa.

XPP tiene la capacidad de manejar hasta 1800 ecuaciones diferenciales. Se cuenta además con 10 ventanas graficas que son visibles simultáneamente con una cierta variedad de colores. También, se incluyen varios subprocesos, tales como histogramas, transformada rápida de Fourier, condiciones de equilibrio y estabilidad, flujo de campo, mapas de Poincaré, entre otros. En el Apéndice B se explica brevemente las características y comandos de los dos programas, como sus ventajas y desventajas.

4.3 Simulación y análisis de estabilidad de voltaje

En esta sección se analiza en forma detallada el modelo que se muestra en la Figura 4.1 [2].

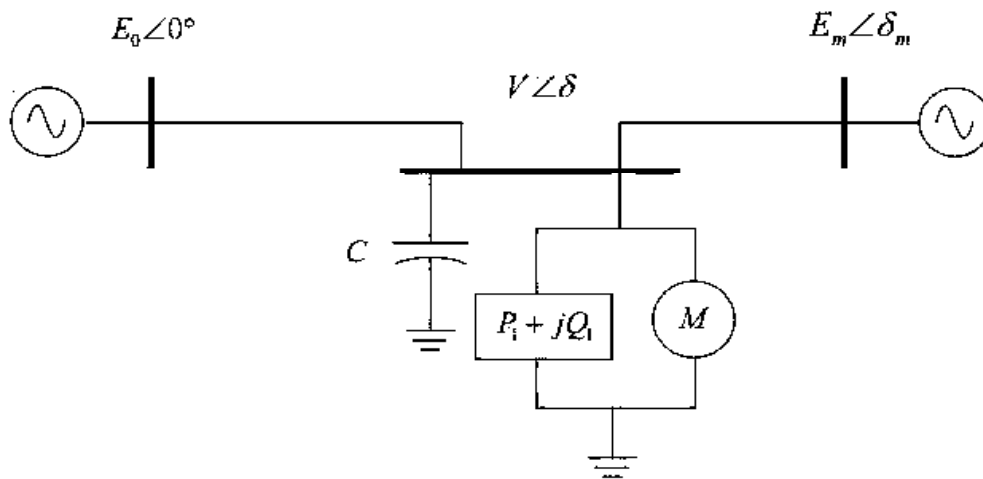


Figura 4.1 Sistema Eléctrico de Potencia con carga dinámica.

Este modelo está conformado por 2 generadores, uno de ellos considerado como nodo de referencia y el otro como una fuente de voltaje constante, cuya dinámica se describe por medio de la ecuación de oscilación. Las líneas de transmisión son modeladas como admitancias serie y la carga eléctrica esta conformada por la conexión en paralelo de una carga que demanda potencia eléctrica constante y un motor de inducción cuyo comportamiento dinámico depende del valor de voltaje en terminales. Asimismo, se tiene una compensación capacitiva para ayudar al sistema eléctrico con la potencia reactiva total demandada por la carga. A continuación se muestran las ecuaciones matemáticas que representan al sistema eléctrico bajo estudio.

Las potencias demandadas por la combinación de la carga dinámica y estática conectada al sistema es representada matemáticamente por la ecuación (4.1).

$$\begin{aligned} P &= P_0 + P_1 + K_{pv} \dot{\delta} + K_{pv} (V + T\dot{V}) \\ Q &= Q_0 + Q_1 + K_{qv} \dot{\delta} + K_{qv} V + K_{qv2} V^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Debido al balance de potencia existente en el nodo de carga, la potencia suministrada desde la red eléctrica es,

$$\begin{aligned} P &= -VE_0' Y_0' \text{sen}(\delta + \theta_0') - VE_m Y_m \text{sen}(\delta - \delta_m + \theta_m) + V^2 (Y_0' \text{sen}\theta_0' + Y_m \text{sen}\theta_m) \\ Q &= VE_0' Y_0' \cos(\delta + \theta_0') + VE_m Y_m \cos(\delta - \delta_m + \theta_m) - V^2 (Y_0' \cos\theta_0' + Y_m \cos\theta_m) \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde las variables E_0' y Y_0' son el voltaje y admitancia del equivalente de Thevenin del sistema, tal como se explica en el Apéndice C. El generador conectado al nodo 0, lado izquierdo en la red de transmisión, es considerado como referencia, tal que sus ecuaciones no entran en el modelo matemático. El generador restante es modelado por medio de las ecuaciones de oscilación definidas en el capítulo 3.

La combinación de estas ecuaciones da como resultado el conjunto de ecuaciones diferenciales (4.3), que describen la dinámica del sistema a simular.

$$\begin{aligned}
\dot{\delta}_m &= \omega \\
\dot{\omega} &= \frac{1}{M} (P_m - D_m \omega + V E_m Y_m \text{sen}(\delta - \delta_m - \theta_m) + E_m^2 Y_m \text{sen} \theta_m) \\
\dot{\delta} &= K_{qw}^{-1} (-K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q - Q_0 - Q_1) \\
\dot{V} &= \frac{1}{TK_{qw} K_{pv}} \left[\begin{array}{l} -K_{qw} (P_0 + P_1 - P) + (K_{pw} K_{qv} - K_{qw} K_{pv}) V + K_{pw} (Q_0 + Q_1 - Q) \\ + K_{pw} K_{qv2} V^2 \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

La obtención detallada de este conjunto de ecuaciones que se modelan en forma polar se presenta en el Apéndice C.

En las ecuaciones (4.3), la variable E_m es la magnitud del voltaje interno del generador, que para este ejemplo corresponde al voltaje en terminales del mismo, y se mantiene a un valor constante. Mientras que δ_m representa el valor del ángulo que existe entre el campo magnético del rotor y el campo magnético del estator o de referencia; y es mejor conocido como ángulo de carga. Un valor positivo de este ángulo implica que la máquina síncrona está inyectando potencia eléctrica al sistema; sin embargo, si es negativo esta máquina consume potencia. Lo anterior no es más que el comportamiento de la máquina síncrona como generador o como motor; respectivamente. Los posibles cambios en la velocidad del rotor con referencia a la velocidad síncrona están descritos por la variable ω , tal que si $\omega=0$, el generador está en sincronismo. Si $\omega < 0$, el rotor se encuentra girando a una velocidad menor que la velocidad síncrona, pero si $\omega > 0$ nos indica que el rotor tiene una velocidad mayor que la de sincronismo; en donde la velocidad está en términos de unidad de radianes por segundo (rad/seg). El parámetro δ describe al ángulo de fase del voltaje en el nodo de carga, medido en relación al nodo de referencia; a su vez el valor de los ángulos está en unidades de radianes (rad). El término V es la magnitud del valor voltaje en el nodo de carga y está expresado en por unidad (pu). El parámetro de bifurcación que se varía de manera cuasiestática es la demanda de potencia reactiva Q_1 en el nodo de carga. Los parámetros restantes que se utilizan en las simulaciones se listan en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1 Parámetro utilizados en el sistema de potencia con carga dinámica.

Parámetro de bifurcación $Q_1 = 10$ hasta 12 pu			
$k_{pw} = 0.4 pu$	$k_{pv} = 0.3 pu$	$k_{qw} = -0.03 pu$	$k_{qv} = -2.8 pu$
$K_{qv2} = 2.1 pu$	$T_1 = 8.5 pu$	$p_0 = 0.6 pu$	$q_0 = 1.3 pu$
$P_1 = 0 pu$	$C = 12 pu$	$E'_0 = 2.5 pu$	$E_m = 1 pu$
$P_m = 1 pu$	$M = 0.3 \text{seg}^2 / \text{rad}$	$D_m = 0.05 \text{seg} / \text{rad}$	$Y_0 = 20 pu$
$\theta'_0 = -12^\circ$	$Y_m = 5 pu$	$E_0 = 1 pu$	$Y'_0 = 8 pu$
	$\theta_0 = -5^\circ$	$\theta_m = -5^\circ$	

Para obtener el diagrama de bifurcaciones que permita realizar un análisis de estabilidad de voltaje es necesario obtener una condición inicial definida por un punto de equilibrio estable en el valor inicial del parámetro de bifurcación, $Q_1 = 10$ pu. Este punto de equilibrio queda definido por los siguientes valores: $V = 1.2295$ pu, $\delta_m = 0.2858$ rad, $\omega = 0$ rad/seg, $\delta = 0.10662$ rad. A partir de este punto, se inicia la simulación por medio del utilizando el software XPPAUT para obtener el diagrama de bifurcaciones mostrado en la Figura 4.2.

De este diagrama se observa que mientras se incrementa en forma cuasi-estática el valor del parámetro de bifurcación Q_1 , la magnitud de voltaje en el nodo de carga comienza a disminuir de forma monotónica, siendo estables todos aquellos puntos de equilibrio del sistema representados por la línea gruesa. En el instante en que el valor $Q_1 = 10.946$ pu, las soluciones del sistema son inestables, y se describen por medio de líneas delgadas y discontinuas. En el instante en que $Q_1 = 11.40$ pu los puntos de equilibrio cambian nuevamente de tipo de estabilidad, siendo estables hasta un valor de $Q_1 = 11.41$ pu. Después

de este punto las ecuaciones que representan al sistema no tienen solución o punto de equilibrio; presentándose una Bifurcación Saddle-Node (SNB).

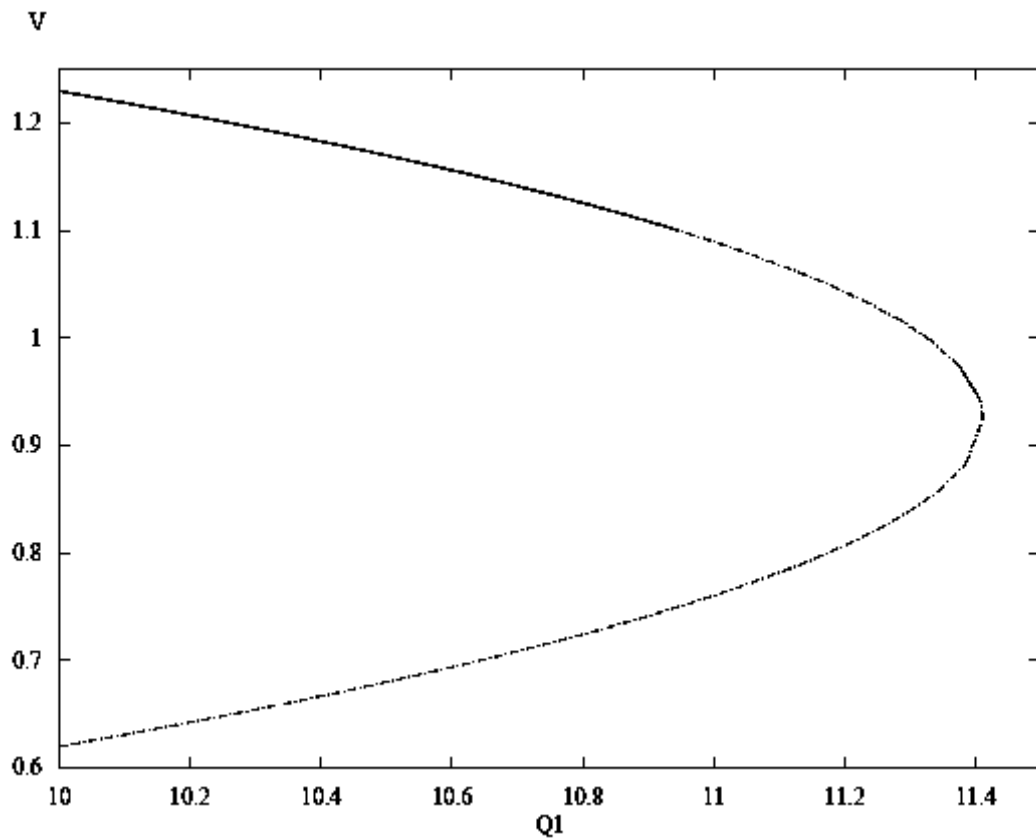


Figura 4.2 Diagrama de bifurcación mostrando las regiones estables e inestables.

Una vez definidos los puntos de equilibrio, se puede saber cualitativamente como será el proceso dinámico del sistema bajo una pequeña perturbación. Por ejemplo, tomando como condición inicial del proceso dinámico un punto de equilibrio estable, bajo una pequeña perturbación el sistema experimentará un comportamiento transitorio para converger a un estado estable definido en el mejor de los casos por punto de equilibrio estable inicial. Este caso se ejemplifica en las Figuras 4.3.1 y 4.3.2, donde se observa la evolución del sistema bajo condiciones iniciales definidas por el punto de equilibrio estable dado por $V=1.2295$, $\delta=0.2858$, $\omega=0$ y $\delta_m=0.10662$.

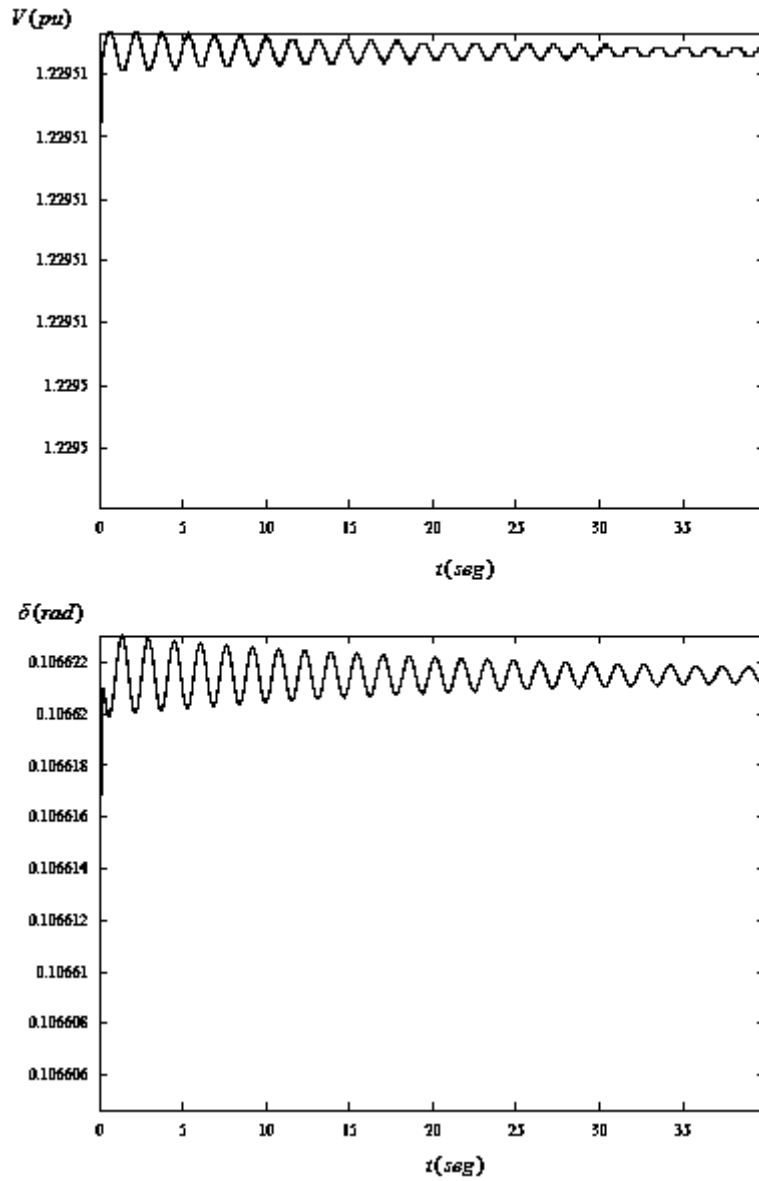


Figura 4.3.1 Dinámica de las variables V y δ al solucionar (4.3) con condiciones iniciales dadas en $Q_1=10$ pu..

