

**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS
DE HIDALGO**

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

TESIS

**MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS FISICOS
EQUIVALENTES UTILIZANDO EL 20-SIM**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO ELECTRICISTA**

PRESENTA

JOSÉ ARTURO ULAJE GAMIÑO

ASESOR DE TESIS

DR. GILBERTO GONZÁLEZ AVALOS

Marzo del 2009

Agradecimientos

Es un gran logro llegar hasta estas instancias en donde se culmina una etapa de mi vida de manera exitosa. Esto no lo hubiera podido lograr solo y sería injusto no mencionarlo. Agradezco sinceramente el apoyo de mis padres que es y ha sido continuo y de manera incondicional, estando conmigo en las buenas y en las malas.

A toda la gente que durante todo este proceso me ha ayudado de alguna forma u otra, gente de diversos ámbitos que me ha dado trabajo y sustento para sostener mis necesidades básicas durante todo este tiempo.

Gracias a los amigos, compañeros de escuela y trabajo, que siempre con sus juegos, bromas y alegrías ayudaron a ablandar la carga de trabajo y responsabilidades siendo factor de que se cumplan las metas y objetivos.

“No solamente no hubiera sido nada sin ustedes, sino con toda la gente que estuvo a mi alrededor desde el comienzo, algunos siguen hasta hoy”.

¡GRACIAS TOTALES!

Dedicatoria

Este trabajo esta dedicado de manera especial a mis padres y a mis hermanos, a mi familia que es un pilar muy importante en mi vida. También esta dedicado a toda la gente que tiene fe en mi, que cree en mi y que me ha apoyado en todo momento.

Este trabajo también está dedicado a la memoria de mis familiares acaecidos durante todo este tiempo, tíos, tías y parientes cercanos que no están conmigo en estos momentos, pero que siempre tuvieron el deseo de verme triunfar y les hubiera gustado estar conmigo en estos momentos compartiendo la alegría de disfrutar la consumación de una meta más.

Resumen

En este trabajo se realiza el modelado y la simulación de sistemas físicos equivalentes, partiendo de los conceptos de las variables generalizadas, hasta el modelado y simulación de sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos equivalentes utilizando el paquete computacional 20-sim.

En principio se dan las bases para desarrollar los sistemas físicos equivalentes, se parte del análisis y comparación de las variables generalizadas en los sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos así como de sus sistemas energéticos. Se revisa brevemente el modelado en variables de estado y se dan algunos ejemplos de modelado de sistemas físicos. También se citan sistemas combinados que comúnmente funcionan como transductores.

Una vez que son presentados los elementos necesarios para el modelado de los sistemas físicos equivalentes, se desarrollan estos mediante un procedimiento bien definido para modelar sistemas físicos equivalentes. Una vez que se han modelado dichos sistemas se realiza el proceso de simulación utilizando el 20-sim, que es un programa utilizado para simular diversos sistemas físicos. Al realizar esta simulación se observan y comparan las respuestas de los sistemas equivalentes en el dominio del tiempo. Finalmente se presentan las conclusiones y recomendaciones de este trabajo.

Contenido

Agradecimientos	ii
Dedicatoria.....	iii
Resumen	iv
Contenido	v
Capítulo 1 Introducción	1
1.1 Sistemas físicos equivalentes	1
1.2 Objetivo	3
1.3 Justificación	3
1.4 Organización y estructura de la tesis	3
Capítulo 2 Antecedentes de modelado	5
2.1 Introducción	5
2.2 Variables generalizadas	5
2.3 Descripción de los componentes en los sistemas físicos	6
2.3.1 Fuentes de esfuerzo (Se)	6
2.3.2 Fuentes de flujo (Sf)	8
2.3.3 Resistencia (R)	10
2.3.4 Inercia (I)	12
2.3.5 Capacitancia (C).....	14
2.4 Sistemas energéticos.....	16
2.5 Representación de un sistema en variables de estado.....	18
2.5.1 Procedimiento	20
2.6 Modelado de sistemas eléctricos	20
2.7 Modelado de sistemas mecánicos	23
2.8 Modelado de sistemas hidráulicos.....	26
2.9 Modelos de sistemas físicos.....	29
2.9.1 Sistema mecánico eléctrico	29
2.9.2 Sistema mecánico hidráulico	30
2.9.3 Sistema hidráulico eléctrico.....	32
Capítulo 3 Modelado de sistemas físicos equivalentes.....	34
3.1 introducción	34
3.2 Que es un sistema fisico equivalente?	35
3.3 Modelado de un sistema eléctrico en un sistema equivalente.....	36
3.3.1 Procedimiento.....	37
3.3.2 Modelado de un sistema eléctrico RLC en serie a un sistema equivalente	38

3.3.3 Modelado de un sistema eléctrico RLC mixto a un sistema equivalente	46
3.4 Modelado de un sistema mecánico a sistema equivalente.....	53
3.4.1 Modelado de un sistema mecánico con tres elementos dinámicos a sistema equivalente	53
3.5 Modelado de un sistema hidráulico a sistema equivalente	62
3.5.1 Modelado de un sistema hidráulico sencillo a sistema equivalente	63
3.5.2 Modelado de un sistema hidráulico con dos depósitos a sistema equivalente	69
3.6 Modelado de algunos sistemas complejos	76
3.6.1 Modelado de un sistema equivalente con cuatro elementos dinámicos	76
3.6.2 Modelado de un sistema equivalente de tres mallas y cuatro elementos dinámicos	85
Capítulo 4 Simulación de sistemas físicos equivalentes	98
4.1 Introducción	98
4.1.2 Breve descripción del entorno de 20-sim	98
4.2 Modelado de sistemas físicos utilizando 20-sim	103
4.2.1 Sistemas eléctricos	103
4.2.2 Sistemas mecánicos	105
4.2.1 Sistemas hidráulicos	106
4.3 Simulación de sistemas físicos equivalentes	108
4.3.1 Simulación de un sistema eléctrico a sistemas equivalentes	108
4.3.2 Simulación de un sistema mecánico a sistemas equivalentes.....	116
4.3.1 Simulación de un sistema hidráulico a sistemas equivalentes.....	119
4.4 Simulación de algunos sistemas complejos.....	127
Capítulo 5 Conclusiones y recomendaciones.....	137
5.1 Conclusiones.....	137
5.2 Recomendaciones.....	138
Bibliografía.....	139
Apéndice.....	140

Capítulo 1

Introducción

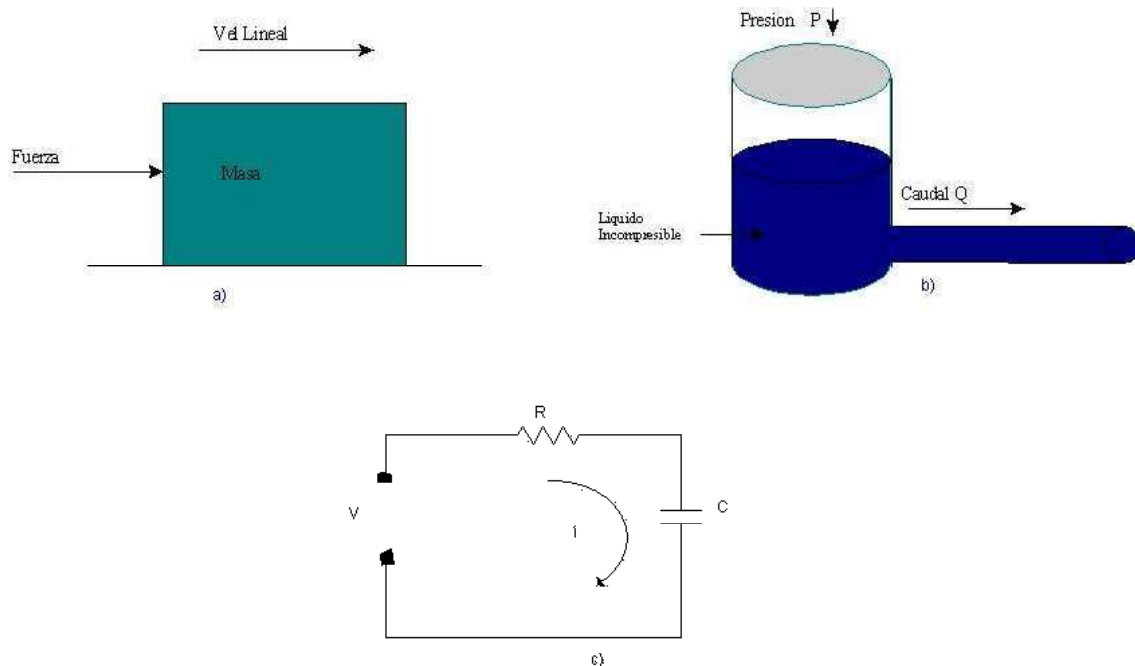
1.1 Sistemas físicos equivalentes

Los sistemas físicos equivalentes son sistemas que son análogos entre sí, es decir experimentan el mismo comportamiento en el dominio del tiempo. Esto se debe a la analogía que se realiza con las variables que participan en estos sistemas. En estos sistemas se definen variables generalizadas que más adelante se van a analizar, estas intervienen en la transmisión de energía.

Las variables generalizadas representan comportamientos que ocurren de manera similar en estos tipos de sistemas como son la resistencia, la capacitancia y la inercia. También se utilizan fuentes de flujo y esfuerzo, que son un par de variables fundamentales que mediante éstas se realiza la transmisión de energía en este tipo de sistemas físicos.

Los sistemas energéticos están formados por un conjunto de elementos que interactúan con el entorno mediante la transmisión de energía. Por ejemplo, en un sistema mecánico traslacional un resorte conectado a una masa transmitirá energía bajo la forma de fuerza por velocidad lineal; de igual manera se tiene en un sistema hidráulico, un tanque y una larga línea de fluidos las cuales tienen interacción entre sí a través de la transmisión de energía en forma de presión por caudal; de manera similar en un sistema eléctrico, la potencia y la forma de corriente por voltaje se transmite en la interfase de una resistencia y un capacitor eléctrico.

Estos sistemas se denominan equivalentes ya que así como podemos tener un circuito eléctrico con componentes RL, RC o RLC ; también estos se pueden tener en un sistema mecánico y en un sistema hidráulico.



Ejemplos de sistemas físicos.

Figura 1. Sistemas físicos. Sistema mecánico traslacional a), sistema hidráulico b) y sistema eléctrico c).

Por ejemplo una de las analogías más comunes es que en un circuito la corriente es I y recordemos que es un flujo de electrones que circulan a través de un conductor; en un sistema hidráulico ahora la corriente es el caudal Q de líquido incompresible que circula a través de un conductor, y en un sistema mecánico traslacional será entonces la velocidad lineal que experimenta un bloque de materia, esto se muestra en la figura 1.

Los modelos son simplificaciones de la realidad. Existen varios tipos de modelos y su forma depende de su aplicación, por ejemplo los modelos físicos son frecuentemente usados en ingeniería cuando no es práctico usar sistemas reales. Una idea central que envuelve el estudio de la dinámica es la de su modelo. Los modelos son construcciones simplificadas y abstractas utilizadas para estudiar y determinar el comportamiento de sistemas.

A causa de que un modelo es una simplificación de la realidad, hay una gran cantidad de trabajo en la construcción de modelos. Un modelo excesivamente complejo y detallado puede contener parámetros “imposibles” de estimar o muy difíciles de analizar. Por el contrario, un modelo excesivamente simplificado no es capaz de exhibir características importantes.

Por lo tanto, el modelado de un sistema es una herramienta útil para conocer el desempeño del sistema conociendo algunos de sus principales parámetros que se pueden conocer.

1.2 Objetivo

El objetivo de este trabajo de tesis es proponer el modelado y análisis de sistemas físicos equivalentes y su verificación por medio de simulación utilizando el software 20-sim. Los sistemas físicos que se modelan y simulan en este trabajo son sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos.

1.3 Justificación

La realización de este trabajo de tesis es proponer un enfoque distinto a la comprensión de los sistemas físicos; dar a entender que hay comportamientos generalizados en estos sistemas y que se puede por ejemplo resolver un sistema eléctrico en el enfoque de un sistema mecánico e hidráulico y viceversa. Así mismo, por medio de simulación se verifica el comportamiento de los sistemas físicos equivalentes.

1.4 Organización y estructura de la tesis

Enseguida se presenta la estructura de la tesis, así como una breve descripción de los capítulos que la componen.

En el capítulo 1 se da una breve introducción a este trabajo, así como un panorama general acerca de los sistemas físicos equivalentes. También se presenta el objetivo, motivación y estructura de este trabajo.

En el capítulo 2 se dan los antecedentes de modelado necesarios para los sistemas físicos que se van a analizar.

En el capítulo 3 se realiza el modelado matemático de los sistemas físicos que se pretenden analizar; estos son sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos y realizando sus respectivas analogías en su modo RL, RC y RLC.

En el capítulo 4 se realiza el proceso de simulación utilizando el software 20-SIM, en este proceso se comprueba la equivalencia de los sistemas antes mencionados, ya que su comportamiento en el dominio del tiempo debe ser el mismo.

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones y recomendaciones de este trabajo de tesis, se observa si realmente convergen los desarrollos de modelado antes descrito con el proceso de simulación, es decir, si se observaron respuestas similares entre los sistemas físicos en el dominio del tiempo.

Capítulo 2

Antecedentes de modelado

2.1 Introducción

Para poder realizar el modelado de los sistemas físicos equivalentes, primero es necesario asentar los fundamentos básicos que describen los comportamientos de estos sistemas, para así tener los elementos necesarios que nos ayudarán a obtener un correcto modelado que describa el comportamiento de los sistemas físicos a analizar y a simular.

2.2 Variables generalizadas

En los sistemas físicos existen cinco componentes de comportamiento, llamados también variables generalizadas. Las cuales se clasifican de la siguiente manera.

- a) *Elementos pasivos.* Son aquellos que no generan energía, sino que simplemente la consumen e interactúan ya sea de manera dinámica o estática con el flujo de energía. Estos elementos son: ***la resistencia, la inercia y la capacitancia.*** En la siguiente sección se describen con mayor detalle estos elementos para un sistema eléctrico, mecánico traslacional e hidráulico.
- b) *Elementos activos.* Estos son elementos que entregan energía al sistema, para el estudio de los sistemas físicos y sus elementos generalizados estos elementos son las denominadas ***fuentes de esfuerzo y fuentes de flujo.*** Mediante este par de elementos se proporciona la energía necesaria para que el sistema interactúe con los elementos pasivos antes descritos. En la siguiente sección se describen las fuentes de esfuerzo y flujo de los sistemas a tratar en este trabajo.

2.3 Descripción de los componentes en los sistemas físicos

A continuación se darán las definiciones de los componentes que conforman los sistemas físicos equivalentes. También se describen estos mismos en sistemas eléctricos, mecánicos(Traslacional) e hidráulicos.

2.3.1 Fuentes de esfuerzo(Se)

Estas entregan una fuerza la cual va a mover el flujo que circula y provoca que actúe el sistema mediante los elementos pasivos como son resistencia, inercia y capacitancia. El comportamiento de esta fuente de esfuerzo es:

$$e = Se \quad \text{Fuente de esfuerzo independiente del flujo } f.$$

Para un *sistema eléctrico* se tiene una fuente de voltaje independiente la cual se muestra en la siguiente figura 2.1.

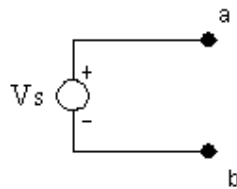


Figura 2.1 Fuente de esfuerzo en un sistema eléctrico. Fuente de voltaje independiente.

Las siguientes expresiones indican que el voltaje V_s es la diferencia de los voltajes nodales a y b. También se expresa que V_s es la fuente de esfuerzo en un sistema eléctrico.

$$V_s = (V_a - V_b) \tag{2.1}$$

$$Se = V_s \tag{2.2}$$

En un *sistema mecánico traslacional* se tiene que una fuente de esfuerzo es la fuerza externa que se aplica sobre un bloque de masa la cual produce un movimiento en el cual dicho bloque experimenta una velocidad lineal. La figura 2.2 muestra una fuente de esfuerzo en este sistema mecánico.

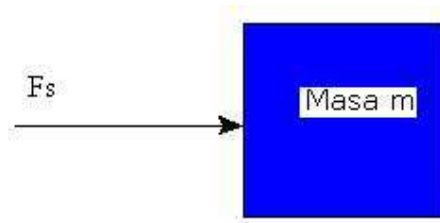


Figura 2.2 Fuente de esfuerzo en un sistema mecánico traslacional.

La ecuación (2.3) indica que la fuente de esfuerzo es la fuerza exterior que se le aplica a la masa m .

$$F = F_s = Se \quad (2.3)$$

En un *sistema hidráulico* se tiene que la fuente de esfuerzo es un depósito grande con un tubo conductor mediante el cual circula un caudal de un líquido incompresible. Esta fuente se ilustra en la figura 2.3.

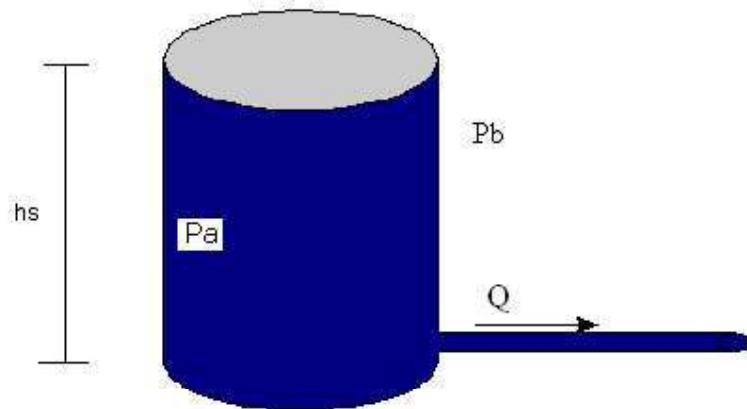


Figura 2.3 Fuente de esfuerzo. Sistema hidráulico.

Las expresiones (2.4), (2.5) y (2.6) describen esta fuente de esfuerzo

$$P_s = (P_a - P_b) \quad (2.4)$$

$$P_s = \rho g h_s \quad (2.5)$$

$$P_s = Se \quad (2.6)$$

De estas expresiones se entiende que la presión que sale del depósito (P_s) es igual a la diferencia de la presión interior (P_a) y la presión exterior del depósito (P_b). También se observa que la presión (P_s) depende también de las propiedades del depósito como es su altura (h_s) y su densidad (ρ), así como también de la aceleración gravitacional (g) de manera proporcional.

2.3.2 Fuentes de flujo(Sf)

Estos elementos inyectan un flujo al sistema el cual interactúa con los elementos dinámicos y estáticos del sistema.

$f = Sf$ fuente de flujo es independiente de esfuerzo.

Para un sistema eléctrico una fuente de flujo es una fuente de corriente independiente la cual se ilustra en la figura 2.4.

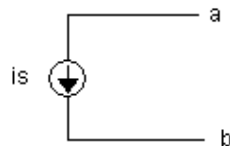


Figura 2.4 Fuente de flujo en un sistema eléctrico.

Para esta fuente se tiene lo siguiente,

$$is = \dot{a} - \dot{b} \quad (2.7)$$

$$Sf = is \quad (2.8)$$

La corriente que entrega esta fuente de corriente es igual a la diferencia de la corriente en el nodo a y la corriente en el nodo b. En este sistema la fuente de flujo es igual a la corriente is .

Para un *sistema mecánico traslacional* la fuente de flujo es un resorte en el cual la energía que se acumula se inyecta en forma de velocidad lineal provocando que este tipo de flujo se inyecte en el sistema e interactúe con los elementos del mismo. La figura 2.5 ilustra esta fuente.

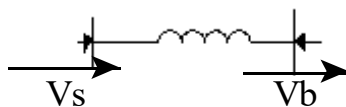


Figura 2.5 Fuente de flujo en un sistema mecánico traslacional.

Las ecuaciones (2.9) y (2.10) se utilizan en esta fuente de flujo.

$$Va = Vs \quad (2.9)$$

$$Sf = Vs \quad (2.10)$$

Estas expresiones indican que la velocidad Vs que sale del resorte y se inyecta al sistema y por consiguiente es la fuente de flujo en un sistema mecánico traslacional.

En un sistema hidráulico la fuente de flujo es una bomba hidráulica la cual recibe un caudal de un líquido incompresible y el caudal que sale depende del desplazamiento angular que tiene dicha bomba. En la figura 2.6 se ilustra este tipo de fuente.

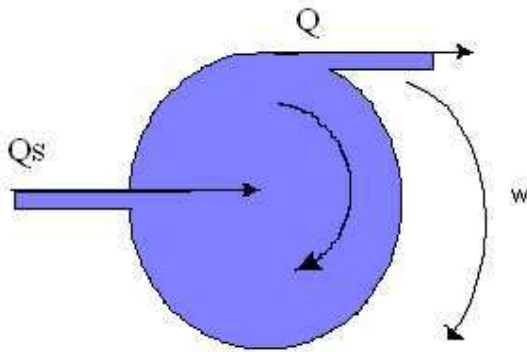


Figura 2.6 Fuente de flujo en un sistema hidráulico.

Las expresiones de esta fuente de flujo son,

$$w = cte \quad (2.11)$$

$$Q = Qs \quad (2.12)$$

$$Sf = Qs = f_Q \vec{w} \quad (2.13)$$

De lo anterior se entiende que esta fuente de flujo inyecta un caudal Qs al sistema y que esta fuente que como se observa es una bomba la cual este caudal de salida depende del desplazamiento angular (w) que experimenta la paleta.

2.3.3 Resistencia(R)

Se define como oposición total al paso del flujo en un sistema físico. Este elemento es estático y su comportamiento es de la siguiente manera.

$$e = R * f \quad (2.14)$$

$$R = \frac{e}{f} \quad (2.15)$$

Resistencia eléctrica. Esta se define como la oposición total al paso de la corriente en un circuito eléctrico. Se representa con la letra R y se simboliza como se muestra en la figura 2.7.

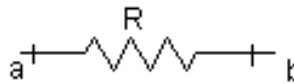


Figura 2.7 Resistencia eléctrica.

Las expresiones se basan en la ley de ohm y su comportamiento lineal es el siguiente,

$$V_a - V_b = R (i_a - i_b) \quad (2.16)$$

$$R = \frac{V_a - V_b}{i_a - i_b} \quad (2.17)$$

Resistencia en un sistema mecánico traslacional. En el caso de los sistemas mecánicos, se tiene que la resistencia es la oposición al movimiento. En este caso se define al amortiguador como un elemento que ofrece oposición al movimiento. La figura 2.8 muestra el diagrama de cuerpo libre de una resistencia en este sistema físico.

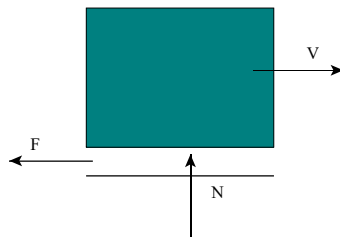


Figura 2.8 Diagrama de cuerpo libre de la resistencia mecánica (Amortiguador).

El comportamiento de este elemento se describe mediante las ecuaciones (2.18), (2.19), (2.20) y (2.21).

$$F = \beta V_{rel} \quad (2.18)$$

$$F = fN \text{signo}(Vel) \quad (2.19)$$

$$V_{rel} = V_{final} - V_{inicial} \quad (2.20)$$

$$R \cong \beta \quad (2.21)$$

De esta expresión (2.18) se tiene que la fuerza F con la que se opone el amortiguador al movimiento es igual al producto de la velocidad V_{rel} y la constante de amortiguamiento β que tiene este elemento. De aquí se tiene esta parte la cual se considera resistiva en este elemento es β , debido a que influye directamente para que se produzca la fuerza F que se opone a que se produzca el movimiento, de tal modo que se reduce la velocidad relativa V_{rel} .

Resistencia en un sistema hidráulico. En un sistema hidráulico el elemento resistivo es aquel que se opone a la circulación de un flujo de líquido incompresible, es decir es oposición al paso del caudal de un líquido. El efecto resistivo en este sistema se obtiene mediante la obstrucción geométrica de un canal de fluido y esta obstrucción presenta resistencia a la circulación del caudal a través del sistema. Esto se muestra en la figura 2.9.

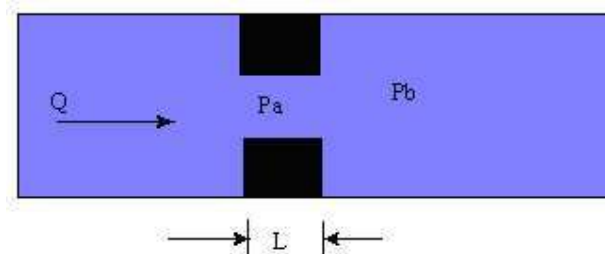


Figura 2.9 Resistencia en un sistema hidráulico.

El comportamiento de este elemento en el sistema hidráulico se muestra mediante las ecuaciones (2.22) y (2.23)

$$Q = C * \sqrt{Pa - Pb} \quad (2.22)$$

$$R = f_R(Q) \quad (2.23)$$

Como se observa el caudal que sale del conductor es diferente del que entra, y se observa por la diferencia de presiones en la parte de la obstrucción. La constante C depende de la longitud L del segmento de obstrucción y del régimen del flujo. Se observa la oposición a la circulación del flujo en este elemento.

2.3.4 Inercia(I)

Este es un elemento del tipo dinámico que tiene la propiedad de poder almacenar energía mediante la acumulación de esfuerzo. El comportamiento de este elemento se muestra de manera generalizada mediante las expresiones (2.24) y (2.25).

$$f = \int \frac{1}{I} * e dt \quad (2.24)$$

$$e = I * \frac{d}{dt} \left[\int f \right] \quad (2.25)$$

Inductancia eléctrica. Se le llama inductancia eléctrica a la oposición al cambio de flujo, en este caso la corriente eléctrica. La inductancia es el comportamiento de inercia equivalente en un sistema eléctrico. Este elemento es del tipo dinámico ya que almacena energía mediante campo magnético. Este elemento se denota con la letra L y su símbolo se muestra en la figura 2.10.

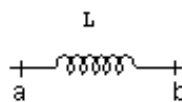


Figura 2.10 Símbolo de un inductor eléctrico.

El comportamiento del inductor en un sistema eléctrico se observa en sus ecuaciones para la corriente y voltaje en este elemento

$$\int_a^b \left[\int \right] = \frac{1}{L} \int_0^t \left[\int a - Vb \right] dt \quad (2.26)$$

$$\left[\int a - Vb \right] = L * \frac{d}{dt} \left[\int a - ib \right] \quad (2.27)$$

$$I = L \quad (2.28)$$

Se observa que el voltaje en el inductor depende de manera proporcional de el mismo y del cambio de la corriente con respecto al tiempo. Como este elemento almacena energía mediante la acumulación de esfuerzo, esto se observa en la ecuación de la corriente en el inductor (2.26), como se acumula el voltaje durante el tiempo de integración.

Inercia en un sistema mecánico traslacional. La inercia es la oposición al cambio de estado de un cuerpo en movimiento. La figura 2.11 muestra una masa m que tiene inercia al aplicarle una fuerza y por consiguiente desarrolla una velocidad lineal.

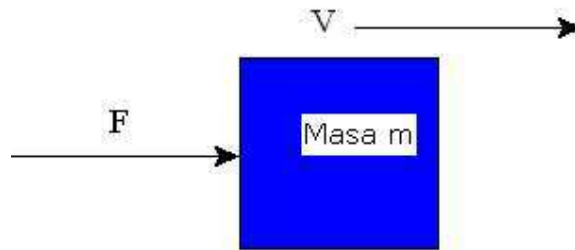


Figura 2.11 Inercia de un bloque al aplicarle una fuerza en un sistema mecánico traslacional.

El comportamiento de este elemento dinámico se muestra mediante las siguientes expresiones.

$$V = \frac{1}{m} \int_0^t F dt \quad (2.29)$$

Despejando para la fuerza.

$$F = m \frac{d}{dt} V \quad (2.30)$$

Pero como el cambio de la velocidad con respecto al tiempo es la aceleración, entonces tenemos la conocida formula para encontrar la fuerza.

$$F = ma \quad (2.31)$$

$$I = m \quad (2.32)$$

Inercia en un sistema hidráulico. Al igual que en el sistema mecánico, en este también es la oposición al cambio de estado de la masa del líquido incompresible cuando esta se encuentra en movimiento, esta afecta directamente al caudal y depende de la longitud del segmento del tubo conductor, el área del mismo y la densidad. Lo anterior se ilustra en la figura 2.12.

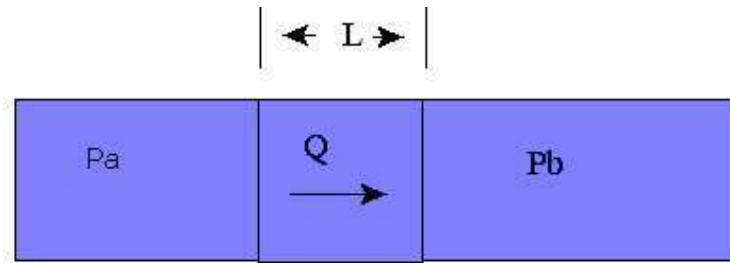


Figura 2.12 Inercia en un sistema hidráulico.

Las ecuaciones (2.33) y (2.34) indican el comportamiento del caudal cuando se experimenta la inercia, también se observa como la inercia depende de la longitud, y área del conductor, así como de la densidad que experimenta el mismo.

$$Q = \frac{A}{\rho L} \int_0^t \overline{(Pa - Pb)} dt \quad (2.33)$$

$$I = \frac{\rho L}{A} \quad (2.34)$$

Como se mencionó en el párrafo anterior se observa como depende la inercia de la densidad y de la longitud del segmento del tubo conductor de manera proporcional e inversamente proporcional a el área del mismo.

2.3.5 Capacitancia(C)

Este tipo de elementos almacenan energía mediante la acumulación de flujo, también se les consideran dinámicos y su comportamiento de manera generalizada en los sistemas físicos se presenta mediante la expresión (2.35).

$$f = \int_0^t \frac{1}{C} f dt \quad (2.35)$$

Capacitancia en un sistema eléctrico. En un sistema eléctrico se tiene un capacitor que almacena energía mediante la acumulación de carga eléctrica, esta formado por dos placas y un dieléctrico. Su valor de capacitancia depende tanto de las dimensiones de las placas así como del dieléctrico utilizado. En la figura 2.13 se ilustra un capacitor eléctrico,

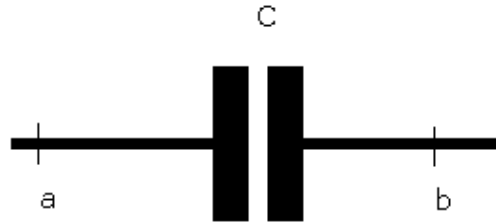


Figura 2.13 Capacitor eléctrico.

El voltaje en un capacitor depende de la corriente que circula durante un lapso de tiempo y esto se observa en la siguiente expresión.

$$V_a - V_b = \frac{1}{C} \int_0^t i dt \quad (2.36)$$

$$C = C \quad (2.37)$$

Capacitancia en un sistema mecánico traslacional. Para un sistema mecánico, se tiene que el elemento capacitor es el resorte. El comportamiento de este resorte se rige mediante la ley de hooke, esta dice que la fuerza en un resorte es la constante k multiplicada por la distancia x. Como este elemento es dinámico la fuerza depende de que tanta distancia recorra el resorte, esto en función de su velocidad. La figura 2.14 muestra un resorte el cual se comporta como capacitor mecánico

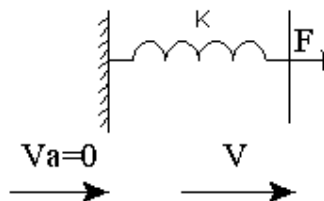


Figura 2.14 Resorte ó capacitor mecánico.

El efecto del elemento capacitor en la fuerza que desarrolla depende de la acumulación de velocidad durante un lapso de tiempo. Esto se nota en las ecuaciones (2.38) y (2.39).

$$F = K \int_0^t V dt \quad (2.38)$$

$$C = \frac{1}{K} \quad (2.39)$$

Capacitancia en un sistema hidráulico. En un sistema hidráulico el elemento capacitor es un tanque en el cual la energía se almacena mediante la acumulación de líquido incompresible. La figura 2.15 ilustra un tanque como elemento capacitor.

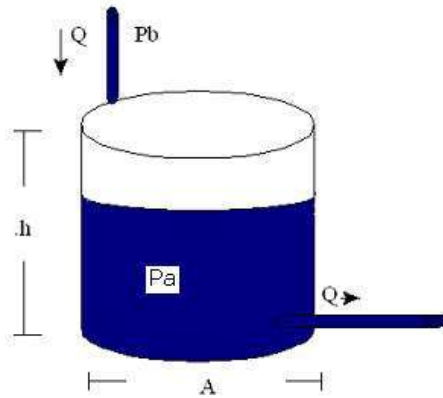


Figura 2.15 Elemento capacitor en un sistema hidráulico.

La presión queda afectada directamente por las propiedades del tanque y de la variación del caudal cuando se acumula el fluido de líquido incompresible. Las ecuaciones (2.40) y (2.41) indican este comportamiento.

$$P_a - P_b = \frac{\rho g}{A} \int_0^t Q dt \quad (2.40)$$

$$C = \frac{A}{\rho g} \quad (2.41)$$

Como se observa la capacitancia que posee el tanque depende del área, así como de la densidad del mismo, puesto que la aceleración gravitacional es constante.

2.4 Sistemas energéticos

Después de haber revisado los componentes generalizados en los sistemas que se van a analizar, se describen algunos sistemas energéticos típicos en los tres sistemas que se analizan.

