

**FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA**

**ANÁLISIS DE FLUJOS DE POTENCIA NO ITERATIVO  
EN BASE A SERIES DE POTENCIAS**

**PROYECTO DE TESIS**

**Que para obtener el Título de  
INGENIERO ELECTRICISTA**

**Presenta  
José Alonso Alvarado**

**Asesor de Tesis  
Dr. Claudio Rubén Fuerte Esquivel**

**Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo**

**Noviembre del 2008**

# Agradecimientos

Expreso mis más sinceros agradecimientos a las siguientes personas, quienes fueron parte fundamental, no solo durante la realización del presente trabajo, sino desde el inicio y el transcurso de mi preparación.

Quiero expresar mi más grande y sincero agradecimiento a mis padres, Santana Alonso Arellano y Rufina Alvarado Pérez, quienes con su apoyo incondicional, tanto económico y moral me permitieron concluir mis estudios profesionales.

A mi esposa Yunnuen Esther Villanueva Juárez y a mi hija Pamela Esther Alonso Villanueva, quienes estuvieron presente en todo momento y con sus oraciones y apoyo no dejaron que me desanimara y me animaron a seguir.

A mis hermanos Noel, Pablo, Santana y mayra, ya que son parte importante en mi vida sin ellos no hubiera salido adelante, quienes me proporcionaron amistad apoyo y confianza una de las principales herramientas para tener un mejor desempeño en mis estudios.

Quiero expresar mis agradecimientos a todos mis amigos quienes, con sus palabras de aliento me impulsaban a no doblegarme y cumplir con mis objetivos.

También quiero agradecer a todos mis profesores por el tiempo y los conocimientos aportados en especial el Dr. Claudio Rubén Fuerte Esquivel que fue el profesor con el entusiasmo que mostraba en cada clase quien me enseñó y supo transmitir el interés hacia la ingeniería eléctrica.

# Dedicatoria

*A mis padres, quienes me enseñaron  
el respeto a los demás y orientaron  
sus vidas a darlo todo  
por los hijos.*

# Resumen

En este trabajo de tesis se propone una metodología para analizar el problema de flujos de potencia mediante un método no-iterativo. Dicho método se basa en la expansión de series de potencia de cada voltaje nodal y la evaluación de los coeficientes de series de potencia a través de una aproximación de fracción continua.

El objetivo de esta tesis versa en desarrollar una metodología para analizar el problema de flujos de potencia mediante un método no-iterativo. Se presenta una descripción del algoritmo de FPFC y de la metodología para el análisis de flujos de potencia; Una vez que se haya realizado lo anterior, se hace una comparación del algoritmo FPFC con el de flujo de potencia iterativo de Newton-Raphson (FPNR) con fines de validación del método. Se realiza una descripción sobre los métodos utilizados para la solución del algoritmo no-iterativo. Asimismo, se describe la transformación de las ecuaciones de balance de potencia para expresarlas en función de una variable compleja. Así como también realizar varias simulaciones para obtener las graficas con resultados que demuestren la veracidad del algoritmo a estudiar y las conclusiones generales.

# Contenido

Agradecimientos.....	i
Dedicatoria.....	ii
Resumen.....	iii
Lista de Figuras.....	vi
Lista de tablas.....	vii
Simbología y abreviaciones.....	viii

## Capítulo 1. Introducción

1.1. Antecedentes.....	1
1.2. Objetivo .....	2
1.3. Justificación.....	2
1.4. Metodología.....	3
1.5. Contenido de la tesis.....	3

## Capítulo 2. Flujos de potencia

2.1. Introducción.....	4
2.2. Ecuaciones de flujos de potencia.....	5
2.2.1. Formulación de balance energético nodal.....	10
2.2.2. Tipos de nodos.....	10
2.2.1. Solución convencional de las ecuaciones de balance de potencia....	11
2.3. Conclusiones.....	14

## Capítulo 3. Flujos de potencia No iterativo

3.1. Introducción.....	15
3.2. Fracciones continuas.....	15
3.3. Aproximaciones de Padé.....	21
3.4. Algoritmo no iterativo para la solución de las ecuaciones de potencia por fracciones continuas.....	24

3.4.1 Transformación de las ecuaciones de flujo de potencia.....	24
3.4.2. Cálculo de los coeficientes de la serie de MacLaurin.....	26
3.4.3. Expansión en fracciones continuas.....	30
3.4.4. Solución de la expansión en fracciones continuas.....	32
3.5. Algoritmo no iterativo para la solución de las ecuaciones de potencia por aproximaciones de Padé.....	33
3.6. Conclusiones.....	34

#### **Capítulo 4. Casos de estudio**

4.1. Introducción.....	35
4.2. Red eléctrica de 5 nodos.....	36
4.3. Red eléctrica de 14 nodos.....	37
4.4. Red eléctrica de 30 nodos.....	38
4.5. Red eléctrica de 57 nodos.....	39
4.6. Red eléctrica de 2 nodos.....	40
4.6.1. Viskovatov Vs FPNR.....	40
4.6.2. Padé Vs FPNR.....	42
4.7. Conclusiones.....	43

#### **Capítulo 5. Conclusiones y trabajos futuros**

5.1. Conclusiones.....	45
5.2. Trabajos futuros.....	46

#### **Apéndices**

A. Descripción del archivo de datos para FPFC.....	47
B. Respuestas de las redes de prueba.....	51
C. Método de Viskovatov.....	56

<b>Referencias.....</b>	<b>64</b>
-------------------------	-----------

## Lista de figuras

2.1. Circuito equivalente $\pi$ de un elemento de transmisión.....	6
2.2a. Balance de potencia activa.....	9
2.2b. Balance de potencia reactiva.....	9
3.1. Representación esquemática para calcular los coeficientes de $V_k(s)$ .....	29
3.2. Proceso computacional para obtener la aproximación de orden $n$ .....	33
4.1. Red de 5 nodos.....	36
4.2a. Resultados de magnitudes de voltaje.....	36
4.2b. Resultados de ángulos de voltaje.....	36
4.3. Red de 14 nodos.....	37
4.4a. Resultados de magnitudes de voltaje.....	37
4.4b. Resultados de ángulos de voltaje.....	37
4.5. Red de 30 nodos.....	38
4.6a. Resultados de magnitudes de voltaje.....	38
4.6b. Resultados de ángulos de voltaje.....	38
4.7. Red de 57 nodos.....	39
4.8a. Resultados de magnitudes de voltaje.....	39
4.8b. Resultados de ángulos de voltaje.....	39
4.9. Red de 2 nodos.....	40
4.10. Error del metodo de Viskovatov Vs FPNR.....	41
4.11. Error del metodo de Padé Vs FPNR.....	43

# Lista de tablas

4.1. Resultados de la Red de 2 nodos método de viskovatov.....	41
4.2. Resultados de la Red de 2 nodos método de padé.....	42
B.1. Respuestas de la red IEEE-5 nodos.....	51
B.2. Respuestas de la red IEEE-14 nodos.....	52
B.3. Respuestas de la red IEEE-30 nodos.....	53
B.4. Respuestas de la red IEEE-57 nodos.....	55

# Simbología y abreviaciones

FPFC	Flujos de Potencia de Fracciones Continuas.
FPNR	Flujos de Potencia de Newton-Raphson.
NR	Newton Raphson.
AGORA	Algoritmos Fiables para la Observación Avanzada de la Red.
CFPU	Controlador de Flujo de Potencia Universal.
$P_{Gi}$	Potencias activa.
$Q_{Gi}$	Potencias reactiva.
$P_i^{sch}$	Potencia activa especificada.
$Q_i^{sch}$	Potencia reactiva especificada.
$S_{km}$	Flujo de potencia compleja.
$P_i$	Inyección de potencia nodal activa.
$Q_i$	Inyección de potencia nodal reactiva.
$Z$	Impedancia.
$Y$	Admitancia.
$I_k$	Corriente total inyectada al nodo $k$ .
$F$	Conjunto de $N$ ecuaciones no lineales.
$X$	Vector de $N$ variables de estado desconocidas.
$J$	Matriz Jacobina.
$y_{km}$	Elemento complejo de la matriz de admitancia nodal.
$S_k$	Potencia compleja.
$V_k$	Voltaje complejo en el nodo $k$ .
$s$	Variable compleja.
$b$	Vector de términos independientes.
p.u.	Por unidad.
$se$	Aproximante.
$\tau$	Transformación funcional.

kV Kilovolt.

MVA Megavolt amperes.

MVAR Megavolts amperes reactivos.

MW Megawatt.

$\Delta$  Balance.

$P-Q$  Nodo de carga.

$P-V$  Nodo generador.

# Capítulo 1

## Introducción

La solución del problema de flujos de potencia es requerido para cualquier tipo de análisis que se realiza en sistemas eléctricos de potencia. Esto tiene como consecuencia el desarrollo de métodos de solución los cuales están asociados a la planeación, operación, control, distribución y diseño de la expansión futura de los sistemas de potencia. Actualmente se resuelven ecuaciones de flujos de potencia basados en los métodos iterativos los cuales pueden implementarse muy eficientemente. Sin embargo, la necesidad de suponer una condición inicial puede provocar que no se logre la convergencia del método. Lo anterior hace deseable desarrollar un algoritmo de flujos de potencia no-iterativo que no requiera de suponer una condición inicial. La descripción de este tipo de algoritmos es el objetivo de esta tesis. Para tal motivo, se describe un método basado en series de potencia y fracciones continuas.

### 1.1 Antecedentes

Los primeros desarrollos de métodos de solución de ecuaciones algebraicas no lineales asociadas al problema de flujos de potencia en sistemas eléctricos fueron hechos por el Grupo AIA en el año 2002. Dicho estudio comenzó con el algoritmo AGORA (Algoritmos Fiables para la Observación Avanzada de la Red) [AIA 2004]. AGORA fue la primera herramienta confiable utilizada para la restauración de sistemas eléctricos de potencia, basada en un algoritmo de flujos de potencia No-Iterativo. Los antecedentes de la metodología para el análisis del problema de flujos de potencia son casi nulos lo cual nos ubica como pioneros en el desarrollo de este método innovador y novedoso en el cual se esta incursionando. Esto nos lleva a la importancia del estudio de este método para poder así contar con una herramienta computacional confiable para el análisis estacionario de sistemas eléctricos de potencia.

## 1.2 Objetivo

Desarrollar una metodología para analizar el problema de flujos de potencia mediante un método no-iterativo. Dicho método se basa en la expansión de series de potencia de cada voltaje nodal y la evaluación de los coeficientes de series de potencia a través de una aproximación de fracción continua.

## 1.3 Justificación

Los estudios de flujos de potencia son de gran importancia en la planeación y diseño de los sistemas de potencia, así como también en la determinación de las mejores condiciones de operación de los sistemas existentes.

El desarrollo de sistemas automáticos de control en tiempo real y sistemas de soporte de decisiones en sistemas eléctricos de potencia requiere de la existencia de observación inteligente y monitoreo en tiempo real de la red eléctrica, así como de herramientas de análisis y simulación con un grado de seguridad y precisión no garantizados por los métodos tradicionales usados en la industria.

Los programas digitales utilizados actualmente por la industria eléctrica para resolver las ecuaciones de flujos de potencia están basados en métodos iterativos, tales como:

- Gauss-Seidel.
- Newton-Raphson.
- Desacoplado rápido.
- Flujo de carga de segundo orden.

Estas metodologías son eficientes si se provee una condición inicial suficientemente cercana a la solución final del problema presentado. En cualquier caso, la convergencia del algoritmo no puede asegurarse, ya que el método no siempre es capaz de encontrar la solución físicamente factible. Y lo que es peor, en algunos casos pueden proporcionar soluciones incorrectas en relación a la red eléctrica, aportándole al operador conclusiones equívocas para que este tome decisiones en la operación de la red. Adicionalmente, en

muchas situaciones se requiere la intervención manual de expertos con el objeto de modificar ligeramente el problema para hacerlo convergente. En consecuencia, esta metodología no es totalmente confiable ya que no garantiza una solución real. El algoritmo descrito en este trabajo utiliza procedimientos radicalmente diferentes; es determinista y no-iterativo.

## **1.4 Metodología**

El desarrollo del presente trabajo consiste, primeramente en una descripción matemática de un algoritmo de flujos de potencia basado en fracciones continuas (FPFC) y de su aplicación para el análisis de flujos de potencia; una vez hecho lo anterior, se realiza una comparación del algoritmo FPFC con el de flujo de potencia iterativo basado en la técnica de Newton-Raphson (FPNR) con fines de validación del método. Para lo anterior se realizan varias simulaciones con el fin de obtener resultados que demuestren la veracidad del algoritmo a estudiar.

## **1.5 Contenido de la tesis**

En el capítulo 1 se da una breve introducción a este trabajo, resalta la importancia y los beneficios del método a estudiar, así como también se describe el objetivo del trabajo.

En el capítulo 2 se obtienen las ecuaciones de flujo de potencia, también se explica la clasificación de los nodos, y se obtiene la solución de las ecuaciones no lineales de balance de potencia de manera iterativa mediante su linealización por medio de la serie de Taylor.

En el capítulo 3 se presenta una descripción sobre los métodos utilizados para la solución del algoritmo no-iterativo y también se describe la transformación de las ecuaciones de balance de potencia para expresarlas en función de una variable compleja para aplicar los métodos de fracciones continuas y a funciones racionales.

En el capítulo 4 se presentan las simulaciones con los resultados obtenidos mediante el algoritmo de FPFC realizando la comparación con el método de FPNR, también se realizan las graficas con el fin de observar dicha comparación.

En el capítulo 5 se presentan conclusiones finales y trabajos futuros.

# Capítulo 2

## Flujos de Potencia

### 2.1 Introducción

El estudio de flujos de potencia se define como el proceso de solución que proporciona los voltajes en estado estacionario en todos los nodos que conforman la red eléctrica bajo el análisis, y en base a los cuales se calculan los flujos de potencia activa y reactiva inyectados en terminales de cada elemento de transmisión bajo la suposición de valores conocidos de potencia generada y consumida.

Un método de solución de flujos de potencia debe tener por lo menos cinco propiedades:

- Un algoritmo matemático eficiente que permita obtener la solución rápidamente, tal que pueda utilizarse para aplicaciones en tiempo real (en línea), y solución de redes de gran escala.
- Bajos requerimientos de almacenamiento en memoria.
- Confiabilidad hacia la solución.
- Versatilidad. Los componentes convencionales de la red eléctrica están modelados por sus circuitos equivalentes en términos de inductancia, capacitancia y resistencia. Sin embargo, se debe tener la capacidad de manejar modelos especiales de elementos del sistema eléctrico, tales como la relación de taps en transformadores, o circuitos convertidores.

En general existen dos métodos de análisis que se diferencian por la manera en que obtienen las ecuaciones matemáticas de flujos de potencia en terminales de los elementos, estos son métodos de mallas y nodos. El análisis de malla se basa en la ley de voltajes de Kirchhoff, mientras que el método de nodos se base en la ley de corrientes de Kirchhoff. A través del tiempo, la comunidad eléctrica ha demostrado que el análisis nodal es el más adecuado para estudios de flujos de potencia mediante computadora digital.

El análisis nodal posee las siguientes ventajas:

- La numeración de nodos, realizada simplemente por inspección de un diagrama del sistema.
- La preparación de datos es fácil.
- El número de ecuaciones y variables generalmente es menor que el resultante de utilizar el método de mallas.
- Las ramas paralelas no incrementan el número de variables o ecuaciones.
- Los voltajes nodales están disponibles directamente de la solución y las corrientes en las ramas son calculadas fácilmente.
- Los transformadores con tap fuera del nominal pueden representarse fácilmente.

Una vez definido el método para la obtención de las ecuaciones de flujos de potencia a resolver, es necesario solucionar estas ecuaciones. Debido a su característica no lineal, estas ecuaciones son linealizadas alrededor de una solución propuesta, la cual es mejorada de manera iterativa. En este capítulo se presenta la solución iterativa generalmente utilizada en los programas convencionales de flujos de potencia.

## 2.2 Ecuaciones de flujo de potencia

La aplicación más ampliamente utilizada por el ingeniero de potencia es la herramienta conocida como flujos de potencia o flujos de cargas, ya que permite obtener el punto de operación estacionario de una red eléctrica estipulando que la potencia de generación, potencia de carga y la potencia intercambiada a través de los elementos de transmisión debe sumar cero en cada nodo del sistema, tanto para potencia activa como potencia reactiva. Matemáticamente, estas ecuaciones son conocidas como ecuaciones de balance de potencia y se expresan de la siguiente manera,

$$\Delta P_i = P_{Gi} - P_{Li} - P_i = P_i^{sch} - P_i = 0 \quad (2.1)$$

$$\Delta Q_i = Q_{Gi} - Q_{Li} - Q_i = Q_i^{sch} - Q_i = 0 \quad (2.2)$$

Las variables  $P_{Gi}$  y  $Q_{Gi}$  representan las potencias activa y reactiva, respectivamente, que son inyectadas al nodo  $i$  por un generador. Las variables  $P_{Li}$  y  $Q_{Li}$  representan las

potencias activa y reactiva, respectivamente, extraídas por la carga conectada al nodo  $i$ . En el problema de flujos de potencia estas variables son conocidas, y pueden agruparse en variables referidas como potencia activa especificada  $P_i^{sch}$  y potencia reactiva especificada  $Q_i^{sch}$ . Sin embargo, las potencias activa y reactiva,  $P_i$  y  $Q_i$ , inyectadas en terminales de cada elemento de transmisión deben de ser calculadas por medio de las ecuaciones de flujos de potencia. Este cálculo es necesario debido a que estas potencias dependen de los voltajes nodales, los cuales no se conocen. Cuando la suma de estas potencias calculadas en un nodo  $i$  es igual a la potencia especificada en este mismo nodo, el balance de potencia es satisfecho.