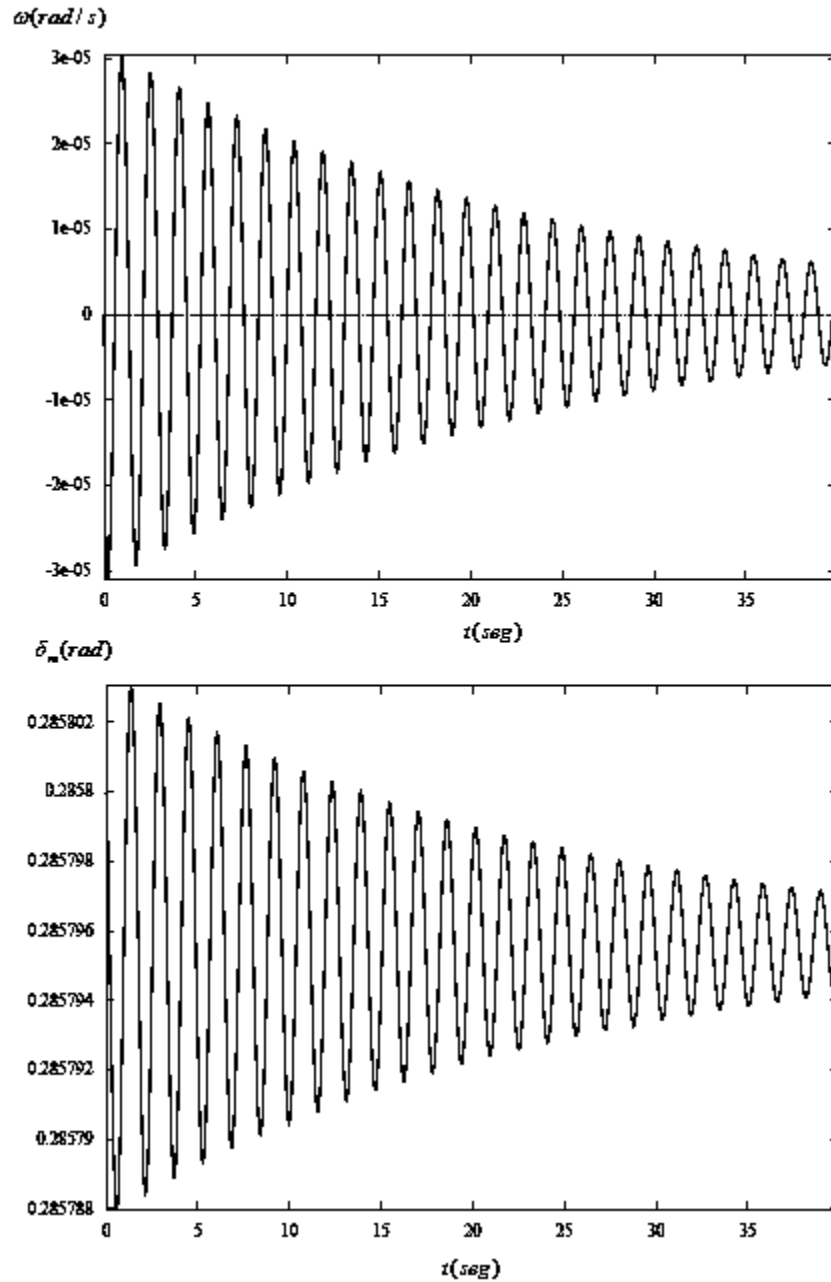


Figura 4.3.2 Dinámica de las variables ω y δ_m al solucionar (4.3) con condiciones iniciales dadas en $Q_1=10$ pu..

De acuerdo a la definición de bifurcación, esta aparece cuando existe un cambio en la estabilidad entre dos puntos de equilibrios sucesivos. De tal manera, la bifurcación Saddle-Node no es la única que se presente en el sistema bajo análisis. Por ejemplo, en el valor del parámetro de bifurcación $Q_1=10.946$ pu se tiene una bifurcación Hopf Subcrítica (**UHB**),

emergiendo de esta bifurcación una rama de soluciones periódicas inestables; que están identificadas por círculos blancos en la Figura 4.4.

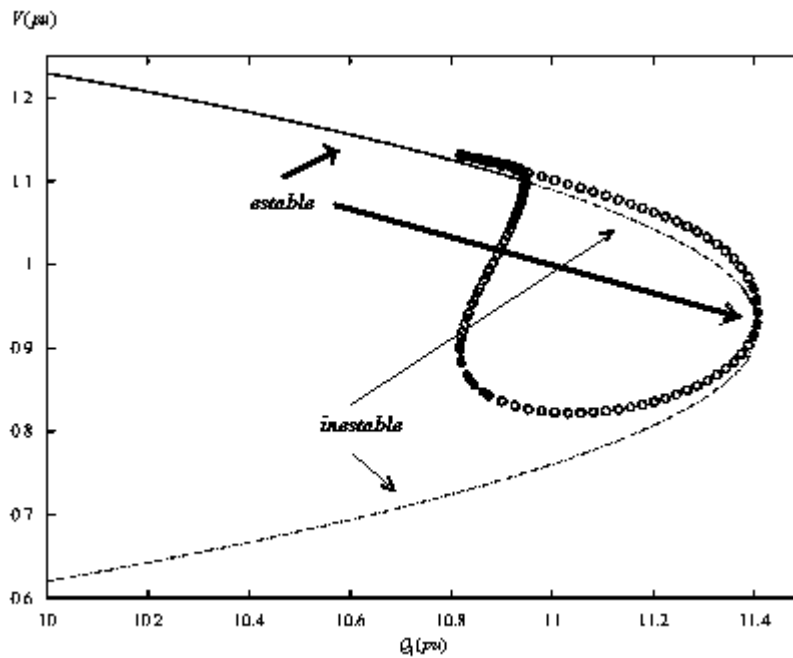


Figura 4.4 Diagrama mostrando la bifurcación Hopf subcrítica.

En este diagrama detallado de bifurcaciones se muestra que la rama se extiende por el lado izquierdo hasta llegar a a $Q_1=10.81689$ pu, donde ahora aparece una bifurcación Saddle-Node de solución periódica o también llamada bifurcación de Doble de Ciclos (**CFB**), tal como se observa de manera más precisa en la Figura 4.5. En este punto coexisten soluciones periódicas estables representadas por círculos negros. Las soluciones estables siguen encontrándose conforme se mueve el parámetro de bifurcación hacia el lado derecho hasta llegar a $Q_1=10.8719$ pu, en donde nuevamente el sistema cambia de estabilidad, en una bifurcación de Doble Periodo (**PDB**).

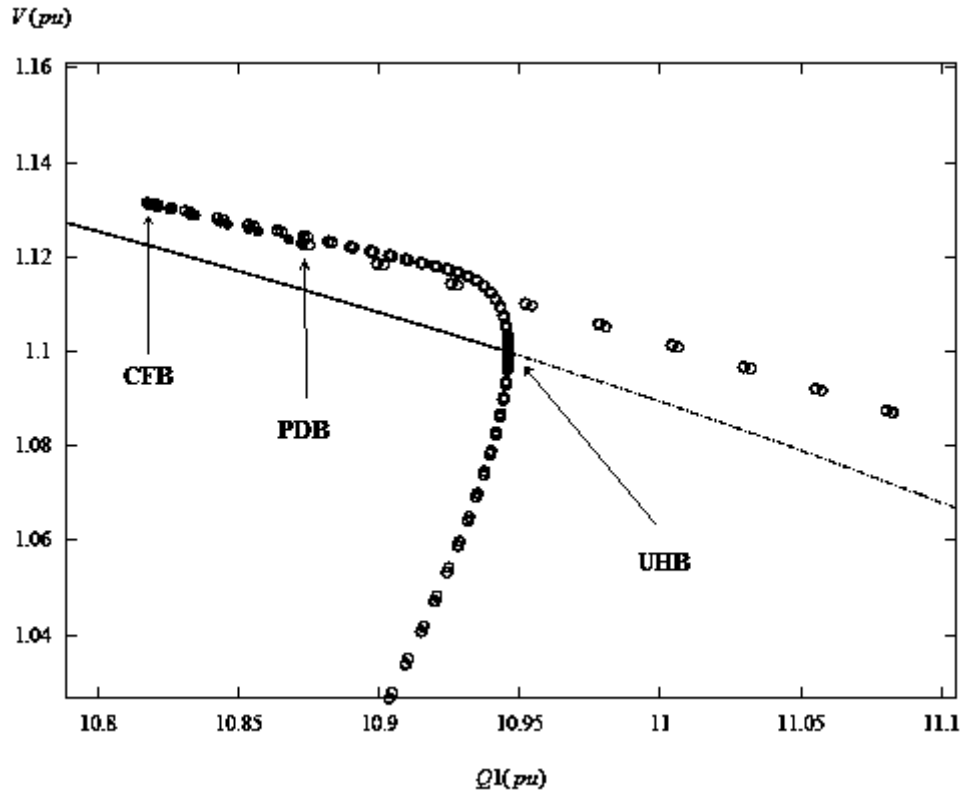


Figura 4.5 Soluciones periódicas inestables que aparecen de la bifurcación Hopf subcrítica.

Para explicar la dinámica de las variables de estado cuando se presentan las bifurcaciones descritas, se considera la solución numérica de las ecuaciones (4.3) considerando como condición inicial los valores de las variables de estado en la bifurcación Hopf Subcrítica (UHB), $Q_1=10.9442$ pu. En este caso las variables del sistema no evolucionan hacia un estado estable, sino que el valor de las variables oscila de manera periódica conforme transcurre el tiempo, como se muestra en la Figura 4.6, hasta alcanzar un ciclo limite como se observa en la Figura 4.7.

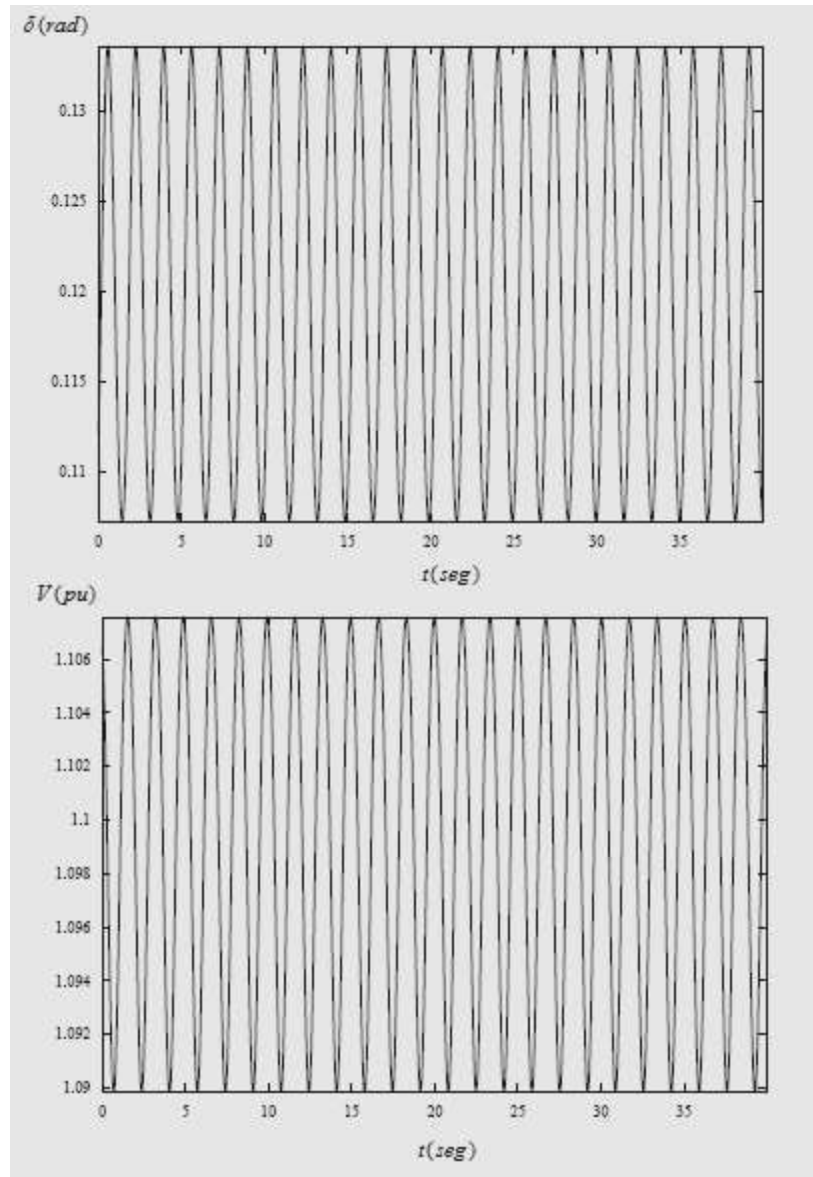


Figura 4.6. Oscilación periódica de las variables V y δ en la bifurcación Hopf subcrítica..

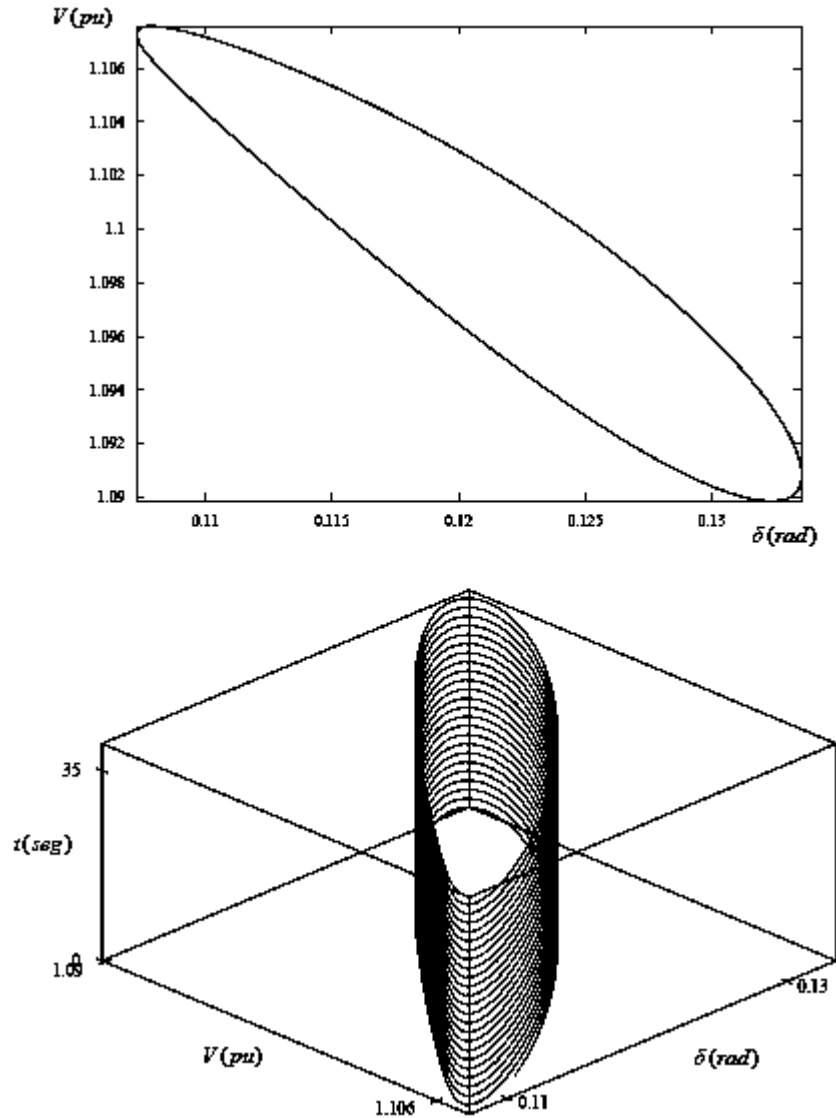


Figura 4.7. Ciclo límite para las variables V y δ en la bifurcación Hopf subcrítica..

De acuerdo a la teoría de bifurcaciones, al aumentar el valor del parámetro de bifurcación más allá de la bifurcación Hopf subcrítica (UHB), la amplitud de las oscilaciones se incrementa. Lo anterior se muestra numéricamente al resolver el conjunto de ecuaciones (4.3) considerando condiciones iniciales iguales a los valores de las variables de estado obtenidos en el parámetro de bifurcación $Q_1=10.995$ pu. El resultado para la magnitud de voltaje en el nodo de carga se muestra en la Figura 4.8, observándose que esta magnitud es

oscilatoria con un valor de cresta que se incrementa al transcurrir un tiempo, hasta alcanzar un máximo en un tiempo de simulación grande.