Los sistemas energéticos son aquellos cuyos componentes interactúan con el entorno mediante la transmisión de energía. En un sistema mecánico traslacional se tiene un resorte conectado a una

masa, transmitirá energía a su interfase bajo la forma de fuerza por velocidad lineal. En la figura 2.16 se tiene una forma de transmisión de energía en un sistema mecánico.

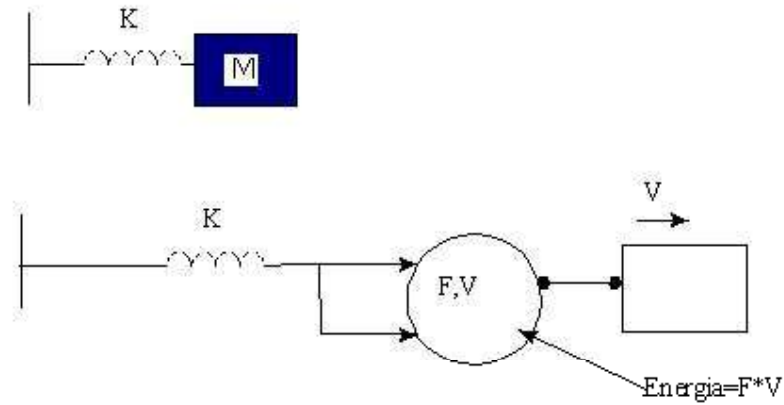


Figura 2.16 Transmisión de energía en un sistema mecánico traslacional.

En un sistema hidráulico los componentes típicos para transmitir energía es un depósito grande con un líquido incompresible que tiene conectado un tubo conductor largo. Estos tienen interacción entre si mediante la transmisión de energía en forma de presión por caudal. La figura 2.17 muestra este sistema de transmisión de energía.

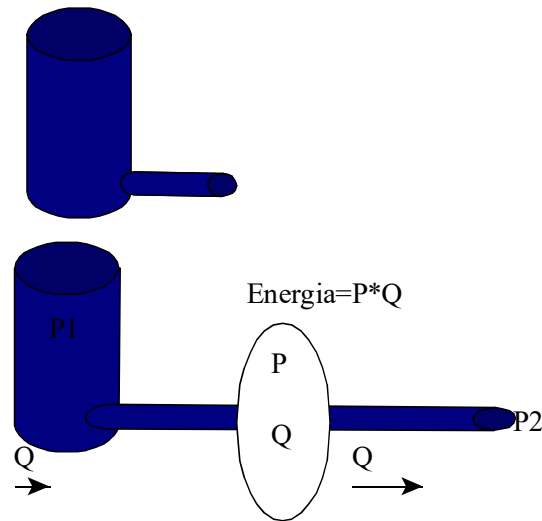


Figura 2.17 Transmisión de energía en un sistema hidráulico.

En un sistema eléctrico la potencia se transmite mediante la forma de corriente por voltaje en la interfase de una resistencia y un capacitor eléctrico. La siguiente figura muestra un circuito eléctrico mediante el cual se transmite la potencia por medio de corriente por voltaje.

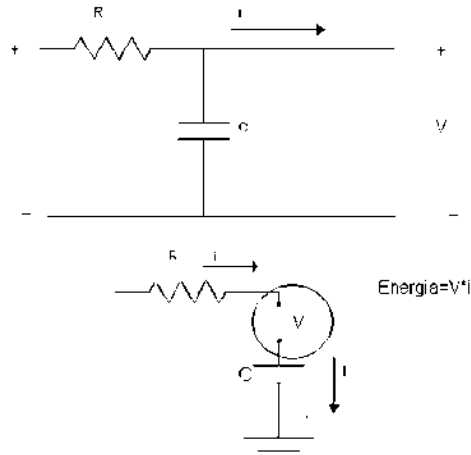


Figura 2.18 Transmisión de energía en un sistema eléctrico.

2.5 Representación de un sistema en variables de estado

Para poder realizar el modelado de los sistemas físicos equivalentes se requiere del manejo de las variables de estado. Esta técnica de variables de estado se aplica a sistemas lineales o no lineales, variantes o invariantes en el tiempo y a sistemas multivariados; a esta técnica se le denomina técnica en el dominio del tiempo.

El estado de un sistema es el conjunto más pequeño de cantidades físicas que se requiere especificar para determinar la evolución del sistema. Las variables que se utilizan para especificar el estado del sistema se llaman *variables de estado*. Generalmente para sistemas dinámicos se tienen ecuaciones diferenciales debido a que estos sistemas involucran términos con derivadas e integrales.

Las ecuaciones de estado son un subconjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden para el caso de los sistemas lineales invariantes en el tiempo y la estructura se indica en la ecuación (2.42).

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.42)$$

De la ecuación 2.42 se tiene lo siguiente:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \cdot \\ x_1 \\ \cdot \\ x_2 \\ \cdot \\ x_3 \\ \vdots \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Este es el vector de las derivadas de los estados de dimensión n . Las entradas del sistema las maneja el vector u el cual se muestra enseguida.

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

La matriz A denota la matriz del sistema que es de dimensión nxn y B la matriz de entrada de dimensión nxm . La estructura de la salida del sistema es la siguiente,

$$y = Cx + Du \quad (2.45)$$

De la expresión anterior se tiene que y es el vector de salida que toma la dimensión p , C es la matriz de salida del sistema y tiene una dimensión de pxn y la matriz D representa un acoplamiento directo entre la entrada y salida, esta matriz tiene la dimensión pxn . En el caso de sistemas de entrada simple y salida simple.

$$m = 1$$

$$p = 1$$

Para obtener un modelo de un sistema en ecuaciones de estado se debe aplicar el siguiente procedimiento.

2.5.1 Procedimiento

a) Se selecciona una parte de todas las variables posibles que afectan al sistema, que es la parte que interesa modelar. Esta parte seleccionada se llama variables de estado.

b) Se escriben n ecuaciones diferenciales para un sistema de orden n , estas son ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden y se escriben en términos de las variables de estado, éstas se denominan las variables de estado.

c) Una vez que se conocen las condiciones de todas las variables de estado y todas sus entradas del sistema se pueden despejar las ecuaciones diferenciales simultáneas para conocer las variables de estado.

2.6 Modelado de sistemas eléctricos

En el modelado de sistemas eléctricos se tienen como señales principales voltajes y corrientes y éstas señales actúan dinámicamente en elementos como resistencias, capacitores e inductores descritos en la sección anterior. Estos elementos se pueden conectar en serie, en paralelo o de manera mixta.

Todo circuito eléctrico tiene una fuente de alimentación, esta puede ser de corriente directa o de corriente alterna, una carga que puede ser resistiva, inductiva, capacitiva o combinada ya sea en serie o en paralelo. En la figura 2.19 se muestra los elementos pasivos que intervienen en los sistemas eléctricos.

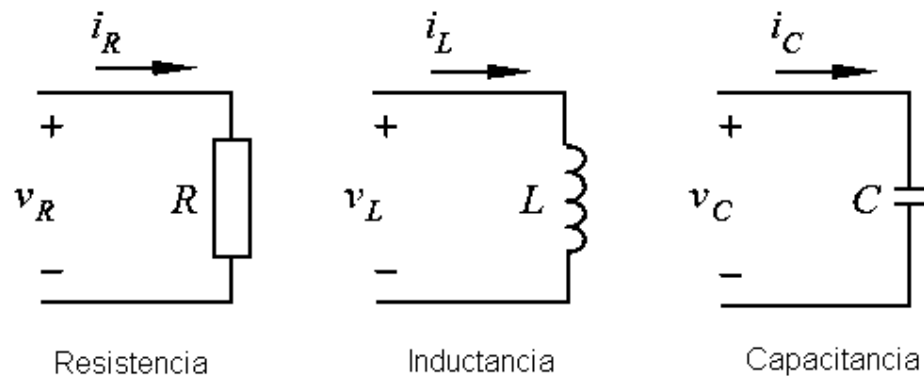


Figura 2.19 Elementos pasivos de un circuito eléctrico.

Un circuito eléctrico tiene una trayectoria definida por la cual circula una corriente y esta actúa dependiendo del arreglo y características de los elementos que componen la carga.

Las leyes físicas que rigen los sistemas eléctricos son las *leyes de kirchhoff* para corrientes y voltajes, estas indican como se comportan las corrientes y voltajes cuando se conectan estos en serie, en paralelo o en combinación de las dos anteriores. También se rigen de la *ley de ohm*, la cual nos da la relación que existe entre el voltaje, la corriente y la resistencia en un circuito eléctrico.

Las leyes de Kirchhoff se enuncian en las siguientes expresiones para una conexión serie de n elementos son,

$$i_T = i_1 = i_2 = i_3 = \dots i_n \quad (2.46)$$

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 + \dots V_n \quad (2.47)$$

$$Z_T = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots Z_n \quad (2.48)$$

si la conexión es en paralelo se tiene,

$$V_T = V_1 = V_2 = V_3 = \dots V_n \quad (2.49)$$

$$i_T = i_1 + i_2 + i_3 + \dots i_n \quad (2.50)$$

$$Z_T = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots \frac{1}{Z_n}} \quad (2.51)$$

Analizando, primeramente un circuito mixto de componentes R, L y C ilustrado en la figura 2.20.

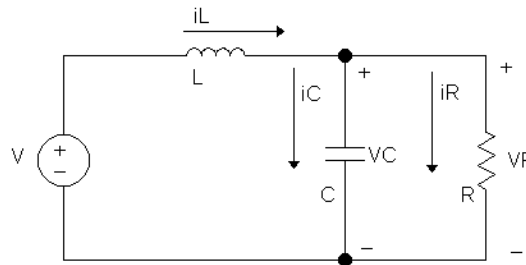


Figura 2.20 Sistema eléctrico a modelar.

El voltaje en el capacitor y la resistencia son iguales, tomando la ecuación (2.49) se tiene.

$$V_C = V_R \quad (2.52)$$

Utilizando la suma de voltajes, de la ecuación (2.47),

$$V = V_L + V_C \quad (2.53)$$

tomando el voltaje en el inductor en (2.53) se tiene,

$$V = L \frac{di_L}{dt} + V_C \quad (2.54)$$

Proponiendo,

$$\begin{aligned} x_1 &= i_L \\ x_2 &= V_C \\ \dot{x}_1 &= \frac{di_L}{dt} \\ \dot{x}_2 &= \frac{dV_C}{dt} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Despejando $\frac{di_L}{dt}$ de (2.54) queda,

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V}{L} - \frac{V_C}{L} \quad (2.56)$$

Sustituyendo en (2.56) con las asignaciones (2.55) se tiene la primer ecuación de estado,

$$\dot{x}_1 = \frac{V}{L} - \frac{x_2}{L} \quad (2.57)$$

Utilizando la ecuación (2.50)

$$i_L = i_R + i_C \quad (2.58)$$

Tomando $i_R = \frac{V_C}{R}$ y $i_C = C \frac{dV_C}{dt}$ en (2.58) se tiene,

$$I_L = \frac{V_C}{R} + C \frac{dV_C}{dt} \quad (2.59)$$

Despejando $\frac{dV_C}{dt}$ de (2.59) se tiene

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{I_L}{C} - \frac{V_C}{RC} \quad (2.60)$$

sustituyendo (2.55) en (2.60) se tiene la segunda ecuación de estado,

$$\dot{x}_2 = \frac{x_1}{C} - \frac{x_2}{RC} \quad (2.61)$$

Uniendo (2.57) y (2.61), de manera matricial se representa el modelo del sistema en ecuaciones de estado.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} * V \quad (2.62)$$

Si la salida es i_L .

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

2.7 Modelado de sistemas mecánicos

En los sistemas mecánicos se tienen como señales de entrada una fuerza externa y como salida un desplazamiento o una velocidad experimentada por un bloque de masa. El sistema mecánico más común es el sistema masa-resorte, que se muestra en la figura 2.21.

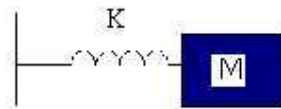


Figura 2.21. Sistema mecánico masa-resorte.

En este sistema se tiene un coeficiente de fricción viscosa B el cual tiene un comportamiento resistivo mismo que se muestra en la ecuación (2.64).

$$F_{fricción} = B \frac{dx}{dt} \quad (2.64)$$

También, la masa representa un elemento que presenta inercia y está dada por,

$$F_{masa} = M \frac{d^2 x}{dt} \quad (2.65)$$

Esta segunda derivada de la posición x con respecto al tiempo, al multiplicarse por la masa M nos da la conocida definición de la segunda ley de Newton que dice que la fuerza es igual a la masa por la aceleración.

El resorte es un elemento que presenta un almacenamiento de energía, la fuerza de este elemento está dada por la ley de Hooke, donde la fuerza depende de una constante K que refiere a las características del resorte multiplicada por la distancia que recorre el resorte. Lo anterior lo indica la ecuación (2.66),

$$F_R = KX \quad (2.66)$$

Aplicando las leyes anteriores y realizando un análisis de fuerzas se puede realizar el modelado de este sistema mecánico utilizando variables de estado. La figura 2.22 indica el sistema que se va a modelar.

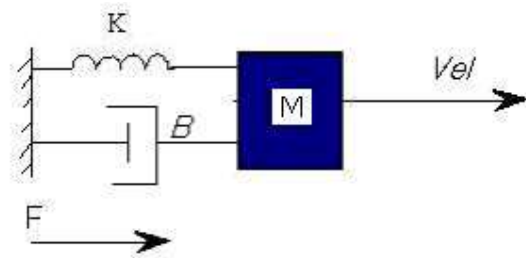


Figura 2.22 Sistema mecánico a modelar.

Realizando un análisis de fuerzas e igualando con la fuerza que experimenta la masa, se tiene la siguiente ecuación que indica el comportamiento dinámico, así como la interacción de los componentes que forman este sistema.

$$F - B \frac{dX}{dt} - KX = M \frac{d^2 X}{dt} \quad (2.67)$$

Para facilitar el análisis la ecuación (2.67) se puede escribir en términos de la velocidad lineal.

$$F = B * vel + m \frac{dvel}{dt} + F_R \quad (2.68)$$

Teniendo en cuenta que vel es la velocidad del sistema y F_R es la fuerza del resorte se definen las variables de estado,

$$\begin{aligned} x_1 &= vel \\ \dot{x}_1 &= \frac{dvel}{dt} \\ x_2 &= F_R \\ \dot{x}_2 &= \frac{dF_R}{dt} \end{aligned} \quad (2.69)$$

de la ecuación (2.68) se despeja $\frac{dvel}{dt}$

$$\frac{dvel}{dt} = \frac{F}{m} - \frac{\beta}{m} vel - \frac{F_R}{m} \quad (2.70)$$

Como la velocidad en el sistema es la misma para los elementos del mismo se iguala la velocidad en el elemento resistivo mecánico y el elemento capacitivo quedando,

$$\frac{F_\beta}{\beta} = \frac{1}{K} \frac{dF_R}{dt} \quad (2.71)$$

despejando $\frac{dF_R}{dt}$ queda,

$$\frac{dF_R}{dt} = \frac{F_\beta}{\beta} K \quad (2.72)$$

Pero $\frac{F_\beta}{\beta} = vel$ y $vel = x_1$, entonces la segunda ecuación de estado queda,

$$\dot{x}_2 = x_1 K \quad (2.73)$$

Uniendo las ecuaciones (2.70) y (2.73) y representando de manera matricial queda representado el modelo en variables de estado.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\beta}{m} & \frac{-1}{m} \\ K & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} * F \quad (2.74)$$

Como la salida es la velocidad.

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

2.8 Modelado de sistemas hidráulicos

En el modelado de sistemas hidráulicos es necesario conocer como se comportan los elementos que lo componen de manera individual, así como de manera conjunta interconectados los elementos entre sí. La figura 2.23 muestra un sistema hidráulico en el que intervienen los tres elementos generalizados.

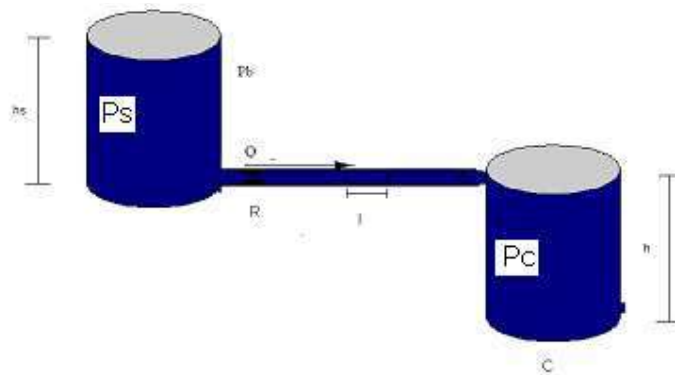


Figura 23. Sistema hidráulico a modelar.

Como se observa en este sistema interviene una obstrucción corta, la cual es un elemento resistivo en este sistema. Su comportamiento se muestra en la siguiente ecuación. De manera práctica el flujo laminar se considera unitario e interviene en la caída de presión de manera exponencial, pero como es unitario, este no afecta a la ecuación 2.76 de la resistencia hidráulica.

$$P_R = \frac{1}{C} Q \quad (2.76)$$

Esta es una caída de presión que hay en el circuito hidráulico y C depende de las dimensiones del tubo conductor y del tipo de obstrucción corta. La inercia en este sistema depende de la densidad del fluido, y de las dimensiones del tubo conductor, como es el área de la sección transversal del tubo y de la longitud de la sección del tubo que se analiza, ya que es un líquido incompresible. Estos se da en la siguiente expresión.

$$p = \frac{\rho L}{A_{tubo}} \frac{dQ}{dt} \quad (2.77)$$

El elemento capacitor en este sistema tiene un comportamiento en el cual almacena energía en forma de acumulación de fluido de líquido incompresible. En la práctica un elemento capacitor es un tanque. Su caída de presión depende del área A de la superficie del deposito, de la gravedad g y de la densidad del fluido en el deposito ρ , esta densidad depende a su vez del volumen del deposito, es decir también influye la altura del tanque o depósito. La ecuación que muestra la caída de presión en un tanque se muestra enseguida,

$$p = \frac{\rho g}{A_{tanque}} \int_0^t Q dt \quad (2.78)$$

Después de haber analizado cada uno de los elementos que forman el sistema hidráulico, se retoman las variables de estado para realizar el modelado de este sistema. La presión de la fuente es igual a las caídas de presión en cada uno de los elementos (análogo a las leyes de voltaje de Kirchoff en un sistema eléctrico). Esto se muestra en el siguiente análisis.

La presión de la fuente es,

$$P_{fuente} = P_R + P_I + P_C \quad (2.79)$$

sustituyendo (2.76) y (2.77) en (2.79) queda,

$$P_F = \frac{1}{C} Q + \frac{\rho L}{A_{tubo}} \frac{dQ}{dt} + P_C \quad (2.80)$$

asignando las variables de estado,

$$\begin{aligned}
 x_1 &= Q \\
 \dot{x}_1 &= \frac{dQ}{dt} \\
 x_2 &= P_C \\
 \dot{x}_2 &= \frac{dP_C}{dt}
 \end{aligned}
 \tag{2.81}$$

despejando $\frac{dQ}{dt}$ de (2.80) queda,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{P_F A_{Tubo}}{\rho_{tubo} L} - \frac{A_{Tubo}}{\rho_{tubo} LC} Q - \frac{P_C A_{Tubo}}{\rho_{tubo} L}
 \tag{2.82}$$

sustituyendo (2.81) en (2.82) quedando así la primer ecuación de estado.

$$\dot{x}_1 = \frac{P_F A_{Tubo}}{\rho_{tubo} L} - \frac{A_{Tubo}}{\rho_{tubo} LC} x_1 - \frac{P_C A_{Tubo}}{\rho_{tubo} L} x_2
 \tag{2.83}$$

Tomando en cuenta que el caudal en el elemento resistor y en el elemento capacitor tienen el mismo valor, entonces se tiene en función de sus presiones,

$$P_R * C = \frac{\rho_{tanque} g}{A_{tanque}} \frac{dP_C}{dt}
 \tag{2.84}$$

despejando para $\frac{dP_C}{dt}$ queda,

$$\frac{dP_C}{dt} = \frac{P_R C A_{tanque}}{\rho_{tanque} g}
 \tag{2.85}$$

Pero $P_R C = Q$ y $Q = x_1$ se tiene que la segunda ecuación de estado es,

$$\dot{x}_2 = \frac{A_{tanque}}{\rho_{tanque} g} x_1
 \tag{2.86}$$

Uniendo (2.83) y (2.86) y representando de manera matricial el modelo de este sistema queda,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-A_{tubo}}{\rho_{tubo}LC} & \frac{-A_{tubo}}{\rho_{tubo}L} \\ \frac{A_{tanque}}{\rho_{tanque}g} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{A_{tubo}}{\rho_{tubo}L} \\ 0 \end{bmatrix} P_F \quad (2.87)$$

2.9 Modelos de sistemas físicos

En esta sección se presentan algunos modelos físicos que existen, en éstos se muestra como interactúan los sistemas físicos de manera combinada, de tal modo que utilizando la energía de un sistema se puede obtener una respuesta de otro sistema. Esta es la función de los transductores que convierten un tipo de energía en otra.

Este tipo de sistemas son ampliamente utilizados en sistemas de instrumentación y también para realizar control en algunos procesos. Enseguida se muestran algunos modelos de sistemas físicos como lo son mecánico-eléctrico, mecánico-hidráulico e hidráulico-eléctrico.

2.9.1 Sistema mecánico eléctrico

Este tipo de elementos tienen gran utilización en sistemas de instrumentación y control, también son conocidos como sistemas electromecánicos en los cuales una pulsación eléctrica provoca un movimiento angular o lineal de un dispositivo mecánico. Un ejemplo de estos dispositivos son los relevadores, estos son elementos electromagnéticos debido a que al recibir un voltaje se produce en la bobina del relevador un campo magnético y este atrae mecánicamente una palanca que abre y cierra un circuito eléctricamente aislado.

Un *potenciómetro de deslizamiento* es un dispositivo el cual entrega un voltaje de manera proporcional a su desplazamiento. La parte mecánica de este dispositivo produce un movimiento de un pivote y este provoca que se produzca una variación de resistencia, como los potenciómetros trabajan en base a los divisores de tensión se tiene que al variar el desplazamiento también varía el voltaje de manera proporcional. La figura 2.24 muestra este dispositivo.

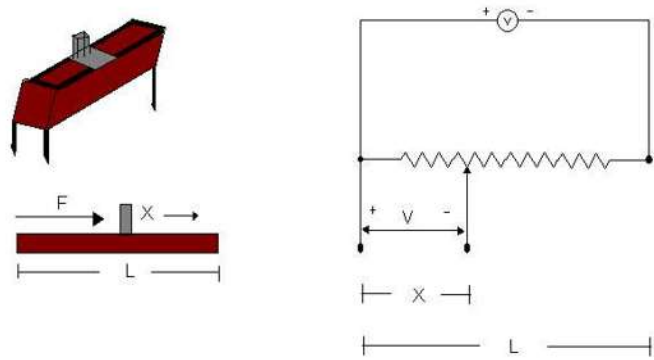


Figura 2.24 Potenciómetro de deslizamiento estructura eléctrica y mecánica.

La ecuación que indica el comportamiento mecánico es la siguiente,

$$M \frac{d^2 X}{dt} = F - B \frac{dX}{dt} \tag{2.88}$$

Esta es la parte mecánica que indica que dependiendo de la fuerza que se aplique será el desplazamiento, y el voltaje en la mitad del segmento del potenciómetro depende también de este desplazamiento, la ecuación que muestra esta proporción es la siguiente,

$$V_o = \frac{X}{L} V_{in} \tag{2.89}$$

Como se observa en esta expresión, se tiene que el voltaje en el segmento del potenciómetro depende del recorrido X que realice la manija durante la trayectoria L del potenciómetro, es decir el voltaje de salida es proporcional al recorrido de la manija en la trayectoria L del potenciómetro respecto al voltaje de entrada Vin.

2.92 Sistema mecánico hidráulico

Estos sistemas pueden transmitir energía de manera de presión de un caudal o mover un líquido mediante una fuerza externa. En la instrumentación industrial es muy común encontrarse con transductores del tipo mecánico-hidráulico y a su vez utilizarlos para realizar un control. Un ejemplo muy común es el sistema bloque-flotador, este sistema es muy útil ya que mediante el desplazamiento vertical de una bola flotador que impulsa un bloque de masa m que sirve de interruptor hidráulico, cuando el nivel de líquido llega a tope; este bloque de masa se recorre para

obstruir en su totalidad la circulación de caudal hacia el deposito. El funcionamiento de este sistema se basa en el principio de Arquímedes el cual dice que la fuerza con la que se mueve el bloque es igual a las fuerzas con la que el caudal empuja al flotador. La figura 2.25 ilustra este sistema.

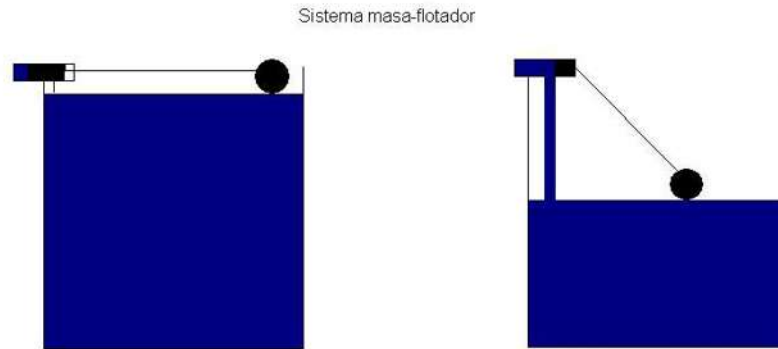


Figura 2.25 Sistema mecánico hidráulico (Masa-flotador).

Las siguiente ecuación muestra este comportamiento.

$$F = G - E \tag{2.90}$$

De la ecuación (2.90) se tiene que la fuerza F con la que obstruye el bloque a la circulación de caudal al deposito es igual a la diferencia del peso del flotador G y de la fuerza de empuje del caudal E que se almacena en el depósito. El peso del flotador depende de la velocidad del fluido y de la densidad del mismo.

La fuerza de arrastre depende de la velocidad con la que el fluido recorre al flotador, así como del área del deposito y de un coeficiente de arrastre del flotador. La ecuación (2.91) lo indica.

$$E = Cd * Af * \frac{V^2}{2g} \tag{2.91}$$

De esta ecuación se tiene que interviene el coeficiente de arrastre del caudal sobre el flotador y de manera proporcional afecta el área del deposito Af . Interviene la velocidad del fluido así como la gravedad. En esta sección se ha hablado en función a las fuerzas, pero del lado hidráulico se puede ver como presión recordando que la presión es el cociente de la fuerza y el área del deposito y así es como funciona este sistema hidráulico mecánico.

2.9.3 Sistema hidráulico eléctrico

En este sistema se transmite la energía de un sistema hidráulico a uno eléctrico, este tipo de transductor funciona mediante el cambio de presión en el depósito al llenar el tanque. El cual es la fuerza que ejerce la presión al llenar el tanque y la que representa un cambio de resistencia en un sistema eléctrico al utilizar una galga extensiométrica en donde las variaciones de fuerza las refleja en variaciones de resistencia. La figura 2.26 ilustra este sistema.

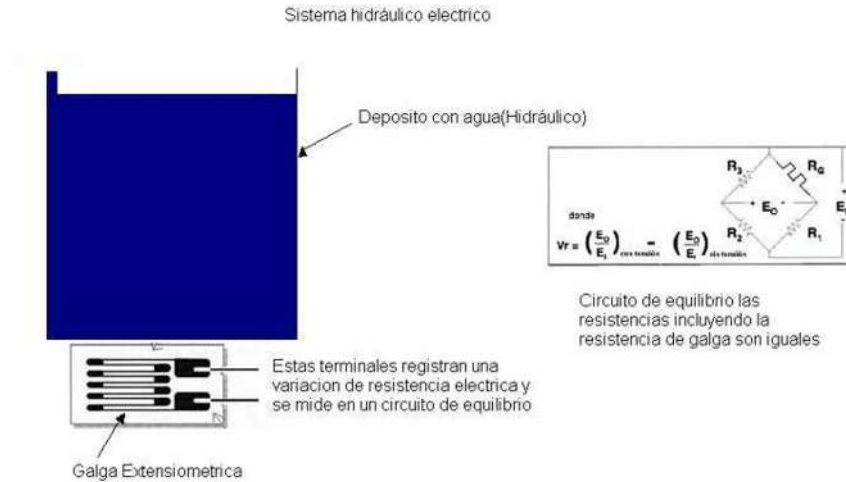


Figura 2.26 Sistema hidráulico eléctrico.

De este sistema se tienen las siguientes ecuaciones,

$$P = \int_0^t Q dt \tag{2.92}$$

Se toma en cuenta que,

$$F = PA \tag{2.93}$$

Se toma en cuenta que la presión P es la acumulación de caudal con respecto al tiempo y la fuerza que experimenta ese depósito es el producto de la presión por el área. Esta fuerza es sensada por la galga que es un transductor de presión a una variable eléctrica que es la resistencia, cuando hay una variación de fuerza sobre esta galga hay una variación de resistencia que se encuentra en un circuito de equilibrio y el voltaje que entrega al desequilibrarlo es el reflejo de la presión de este depósito.

El circuito de equilibrio se encuentra en la figura 2.26 y su ecuación de voltaje tomando en cuenta que las resistencias de equilibrio son iguales y se anulan, es la siguiente.

$$Vr = \frac{E_0}{E_1 \text{ Confuerza}} - \frac{E_0}{E_1 \text{ sin fuerza}} \quad (2.94)$$

Capítulo 3

Modelado de sistemas físicos equivalentes

3.1 Introducción

En los capítulos anteriores se dieron las herramientas y elementos necesarios para el modelado de sistemas físicos, en los que cabe mencionar los siguientes:

- a) Descripción de elementos generalizados en los sistemas físicos tanto activos como pasivos.
- b) Descripción de los sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos.
- c) Descripción de la representación de un sistema físico en variables de estado.
- d) Ejemplos de modelado de sistemas físicos, se realizó el modelado de sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos.

En el presente capítulo se realizará el modelado de sistemas físicos equivalentes utilizando las herramientas antes mencionadas de manera que se dará un procedimiento bien definido para transformar de un sistema físico dado a su equivalente en otro sistema físico, la figura 3.1 ilustra lo antes descrito.

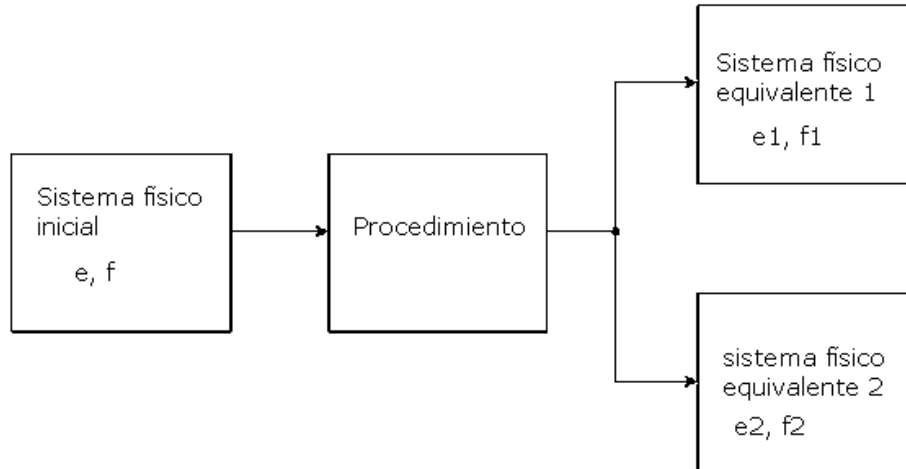


Figura 3.1 Descripción de la transformación de sistemas físicos equivalentes.

En este capítulo se realizará el proceso de modelado de los sistemas físicos equivalentes, estos modelados serán de la siguiente manera:

- a) De un sistema eléctrico a un sistema mecánico e hidráulico equivalente.
- b) De un sistema mecánico a un sistema eléctrico e hidráulico equivalente.
- c) De un sistema hidráulico a un sistema eléctrico y mecánico equivalente.

3.2 Qué es un sistema físico equivalente?

Un sistema físico equivalente es un sistema que es análogo a otro sistema, es decir, tienen elementos y comportamientos en común de tal manera que su descripción en el espacio de los estados es similar en estos sistemas, así como sus gráficas de salida en el dominio del tiempo.

Las variables de esfuerzo y flujo son análogas entre sí, así como los elementos pasivos dinámicos y estáticos que participan en ellos, como se describió en el capítulo anterior. La figura 3.2 ilustra este concepto.

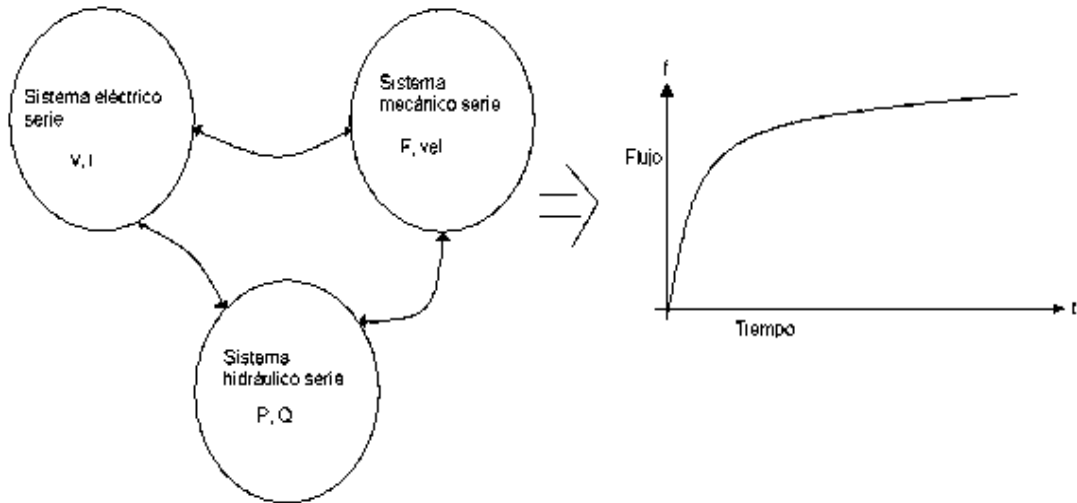


Figura 3.2 Descripción gráfica de un sistema físico equivalente.