Con la finalidad de obtener las ecuaciones de flujos de potencia inyectadas es necesario encontrar las relaciones existentes entre las corrientes y voltajes nodales en terminales de un elemento de transmisión. En base a la figura 2.1, la corriente total inyectada al nodo  $k$ , identificada por  $I_k$ , es igual a la suma de las corrientes fluyendo a través de los elementos serie y derivación que conforman al elemento de transmisión, tal como se expresa en la ecuación (2.3).

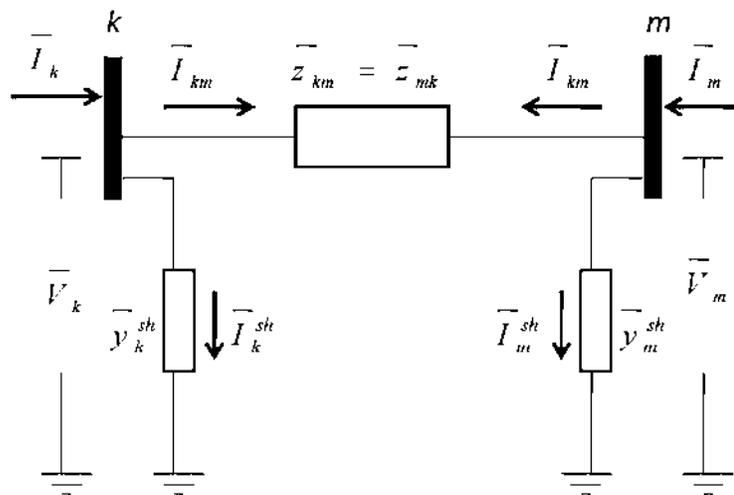


Figura 2.1 Circuito equivalente  $\pi$  de un elemento de transmisión.

$$\bar{I}_k = \bar{I}_{km} + \bar{I}_k^{sh} \quad (2.3)$$

Aplicando la ley de corrientes de Kirchoff a los nodos  $k$  y  $m$  de la figura 2.1. La ecuación fasorial (2.3) puede ser expresada en función de los voltajes nodales fasoriales

$\bar{V}_k$  y  $\bar{V}_m$ ,

$$I_k = \frac{\bar{V}_k - \bar{V}_m}{\bar{Z}_{km}} + \bar{y}_k^{sh} \bar{V}_k \quad (2.4)$$

$$\bar{I}_k = \bar{y}_{km} (\bar{V}_k - \bar{V}_m) + \bar{y}_k^{sh} \bar{V}_k \quad (2.5)$$

$$\bar{I}_k = (\bar{y}_{km} - \bar{y}_k^{sh}) \bar{V}_k - \bar{y}_{km} \bar{V}_m \quad (2.6)$$

En este caso,  $\bar{Z}_{km}$  es la impedancia serie de la línea de transmisión,  $\bar{y}_{km}$  es la admitancia serie primitiva, dada por el inverso de  $\bar{Z}_{km}$ ; por último,  $\bar{y}_k^{sh}$  corresponde a la mitad del valor de la admitancia en paralelo primitiva.

Similarmente para el nodo  $m$ ,

$$\bar{I}_m = (\bar{y}_{mk} - \bar{y}_m^{sh}) \bar{V}_m - \bar{y}_{mk} \bar{V}_k \quad (2.7)$$

Las ecuaciones anteriores pueden ser escritas de manera matricial en función de las admitancias primitivas como se indica por (2.8),

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_k \\ \bar{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{km} + \bar{y}_k^{sh} & -\bar{y}_{km} \\ -\bar{y}_{mk} & \bar{y}_{mk} + \bar{y}_m^{sh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_k \\ \bar{V}_m \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

O simplemente, en función de las admitancias nodales, tal que

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_k \\ \bar{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{kk} & \bar{Y}_{km} \\ \bar{Y}_{mk} & \bar{Y}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_k \\ \bar{V}_m \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Generalmente, los elementos fasoriales de la matriz de admitancia nodal y los voltajes nodales se expresan en coordenadas rectangulares y polares, respectivamente; obteniéndose lo siguiente,

$$\bar{Y}_i = G_{ij} + jB_{ij} \quad (2.10)$$

$$\bar{V}_i = V_i e^{j\theta_i} = V_i (\cos \theta_i + j \sin \theta_i) \quad (2.11)$$

donde  $i=k$ , y  $j=k, m$

La potencia compleja conformada por las potencias activa y reactiva puede calcularse en el nodo  $k$  por la siguiente ecuación,

$$\bar{S}_k = P_k + jQ_k = \bar{V}_k \bar{I}_k^* \quad (2.12)$$

$$= \bar{Y}_k (\bar{Y}_{kk} \bar{V}_k + \bar{Y}_{km} \bar{V}_m)^*$$

donde  $\bar{I}_k^*$  es la corriente compleja conjugada inyectada en el nodo  $k$ .

Las expresiones para  $P_k$  y  $Q_k$  pueden obtenerse al sustituir (2.10) y (2.11) en (2.12) e igualar la parte real e imaginaria de las ecuaciones resultantes. De lo anterior se obtiene,

$$P_k = V_k^2 G_{kk} + V_k V_m (G_{km} \cos(\theta_k - \theta_m) + B_{km} \sin(\theta_k - \theta_m)) \quad (2.13)$$

$$Q_k = -V_k^2 B_{kk} + V_k V_m (G_{km} \sin(\theta_k - \theta_m) - B_{km} \cos(\theta_k - \theta_m)) \quad (2.14)$$

Similarmente para el nodo  $m$

$$P_m = V_m^2 G_{mm} + V_m V_k (G_{mk} \cos(\theta_m - \theta_k) + B_{mk} \sin(\theta_m - \theta_k)) \quad (2.15)$$

$$Q_m = -V_m^2 B_{mm} + V_m V_k (G_{mk} \sin(\theta_m - \theta_k) - B_{mk} \cos(\theta_m - \theta_k)) \quad (2.16)$$

Las ecuaciones (2.13) a (2.16) son llamadas ecuaciones de flujo de potencia. Estas ecuaciones calculan los valores de la potencia neta activa y reactiva inyectada a los nodos  $k$  y  $m$ . Asimismo, para el caso bajo análisis, estas potencias representan las potencias inyectadas a las terminales del elemento de transmisión; i.e,  $P_i = P_{ij}$  y  $Q_i = Q_{ij}$  donde  $i=k,m; j=k,m$  y  $i \neq j$ .

En general, un sistema eléctrico consiste de más de dos nodos. De tal manera, la relación entre los voltajes y corrientes nodales en un sistema de  $N$  nodos es expresada por

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \bar{I}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{21} & \cdots & \bar{Y}_{1N} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} & \cdots & \bar{Y}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{Y}_{N1} & \bar{Y}_{N2} & \cdots & \bar{Y}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \vdots \\ \bar{V}_N \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

o simplemente

$$\bar{I} = \bar{Y}_{bus} \bar{V} \quad (2.18)$$

donde  $\bar{I}$  es un vector complejo de  $N \times 1$  que representa las inyecciones de corriente nodal,  $\bar{V}$  es un vector complejo de  $N \times 1$  que representa los voltajes nodales, y  $\bar{Y}_{bus}$  es la matriz de

admitancia nodal de  $N \times N$  elementos complejos  $\bar{Y}_{ij}$ . En este caso, la corriente total inyectada a cualquier nodo  $i$  es,

$$\bar{I}_i = \bar{Y}_{i1}\bar{V}_1 + \bar{Y}_{i2}\bar{V}_2 + \dots + \bar{Y}_{iN}\bar{V}_N = \sum_{j=1}^N \bar{Y}_{ij}\bar{V}_j \quad (2.19)$$

De tal manera, las potencias activa y reactiva netas inyectadas al nodo  $i$  son expresadas como, [Grainger 1996]

$$P_i = V_i^2 G_{ii} + V_i \sum_{j=1}^N V_j (G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)) \quad (2.20)$$

$$Q_i = -V_i^2 B_{ii} + V_i \sum_{j=1}^N V_j (G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)) \quad (2.21)$$

La complejidad del problema de flujos de potencia es patente de las ecuaciones no lineales anteriores, que muestran que la potencia inyectada en un nodo cualesquiera es función de la magnitud y ángulo de voltaje existente en todos los nodos del sistema. De tal manera, y opuesto al caso de dos nodos, estas ecuaciones representan la suma de todas aquellas potencias inyectadas a cada elemento de transmisión conectado al nodo  $i$ , tal como se muestra en la figura 2.2.

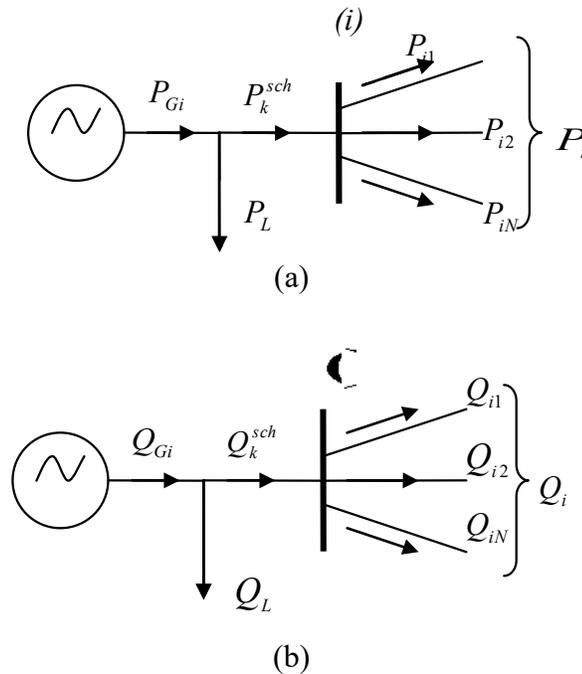


Figura 2.2 Balance de potencia en el nodo  $i$ . (a) Potencia activa (b) Potencia reactiva.

Debe puntualizarse que representaciones alternas de las ecuaciones de flujo de potencia pueden ser derivadas; sin embargo, la formulación descrita es la más conveniente para el desarrollo de las ideas contenidas en el presente trabajo.

### 2.2.1 Formulación de balance energético nodal

Una vez deducidas las ecuaciones de flujo de potencia, es posible obtener las ecuaciones de balance energético o de potencia en cada nodo del sistema.

Las ecuaciones de balance de potencia en el nodo  $k$  para el caso de dos nodos son:

$$\Delta P_k = P_{Gi} - P_{Li} - \{V_k^2 G_{kk} + V_k V_m (G_{km} \cos(\theta_k - \theta_m) + B_{km} \sin(\theta_k - \theta_m))\} = 0 \quad (2.22)$$

$$\Delta Q_k = Q_{Gk} - Q_{Lk} - \{-V_k^2 B_{kk} + V_k V_m (G_{km} \sin(\theta_k - \theta_m) - B_{km} \cos(\theta_k - \theta_m))\} = 0 \quad (2.23)$$

Ecuaciones similares se obtienen para el nodo  $m$  al intercambiar los subíndices  $k$  por  $m$ .

Finalmente, las ecuaciones generales de balance de potencia en el nodo  $i$  son:

$$\Delta P_i = P_{Gi} - P_{Li} - \{V_i^2 G_{ii} + V_i \sum_{j=1}^N V_j (G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j))\} = 0 \quad (2.24)$$

$$\Delta Q_i = Q_{Gi} - Q_{Li} - \{-V_i^2 B_{ii} + V_i \sum_{j=1}^N V_j (G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j))\} = 0 \quad (2.25)$$

### 2.2.2 Tipos de nodos

Básicamente un estudio de flujos consiste en el cálculo de inyecciones de potencia y voltaje en los nodos de una red eléctrica, bajo condiciones de una operación previamente establecidas. En cada uno de estos nodos se tienen cuatro cantidades físicas que deben ser calculadas: potencia activa, potencia reactiva, así como magnitud y ángulo de fase del voltaje. Las cantidades de potencia son consideradas variables controlables porque ellas pueden ser modificadas para satisfacer el balance generación-carga. Desde otro punto de vista, los valores de voltaje determinan un único estado operativo del sistema eléctrico; es decir, estos valores son las variables de estado. Debido a que hay solo dos ecuaciones para cada nodo, dos de las cuatro cantidades físicas necesitan ser especificadas para resolver las ecuaciones de flujo de potencia. Matemáticamente, cualesquiera dos variables pueden ser especificadas; sin embargo, la elección esta basada en cuál variable puede ser físicamente controlada así como los dispositivos conectados a un nodo particular. En la formulación básica de flujos de potencia, los nodos son clasificados como sigue:

- **Nodo Generador PV:** En cualquier nodo donde un generador es conectado, la magnitud de voltaje  $V_i$  puede ser mantenida constante ajustando la generación de potencia reactiva. Además, la generación de potencia activa  $P_{Gi}$  es también conocida. Las otras dos cantidades  $\theta_i$  y  $Q_{Gi}$  son calculados. Los límites de generación de potencia reactiva son especificados dependiendo de la característica del generador individual,  $Q_{Gi\_min} < Q_{Gi} < Q_{Gi\_max}$ .
- **Nodo Generador PQ:** Si el generador no puede suministrar el soporte de potencia reactiva necesario para mantener la magnitud de voltaje en un valor específico, la potencia reactiva es fijada en el límite violado y la magnitud de voltaje es liberada. En este caso, la potencia activa generada  $P_{Gi}$  y la potencia reactiva  $Q_{Gi}$  están especificadas mientras los parámetros  $V_i$  y  $\theta_i$  serán calculados.
- **Nodo de carga PQ:** Las variables de control  $P_{Gi}$  y  $Q_{Gi}$  son cero si no hay generador conectado en el bus  $i$ . También, las potencias activa y reactiva ( $P_{Li}, Q_{Li}$ ) extraídas del nodo por la carga son conocidas mediante mediciones. De estas especificaciones,  $V_i$  y  $\theta_i$  son calculados.
- **Nodo Slack (compensación).** Un nodo generador es seleccionado como nodo slack donde las variables de estado de voltaje  $V_{slack}$  y  $\theta_{slack}$  son especificados. Solo hay un nodo slack en un sistema de potencia y su función es absorber el desbalance de potencia de la red debido a las pérdidas del sistema, las cuales no son conocidas antes del cálculo de flujos de potencia. Normalmente,  $\theta_{slack}$  es seleccionado como la referencia para los ángulos de fase de voltaje para los nodos.

### 2.2.3 Solución convencional de las ecuaciones de balance de potencia

La técnica convencional universalmente utilizada para la solución de las ecuaciones de balance de potencia es expandir estas ecuaciones en una serie de potencias infinita,

truncar la serie conservando solo el término lineal y resolver de manera iterativa las ecuaciones linealizadas a partir de una solución inicial propuesta.

Entre los métodos existentes para resolver el problema de flujos de potencia, el método de Newton-Raphson (NR) ha probado ser exitoso para el análisis de grandes sistemas debido a los beneficios sustanciales en términos de convergencia. El método NR es una técnica iterativa derivada de la serie de Taylor para resolver un conjunto de ecuaciones no lineales de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{array} \right\} \text{ o } \mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0 \quad (2.26)$$

donde  $\mathbf{F}$  se emplea para representar el conjunto de  $N$  ecuaciones no lineales dadas por (2.24) y (2.25), y  $\mathbf{x}$  es el vector de  $N$  variables de estado desconocidas.

La técnica NR utilizada para encontrar  $\mathbf{x}$  es derivada al realizar la expansión en series de Taylor de  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  alrededor de una estimación inicial  $\mathbf{x}^0$ . Esta expansión es expresada matemáticamente como,

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}^0) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X} + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial^2 \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{x}^0} \Delta \mathbf{X}^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial^3 \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{x}^0} \Delta \mathbf{X}^3 + \dots + \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial^n \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{x}^0} \Delta \mathbf{X}^n + \dots \quad (2.27)$$

donde el término  $\Delta \mathbf{X}$  es el incremento que debe sumarse a la estimación inicial para obtener el valor de  $\mathbf{x}$  que satisface a la ecuación (2.26). En este caso, la solución sería no iterativa si se toman todos los elementos términos de la serie de Taylor y se encuentra el valor de  $\Delta \mathbf{X}$ . Sin embargo, esto implicaría obtener matrices de derivadas parciales de alto orden, lo cual implicaría un gran requerimiento de memoria computacional. Para evitar lo anterior, la serie se trunca al término lineal y se resuelve para  $\Delta \mathbf{X}$  como se indica a continuación.