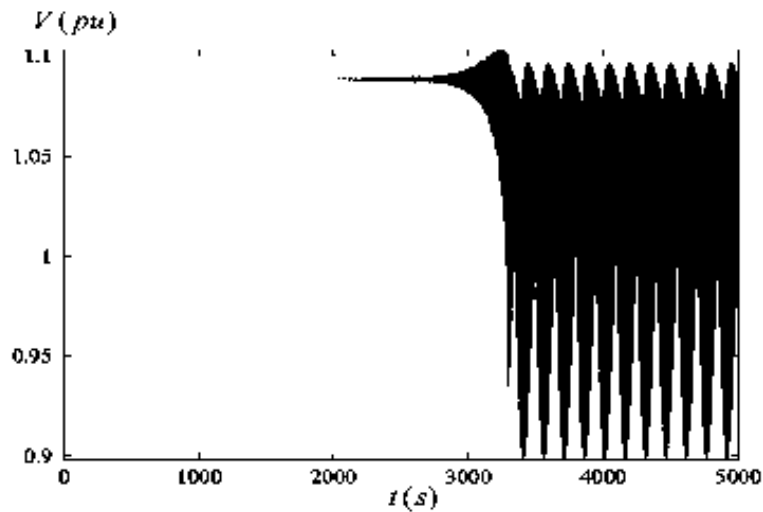


Figura 4.8 Oscilaciones de voltaje en $Q_1=10.995$ pu..

Al repetir la simulación anterior considerando condiciones iniciales obtenidas en un valor de $Q_1=11.19$ pu., se presenta el fenómeno de colapso de voltaje después de un proceso oscilatorio; es decir, la magnitud de voltaje es nula después de experimentar un comportamiento oscilatorio. Lo anterior se ejemplifica en la Figura 4.9.

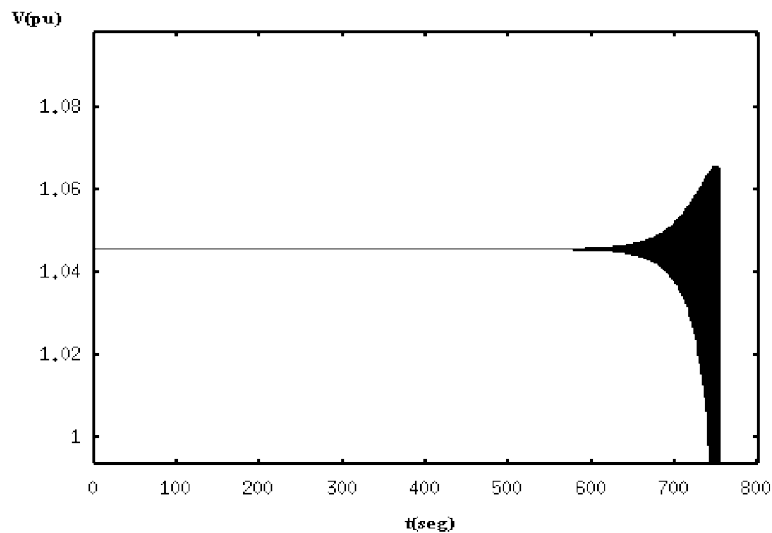


Figura 4.9 Colapso de voltaje en $Q_1=11.19$ pu..

Existe una región denominada región de biestabilidad, comprendida entre los valores de parámetro de bifurcación definidos por $Q_1=10.817$ pu y $Q_1 10.87$ pu, tal como se muestra en la Figura 4.10. En este caso, un grupo de soluciones periódicas inestables rodean al punto de equilibrio, y estas soluciones periódicas inestables están rodeadas a su vez por soluciones periódicas estables.

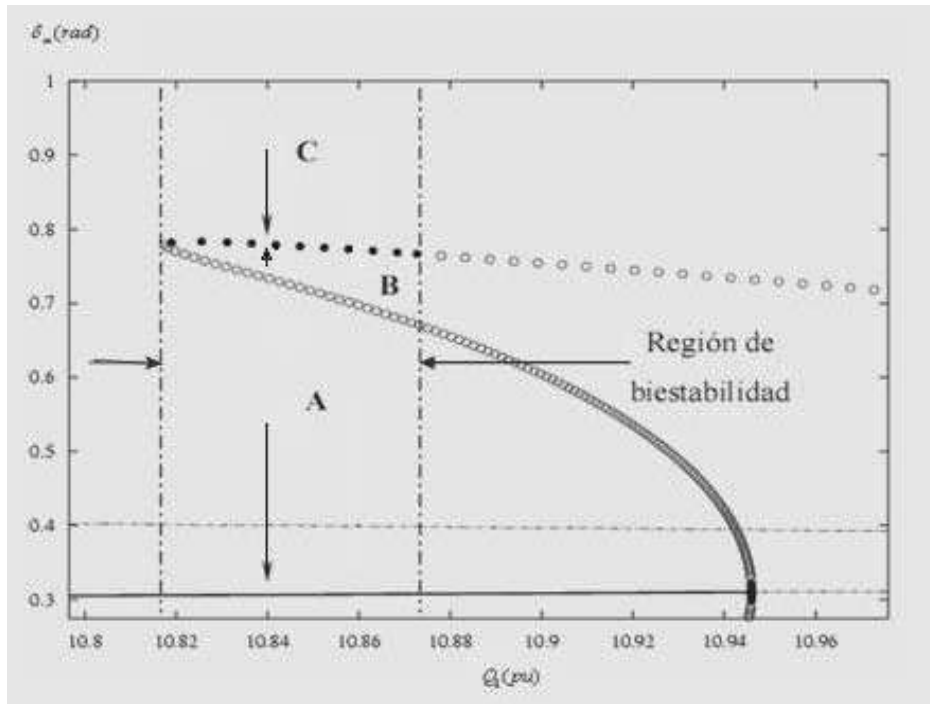
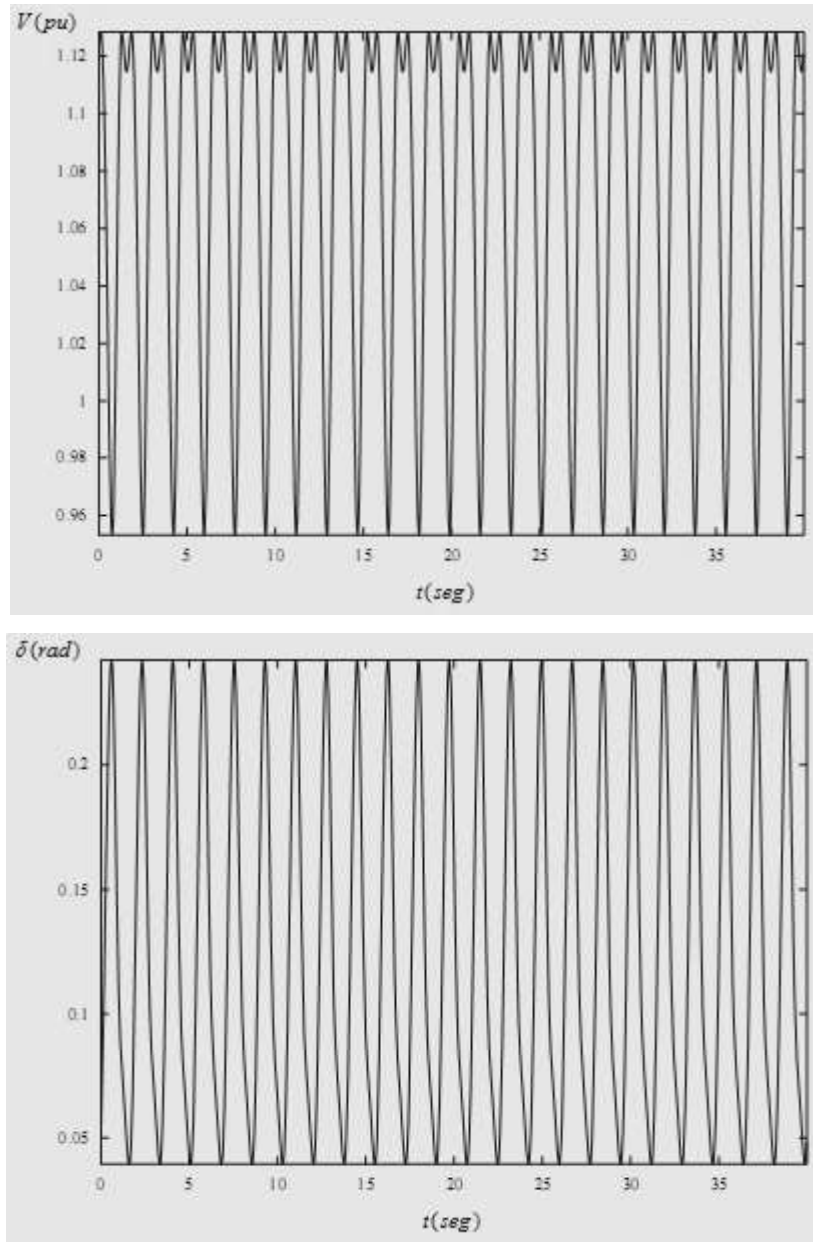


Figura 4.10. Región de biestabilidad. .

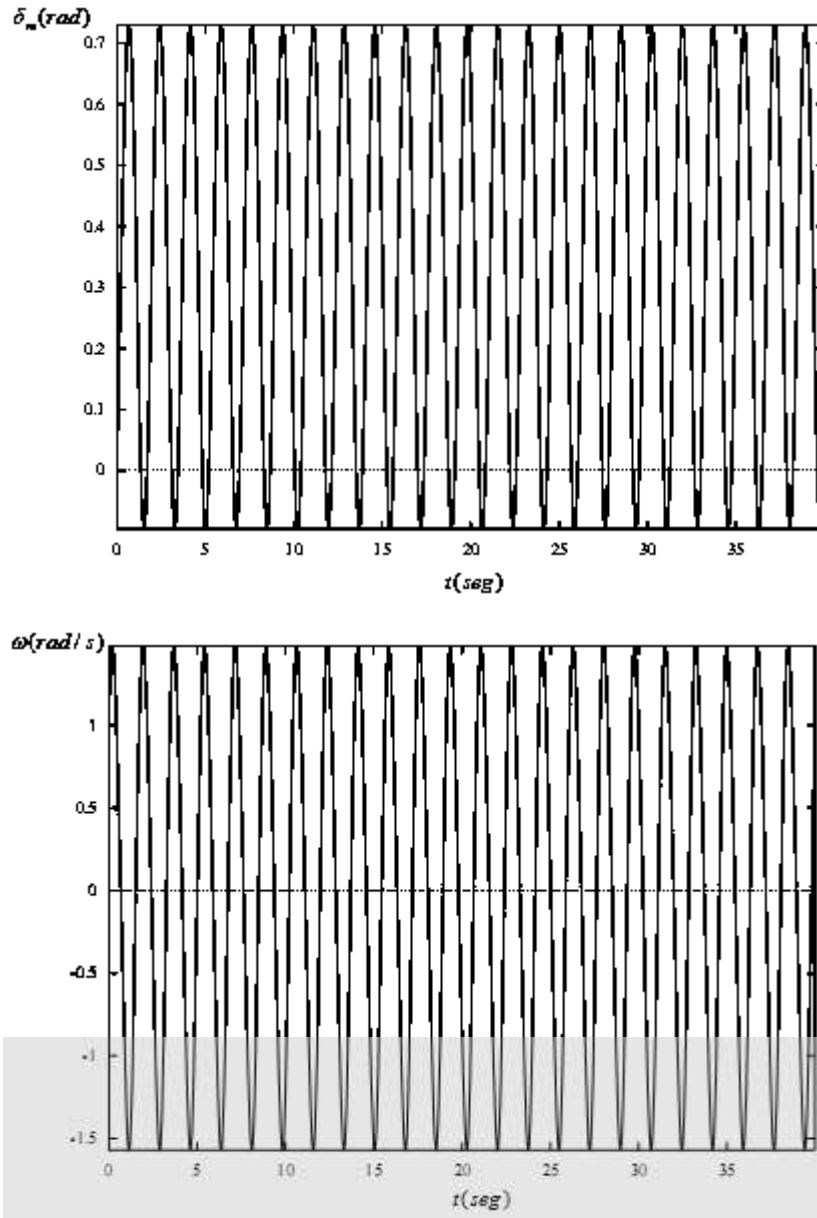
Al ocurrir una perturbación en un punto de equilibrio d situado en la parte **A** del diagrama de bifurcación mostrado en la Figura 4.10, este es repelido por la trayectoria conformada por puntos de equilibrio periódicos inestables, tal que conforme transcurre el tiempo las magnitudes de las variables de estado son atraídas a un estado estacionario definido por la trayectoria de puntos de equilibrio estables. En caso de que el punto de equilibrio perturbado este ubicado en el área **B**, su dinámica será atraída hacia la trayectoria conformada por puntos de equilibrio periódicos estables. Lo mismo ocurre si el punto de equilibrio esta situado en el área **C**.

La dinámica de las variables de estado obtenida al integrar las ecuaciones (4.3) con condiciones iniciales dadas al considerar el parámetro de bifurcación $Q_1=10.84$ pu se

muestra en las Figuras 4.11 y 4.12 Este tipo de oscilaciones se mantienen siempre que el sistema perturbado quede dentro de la zona de biestabilidad.



Figuras 4.11 Oscilaciones estables de las variables V y δ , en $Q_1=10.84$ pu.



Figuras 4.12 Oscilaciones estables de las variables δ_m y ω , en $Q_1=10.84$ pu.

Asumiendo que el sistema se encuentra operando en un ciclo límite dado por el punto de equilibrio oscilatorio determinado por $Q_1=10.816$ pu, y localizado en el lado izquierdo de la región de biestabilidad, el sistema experimenta una bifurcación de doblez de ciclos (CFB) al reducir la demanda de potencia reactiva ligeramente a un valor de $Q_1=10.81213$ pu. Esto ocasiona que las oscilaciones empiecen a reducirse en amplitud y periodo conforme transcurre el tiempo hasta llegar a un punto de equilibrio estable donde las

variables de estado tienen un valor fijo. La razón de este comportamiento es que solo existe un atractor en este punto de operación del sistema. El proceso dinámico descrito se muestra en la Figura 4.13 para la variable de estado asociada a la magnitud de voltaje en el nodo de carga, el cual se estabiliza en $V=1.12948$ pu.

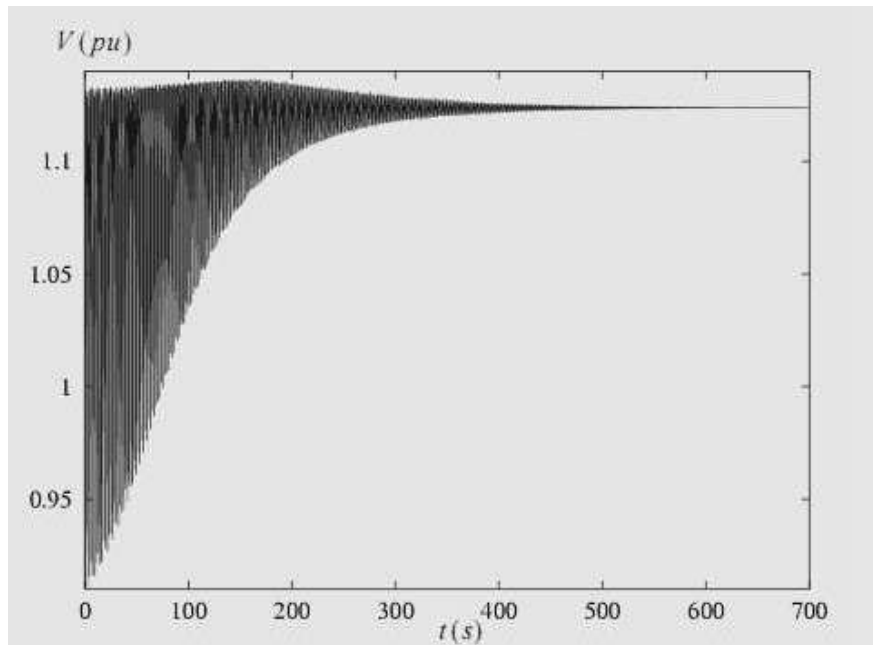


Figura 4.13 Proceso de estabilidad de voltaje del sistema en una bifurcación de doblez.