3.3 Modelado de un sistema eléctrico en un sistema equivalente

En esta sección se inicia con un sistema eléctrico existente en el cual se observa como están distribuidos sus elementos y como interactúan con su fuente de esfuerzo, que para este caso es el voltaje. El sistema equivalente resultante tendrá las mismas características de conexión y de comportamiento. Para esto se realiza el modelado de un sistema eléctrico a un sistema mecánico e hidráulico equivalente como lo muestra la figura 3.3.

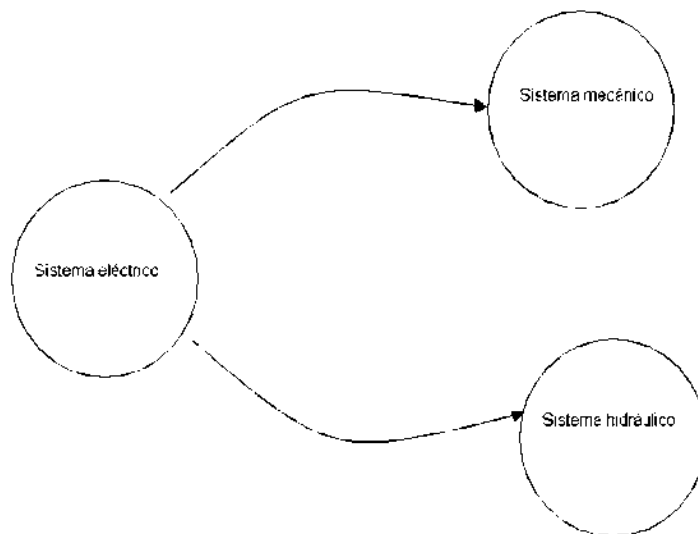


Figura 3.3 Conversión de sistema eléctrico a sistema físico equivalente.

3.3.1 Procedimiento

a) Se observa de manera detallada el sistema eléctrico a analizar de manera que se puede apreciar los componentes activos y pasivos que participan en este sistema.

b) Se identifican cada uno de los componentes que intervienen en este sistema, se debe tomar en cuenta el comportamiento individual de los mismos, así como de manera conjunta, respecto a la forma en que se encuentran conectados.

c) Una vez que se tiene identificados los componentes que intervienen en el sistema, así como la conexión e interacción entre ellos, se escriben las ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento de este sistema. Una vez escritas estas ecuaciones se realiza el modelado en variables de estado y obtener su modelo matemático.

d) Después de haber realizado el modelado del sistema eléctrico se toman los elementos equivalentes del sistema que ahora se va a modelar. Se debe tener en cuenta también su comportamiento individual para realizar su interconexión correspondiente.

e) Una vez que se tomaron los elementos equivalentes en el sistema a modelar se realiza la interconexión del sistema equivalente. Aquí es muy importante tener cuidado en las conexiones ya que si no se realiza correctamente el modelo en variables de estado resultaría ser distinto al sistema original ya modelado.

f) Después de realizar la interconexión correspondiente al sistema equivalente se repite *el paso c* realizando el modelado en variables de estado.

g) Una vez que se realizó el modelado del sistema equivalente, se compara la ecuación de estado del sistema original y del sistema equivalente, estas ecuaciones de manera matricial deben tener la misma estructura en cuanto a la posición de los elementos en la matriz A y en el vector B .

3.3.2 Modelado de un sistema eléctrico RLC en serie a un sistema equivalente

Siguiendo con el procedimiento descrito en la sección 3.3.1 se parte del circuito eléctrico mostrado en la figura 3.4.

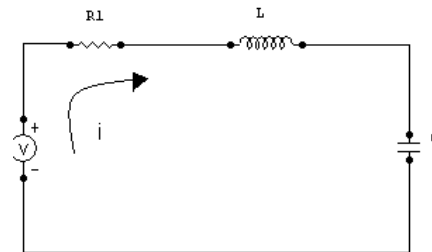


Figura 3.4. Sistema eléctrico RLC serie.

Los elementos que participan en este sistema se describen en la figura 3.5.

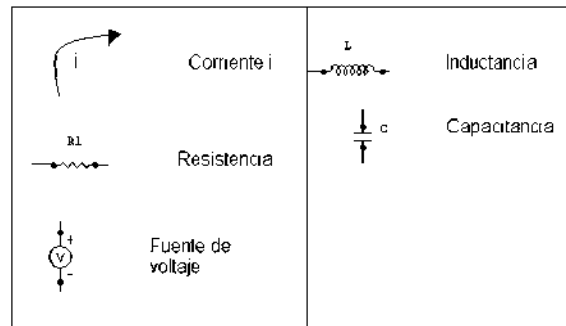


Figura 3.5 Elementos del sistema eléctrico RLC en serie.

Como se observa ahora se tienen dos elementos dinámicos, de tal modo que se obtendrán dos ecuaciones de estado. Para el desarrollo siguiente se parte de la leyes de voltaje y corriente de Kirchhoff como se muestra en las ecuaciones (3.1) y (3.2).

$$V = V_R + V_L + V_C \quad (3.1)$$

$$i_R = i_L = i_C = i \quad (3.2)$$

Como $V_R = iR$ y $V_L = L \frac{di}{dt}$ sustituyendo en (3.1),

$$V = iR + L \frac{di}{dt} + V_C \quad (3.3)$$

se propone ,

$$\begin{aligned} x_1 &= i \\ \dot{x}_1 &= \frac{di}{dt} \\ x_2 &= V_C \\ \dot{x}_2 &= \frac{dV_C}{dt} \end{aligned} \quad (3.4)$$

despejando $\frac{di}{dt}$ de (3.3),

$$\frac{di}{dt} = \frac{V}{L} - \frac{R}{L}i - \frac{V_C}{L} \quad (3.5)$$

sustituyendo (3.4) en (3.5) se tiene la primer ecuación de estado.

$$\dot{x}_1 = \frac{V}{L} - \frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 \quad (3.6)$$

Ahora tomando la ecuación (3.2) se tiene,

$$i_R = i_C \quad (3.7)$$

como $i_R = \frac{V_R}{R}$ y $i_C = C \frac{dV_C}{dt}$, sustituyendo en (3.7),

$$\frac{V_R}{R} = C \frac{dV_C}{dt} \quad (3.8)$$

despejando para $\frac{dV_C}{dt}$ de (3.8) queda,

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{V_R}{RC} \quad (3.9)$$

Pero $\frac{V_R}{R} = i = x_1$ y tomando la propuesta de (3.4) se tiene,

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 \quad (3.10)$$

Uniendo (3.6) y (3.10) y representando de manera matricial se tiene el modelado en variables de estado.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V \quad (3.11)$$

Ahora que se realizó el modelado del sistema eléctrico RLC en serie se toman los elementos equivalentes para realizar el modelado del sistema mecánico equivalente RLC en serie, estos elementos se muestran en la figura 3.6.

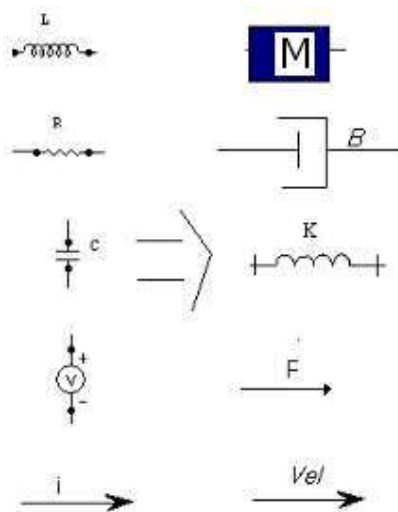


Figura 3.6 Elementos que participan en el sistema mecánico equivalente RLC en serie.

Con estos elementos se construye el diagrama del sistema mecánico RLC equivalente en serie, este sistema se muestra en la figura 3.7.

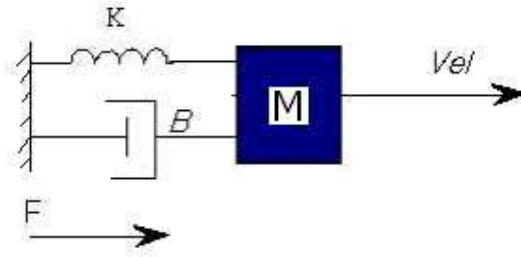


Figura 3.7 Sistema mecánico equivalente RLC en serie.

Una vez que se tiene el sistema mecánico equivalente RLC en serie se procede a realizar el modelado matemático de este sistema para obtener sus ecuaciones de estado, se parte de un análisis de fuerzas en el cual se obtiene la ecuación (3.12).

$$F = F_{\beta} + F_m + F_R \quad (3.13)$$

La velocidad en los tres elementos es la misma con lo que se tiene,

$$Vel_R = Vel_m = Vel_B = Vel \quad (3.14)$$

también recordando que $F_B = \beta Vel$ y $F_m = m \frac{dVel}{dt}$ sustituyendo en (3.13),

$$F = \beta Vel + m \frac{dVel}{dt} + F_R \quad (3.15)$$

proponiendo,

$$\begin{aligned} x_1 &= Vel \\ \dot{x}_1 &= \frac{dVel}{dt} \\ x_2 &= F_R \\ \dot{x}_2 &= \frac{dF_R}{dt} \end{aligned} \quad (3.16)$$

despejando $\frac{dVel}{dt}$ de (3.15) quedando,

$$\frac{dVel}{dt} = \frac{F}{m} - \frac{\beta}{m}Vel - \frac{F_R}{m} \quad (3.17)$$

sustituyendo (3.16) en (3.17) se tiene la primer ecuación de estado.

$$\dot{x}_1 = \frac{F}{m} - \frac{\beta}{m}x_1 - \frac{x_2}{m} \quad (3.18)$$

De la ecuación (3.14) se tiene,

$$Vel_{\beta} = Vel_R \quad (3.19)$$

teniendo en cuenta que $Vel_{\beta} = \frac{F_{\beta}}{\beta}$ y $Vel_R = \frac{1}{K} \frac{dF_R}{dt}$, sustituyendo en (3.19) se tiene,

$$\frac{F_{\beta}}{\beta} = \frac{1}{K} \frac{dF_R}{dt} \quad (3.20)$$

despejando $\frac{dF_R}{dt}$ de (3.20) se obtiene,

$$\frac{dF_R}{dt} = \frac{F_{\beta}}{\beta} K \quad (3.21)$$

como $\frac{F_{\beta}}{\beta} = Vel = x_1$, sustituyendo las variables de estado de (3.16) se tiene,

$$\dot{x}_2 = Kx_1 \quad (3.22)$$

finalmente se representa el modelado de este sistema de manera matricial uniendo (3.18) y (3.22) se tiene el modelo del sistema en variables de estado,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta & -1 \\ m & m \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} F \quad (3.23)$$

Ya que se realizó el modelado del sistema mecánico RLC en serie equivalente, ahora se toman los elementos equivalentes del sistema eléctrico original RLC; esta vez para un sistema hidráulico. Estos elementos se muestran en la figura 3.8.

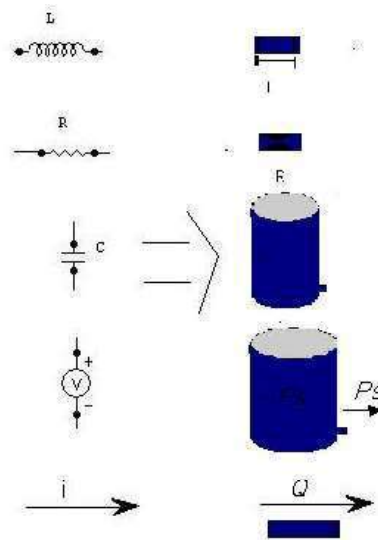


Figura 3.8 Elementos que participan en el sistema hidráulico equivalente RLC en serie.

Ahora que ya se identificaron los elementos que intervienen en este sistema se realiza la conexión de los mismos en el esquema del sistema hidráulico equivalente RLC en serie, este sistema se ilustra en la figura 3.9.

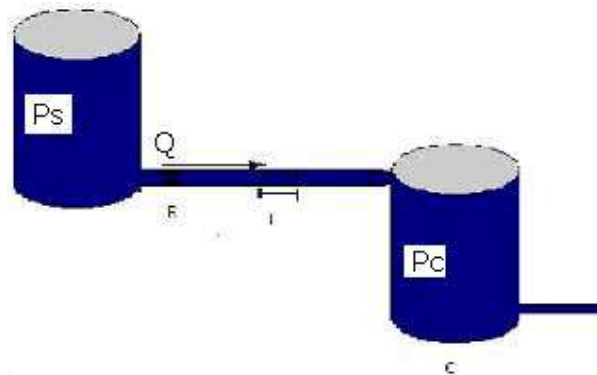


Figura 3.9 Sistema hidráulico equivalente RLC en serie.

De la misma manera que en los modelos anteriores, se realiza la analogía de la ley de voltajes de Kirchhoff, pero ahora en el sistema hidráulico utilizando las caídas de presión en el sistema, quedando como lo muestra la ecuación (3.24).

$$P_S = P_R + P_L + P_C \quad (3.25)$$

también se tiene que el caudal en los tres elementos es el mismo,

$$Q_R = Q_L = Q_C = Q \quad (3.26)$$

Tomando en cuenta que $P_R = \frac{1}{C}Q + \frac{\rho_l L}{A} \frac{dQ}{dt} + P_C$, sustituyendo en (3.25),

$$P_S = \frac{1}{C}Q + \frac{\rho_l L}{A} \frac{dQ}{dt} + P_C \quad (3.26)$$

Se proponen las siguientes variables de estado,

$$\begin{aligned} x_1 &= Q \\ \dot{x}_1 &= \frac{dQ}{dt} \\ x_2 &= P_C \\ \dot{x}_2 &= \frac{dP_C}{dt} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ahora se despeja para $\frac{dQ}{dt}$ de (3.26) quedando,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{P_S A_L}{\rho_l L} - \frac{A_L Q}{\rho_l LC} - \frac{A_L P_C}{\rho_l L} \quad (3.28)$$

tomando las variables de estado, sustituyendo (3.27) en (3.28) quedando la primer ecuación de estado.

$$\dot{x}_1 = \frac{P_S A_L}{\rho_L L} - \frac{A_L}{\rho_L LC} x_1 - \frac{A_L}{\rho_L L} x_2 \quad (3.29)$$

Recordando que el caudal es el mismo en los tres elementos del sistema, se tiene de la ecuación (3.42) la siguiente expresión,

$$Q_R = Q_C \quad (3.30)$$

se tiene que $Q_R = P_R C$ y $Q_C = \frac{\rho_C g}{A_C} \frac{dP_C}{dt}$, sustituyendo en (3.30),

$$P_R C = \frac{\rho_C g}{A_C} \frac{dP_C}{dt} \quad (3.31)$$

despejando $\frac{dP_C}{dt}$ de (3.31) quedando,

$$\frac{dP_C}{dt} = \frac{P_R C A_C}{\rho_C g} \quad (3.32)$$

como $P_R C = Q = x_1$ y sustituyendo (3.27) en (3.32) queda la segunda ecuación de estado.

$$\dot{x}_2 = \frac{A_C}{\rho_C g} x_1 \quad (3.33)$$

Uniando las ecuaciones (3.29) y (3.33) y se representa de forma matricial el modelo del sistema hidráulico RLC en serie equivalente y se muestra en la ecuación (3.50).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{A_L}{\rho_L LC} & -\frac{A_L}{\rho_L L} \\ \frac{A_C}{\rho_C g} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{A_L}{\rho_L L} \\ 0 \end{bmatrix} P_S \quad (3.34)$$

Una vez realizado el modelado del sistema eléctrico RLC en serie a su sistema equivalente en mecánico e hidráulico se puede de igual manera que en el ejemplo anterior, observar la misma estructura de las ecuaciones de estado y esto se nota al escribir las ecuaciones (3.29), (3.40) y (3.50).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -1 \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{m} & -1 \\ \frac{K}{m} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} F \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{A_L}{\rho_L LC} & -\frac{A_L}{\rho_L L} \\ \frac{A_C}{\rho_C g} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{A_L}{\rho_L L} \\ 0 \end{bmatrix} P_S \quad (3.34)$$

3.3.3 Modelado de un sistema eléctrico RLC mixto a un sistema equivalente

Se tiene un sistema eléctrico RLC mixto, retomando el procedimiento de la sección 3.3.1. La figura 3.10 muestra el sistema eléctrico a modelar.

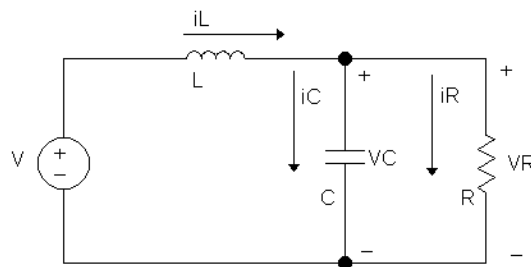


Figura 3.10 sistema eléctrico RLC mixto.

Debido a que este sistema eléctrico se desarrolló en el capítulo 2 y como se conocen los elementos que participan en el mismo, se muestran solamente las ecuaciones dinámicas de estado y la representación matricial del mismo modelo.

Recordando el modelado de la sección 2.6 del capítulo anterior se proponen las siguientes variables de estado.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= i_L \\
 x_2 &= V_C \\
 \dot{x}_1 &= \frac{di_L}{dt} \\
 \dot{x}_2 &= \frac{dV_C}{dt}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

El desarrollo completo de este sistema se encuentra en la sección 2.6, se muestran las dos ecuaciones dinámicas de este sistema en variables de estado.

$$\dot{x}_1 = \frac{V}{L} - \frac{x_2}{L} \tag{3.36}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_1}{C} - \frac{x_2}{RC} \tag{3.37}$$

Al unir las ecuaciones (3.36) y (3.37) se tiene la representación del modelado del sistema eléctrico RLC mixto en variables de estado y representado de manera matricial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} * V \tag{3.38}$$

Después de retomar el modelado de la sección 2.6 de este trabajo, ahora se toman los componentes equivalentes que participan en este sistema, pero ahora en un sistema mecánico equivalente RLC mixto. Los elementos que ahora participan se muestran en la figura 3.11.

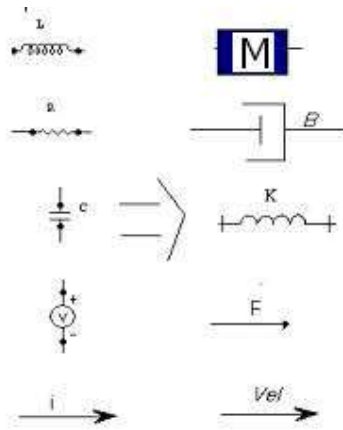


Figura 3.11 Elementos que participan en el sistema mecánico equivalente RLC mixto.

El sistema mecánico equivalente RLC mixto se muestra en la figura 3.12.

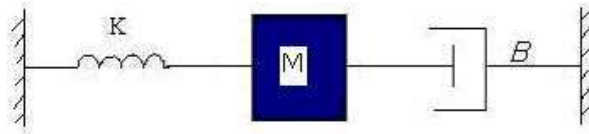


Figura 3.12 Sistema mecánico equivalente RLC mixto.

Para este sistema se parte de que la fuerza aplicada es,

$$F = F_m + F_R \quad (3.39)$$

Recordando que $F_m = m \frac{dVel_m}{dt}$ y sustituyendo en (3.39) se tiene,

$$F = m \frac{dVel_m}{dt} + F_R \quad (3.40)$$

proponiendo,

$$\begin{aligned}
x_1 &= Vel_m \\
\dot{x}_1 &= \frac{dVel_m}{dt} \\
x_2 &= F_R \\
\dot{x}_2 &= \frac{dF_R}{dt}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

despejando $\frac{dVel_m}{dt}$ de (3.41) y sustituyendo (3.40) se tiene,

$$\dot{x}_1 = \frac{F}{m} - \frac{x_2}{m} \tag{3.42}$$

esta es la primer ecuación de estado. La velocidad en la masa es,

$$Vel_m = Vel_\beta + Vel_R \tag{3.43}$$

también se toma en cuenta que,

$$F_\beta = F_R \tag{3.44}$$

entonces, $Vel_\beta = \frac{F_R}{\beta}$ y $Vel_R = \frac{1}{K} \frac{dF_R}{dt}$ sustituyendo en (3.44),

$$Vel_m = \frac{F_R}{\beta} + \frac{1}{K} \frac{dF_R}{dt} \tag{3.45}$$

despejando para $\frac{dF_R}{dt}$ de (3.45) y sustituyendo (3.41) queda ,

$$\dot{x}_2 = Kx_1 - \frac{K}{\beta}x_2 \tag{3.46}$$

al juntar (3.42) y (3.46) se tiene el modelado del sistema mecánico equivalente RLC mixto en variables de estado y se representa de manera matricial como lo indica la ecuación (3.47).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{m} \\ K & \frac{-K}{\beta} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} F \quad (3.47)$$

Finalmente esta ecuación (3.47) es el modelado del sistema mecánico equivalente RLC mixto.

Ahora se toman los elementos equivalentes a un sistema hidráulico para realizar su modelado de este sistema equivalente hidráulico RLC mixto. La figura 3.13 muestra los elementos equivalentes que participan en este sistema.

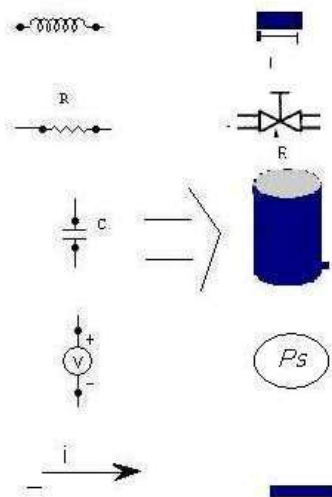


Figura 3.13 Elementos que participan en el sistema hidráulico equivalente RLC mixto.

Una vez que se tienen los elementos equivalentes que participan en el sistema RLC mixto hidráulico se realiza el diagrama este sistema equivalente.

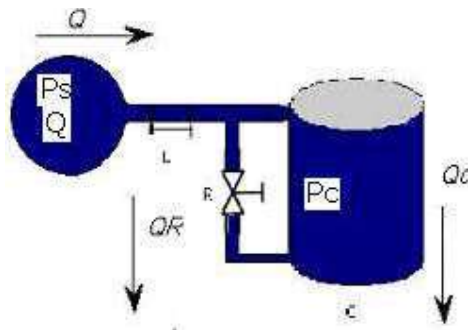


Figura 3.14 Sistema hidráulico equivalente RLC mixto.

Tomando en cuenta las presiones en este sistema, se parte de la ecuación (3.48).

$$P_S = P_L + P_C \quad (3.48)$$

recordando que $P_L = \frac{dQ_L}{dt}$ y sustituyendo en (3.48),

$$P_S = \frac{dQ_L}{dt} + P_C \quad (3.49)$$

proponiendo las variables de estado,

$$\begin{aligned} x_1 &= Q_L \\ \dot{x}_1 &= \frac{dQ_L}{dt} \\ x_2 &= P_C \\ \dot{x}_2 &= \frac{dP_C}{dt} \end{aligned} \quad (3.50)$$

despejando $\frac{dQ_L}{dt}$ de (3.49) y sustituyendo (3.50) se tiene,

$$\dot{x}_1 = \frac{A_L P_S}{\rho_L L} - \frac{A_L x_2}{\rho_L L} \quad (3.51)$$

esta es la primer ecuación de estado. Ahora recordando que,

$$Q_L = Q_R + Q_C \quad (3.52)$$

así como,

$$P_R = P_C \quad (3.53)$$

entonces $Q_R = \frac{P_C}{C}$ y $Q_C = \frac{A_C}{\rho_C g} \frac{dP_C}{dt}$, sustituyendo en (3.52),

$$Q_L = \frac{P_C}{C} + \frac{A_C}{\rho_C g} \frac{dP_C}{dt} \quad (3.54)$$

despejando para $\frac{dP_C}{dt}$ de (3.54) y sustituyendo por (3.50) queda,

$$\dot{x}_2 = \frac{\rho_C g}{A_C} x_1 - \frac{\rho_C g}{A_C} x_2 \quad (3.55)$$

al unir (3.51) y (3.55) se tiene el modelado del sistema hidráulico equivalente mixto y se muestra en la ecuación (3.72).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-A_L}{\rho_L L} \\ \frac{\rho_C g}{A_C} & \frac{-\rho_C g}{A_C C} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{A_L}{\rho_L L} \\ 0 \end{bmatrix} P_S \quad (3.56)$$

De igual manera que en los ejemplos anteriores se puede observar la misma estructura de los tres modelados en ecuaciones de estado. Esto se observa al escribir las ecuaciones (3.38), (3.47) y (3.56).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{RC} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} * V \quad (3.38)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{m} \\ K & \frac{-K}{\beta} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} F \quad (3.47)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-A_L}{\rho_L L} \\ \frac{\rho_C g}{A_C} & \frac{-\rho_C g}{A_C C} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{A_L}{\rho_L L} \\ 0 \end{bmatrix} P_S \quad (3.56)$$

Como se puede observar los elementos de inercia, capacitancia y resistencia están ubicados en las mismas posiciones de las matrices de las ecuaciones (3.38),(3.47) y (3.56), por lo que se observa que los modelos anteriores son equivalentes.

3.4 Modelado de un sistema mecánico a un sistema equivalente

Siguiendo con el modelado de los sistemas equivalentes, corresponde ahora a partir de un sistema mecánico original y de igual manera utilizando el procedimiento de la sección 3.3.1 se realiza el modelado de un sistema mecánico a su equivalente en sistema eléctrico e hidráulico. Lo anterior se visualiza en la figura 3.15.

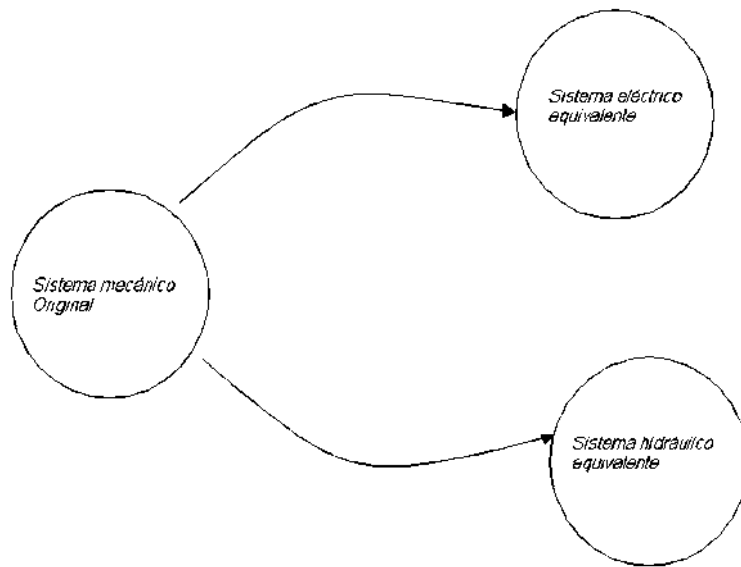


Figura 3.15 Conversión de sistema mecánico a sistema físico equivalente.

3.4.1 Modelado de un sistema mecánico con tres elementos dinámicos a sistema equivalente

Para comenzar el modelado de este sistema mecánico primero es necesario observar el esquema del sistema mecánico por analizar y después identificar los elementos que participan en este sistema. Este esquema se muestra en la figura 3.16.

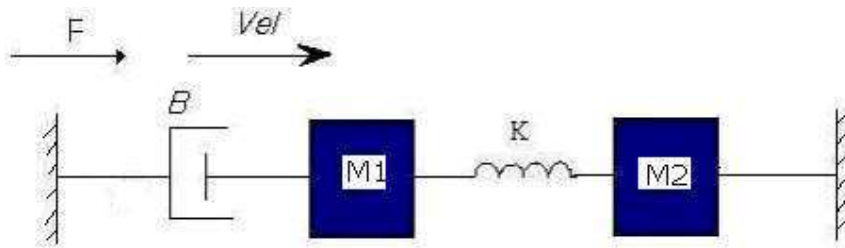


Figura 3.16 Sistema mecánico original a modelar.

Los elementos que participan en este sistema se ilustran en la figura 3.17.

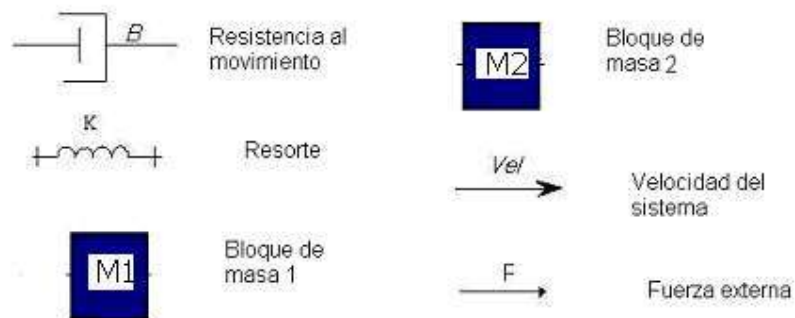


Figura 3.17 Elementos que participan en el sistema mecánico de tres elementos dinámicos.

Antes de iniciar el modelado de este sistema es necesario indicar que los subíndices con letra $m1$ o 2 indican que esta referido al bloque de masa uno ó dos y cuando se refiera al subíndice R es referencia al resorte, también si se tiene el subíndice β se refiere al elemento amortiguador ó resistencia al movimiento. Al realizar un análisis de fuerzas se llega a la ecuación (3.57),

$$F = F_{\beta} + F_{m1} + F_R \quad (3.57)$$

al observar el diagrama se tiene,

$$V_{m1} = V_R + V_{m2} \quad (3.58)$$

como $V_{\beta} = V_{m1}$ y $F_{m1} = m_1 \frac{dV_{m1}}{dt}$ la ecuación (3.57) se escribe como,

$$F = \beta V_{\beta} + m_1 \frac{dV_{m1}}{dt} + F_R \quad (3.59)$$

se proponen las siguientes variables de estado,

$$\begin{aligned}
 x_1 &= V_{m1} \\
 \dot{x}_1 &= \frac{dV_{m1}}{dt} \\
 x_2 &= F_R \\
 \dot{x}_2 &= \frac{dF_R}{dt} \\
 x_3 &= V_{m2} \\
 \dot{x}_3 &= \frac{dV_{m2}}{dt}
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

despejando $\frac{dV_{m1}}{dt}$ de (3.59) y sustituyendo con (3.60) queda,

$$\dot{x}_1 = \frac{F}{m_1} - \frac{\beta}{m_1} x_1 - \frac{1}{m_1} x_2 \tag{3.61}$$

ahora tomando la ecuación (3.58) , como $V_R = \frac{1}{K} \frac{dF_R}{dt}$ (3.58) se escribe como,

$$V_{m1} = \frac{1}{K} \frac{dF_R}{dt} + V_{m2} \tag{3.62}$$

despejando $\frac{dF_R}{dt}$ de (3.62) y tomando los valores de (3.60) queda,

$$\dot{x}_2 = Kx_1 - Kx_3 \tag{3.63}$$

para conocer la tercera ecuación dinámica se tiene que,

$$F_R = F_{m2} \tag{3.64}$$

recordando que $F_{m2} = m_2 \frac{dV_{m2}}{dt}$ al sustituir en (3.64) queda,

$$F_R = m_2 \frac{dV_{m2}}{dt} \tag{3.65}$$

despejando para $\frac{dV_{m2}}{dt}$ de (3.65) y tomando los valores de (3.60) se tiene,

$$\dot{x}_3 = \frac{x_2}{m_2} \quad (3.66)$$

al unir las ecuaciones (3.61), (3.63) y (3.66) se tiene el modelo de este sistema en variables de estado. Se representa de manera matricial en la ecuación (3.67).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta & -1 & 0 \\ \frac{K}{m_1} & 0 & -K \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F \quad (3.67)$$

Una vez que se ha realizado el modelado de este sistema mecánico de tres elementos dinámicos, se toman los elementos que participan en el sistema eléctrico equivalente de tres elementos dinámicos. Los elementos que participan en este sistema se muestran en la figura 3.18.

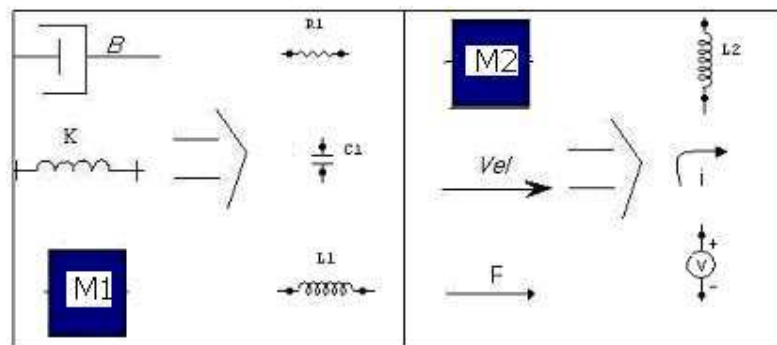


Figura 3.18 Elementos que participan en el sistema eléctrico equivalente de tres elementos dinámicos.

Una vez que se toman los elementos que participan en este sistema equivalente, se plantea el diagrama de este sistema y a partir del mismo con las leyes de Kirchoff se realiza el modelado de este sistema. El diagrama de este sistema se muestra en la figura 3.19.