Expresando de manera explicita solo el término lineal en (2.27), se obtiene,

$$F(X) = F(X^0) + \frac{\partial F(X)}{\partial X} \Delta X + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F(X)}{\partial^2 X} \Delta X^2 + t.a.o. \quad (2.28)$$

Expandiendo (2.28),

$$\begin{bmatrix} f_1 X \\ f_2 X \\ \vdots \\ f_n X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 X^0 \\ f_2 X^0 \\ \vdots \\ f_n X^0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1 X}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1 X}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1 X}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2 X}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2 X}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2 X}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n X}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n X}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n X}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{J X^0} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 - X_1^0 \\ X_2 - X_2^0 \\ \vdots \\ X_n - X_n^0 \end{bmatrix}}_{X - X^0} + t.a.o. \quad (2.29)$$

o simplemente:

$$F X = F X^0 + J X^0 (X - X^0) + t.a.o. \quad (2.30)$$

donde  $J(X^0)$  es la matriz Jacobiana de  $F(X)$  evaluada en  $X=X^0$ . *t.a.o.* denota los términos de orden superior de la serie de Taylor; i.e.  $(X-X^0)^k$ ,  $k=1, 2, \dots, \infty$ .

Para obtener una fórmula recursiva apropiada para encontrar  $X$ , se asume que  $X^{i+1}$  es el valor calculado por el algoritmo en la iteración  $i+1$  y que esta suficientemente cerca al valor  $X^i$  calculado en la iteración anterior  $i$ . En base a esta suposición, todos los términos de alto orden en la ecuación (2.30) pueden ser despreciados para obtener la relación aproximada siguiente,

$$F X^{i+1} \approx F X^i + J X^i (X^{i+1} - X^i) \quad (2.31)$$

Además, si se asume que  $X^{i+1}$  está suficientemente cerca de la solución, es decir que  $X^{i+1} = X^*$ , tal que se cumple la siguiente aproximación  $F X^{i+1} = F X^* = 0$ , la ecuación (2.32) se convierte en,

$$F(X^i) + J(X^i)(X^{i+1} - X^i) = 0 \quad (2.32)$$

Entonces, la fórmula que es la base del proceso iterativo NR para resolver un sistema de ecuaciones no lineal es:

$$X^{i+1} = X^i - [J(X^i)]^{-1} F(X^i) \quad (2.33)$$

La solución iterativa puede ser expresada como una función del vector de correcciones  $\Delta X^i = X^{i+1} - X^i$  que es calculado por la ecuación siguiente,

$$\Delta X^i = -[J(X^i)]^{-1} F(X^i) \quad (2.34)$$

Actualizando las variables de estado por,

$$X^{i+1} = X^i + \Delta X^i \quad (2.35)$$

El proceso es repetido para los valores actualizados de  $X$  en la ecuación (2.34). En resumen, el algoritmo NR produce una solución aproximación al problema no lineal resolviendo para  $\Delta X$  en el problema lineal  $J(X^i)\Delta X^i = -F(X^i)$ . El método empieza de una suposición inicial  $X^0$  y actualiza la solución en cada iteración  $i$ , es decir  $X^{i+1} = X^i + \Delta X^i$ , hasta que  $F(X^{i+1})$  se aproxima a cero dentro de una tolerancia de convergencia especificada.

## 2.3 Conclusiones

En el presente capítulo se obtuvieron las ecuaciones de flujo de potencia con la finalidad de encontrar las relaciones existentes entre las corrientes y voltajes nodales en terminales de un elemento de transmisión. También se explicó de manera general la clasificación de los nodos debido a la importancia que estos tienen en la formulación básica de los flujos de potencia. Por último, se describió la manera en que el conjunto de ecuaciones no lineales de balance de potencia son solucionadas de manera iterativa mediante su linealización por medio de la serie de Taylor.

# Capítulo 3

## Flujos de Potencia No Iterativo

### 3.1 Introducción

En el contexto de lo descrito en el capítulo 2, el procedimiento no iterativo para la solución del conjunto de las ecuaciones de balance de potencia consistiría en calcular cada uno de los términos de la expansión de series de Taylor, y resolver para el incremento de las variables de estado. En base a esta premisa, un algoritmo no iterativo, propuesto en [Bonet 2004] y [Alsaffar 2005], para la solución de estas ecuaciones de balance de potencia en el dominio de variable compleja se describe en éste capítulo. De manera conceptual, este algoritmo consiste en expresar los valores de voltajes nodales por medio de la serie de MacLaurin en el dominio de variable compleja. Después, esta serie puede ser expresada en forma de fracciones continuas, o por una aproximación racional de cociente de polinomios, con la finalidad de encontrar la solución para los voltajes. Detalles de lo anterior se presentan a continuación.

### 3.2 Fracciones continuas

La aplicación de fracciones continuas permite representar números racionales y reales por medio de números enteros. Por ejemplo, el número real 4.46236 es el resultado aproximado de la división  $415/93$ . Este número real puede ser representado mediante una secuencia de operaciones de números enteros. Intuitivamente, se podría decir que este número real es aproximadamente  $4+1/2$ . Sin embargo, el número 2 en el denominador es incorrecto, debe ser un poco mayor tal que la aproximación ahora sea  $4+1(2+1/6)$ . En este caso, el número 6 en el denominador debe ser un poco mayor, es decir  $6+1/7$ . De tal manera la aproximación del número real mediante fracciones continuas es,

$$\frac{415}{93} \approx 4.46236 \approx 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{7}}} \quad (3.1)$$

Desde el punto de vista matemático, si  $f$  es una función, es posible obtener una secuencia iterativa asociada a  $f$  escogiendo una condición inicial  $x_0$  y generando una secuencia  $\{x_n\}$  mediante la relación  $x_{n+1} = f(x_n)$ , donde la función  $f(x_n)$  puede contener cualquier tipo de expresiones matemáticas. A manera de ejemplo, si se considera  $\{a_n\}$  como una secuencia dada, es posible obtener una nueva secuencia  $\{\beta_n\}$  considerando  $\beta_0 = 0$  y siempre sumando un nuevo término  $a_n$  para obtener  $\beta_n = \beta_{n-1} + a_n$ . En este caso se itera mediante la traslación  $t_n(z) := z + a_n$ . Si el límite  $\beta := \lim \beta_n$  existe, se ha obtenido una serie infinita. Dependiendo de cómo sea definida la función  $f(x_n)$ , y si el límite existe, es el tipo de serie infinita obtenida; Por ejemplo la serie de Taylor dada por (2.27). De igual manera, una serie infinita de productos se obtiene al iterar con las rotaciones  $t_n(z) := a_n z$ .

Asumiendo que los símbolos  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{N}_0$  denotan los conjuntos  $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$  y  $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  respectivamente; y considerando el par de secuencias  $\langle \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \rangle$ , es posible iterar para obtener una secuencia  $\{se\}$  de la forma,

$$se = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} \quad (3.2)$$

conocida como fracción continua. Los elementos  $a_n$  y  $b_n$  pueden ser números reales o complejos y son llamados  $n$ -ésimo numerador parcial y  $n$ -ésimo denominador parcial, respectivamente, de la fracción continua. La ecuación (3.2) puede ser escrita de manera más compacta de la siguiente forma,

$$se = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{\dots}}} \quad (3.3.1)$$

$$se = b_0 + \mathbf{K} \left( \frac{a_m}{b_m} \right) \quad (3.3.2)$$

Al truncar a un número finito de elementos las fracciones continuas, se obtiene lo siguiente,

$$se_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{\dots \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}}}}} \quad (3.4)$$

La expresión anterior es equivalente a (3.3.1) considerando  $a_{n+1} = 0$ . El valor de  $se_n$  es llamado el  $n$ -ésimo aproximante de la fracción continúa y se denota por la razón  $\frac{A_n}{B_n}$ , tal

que,

$$se_n = \frac{A_n}{B_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{\dots \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}}}}} \quad (3.5)$$

donde

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{b_0}{1} \quad (3.6.1)$$

$$\frac{A_1}{B_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_1 b_0 + a_1}{b_1} \quad (3.6.2)$$

$$\frac{A_2}{B_2} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} = \frac{b_2 (b_1 b_0 + a_1) + a_2 b_0}{b_2 b_1 + a_2} = \frac{b_2 A_1 + a_2 A_0}{b_2 B_1 + a_2 B_0} \quad (3.6.3)$$

$$\frac{A_3}{B_3} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3}}} = \frac{b_3 (b_2 (b_1 b_0 + a_1) + a_2 b_0) + a_3 (b_1 b_0 + a_1)}{b_3 (b_2 b_1 + a_2) + a_3 b_1} = \frac{b_3 A_2 + a_3 A_1}{b_3 B_2 + a_3 B_1} \quad (3.6.4)$$

$$\frac{A_i}{B_i} = \frac{b_i A_{i-1} + a_i A_{i-2}}{b_i B_{i-1} + a_i B_{i-2}} \quad i = 2, \dots, n \quad (3.6.5)$$

En general, una fracción continua converge y tiene un valor  $v$  si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{A_n}{B_n} \right) = v \quad (3.7)$$

En otras palabras, si existe el límite de las divisiones  $\frac{A_n}{B_n}$  conforme  $n \rightarrow \infty$ , este define el valor de la función continua. De lo contrario, la fracción continua diverge.

Es posible construir diferentes fracciones continuas que sean equivalentes, si y solo si todos sus aproximantes  $se_i = \frac{A_i}{B_i}$  tienen el mismo valor; es decir,

$$b_0 + \mathbf{K}_{m=1}^{\infty} \left( \frac{a_m}{b_m} \right) = d_0 + \mathbf{K}_{m=1}^{\infty} \left( \frac{c_m}{d_m} \right) \quad (3.8)$$

A manera de ejemplo, la fracción continua (3.2) puede ser expresada por (3.9) al dividir el “primer” numerador y denominador entre  $b_1$ , y por la división del “ $n$ -ésimo” numerador y denominador entre  $b_n$  para  $n=2,3,4,\dots$ , tal que elementos del denominador se reducen a la unidad.

$$se_n = b_0 + \frac{a_1/b_1}{1 + \frac{a_2/b_1 b_2}{1 + \frac{a_3/b_2 b_3}{1 + \dots}}} \quad (3.9)$$

Esta libertad de construir las fracciones continuas mediante diferentes elementos constituye un grupo de transformaciones equivalentes.

En el contexto de esta tesis, se aplica el concepto de representar una serie por medio de fracciones continuas, tal que esta representación tenga una mejor convergencia que la correspondiente a la serie. A manera de ejemplo se considera la serie de MacLaurin dada por (3.10),

$$f(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \dots \quad (3.10)$$

Considerando la sumatoria a partir del segundo término del lado derecho de (3.10), se define la siguiente serie recíproca,

$$c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \dots = c_1 s \left( 1 + \frac{c_2}{c_1} s + \frac{c_3}{c_1} s^2 + \dots \right) \quad (3.11.1)$$

$$c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \dots = c_1 s \left( 1 + c_1^{-1} s + c_2^{-1} s^2 + \dots \right)^{-1} \quad (3.11.2)$$

Sustituyendo (3.11.2) en (3.10), se obtiene

$$f(s) = c_0 + \frac{c_1 s}{1 + c_1^{-1} s + c_2^{-1} s^2 + \dots} \quad (3.12)$$

Obteniendo la serie recíproca del término del denominador,

$$c_1^{-1} s + c_2^{-1} s^2 + c_3^{-1} s^3 + \dots = c_1^{-1} s \left( 1 + \frac{c_2^{-1}}{c_1^{-1}} s + \frac{c_3^{-1}}{c_1^{-1}} s^2 + \dots \right) \quad (3.13.1)$$

$$c_1^{-1} s + c_2^{-1} s^2 + c_3^{-1} s^3 + \dots = c_1^{-1} s \left( 1 + c_1^{-2} s + c_2^{-2} s^2 + \dots \right)^{-1} \quad (3.13.2)$$

Sustituyendo (3.13.2) en (3.12),

$$f(s) = c_0 + \frac{c_1 s}{\left( 1 + \frac{c_1^{-1} s}{1 + c_1^{-2} s + c_2^{-2} s^2 + \dots} \right)} \quad (3.14)$$

Obteniendo la serie recíproca del término del segundo denominador,

$$c_1^{-2} s + c_2^{-2} s^2 + c_3^{-2} s^3 + \dots = c_1^{-2} s \left( 1 + \frac{c_2^{-2}}{c_1^{-2}} s + \frac{c_3^{-2}}{c_1^{-2}} s^2 + \dots \right) \quad (3.15.1)$$

$$c_1^{-2} s + c_2^{-2} s^2 + c_3^{-2} s^3 + \dots = c_1^{-2} s \left( 1 + c_1^{-3} s + c_2^{-3} s^2 + \dots \right)^{-1} \quad (3.15.2)$$

Sustituyendo (3.15.2) en (3.14),

$$f(s) = c_0 + \frac{c_1 s}{1 + \frac{c_1^1 s}{1 + \frac{c_1^2 s}{1 + c_1^3 s + c_2^3 s^2 + \dots}}} \quad (3.16)$$

Del procedimiento anterior es claro que formando las series reciprocas se puede obtener de manera iterativa la fracción parcial (3.17) correspondiente a (3.10),

$$f(s) = c_0 + \frac{c_1 s}{1 +} \frac{c_1^1 s}{1 +} \frac{c_1^2 s}{1 +} \frac{c_1^3 s}{1 +} \dots \quad (3.17)$$

donde  $C_i^j = \frac{C_i^{j-1}}{C_i^{j-1}}$  para  $j \geq 1$   $i \geq 1$ . El coeficiente corresponde al coeficiente original de la serie cuando  $j-1=0$ .

De manera general (3.17) puede ser expresada por (3.18), tal que (3.17) es solo un caso especial.

$$se = b_0 + \frac{a_1 s}{b_1 +} \frac{a_2 s}{b_2 +} \frac{a_3 s}{b_3 +} \dots \quad (3.18)$$

Al igual que lo descrito anteriormente, al truncar a un número finito de elementos las fracciones continuas, se obtiene su  $n$ -ésimo aproximante dado por,

$$se_n(s) = \frac{A_n(s)}{B_n(s)} = b_0 + \frac{a_1 s}{b_1 +} \frac{a_2 s}{b_2 +} \frac{a_3 s}{b_3 +} \dots \frac{a_{n-1} s}{b_{n-1} +} \frac{a_n s}{b_n} \quad (3.19)$$

donde

$$\frac{A_0(s)}{B_0(s)} = \frac{b_0}{1} \quad (3.20.1)$$

$$\frac{A_1(s)}{B_1(s)} = b_0 + \frac{a_1 s}{b_1} = \frac{b_1 b_0 + a_1 s}{b_1} \quad (3.20.2)$$

$$\frac{A_2(s)}{B_2(s)} = b_0 + \frac{a_1 s}{b_1 + \frac{a_2 s}{b_2}} = \frac{b_2 (b_1 b_0 + a_1 s) + a_2 s b_0}{b_2 b_1 + a_2 s} = \frac{b_2 A_1(s) + a_2 s A_0(s)}{b_2 B_1 + a_2 s B_0} \quad (3.20.3)$$

$$\frac{A_3(s)}{B_3(s)} = b_0 + \frac{a_1 s}{b_1 + \frac{a_2 s}{b_2 + \frac{a_3 s}{b_3}}} = \frac{b_3 (b_2 (b_1 b_0 + a_1 s) + a_2 s b_0) + a_3 s (b_1 b_0 + a_1 s)}{b_3 (b_2 b_1 + a_2 s) + a_3 s b_1} = \frac{b_3 A_2(s) + a_3 s A_1(s)}{b_3 B_2(s) + a_3 s B_1(s)} \quad (3.20.4)$$

$$\frac{A_i(s)}{B_i(s)} = \frac{b_i A_{i-1}(s) + a_i s A_{i-2}(s)}{b_i B_{i-1}(s) + a_i s B_{i-2}(s)} \quad i \geq 2 \quad (3.20.5)$$

En general, la fracción continua converge y tiene un valor  $v$  si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{A_n(s)}{B_n(s)} \right) = v \quad (3.21)$$

De tal manera, en base a lo descrito anteriormente se concluye que para obtener el valor  $v$  de la serie por medio de fracciones continuas es necesario lo siguiente:

1. Definir el número  $n$  de elementos de la fracción continua.
2. Obtener los elementos de la fracción continua  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ .
3. Obtener el aproximante  $se_n(s)$  de la fracción continua dado por la división  $\frac{A_n(s)}{B_n(s)}$ .

El valor de este aproximante es igual al valor  $v$  de la serie.