Contrario al ejemplo asociado a la Figura 4.13, ahora se considera que el sistema se encuentra oscilando periódicamente en el ciclo límite dado por $Q_1=10.8718$, como se muestra en la Figura 4.14, y que corresponde a un punto de operación ubicado en la parte derecha de la región de biestabilidad. A partir de este punto de operación se desea saber como se comporta la dinámica del sistema al incrementar de manera muy pequeña el parámetro de bifurcación. Primeramente se incrementa de la demanda de potencia reactiva a un valor de $Q_1=10.876$ pu, tal que el ciclo límite original se transforma en un ciclo límite de doble periodo; es decir, se tiene una bifurcación de Doble Periodo (**PDB**), tal como se muestra en la Figura 4.15.

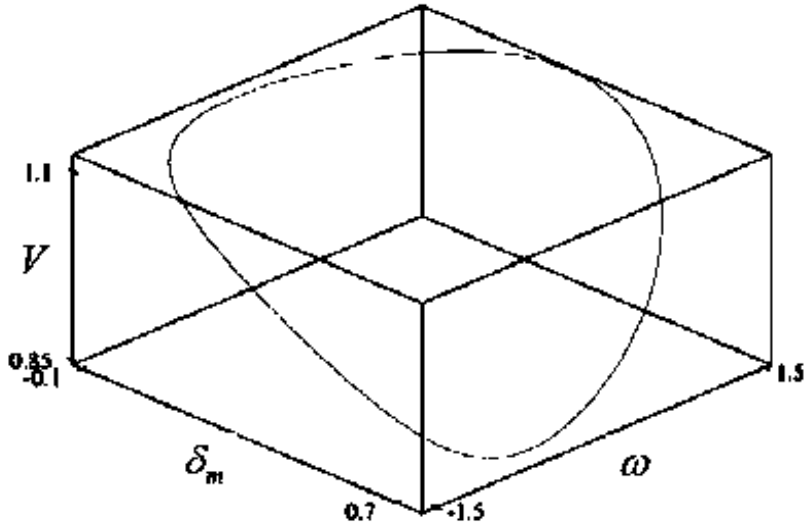
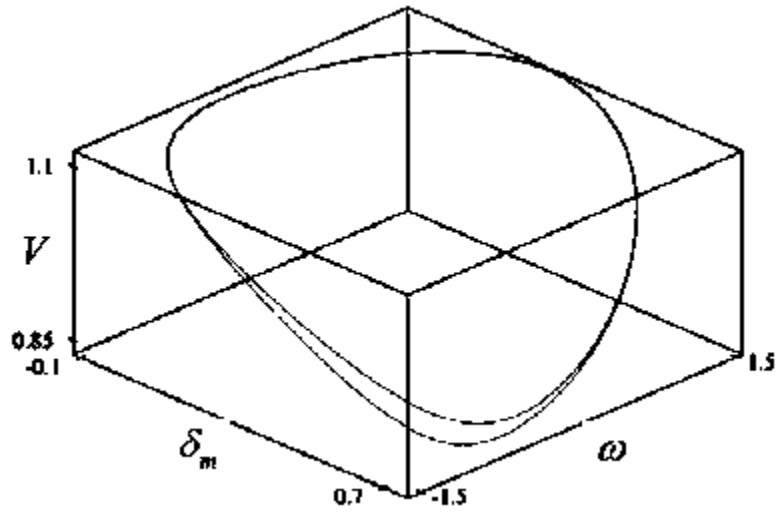


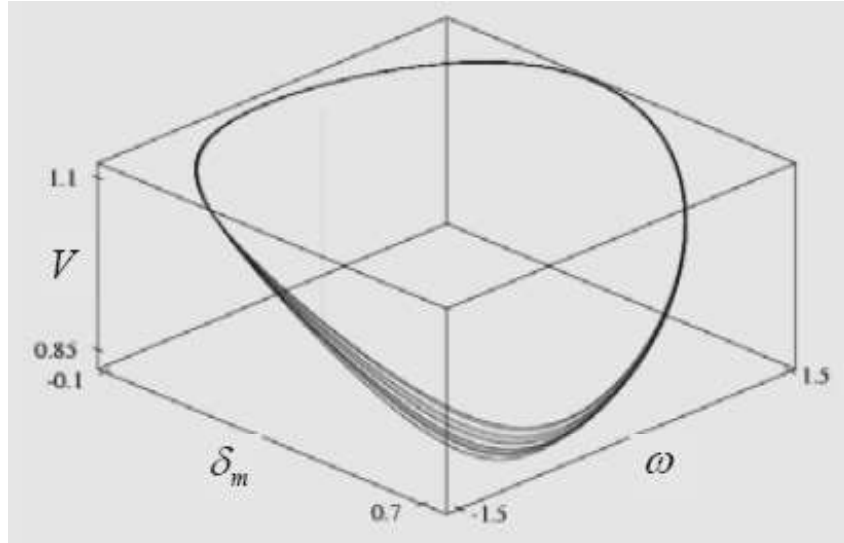
Figura 4.14 Ciclo límite asociado a una valor de $Q_1=10.8718..$



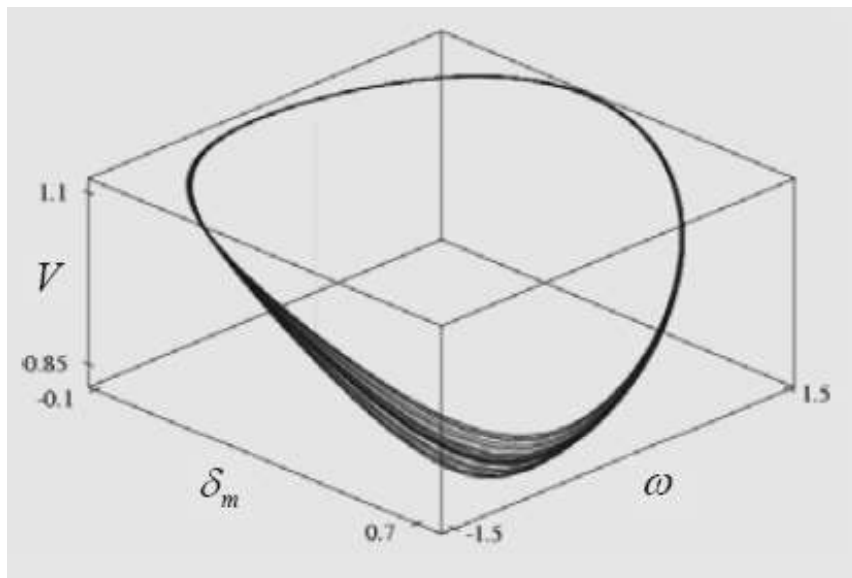
Figuras 4.15 Ciclo límite en 10.876 pu..

En base a las figuras anteriores, en un inicio el sistema esta oscilando en forma estable en $Q_1=10.872$ pu. Al incrementar en forma cuasi estática el parámetro de bifurcación a un valor de $Q_1=10.876$ pu, se forma una segunda órbita. Al aumentar un poco más la potencia reactiva a un valor de $Q_1=10.885$ pu, aparece nuevamente una bifurcación de doble periodo (**PDB**), tal que el periodo de las orbitas se multiplica, como se ilustra en la Figura 4.16. Por

último, si la potencia reactiva se incrementa a $Q_1=10.886$ pu, el sistema presentara oscilaciones de amplitud muy variable en forma aperiódica, como se observa en la Figura 4.17. A este fenómeno se le llama caos, ya que físicamente es casi imposible de diseñar algún control para este tipo de fenómenos.



Figuras 4.16 Orbitas periódicas en 10.885 pu.



Figuras 4.17 Comportamiento caótico en $Q_1=10.886$ pu.

El comportamiento oscilatorio de la magnitud de voltaje en el nodo de carga con respecto al tiempo, para los diferentes niveles de potencia reactiva se muestran en las Figuras de la 4.18 a 4.22.

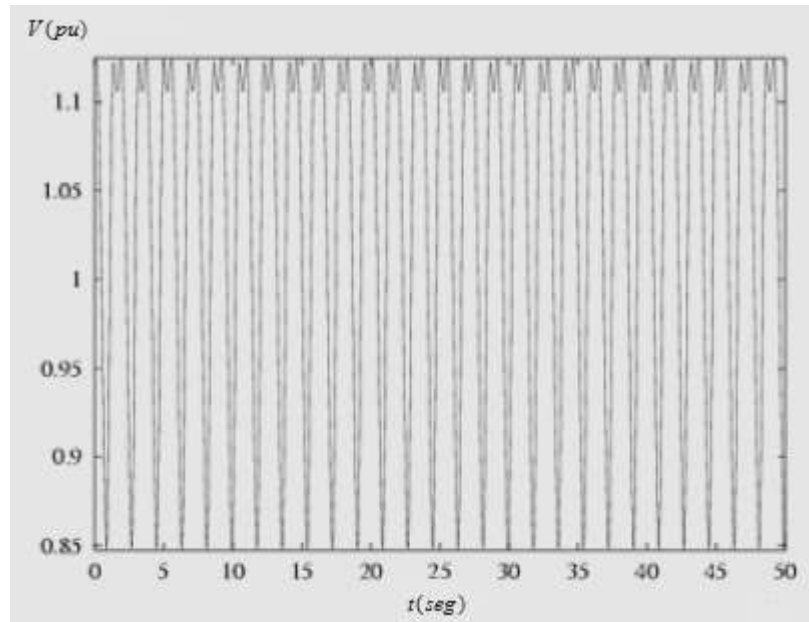


Figura 4.18 Oscilación de voltaje de carga para $Q_1 = 10.872$ pu. .

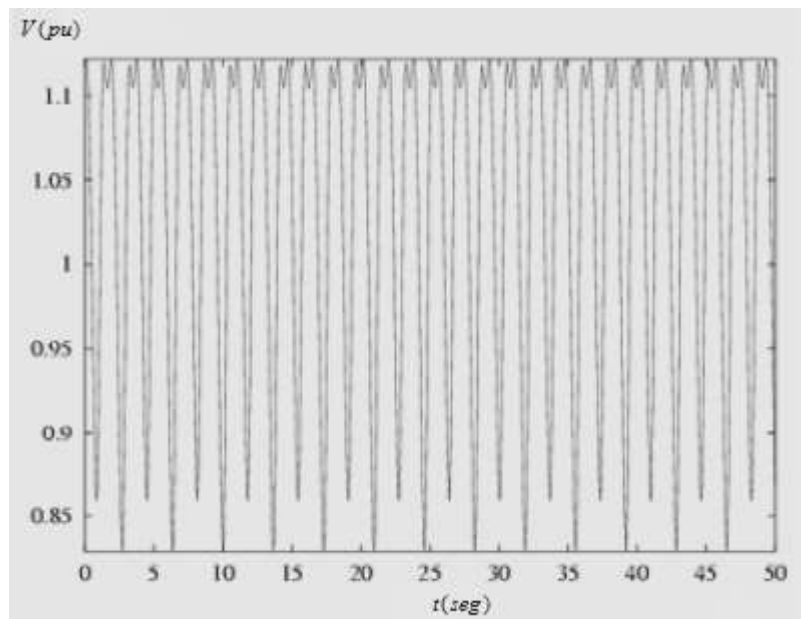


Figura 4.19 Oscilación de voltaje de carga para $Q_1 = 10.876$ pu. .

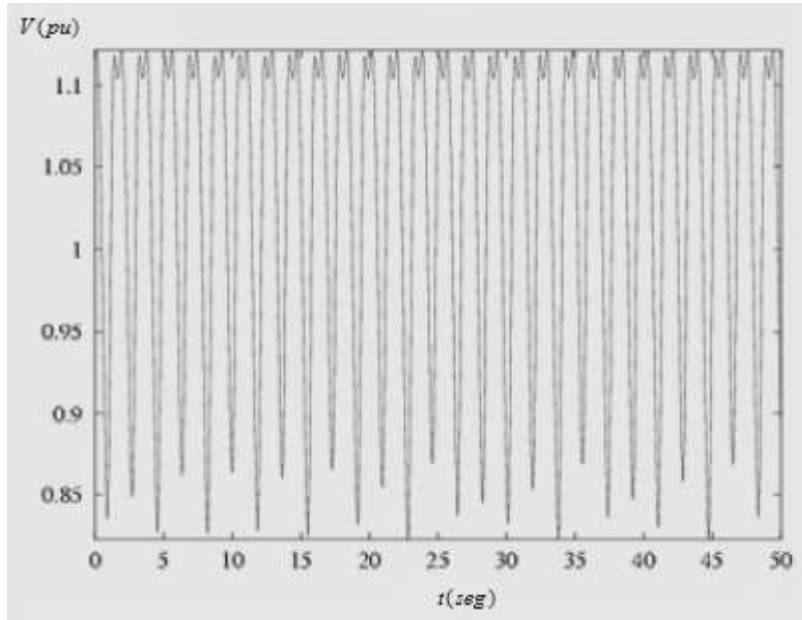


Figura 4.20 Oscilación de voltaje de carga para $Q_1=10.885$ pu. .

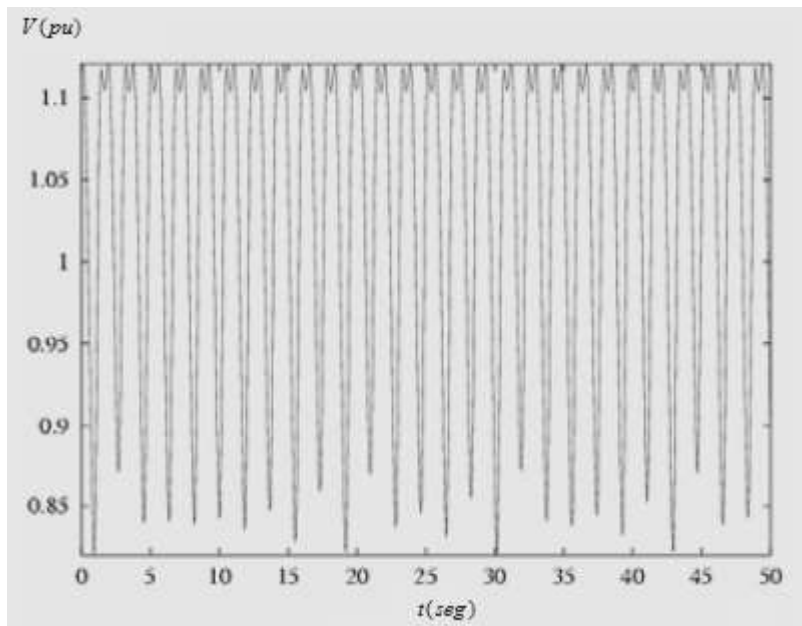


Figura 4.21 Oscilación de voltaje de carga para $Q_1=10.886$ pu.

Estas oscilaciones caóticas puede permanecer mientras no haya algún cambio en el parámetro de bifurcación, pero si ocurre nuevamente algún pequeño incremento en la potencia reactiva, este ocasionaría el fenómeno de colapso de voltaje. A manera de

ejemplo, la Figura 4.22 se muestra el comportamiento de la magnitud de voltaje de carga, con respecto al tiempo, para un valor de demanda de potencia reactiva dado por $Q_1=10.887$ pu. En este mismo nodo de carga se observa que conforme la magnitud de voltaje se colapsa, el ángulo de fase del voltaje se incrementa indefinidamente, como se ilustra en la Figura 4.22.