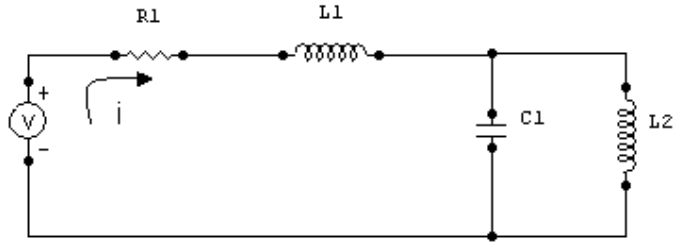


Figura 3.19 Sistema eléctrico equivalente de tres elementos dinámicos.

Tomando la ley de voltajes de kirchhoff en el circuito se tiene la ecuación (3.68),

$$V = V_{R1} + V_{L1} + V_{C1} \quad (3.68)$$

también se considera la ley de corrientes de kirchhoff en el circuito,

$$i_{L1} = i_{C1} + i_{L2} \quad (3.69)$$

recordando que $V_{L1} = L_1 \frac{di_{L1}}{dt}$ y $i_{R1} = i_{L1}$; la ecuación (3.68) se escribe como,

$$V = i_{L1}R_1 + L_1 \frac{di_{L1}}{dt} + V_{C1} \quad (3.70)$$

proponiendo,

$$\begin{aligned} x_1 &= i_{L1} \\ \dot{x}_1 &= \frac{di_{L1}}{dt} \\ x_2 &= V_{C1} \\ \dot{x}_2 &= \frac{dV_{C1}}{dt} \\ x_3 &= i_{L2} \\ \dot{x}_3 &= \frac{di_{L2}}{dt} \end{aligned} \quad (3.71)$$

despejando para $\frac{di_{L1}}{dt}$ de (3.70) y tomando valores de (3.71) queda ,

$$\dot{x}_1 = \frac{V}{L_1} - \frac{R_1}{L_1}x_1 - \frac{1}{L_1}x_2 \quad (3.72)$$

ahora se tiene que $i_{C1} = C_1 \frac{dV_{C1}}{dt}$ y sustituyendo en (3.69) queda,

$$i_{L1} = C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} + i_{L2} \quad (3.73)$$

despejando $\frac{dV_{C1}}{dt}$ de (3.73) y tomando valores de (3.71) se tiene,

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C_1}x_1 - \frac{1}{C_1}x_3 \quad (3.74)$$

como el voltaje en el capacitor y en el inductor dos son los mismos se tiene,

$$V_{C1} = V_{L2} \quad (3.75)$$

como $V_{L2} = L_2 \frac{di_{L2}}{dt}$, (3.75) se escribe como,

$$V_{C1} = L_2 \frac{di_{L2}}{dt} \quad (3.76)$$

despejando $\frac{di_{L2}}{dt}$ de (3.76) y tomando los valores de (3.71) queda,

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{L_2}x_2 \quad (3.77)$$

Uniendo (3.72), (3.74) y (3.77) se tiene el modelado del sistema eléctrico equivalente de tres elementos dinámicos en variables de estado y queda representado de manera matricial como lo muestra la ecuación (3.78).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & -1 & 0 \\ \frac{1}{L_1} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V \quad (3.78)$$

Una vez que se ha modelado este sistema mecánico de tres elementos dinámicos a su equivalente en sistema eléctrico, ahora se toman los elementos equivalentes que participan en sistema hidráulico equivalente de tres elementos dinámicos. Estos elementos se muestran en la figura 3.20.

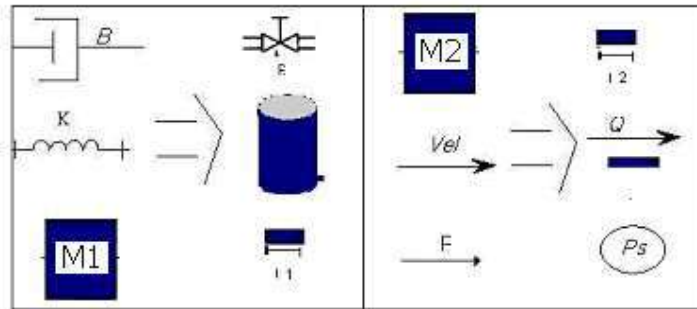


Figura 3.20 Elementos que participan en el sistema hidráulico equivalente de tres elementos dinámicos.

Una vez que se tomaron los elementos equivalentes se construye el diagrama del mismo, este se muestra en la figura 3.21.

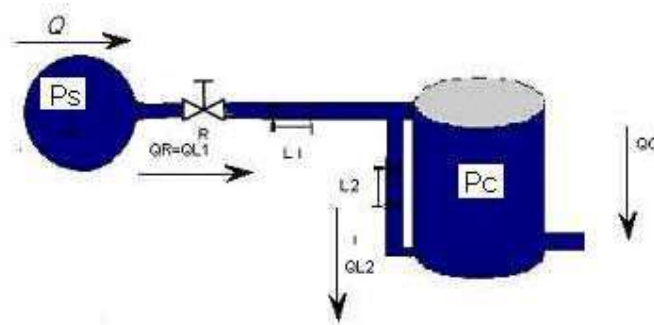


Figura 3.21 Sistema hidráulico equivalente de tres elementos dinámicos.

Para este modelado se realiza la analogía de la ley de kirchhoff, pero ahora con presiones y esto lleva a la ecuación (3.79).

$$P_S = P_R + P_{L1} + P_{C1} \quad (3.79)$$

Tomando en cuenta que $Q_R = Q_{L1}$, $P_R = \frac{1}{C} Q_L$ y $\frac{\rho_{L1} L_1}{A_{L1}} \frac{dQ_{L1}}{dt}$; (3.79) se escribe,

$$P_S = \frac{1}{C} Q_L + \frac{\rho_{L1} L_1}{A_{L1}} \frac{dQ_{L1}}{dt} + P_{C1} \quad (3.80)$$

se propone,

$$\begin{aligned} x_1 &= Q_{L1} \\ \dot{x}_1 &= \frac{dQ_{L1}}{dt} \\ x_2 &= P_{C1} \\ \dot{x}_2 &= \frac{dP_{C1}}{dt} \\ x_3 &= Q_{L2} \\ \dot{x}_3 &= \frac{dQ_{L2}}{dt} \end{aligned} \quad (3.81)$$

despejando $\frac{dQ_{L1}}{dt}$ de (3.80) y tomando los valores de (3.81) se tiene,

$$\dot{x}_1 = \frac{A_{L1}}{\rho_{L1} L_1} P_S - \frac{A_{L1}}{\rho_{L1} L_1 C} x_1 - \frac{A_{L1}}{\rho_{L1} L_1} x_2 \quad (3.82)$$

usando de manera análoga las leyes de kirchhoff en el caso del caudal se tiene la ecuación (3.99).

$$Q_{L1} = Q_{C1} + Q_{L2} \quad (3.83)$$

como $Q_{C1} = \frac{A_{C1}}{\rho_{C1} g} \frac{dP_{C1}}{dt}$, (3.83) se escribe como,

$$Q_{L1} = \frac{A_{C1}}{\rho_{C1} g} \frac{dP_{C1}}{dt} + Q_{L2} \quad (3.84)$$

despejando $\frac{dP_{C1}}{dt}$ de (3.84), tomando las variables de estado de (3.81) queda,

$$\dot{x}_2 = \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}}x_1 - \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}}x_3 \quad (3.85)$$

ahora se tiene que,

$$P_{C1} = P_{L2} \quad (3.86)$$

recordando que $P_{L2} = \frac{\rho_{L2}L_2}{A_{L2}} \frac{dQ_{L2}}{dt}$, (3.86) queda como,

$$P_{C1} = \frac{\rho_{L2}L_2}{A_{L2}} \frac{dQ_{L2}}{dt} \quad (3.87)$$

despejando $\frac{dQ_{L2}}{dt}$ de (3.87) y tomando los valores de (3.81) se tiene,

$$\dot{x}_3 = \frac{A_{L2}}{\rho_2 L_2} x_2 \quad (3.88)$$

al unir (3.82), (3.85) y (3.88) se tiene el modelo de este sistema hidráulico equivalente de tres elementos dinámico y se representa de manera matricial en la ecuación (3.89).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-A_{L1}}{\rho_{L1}L_1C} & \frac{-A_{L1}}{\rho_{L1}L_1} & 0 \\ \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}} & 0 & \frac{-\rho_{C1}g}{A_{C1}} \\ 0 & \frac{A_{L2}}{\rho_{L2}L_2} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{A_{L1}}{\rho_{L1}L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} P_S \quad (3.89)$$

Después de haber realizado el modelado de este sistema mecánico de tres elementos dinámicos, de igual manera como en los ejemplos de la sección anterior se puede observar que los modelos de los tres sistemas, el original y los equivalentes tienen la misma estructura y se nota al escribir las ecuaciones (3.67), (3.78) y (3.89).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_2 \\ \dot{x}_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta & -1 & \\ m_1 & m_1 & 0 \\ K & 0 & -K \\ 0 & 1 & 0 \\ & m_2 & \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ m_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F \quad (3.67)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_2 \\ \dot{x}_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & -1 & \\ L_1 & L_1 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V \quad (3.78)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_2 \\ \dot{x}_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{A_{L1}}{\rho_{L1}L_1C} & -\frac{A_{L1}}{\rho_{L1}L_1} & 0 \\ \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}} & 0 & -\frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}} \\ 0 & \frac{A_{L2}}{\rho_{L2}L_2} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{A_{L1}}{\rho_{L1}L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} P_S \quad (3.89)$$

3.5 Modelado de un sistema hidráulico a sistema equivalente

Basado en la sección anterior, se parte de un sistema hidráulico original, a su equivalente en sistema eléctrico y mecánico. Se realiza de la misma manera utilizando el procedimiento de la sección 3.1.1. De manera gráfica se observa en la figura 3.22.

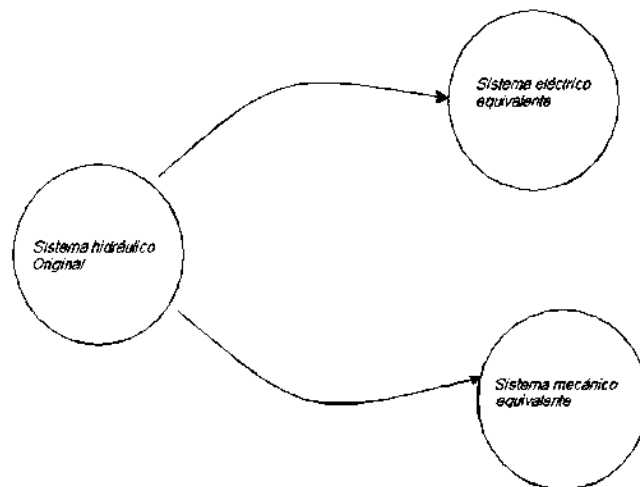


Figura 3.22 Conversión de un sistema hidráulico original a su sistema equivalente en eléctrico y mecánico.

3.5.1 Modelado de un sistema hidráulico sencillo a sistema equivalente

De la misma manera que con los ejemplos anteriores y siguiendo con el procedimiento de la sección 3.1.1 se realiza el modelado del sistema hidráulico que se ilustra en la figura 3.23.

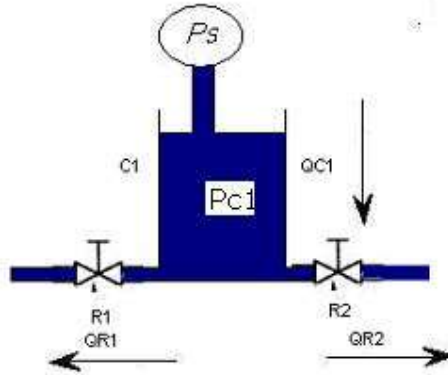


Figura 3.23 Sistema hidráulico original a modelar.

Para realizar el modelado de este sistema se toma la ley de voltajes de kirchhoff, ya que de manera análoga se tienen dos elementos de resistencia en paralelo y un elemento capacitor en serie. Los elementos identificados se ilustran en la figura 3.24.

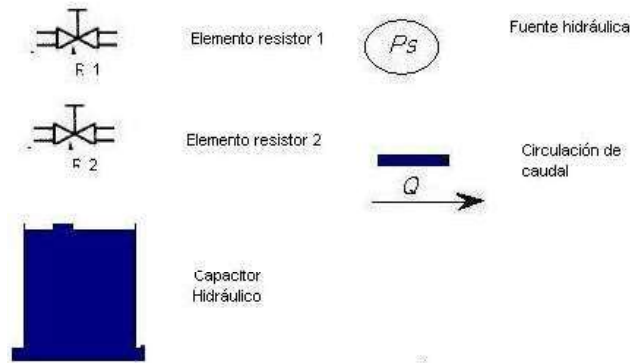


Figura 3.24 Elementos que participan en el sistema hidráulico sencillo original.

Una vez que se tiene identificados los elementos que intervienen en este sistema, ahora se procede a realizar el modelado con la analogía de las leyes de Kirchhoff en sistemas hidráulicos antes mencionadas. Las presiones se enuncian en la ecuación 3.90.

$$P_S = P_{C1} + P_{R1} \quad (3.90)$$

Como $P_{R1} = P_{R2}$ y como sus componentes $\frac{1}{C}$ están en paralelo,

$$Q_{C1} = P_S + P_{C1} \mathbf{C}_1 * C_2 \mathbf{C}_1 + C_2 \mathbf{C}_2 \quad (3.91)$$

se propone,

$$\begin{aligned} x_1 &= P_{C1} \\ \dot{x}_1 &= \frac{dP_{C1}}{dt} \end{aligned} \quad (3.92)$$

como $Q_{C1} = \frac{A_{C1}}{\rho_{C1}g} \frac{dP_{C1}}{dt}$, entonces (3.91) se escribe de la siguiente manera,

$$\frac{A_{C1}}{\rho_{C1}g} \frac{dP_{C1}}{dt} = P_S + P_{C1} \mathbf{C}_1 * C_2 \mathbf{C}_1 + C_2 \mathbf{C}_2 \quad (3.93)$$

despejando $\frac{dP_{C1}}{dt}$ de (3.93) y tomando los valores de (3.92) se tiene,

$$\dot{x}_1 = \frac{[\mathbf{I}_1 C_2 \mathbf{C}_1 + C_2] P_S \rho_{C1} g}{A_{C1}} - \frac{[\mathbf{I}_1 C_2 \mathbf{C}_1 + C_2] P_{C1} g}{A_{C1}} x_1 \quad (3.94)$$

representando la ecuación de manera matricial se tiene el modelo de este sistema en variables de estado,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{[\mathbf{I}_1 C_2 \mathbf{C}_1 + C_2] \rho_{C1} g}{A_{C1}} \end{bmatrix} * \mathbf{I}_1 + \begin{bmatrix} \frac{[\mathbf{I}_1 C_2 \mathbf{C}_1 + C_2] \rho_{C1} g}{A_{C1}} \end{bmatrix} P_S \quad (3.95)$$

Ahora que se realizó el modelado de este sistema hidráulico sencillo, se toman los elementos equivalentes que participan en el sistema eléctrico equivalente sencillo. Los elementos que intervienen en este sistema se muestran en la figura 3.25.

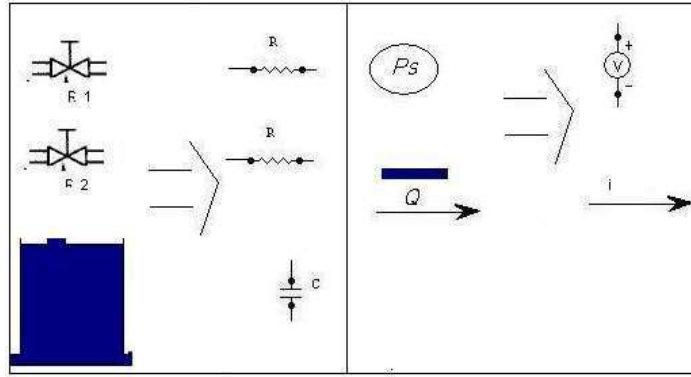


Figura 3.25 Elementos que intervienen en el sistema eléctrico equivalente sencillo.

Ahora que ya se tienen identificados los elementos que intervienen en el sistema equivalente que se va a modelar, se realiza el diagrama correspondiente. Este diagrama se muestra en la figura 3.26.

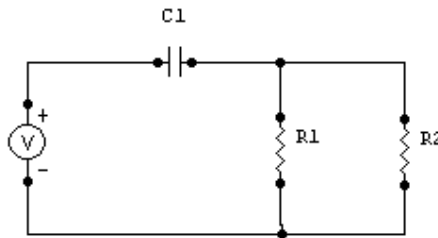


Figura 3.26 Sistema eléctrico equivalente sencillo a modelar.

Para realizar el modelado se toma la ley de voltajes de kirchhoff y se muestra en la ecuación (3.96).

$$V = V_{C1} + V_{R1} \quad (3.96)$$

El voltaje en ambas resistencias es el mismo, puesto que esta conectado en paralelo, por consiguiente,

$$V_{R1} = V_{R2} \quad (3.97)$$

la corriente en el capacitor es,

$$i_{C1} = \frac{V - V_{C1}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (3.98)$$

simplificando,

$$i_{C1} = \frac{V - V_{C1}}{R_1 R_2 (R_1 + R_2)} \quad (3.99)$$

pero $i_{C1} = C_1 \frac{dV_{C1}}{dt}$ (3.99) se escribe como,

$$C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{V - V_{C1}}{C_1 R_1 R_2 (R_1 + R_2)} \quad (3.100)$$

se propone,

$$\begin{aligned} x_1 &= V_{C1} \\ \dot{x}_1 &= \frac{dV_{C1}}{dt} \end{aligned} \quad (3.101)$$

despejando $\frac{dV_{C1}}{dt}$ de (3.100) y tomando la asignación de (3.101) quedando,

$$\dot{x}_1 = \frac{V}{C_1 R_1 R_2 (R_1 + R_2)} - \frac{x_1}{C_1 R_1 R_2 (R_1 + R_2)} \quad (3.102)$$

esta ecuación que representa el modelado en variables de estado se representa de manera matricial como se indica en la ecuación (3.103).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ C_1 R_1 R_2 (R_1 + R_2) \end{bmatrix} * \mathbf{1}_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ C_1 R_1 R_2 (R_1 + R_2) \end{bmatrix} V \quad (3.103)$$

Después de haber realizado el modelado del sistema eléctrico equivalente sencillo, ahora se toman los elementos equivalentes para el sistema mecánico equivalente sencillo, estos elementos se muestran en la figura 3.27.

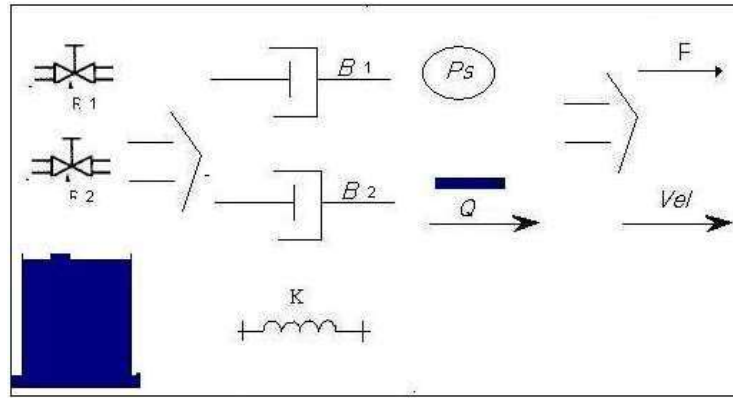


Figura 3.27 Elementos que intervienen en el sistema mecánico equivalente sencillo.

Una vez que se tienen ubicados los elementos que intervienen en el sistema, se realiza el esquema del sistema equivalente que se va a modelar. Este esquema se ilustra en la figura 3.28.

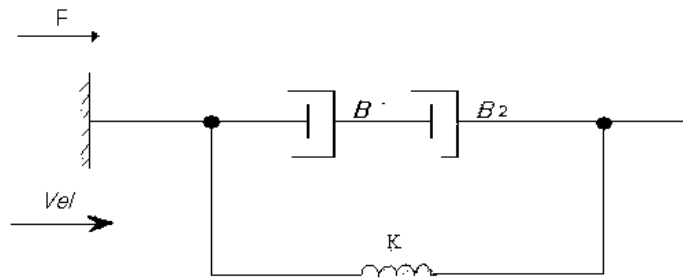


Figura 3.28 Sistema mecánico equivalente sencillo.

Para iniciar el modelado se realiza un análisis de fuerzas y de este se tiene la ecuación (3.104).

$$F = F_{R1} + F_{\beta1} \quad (3.104)$$

también se tiene,

$$V_{R1} = V_{\beta1} + V_{\beta2} \quad (3.105)$$

resolviendo para V_{R1} ,

$$V_{R1} = \frac{F - F_{R1}}{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)} \quad (3.106)$$

pero $V_{R1} = \frac{1}{K} \frac{dF_R}{dt}$; (3.106) se escribe,

$$\frac{1}{K} \frac{dF_R}{dt} = \frac{F - F_{R1}}{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)} \quad (3.107)$$

se propone,

$$\begin{aligned} x_1 &= F_R \\ \dot{x}_1 &= \frac{dF_R}{dt} \end{aligned} \quad (3.108)$$

despejando para $\frac{dF_R}{dt}$ de (3.107) y tomando los valores de (3.108) queda,

$$\dot{x}_1 = \frac{KF}{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)} - \frac{Kx_1}{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)} \quad (3.109)$$

este modelo en variables de estado se representa de manera matricial como lo indica la ecuación (3.110).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \\ \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2) \end{bmatrix} * \mathbf{I}_1^- + \begin{bmatrix} K \\ \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2) \end{bmatrix} F \quad (3.110)$$

Ahora que se realizaron los modelados equivalentes de este sistema hidráulico sencillo a mecánico y eléctrico. Se puede observar que la estructura es la misma y esto se observa al escribir las ecuaciones (3.95), (3.103) y (3.110).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_1 C_2 \mathbf{C}_1 + C_2 \tilde{\rho}_{C1} g \\ A_{C1} \end{bmatrix} * \mathbf{I}_1^- + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 C_2 \mathbf{C}_1 + C_2 \tilde{\rho}_{C1} g \\ A_{C1} \end{bmatrix} P_S \quad (3.95)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ R_1 R_2 (R_1 + R_2) \end{bmatrix} * \mathbf{I}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ R_1 R_2 (R_1 + R_2) \end{bmatrix} V \quad (3.103)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \\ \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2) \end{bmatrix} * \mathbf{I}_1 \begin{bmatrix} K \\ \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2) \end{bmatrix} F \quad (3.110)$$

3.5.2 Modelado de un sistema hidráulico con dos depósitos a sistema equivalente

Este es otro ejemplo de modelado de sistemas equivalentes y de igual manera se parte de un sistema hidráulico original, este se muestra en la figura 3.29.

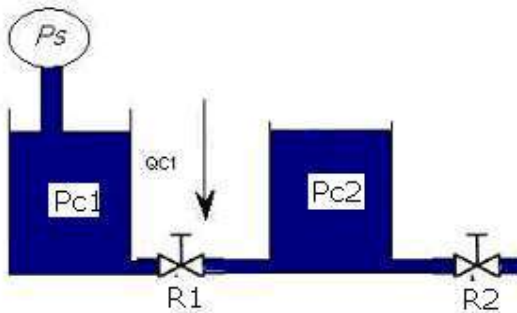


Figura 3.29 Sistema hidráulico con dos depósitos.

Una vez que se tiene el esquema del sistema que se va a modelar, se identifican los elementos que intervienen en el mismo. Estos se muestran en la figura 3.30.

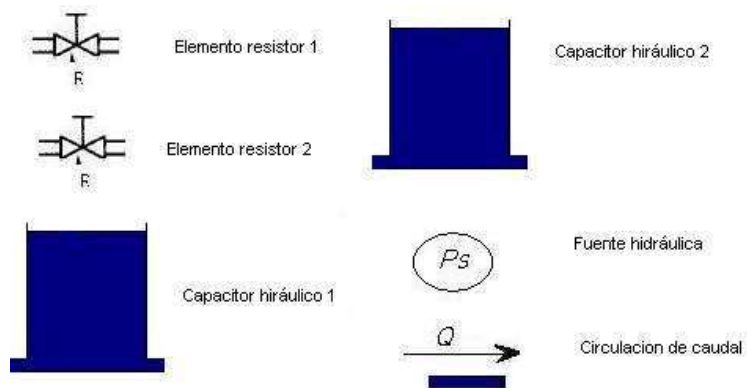


Figura 3.30 Elementos que intervienen en el sistema hidráulico con dos depósitos.

Ahora que se tienen identificados los elementos que intervienen en este sistema, se realiza el modelado tomando la analogía de las leyes de Kirchhoff para los sistemas hidráulicos. Se indica lo anterior en la ecuación (3.111).

$$P_S = P_{C1} + P_{R1} + P_{R2} + P_{C2} \quad (3.111)$$

como están las válvulas resisoras en serie, la ecuación (3.111) se reduce a,

$$P_{eq1} = P_{R1} + P_{R2} \quad (3.112)$$

sustituyendo (3.112) en (3.111) queda,

$$P_S = P_{C1} + P_{eq1} + P_{C2} \quad (3.113)$$

como el caudal es el mismo todos los elementos se tiene la expresión (3.114),

$$Q_{C1} = Q_{eq1} \quad (3.114)$$

se propone,

$$\begin{aligned} x_1 &= P_{C1} \\ \dot{x}_1 &= \frac{dP_{C1}}{dt} \\ x_2 &= P_{C2} \\ \dot{x}_2 &= \frac{dP_{C2}}{dt} \end{aligned} \quad (3.115)$$

se tiene que $Q_{C1} = \frac{A_{C1}}{\rho_1 g} \frac{dP_{C1}}{dt}$, el caudal se escribe en función de las presión, tomando las variables de estado de (3.115).

$$\dot{x}_1 = \frac{\rho_{C1} g C_{eq1} P_S}{A_{C1}} - \frac{\rho_{C1} g C_{eq1}}{A_{C1}} x_1 - \frac{\rho_{C1} g C_{eq1}}{A_{C1}} x_2 \quad (3.116)$$

de la misma manera se tiene para el segundo elemento dinámico su ecuación de estado debido a que esta conectado en serie y esta se refiere a las mismas presiones. La ecuación (3.117) indica la segunda ecuación de estado.

$$\dot{x}_2 = \frac{\rho_{C2}gC_{eq1}P_S}{A_{C2}} - \frac{\rho_{C2}gC_{eq1}}{A_{C2}}x_1 - \frac{\rho_{C2}gC_{eq1}}{A_{C2}}x_2 \quad (3.117)$$

Tomando las ecuaciones (3.116) y (3.117), se juntan y se representan en forma matricial como lo indica la ecuación (3.118).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\rho_{C1}gC_{eq1}}{A_{C1}} & -\frac{\rho_{C1}gC_{eq1}}{A_{C1}} \\ -\frac{\rho_{C2}gC_{eq1}}{A_{C2}} & -\frac{\rho_{C2}gC_{eq1}}{A_{C2}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\rho_{C1}gC_{eq1}}{A_{C1}} \\ -\frac{\rho_{C2}gC_{eq1}}{A_{C2}} \end{bmatrix} P_S \quad (3.118)$$

Ahora que ya se realizó el modelado de este sistema hidráulico con dos depósitos, se toman los elementos equivalentes a un sistema eléctrico. Estos elementos se muestran en la figura 3.31.

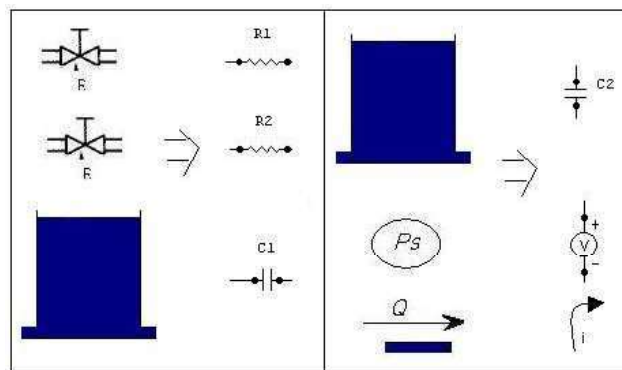


Figura 3.31 Elementos que intervienen en el sistema eléctrico equivalente de dos depósitos.

Una vez que se tienen los elementos que intervienen en este sistema se realiza el diagrama del sistema eléctrico equivalente. Este se muestra en la figura 3.32.

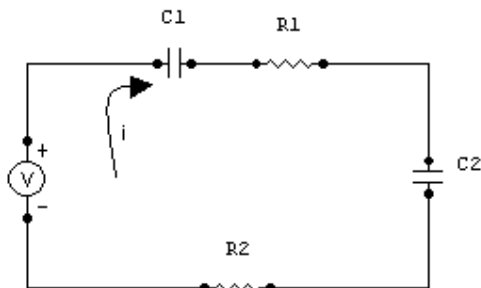


Figura 3.32 Sistema eléctrico equivalente con dos depósitos.

Para realizar el modelado de este sistema se vuelve a tomar las leyes de voltaje de kirchhoff, así como las leyes de corrientes de kirchhoff. La ecuación (3.119) indica la ley de voltajes aplicada a este sistema.

$$V = V_{C1} + V_{eq1} + V_{C2} \quad (3.119)$$

también se tiene,

$$i_{C1} = i_{C2} = i_{eq1} \quad (3.120)$$

además de $i_{C1} = C_1 \frac{dV_{C1}}{dt}$, y se propone,

$$\begin{aligned} x_1 &= V_{C1} \\ \dot{x}_1 &= \frac{dV_{C1}}{dt} \\ x_2 &= V_{C2} \\ \dot{x}_2 &= \frac{dV_{C2}}{dt} \end{aligned} \quad (3.121)$$

despejando i_{C1} , sustituyendo en (3.119) y escribiendo en función de los voltajes,

$$C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{V}{R_{eq1}} - \frac{V_{C1}}{R_{eq1}} - \frac{V_{C2}}{R_{eq1}} \quad (3.122)$$

despejando $\frac{dV_{C1}}{dt}$ de (3.122) y sustituyendo por (3.121) quedando,

$$\dot{x}_1 = \frac{V}{R_{eq1}C_1} - \frac{x_1}{R_{eq1}C_1} - \frac{x_2}{R_{eq1}C_1} \quad (3.123)$$

para la segunda ecuación de estado el desarrollo es el mismo, solo referido al capacitor dos y la segunda ecuación queda,

$$\dot{x}_2 = \frac{V}{R_{eq1}C_2} - \frac{x_1}{R_{eq1}C_2} - \frac{x_2}{R_{eq1}C_2} \quad (3.124)$$

uniendo (3.123) y (3.124), se representa de manera matricial el modelado de este sistema en variables de estado.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/R_{eq1}C_1 & -1/R_{eq1}C_1 \\ -1/R_{eq1}C_2 & -1/R_{eq1}C_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/R_{eq1}C_1 \\ 1/R_{eq1}C_2 \end{bmatrix} V \quad (3.125)$$

Después de haber obtenido el modelado de este sistema eléctrico equivalente con dos depósitos de origen hidráulico, de nueva cuenta se toman los elementos equivalentes para representar este sistema hidráulico con dos depósitos en un sistema mecánico equivalente. Los elementos que intervienen en este sistema se muestran en la figura 3.33.

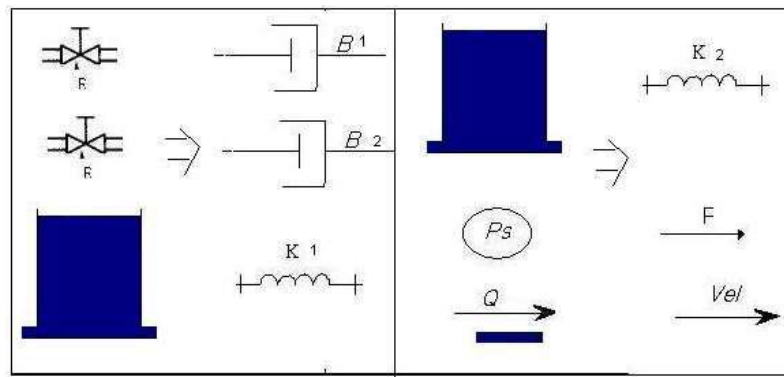


Figura 3.33 Elementos que intervienen en el sistema mecánico equivalente con dos depósitos.

Una vez que se tienen los elementos que forman parte de este sistema equivalente se realiza el esquema correspondiente. Este diagrama se muestra en la figura 3.34.

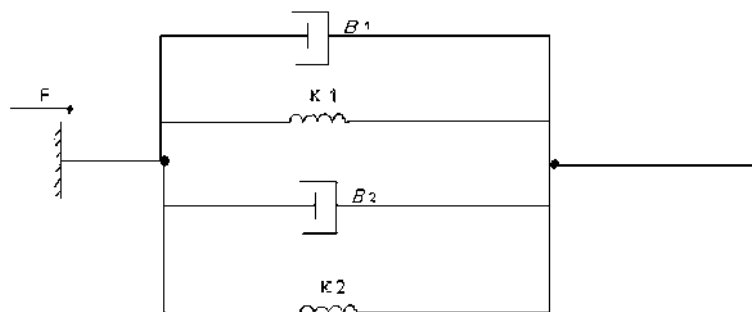


Figura 3.34 Sistema mecánico equivalente con dos depósitos.