### 3.3 Aproximaciones de Padé

La serie  $f(s)$  dada en (3.10) puede ser aproximada por un cociente  $R_{N,M}(s)$  de dos polinomios  $P_N(s)$  y  $Q_M(s)$  de grados  $N$  y  $M$ ; respectivamente, dentro de un intervalo

$[s_{micial}, s_{final}]$ , tal que

$$R_{N,M}(s) = \frac{P_N(s)}{Q_M(s)} \quad s_{inicial} \leq s \leq s_{final} \quad (3.22)$$

En este caso, para un número fijo de operaciones, puede ser posible hallar una aproximación racional cuyo error, dentro del intervalo  $[s_{inicial}, s_{final}]$ , es menor que el de cualquier otra aproximación polinomial.

El método de Padé requiere que  $f(s)$  y su derivada sean continuas en  $s = 0$ . Existen dos razones para considerar el desarrollo de la aproximación en el punto  $s = 0$ . Primero, las manipulaciones algebraicas suelen ser más simples. Segundo, siempre es posible usar un cambio de variable para formular el problema y trabajar sobre un intervalo en el que esté contenido el punto  $s = 0$ . Los polinomios que se usan en (3.22) son,

$$P_N(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_Ns^N \quad (3.23)$$

y

$$Q_M(s) = q_0 + q_1s + q_2s^2 + \dots + q_Ms^M \quad (3.24)$$

Los polinomios en (3.23) y (3.24) se construyen de manera que  $f(s)$  y  $R_{N,M}(s)$  coincidan en  $s = 0$ , y que lo mismo ocurra con sus derivadas desde orden 1 hasta las derivadas de orden  $N + M$ . En particular, cuando  $Q_0(s) = 1$ , la aproximación es simplemente el desarrollo de la serie de Maclaurin de  $f(s)$ . Una vez definido el valor de  $N + M$ , puede probarse que el error es menor cuando  $P_N(s)$  y  $Q_M(s)$  tienen el mismo grado o bien cuando el grado de  $P_N(s)$  es una unidad más que el grado de  $Q_M(s)$  [Alsaffar 2005].

Debe notarse que el término constante de  $Q_M(s)$  es  $q_0 = 1$ , que es permisible porque no puede ser cero y el cociente  $R_{N,M}(s)$  no cambia si dividimos  $P_N(s)$  y  $Q_M(s)$  por la misma constante. En consecuencia, la función racional  $R_{N,M}(s)$  tiene  $N + M + 1$  coeficientes desconocidos. Considerando que  $f(s)$  es analítica y que su serie de Maclaurin es

$$f(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_k s^k + \dots \quad (3.25)$$

se forma la diferencia  $f(s)Q_M(s) - P_N(s) = Z(s)$ :

$$\left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j s^j \right) \left( \sum_{j=0}^M q_j s^j \right) - \sum_{j=0}^N p_j s^j = \sum_{j=N+M+1}^{\infty} c_j s^j \quad (3.26)$$

El subíndice en el símbolo de la suma del miembro derecho de (3.26) comienza en  $j = N+M+1$  porque las  $N+M$  primeras derivadas de  $f(s)$  y  $R_{N,M}(s)$  deben coincidir en  $s = 0$ .

Efectuando la multiplicación en el miembro izquierdo de (3.26) e igualando a cero los coeficientes de las potencias de  $s^j$  para  $j=0,1,\dots,N+M$ , se obtiene el sistema de ecuaciones lineales dados por (3.27) y (3.28).

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 - p_0 \\ 0 &= q_1 a_0 + a_1 - p_1 \\ 0 &= q_2 a_0 + q_1 a_1 + a_2 - p_2 \\ 0 &= q_3 a_0 + q_2 a_1 + q_1 a_2 + a_3 - p_3 \\ 0 &= q_M a_{N-M} + q_{M-1} a_{N-M+1} + \dots + a_N - p_N \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} 0 &= p_M a_{N-M+1} + p_{M-1} a_{N-M+2} + \dots + q_1 a_N + a_{N+1} \\ 0 &= p_M a_{N-M+2} + p_{M-1} a_{N-M+3} + \dots + q_1 a_{N+1} + a_{N+2} \\ &\vdots \\ 0 &= p_M a_N + p_{M-1} a_{N+1} + \dots + q_1 a_{N+M-1} + a_{N+M} \end{aligned} \quad (3.28)$$

La ecuación (3.28) se puede escribir en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} a_N & \dots & a_{N-M+2} & a_{N-M+1} \\ a_{N+1} & \dots & a_{N-M+3} & a_{N-M+2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{N+M-1} & \dots & a_{N+1} & a_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_M \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{N+1} \\ a_{N+2} \\ \vdots \\ a_{N+M} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

La ecuación (3.27) se puede expresar como,

$$p_N = a_N + \sum_{i=1}^{\min(N,M)} q_1 a_{N-i} \quad (3.30)$$

Se debe notar que en cada ecuación se verifica que la suma de los subíndices de los factores de cada producto es el mismo y que su suma va creciendo desde 0 hasta  $N + M$ . Las  $M$  ecuaciones que aparecen en (3.29) sólo involucran las incógnitas  $q_1, q_2, \dots, q_M$  y son las que hay que resolver en primer lugar; luego se utiliza su solución en (3.30) para calcular  $p_0, p_1, \dots, p_N$ . Hecho lo anterior, es posible evaluar  $R_{N,M}(s)$  para encontrar la solución de la serie  $f(s)$ .

### 3.4 Algoritmo no iterativo para la solución de las ecuaciones de potencia por fracciones continuas

En ésta sección se presenta la formulación matemática asociada a la representación de las ecuaciones de balance de potencia por medio de fracciones continuas. Esto permitirá realizar estudios de flujos de potencia en sistemas eléctricos sin recurrir al método iterativo convencional descrito en el capítulo 2.

#### 3.4.1 Transformación de las ecuaciones de flujo de potencia

En ésta sección se deriva la transformación de las ecuaciones de inyecciones de flujos de potencia que permite expresar sus variables desconocidas, voltajes nodales, por medio de la serie de MacLaurin en el plano de variable compleja. Para propósitos de la derivación matemática se considera un sistema de  $N$  nodos, definiendo el nodo 1 como Slack,  $\mathcal{Y}_{km}$  es un elemento complejo de la matriz de admitancia nodal,  $S_k$  es la potencia compleja y  $V_k$  el voltaje complejo en el nodo  $k$ . La variable compleja es definida como  $s$ .

En base a la ecuación (2.19), la ecuación de flujo de potencia en el nodo  $k$ ,  $S_k^* = V_k^* I_k$ , puede ser escrita como se indica en (3.31),

$$\frac{S_k^*}{V_k^*} = \sum_{m=1}^N Y_{km} V_m \quad (3.31)$$

Para resolver la ecuación (3.31), ésta se expresa en el dominio de variable compleja  $s$  de una manera tal que la solución para  $s = 0$  es conocida, y para  $s = 1$  se obtengan las ecuaciones de flujos de potencia originales; es decir (3.31). Lo anterior se logra al expresar (3.26) en el dominio  $s$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} s \frac{S_k^*}{V_k^*} &= \sum_{m=1}^N Y_{km} V_m(s) - (1-s) \sum_{m=1}^N Y_{km} \\ V_0(s) &= 1 + (1-s)V_0 \\ V_1(s) &= sV_1 + (1-s) \\ V_m(0) &= 1, \forall m \\ V_m(1) &= V_m, \forall m \end{aligned} \quad (3.32)$$

Hecho lo anterior, ahora se define una transformación funcional para que una función analítica pueda ser expresada como un conjunto de secuencias infinitas. Esta transformación  $\tau$  es,

$$\tau : f(s) \rightarrow f[n] = \frac{1}{n!} \left[ \frac{\partial^n f(s)}{\partial s^n} \right]_{s=0} \quad (3.33)$$

donde  $f[n]$  es el  $n$ -ésimo coeficiente de la expansión de  $f(s)$  en la serie de MacLaurin. Esta expansión se expresa matemáticamente por,

$$f(s) = f[0] + f[1]s + f[2]s^2 + \dots + f[n]s^n + \dots \quad (3.34)$$

con las siguientes propiedades [Alsaffar 2005]

$$\begin{aligned} \tau f(s) &= f[n] \\ \tau(1) &= \phi_{n0} \\ \tau(s) &= \phi_{n1} \\ \tau sf(s) &= f[n-1] \\ \tau sf(s)g(s) &= f \otimes g [n] = \sum_{i=0}^n f[i]g[n-i] \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde el operador  $\otimes$  es una convolución. Además,  $\phi_{n0}$  es equivalente a una función impulso  $\delta(n)$  que es igual a 1 cuando  $n = 0$  y es igual a cero en caso contrario. Similarmente,  $\phi_{n1}$  es una función impulso  $\delta(n-1)$  que es igual a 1 cuando  $n = 1$  y es cero en caso contrario.

En el contexto del problema analizado, la ecuación (3.34) corresponde al voltaje nodal complejo expresado en el dominio  $s$  por medio de la serie de MacLaurin. Para el voltaje en el nodo  $k$  se tiene  $V_k(s) = V_k[0] + V_k[1]s + V_k[2]s^2 + \dots + V_k[n]s^n + \dots$ . Debe puntualizarse que la ecuación anterior y la (3.34) son muy similares en su expresión matemática a la ecuación (2.27) que esta en función de la serie de Taylor. Obviamente con variables diferentes, pues mientras que en (2.27) se tienen ecuaciones de balance de potencia, en (3.34) se tienen voltajes nodales complejos.

### 3.4.2 Cálculo de los coeficientes de la serie de MacLaurin

En esta sección se describe el planteamiento matemático para el cálculo de los coeficientes de la serie de MacLaurin, correspondientes a los voltajes nodales. La primera ecuación en (3.32) puede ser manipulada algebraicamente de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^N Y_{km} V_m(s) &= s \frac{S_k^*}{V_k^*(s)} + (1-s) \sum_{m=1}^N Y_{km} \\
W_k(s) &= \frac{1}{V_k(s)} \\
\sum_{m=1}^N Y_{km} V_m(s) &= s S_k^* W_k^*(s) + (1-s) \sum_{m=1}^N Y_{km} \\
\left( \sum_{m=2}^N Y_{km} V_m(s) \right) + Y_{k1} V_1(s) - s S_k^* W_k^*(s) &+ (1-s) \sum_{m=1}^N Y_{km} \\
\sum_{m=2}^N Y_{km} V_m(s) &= s S_k^* W_k^*(s) - Y_{k1} V_1(s) + (1-s) \sum_{m=1}^N Y_{km}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

De lo anterior se obtiene

$$\sum_{m=2}^N Y_{km} V_m(s) = s S_k^* W_k^*(s) - Y_{k1} s V_1 + (1-s) + (1-s) \sum_{m=1}^N Y_{km} \tag{3.37}$$

Aplicando las transformaciones (3.35) en ambos lados de la ecuación (3.37); se obtiene,

$$\sum_{m=2}^N Y_{km} V_m[n] = S_k^* W_k^*[n-1] - Y_{k1} \phi_{n1} V_1 + (\phi_{n0} - \phi_{n1}) + (\phi_{n0} - \phi_{n1}) \sum_{m=1}^N Y_{km} \tag{3.38}$$

La ecuación (3.38) fue obtenida considerando la inyección de potencia en el  $k$ -ésimo nodo. Considerando los  $N-1$  nodos del sistema, la ecuación (3.38) puede ser expresada en forma matricial de la siguiente manera,

$$\begin{bmatrix} Y_{22} & Y_{23} & \cdots & Y_{2N} \\ Y_{32} & Y_{33} & \cdots & Y_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N2} & Y_{N3} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2[n] \\ V_3[n] \\ \vdots \\ V_N[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2^* W_2^*[n-1] - Y_{21} \phi_{n1} V_1 + (\phi_{n0} - \phi_{n1}) + (\phi_{n0} - \phi_{n1}) \sum_{m=1}^N Y_{2m} \\ S_3^* W_3^*[n-1] - Y_{31} \phi_{n1} V_1 + (\phi_{n0} - \phi_{n1}) + (\phi_{n0} - \phi_{n1}) \sum_{m=1}^N Y_{3m} \\ \vdots \\ S_N^* W_N^*[n-1] - Y_{N1} \phi_{n1} V_1 + (\phi_{n0} - \phi_{n1}) + (\phi_{n0} - \phi_{n1}) \sum_{m=1}^N Y_{Nm} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

La solución de (3.39) permite obtener el  $n$ -ésimo coeficiente de la serie de MacClaurin para cada uno de los voltajes nodales. El vector de términos independientes  $\mathbf{b}$  se muestra en su forma general. Cuando  $n$  es igual a cero o 1, toma la forma siguiente,

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} S_2^* W_2^*[0] - Y_{21} V_1 - 1 - \sum_{m=1}^N Y_{2m} \\ S_3^* W_3^*[0] - Y_{31} V_1 - 1 - \sum_{m=1}^N Y_{3m} \\ \vdots \\ S_N^* W_N^*[0] - Y_{N1} V_1 - 1 - \sum_{m=1}^N Y_{Nm} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Pero si  $n \geq 2$ , la siguiente forma del vector  $\mathbf{b}$  puede ser usada,

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} S_2^* W_2^*[n-1] \\ S_3^* W_3^*[n-1] \\ \vdots \\ S_N^* W_N^*[n-1] \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

De las ecuaciones (3.38) y (3.39) se observa que es necesario conocer las inyecciones de potencia nodales en cada uno de los nodos,  $\mathbf{S}_k$ , así como los coeficientes  $W_k$   $n-1$ , para encontrar los coeficientes de voltajes  $V_m[n]$  ( $m=1, \dots, N$ ). Las potencias

inyectadas son especificadas, tal que se consideran variables conocidas. Los coeficientes  $W_k$  se obtienen al considerar que,

$$\begin{aligned} W_k * V_k [n] &= \phi_{n0} \\ W_k[0] &= \frac{1}{V_k[0]} = 1 \\ W_k(s)V_k(s) &= 1 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Tal que la expresión de recurrencia obtenida mediante el operador de convolución es,

$$W_k[n] = -\sum_{i=0}^{n-1} W_k[i]V_k[n-i] \quad (3.43)$$

En resumen, los pasos para el cálculo de los coeficientes de voltaje en la expansión de la serie de MacLaurin de orden  $n$  son, [Alsaffar 2005]

1. Inicialización,  $V_k[0] = W_k[0] = 1 \quad k = 2, \dots, N$
2. Para  $i=1:n$ 
  - (a) Calcular  $V_k[i]$ ,  $k = 2 \dots N$  resolviendo el sistema de ecuaciones lineales (3.39)
  - (b) Calcular  $W_k[i]$ ,  $k = 2 \dots N$  resolviendo la ecuación (3.43)

Al final de este proceso de cómputo, el cual se muestra esquemáticamente en la Figura 3.1, se obtiene la serie de MacLaurin dada por (3.44).

$$\begin{aligned} V_k(s) &= V_k[0] + V_k[1]s + V_k[2]s^2 + \dots + V_k[n]s^n \\ k &= 2 \dots N \end{aligned} \quad (3.44)$$

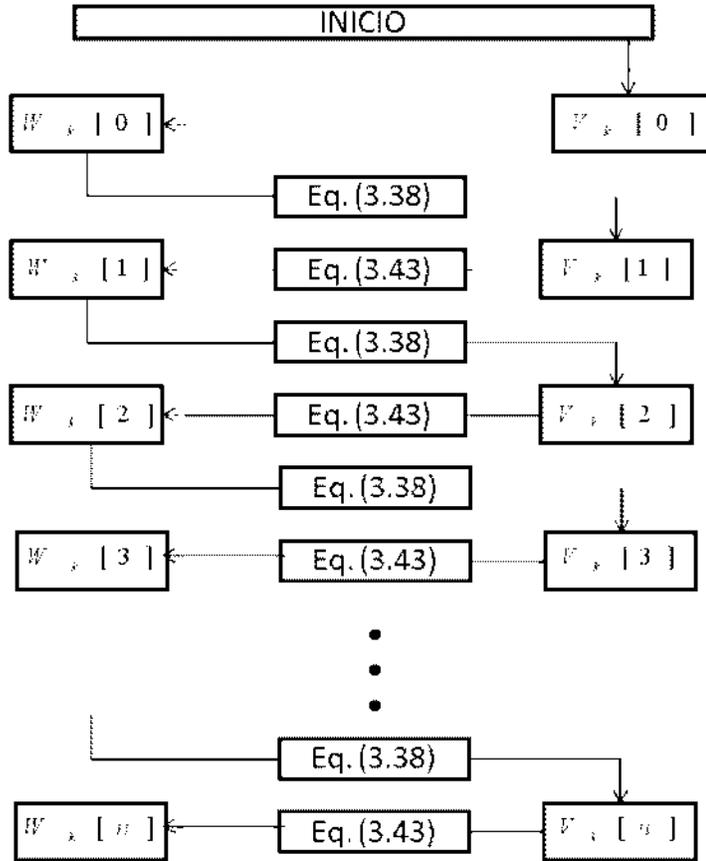


Figura 3.1. Representación esquemática para calcular los coeficientes de  $V_k(s)$ .