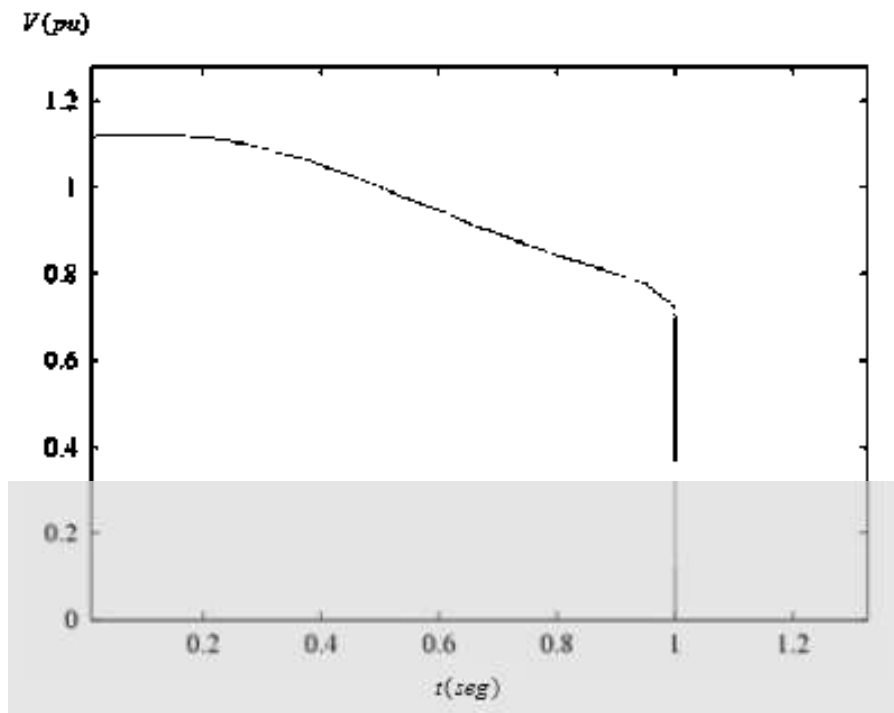


Figura 4.22 Colapso de voltaje en el nodo de carga para $Q_1=10.887$ pu. .

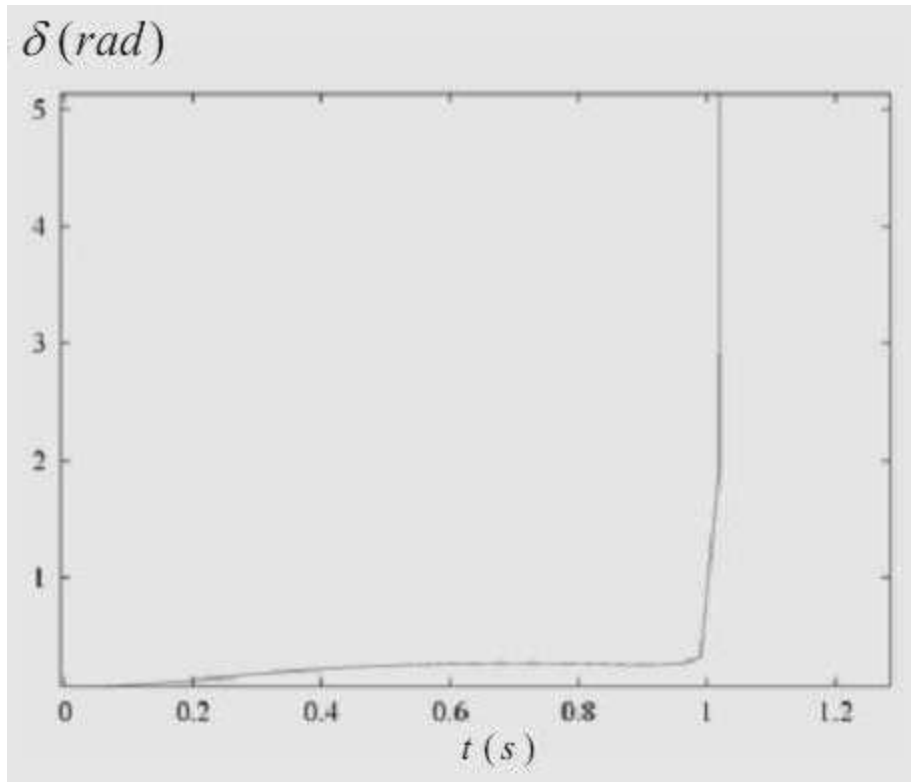


Figura 4.23 Incremento de ángulo de voltaje en el nodo de carga para $Q_1=10.887$ pu.

Conclusiones

“En un futuro próximo veremos una gran cantidad de aplicaciones de la electricidad...”

Nikola Tesla

Capítulo 5

Conclusiones

De esta tesis se pueden deducir y concluir muchas cosas que en su momento eran desconocidas para mí, ya que en el estudio clásico de los Sistemas Eléctricos de Potencia (SEP) no se consideran.

En base a lo comentado en el capítulo 1, y revisado en toda esta tesis, en el mundo real nada es ideal ni mucho menos es lineal. Este efecto no lineal ocasiona inestabilidades de voltaje debido a los excesos en el consumo de potencia reactiva.

Mientras un sistema contiene más elementos en su modelo de estudio, más complejo se convierte su análisis dinámico y la presencia de bifurcaciones tipo Saddle-Node (SNB) no solo será la única dentro de la evolución del sistema; es decir, se pueden presentar varias bifurcaciones locales y globales. La interacción de este tipo de bifurcaciones puede producir la ocurrencia de la inestabilidad de voltaje de una manera muy compleja debido a la manera en que van apareciendo puntos de equilibrio estables e inestables, ciclos límites estables e inestables, oscilaciones estables e inestables que a su vez pueden ser periódicas o aperiódicas. La manera en que evoluciona la inestabilidad de voltaje con respecto al tiempo puede producir un colapso de voltaje, el cual es el más claro ejemplo de la existencia de un comportamiento caótico en los SEP.

Existen también secuencias de eventos caóticos que no solo se presentan en el nodo de carga bajo análisis, sino en cualquier nodo débil o carente de potencia reactiva, como:

- ❖ El incremento cuasi periódico de carga reactiva en un nodo débil de un SEP deteriora el perfil del voltaje en el mismo nodo. Por esto, se necesario mantener dentro de ciertos límites la demanda de potencia reactiva para mantener el voltaje dentro de sus márgenes de estabilidad. En caso de no limitar este consumo de potencia, se presenta un problema de estabilidad de voltaje local, como se observaron en los resultados de las simulaciones y diagramas de bifurcación.

- ❖ Conforme la carga reactiva se incrementa, el perfil del voltaje tiende a disminuir cada vez más y se puede llegar a un punto de bifurcación. En el caso de las bifurcaciones Hopf, la magnitud de voltaje oscilara con respecto al tiempo; sobrecargando las líneas adyacentes. Consecuentemente los nodos adyacentes conectados a este nodo débil, presentan el mismo problema. Debido al incremento de carga en dichos nodos, nuevamente se reduce el perfil de voltaje en cada nodo afectado. Este tipo de problema de estabilidad de voltaje se propaga a través de la red convirtiéndose en un problema global sino se toman las medidas correctivas y adecuadas a un determinado tiempo.

- ❖ Para evitar que el efecto de inestabilidad de voltaje se propague a través de la red de transmisión, operan las protecciones contra sobrecarga de las líneas y bajo voltaje: Sin embargo, el sistema comienza a perder elementos de transmisión cambiando drásticamente su topología, hasta el punto en que queda completamente desmantelado. De tal manera, se presenta un colapso total que afecta a miles de usuarios.

Por esta razón las oscilaciones pueden ser estables desde el punto de vista matemático, pero son indeseables en la operación real de los sistemas eléctricos. Ya que estas oscilaciones limitan la transferencia de potencia en las líneas de transmisión y pueden ocasionar daños irreparables a los equipos eléctricos, de control e incluso provocar una reacción en cadena como anteriormente descrita. Por último, para el estudio preciso de la inestabilidad de voltaje es necesario recurrir a estudios un poco más superiores, como: teorías de análisis de sistemas no lineales, análisis cualitativos de las ecuaciones diferenciales, métodos de integración numérica, la teoría de bifurcaciones y la teoría del caos. Y así poder ser un estudio integral y eficiente de algún Sistema Eléctrico.

Trabajos futuros

Un trabajo futuro es el estudio de los efectos de algunos los dispositivos de control, si realmente son eficientes en el estado dinámico de los SEP, cuando se presenta alguna inestabilidad de voltaje.

Otro t3pico de estudio de futuros trabajos es el control y el consumo eficiente de potencia reactiva en algunas carga din3micas, como: las maquinas de inducci3n ya sea operando como generador o como motor y de algunos dispositivos electr3nicos como: inversores o control de motores de AC y fuentes de conmutadas.

Por 3ltimo, un t3pico de trabajos a futuro seria el desarrollo de nuevas herramientas computacionales como: XPPATU y MatLab®.

Referencias

- [1]. Strogatz Steven H. "Nonlinear Dynamics And Chaos,". Cambridge Massachusetts. Perseus Publishing 2000.
- [2]. Ian Dobson, Hsiao Dong Chiang, James S. Thorp., "A Model Of Voltage Collapse In Electric Power Systems". IEEE proceedings of 27th. Conference on Decision and Control, Austin Texas, pp.2104-2109, December, 1988.
- [3]. Ian Dobson, Hsias-Dong Chiang, "Towards a theory of voltage collapse in electric power systems," Systems and Control Letters, Vol. 13, pp. 253-262, 1989.
- [4]. http://www.conae.gob.mx/work/sites/CONAE/resources/LocalContent/4687/3/Informacion_control_demanda.pdf.
- [5]. H. O. Wang, E. H. Abed, and A. M. A. Hamdan, "Bifurcation, chaos and crisis in voltage collapse of a model power system", IEEE Transactions on circuits and systems. Vol. 41, No. 3, pp. 294-302, March, 1994.
- [6]. T. Van Cutsem, C. Vournas, "Voltage Stability of Electric Power Systems", Power Electronics and Power System Series., Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [7]. V. Ajarapu, B. Lee., "Bifurcation Theory And Its Application To Nonlinear Dynamical Phenomena In An Electrical Power System", IEEE Transactions on Power Systems. pp 312-319, 1991.
- [8]. <http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html>
- [9]. Ian Stewart, "¿Juega Dios a los dados? Las Matemáticas del Caos".
- [10]. Ali H. Nayfhe, Balakumar Balachandran, "Applied Nonlinear Dynamics, Analytical, Computational and Experimental Methods", John Wiley & Sons, Inc. 1995.
- [11]. P. M. Anderson and A. A. Fouad, "Power system control and stability," The Iowa state university press. 1977.
- [12]. Chin-Woo Tan, Matthew Varghese, Pravin Varaiya, and Felix F. Wu. "Bifurcation, chaos, and voltage collapse in power systems", Proceedings of the IEEE, Vol. 83, No. 11, pp. 1484-1496, November 1995.
- [13]. Y. A. Kuznetsov, "Elements of Applied Bifurcation Theory", Second Edition, Springer-Verlag, 1998.

- [14]. Ali H. Nayfhe, Balakumar Balachandran, "Applied Nonlinear Dynamics, Analytical, Computational and Experimental Methods", John Wiley & Sons, Inc. 1995.
- [15]. Ian Dobson, Fernando Alvarado, Christopher L. DeMarco, "Sensitivity of Hopf Bifurcations to Power System Parameters," Proceedings of the 31st, Conference on decision and control, pp. 2928-2933, Tucson, Arizona. December 1992.
- [16]. Walve K., "Modeling of power system components at severe disturbances", CIGRÉ paper 38-18, International conference on large high voltage electric systems, August 1986.
- [17]. K. N. Srivastava, S. C. Srivastava, and P. K. Kalra, "Chaotic oscillations in power systems under disturbances", IEEE, 2nd International Conference on Advances in Power System Control, Operation and Management, pp. -, Hong Kong, December 1993.
- [18]. IEEE Special publication, "Voltage Stability Assessment: Procedures and Guides," IEEE/PES, January 2001.
- [19]. IEEE Recommended Practice for Excitation System Models for Power System Stability Studies. 1992.
- [20]. IEEE Task Report, "Load Representation for Dynamic Performance Analysis," IEEE Transactions on Power Systems, Vol 8, No. 2, pp. 472-482, May 1993.
- [21]. Ian Dobson, Liming Lu, "Voltage Collapse Precipitated by the Immediate Change in Instability When Generator Reactive Power Limits are Encountered," IEEE Transactions on circuits and systems, Vol. 39, No. 9, pp. 762-766, September 1992.
- [22]. Ali H. Nayfeh, Ahmad M. Harb, Char-Ming Chin, "Bifurcations in a Power System Model," ISCAS '95., 1995 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, vol.1 pp. 283-286, 1995.
- [23]. Weijun Ji, Vaithianathan Venkatasubramanian, "Dynamics of a Minimal Power System: Invariant Tori and Quasi-Periodic Motions," IEEE Transactions on circuits and systems, Vol. 42, No. 12, pp 981-1000, December 1995.
- [24]. Madrigal M., Reporte de la simulación del sistema de ecuaciones diferenciales obtenido en [6] usando AUTO 97.

- [25]. Doedel Eusebius, "AUTO", Software for Continuation and Bifurcation Problems in Ordinary Differential Equations. Pasadena Calif., California Institute of Technology.
- [26]. J. Guckenheimer, P. Holmes, "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields". Springer-Verlag. 1998.
- [27]. Martin Golubitsky and Michael Dellnitz, "Algebra Lineal y ecuaciones Diferenciales con MatLab", Thomson Editores, edición en español, 2000.
- [28]. Edward R. Scheinerman, "Invitation to Dynamical Systems" The Hopkins University, Library o congressa cataloging in Publicatòn Data, 1996.
- [29]. Hsiao-Dong Chiang, Ian Dobson, Robert J. Thomas ,James S. Thorp, Lazhar Fekih-Ahmed, "On Voltage Collapse in Electric Power Systems," IEEE Transactions on Power Systems, Volume: 5 Issue: 2 , May 1990 Page(s): 601 -611.
- [30]. Hansjörg Kielhöfer, "Bifurcación Theory An Introducción to PDEs", University of Augsburg, Springer-Verlag 2004.
- [31]. Mark J. Laufenberg and M. A. Pai., "Hopf Bifurcation Control in Power Sytems with Static Var Compensators", Electrical Power and Energy Systems, Vol. 19, No. 5, pp 339-347, 1997.
- [32]. J. Hale,"Dynamics and Bifurcations", Springer-Velag: New York, 1991.
- [33]. M.W. Hirsch y S. Smale, "Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y algebra lineal", Alianza Universidad, 1983.
- [34]. Michel Artenstein, Jorge Alonso y Pablo Monzón, "Evaluación de la estabilidad de tensión en una red de potencia en base a criterios derivados de la teoría de la bifurcación mas cercana", X erlac, Décimo encuentro regional Latinoamericano de la CIGRÉ, Montevideo, Uruguay.
- [35]. Leon O. Chua and Pen-Min Lin, "Computer-Aided Analysis of electronic Cricuits:Algorithms and Computational Techniques", Prentice-Hall, inc New Jersey 1975.
- [36]. Bülent Bilir, "Bifurcation analysis of nonlinear oscillations in power systems", Ph.D. dissertation, University of Missouri-Columbia, 2000.

Apéndices

“No supongas nada, verificalo todo”

Filosofía Newtoniana

Apéndice A

Listado de archivos ODE

Aquí se muestran los dos archivos (*.ODE) de los modelos que se han estudiado en el Capítulo 4. Estos archivos contiene los parámetros del modelo, ecuaciones que describen el sistema y condiciones iniciales para la simulación que programa XPPAUT necesita.

En los siguientes archivos ODE, no importa si las letras son mayúsculas o minúsculas, el programa XPPAUT reconoce a lo dos tipos como uno solo. Pero es bueno comentar que para la versión de Linux o UNIX es necesario limitar cada línea, ya que un espacio al final de esta se detecta como algún carácter o que no se a terminado esta línea para continuar con la siguiente. Algunos parámetros o variables en los listados tienen diferente nombre o letra para no repetir las que ya han sido ocupadas. Las ecuaciones muy largas que estén en estos archivos se escriben en el siguiente renglón, en el archivo ODE se debe escribir en un solo renglón.