Una vez que se tiene el esquema del sistema que se va a modelar, se realiza un análisis de fuerzas, del cual se obtiene la ecuación (3.126).

$$F = F_{\beta_1} + F_{\beta_2} + F_{R1} + F_{R2} \quad (3.126)$$

como la velocidad es la misma en todos los elementos se tiene,

$$V_{\beta_1} = V_{\beta_2} = V_{R1} = V_{R2} \quad (3.127)$$

se tiene la fuerza en el amortiguador tres al estar conectado en serie,

$$F_{\beta_3} = F_{\beta_1} + F_{\beta_2} \quad (3.128)$$

como $V_{R1} = \frac{1}{K1} \frac{dF_{R1}}{dt}$; se escribe V_1 en función de las fuerzas,

$$\frac{1}{K_1} \frac{dF_R}{dt} = \frac{F - F_{R1} - F_{R2}}{\beta_3} \quad (3.129)$$

se propone,

$$\begin{aligned} x_1 &= F_{R1} \\ \dot{x}_1 &= \frac{dF_{R1}}{dt} \\ x_2 &= F_{R2} \\ \dot{x}_2 &= \frac{dF_{R2}}{dt} \end{aligned} \quad (3.130)$$

se despeja $\frac{dF_{R1}}{dt}$ de (3.129) y tomando las variables de estado en (3.130) queda,

$$\dot{x}_1 = \frac{FK_1}{\beta_3} - \frac{K_1 x_1}{\beta_3} - \frac{K_1 x_2}{\beta_3} \quad (3.131)$$

Para la segunda ecuación de estado los términos quedan igual, sólo referidos al resorte dos, debido a que se asemeja una conexión serie.

$$\dot{x}_2 = \frac{FK_2}{\beta_3} - \frac{K_2 x_1}{\beta_3} - \frac{K_2 x_2}{\beta_3} \quad (3.132)$$

Uniendo (3.131) y (3.132), se representa de manera matricial el modelo de este sistema mecánico equivalente con dos depósitos y lo indica la ecuación (3.133).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{\beta_3} & -\frac{K_1 x_1}{\beta_3} \\ -\frac{K_{21}}{\beta_3} & -\frac{K_2 x_1}{\beta_3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_1 x_1}{\beta_3} \\ \frac{K_2 x_1}{\beta_3} \end{bmatrix} F \quad (3.133)$$

Al igual que en los ejemplos anteriores los modelos equivalentes tienen la misma estructura y esto se observa si se escriben las ecuaciones (3.118), (3.125) y (3.133).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\rho_{C1} g C_{eq1}}{A_{C1}} & \frac{-\rho_{C1} g C_{eq1}}{A_{C1}} \\ \frac{-\rho_{C2} g C_{eq1}}{A_{C2}} & \frac{-\rho_{C2} g C_{eq1}}{A_{C2}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-\rho_{C1} g C_{eq1}}{A_{C1}} \\ \frac{-\rho_{C2} g C_{eq1}}{A_{C2}} \end{bmatrix} P_s \quad (3.118)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_{eq1} C_1} & \frac{-1}{R_{eq1} C_1} \\ \frac{-1}{R_{eq1} C_2} & \frac{-1}{R_{eq1} C_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{eq1} C_1} \\ \frac{1}{R_{eq1} C_2} \end{bmatrix} V \quad (3.125)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{\beta_3} & -\frac{K_1 x_1}{\beta_3} \\ -\frac{K_{21}}{\beta_3} & -\frac{K_2 x_1}{\beta_3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_1 x_1}{\beta_3} \\ \frac{K_2 x_1}{\beta_3} \end{bmatrix} F \quad (3.133)$$

De igual manera que en los desarrollos anteriores se observa que las variables de los elementos resistivos, inductivos y capacitivos en los tres sistemas se encuentran en la misma posición de las matrices de sus ecuaciones de estado.

3.6 Modelado de algunos sistemas complejos

En esta sección se realiza el modelado matemático de algunos sistemas que contienen más ramas, así como mayor contenido de elementos dinámicos. Es importante mencionar que para este tipo de modelos aumenta el tamaño de la matriz A, y esta misma matriz se hace más dispersa.

3.6.1 Modelado de un sistema equivalente con cuatro elementos dinámicos

Se realiza el modelado de un sistema físico que contiene cuatro elementos dinámicos, se parte de que es un sistema eléctrico que contiene dos inductores y dos capacitores como elementos dinámicos, así como una resistencia como elemento estático. La figura 3.35 muestra este sistema eléctrico a modelar.

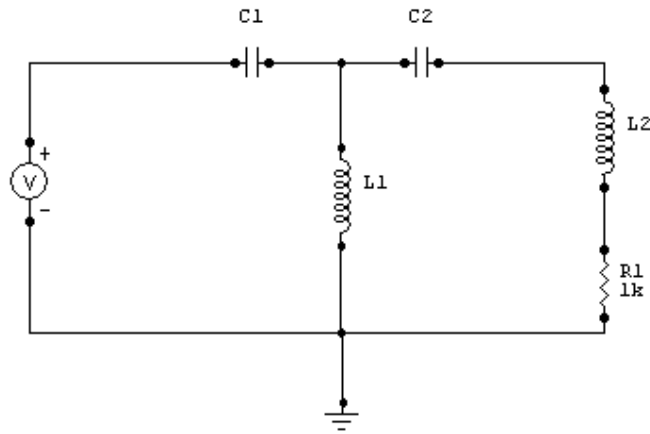


Figura 3.35 Sistema eléctrico complejo de cuatro elementos dinámicos a modelar.

Para este sistema se proponen las siguientes variables de estado:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= V_{C1} & x_3 &= V_{C2} \\
 \dot{x}_1 &= \frac{dV_{C1}}{dt} & \dot{x}_3 &= \frac{dV_{C2}}{dt} \\
 x_2 &= i_{L2} & x_4 &= i_{L2} \\
 \dot{x}_2 &= \frac{di_{L2}}{dt} & \dot{x}_4 &= \frac{di_{L2}}{dt}
 \end{aligned}
 \tag{3.134}$$

Tomando la ley de voltajes de Kirchhoff se tiene,

$$V = V_{C1} + V_{L1}
 \tag{3.135}$$

tomando la definición del voltaje en el inductor L_1 (3.135) queda,

$$V = V_{C1} + L_1 \frac{di_{L1}}{dt} \quad (3.136)$$

despejando para $\frac{di_{L1}}{dt}$ de (3.136) y tomando las variables de estado se tiene,

$$\dot{x}_2 = \frac{V}{L_1} - \frac{x_1}{L_1} \quad (3.137)$$

tomando la ley de corrientes de Kirchhoff en los inductores y el capacitor uno se tiene,

$$i_{C1} = i_{L2} + i_{L1} \quad (3.138)$$

tomando la definición de la corriente en el capacitor (3.138) queda,

$$C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} = i_{L2} + i_{L1} \quad (3.139)$$

despejando $\frac{dV_{C1}}{dt}$ de (3.139) y tomando las variables de estado queda,

$$\dot{x}_1 = \frac{x_4}{C_1} + \frac{x_2}{C_1} \quad (3.140)$$

como,

$$i_{C2} = i_{L2} \quad (3.141)$$

se toma la definición de la corriente en este capacitor y (3.141) queda,

$$C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} = i_{L2} \quad (3.142)$$

despejando $\frac{dV_{C2}}{dt}$ de (3.142) y tomando las variables de estado queda,

$$\dot{x}_3 = \frac{x_4}{C_2} \quad (3.143)$$

de (3.143) se tiene,

$$V_{L1} = V - V_{C1} \quad (3.144)$$

pero,

$$V - V_{C1} = V_{C2} + V_{L2} + V_{R1} \quad (3.145)$$

tomando la definición del voltaje en el inductor dos se tiene,

$$V_{C2} + L_2 \frac{di_{L2}}{dt} + R_1 * i_{L2} = V - V_{C1} \quad (3.146)$$

despejando $\frac{di_{L2}}{dt}$ de (3.146) y tomando las variables de estado asignadas,

$$\dot{x}_4 = \frac{V}{L_2} - \frac{x_1}{L_2} - \frac{x_3}{L_2} - \frac{R_1}{L_2} x_4 \quad (3.147)$$

El modelado de este sistema, se representa de manera matricial al unir las ecuaciones (3.137), (3.140), (3.143) y (3.147). Esta representación se muestra en la ecuación (3.148).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & \frac{1}{C_1} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{R_1}{L_2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} V \quad (3.148)$$

Ahora que se tiene el modelado de este sistema complejo de cuatro elementos dinámicos, se toman los elementos equivalentes que participan y se desarrolla el modelado del sistema mecánico equivalente de cuatro elementos dinámicos, mismo que se muestra en la figura 3.36.

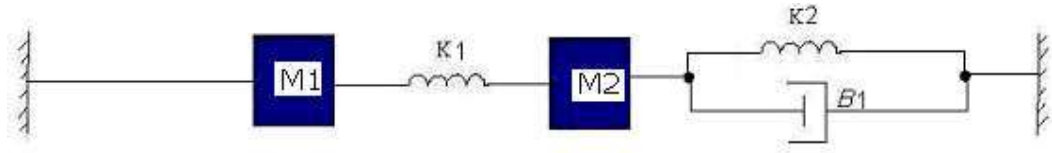


Figura 3.36 Sistema mecánico equivalente complejo de cuatro elementos dinámicos.

Para este sistema físico, se proponen las siguientes variables de estado.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= F_{R1} & x_3 &= F_{R2} \\
 \dot{x}_1 &= \frac{dF_{R1}}{dt} & \dot{x}_3 &= \frac{dF_{R2}}{dt} \\
 x_2 &= V_{m1} & x_4 &= V_{m2} \\
 \dot{x}_2 &= \frac{dV_{m1}}{dt} & \dot{x}_4 &= \frac{dV_{m2}}{dt}
 \end{aligned} \tag{3.149}$$

Se parte de un análisis de fuerzas donde la fuerza de entrada se iguala con las fuerzas en el resorte uno y la masa uno.

$$F = F_{R1} + F_{m1} \tag{3.150}$$

pero la fuerza en el bloque de masa m_1 es $m_1 \frac{dV_{m1}}{dt}$ (3.150) queda,

$$F = F_{R1} + m_1 \frac{dV_{m1}}{dt} \tag{3.151}$$

despejando $\frac{dV_{m1}}{dt}$ de (3.151) y tomando las variables de estado se tiene,

$$\dot{x}_2 = \frac{F}{m_1} - \frac{x_1}{m_1} \tag{3.152}$$

se observa que la velocidad en el resorte es la suma de las velocidades en los bloques de masa,

$$V_{R1} = V_{m2} + V_{m1} \quad (3.153)$$

pero $V_{R1} = \frac{1}{K_1} \frac{dF_{R1}}{dt}$, entonces (3.153) se escribe como,

$$\frac{1}{K_1} \frac{dF_{R1}}{dt} = V_{m2} + V_{m1} \quad (3.154)$$

despejando $\frac{dF_{R1}}{dt}$ de (3.154) y tomando las variables de estado se tiene,

$$\dot{x}_1 = K_1 x_2 + K_1 x_4 \quad (3.155)$$

también se tiene que la velocidad en el resorte dos es la misma que en el bloque de masa dos; así que se tiene,

$$V_{R2} = V_{m2} \quad (3.156)$$

como $V_{R2} = \frac{1}{K_2} \frac{dF_{R2}}{dt}$; (3.156) se escribe como,

$$\frac{1}{K_2} \frac{dF_{R2}}{dt} = V_{m2} \quad (3.157)$$

despejando $\frac{dF_{R2}}{dt}$ de (3.157) y tomando las variables de estado se tiene,

$$\dot{x}_3 = K_2 x_4 \quad (3.158)$$

como la fuerza en la masa uno es,

$$F_{m1} = F - F_{R1} \quad (3.159)$$

también realizando un análisis de fuerzas se tiene que,

$$F - F_{R1} = F_{R2} + F_{m2} + F_{\beta1} \quad (3.160)$$

pero como $F_{m2} = m_2 \frac{dV_{m2}}{dt}$ y $F_{\beta1} = \beta_1 V_{m2}$, (3.160) queda como,

$$F - F_{R1} = F_{R2} + m_2 \frac{dV_{m2}}{dt} + \beta_1 V_{m2} \quad (3.161)$$

despejando $\frac{dV_{m2}}{dt}$ de (3.178) y tomando las variables de estado queda,

$$\dot{x}_4 = \frac{F}{m_2} - \frac{x_1}{m_2} - \frac{x_3}{m_2} - \frac{\beta_1}{m_2} x_4 \quad (3.162)$$

El modelado de este sistema mecánico equivalente de cuatro elementos dinámicos queda representado de manera matricial al unir las ecuaciones (3.152), (3.155), (3.158) y (3.162). Esta representación matricial se muestra en la ecuación (3.163).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_2 \\ \dot{x}_3 \\ x_3 \\ \dot{x}_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ -1 & K_1 & 0 & K_1 & & & & \\ m_1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & K_2 & & & & \\ -1 & 0 & -1 & -\beta_1 & & & & \\ m_2 & & m_2 & m_2 & & & & \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ m_1 \\ 0 \\ 1 \\ m_2 \end{bmatrix} F \quad (3.163)$$

Ahora se toman los elementos equivalentes de este sistema físico de cuatro elementos dinámicos y se realiza el modelado del sistema hidráulico equivalente de cuatro elementos dinámicos. Este sistema se muestra en la figura 3.42.

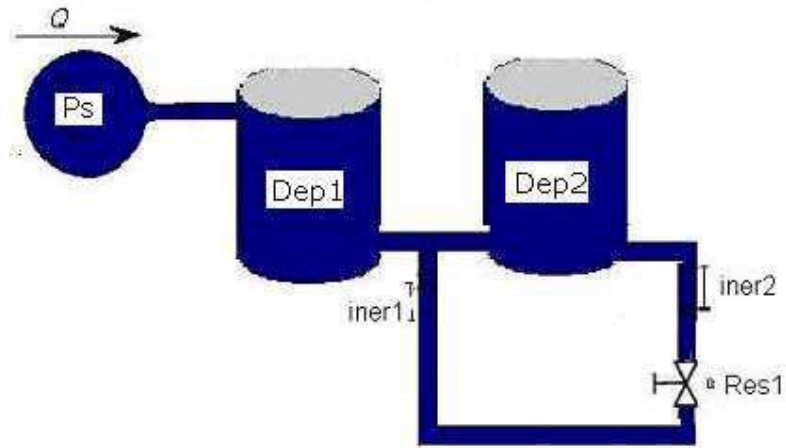


Figura 3.37 Sistema hidráulico complejo equivalente de cuatro elementos dinámicos.

Para este sistema físico, se proponen las siguientes variables de estado.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= P_{C1} & x_3 &= P_{C2} \\
 \dot{x}_1 &= \frac{dP_{C1}}{dt} & \dot{x}_3 &= \frac{dP_{C2}}{dt} \\
 x_2 &= Q_{L1} & x_4 &= Q_{L2} \\
 \dot{x}_2 &= \frac{dQ_{L1}}{dt} & \dot{x}_4 &= \frac{dQ_{L2}}{dt}
 \end{aligned}
 \tag{3.164}$$

Se parte de manera análoga a las leyes de kirchhoff aplicadas a las caídas de presiones donde la presión de la fuente de entrada es la suma de las presiones en el depósito capacitor uno y la inercia hidráulica uno. Esto lo muestra la ecuación (3.165).

$$P_s = P_{C1} + P_{L1} \tag{3.165}$$

pero la presión en la inercia uno es $\frac{\rho_1 L_1}{A_{L1}} \frac{dQ_{L1}}{dt}$ (3.165) queda,

$$P_s = P_{C1} + \frac{\rho_1 L_1}{A_{L1}} \frac{dQ_{L1}}{dt} \tag{3.166}$$

despejando $\frac{dQ_{L1}}{dt}$ de (3.166) y tomando las variables de estado se tiene,

$$\dot{x}_2 = \frac{A_{L1}P_s}{\rho_{L1}L_1} - \frac{A_{L1}x_1}{\rho_{L1}L_1} \quad (3.167)$$

se tiene el caudal en el depósito capacitor uno es la suma de los caudales en las dos inercias hidráulicas,

$$Q_{C1} = Q_{L2} + Q_{L1} \quad (3.168)$$

pero $Q_{C1} = \frac{A_{C1}}{\rho_{C1}g} \frac{dP_{C1}}{dt}$, entonces (3.168) se escribe como,

$$\frac{A_{C1}}{\rho_{C1}g} \frac{dP_{C1}}{dt} = Q_{L2} + Q_{L1} \quad (3.169)$$

despejando $\frac{dP_{C1}}{dt}$ de (3.169) y tomando las variables de estado se tiene,

$$\dot{x}_1 = \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}} x_2 + \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}} x_4 \quad (3.170)$$

se tiene el caudal en el depósito capacitor dos es igual que en la inercia hidráulica dos; así que se tiene,

$$Q_{C2} = Q_{L2} \quad (3.171)$$

como $Q_{C2} = \frac{A_{C2}}{\rho_{C2}g} \frac{dP_{C2}}{dt}$; (3.171) se escribe como,

$$\frac{A_{C2}}{\rho_{C2}g} \frac{dP_{C2}}{dt} = Q_{L2} \quad (3.172)$$

despejando $\frac{dP_{C2}}{dt}$ de (3.172) y tomando las variables de estado se tiene,

$$\dot{x}_3 = \frac{\rho_{C2}g}{A_{C2}}x_4 \quad (3.173)$$

la presión en la inercia hidráulica uno es,

$$P_{L1} = P_S - P_{C1} \quad (3.174)$$

al realizar una ley de kirchhoff con las presiones se tiene que,

$$P_S - P_{C1} = P_{C2} + P_{L2} + P_{R1} \quad (3.175)$$

como $P_{L2} = \frac{\rho_{L2}L_2}{A_{L2}} \frac{dQ_{L2}}{dt}$ y $P_{R1} = C_1Q_{L2}$, (3.175) queda,

$$P_S - P_{C1} = P_{C2} + \frac{\rho_{L2}L_2}{A_{L2}} \frac{dQ_{L2}}{dt} + C_1Q_{L2} \quad (3.176)$$

despejando $\frac{dQ_{L2}}{dt}$ de (3.176) y tomando las variables de estado queda,

$$\dot{x}_4 = \frac{A_{L2}P_S}{\rho_{L2}L_2} - \frac{A_{L2}}{\rho_{L2}L_2}x_1 - \frac{A_{L2}}{\rho_{L2}L_2}x_2 - \frac{A_{L2}C_1}{\rho_{L2}L_2}x_4 \quad (3.177)$$

Finalmente el modelo matemático de este sistema hidráulico equivalente de cuatro elementos dinámicos queda representado de manera matricial al unir las ecuaciones (3.167), (3.170), (3.173) y (3.177). Esta representación matricial se muestra en la ecuación (3.178).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}} & 0 & 0 \\ -\frac{A_{L1}}{\rho_{L1}L_1} & \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_{C2}g}{A_{C2}} \\ -\frac{A_{L2}}{\rho_{L2}L_2} & 0 & \frac{-A_{L2}}{\rho_{L2}L_2} & \frac{-A_{L2}}{\rho_{L2}L_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A_{L1}}{\rho_{L1}L_1} \\ 0 \\ \frac{A_{L2}}{\rho_{L2}L_2} \end{bmatrix} P_S \quad (3.178)$$

Una vez que se ha realizado el modelado del sistema físico complejo de cuatro elementos, se observa que su comportamiento es similar si se escriben las ecuaciones (3.148), (3.163) y (3.178).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_2 \\ \dot{x}_3 \\ x_3 \\ \dot{x}_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{1}{L_2} & -\frac{R_1}{L_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} V \quad (3.148)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_2 \\ \dot{x}_3 \\ x_3 \\ \dot{x}_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & K_1 \\ -\frac{1}{m_1} & K_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_2 \\ -\frac{1}{m_2} & 0 & -\frac{1}{m_2} & -\frac{\beta_1}{m_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} F \quad (3.163)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_2 \\ \dot{x}_3 \\ x_3 \\ \dot{x}_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}} & 0 & \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}} \\ -\frac{A_{L1}}{\rho_{L1}L_1} & \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}} & 0 & 0 \\ \frac{\rho_{L1}L_1}{\rho_{L1}L_1} & 0 & 0 & \frac{\rho_{C2}g}{A_{C2}} \\ 0 & 0 & -\frac{A_{L2}}{\rho_{L2}L_2} & \frac{\rho_{C2}g}{A_{C2}} \\ -\frac{A_{L2}}{\rho_{L2}L_2} & 0 & \frac{\rho_{L2}L_2}{\rho_{L2}L_2} & -\frac{A_{L2}}{\rho_{L2}L_2} \\ \frac{\rho_{L2}L_2}{\rho_{L2}L_2} & 0 & \frac{\rho_{L2}L_2}{\rho_{L2}L_2} & -\frac{A_{L2}}{\rho_{L2}L_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A_{L1}}{\rho_{L1}L_1} \\ 0 \\ \frac{A_{L2}}{\rho_{L2}L_2} \end{bmatrix} P_s \quad (3.178)$$

3.6.2 Modelado de un sistema físico equivalente de tres mallas y cuatro elementos dinámicos

En la siguiente sección se realiza el modelado de un sistema más complejo, mismo que parte de un sistema eléctrico que contiene tres mallas y cuatro elementos dinámicos, dentro de estas mallas los elementos del sistema se encuentran en serie y a su vez en paralelo unos con respecto a otros. Este sistema se muestra en la figura 3.38.

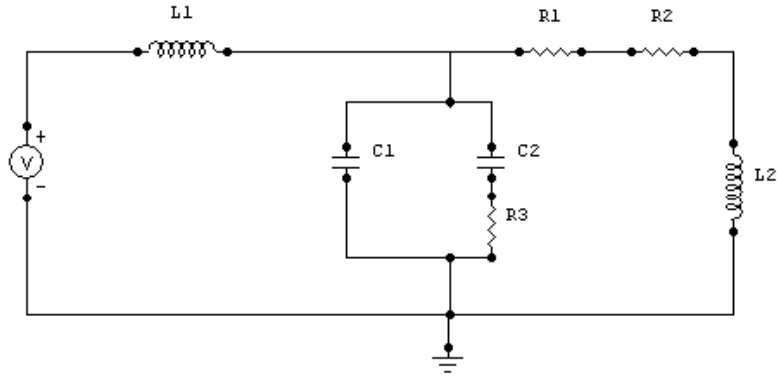


Figura 3.38 Sistema eléctrico de tres mallas y cuatro elementos dinámicos a modelar.

Para este sistema se tienen las siguientes variables de estado:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= i_{L1} & x_3 &= V_{C2} \\
 \dot{x}_1 &= \frac{di_{L1}}{dt} & \dot{x}_3 &= \frac{dV_{C2}}{dt} \\
 x_2 &= V_{C1} & x_4 &= i_{L2} \\
 \dot{x}_2 &= \frac{dV_{C1}}{dt} & \dot{x}_4 &= \frac{di_{L2}}{dt}
 \end{aligned} \tag{3.179}$$

Partiendo de la ley de voltajes de Kirchoff aplicada a la primera malla se tiene,

$$V = V_{L1} + V_{C1} \tag{3.180}$$

como $V_{L1} = L_1 \frac{di_{L1}}{dt}$ (3.180) se escribe como,

$$V = L_1 \frac{di_{L1}}{dt} + V_{C1} \tag{3.181}$$

despejando $\frac{di_{L1}}{dt}$ de (3.181) y tomando las variables de estado(3.179) queda,

$$\dot{x}_1 = \frac{V}{L_1} - \frac{x_2}{L_1} \tag{3.182}$$

ahora se toma la ley de corrientes de Kirchoff en la cual se denota que la corriente en el inductor uno es la suma de las corrientes en el capacitor uno y la resistencia uno.

$$i_{L1} = i_{C1} + i_{R1} \quad (3.183)$$

pero,

$$i_{R1} = \frac{V_{C1} - V_{C2}}{R_1} \quad (3.184)$$

entonces (3.183) se escribe como,

$$i_{L1} = i_{C1} + \frac{V_{C1} - V_{C2}}{R_1} \quad (3.185)$$

despejando para i_{C1} ,

$$i_{C1} = i_{L1} - \left[\frac{V_{C1} - V_{C2}}{R_1} \right] \quad (3.186)$$

como $i_{C1} = C_1 \frac{dV_{C1}}{dt}$ (3.186) se escribe como,

$$C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} = i_{L1} - \left[\frac{V_{C1} - V_{C2}}{R_1} \right] \quad (3.187)$$

despejando para $\frac{dV_{C1}}{dt}$ y tomando las variables de estado (3.179),

$$\dot{x}_2 = \frac{x_1}{C_1} - \frac{x_2}{R_1 C_1} + \frac{x_3}{R_1 C_1} \quad (3.188)$$

utilizando la ecuación (3.183) y tomando en cuenta que $i_{R1} = i_{C2}$ se tiene que,

$$i_{C2} = i_{L1} - i_{C1} \quad (3.189)$$

pero,

$$i_{C1} = i_{L1} - \left[i_{L1} + \left(\frac{V_{C1} - V_{C2}}{R_1} \right) \right] \quad (3.190)$$

como $i_{C2} = C_2 \frac{dV_{C2}}{dt}$ la ecuación (3.189) se escribe como,

$$C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} = i_{L1} - \left[i_{L1} + \left(\frac{V_{C1} - V_{C2}}{R_1} \right) \right] \quad (3.191)$$

despejando para $\frac{dV_{C2}}{dt}$ de (3.191) y tomando las variables de estado (3.179)

$$\dot{x}_3 = \frac{x_2}{R_1 C_2} + \frac{x_3}{R_1 C_2} \quad (3.192)$$

para la última ecuación de estado se aplica una ley de voltajes de Kichhoff en la ultima malla en donde se tiene,

$$V_{C1} = V_{R2} + V_{R3} + V_{L2} \quad (3.193)$$

como, $V_{R2} = R_2 i_{L2}$, $V_{R3} = R_3 i_{L2}$ y $V_{L2} = L_2 \frac{di_{L2}}{dt}$ (3.193) queda como,

$$V_{C1} = i_{L2}(R_2 + R_3) + L_2 \frac{di_{L2}}{dt} \quad (3.194)$$

despejando para $\frac{di_{L2}}{dt}$ de (3.194) y tomando las variables de estado (3.179),

$$\dot{x}_4 = \frac{x_2}{L_2} - \frac{R_2 + R_3}{L_2} x_4 \quad (3.195)$$

finalmente el modelo de este sistema eléctrico de tres mallas y cuatro elementos dinámicos se representa al unir las ecuaciones (3.182), (3.188), (3.192), y (3.195). Esta representación matricial se observa en la expresión (3.196).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & \frac{-1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_1 C_2} & \frac{1}{R_1 C_2} & \frac{-(R_2 + R_3)}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V \quad (3.196)$$

Una vez que se ha realizado el modelado de este sistema eléctrico de tres mallas y cuatro elementos dinámicos, se toman los elementos equivalentes que participan en el mismo, para formar el sistema mecánico equivalente de tres mallas y cuatro elementos dinámicos. Este sistema se muestra en la figura 3.39.

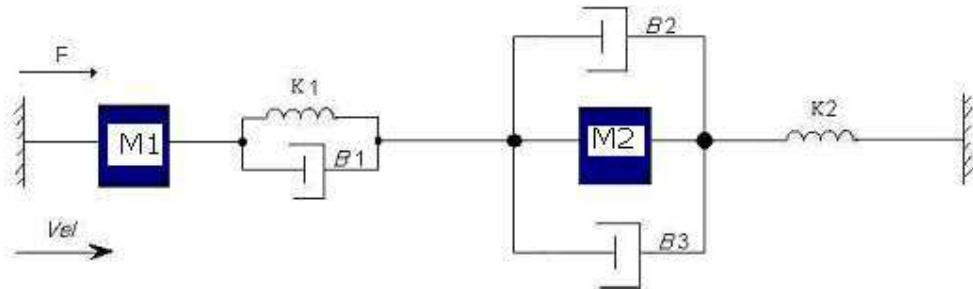


Figura 3.39 Sistema mecánico equivalente de tres mallas y cuatro elementos dinámicos a modelar.

Para este sistema se tienen las siguientes variables de estado:

$$\begin{aligned} x_1 &= V_{m1} & x_3 &= F_{R2} \\ \dot{x}_1 &= \frac{dV_{m1}}{dt} & \dot{x}_3 &= \frac{dF_{R2}}{dt} \\ x_2 &= F_{R1} & x_4 &= V_{m2} \\ \dot{x}_2 &= \frac{dF_{R1}}{dt} & \dot{x}_4 &= \frac{dV_{m2}}{dt} \end{aligned} \quad (3.197)$$

Aplicando un análisis de fuerzas en la entrada se tiene,

$$F = F_{m1} + F_{R1} \quad (3.198)$$

como $F_{m1} = m_1 \frac{dV_{m1}}{dt}$ (3.216) queda como,

$$F = m_1 \frac{dV_{m1}}{dt} + F_{R1} \quad (3.199)$$

despejando $\frac{dV_{m1}}{dt}$ de (3.199) y tomando las variables de estado(3.197) queda,

$$\dot{x}_1 = \frac{F}{m_1} - \frac{x_2}{m_1} \quad (3.200)$$

la velocidad en la masa uno es la suma de las masas en el resorte uno y amortiguador uno,

$$V_{m1} = V_{R1} + V_{\beta1} \quad (3.201)$$

pero en el amortiguador uno,

$$V_{\beta1} = \frac{F_{R1} - F_{R2}}{\beta_1} \quad (3.202)$$

sustituyendo (3.202) en (3.201) se obtiene,

$$V_{m1} = V_{R1} + \frac{F_{R1} - F_{R2}}{\beta_1} \quad (3.203)$$

despejando para V_{R1} ,

$$V_{R1} = V_{m1} - \left[\frac{F_{R1} - F_{R2}}{\beta_1} \right] \quad (3.204)$$

como $V_{R1} = \frac{1}{K_1} \frac{dF_{R1}}{dt}$ queda como,

$$\frac{1}{K_1} \frac{dF_{R1}}{dt} = V_{m1} - \left[\frac{F_{R1} - F_{R2}}{\beta_1} \right] \quad (3.205)$$

despejando para $\frac{dF_{R1}}{dt}$ y tomando las variables de estado (3.197),

$$\dot{x}_2 = K_1 x_1 - \frac{K_1}{\beta_1} x_2 + \frac{K_1}{\beta_1} x_3 \quad (3.206)$$

se tiene que $V_{\beta 1} = V_{R2}$ se tiene que,

$$V_{R2} = V_{m1} - V_{R1} \quad (3.207)$$

además,

$$V_{R1} = V_{m1} - \left[V_{m1} + \left(\frac{F_{R1} - F_{R2}}{\beta_1} \right) \right] \quad (3.208)$$

como $V_{R2} = \frac{1}{K_2} \frac{dF_{R2}}{dt}$ la ecuación (3.207) queda,

$$\frac{1}{K_2} \frac{dF_{R2}}{dt} = V_{m1} - \left[V_{m1} + \left(\frac{F_{R1} - F_{R2}}{\beta_1} \right) \right] \quad (3.209)$$

despejando para $\frac{dF_{R2}}{dt}$ de (3.209) y tomando las variables de estado (3.197)

$$\dot{x}_3 = \frac{K_2}{\beta_1} x_2 + \frac{K_2}{\beta_1} x_3 \quad (3.210)$$

también se aplica un análisis de fuerzas en los elementos amortiguadores dos y tres, así como en el bloque de masa dos con respecto a la fuerza en el resorte uno,

$$F_{R1} = F_{\beta_2} + F_{\beta_3} + F_{m_2} \quad (3.211)$$

se tiene que $F_{\beta_2} = \beta_2 V_{m_2}$, $V_{m_3} = \beta_3 V_{m_2}$ y $V_{m_2} = m_2 \frac{dV_{m_2}}{dt}$ (3.211) queda,

$$F_{R1} = (\beta_2 + \beta_3)V_{m_2} + m_2 \frac{dV_{m_2}}{dt} \quad (3.212)$$

despejando para $\frac{dV_{m_2}}{dt}$ de (3.212) y tomando las variables de estado (3.197),

$$\dot{x}_4 = \frac{x_2}{m_2} - \frac{\beta_2 + \beta_3}{m_2} x_4 \quad (3.213)$$

Por último este sistema mecánico equivalente de tres mallas y cuatro elementos dinámicos queda representado de forma matricial al unir las ecuaciones (3.200), (3.206), (3.210), y (3.213). Esta representación matricial se muestra en la ecuación (3.214).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-K_1}{\beta_1} & \frac{K_1}{\beta_1} & 0 \\ K_1 & \frac{\beta_1}{\beta_2} & \frac{\beta_1}{\beta_2} & 0 \\ 0 & \frac{K_2}{\beta_2} & \frac{K_2}{\beta_2} & \frac{-(\beta_2 + \beta_3)}{m_2} \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F \quad (3.214)$$

Ahora se toman los elementos equivalentes de este sistema y se forma el sistema hidráulico equivalente de tres mallas y cuatro elementos dinámicos, mismo que se muestra en la figura 3.45.

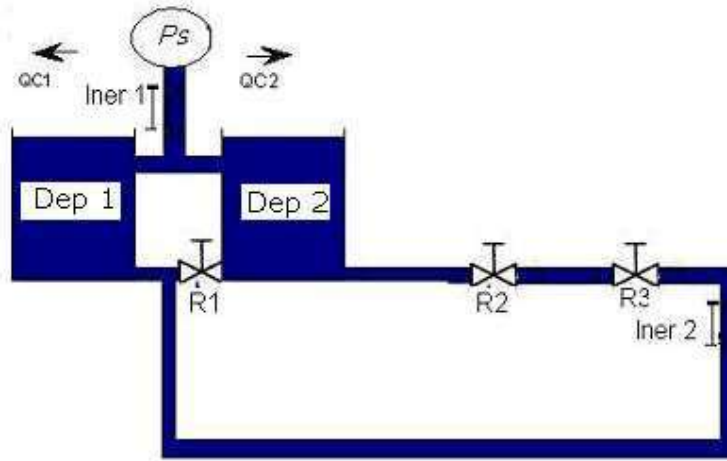


Figura 3.40 Sistema hidráulico equivalente de tres mallas y cuatro elementos dinámicos.