Los valores calculados de  $V_k[i]$ ,  $k=2...N$  y  $W_k[i]$ ,  $k=2...N$  pueden ser almacenados en una matriz para simplificar el algoritmo, como sigue:

$$V_c = \begin{bmatrix} V_2[0] & V_3[0] & \cdots & V_N[0] \\ V_2[1] & V_3[1] & \cdots & V_N[1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_2[n] & V_3[n] & \cdots & V_N[n] \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$W_c = \begin{bmatrix} W_2[0] & W_3[0] & \cdots & W_N[0] \\ W_2[1] & W_3[1] & \cdots & W_N[1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_2[n] & W_3[n] & \cdots & W_N[n] \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Una problemática de ésta formulación es que la expansión en series de potencia (3.34) no converge para  $s=1$  [Alsaffar 2005]. Sin embargo, una expansión de esta serie en fracciones continuas si converge para  $s=1$  [Bonet 2004]. A continuación se describe como se obtiene la expansión en fracciones continuas.

### 3.4.3 Expansión en fracciones continuas

Existen diversos métodos para la construcción de la aproximación algebraica de una serie de potencias por medio de fracciones continuas [Mathews y Fink 1999]. En ésta sección se presenta el método de Viskovatov empleado en esta tesis [Khovanskii 1963].

Este método permite construir la expansión en fracciones continuas, o equivalentemente las sucesiones de aproximaciones de Padé, de una serie de potencia dada. A continuación se presenta el proceso de construcción de las fracciones continuas mediante este método, describiéndose la derivación matemática detallada en el Apéndice A.

La serie de potencia (3.44) representando el voltaje nodal complejo en el nodo  $k$  puede ser expresada por la siguiente serie de potencia

$$f(s) = f_0^0 + f_1^0 s + f_2^0 s^2 + \dots + f_n^0 s^n + \dots \quad (3.47)$$

Esta puede expresarse como,

$$\begin{aligned} f(s) &= f_0^0 + s f_1^0 + f_2^0 s + \dots + f_n^0 s^{n-1} + \dots \\ &= f_0^0 + \frac{s}{\left( \frac{1}{f_1^0 + f_2^0 s + \dots + f_n^0 s^{n-1} + \dots} \right)} \end{aligned} \quad (3.48)$$

La división dada en (3.48) puede expresarse como,

$$\frac{1}{f_1^0 + f_2^0 s + \dots + f_n^0 s^{n-1} + \dots} = C_1 + \frac{f_1^1 s + f_2^1 s^2 + \dots + f_n^1 s^n}{f_1^0 + f_2^0 s + \dots + f_n^0 s^{n-1} + \dots} \quad (3.49)$$

donde,

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{f_1^0} \\
f_1^1 &= -C_1 f_0^2 \\
f_2^1 &= -C_1 f_0^3 \\
&\vdots \\
f_{n-1}^1 &= -C_1 f_0^n
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Sustituyendo (3.49) en (3.48), se obtiene:

$$f(s) = f_0^0 + \frac{s}{C_1 + \frac{f_1^1 s + f_2^1 s^2 + \dots + f_n^1 s^n}{f_1^0 + f_2^0 s + \dots + f_n^0 s^{n-1} + \dots}} \tag{3.51}$$

La ecuación anterior puede expresarse como,

$$f(s) = f_0^0 + \frac{s}{C_1 + \frac{s}{f_1^0 + f_2^0 s + \dots + f_n^0 s^{n-1} + \dots} \frac{f_1^1 + f_2^1 s + \dots + f_n^1 s^{n-1}}{f_1^0 + f_2^0 s + \dots + f_n^0 s^{n-1} + \dots}} \tag{3.52}$$

o bien

$$f(s) = f_0^0 + \frac{s}{C_1 + \left( \frac{s}{\frac{f_1^0 + f_2^0 s + \dots + f_n^0 s^{n-1} + \dots}{f_1^1 + f_2^1 s + \dots + f_n^1 s^{n-1}}} \right)} \tag{3.53}$$

La división dada en (3.53) puede expresarse como,

$$\frac{f_1^0 + f_2^0 s + \dots + f_n^0 s^{n-1} + \dots}{f_1^1 + f_2^1 s + \dots + f_n^1 s^{n-1}} = C_2 + \frac{f_1^2 s + f_2^2 s^2 + \dots + f_n^2 s^n}{f_1^1 + f_2^1 s + \dots + f_n^1 s^{n-1}} \tag{3.54}$$

donde :

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{f_1^0}{f_1^1} \\
f_1^2 &= f_2^0 - C_2 f_2^1 \\
f_2^2 &= f_3^0 - C_2 f_3^1 \\
&\vdots \\
f_n^2 &= f_{n-1}^0 - C_2 f_{n-1}^1
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Sustituyendo (3.54) en (3.53) y realizando operaciones algebraicas se obtiene,

$$f(s) = f_0^0 + \frac{s}{C_1 + \frac{s}{C_2 + \left( \frac{s}{\frac{f_1^1 + f_2^1 s + \dots + f_n^1 s^{n-1}}{f_1^2 + f_2^2 s + \dots + f_n^2 s^{n-1}}} \right)}} \quad (3.56)$$

Continuando con el proceso anterior se obtienen las fracciones continuas de la serie de potencia dada,

$$f(s) = f_0^0 + \frac{s}{C_1} + \frac{s}{C_2} + \frac{s}{C_3} + \dots \quad (3.57)$$

### 3.4.4 Solución de la expansión en fracciones continuas

Una vez obtenida la ecuación (3.57), es necesario obtener el aproximante para que proporcione la solución al problema de flujos de potencia. El aproximante  $A_n(s)/B_n(s)$  de orden  $n$  de la fracción continua se calcula mediante las ecuaciones (3.20). En el caso de la fracción continua (3.57) este aproximante se obtiene usando las siguientes relaciones recursivas,

$$\begin{aligned} A_0(s) &= f_0^0 \\ A_1(s) &= C_1 f_0^0 + s \\ A_i(s) &= C_i A_{i-1}(s) + s A_{i-2}(s) \quad i \geq 2 \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} B_0(s) &= 1 \\ B_1(s) &= C_1 \\ B_i(s) &= C_i B_{i-1}(s) + s B_{i-2}(s) \quad i \geq 2 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Al considerar  $s=1$ , la evaluación del aproximante de orden  $n$  mediante (3.58) y (3.59) es equivalente a evaluar la serie de potencia (3.44), obteniéndose el valor complejo de

$V_k(s)$ . Puesto que este computo debe hacerse para cada voltaje nodal, se calcularan  $N$  aproximantes, tal como se expresa en la ecuación (3.60).

$$Ap = \left[ \left( \frac{A_n}{B_n} \right)_2 \quad \left( \frac{A_n}{B_n} \right)_3 \quad \dots \quad \left( \frac{A_n}{B_n} \right)_N \right] \quad (3.60)$$

La figura 3.2 muestra en forma esquemática el proceso computacional para obtener el aproximante de orden  $n$ .

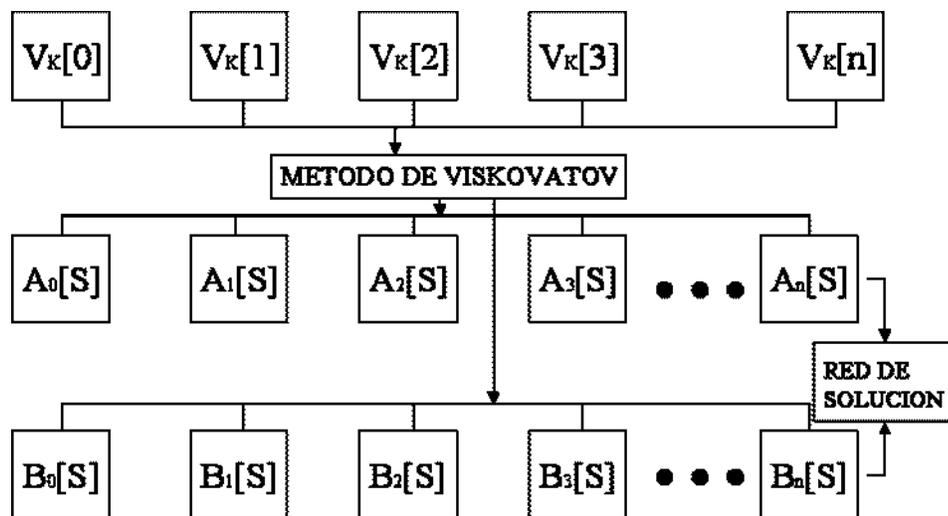


Figura 3.2 Proceso computacional para obtener la aproximación de orden  $n$ .

### 3.5 Algoritmo no iterativo para la solución de las ecuaciones de potencia por aproximaciones de Padé

En este caso se aproxima la serie de MacLaurin (3.44) asociada a cada voltaje nodal por medio de la función racional (3.22), donde los coeficientes de los polinomios son calculados mediante las ecuaciones (3.29) y (3.30). Hecho lo anterior se evalúa la función racional en  $s=1$ , obteniéndose el valor de los voltajes nodales.

### **3.6 Conclusiones**

En el presente capítulo se realizó una descripción sobre los métodos utilizados para la solución del algoritmo no-iterativo. Asimismo, se describió la transformación de las ecuaciones de balance de potencia para expresarlas en función de una variable compleja, con el fin de aplicar los métodos de fracciones continuas y a funciones racionales.

# Capítulo 4

## Casos de estudio

### 4.1 Introducción

En éste capítulo se presentan los resultados obtenidos al realizar estudio de flujos de potencia por medio del método no iterativo denominado Flujos de Potencia basado en Fracciones Continuas (FPFC). Las redes eléctricas utilizadas para validar la efectividad del método no iterativo son las siguientes: IEEE-5, IEEE-14, IEEE-30, IEEE-57 [Zamora 2004]. Los resultados obtenidos con la aplicación del FPFC son comparados con aquellos obtenidos mediante un programa de flujos de potencia basado en el método de Newton-Raphson (FPNR) para propósitos de validación [Fuerte 1997].

De acuerdo a la formulación descrita en el capítulo 2, la aplicación del método no iterativo requiere del conocimiento de las potencias nodales inyectadas por los generadores. Lo anterior no permite la aplicación de esta metodología cuando se tienen nodos tipo PV en el sistema eléctrico, ya que el valor de potencia reactiva es desconocido. Para evitar esta problemática, el valor de potencia reactiva inyectada por un generador hacia un nodo tipo PV es primeramente calculada mediante la aplicación del FPNR. Conocido este valor, se proporciona como dato para la aplicación del FPFC.

Para todos los casos de estudios se considera una potencia base igual a 100 MVA y una magnitud de voltaje base de 400 kV. En el análisis de flujo de potencia realizado mediante FPNR se toma un criterio de convergencia igual a  $1e^{-12}$  p.u, mientras que 18 coeficientes de la serie de potencia fueron considerados en la aplicación del algoritmo de FPFC. Por último, para observar el efecto que tiene éste número de coeficientes en el resultado obtenido, se realiza el estudio de una red de 2 nodos operando cerca de su límite de voltaje estático.

## 4.2 Red eléctrica de 5 nodos

La red eléctrica de 5 nodos se muestra en la Figura 4.1. El estudio realizado mediante el FPNR logra la convergencia en cuatro iteraciones. Los resultados obtenidos con ambos algoritmos se ilustran en la Figura 4.2. Las magnitudes de voltaje se muestran en la Figura 4.2 (a), observándose que ambos resultados son prácticamente iguales. De igual forma, la Figura 4.2 (b) muestra que los ángulos de fase de cada voltaje nodal son iguales.

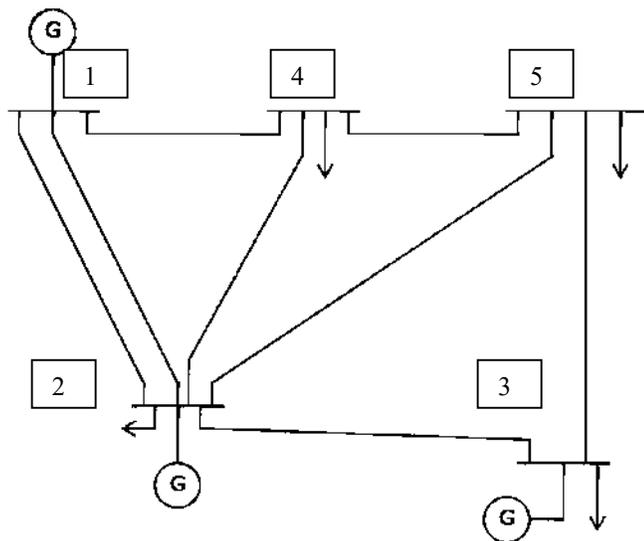


Figura 4.1 Red de 5 nodos.

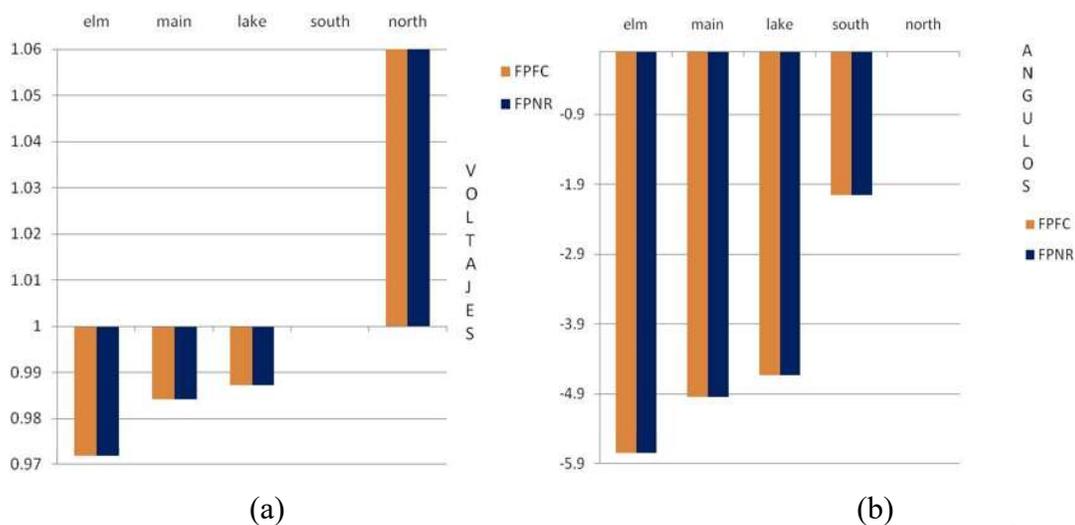


Figura 4.2. Resultados del sistema de 5 nodos. (a) Magnitudes de voltaje. (b) Ángulos de voltaje.

### 4.3 Red eléctrica de 14 nodos

En esta sección se analiza el sistema IEEE-14 mostrado en la Figura 4.3. El método iterativo obtuvo solución en 4 iteraciones. Los resultados obtenidos por ambos algoritmos son los mismos y se ilustran en la Figura 4.4.

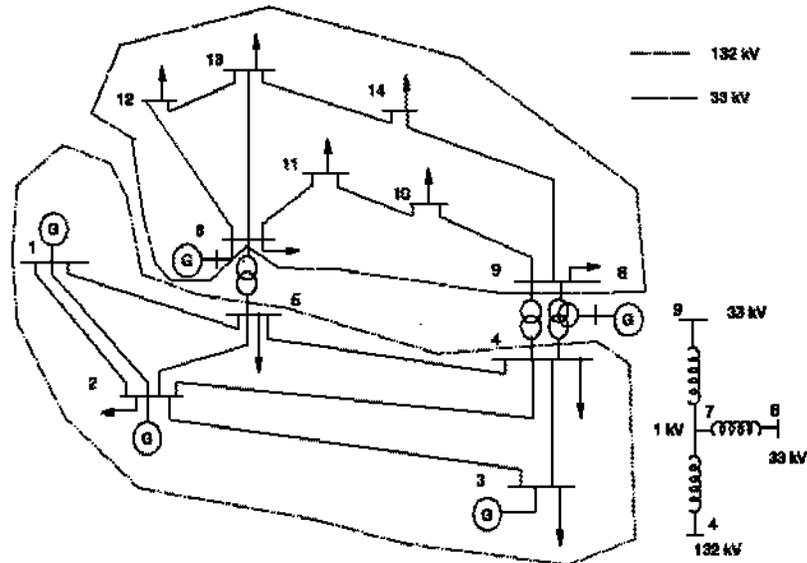


Figura 4.3 Red de 14 nodos del IEEE.