Modelo 2:

#Sistem2a.ode (Polar) Modelo 2 "Sistema eléctrico de potencia con carga dinámica"

par Q1=10,kpw=0.4,kpv=0.3,kqw=-0.03,kqv=-2.8,kqv2=2.1

par t1=8.5,po=0.6,qo=1.3,p1=0,c=12,yop=8,top=-0.2094

par eop=2.5,ym=5,tm=-0.08726,em=1,pm=1,m=0.3,dmm=0.05

$p = -v * eop * yop * \sin(d + top) - v * em * ym * \sin(d - dm + tm) + (v^2) * (yop * \sin(top) + ym * \sin(tm))$

$q = v * eop * yop * \cos(d + top) + v * em * ym * \cos(d - dm + tm) - (v^2) * (yop * \cos(top) + ym * \cos(tm))$

$v' = (1 / (t1 * kqw * kpv)) * (-kqw * (po + p1 - p) + (kpw * kv - kqw * kpv) * v + kpw * (qo + q1 - q) + kpw * kv2 * v^2)$

dm' = w

$$w'=(1/m)*(-dmm*w+pm+em*ym*v*\sin(d-dm-tm)+em^2*ym*\sin(tm))$$

$$d'=(1/kqw)*(-kqv2*v^2-kqv*v-qo-q1+q)$$

$$dm(0)=0.2858$$

$$w(0)=0$$

$$d(0)=0.1066$$

$$V(0)=1.2295$$

@ Dt=0.01, total=40

done

Apéndice B

XPPAUT

(X-Windows Phase Plane Plus Auto)

B.1 Introducción

Este software es una herramienta para simular, animar y analizar sistemas dinámicos, como resolver ecuaciones diferenciales, ecuaciones de diferencia, ecuaciones de retardo, integrales de Volterra, sistemas discretos dinámicos, bifurcación, entre otros. El programa es desarrollado desde un programa de DOS que fue escrito originalmente para ilustrar fácilmente la dinámica de un modelo simple de una membrana excitable. Después el programa en DOS, PHASEPLANE, se convirtió en un proyecto comercial y fue usado por muchos años por un número de pacientes personas. A principios de 1990 se traslado el programa en DOS a X Window en ambiente UNIX. El programa tiene desarrollado un gran convenio desde entonces y está disponible sin costo para cualquiera que desee obtenerlo de Internet. También se compiló con éxito la versión X para correrla bajo varias plataformas de 32-bits de Windows y también sobre Mac OS X. Para las simulaciones de este trabajo se utilizo **XPPAUT**, como su versión WINPP sobre una plataforma para Windows XP; tanto el **XPPAUT** para Linux en versión superior a la versión 5.0.

XPP contiene el código para un programa muy popular de bifurcación llamado AUTO [33], estos programas se usan de manera conjunta, ya que los valores de un programa se usan en el otro y viceversa. XPPAUT tiene la capacidad de manejar hasta 1800 ecuaciones diferenciales. Se cuenta además con 10 ventanas graficas visibles al mismo tiempo con una variedad de colores. Además se incluyen varios subprocesos, tales como histogramas, transformada rápida de Fourier, condiciones de equilibrio y estabilidad, flujos de campo, mapas de Poincaré, entre otros.

Existen otros programas disponibles para el estudio de ecuaciones diferenciales los cuales requieren que el problema sea compilado antes de usarlos, XPP no necesita de esto, ya que se basa en un compilador de formulas, por lo tanto las ecuaciones diferenciales, condiciones de frontera o cualquier otra fórmula debe ser escrita en notación algebraica. Entonces la unidad básica para XPP es un simple archivo ASCII llamado archivo ODE, el cual contiene las ecuaciones, parámetros, variables, condiciones de frontera y funciones para cierto modelo, puede incluir parámetros numéricos como paso y método de integración, aunque estos pueden cambiarse dentro de XPP. Las graficas y subprocesos se realizan dentro de este último utilizando el ratón y varios menús de botones. Si se desea conocer este software de una manera más completa se recomienda leer el tutorial que se encuentra en la página Web [17].

B.2 Creando y corriendo un archivo ODE

La parte básica para **XPP** es un sencillo archivo en código ASCII que tiene las ecuaciones, parámetros, variables, condiciones iniciales, condiciones de frontera y funciones para su modelo. Los métodos de solución de ecuaciones, los gráficos y el pos procesamiento, son todos hechos dentro del programa usando el mouse, el teclado y varios menús y botones.

Se debería apreciar que el archivo **ODE** como un esquema para explorar el sistema; Su papel principal es configurar el número de variables, parámetros y funciones. Algunos parámetros pueden ser cambiados dentro del programa, como son: valores de datos iniciales, parámetros y condiciones de frontera. Sin embargo, la dimensión, los nombres de las variables y los nombres de los parámetros son siempre fijos, más a un el orden no es muy importante.

Estos archivos **ODE** el analizador sintáctico de **XPP** lee para crear el código maquina utilizable. Lo cual consiste de combinaciones de líneas, en cada comienzo con una letra clave. Las líneas no pueden continuar sobre la siguiente línea pero la longitud de las líneas es de 256 caracteres. Por convención los archivos **XPP** terminan con la extensión **.ode**. Vale la pena aclarar que es el mismo formato para el WINPP de Windows.

B.3 FORMATO DE UN ARCHIVO ODE

```

# Comentarios
d<name>/dt=<formula>
<name>'=<formula>
<name>(t)=<formula>
volt<name>=<formula>
<name>(t + 1)=<formula>

# Arreglos
x[n1..n2]'=...[j] [j-1]
markov <name> <nstates>
{t01} {t02} ... {t0k-1}
{t10} ...
...
{tk-1,0} ... {tk-1 k-1}
aux <name>=<formula>

# Parámetros definidos como fórmula
!<name>=<formula>
<name>=<formula>
parameter <name1>=<value1>,<name2>=<value2>, ...
# O también se escribe como:
par <name1>=<value1>,<name2>=<value2>, ...
wiener <name1>, <name2>, ...
number <name1>=<value1>,<name2>=<value2>, ...
<name>(<x1>,<x2>,...,<xn>)=<formula>
table <name> <filename>
table <name> % <npts> <xlo> <xhi> <function(t)>
global sign {condition} {name1=form1;...}
init <name>=<value>,...
<name>(0)=<value> or <expr>
bdry <expression>
0= <expression>

```

← Para DAE's

```

solv <name>=<expression>           ← Para DAE's
special <name>=conv(type,npts,ncon,wgt,rootname)
fconv(type,npts,ncon,wgt,rootname,root2,function)
sparse(npts,ncon,wgt,index,rootname)
fsparse(npts,ncon,wgt,index,rootname,root2,function)
# comments
@ <name>=<value>, ...
set <name> {x1=z1,x2=z2,...,}
options <filename>
" Active comments
" {name1=val1,name2=val2,...}      ← algún texto particularmente detallado
done

```

El tipo de sistemas de ecuaciones que se obtienen de los sistemas eléctricos de potencia modelados en forma dinámica y que se estudian en esta tesis son sistemas de ecuaciones diferenciales y diferenciales-algebraicas, como ejemplo se tiene un sistema de ecuaciones diferencial-algebraico en un archivo ODE, este sistema corresponde a un oscilador de relajación. Como ejemplos:

Se tiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 \omega' &= v \\
 0 &= v(1-v^2) - \omega
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

Dado que el archivo*.ode es el siguiente:

```

Dae_ex3.ode
w'=v
0=v(1-v^2)-w
W(0)=0
solv v=1
aux vv=v

```

@ NEWY_ITER = 1000, NEW_TOL = 1e-3, JAC_EPS = 1e-5, METH=qualrk
done

Los parámetros numéricos importantes para este tipo de sistemas son: el número máximo de iteraciones, la tolerancia para el método de Newton, el valor de épsilon para el cálculo del Jacobiano.

Otros ejemplos son los siguientes, *el formato para ecuaciones integrales es:*

La ecuación integral general

$$u(t) = f(t) + \int_0^t K(t,s,u(s)) ds$$

se escribe de la siguiente forma en el archivo **ODE**

$$u=f(t) + \text{int}\{K(t,t',u)\}$$

La ecuación de convolución

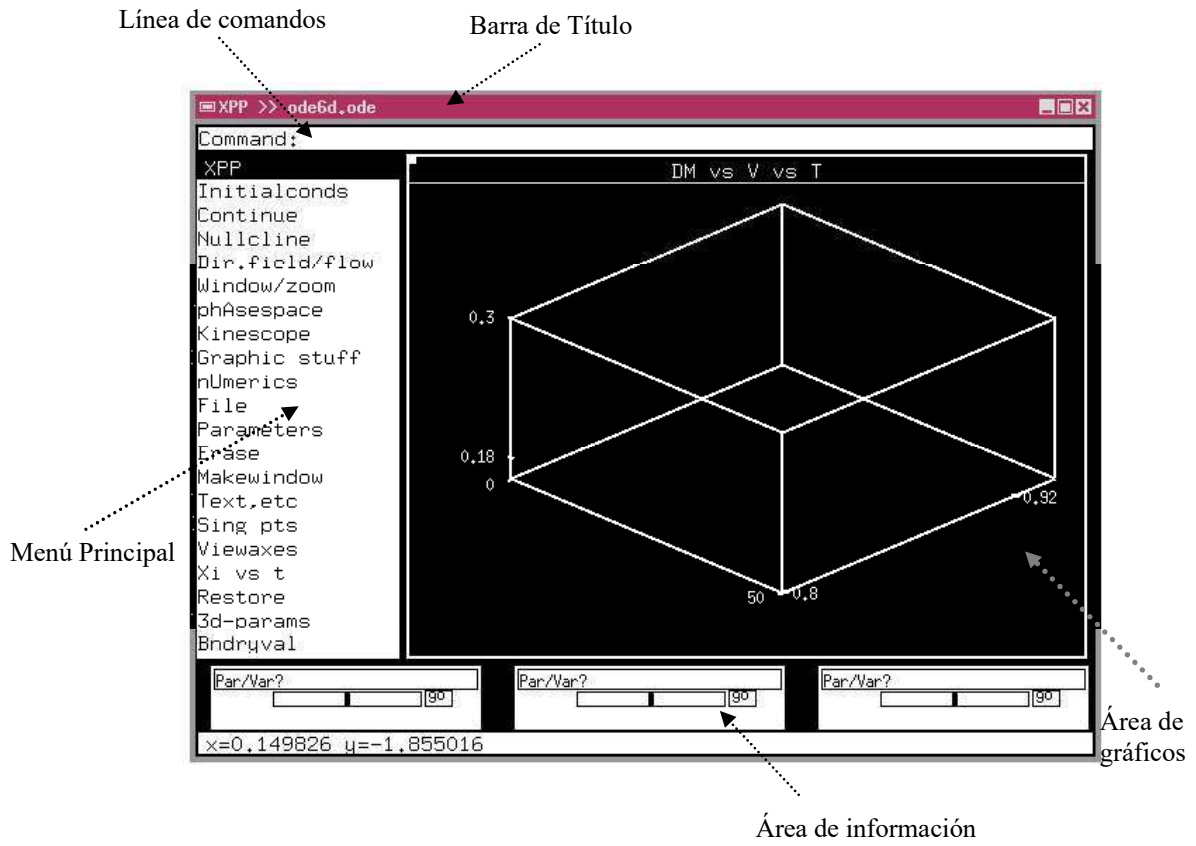
$$v(t) = \exp(-t) + \int_0^t e^{-(t-s)^2} v(s) ds$$

se podría escribir como

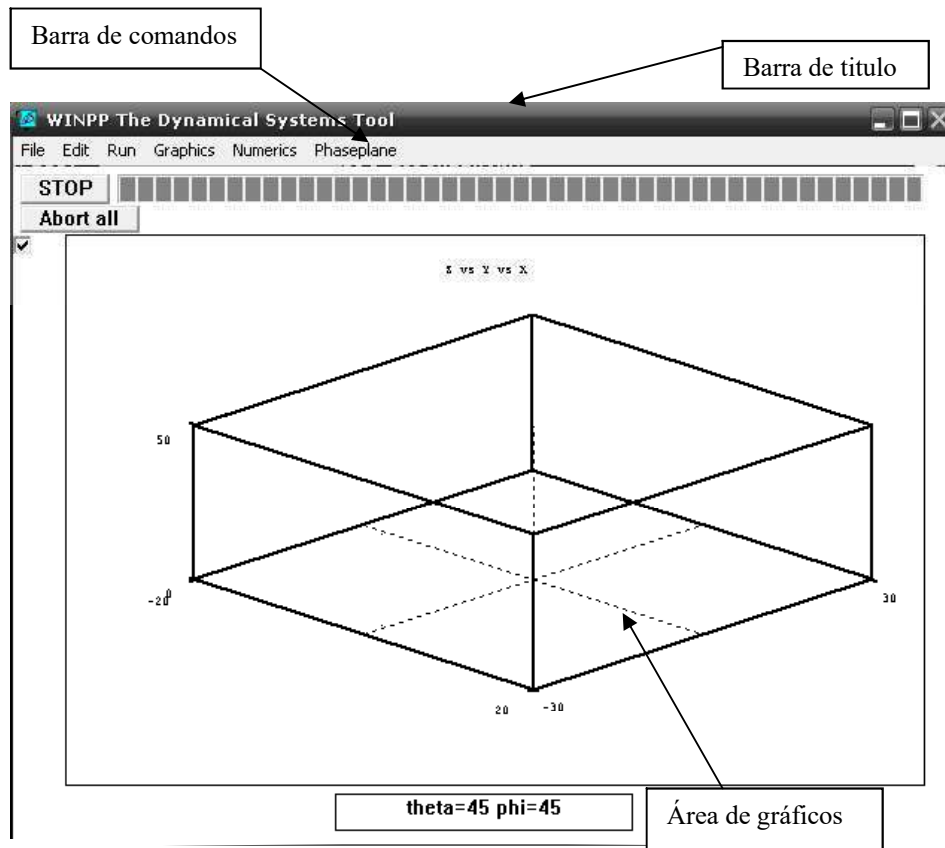
$$v(t) = \exp(-t) + \text{int}\{\exp(-t^2) \# v\}$$

B.4 PANTALLA PRINCIPAL (XPP)

La pantalla principal contiene una línea de comandos en la parte superior, a la izquierda se tienen todos los menús, en el centro se tiene el área de gráficos y en la parte inferior se cuenta con una línea de información.



En la pantalla de WINPP es muy similar:



Además de la pantalla principal existen otras pantallas, que son las siguientes:

Ventana de parámetros: esta tiene los nombres y valores de los parámetros, los cuales se pueden cambiar en esta directamente o en la pantalla principal.

Ventana de condiciones iniciales: esta contiene nombres y valores de las condiciones iniciales, estos se pueden cambiar en esta pantalla o en la pantalla principal.

Ventana de ecuaciones: esta contiene las ecuaciones diferenciales que describen el sistema.

Ventana condiciones frontera: esta contiene las condiciones de frontera para el revolvedor de problemas de valores frontera.

Ventana navegadora de los datos: esta permite examinar y manipular los números generados por la simulación, también permite importar archivos para graficarlos, es como una hoja de cálculo.

B.5 DESCRIPCIÓN DE ALGUNOS COMANDOS

Para cada elemento del menú principal así como para los submenús hay un comando en el teclado, este comando se trata de la letra mayúscula del comando en el menú, entonces para realizar algún proceso se puede hacer clic en el menú o usar el comando de teclado.

Salir de XPP: para salir de XPP solo se puede hacer mientras no este realizando ningún cálculo, entonces oprimir **(F)ile,(Q)uit** y contestar a la pregunta **(Y)es**, esta secuencia **FQY** es equivalente a hacer clic en el menú principal y submenús correspondientes, cabe aclarar que es más fácil utilizar los comandos de teclado.

Si el programa esta realizando algún cálculo se debe utilizar la tecla **(Esc)**. Esto detiene los cálculos, si las integraciones son demasiadas se utiliza la tecla slash **(/)**.

Integrar las ecuaciones: oprimir **(I) (G)** para calcular la trayectoria, la solución será graficada en la pantalla principal después de oprimir **(X)** y seleccionar la variable “x” la cual será graficada contra el tiempo.