Para este sistema se tienen las siguientes variables de estado:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= Q_{L1} & x_3 &= P_{C2} \\
 \dot{x}_1 &= \frac{dQ_{L1}}{dt} & \dot{x}_3 &= \frac{dP_{C2}}{dt} \\
 x_2 &= P_{C1} & x_4 &= Q_{L2} \\
 \dot{x}_2 &= \frac{dP_{C1}}{dt} & \dot{x}_4 &= \frac{dQ_{L2}}{dt}
 \end{aligned}
 \tag{3.215}$$

De manera análoga aplicando una ley de Kirchhoff en las presiones de la inercia hidráulica uno y en el depósito uno,

$$P_s = P_{L1} + P_{C1} \tag{3.216}$$

se tiene que $P_{L1} = \frac{\rho_{L1} L_1}{A_{L1}} \frac{dQ_{L1}}{dt}$ (3.216) queda,

$$P_s = \frac{\rho_{L1} L_1}{A_{L1}} \frac{dQ_{L1}}{dt} + P_{C1} \tag{3.217}$$

despejando $\frac{dQ_{L1}}{dt}$ de (3.217) y tomando las variables de estado(3.215) queda,

$$\dot{x}_1 = \frac{A_{L1}}{\rho_{L1}L_1} P_S - \frac{A_{L1}}{\rho_{L1}L_1} x_2 \quad (3.218)$$

se tiene que el caudal en la inercia hidráulica uno es la suma de los caudales en el depósito uno y la válvula uno,

$$Q_{L1} = Q_{C1} + Q_{R1} \quad (3.219)$$

además de que,

$$Q_{R1} = \frac{P_{C1} - P_{C2}}{C_1} \quad (3.220)$$

sustituyendo (3.220) en (3.219) se tiene,

$$Q_{L1} = Q_{C1} + \frac{P_{C1} - P_{C2}}{C_1} \quad (3.221)$$

despejando para Q_{C1} ,

$$Q_{C1} = Q_{L1} - \left[\frac{P_{C1} - P_{C2}}{C_1} \right] \quad (3.222)$$

pero $Q_{C1} = \frac{A_{C1}}{\rho_{C1}g} \frac{dP_{C1}}{dt}$ (3.222) queda,

$$\frac{A_{C1}}{\rho_{C1}g} \frac{dP_{C1}}{dt} = Q_{L1} - \left[\frac{P_{C1} - P_{C2}}{C_1} \right] \quad (3.223)$$

despejando para $\frac{dP_{C1}}{dt}$ y tomando las variables de estado (3.215),

$$\dot{x}_2 = \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}}x_1 - \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}}x_2 + \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}}x_3 \quad (3.224)$$

como $Q_{R1} = Q_{C2}$ el caudal en el depósito dos es la diferencia de caudal entre la inercia hidráulica uno y el depósito uno,

$$Q_{C2} = Q_{L1} - Q_{C1} \quad (3.225)$$

pero,

$$Q_{C2} = Q_{L1} - \left[Q_{L1} + \left(\frac{P_{C1} - P_{C2}}{C_1} \right) \right] \quad (3.226)$$

tomando en cuenta que $Q_{C2} = \frac{A_{C2}}{\rho_{C2}g} \frac{dP_{C2}}{dt}$ la ecuación (3.226) queda,

$$\frac{A_{C2}}{\rho_{C2}g} \frac{dP_{C2}}{dt} = Q_{L1} - \left[Q_{L1} + \left(\frac{P_{C1} - P_{C2}}{C_1} \right) \right] \quad (3.227)$$

despejando para $\frac{dP_{C2}}{dt}$ de (3.227) y tomando las variables de estado (3.215),

$$\dot{x}_3 = \frac{\rho_{C2}g}{A_{C2}C_1}x_2 + \frac{\rho_{C2}g}{A_{C2}C_1}x_3 \quad (3.228)$$

para finalizar se aplica una ley de Kirchoff de manera análoga en los elementos que restan de tal modo que la presión en el depósito uno es la suma de las presiones en las válvulas resisoras dos y tres, así como en el elemento de inercia hidráulica dos,

$$P_{C1} = P_{R2} + P_{R3} + P_{L2} \quad (3.229)$$

como, $P_{R2} = C_2 Q_{L2}$, $P_{R3} = C_3 Q_{L2}$ y $P_{L2} = \frac{\rho_{L2}L_2}{A_{L2}} \frac{dQ_{L2}}{dt}$ (3.229) queda,

$$P_{C1} = Q_{L2}(C_2 + C_3) + \frac{\rho_{L2}L_2}{A_{L2}} \frac{dQ_{L2}}{dt} \quad (3.230)$$

despejando para $\frac{dQ_{L2}}{dt}$ de (3.230) y tomando las variables de estado (3.215),

$$\dot{x}_4 = \frac{A_{L2}}{\rho_{L2}L_2} x_2 - \frac{A_{L2}(C_2 + C_3)}{\rho_{L2}L_2} x_4 \quad (3.231)$$

este sistema se representa de manera matricial al unir las ecuaciones (3.218), (3.224), (3.228), y (3.231). Esta representación matricial se observa en la expresión (3.232).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-A_{L1}}{\rho_{L1}L_1} & 0 & 0 \\ \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}} & \frac{-\rho_{C1}g}{A_{C1}C_1} & \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}C_1} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_{C2}g}{A_{C2}C_1} & \frac{\rho_{C2}g}{A_{C2}C_1} & 0 \\ 0 & \frac{A_{L2}}{\rho_{L2}L_2} & 0 & \frac{-A_{L2}(C_2 + C_3)}{\rho_{L2}L_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{A_{L1}}{\rho_{L1}L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} P_S \quad (3.232)$$

Finalmente se observa la similitud de este sistema equivalente al escribir las ecuaciones (3.196), (3.214) y (3.232).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & \frac{-1}{R_1C_1} & \frac{1}{R_1C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_1C_2} & \frac{1}{R_1C_2} & \frac{-(R_2 + R_3)}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V \quad (3.196)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_2 \\ \dot{x}_3 \\ x_3 \\ \dot{x}_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-K_1}{\beta_1} & \frac{K_1}{\beta_1} & 0 \\ K_1 & \beta_1 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \frac{K_2}{\beta_2} & \frac{K_2}{\beta_2} & -(\beta_2 + \beta_3) \\ 0 & \beta_2 & \beta_2 & \frac{-(\beta_2 + \beta_3)}{m_2} \\ \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F \quad (3.214)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_2 \\ \dot{x}_3 \\ x_3 \\ \dot{x}_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-A_{L1}}{\rho_{L1}L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\rho_{C1}g}{A_{C1}C_1} & \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}C_1} & 0 \\ \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}} & \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}C_1} & \frac{\rho_{C1}g}{A_{C1}C_1} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_{C2}g}{A_{C2}C_1} & \frac{\rho_{C2}g}{A_{C2}C_1} & -\frac{A_{L2}(C_2 + C_3)}{\rho_{L2}L_2} \\ 0 & \frac{A_{L2}}{\rho_{L2}L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{A_{L1}}{\rho_{L1}L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} P_S \quad (3.232)$$

Finalmente se observa que en todos los ejemplos de modelado se llega a las mismas expresiones y también se observa que de igual manera los elementos pasivos y activos de los tres sistemas se encuentran en las mismas posiciones en las matrices de sus ecuaciones de estado, por consiguiente presentan el mismo comportamiento en el dominio del tiempo.

Capítulo 4

Simulación de sistemas físicos equivalentes

4.1 Introducción

En este capítulo se realiza el proceso de modelado y simulación de los sistemas físicos equivalentes con el *20-sim*. La *simulación* se define como el proceso de diseñar y desarrollar un modelo computarizado de un sistema o proceso y conducir a experimentos con este modelo, con el propósito de entender el comportamiento del sistema a evaluar, así como las estrategias con las cuales se puede operar el sistema.¹ Partiendo de la definición de simulación, se tiene que para este trabajo se utiliza la herramienta de simulación para la verificación del comportamiento de los sistemas físicos equivalentes y observar como de manera análoga interactúan de igual manera las variables generalizadas que participan en los tres sistemas; iniciando a partir de un sistema original.

La siguiente sección consta de una descripción general del uso del programa *20-sim* dirigido a la simulación los sistemas físicos equivalentes, se da una descripción del entorno del programa así como la forma de insertar los elementos, darles valores, realizar la simulación y obtener las respuestas de estos sistemas físicos. Al igual que en los capítulos anteriores se verifican y simulan sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos.

4.1.2 Breve descripción del entorno de *20-sim 3.6*

El paquete de simulación que se utiliza en este capítulo es el *20-sim 3.6*, con este programa se puede realizar simulaciones de sistemas físicos como son hidráulicos, mecánicos, eléctricos y térmicos. En esta sección se hace una breve descripción sobre el entorno de este paquete de simulación, así como una descripción breve sobre el proceso de modelado y simulación en este paquete. En la figura 4.1 se muestra la pantalla de presentación del software *20-sim*.

¹ Simulación de sistemas, diseño desarrollo e implementación
Robert E. Shannon; Ed. Trillas 1998



Figura 4.1 Presentación del paquete de simulación 20-sim 3.6.

Una vez que se instala este software y se ejecuta aparece el editor del modelo junto con una ventana en la cual aparecen las librerías con los elementos que se tienen para modelar. Las figura 4.2 muestran el editor de 20-sim.

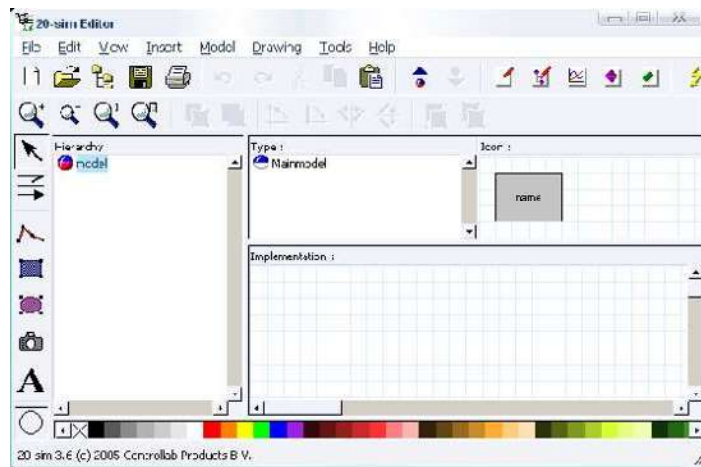


Figura 4.2 Entorno del editor de modelos de 20-sim 3.6

La figura 4.3 muestra las librerías que contiene el paquete 20-sim 3.6.

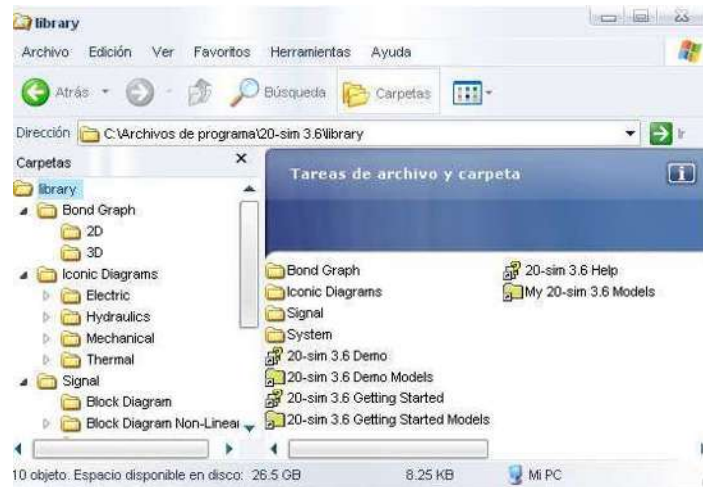


Figura 4.3 Librerías con elementos activos y pasivos para simular sistemas físicos en 20-sim.

Una vez abierto el editor y las librerías, estas se exploran dependiendo del tipo de sistema y tipo de modelado. Este paquete puede realizar simulaciones en el dominio del tiempo, así como utilizando el método de Bond Graph, que es una representación gráfica de un sistema dinámico donde una colección de componentes interactúan con otros a través de puertos de energía y describen como fluye la potencia a través del sistema. En este trabajo no se abordará la simulación en Bond Graph.

Para este capítulo se simulan de manera esquemática los sistemas y elementos que se desarrollaron el capítulo anterior. Para poder comenzar a realizar una simulación es necesario conocer la ubicación de los elementos que se van a utilizar, así como la forma de obtener los comportamientos en el dominio del tiempo.

Los elementos de los sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos se encuentran en carpetas dentro de la carpeta de librería, de una vez que se explora se encuentra una carpeta que se llama *iconic diagrams* dentro de esta carpeta se encuentran las carpetas para cada sistema que se desee simular. Una vez dentro de la carpeta del sistema deseado se tienen los elementos activos y pasivos del mismo. Para utilizarlos en el editor sólo basta con arrastrarlos al área de trabajo del editor de 20-sim.

La figura 4.4 ilustra las carpetas que se mencionan, así como el acceso a los elementos de un sistema eléctrico. De igual manera se accede a los elementos para los sistemas mecánicos, e hidráulicos.



Figura 4.4 Acceso a los elementos de un sistema eléctrico.

Una vez que se arrastran los elementos en el área de trabajo, se construye el diagrama correspondiente al sistema a simular. Para realizar el diagrama basta con arrastrar los elementos al área de trabajo y presionando el botón *connect* se conectan con líneas todos los elementos que componen el sistema. Una vez que se realizó el diagrama del sistema se procede a simular, para esto se debe presionar el botón *check model*, una vez que termina de verificar el modelo se inicia la simulación presionando el botón *start simulation*. La figura 4.5 muestra los botones que se indican, así como un diagrama ya realizado.

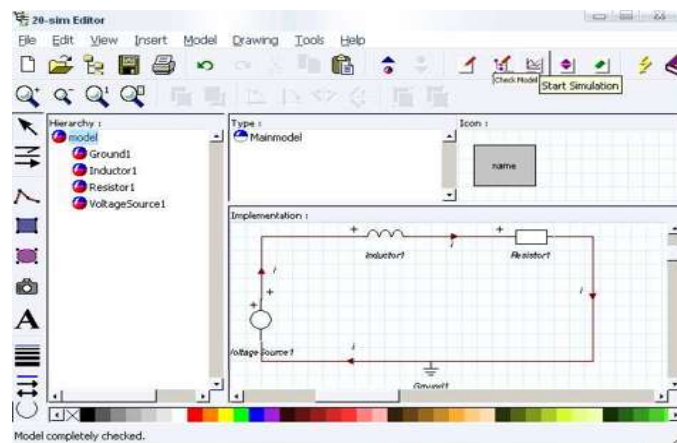


Figura 4.5 Ejemplo de un diagrama eléctrico, así como los botones para la simulación.

Una vez que se realiza la simulación, se abre la ventana que se muestra en la figura 4.6 que muestra la simulación del sistema, así como las diversas opciones de análisis que cuenta este paquete.

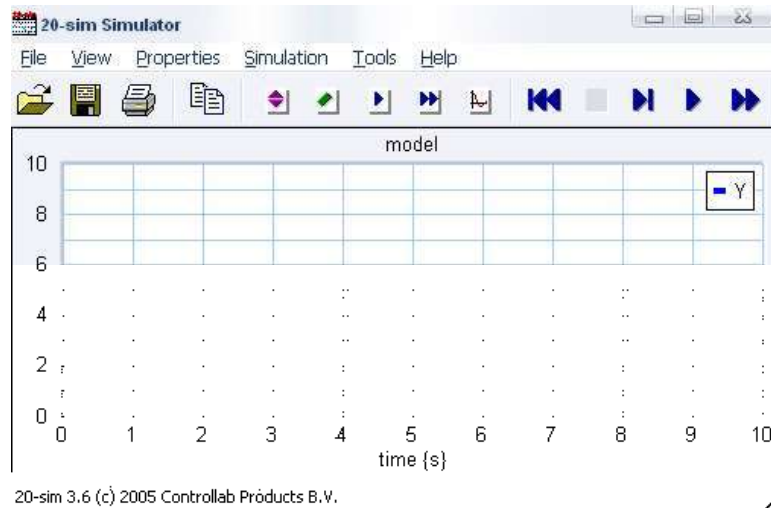


Figura 4.6 Ventana de simulación de 20-sim 3.6.

Esta ventana de simulación, ofrece entre otras opciones de análisis; el análisis de fourier, análisis de la respuesta a la frecuencia y también el análisis en el dominio del tiempo. Si se desea observar el comportamiento de un elemento dinámico en el dominio del tiempo, basta con elegir el botón *plot properties* y elegir la opción de *add curves*, y se elige tanto el parámetro y elemento que se desee medir. La figura 4.7 muestra la ventana que ofrece las opciones antes mencionadas.

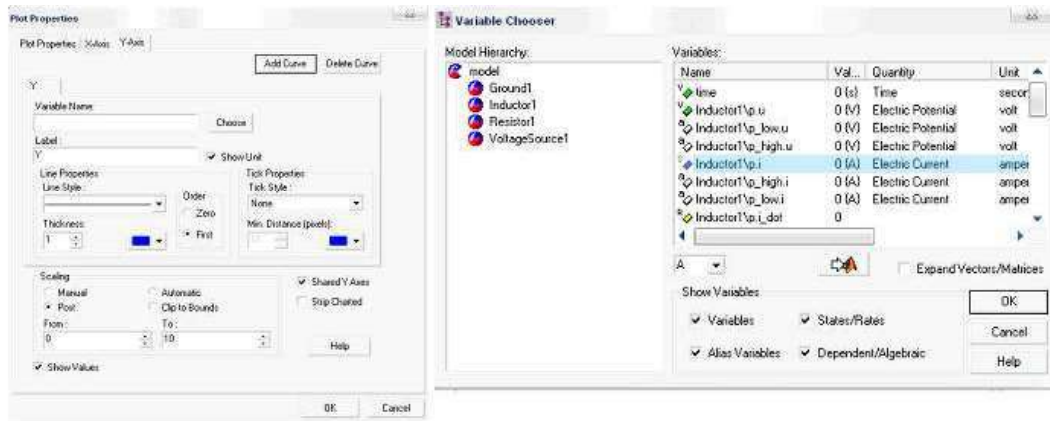


Figura 4.7 *plot properties* y *add curves*

Como se observa en la figura 4.7 se elige el elemento y su parámetro que se desee observar en su comportamiento y finalmente se presiona el botón *play* que se tiene en la figura 4.6 y se despliega el comportamiento del sistema o elemento del sistema en el dominio del tiempo. Para este ejemplo que se ha dado seguimiento se tiene como salida la corriente en el inductor y se observa la salida en la figura 4.8.



Figura 4.8 Respuesta en el dominio del tiempo de un sistema eléctrico RL en serie.

4.2 Modelado de sistemas físicos utilizando 20-sim

En esta sección se realiza el modelado de sistemas físicos, pero ahora con el 20-sim como se describió en la sección anterior. Se tendrá el modelo físico, se recordará su ecuación en variables de estado para tomar las variables que indiquen comportamiento dinámico y estas puedan ser graficadas por el paquete de simulación 20-sim. En esta sección se realizarán modelados de sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos.

4.2.1 Sistemas eléctricos

Para modelar en 20-sim los sistemas eléctricos es necesario conocer la ubicación de los mismos, tanto pasivos como activos que participan en el mismo y partiendo de un diagrama esquemático y determinando los elementos del sistema que funcionan como salida se puede construir el circuito eléctrico y observar el comportamiento del mismo. Iniciando el modelado de sistemas eléctricos se tiene el circuito mostrado en la figura 4.9.

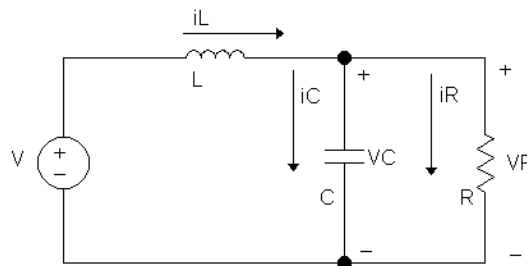


Figura 4.9 Sistema eléctrico a modelar.

Cabe recordar que las variables de interés son la corriente en el inductor i_L y el voltaje en el capacitor V_C . Del programa del 20-sim se tiene el armado del esquema eléctrico el cual se muestra en la figura 4.10.

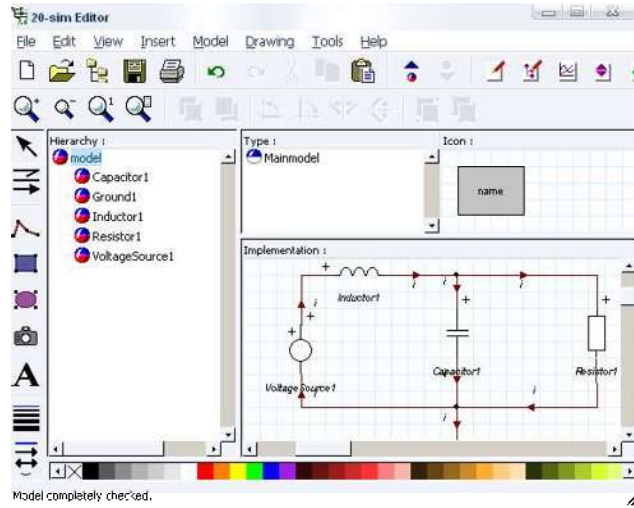


Figura 4.10 Modelo de un sistema eléctrico realizado en 20-sim.

A cada elemento se le asignan valores, los cuales son:

$$V = 5V$$

$$L = 100mH$$

$$C = 10\mu F$$

$$R = 10\Omega$$

Una vez que se verifica que el modelado del sistema está correctamente elaborado y realizada la simulación se despliegan las respuestas del mismo, es decir, se observa el comportamiento de las variables dinámicas de interés, como son la corriente en el inductor y el voltaje en el capacitor. La figura 4.11 muestra el resultado de la simulación con las respuestas de la corriente en el inductor y el voltaje en el capacitor, se muestran en color rosa y rojo respectivamente.

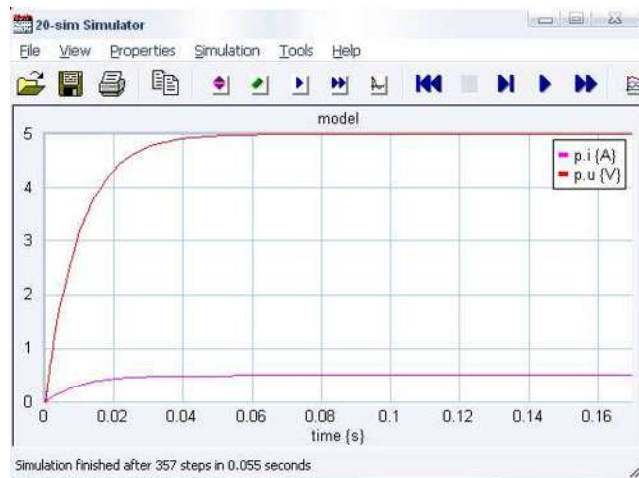


Figura 4.11 Respuesta de la corriente en el inductor (rosa) y el voltaje en el capacitor (rojo).

4.2.2 Sistemas mecánicos

El procedimiento para el modelado de sistemas mecánicos en 20-sim, es prácticamente el mismo, sólo que ahora se exploran los componentes activos y pasivos en la carpeta *mecanica* y dentro de esta carpeta están las opciones de rotacional y traslacional, para este trabajo se elige la traslacional. Una vez que se elige la carpeta con esta opción se encuentran los componentes, los cuales de la misma manera que en la sección anterior se arrastran y se conectan para formar el sistema de interés. La figura 4.12 muestra el sistema mecánico que se modela en 20-sim.

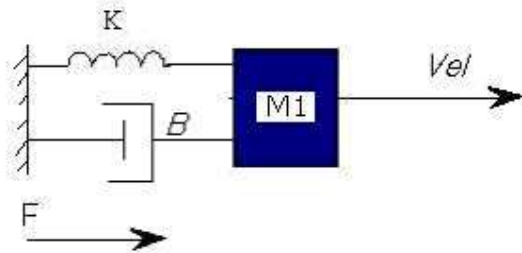


Figura 4.12 Sistema mecánico que se modela y simula en 20-sim.

Retomando el modelado de este sistema se tiene que las variables de interés son la fuerza en el resorte y la velocidad en la masa. El sistema en 20-sim se muestra en la figura 4.13.

Figura 4.13 Sistema mecánico a modelar y simular.

De este esquema se toman los siguientes valores,

$$m = 400g$$

$$F = 5N$$

$$B = 0.05$$

$$K = 5 \frac{N}{m}$$

De la simulación se tiene los comportamientos de la masa y del conjunto de resorte y amortiguador. La figura 4.14 muestra la velocidad en la masa y la fuerza en el resorte.

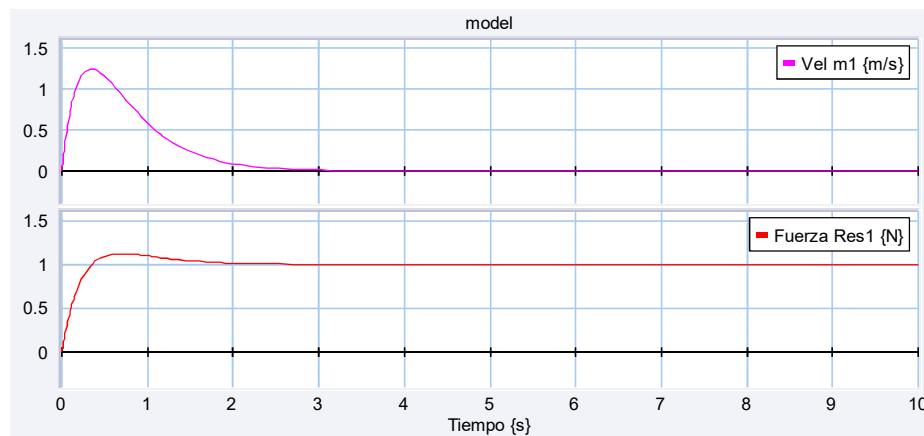


Figura 4.14 Respuesta de la simulación, velocidad en masa (rosa) y fuerza en el resorte (rojo).

4.2.3 Sistemas hidráulicos

Para los sistemas hidráulicos prácticamente es el mismo procedimiento, difiere sólo en la exploración de carpetas, ahora tanto componentes activos y pasivos se encuentran en la carpeta *hydraulics*, dentro de esta carpeta se tienen actuadores, sensores, fuentes de presión y caudal. Basta con arrastrar los iconos al área de trabajo y se verifica el modelo y se realiza la simulación obteniendo las respuestas del sistema. La figura 4.15 muestra el sistema hidráulico que se modela y simula en 20-sim.

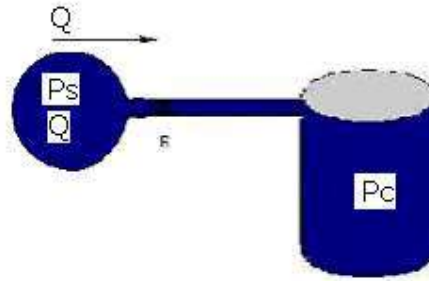


Figura 4.15 Sistema hidráulico a modelar y simular.

De la misma manera que en los sistemas anteriores se arrastran los elementos al área de trabajo de 20-sim y se realizan las conexiones. La figura 4.16 muestra este mismo sistema construido en 20-sim.

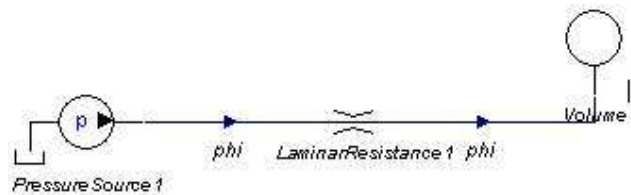


Figura 4.16 Sistema hidráulico en el entorno de 20-sim.

Una vez que se insertan los parámetros en la fuente de presión, las constantes de la resistencia laminar y las dimensiones de la sección transversal del tubo conductor se tiene los comportamientos de presión y flujo volumétrico (caudal). Este comportamiento se muestra en la figura 4.17.

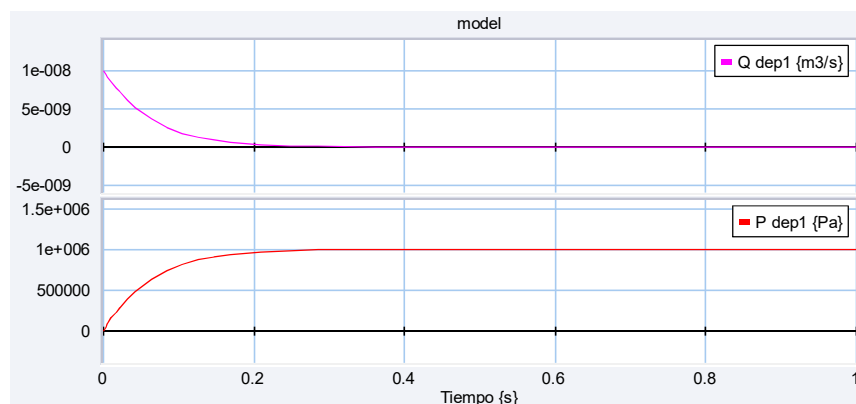


Figura 4.17 Comportamiento de la presión en la inercia (rojo), y el caudal en la inercia (rosa).

4.3 Simulación de sistemas físicos equivalentes

En esta sección se realiza la simulación de los sistemas físicos equivalentes una vez que se analizaron en el capítulo anterior. El interés de esta sección radica en el comportamiento de estos sistemas en el dominio del tiempo, este debe ser el mismo en los tres sistemas. De igual manera que en el capítulo anterior, en esta sección se realiza la simulación de:

- De un sistema eléctrico a su sistema equivalente en mecánico e hidráulico.
- De un sistema mecánico a su sistema equivalente en eléctrico e hidráulico.
- De un sistema hidráulico a su sistema equivalente en eléctrico y mecánico.

4.3.1 Simulación de un sistema eléctrico a sistemas equivalentes

Para simular sistemas eléctricos y sus sistemas equivalentes, primero se simula el sistema eléctrico original y después se toman los elementos equivalentes como se realizó en el capítulo tercero. La figura 4.18 muestra el primer sistema eléctrico que se simula en 20-sim.

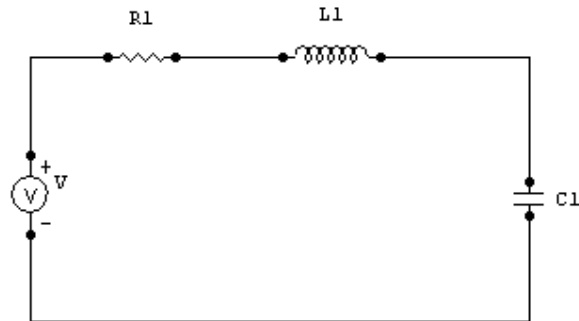


Figura 4.18 Sistema eléctrico RLC en serie a simular en 20-sim.

De la misma manera que en el ejemplo anterior se realiza el sistema en 20-sim y se le asignan los valores de los elementos. Los valores de los elementos son:

$$L = 5mH$$

$$R = 1\Omega$$

$$C = 50mF$$

La figura 4.19 muestra este sistema construido en 20-sim.

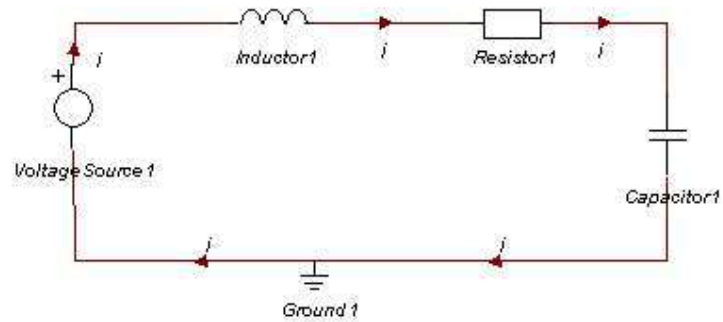


Figura 4.19 Sistema eléctrico RLC en serie construido en 20-sim.

Ahora que se tiene construido el sistema en 20-sim y una vez insertados los valores antes mencionados, se realiza la simulación en la cual el resultado se muestra en la figura 4.20; donde se muestra la corriente en el inductor y el voltaje en el capacitor que son las variables dinámicas del sistema y son los comportamientos de interés del mismo.

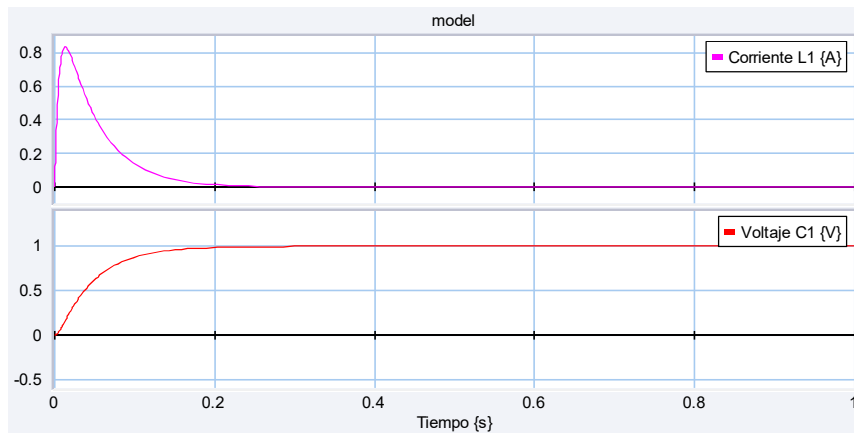


Figura 4.20 Comportamiento del sistema eléctrico RLC en serie, se muestra la corriente (rosa) en el inductor y el voltaje (naranja) en el capacitor.