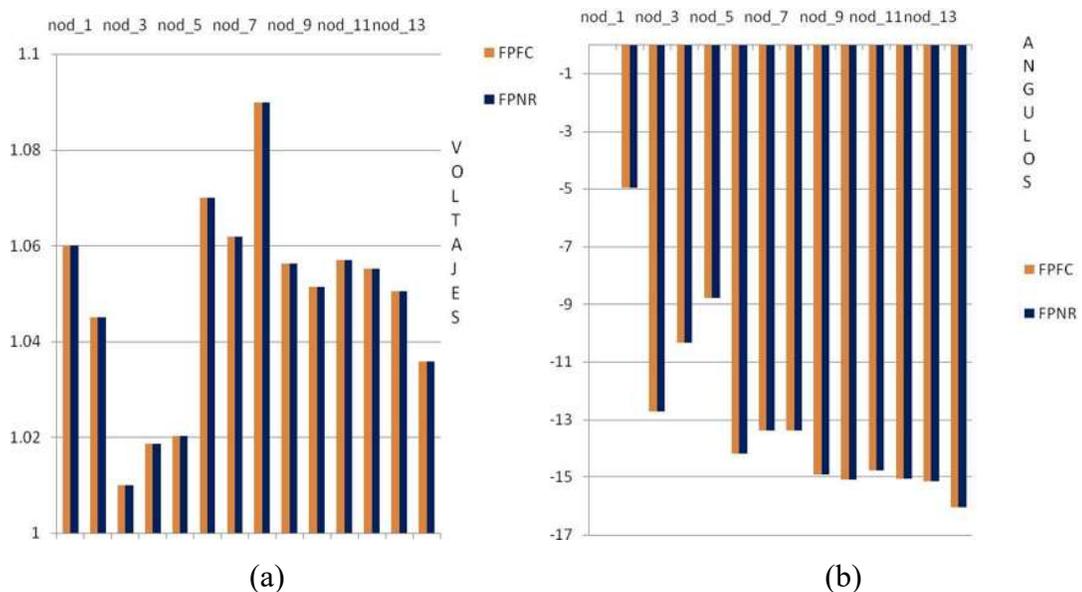


Figura 4.4. Resultados del sistema de 14 nodos. (a) Magnitudes de voltaje. (b) Ángulos de voltaje.

## 4.4 Red eléctrica de 30 nodos

Para el estudio de éste caso se utiliza el sistema IEEE-30 que se muestra en la Figura 4.5. El algoritmo de FPNR logró la convergencia en la sexta iteración. Los resultados obtenidos con ambos algoritmos son los mismos y se ilustran en la Figura 4.6.

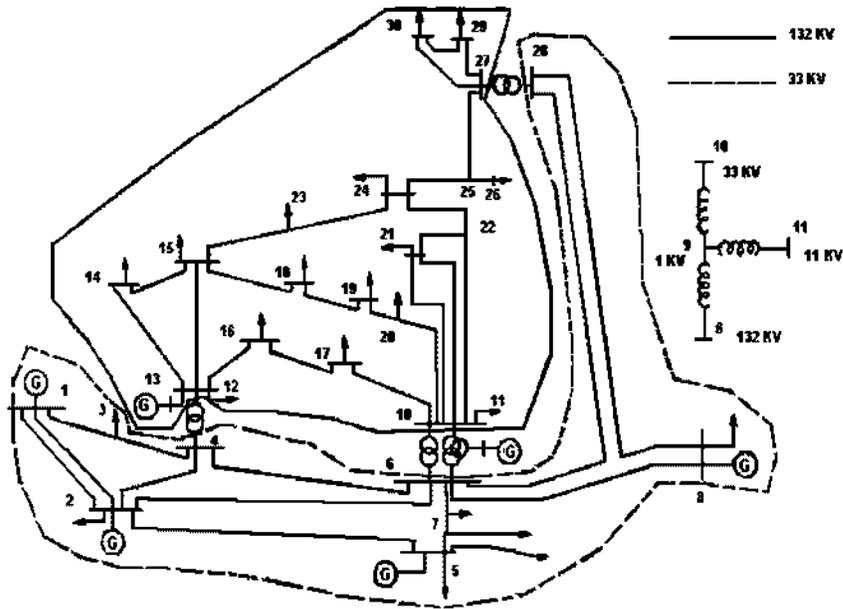
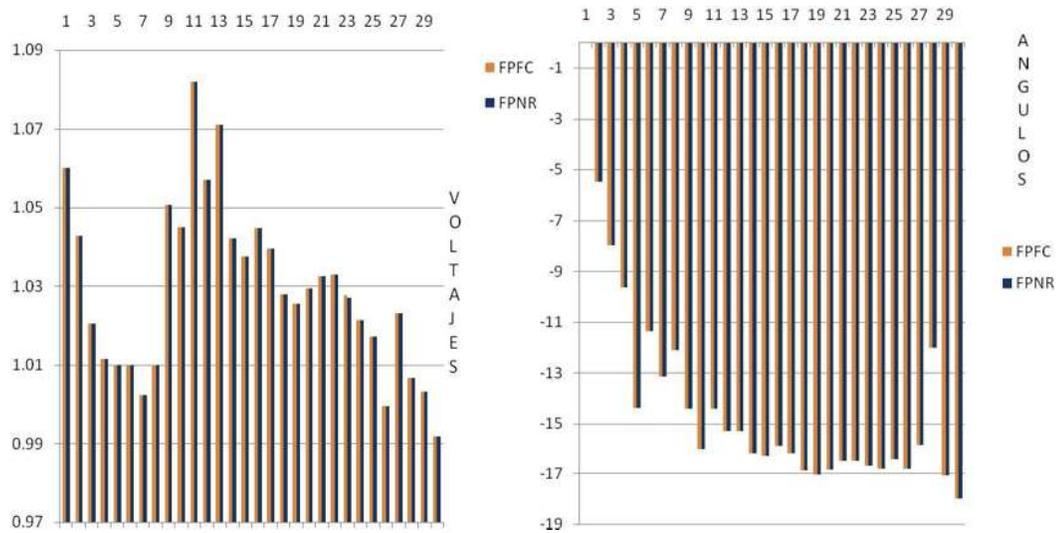


Figura 4.5 red de 30 nodos del IEEE



(a)

(b)

Figura 4.6. Resultados del sistema de 30 nodos. (a) Magnitudes de voltaje. (b) Ángulos de voltaje.

## 4.5 Red eléctrica de 57 nodos

La red eléctrica del sistema de 57 nodos se muestra en la Figura 4.7. El algoritmo de FPNR logró la convergencia en la quinta iteración. Los resultados obtenidos con los algoritmos FPNR y FPFC se ilustran en la Figura 4.8 (a) muestra las magnitudes de voltaje obtenidas mediante ambos algoritmos, se observa que los resultados obtenidos son iguales. Los ángulos de los voltajes también son iguales, tal como se observa en la Figura 4.8 (b).

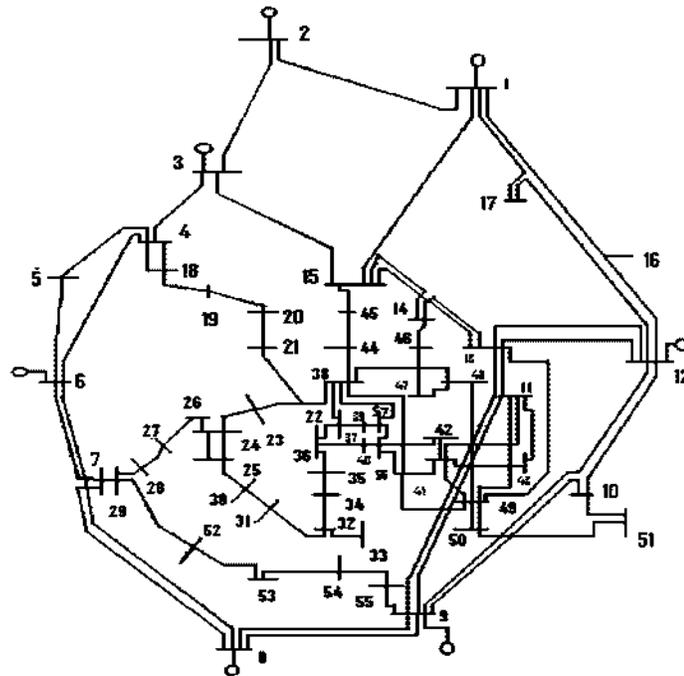


Figura 4.7 Red de 57 nodos del IEEE.

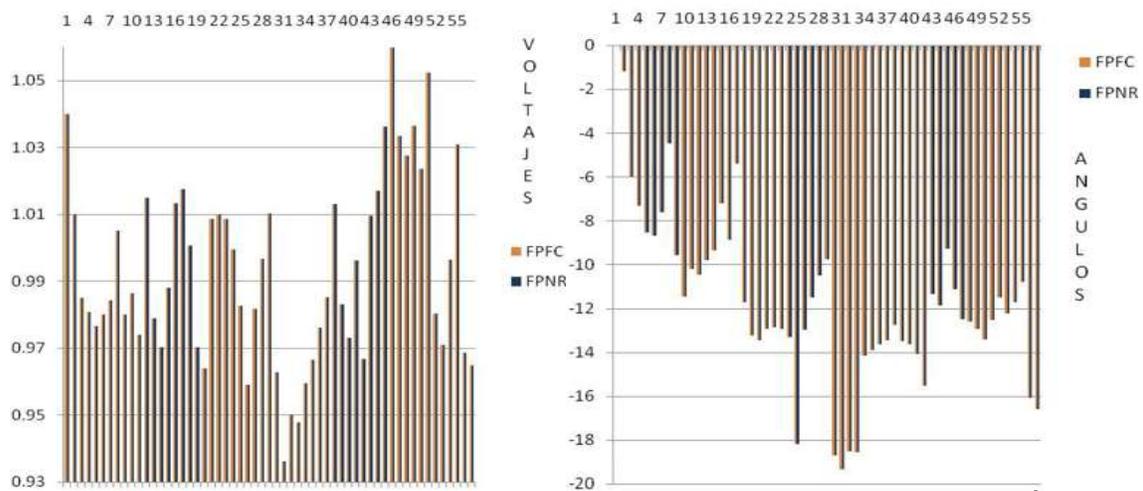


Figura 4.8. Resultados del sistema de 57 nodos. (a) Magnitudes de voltaje. (b) Ángulos de voltaje.

## 4.6 Red eléctrica de 2 nodos

El último sistema que se analiza es el de 2 nodos, esto con el propósito de observar el efecto que produce al ingresar diferente número de términos o coeficientes, para el análisis se utilizó el algoritmo de flujos de potencia de fracciones continuas (FPFC) de viskovatov y flujos de potencia del método de Padé, estos comparándolo con el método flujos de potencia de Newton-Raphson (FPCR). En los casos de estudio se consideran 9, 16, 25, 145, 1000 y 2000 términos, también se considero diferente valor de carga para cada caso.

En la figura 4.9 se representa la red de 2 nodos donde  $Z_{12} = 0 + j0.2$  y  $V_1 = 1\angle 0$ . A continuación se presentan las tablas con los resultados numéricos obtenidos de las simulaciones realizadas y también se presentan las graficas con el margen de error de efectividad.

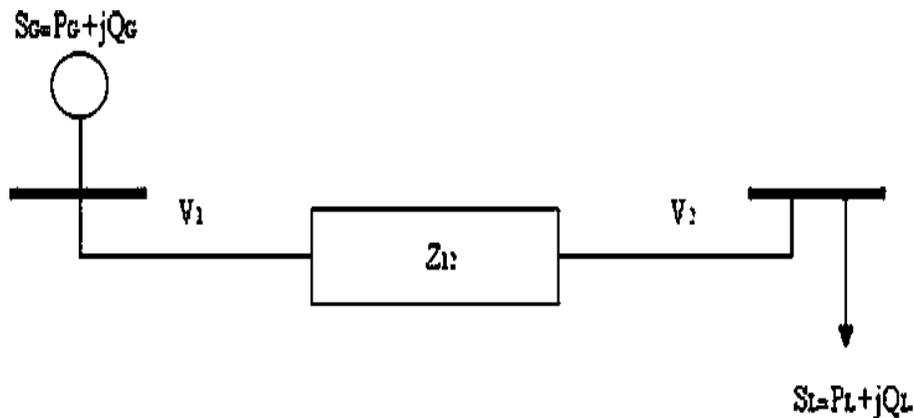


Figura 4.9 Red de 2 nodos

### 4.6.1 VISKOVA TOV Vs FPCR

Los resultados obtenidos de las simulaciones de ambos algoritmos con diferente valor de carga y número de términos, se muestran a continuación en la tabla 4.1 en la cual se podrá observar el efecto y los resultados que se tienen conforme se va aumentando el número de términos.

Carga	Flujos convencional			Viskovatov		
	Magnitud	Angulo	Iteraciones	Magnitud	Angulo	Términos
80+j20	0.94309	-9.7677	4	0.94309	-9.7677	9
80+j80	0.77056	-11.984	5	0.77063	-11.98	9
				0.77056	-11.984	16
80+j105	0.64031	-14.47	6	0.6446	-14.308	9
				0.64051	-14.465	16
				0.64031	-14.47	25
80+j111.5	0.56072	-16.579	8	0.59011	-15.537	9
				0.56993	-16.304	16
				0.56317	-16.493	25
				0.56073	-16.578	145
80+j112.2	0.52498	-17.744	17	0.58293	-15.708	9
				0.55788	-16.666	16
				0.54592	-17.011	25
				0.53342	-17.466	145
				0.528007	-17.633	1000
				0.527106	-17.659	2000

Tabla 4.1 Resultados de la Red de 2 nodos

En la figura 4.10 se muestra la grafica donde se aprecia el porcentaje de error al comparar los resultados de ambos algoritmos.

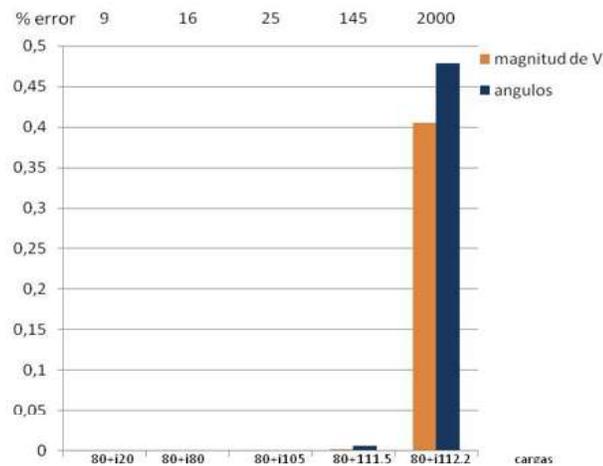


Figura 4.10 % Error del metodo de Viskovatov Vs FPNR

Como se podrá observar en el caso 5 hay un rango de error que se puede apreciar sin embargo este se puede reducir al 0 % aumentando el numero de términos esto se dejo asi con la finalidad de poder observar el efecto.

#### 4.6.2 PADÉ Vs FPNR

Los datos que se generaron de las simulaciones realizadas con el algoritmo de Padé y FPNR se muestran a continuación en la Tabla 4.2 con diferente valor de carga y número de términos como se hizo con el algoritmo anterior.

Carga	Flujos convencional			Padé		
	Magnitud	Angulo	Iteraciones	Magnitud	Angulo	Términos
80+j20	0.94309	-9.7677	4	0.94309	-9.7677	9
80+j80	0.77056	-11.984	5	0.77063 0.77056	-11.98 -11.984	9 16
80+j105	0.64031	-14.47	6	0.6446 0.64051 0.65656	-14.308 -14.465 -14.49	9 16 25
80+j111.5	0.56072	-16.579	8	0.59011 0.56993 0.62397 0.58275	-15.537 -16.304 -15 -17.049	9 16 25 145
80+j112.2	0.52498	-17.744	17	0.58293 0.55788 0.62528 0.5858 0.53805 no converge	-15.708 -16.666 -15.194 -16.664 -17.19 no converge	9 16 25 145 1000 2000

Tabla 4.2 Resultados de la Red de 2 nodos

En la figura 4.11 se muestra la grafica donde se aprecia el porcentaje de error al comparar los resultados de ambos algoritmos.

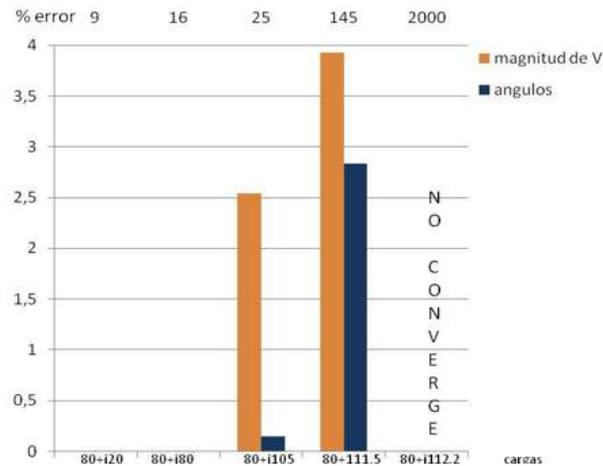


Figura 4.11 % Error del metodo de Padé Vs FPNR

Como se puede observar en el caso 3, 4, y 5 hay un rango de error que se puede apreciar esto es debido a que en el algoritmo de Padé hay problemas de convergencia cuando se toma un valor alto de términos pero los resultados que arroja el algoritmo satisfacen el balance de potencia nodal aunque esto no quiere decir que sea una respuesta factible.