Cambio de parámetros: los parámetros y las condiciones iniciales pueden ser cambiadas esto puede hacerse directamente en las ventanas correspondientes, otra forma de hacer esto

es oprimir (**P**) y escribir el nombre del parámetro presionar (**Enter**), cambiarlo, presionar (**Enter**) u (**OK**) en la ventana correspondiente después del cambio de parámetros.

Para ver la nueva solución es necesario integrar las ecuaciones, oprimir (**I**) (**G**) (**X**) como antes, y también podemos usar el comando (**W**)indow (**F**)it para observar la trayectoria completa, para poder ver solo cierta parte de la trayectoria de la solución usar (**W**) (**Z**) y definir el área con el ratón, o si se desea definir el área manualmente usar (**W**) (**W**).

Para etiquetar los ejes de la grafica usar (**V**) (**2**) esto aparece una nueva ventana en donde se pueden llenar los espacios correspondientes oprimir (**OK**) o (**Tab**) para aceptar.

Graficas: XPP siempre borra los datos de la integración previa. Entonces para graficar las curvas con varios parámetros o condiciones iniciales se usa (**G**)raphic (**F**)reeze para poder congelar la curva e incluso cambiar el color, además de grabar esta curva en un archivo (Postscript) usando (**G**) (**P**).

Cambio de valores iniciales: estos se cambian de la misma manera que los parámetros en la ventana correspondiente a los valores iniciales. También se puede utilizar (**I**) (**N**), y en la línea de comandos se introducen las nuevas condiciones iniciales. Si se utiliza (**I**) (**G**) el programa integra las ecuaciones con las condiciones actuales. Pero si se utiliza (**I**) (**L**) utiliza los valores finales de la última integración como los iniciales de la siguiente. Finalmente si se elige (**C**) el proceso de integración puede continuar para un periodo de tiempo más grande. Podría usarse (**I**) (**R**) para variar un valor inicial en un rango especificado.

Resultados numéricos: en la ventana navegadora de datos se pueden manipular los resultados de salida usando simplemente las flechas del teclado o los botones de esa ventana. Esta ventana es muy útil si se requiere saber el valor de alguna variable en el tiempo t y viceversa, oprimiendo el botón (**Find**).

Esta puede llegar a ser mucho más útil si se desea conocer el valor de una cantidad auxiliar (Formula) que no está en el archivo ODE simplemente oprimiendo el botón (**add column**). Esto podría hacerse pero es necesario quitar XPP y modificar el archivo ODE, lo cual es

más tardado. Si no se requiere utilizar las opciones de graficación para estos datos se puede guardar un archivo ASCII para posteriormente ser graficados en otro software.

Puntos fijos y estabilidad: Existen puntos fijos o puntos de equilibrio para las ecuaciones diferenciales. Cualquier grupo de variables para las cuales la razón de cambio es cero para un sistema dinámico, se denomina punto fijo. Cuando se esta en este punto el sistema no sufre cambio cuando t tiende a infinito. XPP linealiza el sistema alrededor de un punto fijo obteniendo una matriz, si todos los eigenvalores tienen parte real negativa el punto fijo es asintóticamente estable, pero si al menos un eigenvalor tiene parte real positiva el punto fijo es inestable. Cuando los eigenvalores tienen parte real igual a cero no se puede decir nada de las ecuaciones linealizadas.

Para encontrar un punto fijo usando XPP, oprimir (S) (G) y elegir si se quiere ver los eigenvalores, además de tener la información del punto fijo y estabilidad que se proporcionan en una ventana.

Menú de control numérico: este menú es de los más importantes dentro de XPP, ya que este grupo de parámetros controla todos los algoritmos numéricos. Algunos de los más importantes son los que se mencionan junto con sus comandos:

Bound: previene una sobrecarga numérica deteniendo los cálculos cuando cualquier variable o ecuación auxiliar excede este valor, (U) (B).

Total: es el tiempo máximo de integración, (U) (T).

Dt: es el paso de tiempo para la integración, (U) (D).

nOut: es muy importante, este valor indica la frecuencia con la que se desea se grafique o se impriman los datos, (U) (O).

tRansient: este valor indica que tan largo integrar antes de guardar y graficar la solución, (U) (R).

Start time: indica al integrador el tiempo de inicio de integración, (U) (S).

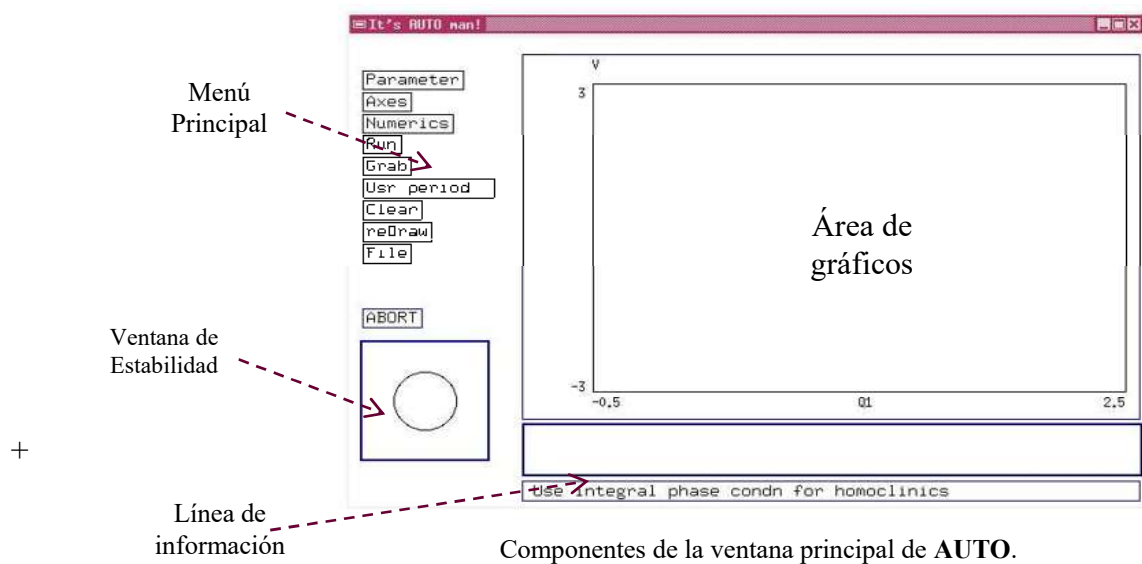
Method: sirve para seleccionar el método que se usará para integrar las ecuaciones, los métodos disponibles son los que se pueden encontrar en cualquier libro de métodos numéricos, además cuenta con un método muy robusto el método “Gear”, el cual es utilizado cuando las ecuaciones son imposibles de integrar con métodos normales. (U) (M).

Esc: al oprimir este comando se regresa al menú principal.

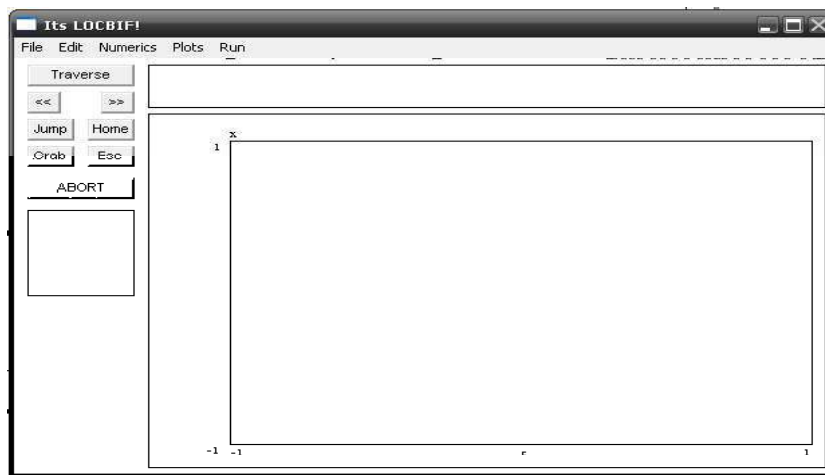
B.6 Pantalla secundaria (AUTO)

Uno de los objetivos principales de los sistemas dinámicos no lineales es el estudio de cómo los sistemas dependen de sus parámetros, el estudio de esta dependencia paramétrica de ecuaciones diferenciales se llama (**Continuación**) y el análisis de cómo las soluciones aparecen y desaparecen cuando los parámetros se varían es llamado (**Teoría de Bifurcación**).

El programa AUTO es uno de los mejores paquetes de continuación disponibles para el estudio del comportamiento de sistemas dinámicos no lineales como una función de los parámetros. Este es parte de XPP y se puede pasar fácilmente entre los dos programas simplemente presionando la ventana correspondiente. La ventana de AUTO es la que se muestra a continuación.



Ahora se muestra la versión de AUTO para WINPP, el LOCBIF:



Que en realidad esta versión es muy limitada al AUTO. Por lo cual la mayor parte de las simulaciones se realizaron de XPPAUT versión 5.0 y AUTO de la misma versión.

Esta ventana de AUTO contiene un menú principal, el área de gráficos, al área donde se indica la estabilidad del sistema y una línea de información. En el menú se encuentran todos los controles de este programa, los cuales se mencionan brevemente, además de sus comandos en mayúsculas:

Parameter (P): es lo que se debe indicar primero al programa, cuales parámetros se utilizarán en el análisis de bifurcación.

Axes (A): en este se ajustan los ejes, y puede ser de 7 formas según sea necesario, la más conveniente si se trata de órbitas periódicas es hI-lo, (I).

Numerics (N): este es un nuevo menú, es el más importante de todos porque controla todo el análisis de bifurcación, es decir; aquí se controla el número de puntos para el análisis, el paso inicial de bifurcación, así como el máximo y el mínimo y los límites de del parámetro de bifurcación, entre otros.

Run (R): ejecuta el análisis de bifurcación y dependiendo de la situación se despliega otro menú, en este se puede escoger entre un análisis de estado estable o periódico, (S) o (P).

Una ventana relacionada en este proceso es la de estabilidad, donde se indica esta ultima para puntos fijos por medio de eigenvalores, y para órbitas periódicas por medio de los multiplicadores de Floquet, así, los que están dentro del círculo son estables y los que están fuera de este son inestables.

Cuando se ha logrado obtener el diagrama de bifurcación, se pueden tener dos tipos de líneas y dos tipos de círculos, los puntos fijos son las líneas gruesas, soluciones periódicas estables son círculos sólidos, las líneas delgadas y círculos abiertos son puntos fijos inestables y soluciones periódicas inestables respectivamente. Adicionalmente se encuentran cruces con números, estas representan puntos especiales entre los que se encuentran son los siguientes:

- ❖ **EP:** Punto final de una rama.
- ❖ **LP:** Punto límite o de vuelta de una rama (Saddle Node bifurcation).
- ❖ **TR:** Bifurcación Toroide de una solución periódica.
- ❖ **PD:** Bifurcación de doble periodo.
- ❖ **UZ:** función definida de usuario.
- ❖ **MX:** Falla en la convergencia.
- ❖ **BP:** Bifurcación o punto de rama.
- ❖ **HB:** Bifurcación Hopf.

Grabbing (G): este comando sitúa el cursor en todos los puntos de análisis del diagrama usando (**Tab**) donde se encuentran los puntos anteriores, que pueden usarse para continuar los cálculos con AUTO, buscando otras bifurcaciones o importando órbitas a XPP, se puede leer la información del punto en la parte inferior de la ventana y también la estabilidad en la ventana correspondiente para cada punto de el diagrama de bifurcación.

File (F): este comando es muy importante, permite importar órbitas a XPP, guardar y cargar los diagramas, imprimir diagramas en archivos postscript y ASCII, limpiar diagramas, y escribir toda la información de bifurcación.

Cualquier cálculo se puede detenerse elegantemente presionando el botón “Abort”, si el número de ramas es grande es necesario presionar varias veces este botón.

B.7 Recomendaciones para el manejo de XPPAUT

Estas recomendaciones de utilización del software se hacen debido a las dificultades que se encontraron durante el manejo de este.

- ❖ Primeramente se recomienda instalar el software en una computadora con gran capacidad de procesamiento y sobretodo bastante capacidad de memoria para evitar la pérdida de tiempo durante las simulaciones. Debido al bloqueo que frecuentemente se presenta en el teclado, la única forma de acceder a los comandos es por medio del ratón dificultando el manejo.
- ❖ Es importante que cuando este programa este operando hay que cerrar todas las demás aplicaciones que se puedan utilizar, sobre todo los antivirus que en la mayor parte de el tiempo están en proceso, más a un lo antivirus que dominan al sistema como norton o panda, tiene uno la necesidad de desinstalar completamente del sistema.- Ya que si no esto ocasionaría que no funcionara XPPAUT.
- ❖ Cuando se trata de obtener los diagramas de bifurcación, casi siempre es necesario presionar los dos botones (**Ok**) en las ventanas de condiciones iniciales y parámetros.
- ❖ Cuando ya se han obtenido los puntos de equilibrio preferentemente estables con los comandos (**S**)(**G**). La forma de pasar estos valores a la ventana de condiciones iniciales es con los comandos (**I**)(**L**).
- ❖ Al importar la dinámica del sistema de algún punto del diagrama de bifurcación, se pueden obtener los valores de las variables de estado trasladándolas a la ventana de condiciones iniciales con los comandos (**I**)(**G**) y usar estas como tales. Si solo se desea obtener la dinámica en cierto punto del diagrama sin modificar las condiciones iniciales, debe oprimirse el botón (**Ok**) de la ventana de condiciones iniciales.
- ❖ Para obtener la dinámica del sistema cuando ya es de tipo caótico, las condiciones iniciales para obtener esta deben ser de puntos del diagrama de bifurcación muy cercanos a este tipo de comportamiento, es decir; de puntos generalmente marcados como de doble periodo o de algún otro tipo de medio por el cual el caos puede ser generado. De esta forma solo es necesario variar el parámetro de bifurcación para capturar la dinámica.

Apéndice C

Obtención de las ecuaciones diferenciales del modelo

El sistema eléctrico de potencia que se estudia en el modelo, fue propuesto originalmente por Ian Dobson, Hsian Dog Chaing, James S. Thorp, en su artículo “A Model Of Voltage Collapse In Electric Power Systems” [2]. El sistema es el siguiente:

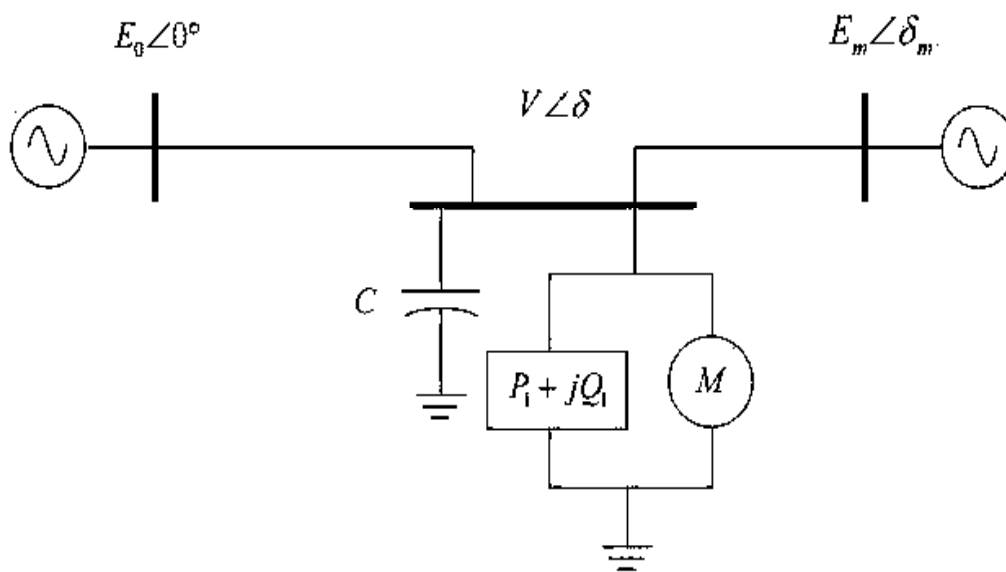


Figura A.1 Sistema eléctrico de potencia de tres buses con carga dinámica

El sistema está formado por dos generadores, el de la izquierda es considerado como nodo de referencia, y dos líneas de transmisión que alimentan la carga en el nodo central. La carga es una combinación de cargas de tipo estático y dinámico. La parte estática esta representada por una carga de potencia constante y la dinámica por un motor de inducción. Además un capacitor que se encuentra conectado en paralelo con la carga.