Ahora se toma su sistema equivalente en mecánico y de igual manera se realiza la simulación del sistema en 20-sim. El sistema mecánico equivalente RLC en serie se muestra en la figura 4.21.

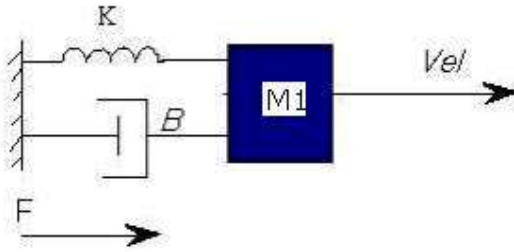


Figura 4.21 Sistema mecánico equivalente RLC en serie a simular en 20-sim.

Como se explicó en la sección 4.1.2 se realiza la construcción del sistema en 20-sim y se le asignan los valores para cada elemento. La figura 4.22 muestra el sistema mecánico equivalente RLC en 20-sim.

Figura 4.22 Sistema mecánico equivalente RLC en serie.

Los valores para este sistema mecánico equivalente RLC en serie son:

$$m = 100g$$

$$K = 800m \frac{N}{m}$$

$$\beta = 600 \frac{N \cdot s}{m}$$

El comportamiento que tiene este sistema una vez que se lleva a cabo la simulación se muestra en la figura 4.23 la cual muestra la fuerza en el conjunto resorte-amortiguador y la velocidad en la masa, las cuales son las variables dinámicas de interés.

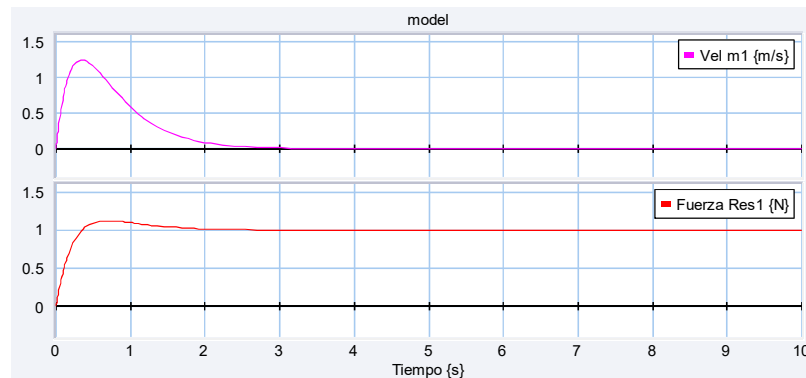


Figura 4.23 Comportamiento del sistema mecánico equivalente RLC en serie el cual muestra la velocidad en la masa (rosa) y la fuerza en el resorte (naranja).

Ahora se toman los elementos equivalentes para un sistema hidráulico con elementos RLC en serie. La figura 4.24 muestra el sistema equivalente RLC en serie.

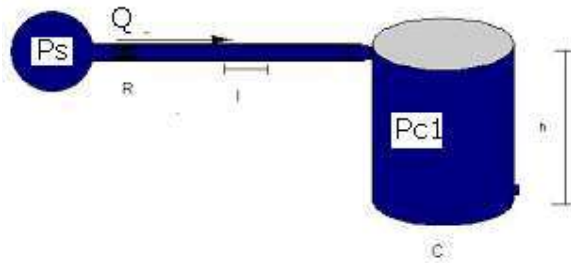


Figura 4.24 Sistema hidráulico equivalente RLC en serie.

Ahora se realiza la construcción del sistema en 20-sim, tomando los elementos equivalentes, este sistema se muestra en la figura 4.25.

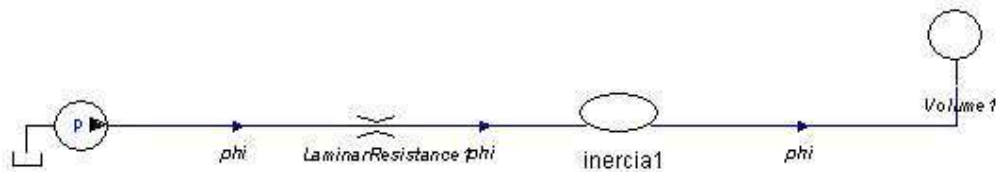


Figura 4.25 Sistema hidráulico equivalente RLC en serie construido en 20-sim.

Una vez que se realiza el sistema equivalente, se toman los valores con los que se va a realizar la simulación. Estos valores son los siguientes.

$$P = 1MPa$$

$$P_{Resist} = 100Pa$$

$$L = 100g$$

$$Pc = 1GPa$$

Una vez que se insertaron los valores se realiza la simulación, en este sistema es de interés el comportamiento del caudal en el elemento inductor y de la presión en el tanque. Este comportamiento se muestra en la figura 4.26.

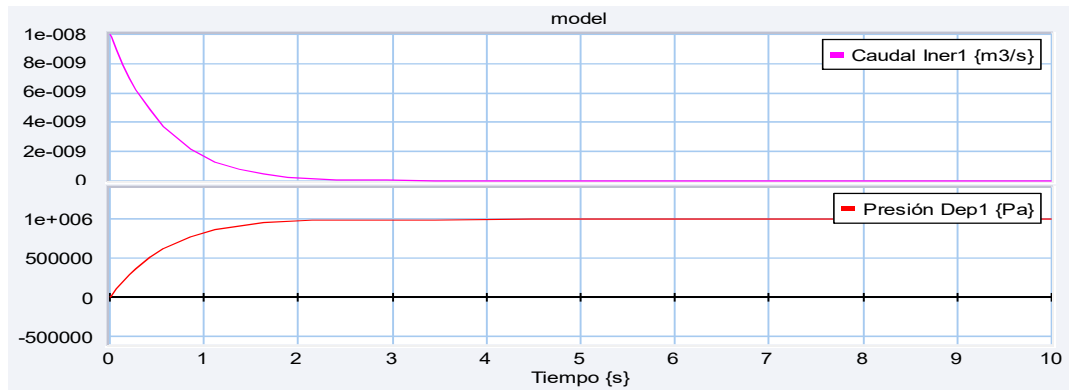


Figura 4.26 Comportamiento del sistema hidráulico equivalente RLC en serie, se tiene el caudal en el elemento de inercia (rosa) y la presión en el depósito (naranja).

Ahora se tiene un sistema eléctrico RLC mixto, en el cual interesa la corriente en el inductor y el voltaje en el capacitor. Este sistema se muestra en la figura 4.27.

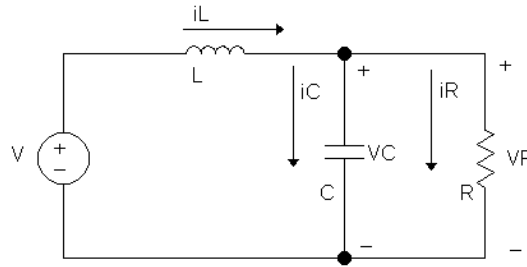


Figura 4.27 Sistema eléctrico RLC mixto a simular en 20-sim.

De igual manera que en los ejemplos anteriores se realiza la construcción de este sistema en 20-sim, mismo que se muestra en la figura 4.28.

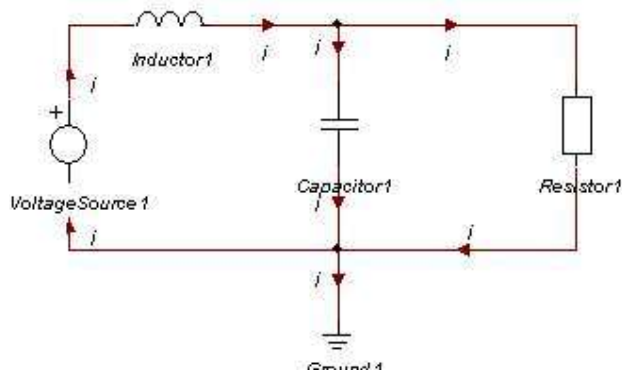


Figura 4.28 Sistema eléctrico RLC mixto realizado en 20-sim.

Para este sistema eléctrico se toman los siguientes valores:

$$L = 100mH$$

$$R = 10\Omega$$

$$C = 10\mu F$$

Una vez que se insertan los valores antes descritos se realiza la simulación. La figura 4.29 muestra el comportamiento de los elementos dinámicos de este sistema, es decir la corriente en el inductor y el voltaje en el capacitor.

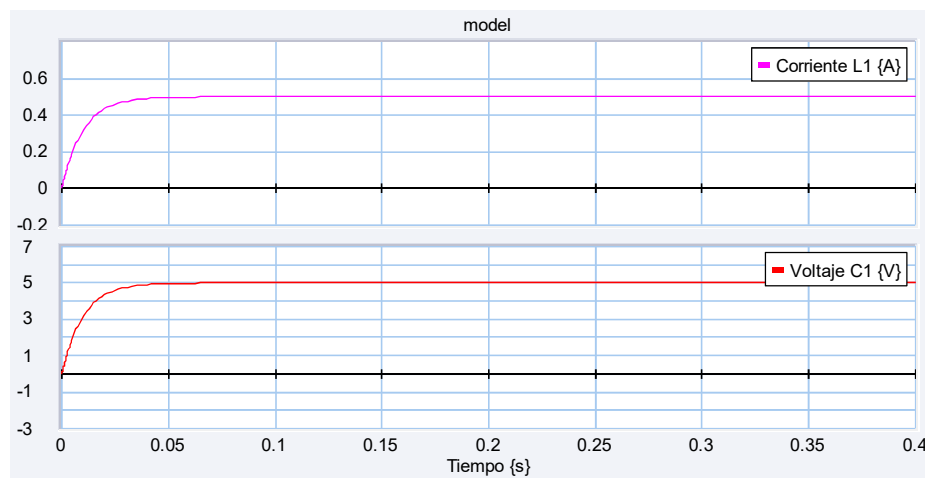


Figura 4.29 Comportamiento de sistema eléctrico RLC mixto, se observa la corriente en el inductor (rosa) y el voltaje en el capacitor (Naranja).

De igual manera que en el ejemplo anterior se toma el equivalente en sistema mecánico y este sistema se muestra en la figura 4.30.

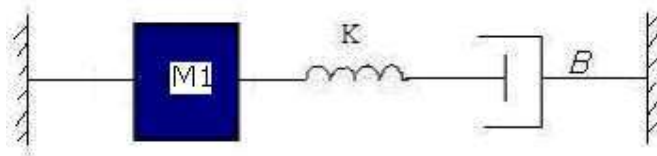


Figura 4.30 Sistema mecánico equivalente RLC mixto a simular en 20-sim.

Como en los ejemplos anteriores se construye el sistema equivalente mecánico RLC mixto en 20-sim, este sistema construido en 20-sim se muestra en la figura 4.31.

Figura 4.31 sistema mecánico equivalente Mixto RLC construido en 20-sim.

Una vez que se construye el sistema mecánico equivalente se realiza el proceso de simulación de igual manera que en los ejemplos anteriores de tal manera que se obtiene el comportamiento de la velocidad en la masa y la fuerza en el resorte, elementos análogos al inductor y capacitor del sistema eléctrico original, se utilizan los siguientes valores.

$$m = 230g \quad F = 2N$$
$$k = 10n/m \quad \beta = 0.5N * seg / m$$

La figura 4.32 muestra el comportamiento de este sistema mecánico equivalente RLC mixto.

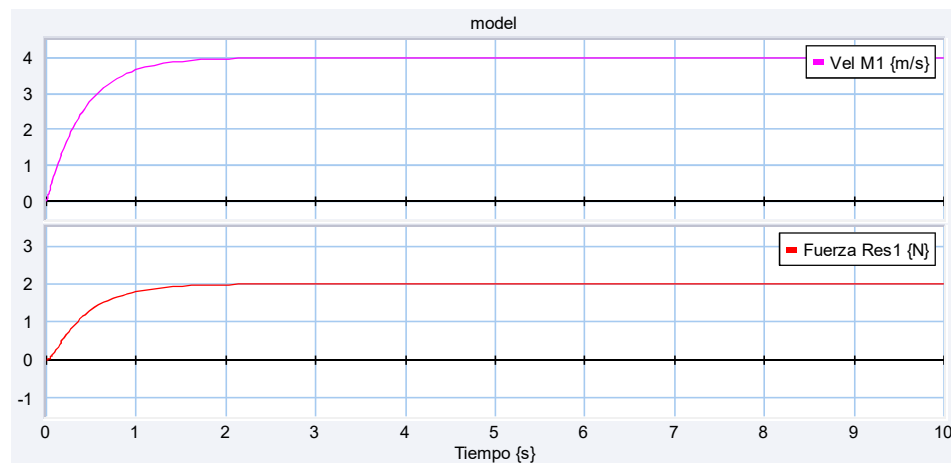


Figura 4.32 Comportamiento del sistema mecánico equivalente RLC mixto, se observa la velocidad en la masa (rosa) y la fuerza en el resorte (naranja).

Ahora se toman los elementos equivalentes para realizar la simulación del sistema hidráulico equivalente mixto RLC mismo que se muestra en la figura 4.33.

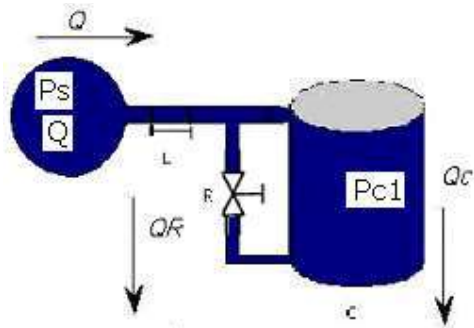


Figura 4.33 Sistema hidráulico equivalente Mixto RLC.

De igual manera que en los sistemas anteriores se realiza la construcción de este sistema en 20-sim, mismo que se muestra en la figura 4.34.

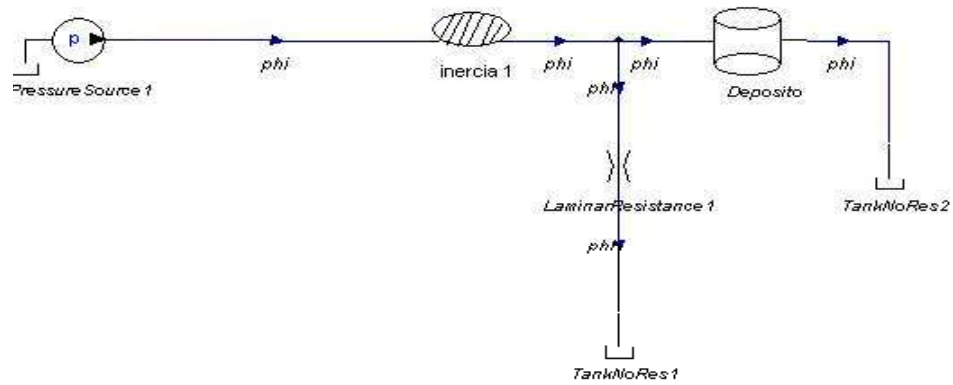


Figura 4.34 Sistema hidráulico mixto RLC realizado en 20-sim

Los valores que se utilizan son los siguientes:

$$P_s = 100Pa$$

$$C_{DEP} = 400g/s$$

$$Iner = 100Kg$$

$$C_{R1} = 50$$

La respuesta de este sistema se observa en la figura 4.35.

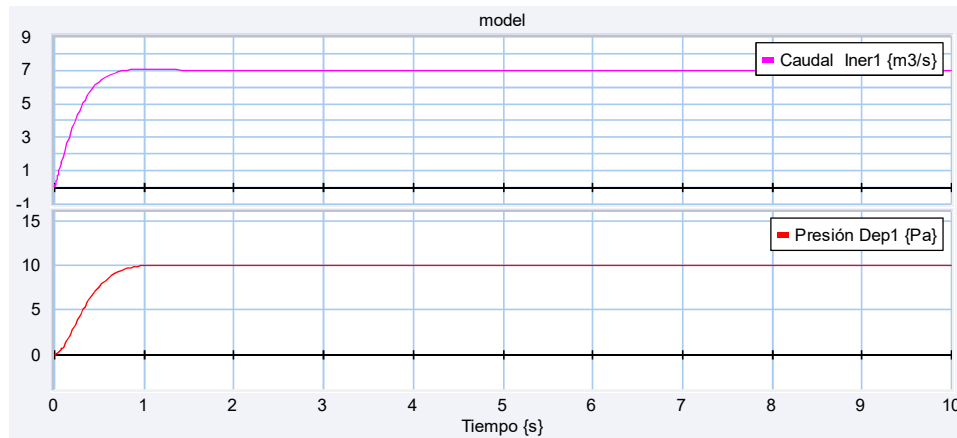


Figura 4.35 Respuesta del sistema hidráulico mixto RLC, el caudal en la inercia (rosa) y la presión en el deposito (naranja).

4.3.2 Simulación de un sistema mecánico a sistemas equivalentes

En esta sección se parte de un sistema mecánico original y se toman los elementos equivalentes para ser simulados en 20-sim. La figura 4.36 muestra un sistema mecánico con tres elementos dinámicos que se va a simular en 20-sim.

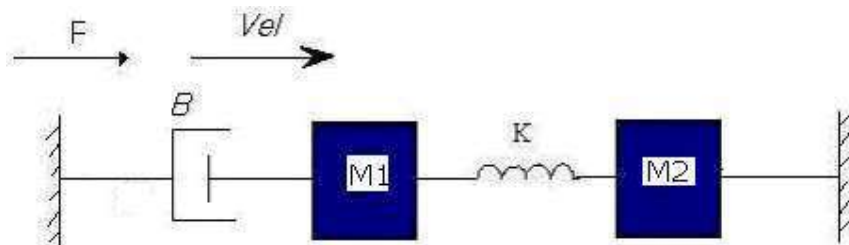


Figura 4.36 Sistema mecánico a simular en 20-sim.

De igual manera que en los sistemas anteriores se toman los elementos que componen el sistema y se realiza la construcción del sistema mecánico en 20-sim. La figura 4.37 muestra este sistema construido en 20-sim.

Figura 4.37 Sistema mecánico con tres elementos dinámicos construido en 20-sim.

Una vez que se tiene el sistema en 20-sim, se realiza la simulación en 20-sim y el comportamiento del mismo se muestra en la figura 4.38.

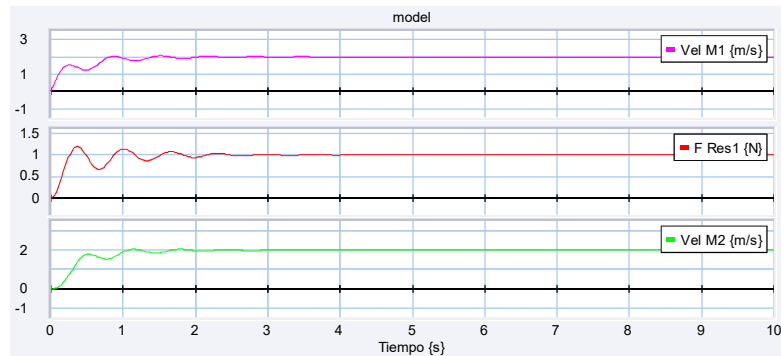


Figura 4.38 Respuesta del sistema mecánico con tres elementos dinámicos, la velocidad en el bloque de masa 1 (rosa) y la fuerza en el resorte (naranja), así como la velocidad en el bloque de masa 2 (verde).

Una vez que se ha simulado el sistema mecánico con tres elementos, se toman los elementos que participan en su equivalente en sistema eléctrico. El sistema eléctrico equivalente de tres elementos dinámicos se muestra en la figura 4.39.

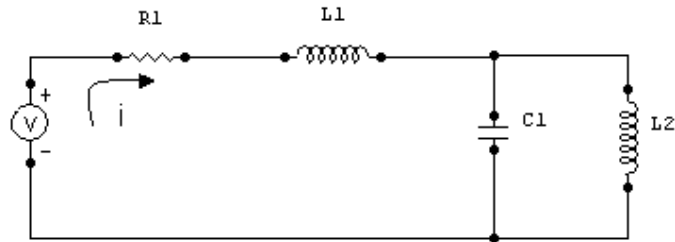


Figura 4.39 Sistema eléctrico equivalente con tres elementos dinámicos.

De igual manera que en los sistemas anteriores se construye el sistema equivalente en 20-sim. La figura 4.40 muestra el sistema equivalente con tres elementos dinámicos construido en 20-sim.

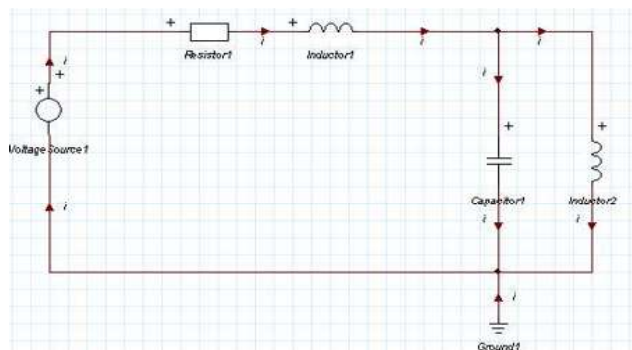


Figura 4.40 Sistema eléctrico equivalente con tres elementos dinámicos construido en 20-sim.

Una vez que se ha construido este sistema en 20-sim, se toman los siguientes valores para los elementos que lo componen.

$$R = 10\Omega$$

$$L_1 = L_2 = 100mH$$

$$C_1 = 500\mu F$$

Una vez que se insertan los valores se realiza la simulación. El comportamiento de los elementos dinámicos de este sistema se muestra en la figura 4.41.

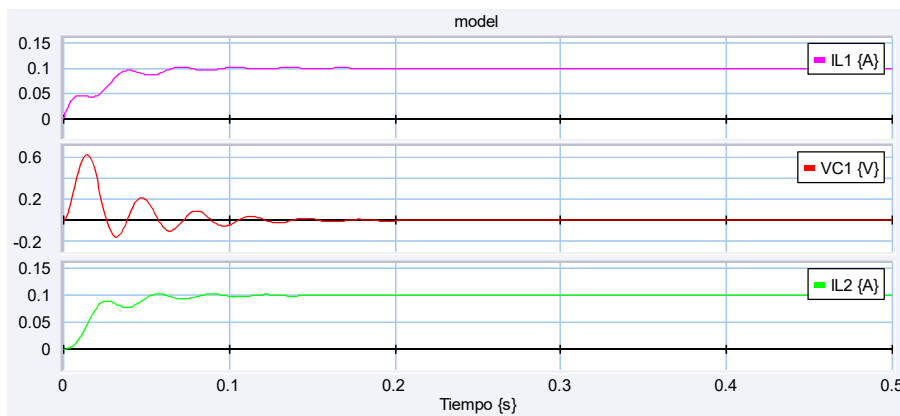


Figura 4.41 Respuesta del sistema eléctrico equivalente de tres elementos dinámicos, se observa la corriente en el inductor L1 (rosa), el voltaje en el capacitor (naranja) y la corriente en el inductor L2 (verde).

Ahora se toman los elementos los elementos equivalentes que participan en este sistema para formar el sistema hidráulico equivalente de tres elementos dinámicos, este sistema se muestra en la figura 4.42.

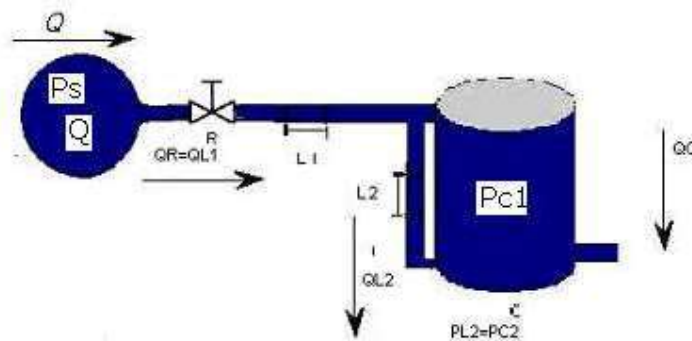


Figura 4.42 Sistema hidráulico equivalente de tres elementos dinámicos a simular en 20-sim.

Este sistema es construido en 20-sim, este mismo es mostrado en la figura 4.43. Los valores que toma este sistema son los siguientes:

$$P_S = 100\text{KPa}$$

$$I_1 = I_2 = 100\text{g}$$

$$C_{Dep} = 100\text{g/s}$$

$$C_R = 0.7$$

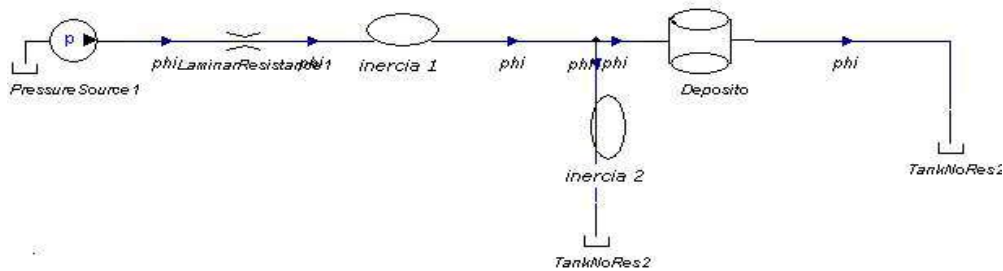


Figura 4.43 Sistema hidráulico equivalente de tres elementos dinámicos construido en 20-sim.

Una vez que se ha construido este sistema en 20-sim, se realiza la simulación del mismo. La figura 4.44 muestra la respuesta de estos tres elementos dinámicos en el dominio del tiempo.

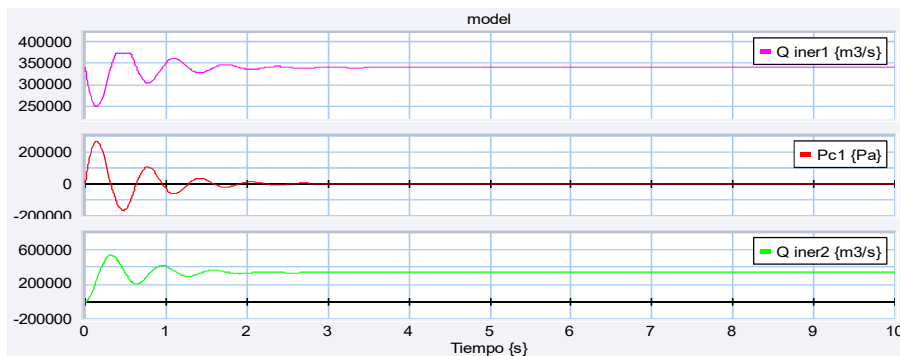


Figura 4.44 Respuesta del sistema hidráulico de tres elementos dinámicos, en rosa el caudal en la inercia uno, en naranja la presión del depósito y en verde el caudal en la inercia dos.

4.3.3 Simulación de sistema hidráulico a sistemas equivalentes

Ahora se parte de un sistema hidráulico original y se realiza a partir del mismo la simulación de su sistema equivalente en eléctrico y en mecánico. La figura 4.45 muestra un sistema hidráulico con dos obstrucciones y un depósito.

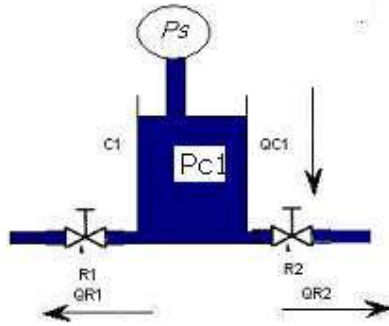


Figura 4.45 Sistema hidráulico sencillo a simular en 20-sim.

Como se observa este sistema tiene una bifurcación con dos obstrucciones precedidas de un depósito capacitor que recibe el flujo de una fuente de presión. Este sistema se construido en 20-sim se muestra en la figura 4.46.

Figura 4.46 Representación en 20-sim del sistema hidráulico sencillo.

Una vez que se insertan los valores y se realiza la simulación se tiene el comportamiento del tanque capacitor debido a que es el elemento dinámico que tiene el sistema. La figura 4.47 muestra el comportamiento de la presión en el tanque capacitor.

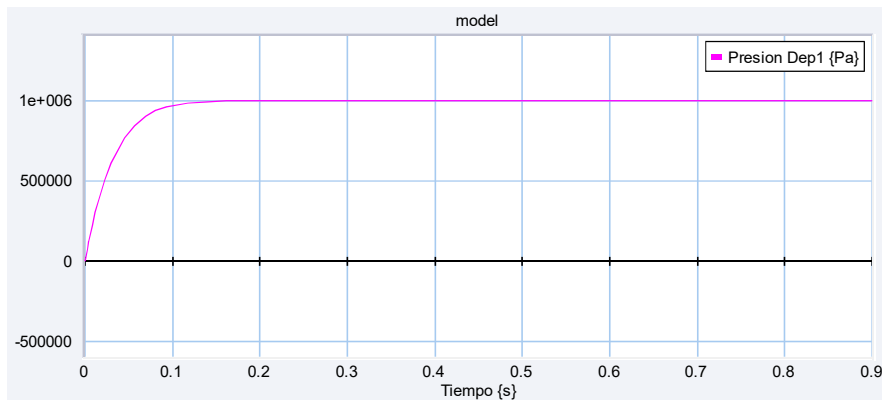


Figura 4.47 Comportamiento del tanque capacitor del sistema hidráulico sencillo.

Una vez que se ha realizado la simulación de este sistema, ahora se toman los elementos necesarios para simular su sistema equivalente en un sistema eléctrico. El sistema eléctrico equivalente sencillo se muestra en la figura 4.48.

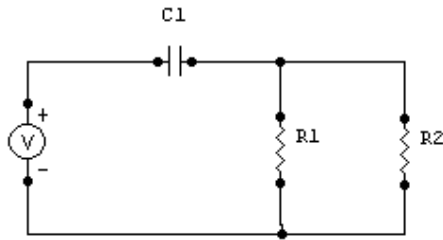


Figura 4.48. Sistema eléctrico equivalente sencillo a simular en 20-sim.

Este sistema se construye en el entorno de 20-sim, el cual se muestra en la figura 4.49.

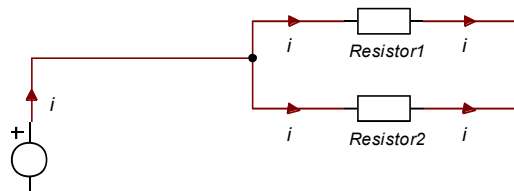


Figura 4.49 Sistema eléctrico equivalente sencillo construido en 20-sim.

Los valores para este sistema son los siguientes:

$$V = 3V$$

$$R_1 = R_2 = 10\Omega$$

$$C_1 = 100mF$$

Una vez que son insertados los valores, se realiza la simulación en la que se observa el comportamiento del capacitor debido a que es el elemento dinámico que tiene el sistema. La figura 4.50 muestra el comportamiento del voltaje en el capacitor.

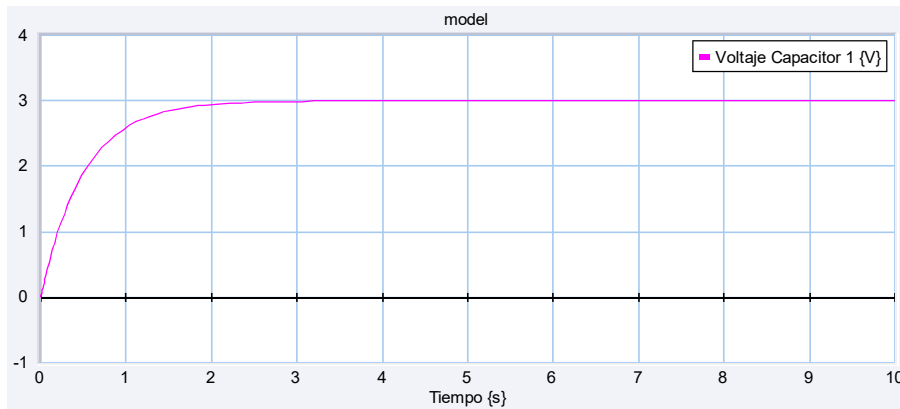


Figura 4.50 Respuesta del voltaje en el capacitor del sistema eléctrico equivalente sencillo.

Ahora se toman los elementos equivalente para construir el equivalente de este sistema en sistema mecánico. El sistema mecánico equivalente sencillo se muestra en la figura 4.51.

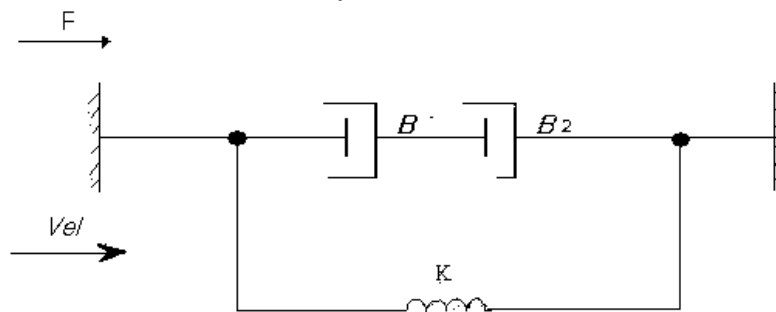


Figura 4.51 Sistema mecánico equivalente sencillo.

Este sistema se construye en 20-sim, el cual se muestra en la figura 4.52.

Figura 4.52 Sistema mecánico equivalente sencillo construido en 20-sim.

Ahora que se ha construido el sistema mecánico equivalente sencillo, se insertan los valores los cuales son los siguientes.

$$F = 4N$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 5 \frac{N \cdot \text{seg}}{m}$$

$$K = 10 \frac{N}{m}$$

Una vez que se han insertado los valores anteriores se realiza la simulación. La figura 4.53 muestra la fuerza en el resorte que es el elemento dinámico de este sistema.