## 4.7 Conclusiones

En los estudios realizados a los sistemas, los resultados obtenidos mediante el algoritmo de FPFC son correctos e iguales a los que se obtuvieron mediante un algoritmo de FPNR. Sin embargo, se puede obtener una solución ficticia del análisis de FPFC.

En los resultados que se presentaron hay que tomar en cuenta que el número de coeficientes para la serie de potencia en el algoritmo de FPFC tiene un efecto en la exactitud de la solución. Sin embargo, la solución obtenida con distintos números de coeficientes no difiere demasiado.

Para el análisis del sistema de 2 nodos se logro observar que con el método de Padé hay un problema de convergencia cuando se toman muchos términos, no sucediendo así con el método de fracciones continuas de Viskovatov; sin embargo, las soluciones son correctas ya que ambos satisfacen el balance de potencia nodal, aunque la solución obtenida mediante el algoritmo de Padé no representa una solución factible.

Con respecto a los términos de tiempo de computo, se logro observar con el algoritmo FPPC, que conforme se aumenta el numero de nodos o carga el tiempo de respuesta va aumentando sin embargo esto depende de la construcción de la serie de fracciones continuas , tal que esta representación tenga una mejor convergencia.

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajos futuros

### 5.1 Conclusiones

Las metodologías convencionales iterativas de cálculo de flujos de potencia en sistemas eléctricos convergen rápidamente a una solución si se proporcionan condiciones iniciales suficientemente cercanas a esta. Sin embargo, si estas condiciones iniciales no son adecuadas, el proceso de solución requerirá de un gran número de iteraciones para encontrar la solución de flujos de potencia, o en el peor de los casos divergirá. Debido a esta problemática, en la presente investigación se mostró el desarrollo matemático de un algoritmo para resolver el problema de flujo de potencia de una forma no iterativa. Para lograr lo anterior las ecuaciones de flujos de potencia se descomponen en series de potencia por medio de la serie de MacLaurin, y posteriormente se evalúan haciendo uso de la teoría de aproximaciones algebraicas por medio del método de Viskovatov y aproximaciones de Padé.

El algoritmo de flujos de potencia no-iterativo basado en series de potencia y fracciones continuas no tiene la necesidad de suponer una condición inicial. Por tal motivo, el algoritmo de flujos de potencia de fracciones continuas (FPFC) garantiza la obtención de una solución, en caso de que esta exista, siendo una herramienta computacional confiable para el análisis estacionario de sistemas eléctricos de potencia.

En el análisis y estudios realizados a diferentes sistemas eléctricos, los resultados que se obtuvieron mediante el algoritmo de FPFC son iguales a los que se obtuvieron mediante un algoritmo convencional de análisis de flujos de potencia basado en la técnica de Newton-Raphson. En estos resultados se mostró numéricamente que el número de coeficientes utilizados en la serie de potencia en el algoritmo de FPFC tiene un efecto en la precisión de la solución. Sin embargo, la solución obtenida con distintos números de coeficientes no difiere demasiado.

## 5.2 Trabajos futuros

En este apartado se listan tres ideas que pueden ser consideradas para extender el trabajo descrito en esta tesis.

- Desarrollar una mejora en la formulación del algoritmo para disminuir el número de coeficientes y acortar el tiempo de cómputo del método.
- Cuantificar el efecto que tiene la manera en que se expresa la expansión en fracciones continuas sobre la solución de flujos de potencia. Este efecto se debe cuantificar en términos del tipo de solución factible y el tiempo de cómputo requerido para la obtención de la solución.
- Realizar una investigación a fondo sobre el método de Padé, ya que es otro algoritmo que puede desarrollar y aportar información sobre la factibilidad de la solución de flujos de potencia.

# APÉNDICE A

## Descripción del archivo de datos para FPFC

El objetivo de este apéndice es describir como están conformados los archivos de datos que se utilizan para el programa de Flujos de Potencia de Fracciones Continuas (FPFC).

El archivo de datos se forma de las siguientes características:

1. Datos generales.
2. Numero de nodos eléctricos y componentes del sistema.
3. Datos del nodo de referencia o Slack.
4. Datos de líneas de transmisión.
5. Datos de los generadores.
6. Datos de carga.

Para realizar la descripción del archivo de datos se tomara el utilizado para la simulación de la red de 5 nodos que a continuación se muestra.

Red IEEE-5

100 400 18

5 7 0 0 0 1 4 0 0 0 0 0 0 0 0

north 1.06 0.0

north south 0.02 0.06 0 0.06

north lake 0.08 0.24 0 0.05

south lake 0.06 0.18 0 0.04

south main 0.06 0.18 0 0.04

south elm 0.04 0.12 0 0.03

lake main 0.01 0.03 0 0.02

main elm 0.08 0.24 0 0.05

south 40.0 -61.5929 -300 300 1.0

south 20 10  
lake 45 15  
main 40 5  
elm 60 10

### **1. Datos generales.**

Estos datos consisten en las cantidades base en MVA y KV así como los términos que debe satisfacer el método para la convergencia.

Los datos son dados de la siguiente manera:

100 400 18

donde:

100 es la cantidad base en MVA.

400 es la cantidad base en KV.

18 es número de términos.

### **2. Numero de nodos eléctricos y componentes del sistema.**

Estos datos están compuestos de la siguiente forma.

5 7 0 0 0 1 4 0 0 0 0 0 0

donde:

5 es el número de nodos o subestaciones.

7 es el número de líneas de transmisión.

0 es el número de transformadores convencionales.

0 es el número de transformadores con cambiador.

0 es el número de transformadores con defasadores.

1 es el número de generadores.

4 es el número de cargas.

0 es el número de ASC (modelo VSC).

0 es el número de compensadores fijos en derivación.

0 es el número de HVDC.

0 es el número de SVC (modelo VSC).

0 es el número de CFPU.

0 es el número de SVC (modelo TCR).

0 es el numero ASC (modelo TCSC).

### **3. Datos del nodo de referencia o Slack.**

Estos datos son leídos de la siguiente forma.

north 1.06 0.0

donde:

north es el nombre del nodo de referencia o slack.

1.06 es la magnitud de voltaje nodal en (pu).

0.0 es el Angulo de la magnitud de voltaje nodal y es fija en (grados).

### **4. Datos de líneas de transmisión.**

Estos datos están compuestos de la siguiente forma:

north south 0.02 0.06 0 0.06

donde:

north es el nodo de envío o de transmisión.

South es el nodo receptor.

0.02 es el valor de la resistencia serie total en (pu).

0.06 es el valor de la reactancia serie inductiva total en (pu).

0 es el valor de la conductancia en derivación total en (pu).

0.06 es el valor de la suceptancia en derivación total en (pu).

### **5. Datos de los generadores.**

Estos datos se leen de la siguiente forma:

south 40.0 -61.5929 -300 300 1.0

donde:

south es el nodo del generador conectado.

40.0 es el valor de potencia activa producida por el generador (MW).

-61.5929 es el valor de potencia reactiva producida por el generador (MVAR).

- 300 es el límite mas bajo de la potencia reactiva producida por el generador (MVAR).
- 300 es el límite más alto de la potencia reactiva producida por el generador (MVAR).
- 1.0 es el valor para controlar la magnitud de voltaje nodal en (pu).

## **6. Datos de la carga.**

Estos datos son leídos de la siguiente forma.

south 20 10

donde:

south es el nodo donde la carga es conectada.

20 es el flujo de potencia activa (MW).

10 es el flujo de potencia reactiva (MVAR).

## APÉNDICE B

### Respuestas de las redes de prueba.

Las simulaciones del capítulo 3 fueron realizadas con 4 redes de prueba IEEE-5, IEEE-14, IEEE-30 y IEEE-57. A continuación se presentan las tablas con las respuestas que generaron los métodos FPFC y FPNR.

Red IEEE-5

Con 18 términos

NODO	VOLTAJES		ANGULOS	
	FPNR	FPFC	FPNR	FPFC
elm	0,971696	0,971696	-5,76495	-5,76495
main	0,984132	0,984132	-4,95702	-4,95702
lake	0,987247	0,987247	-4,63669	-4,63668
south	1	1	-2,06123	-2,06123
north	1,06	1,06	0	0

Tabla B.1 respuestas de la red IEEE-5 nodos.

Red IEEE-14  
 Con 18 términos

NODO	VOLTAJES		ANGULOS	
	FPNR	FPFC	FPNR	FPFC
nod_1	1,06	1,06	0	0
nod_2	1,045	1,045	-4,98095	-4,98094
nod_3	1,01	1,01	-12,718	-12,7179
nod_4	1,01862	1,01862	-10,3242	-10,3241
nod_5	1,02026	1,02026	-8,78258	-8,78251
nod_6	1,07	1,07	-14,2227	-14,2226
nod_7	1,06195	1,06195	-13,3682	-13,3682
nod_8	1,09	1,09	-13,3682	-13,3682
nod_9	1,05635	1,05635	-14,9466	-14,9465
nod_10	1,05133	1,05133	-15,1043	-15,1042
nod_11	1,05708	1,05708	-14,7953	-14,7952
nod_12	1,05522	1,05522	-15,0774	-15,0773
nod_13	1,05044	1,05044	-15,1589	-15,1588
nod_14	1,03579	1,0358	-16,0389	-16,0388

Tabla B.2 respuestas de la red IEEE-14 nodos.

Red IEEE-30  
 Con 18 términos

NODO	VOLTAJES		ANGULOS	
	FPNR	FPFC	FPNR	FPFC
nod_1	1,06	1,06	0	0
nod_2	1,0428	1,0428	-5,49732	-5,49732
nod_3	1,02047	1,02047	-7,99237	-7,99237
nod_4	1,01161	1,01161	-9,64811	-9,64811
nod_5	1,01	1,01	-14,3977	-14,3977
nod_6	1,01013	1,01013	-11,3784	-11,3784
nod_7	1,0023	1,0023	-13,1455	-13,1455
nod_8	1,01	1,01	-12,1295	-12,1295
nod_9	1,05077	1,05077	-14,4308	-14,4308
nod_10	1,04491	1,04491	-16,0258	-16,0258
nod_11	1,082	1,082	-14,4308	-14,4308
nod_12	1,05713	1,05713	-15,2919	-15,2919
nod_13	1,071	1,071	-15,2919	-15,2919
nod_14	1,04226	1,04226	-16,1816	-16,1816
nod_15	1,03765	1,03765	-16,2703	-16,2703
nod_16	1,04476	1,04475	-15,8757	-15,8757
nod_17	1,03954	1,03954	-16,188	-16,188
nod_18	1,02805	1,02805	-16,8789	-16,8789
nod_19	1,02551	1,02551	-17,0491	-17,0491
nod_20	1,02958	1,02958	-16,8507	-16,8507
nod_21	1,03252	1,03252	-16,4692	-16,4692
nod_22	1,03305	1,03305	-16,4552	-16,4552
nod_23	1,0271	1,02771	-16,6555	-16,6555
nod_24	1,02143	1,02143	-16,8246	-16,8246
nod_25	1,01722	1,01722	-16,3915	-16,3915
nod_26	0,999537	0,999537	-16,8112	-16,8112
nod_27	1,02315	1,02315	-15,8638	-15,8638
nod_28	1,00671	1,00671	-12,0035	-12,0035
nod_29	1,00331	1,00331	-17,094	-17,094
nod_30	0,99183	0,99183	-17,977	-17,977

Tabla B.3 respuestas de la red IEEE-30 nodos.

Red IEEE-57

Con 18 términos

NODO	VOLTAJES		ANGULOS	
	FPNR	FPFC	FPNR	FPFC
1	1,04	1,04	0	0
2	1,01	1,01	-1,18809	-1,18809
3	0,985	0,985	-5,98781	-5,98781
4	0,980782	0,980782	-7,33697	-7,33697
5	0,9765	0,976499	-8,54583	-8,54583
6	0,98	0,98	-8,67345	-8,67345
7	0,984212	0,984212	-7,60068	-7,60067
8	1,005	1,005	-4,47717	-4,47717
9	0,98	0,98	-9,58396	-9,58396
10	0,986277	0,986277	-11,4489	-11,4489
11	0,973994	0,973994	-10,1932	-10,1932
12	1,015	1,015	-10,4707	-10,4707
13	0,978935	0,978935	-9,80398	-9,80398
14	0,970242	0,970242	-9,35096	-9,35096
15	0,988072	0,988072	-7,19054	-7,19054
16	1,01337	1,01337	-8,85856	-8,85856
17	1,01745	1,01745	-5,3957	-5,3957
18	1,00068	1,00068	-11,7289	-11,7289
19	0,97025	0,97025	-13,2274	-13,2274
20	0,963924	0,963924	-13,4463	-13,4463
21	1,00871	1,00871	-12,9306	-12,9306
22	1,00996	1,00996	-12,8762	-12,8762
23	1,00855	1,00855	-12,9413	-12,9413
24	0,999395	0,999395	-13,2928	-13,2928
25	0,98271	0,98271	-18,172	-18,172
26	0,958962	0,958962	-12,9822	-12,9822
27	0,981612	0,981612	-11,5134	-11,5134
28	0,996721	0,996721	-10,481	-10,481
29	1,01025	1,01025	-9,77081	-9,77081
30	0,962858	0,962858	-18,7182	-18,7182
31	0,936143	0,936143	-19,3822	-19,3822
32	0,950094	0,950094	-18,5114	-18,5114
33	0,9478	0,9478	-18,551	-18,551

34	0,959417	0,959417	-14,1498	-14,1498
35	0,966428	0,966428	-13,9072	-13,9072
36	0,976043	0,976043	-13,6359	-13,6359
37	0,985103	0,985103	-13,4473	-13,4473
38	1,01304	1,01304	-12,7367	-12,7367
39	0,983038	0,983038	-13,4923	-13,4923
40	0,973022	0,973022	-13,6592	-13,6592
41	0,996296	0,996296	-14,0759	-14,0759
42	0,966632	0,966632	-15,5326	-15,5326
43	1,00961	1,00961	-11,3542	-11,3542
44	1,01699	1,01699	-11,8579	-11,8579
45	1,03611	1,03611	-9,27013	-9,27013
46	1,05993	1,05993	-11,1162	-11,1162
47	1,03343	1,03343	-12,5121	-12,5121
48	1,02755	1,02755	-12,6119	-12,6119
49	1,03648	1,03648	-12,9378	-12,9378
50	1,02351	1,02351	-13,4131	-13,4131
51	1,05233	1,05233	-12,5322	-12,5322
52	0,980389	0,980389	-11,4966	-11,4966
53	0,970964	0,970964	-12,2516	-12,2516
54	0,996329	0,996329	-11,7087	-11,7087
55	1,03079	1,03079	-10,8003	-10,8003
56	0,968498	0,968498	-16,0656	-16,0656
57	0,964973	0,964973	-16,5845	-16,5845

Tabla B.4 respuestas de la red IEEE-57 nodos.