Este sistema puede ser modelado con el siguiente diagrama.

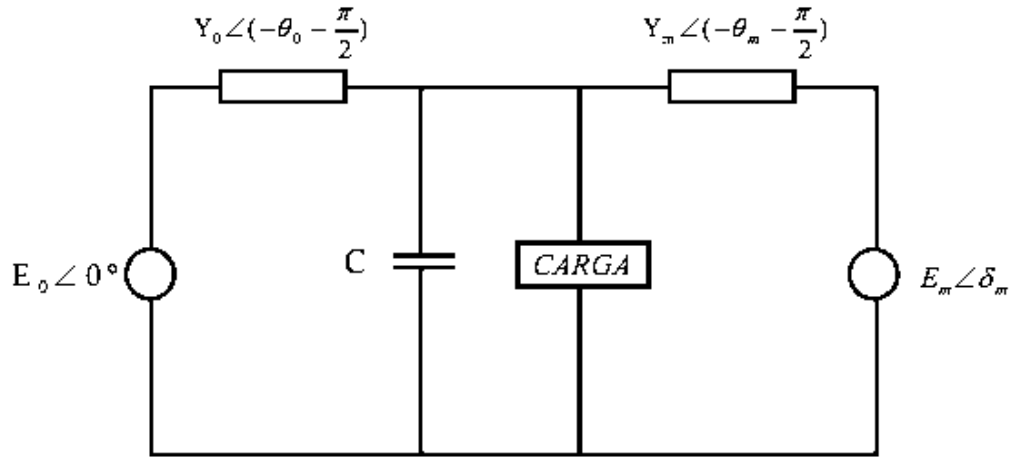


Figura A.2 Modelo del sistema de potencia.

El capacitor en este modelo sirve para incrementar el voltaje en este nodo, este puede ser incluido en un equivalente de Thevenin con el nodo slack, para incrementar el voltaje de Thevenin E_0' al aumentar C . Entonces utilizando la identidad de Euler: $e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x$, las admitancias de las líneas de transmisión se pueden expresar de la misma forma:

$$\begin{aligned}
 Y_0 e^{-j\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} &= Y_0 \left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - j \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right) \\
 Y_0 e^{-j\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} &= Y_0 (-\sin \theta - j \cos \theta) \\
 Y_0 e^{-j\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} &= -Y_0 \sin \theta - j Y_0 \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$

Tomando entonces a la línea de la izquierda y el capacitor para formar el equivalente de Thevenin, la admitancia total es:

$$\begin{aligned}
 Y_{Th} &= -Y_0 \sin \theta - j Y_0 \cos \theta + j C \\
 Y_{Th} &= -Y_0 \sin \theta + j (C - Y_0 \cos \theta) \\
 Y_{Th} &= G + j B
 \end{aligned}
 \tag{A.2}$$

Obteniendo su magnitud y ángulo:

$$\begin{aligned}
 |Y_{Th}| &= \sqrt{G^2 + B^2} \\
 |Y_{Th}| &= \sqrt{(Y_0 \sin \theta)^2 + (C - Y_0 \cos \theta)^2} \\
 |Y_{Th}| &= \sqrt{Y_0^2 \sin^2 \theta + (C^2 - 2CY_0 \cos \theta + Y_0^2 \cos^2 \theta)} \\
 |Y_{Th}| &= \sqrt{Y_0^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + C^2 - 2CY_0 \cos \theta} \\
 |Y_{Th}| &= \sqrt{Y_0^2 + C^2 - 2CY_0 \cos \theta} \\
 |Y_{Th}| &= \sqrt{Y_0^2 (1 + C^2 Y_0^{-2} - 2C Y_0^{-1} \cos \theta)} \\
 |Y_{Th}| &= Y_0 (1 + C^2 Y_0^{-2} - 2C Y_0^{-1} \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \\
 \theta_{Th} &= \tan^{-1} \left(\frac{C - Y_0 \cos \theta}{-Y_0 \sin \theta} \right)
 \end{aligned}$$

(A.3)

Entonces el voltaje de Thevenin es:

$$\begin{aligned}
 E_{th} &= \frac{-jE_0 C^{-1}}{-jC^{-1} + \frac{1}{Y_0}} \\
 E_{Th} &= \frac{E_0 Y_0}{Y_0 + jC} = \frac{E_0 Y_0}{Y_0'} \\
 E_{Th} &= \frac{E_0}{(1 + C^2 Y_0^{-2} - 2C Y_0^{-1} \cos \theta)^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned}$$

(A.4)

De esta forma todos los elementos del equivalente de Thevenin son:

$$E_{Th} = \frac{E_0}{(1 + C^2 Y_0^{-2} - 2C Y_0^{-1} \cos \theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\theta_{Th} = \tan^{-1} \left(\frac{C - Y_0 \cos \theta}{-Y_0 \sin \theta} \right)$$

(A.5)

$$|Y_{Th}| = Y_0 \left(1 + C^2 Y_0^{-2} - 2C Y_0^{-1} \cos \theta \right)^{\frac{1}{2}}$$

Estos elementos corresponden al diagrama siguiente:

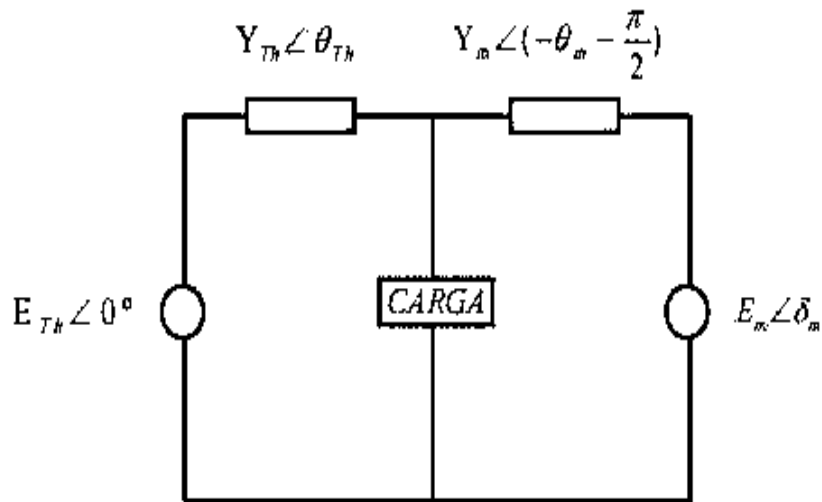


Figura A.3 Modelo del sistema con el equivalente de Thevenin en la parte izquierda.

La admitancia de Thevenin de este nuevo modelo puede deducirse como las de la Figura A.2

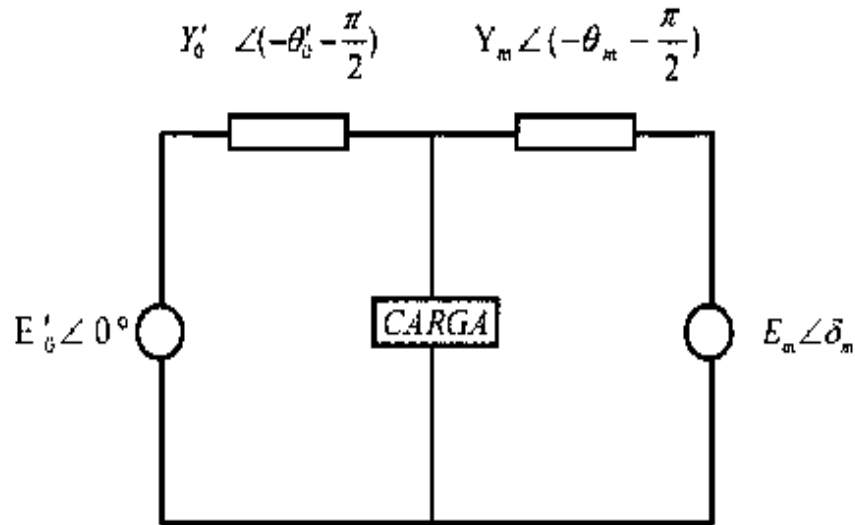


Figura A.4 Modelo del sistema con la admitancia izquierda remodelada

Donde:

$$\begin{aligned} \theta'_0 &= -\theta_{Tn} - \frac{\pi}{2} \\ \theta'_0 &= -\tan^{-1} \left(\frac{C - Y_0 \cos \theta}{-Y_0 \sin \theta} \right) - \frac{\pi}{2} \\ E'_0 &= E_{Tn} \\ Y'_0 &= Y_{Tn} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Una vez terminada esta simplificación, se procede a establecer la ecuación dinámica del generador que no es referencia. Entonces, la ecuación de oscilación para el generador es:

$$M\ddot{\delta}_m + d_m\dot{\omega} = P_m - P_e \quad (\text{A.7})$$

Donde P_e es la potencia eléctrica inyectada en ese nodo por el generador:

$$P_e = \sum_{j=1}^n V_i V_j Y_{ij} \cos(\theta_{ij} - \delta_i - \delta_j) \quad (\text{A.8})$$

Para este caso la potencia eléctrica de salida en terminales del generador es:

$$\begin{aligned}
 Pe &= VE_m Y_m \cos\left(-\theta_m - \frac{\pi}{2} - \delta_m + \delta + \pi\right) + E_m^2 Y_m \cos\left(-\theta_m - \frac{\pi}{2}\right) \\
 Pe &= VE_m Y_m \cos\left(-\theta_m - \delta_m + \delta + \frac{\pi}{2}\right) + E_m^2 Y_m \cos\left(-\theta_m - \frac{\pi}{2}\right) \\
 Pe &= -VE_m Y_m \sin(\delta - \delta_m - \theta_m) - E_m^2 Y_m \sin(\theta_m)
 \end{aligned}$$

(A.9)

Entonces la ecuación de oscilación se puede describir como sigue:

$$\begin{aligned}
 M\ddot{\delta}_m + d_m\dot{\omega} &= P_m - \left(-VE_m Y_m \sin(\delta - \delta_m - \theta_m) - E_m^2 Y_m \sin(\theta_m)\right) \\
 M\ddot{\delta}_m + d_m\dot{\omega} &= P_m + VE_m Y_m \sin(\delta - \delta_m - \theta_m) + E_m^2 Y_m \sin(\theta_m)
 \end{aligned}$$

(A.10)

Las ecuaciones de potencia real y reactiva que entran hacia la red en el nodo de carga tiene la forma (V^*I):

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{j=1}^n V_i V_j Y_{ij} \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \\
 Q &= -\sum_{j=1}^n V_i V_j Y_{ij} \sin(\theta_{ij} - \delta_i - \delta_j)
 \end{aligned}$$

(A.11)

Para nuestro modelo tomaremos el negativo de P y Q que corresponden a la potencias demandadas por la carga:

$$\begin{aligned}
 P &= VE_0' Y_0' \cos\left(-\delta - \theta_0' - \frac{\pi}{2} + \pi\right) + VE_m Y_m \cos\left(-\delta + \delta_m - \theta_m - \frac{\pi}{2} + \pi\right) - V^2 \left(Y_0' \sin \theta_0' + Y_m \sin \theta_m\right) \\
 P &= -VE_0' Y_0' \sin\left(-\delta - \theta_0'\right) - VE_m Y_m \sin\left(-\delta + \delta_m - \theta_m\right) - V^2 \left(Y_0' \sin \theta_0' + Y_m \sin \theta_m\right)
 \end{aligned}$$

(A.12)

$$P = VE_0' Y_0' \sin(\delta + \theta_0') + VE_m Y_m \sin(\delta - \delta_m + \theta_m) - V^2 \left(Y_0' \sin \theta_0' + Y_m \sin \theta_m\right)$$

$$Q = -VE_0'Y_0' \sin\left(-\delta - \theta_0' - \frac{\pi}{2} + \pi\right) - VE_mY_m \sin\left(-\delta + \delta_m - \theta_m - \frac{\pi}{2} + \pi\right) + V^2\left(Y_0' \cos \theta_0' + Y_m \cos \theta_m\right)$$

$$Q = -VE_0'Y_0' \cos\left(-\delta - \theta_0'\right) - VE_mY_m \cos\left(-\delta + \delta_m - \theta_m\right) + V^2\left(Y_0' \cos \theta_0' + Y_m \cos \theta_m\right)$$

(A.13)

$$Q = -VE_0'Y_0' \cos\left(\delta + \theta_0'\right) - VE_mY_m \cos\left(\delta - \delta_m + \theta_m\right) + V^2\left(Y_0' \cos \theta_0' + Y_m \cos \theta_m\right)$$

Entonces tomando el negativo de estas potencias se obtiene la potencia total de salida en el nodo de carga:

$$P = -VE_0'Y_0' \sin\left(\delta + \theta_0'\right) - VE_mY_m \sin\left(\delta - \delta_m + \theta_m\right) + V^2\left(Y_0' \sin \theta_0' + Y_m \sin \theta_m\right)$$

$$Q = VE_0'Y_0' \cos\left(\delta + \theta_0'\right) + VE_mY_m \cos\left(\delta - \delta_m + \theta_m\right) - V^2\left(Y_0' \cos \theta_0' + Y_m \cos \theta_m\right)$$

(A.14)

El modelo de la carga estática y el motor de inducción propuesto por Walve [18], es el siguiente:

$$P = P_0 + P_1 + K_{pw}\dot{\delta} + K_{pv}(V + T\dot{V})$$

(A.15)

$$Q = Q_0 + Q_1 + K_{qw}\dot{\delta} + K_{qv}V + K_{qv2}V^2$$

(A.16)

Donde P_0 y Q_0 son las constantes real y reactiva del motor, P_1 y Q_1 representan a la carga modelada como potencia constante.

Despejando $\dot{\delta}$ de (A.16) y sustituyendo Q de las ecuaciones (A.14) o (A.13) se obtiene:

$$\dot{\delta} = K_{qv}^{-1}\left(-K_{qv2}V^2 - K_{qv}V + Q - Q_0 - Q_1\right)$$

$$\dot{\delta} = K_{qv}^{-1} \begin{pmatrix} -K_{qv2}V^2 - K_{qv}V - Q_0 - Q_1 + VE_0'Y_0' \cos(\delta + \theta_0') \\ +VE_mY_m \cos(\delta - \delta_m + \theta_m) - V^2(Y_0' \cos \theta_0' + Y_m \cos \theta_m) \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Despejando \dot{V} de (A.15) y sustituyendo en (A.14) y (A.17) se tiene:

$$\begin{aligned} TK_{qw}K_{pv}\dot{V} = & -K_{qw} \left(P_0 + P_1 - (-VE_0'Y_0' \sin(\delta + \theta_0') - VE_mY_m \sin(\delta - \delta_m + \theta_m) + V^2(Y_0' \sin \theta_0' + Y_m \sin \theta_m)) \right) \\ & + (K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv})V + K_{pw} \left(Q_0 + Q_1 - \begin{pmatrix} VE_0'Y_0' \cos(\delta + \theta_0') + VE_mY_m \cos(\delta - \delta_m + \theta_m) \\ -V^2(Y_0' \cos \theta_0' + Y_m \cos \theta_m) \end{pmatrix} \right) \\ & + K_{pw}K_{qv2}V^2 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

De esta forma las ecuaciones (A.10), (A.17) y (A.18) describen en forma dinámica el comportamiento del sistema de potencia. Para efectos de simulación es necesario reescribirlas como ecuaciones de primer orden recordando que $\delta_m = \omega$ en la ecuación de oscilación. D esta forma se obtiene un sistema de cuatro dimensiones.

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_m &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{M} (P_m - D_m \omega + VE_mY_m \sin(\delta - \delta_m - \theta_m) + E_m^2 Y_m \sin \theta_m) \\ \dot{\delta} &= K_{qv}^{-1} (-K_{qv2}V^2 - K_{qv}V + Q - Q_0 - Q_1) \\ \dot{V} &= \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}} \left[-K_{qw} (P_0 + P_1 - P) + (K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv})V + K_{pw} (Q_0 + Q_1 - Q) + K_{pw}K_{qv2}V^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$