# APÉNDICE C

## Método de Viskovatov.

En éste apéndice se presenta el método de Viskovatov empleado en esta tesis. A continuación se presenta el proceso de construcción de las fracciones continuas mediante este método, describiéndose la derivación matemática detallada.

$$f(s) = f_0^0 + f_1^0 s + f_2^0 s^2 + \dots + f_n^0 s^n + \dots \quad (\text{C.1})$$

Esta serie puede expresarse por una fracción continua, donde:

$$f(s) = f_0 + s(f_1 + f_2 s + \dots + f_n s^{n-1} + \dots) \quad (\text{C.2.1})$$

$$= f_0 + \frac{s}{\frac{1}{f_1 + f_2 s + \dots + f_n s^{n-1} + \dots}} \quad (\text{C.2.2})$$

Analizando el denominador de (C.2.2).

$$\frac{1}{f_1 + f_2 s + \dots + f_n s^{n-1} + \dots} = D = \frac{1 + \left( \frac{f_2}{f_1} s + \frac{f_3}{f_1} s^2 + \dots \right) - \left( \frac{f_2}{f_1} s + \frac{f_3}{f_1} s^2 + \dots \right)}{f_1 + f_2 s + \dots + f_n s^{n-1} + \dots} \quad (\text{C.3})$$

Asumiendo  $C_n = \frac{1}{f_1}$  (C.4), se tiene.

$$D = \frac{1 + C_n(f_2 s + f_3 s^2 + \dots + f_n s^{n-1} + \dots) - C_1(f_2 s + f_3 s^2 + \dots + f_1 s^{n-1} + \dots)}{f_1 + f_2 s + \dots + f_n s^{n-1} + \dots} \quad (\text{C.5})$$

Tenemos la siguiente expresión:

$$1 = \frac{f_1}{f_1} = C_1 f_1 \quad (\text{C.6})$$

Sustituyendo (C.6) en (C.5), y realizando operaciones aritméticas.

$$D = \frac{C_1 f_1 + C_1(f_2 s + f_3 s^2 + \dots + f_n s^{n-1} + \dots) - C_1(f_2 s + f_3 s^2 + \dots + f_n s^{n-1} + \dots)}{f_1 + f_2 s + f_3 s^2 + \dots + f_n s^{n-1} + \dots} \quad (\text{C.7.1})$$

$$D = \frac{C_1(f_1 + f_2s + f_3s^3 + \dots + f_n s^{n-1} + \dots) - C_1(f_2s + f_3s^2 + \dots + f_n s^{n-1} + \dots)}{f_1 + f_2s + f_3s^2 + \dots + f_n s^{n-1} + \dots} \quad (\text{C.7.2})$$

$$D = \frac{C_1(f_1 + f_2s + f_3s^3 + \dots + f_n s^{n-1} + \dots) - C_1(f_2s + f_3s^2 + \dots + f_n s^{n-1} + \dots)}{f_1 + f_2s + f_3s^2 + \dots + f_n s^{n-1} + \dots} \quad (\text{C.7.3})$$

La ecuación (C.7.3) puede expresarse como:

$$D = C_1 + \frac{B_1^1s + B_2^1s^2 + \dots + B_{n-1}^1s^{n-1} + \dots}{f_1 + f_2s + f_3s^2 + \dots + f_n s^{n-1} + \dots} \quad (\text{C.8})$$

Donde:

$$\begin{aligned} B_1^1 &= -\frac{f_2}{f_1} \\ B_2^1 &= -\frac{f_3}{f_1} \\ &\vdots \\ B_n^1 &= -\frac{f_{n-1}}{f_1} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Sustituyendo (C.8) en (C.2.2) se obtiene,

$$f(s) = f_0 + \frac{s}{C_n + \frac{B_1^1s + B_2^1s^2 + \dots + B_{n-1}^1s^{n-1} + \dots}{f_1 + f_2s + f_3s^2 + \dots + f_n s^{n-1} + \dots}} \quad (\text{C.10})$$

Para obtener la fracción continua en (C.10) puede expresarse como:

$$f(s) = f_0 + \frac{s}{C_n + \frac{B_1^1 + B_2^1s + \dots + B_{n-1}^1s^{n-2} + \dots}{f_1 + f_2s + f_3s^2 + \dots + f_n s^{n-1} + \dots}} \quad (\text{C.11.1})$$

$$f(s) = f_0 + \frac{s}{C_n + \frac{s}{\frac{f_1 + f_2s + f_3s^2 + \dots + f_n s^{n-1} + \dots}{B_1^1 + B_2^1s + B_3^1s^2 + \dots + B_{n-1}^1s^{n-2} + \dots}}} \quad (\text{C.11.2})$$

$$f(s) = f_0 + \frac{s}{C_n + \frac{s}{\frac{f_1 + f_2s + \dots + f_n s^{n-1} + \dots}{B_1^1 + B_2^1s + \dots + B_{n-1}^1s^{n-1} + \dots}}} \quad (\text{C.11.3})$$

Analizando el denominador de (C.11.3)

$$D = \frac{f_1 + f_2s + \dots + f_n s^{n-1} + \dots}{B_1^1 + B_2^1s + \dots + B_{n-1}^1s^{n-1} + \dots} \quad (\text{C.12})$$

Necesitamos expresar esto como sigue.

$$D = C_2 \frac{\text{polinomio}}{B_1^1 + B_2^1s + \dots + B_{n-1}^1s^{n-1} + \dots} \quad (\text{C.13})$$

Para lograr esto, realizamos lo siguiente:

$$D = \frac{f_1 + f_2s + \dots}{B_1^1 + B_2^1s + \dots} \quad (\text{C.14})$$

Expresando  $f_1$  en función de  $C_2$  y  $B_1^1$ , tenemos,

$$f_1 = C_2 B_1^1 \quad (\text{C.15})$$

Por lo tanto:

$$C_2 = \frac{f_1}{B_1^1} = \frac{f_1}{-f_2} = -\frac{f_1^2}{f_2} \quad (\text{C.16})$$

De la ecuación (C.13) se tiene

$$D = \frac{C_2(B_1^1 + B_2^1s + \dots) + \text{polinomio}}{B_1^1 + B_2^1s + \dots + B_{n-1}^1s^{n-1} + \dots} \quad (\text{C.17})$$

Igualando (C.17) y (C.12),

$$f_1 + f_2s + \dots + f_n s^{n-1} = C_2(B_1^1 + B_2^1s + \dots + B_{n-1}^1s^{n-1} + \dots) + \text{polinomio} \quad (\text{C.18})$$

Esto significa que el polinomio es,

$$\text{polinomio} = (f_1 + f_2s + \dots + f_n s^{n-1}) - C_2(B_1^1 + B_2^1s + \dots + B_{n-1}^1s^{n-1} + \dots) \quad (\text{C.19.1})$$

$$= (f_1 - C_2 B_1^1) + (f_2 - C_2 B_2^1)s + \dots + (f_n s^{n-1} - C_2 B_{n-1}^1 s^{n-1}) + \dots \quad (\text{C.19.2})$$

Donde  $f_1 - C_2 B_1^1 = 0$  de (C.16)

$$\text{polinomio} = (f_2 - C_2 B_2^1)s + \dots + (f_n - C_2 B_n^1)s^{n-1} + \dots \quad (\text{C.20.1})$$

$$= B_1^2 s + \dots + B_{n-1}^2 s^{n-1} + \dots \quad (\text{C.20.2})$$

Donde:

$$\begin{aligned} B_1^2 &= f_2 - C_2 B_2^1 \\ B_2^2 &= f_3 - C_2 B_3^1 \\ &\vdots \\ B_n^2 &= f_{n-1} - C_2 B_{n+1}^1 \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Otra manera de obtener esta deducción es la siguiente,

$$D = \frac{(f_1 + f_2 s + \dots) + C_2 (B_2^1 s + B_3^1 s^2 + \dots) - C_2 (B_2^1 s + B_3^1 s^2 + \dots)}{B_1^1 + B_2^1 s + \dots} \quad (\text{C.22.1})$$

$$D = \frac{f_1 + C_2 (B_2^1 s + B_3^1 s^2 + \dots) + (f_2 s + f_3 s^2 + \dots) - C_2 (B_2^1 s + B_3^1 s^2 + \dots)}{B_1^1 + B_2^1 s + \dots} \quad (\text{C.22.2})$$

$$D = \frac{f_1 + C_2 (B_2^1 s + B_3^1 s^2 + \dots) + (f_2 - C_2 B_2^1)s + (f_3 - C_2 B_3^1)s^2 + \dots}{B_1^1 + B_2^1 s + \dots} \quad (\text{C.22.3})$$

Suponiendo

$$f_1 = C_2 B_1^1 \quad (\text{C.23})$$

$$D = \frac{C_2 B_1^1 + C_2 (B_2^1 s + B_3^1 s^2 + \dots) + (f_2 - C_2 B_2^1)s + (f_3 - C_2 B_3^1)s^2 + \dots}{B_1^1 + B_2^1 s + \dots} \quad (\text{C.24.1})$$

$$D = \frac{C_2 (B_1^1 + B_2^1 s + B_3^1 s^2 + \dots) + (f_2 - C_2 B_2^1)s + (f_3 - C_2 B_3^1)s^2 + \dots}{B_1^1 + B_2^1 s + \dots} \quad (\text{C.24.2})$$

$$D = C_2 + \frac{(f_2 - C_2 B_2^1)s + (f_3 - C_2 B_3^1)s^2 + \dots}{B_1^1 + B_2^1 s + \dots} \quad (\text{C.24.3})$$

De las ecuaciones (C.13), (C.15) y (C.20.2) o (C.24) obtenemos

$$D = C_2 + \frac{B_1^2 s + B_2^2 s^2 + \dots}{B_1^1 + B_2^1 s + \dots} \quad (\text{C.25})$$

Sustituyendo (C.25) en (C.11.3)

$$f(s) = f_0 + \frac{s}{C_1 + \frac{s}{C_2 + \frac{B_1^2 s + B_2^2 s^2 + \dots}{B_1^1 + B_2^1 s + \dots}}} \quad (\text{C.26})$$

Donde

$$C_n = \frac{1}{f_1} \quad (\text{C.27.1})$$

$$B_n^1 = \frac{f_{n-1}}{f_1} \quad n = 1, \dots \quad (\text{C.27.2})$$

$$C_2 = \frac{f_1}{B_1^1} \quad (\text{C.27.3})$$

$$B_n^2 = f_{n-1} - C_2 B_{n+1}^1 \quad n = 1, \dots \quad (\text{C.27.4})$$

La ecuación (C.26) puede expresarse como,

$$f(s) = f_0 + \frac{s}{C_1 + \frac{s}{C_2 + \left( \frac{s(B_1^2 + B_2^2 s + \dots)}{B_1^1 + B_2^1 s + \dots} \right)}} \quad (\text{C.28.1})$$

$$f(s) = f_0 + \frac{s}{C_1 + \frac{s}{C_2 + \left( \frac{B_1^1 + B_2^1 s + \dots}{B_1^2 + B_2^2 s + \dots} \right)}} \quad (\text{C.28.2})$$

Analizando la expresión del polinomio, se tiene,

$$D = \frac{B_1^1 + B_2^1 s + \dots}{B_1^2 + B_2^2 s + \dots} = C_3 + \frac{\text{polinomio}}{B_1^2 + B_2^2 s + \dots} \quad (\text{C.29})$$

Siguiendo la misma idea antes descrita

$$C_3 = \frac{B_1^1}{B_1^2}$$

por lo tanto de (C.29) se obtiene

$$B_1^1 + B_2^1 s + \dots = C_3 (B_1^2 + B_2^2 s + \dots) + \text{polinomio} \quad (\text{C.30})$$

Por lo tanto

$$\text{polinomio} = B_1^1 - C_3 B_1^2 + (B_2^1 - C_3 B_2^2)s + \dots \quad (\text{C.31})$$

De (C.30) finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \text{polinomio} &= (B_2^1 - C_3 B_2^2)s + (B_3^1 - C_3 B_3^2)s^2 + \dots + (B_n^1 - C_3 B_n^2)s^{n-1} + \dots \\ &= B_1^3 s + B_2^3 s^2 + \dots + B_{n-1} s^{n-1} + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

Sustituyendo (C.32) en (C.29),

$$D = \frac{B_1^1 + B_2^1 s + \dots}{B_1^2 + B_2^2 s + \dots} = C_3 + \frac{B_1^3 s + B_2^3 s^2 + \dots}{B_1^2 + B_2^2 s + \dots} \quad (\text{C.33.1})$$

$$= C_3 + \frac{s(B_1^3 + B_2^3 s + \dots)}{B_1^2 + B_2^2 s + \dots} \quad (\text{C.33.2})$$

$$= C_3 + \frac{s}{\frac{B_1^2 + B_2^2 s + \dots}{B_1^2 + B_2^2 s + \dots}} \quad (\text{C.33.3})$$

donde

$$B_n^3 = B_{n+1}^1 - C_3 B_{n+1}^2$$

sustituyendo (C.33.3) dentro de (C.28.2)

$$f(s) = f_0 + \frac{s}{C_1 + \frac{s}{C_2 + \frac{s}{C_3 + \frac{s}{\left(\frac{B_1^2 + B_2^2 s + \dots}{B_1^2 + B_2^2 s + \dots}\right)}}}} \quad (\text{C.34})$$

En este caso

$$C_n = \frac{1}{f_1} \quad (\text{C.35.1})$$

$$B_n^1 = \frac{-f_{n+1}}{f_1} \quad n = 1, \dots \quad (\text{C.35.2})$$

$$C_2 = \frac{f_1}{B_1^1} \quad (\text{C.35.3})$$

$$B_n^2 = f_{n+1} - C_2 B_{n+1}^1 \quad n = 1, \dots \quad (\text{C.35.4})$$

$$C_3 = \frac{B_1^1}{B_1^2} \quad (\text{C.35.5})$$

$$B_n^3 = B_{n+1}^1 - C_3 B_{n+1}^2 \quad (\text{C.35.6})$$

continuando con este proceso, tenemos que

$$f(s) = f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + \dots + f_n s^n + \dots \quad (\text{C.36})$$

$$f(s) = f_0 + \frac{s}{C_1 + C_2 + C_3 + \dots} \quad (\text{C.37})$$

Donde,

$$C_n = \frac{1}{f_1} \quad (\text{C.38.1}) \quad B_n^1 = \frac{-f_{n+1}}{f_1} \quad n = 1, \dots$$

$$C_2 = \frac{f_1}{B_1^1} \quad (\text{C.38.2}) \quad B_n^2 = f_{n+1} - C_2 B_{n+1}^1 \quad n \geq 1$$

$$C_3 = \frac{B_1^1}{B_1^2} \quad (\text{C.38.3}) \quad B_n^3 = B_{n+1}^1 - C_3 B_{n+1}^2 \quad n \geq 1$$

$$C_n = \frac{B_1^{n-2}}{B_1^{n-1}} \quad n \geq 3 \quad (\text{C.38.4}) \quad B_n^k = B_{n+1}^{k-2} - C_k B_{n+1}^{k-1} \quad \begin{matrix} k \geq 3 \\ n \geq 1 \end{matrix}$$

Con el fin de describir la última deducción de una forma más compacta y de manera computacional podemos expresar las variables de la siguiente manera.

$$f_n = a_n^0 \quad (\text{C.39})$$

$$C_n = C_n \quad (\text{C.40})$$

$$B_n^k = a_n^k \quad (\text{C.41})$$

Por lo tanto la serie (C.13) es dado como,

$$f(s) = a_0^0 + a_1^0 s + a_2^0 s^2 + \dots + a_n^0 s^n + \dots \quad (\text{C.42})$$

Donde la fracción continúa es,

$$f(s) = a_0^0 + \frac{s}{C_1 + C_2 + C_3 + \dots} \quad (\text{C.43})$$

$$C_n = \frac{1}{a_1^0} \quad (\text{C.44.1})$$

$$C_n = \frac{a_1^{n-2}}{a_1^{n-1}} \quad n \geq 2 \quad (\text{C.44.2})$$

$$a_n^1 = \frac{-a_{n+1}^0}{a_1^0} \quad n \geq 1 \quad (\text{C.45.1})$$

$$a_n^k = a_{n+1}^{k-2} - C_k a_{n+1}^{k-1} \quad \begin{array}{l} k \geq 2 \\ n \geq 1 \end{array} \quad (\text{C.45.2})$$

# Referencias

[Alsaffar 2005]

A. Alsaffar Mohammad, PhD Thesis, "Voltage Collapse and Power Flow Algorithms", University of Minnesota – twin cities, November 2005.

[AIA 2004]

AIA. Página principal. España. 2004. <http://www.aia.es/>

[Baker y Graves-Morris 1981]

G. A. Baker and P. Graves-Morris, "Padé Approximants", volume 13 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1981.

[Bonet 2004]

A.T. Bonet, "System and method for monitoring and managing electrical power transmission and distribution networks". Patent Application Publication, August 2004, Pub. No.: US 2004/0158417 A1.

[Fuerte 1997]

DR Fuerte-Esquivel, PhD Thesis, "Steady State Modelling and Analysis of Flexible AC Transmission Systems", Department of Electronics and Electrical Engineering, University of Glasgow, Glasgow Scotland, August, 1997.

[Grainger 1996]

J. Grainger, W. Stevenson Jr., Análisis de Sistemas de Potencia, Mc. Graw Hill, E.U, 1996.

[Iwomoto y Tamura 1978]

Iwomoto, S., and Tamura, Y., "A fast load flow method retaining nonlinearity", *IEEE Trans.*, 1978, PAS-97, pp. 1586–1599.

[Khovanskii 1963]

A. Khovanskii, "The application of continued Fractions an their Generalizations to problem in Aproximation Theory", The Netherlands, 1963. Translated by: Peter Wynn.

[Mathews y Fink 1999]

H. Mathews John and K. Fink Kurtis, "Numerical Methods Using Matlab", third Edition. 1999.

[Stott y Alsac 1974]

Stott, B., and Alsac, O., "Fast decoupled load flow", IEEE Trans., 1974, PAS-93, pp. 859-869.

[Tinney y Hart 1967]

Tinney, W.F., and Hart, C.E., "Power flow solution by Newton's method", IEEE Trans. Power Appar. Syst., 1967, 55, (11), pp. 1801-1809.

[Ward y Hale 1956]

Ward, J.B. and Hale., "Digital computer solution of power flow problems", AIEE Trans. Power Appar. Syst., 1956, 75, pp. 398-404.

[Zamora 2004]

Enrique Arnoldo Zamora Cárdenas, Tesis de Maestría, "Estimación de estado en sistemas flexibles de transmisión de corriente alterna", División de estudios de postgrado de ingeniería eléctrica, Universidad michoacana de san Nicolás de hidalgo, Morelia Mich, Septiembre, 2004.