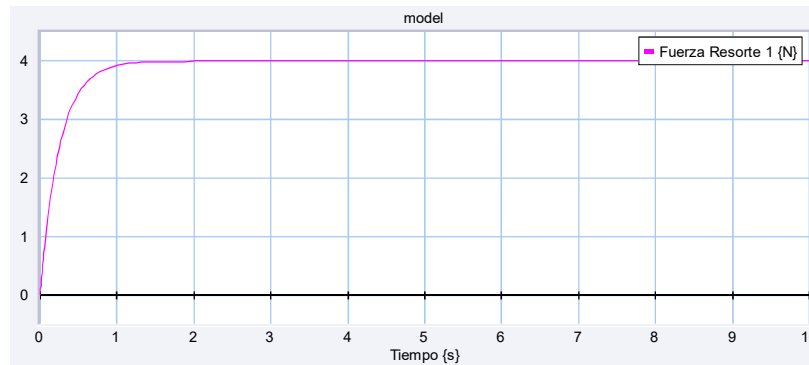


Figura 4.53 Respuesta de la fuerza en el resorte del sistema mecánico equivalente sencillo.

Como se observa en las figuras 4.47, 4.50 y 4.53 el comportamiento del elemento dinámico es exactamente el mismo en sus sistemas equivalentes. Ahora se realiza la simulación de un sistema hidráulico con dos depósitos en serie el cual se ilustra en la figura 4.54.

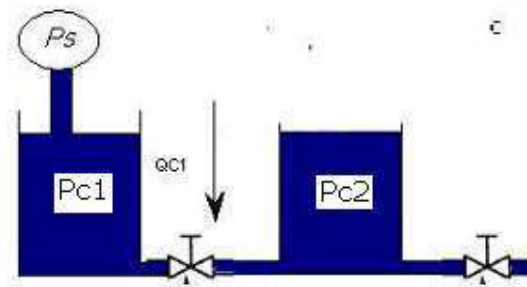


Figura 4.54 Sistema hidráulico con dos depósitos en serie a simular en 20-sim.

Para el caso de dos depósitos se tiene que se necesita que el elemento capacitor tenga un puerto de entrada y uno de salida. Utilizando el modelado de un capacitor eléctrico y realizando un cambio de dominio se obtiene el modelo esquemático del capacitor hidráulico con dos puertos, uno de entrada y uno de salida respectivamente. La figura 4.55 muestra el sistema construido en 20-sim, en este sistema aparece el modelo de capacitor hidráulico que se creó.

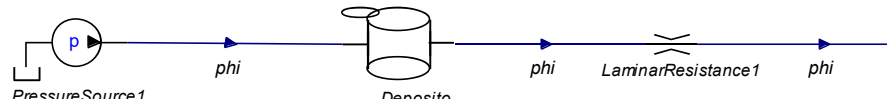


Figura 4.55 Sistema hidráulico con dos depósitos construido en 20-sim.

Para fines de simulación se omite una resistencia laminar debido a que sólo se representa el elemento con la suma de las dos resistencias en serie. Lo mismo sucede con elementos resistivos de este sistema tanto en eléctrico como en mecánico. La respuesta de los dos depósitos de este sistema se muestra en la figura 4.56.

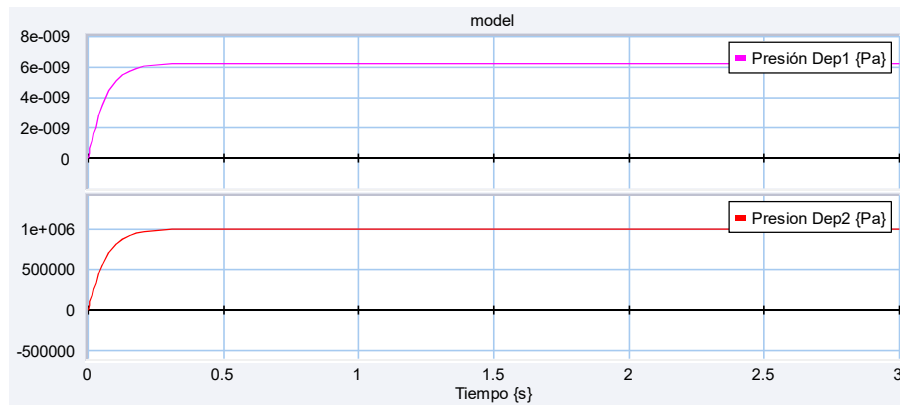


Figura 4.56 Respuesta del sistema hidráulico de dos depósitos, la presión en el deposito con entrada y salida (rosa) y la presión del deposito final (naranja).

Una vez realizada la simulación anterior de igual manera que con los sistemas anteriores se toman los elementos equivalentes de este sistema y se forma el sistema eléctrico equivalente de dos depósitos el cual se muestra en la figura 4.57.

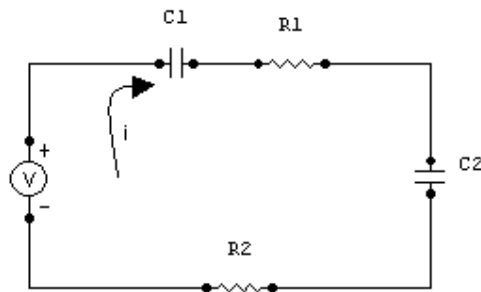


Figura 4.57 Sistema eléctrico equivalente de dos depósitos.

De manera similar se realiza la construcción del modelo en 20-sim, este se muestra en la figura 4.58. Para facilitar la simulación se omite la resistencia R_2 y se toma su equivalente a la suma de ambas resistencias.

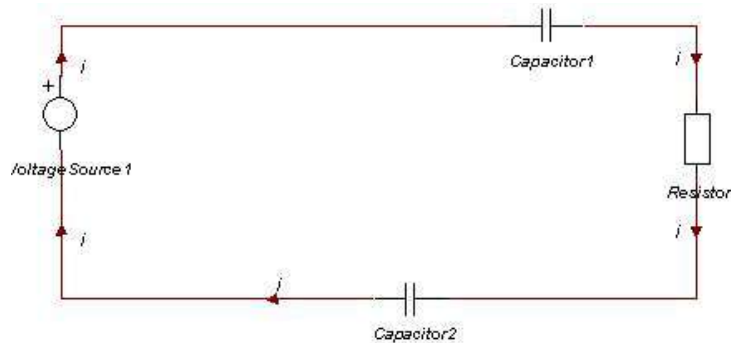


Figura 4.58 Sistema eléctrico equivalente de dos depósitos realizado en 20-sim.

Una vez que se ha realizado este sistema se insertan los valores, los cuales son los siguientes:

$$C_1 = 100mF$$

$$C_2 = 150mF$$

$$R_1 + R_2 = R = 10\Omega$$

$$V_1 = 3V$$

Una vez que el sistema tiene los valores de los elementos insertados, se realiza la simulación. La figura 4.59 muestra el comportamiento de los dos elementos dinámicos que son los capacitores.

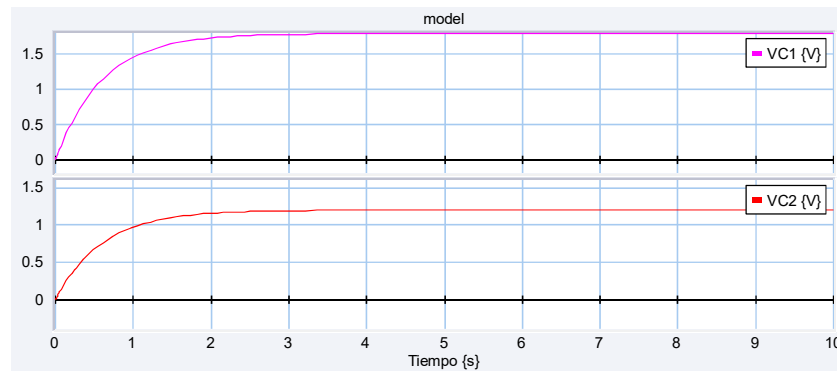


Figura 4.59 Comportamiento del sistema eléctrico equivalente de dos depósitos, el voltaje en el capacitor 1 (rosa) y el voltaje en el capacitor 2 (naranja).

Una vez que se ha realizado la simulación del sistema eléctrico equivalente de dos depósitos, se toman los elementos equivalentes que participan en este sistema y se forma el sistema mecánico equivalente de dos depósitos, este sistema se muestra en la figura 4.60.

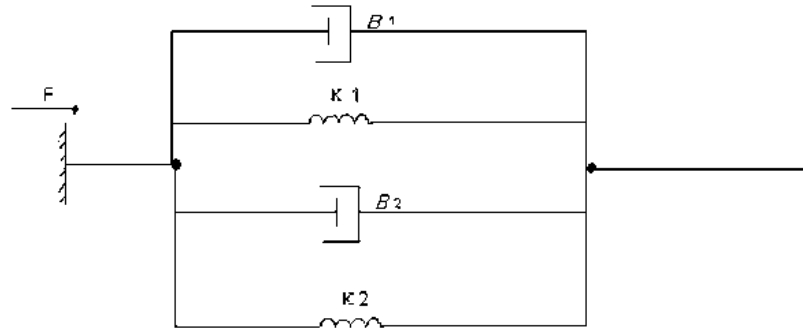


Figura 4.60 Sistema mecánico equivalente de dos depósitos a simular en 20-sim.

Para facilitar la simulación se toma un amortiguador solamente que equivale a la suma en serie de estos dos elementos. Este sistema construido en 20-sim se muestra en la figura 4.61.



Figura 4.61 Sistema mecánico equivalente de dos depósitos construido en 20-sim.

Para este sistema se toman los siguientes valores:

$$K_1 = 10 \frac{N}{mt}$$

$$K_2 = 20 \frac{N}{mt}$$

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta = 3 \frac{N * S}{mt}$$

Ahora que ya se tienen insertados los valores en 20-sim se realiza la simulación de este sistema. El comportamiento del mismo se muestra en la figura 4.62.

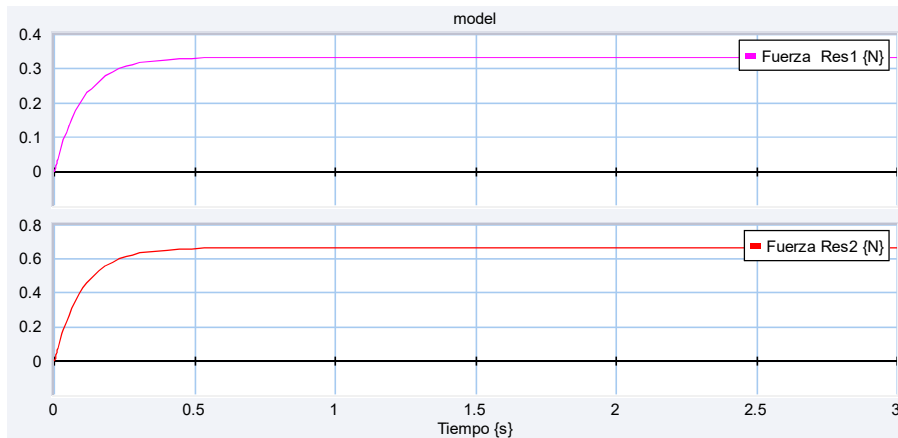


Figura 4.62 Respuesta del sistema mecánico equivalente de dos depósitos, se observa la fuerza en el resorte 1 (rosa) y la fuerza en el resorte 2 (naranja).

4.4 Simulación de algunos sistemas complejos

En esta sección se realiza la simulación de sistemas que contienen más elementos dinámicos, así como sistemas que tienen más de una rama. En este tipo de sistemas se tiene mayor número de gráficas y variables dinámicas que son de interés para conocer su comportamiento en el dominio del tiempo.

El primer sistema a simular es un sistema eléctrico que contiene cuatro elementos dinámicos, en el modelado se observa que su matriz de ecuaciones de estado es más grande y como son matrices cuadradas, se tiene que entre más elementos dinámicos tiene el sistema más dispersa va a ser la matriz de dicho sistema. El sistema eléctrico que se simula se muestra en la figura 4.63.

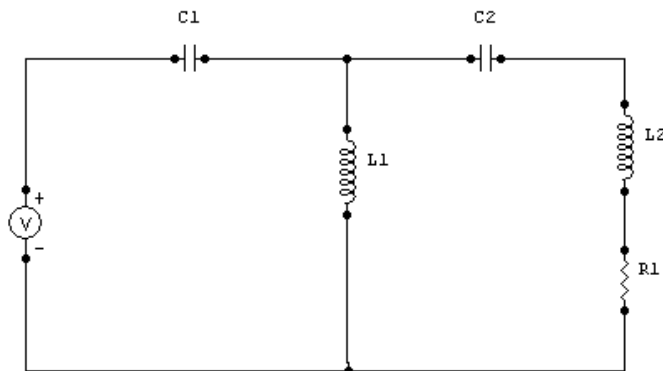


Figura 4.63 Sistema eléctrico de cuatro elementos dinámicos a simular en 20-sim.

Como en secciones anteriores se realiza la construcción del sistema en 20-sim, mismo que se muestra en la figura 4.64.

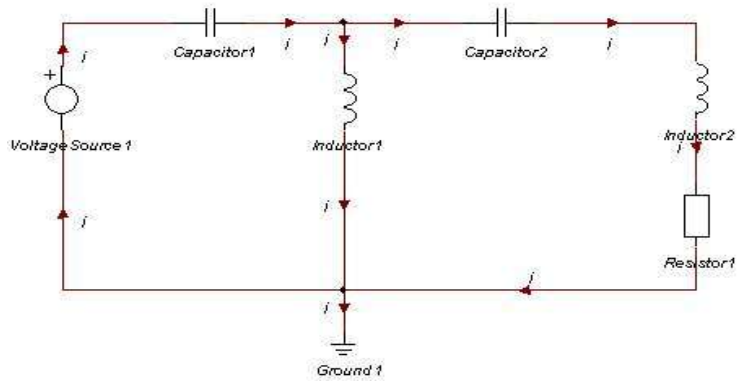


Figura 4.64 Sistema eléctrico de cuatro elementos dinámicos construido en 20-sim.

Los valores que se insertan en este sistema son:

$$C_1 = 950mF$$

$$C_2 = 1.1F$$

$$L_1 = 980mH$$

$$L_2 = 1.2H$$

$$R_1 = 3.5\Omega$$

De la misma manera que en las secciones anteriores se realiza la simulación una vez que se han insertado los valores antes mencionados. La figura 4.65 muestra la respuesta de este sistema en la cual se observan cuatro gráficas que corresponden a cada uno de los elementos dinámicos que participan en el mismo.

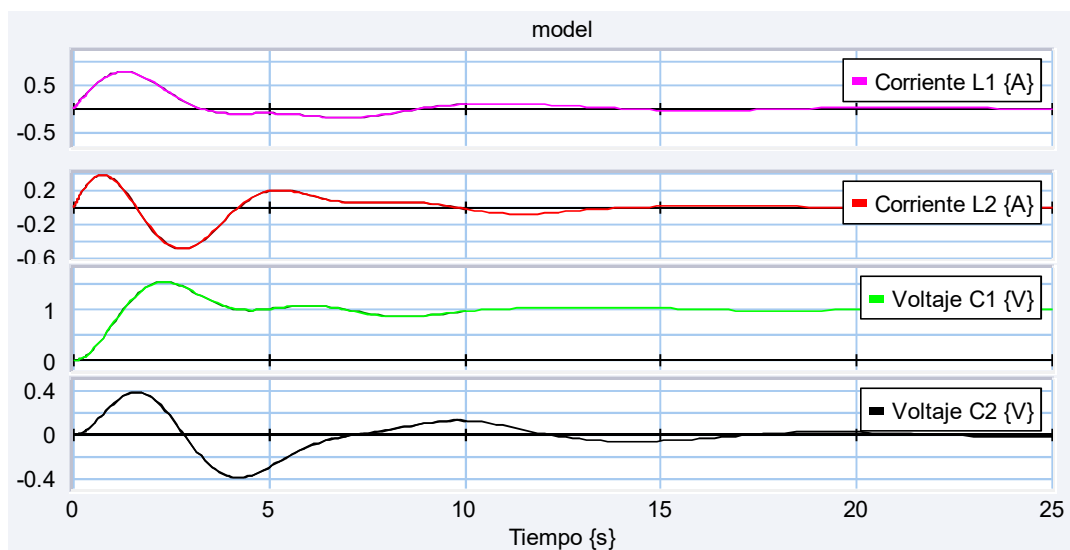


Figura 4.65 Respuesta del sistema eléctrico de cuatro elementos dinámicos . La corrientes en inductores 1 y 2 (rosa y naranja). El voltaje en los capacitores 1 y 2 (verde y negro).

De igual manera que en los sistemas anteriores se toman los elementos equivalentes para un sistema mecánico equivalente con 4 elementos dinámicos. El sistema mecánico equivalente se muestra en la figura 4.66.

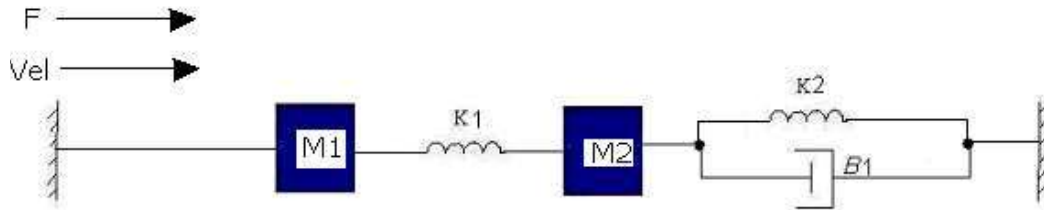


Figura 4.66 Sistema mecánico equivalente de cuatro elementos dinámicos a simular en 20-sim.

Este sistema se construye en 20-sim, mismo que se muestra en la figura 4.67.

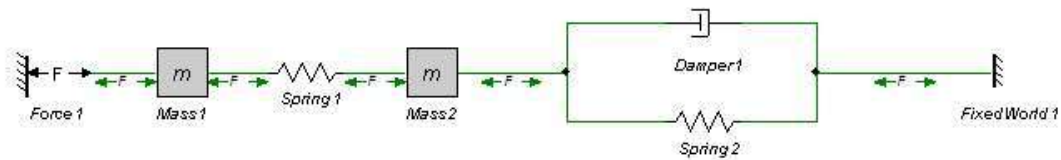


Figura 4.67 Sistema mecánico equivalente de cuatro elementos dinámicos construido en 20-sim.

Los valores que se utilizan en este sistema son:

$$m_1 = 100g$$

$$m_2 = 100g$$

$$K_1 = 10 \frac{N}{mt}$$

$$K_2 = 15 \frac{N}{mt}$$

$$\beta_1 = 2 \frac{N * mt}{S}$$

Después de haber insertado los valores en el sistema, se realiza la simulación del mismo. La figura 4.68 muestra el comportamiento de este sistema, como son cuatro elementos dinámicos se muestran cuatro graficas con sus respectivas respuestas en el dominio del tiempo.

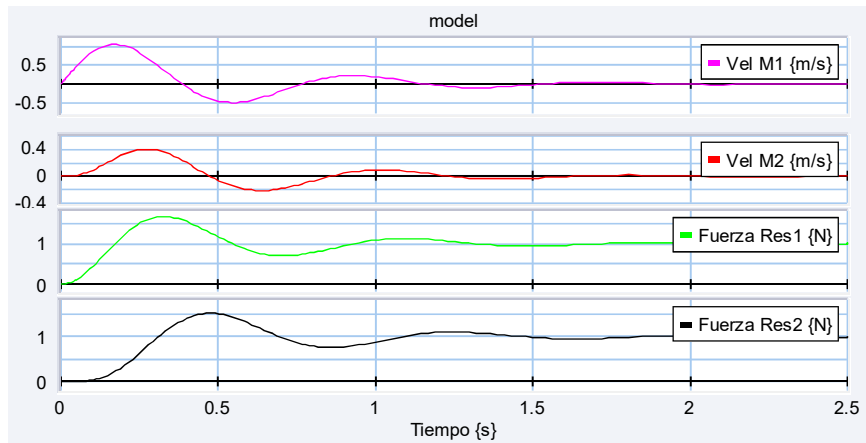


Figura 4.68 Respuesta del sistema mecánico equivalente de cuatro elementos dinámicos.

Ahora se realiza la simulación de este sistema equivalente, pero ahora en sistema hidráulico. Este sistema se muestra en la figura 4.69.

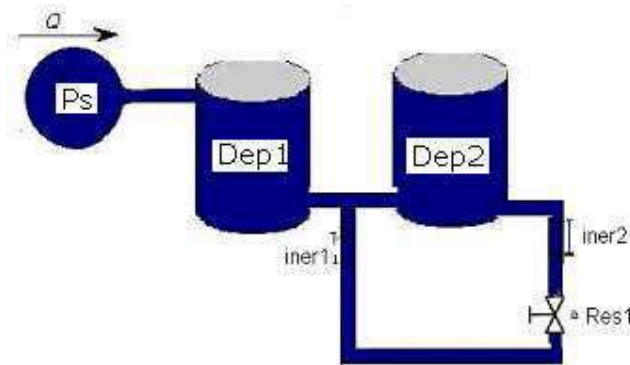


Figura 4.69 Sistema hidráulico equivalente de cuatro elementos dinámicos.

Como en los sistemas físicos anteriores, se realiza la construcción de este sistema en 20-sim, mismo que es mostrado en la figura 4.70.

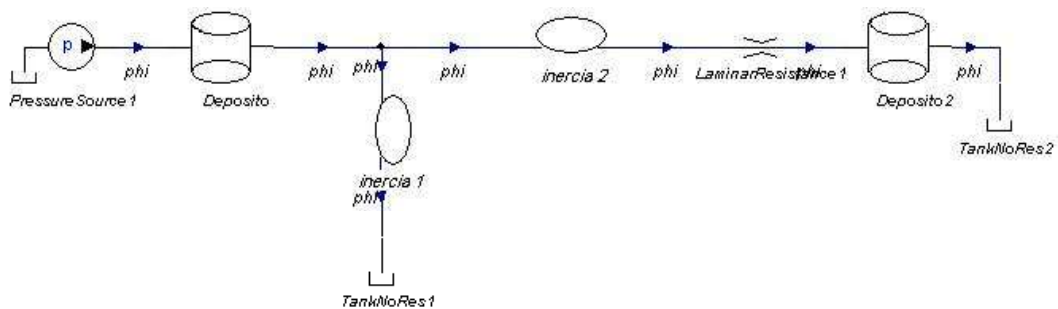


Figura 4.70 Sistema hidráulico equivalente de cuatro elementos dinámicos construido en 20-sim

Una vez que se ha construido este sistema en 20-sim, se realiza el proceso de simulación, los valores que se insertan en este sistema son:

$$P_s = 10Pa$$

$$C_{DEP1} = 330g/s$$

$$C_{DEP2} = 600g/s$$

$$I_1 = 100g$$

$$I_2 = 600g$$

$$C_{R1} = 0.5$$

La respuesta de este sistema se muestra en la figura 4.71.

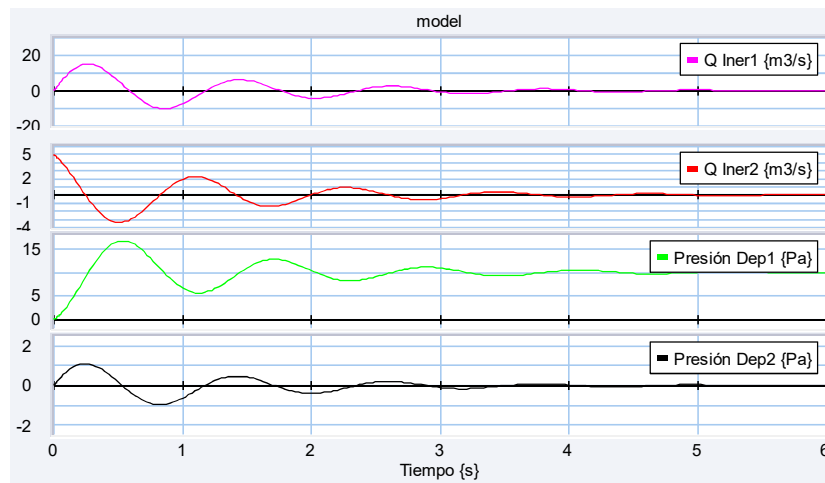


Figura 4.71 Respuesta del sistema hidráulico equivalente de cuatro elementos dinámicos, se muestran los caudal en las inercias uno y dos (rosa y naranja) y la presión en los depósitos uno y dos (verde y negro).

El siguiente sistema complejo consiste en un sistema eléctrico con tres mallas y cuatro elementos dinámicos, de igual manera que en el sistema anterior se tiene que el modelado de este sistema desarrollado en el capítulo anterior también entrega una matriz más grande y dispersa. La figura 4.72 muestra este sistema eléctrico a simular en 20-sim.

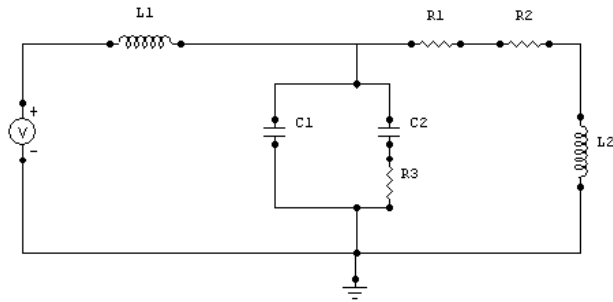


Figura 4.72 Sistema eléctrico de tres mallas y cuatro elementos dinámicos a simular en 20-sim.

De la misma manera como en los sistemas anteriores se realiza la construcción del mismo en 20-sim. Este sistema se muestra en la figura 4.73.

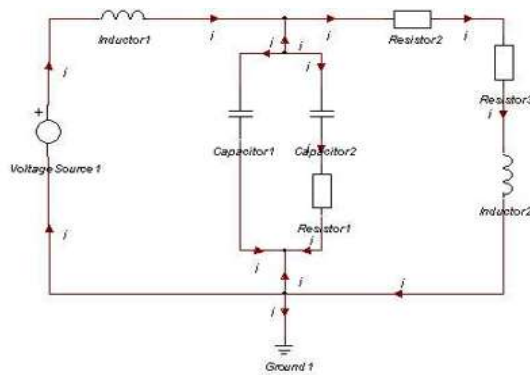


Figura 4.73 Sistema eléctrico de tres mallas y cuatro elementos dinámicos construido en 20-sim.

Una vez que se ha construido este sistema en 20-sim, se insertan los valores con los que se simula, estos son:

$$\begin{array}{ll}
 L_1 = 3.8H & R_1 = 3\Omega \\
 L_2 = 6.2H & R_2 = 6\Omega \\
 C_1 = 900mF & R_3 = 8\Omega \\
 C_2 = 750mF & V = 1V
 \end{array}$$

Ahora que se han insertado los valores del sistema eléctrico de tres mallas y cuatro elementos dinámicos se realiza la simulación de igual manera que en las simulaciones anteriores. La figura 4.74 muestra las respuestas del sistema eléctrico de tres mallas y cuatro elementos dinámicos.

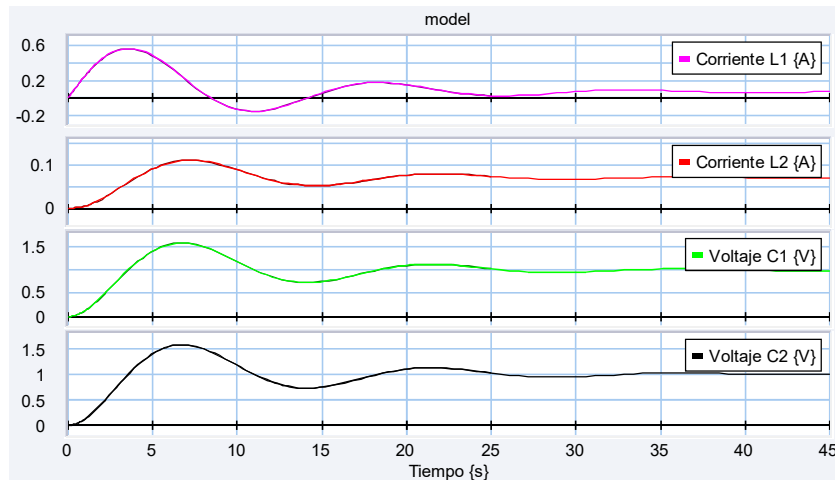


Figura 4.74 Respuesta del sistema eléctrico de tres mallas y cuatro elementos dinámicos, en rosa y naranja corrientes en inductor uno y dos; verde y negro voltajes en capacitor uno y dos.

Una vez que se ha realizado la simulación del sistema eléctrico de tres mallas y cuatro elementos dinámicos, se toman los elementos equivalentes de dicho sistema y se realiza la simulación del sistema mecánico equivalente de tres mallas y cuatro elementos dinámicos. El sistema mecánico equivalente de tres mallas y cuatro elementos dinámicos se muestra en la figura 4.75.

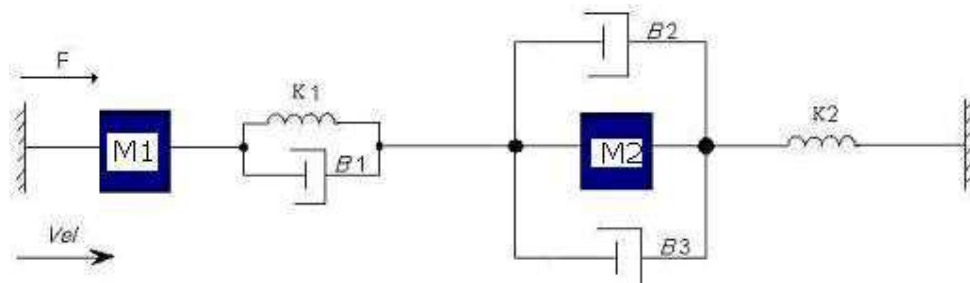


Figura 4.75 Sistema mecánico equivalente de tres mallas y cuatro elementos dinámicos a simular en 20-sim.

Este sistema es construido en 20-sim, mismo que se muestra en la figura 4.76.

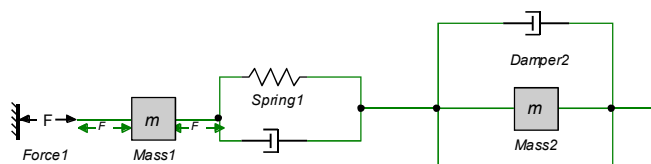


Figura 4.76 Sistema mecánico equivalente de tres mallas y cuatro elementos dinámicos construido en 20-sim.

Después de que el sistema mecánico equivalente de tres mallas y tres elementos dinámicos se ha construido en 20-sim, se insertan los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 50\text{Kg} & \beta_1 &= 20 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{mt}} \\
 m_2 &= 35\text{Kg} & \beta_2 &= 45 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{mt}} \\
 K_1 &= 7 \frac{\text{N}}{\text{mt}} & \beta_3 &= 32 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{mt}} \\
 K_2 &= 15 \frac{\text{N}}{\text{mt}} & F &= 1\text{N}
 \end{aligned}$$

Ahora que se han insertado los valores anteriores al sistema se realiza la simulación del mismo en 20-sim. La respuesta de este sistema se observa en la figura 4.77.

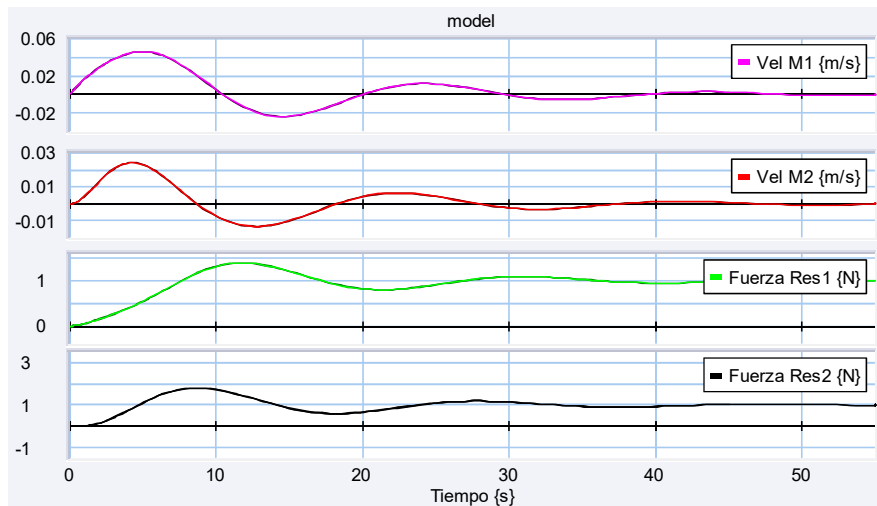


Figura 4.77 Respuesta del sistema mecánico equivalente de tres mallas y cuatro elementos dinámicos, en rosa y naranja la velocidad de los bloques de masa uno y dos; de verde y negro la fuerza en los resortes uno y dos.

Finalmente se toman los elementos equivalentes que participan en este sistema y se construye el sistema hidráulico equivalente de tres mallas y cuatro elementos dinámicos, mismo que es mostrado en la figura 4.78.

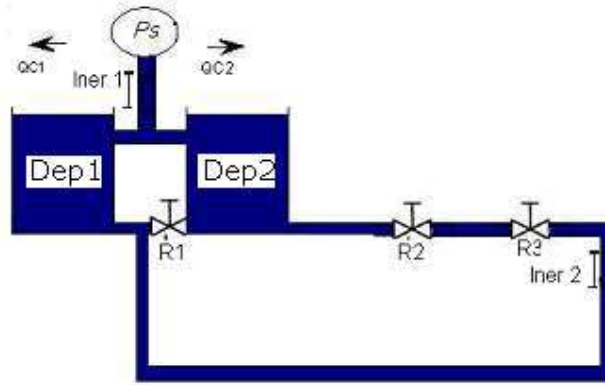


Figura 4.78 Sistema hidráulico equivalente de tres mallas y cuatro elementos dinámicos.

Este sistema se construye en 20-sim, este sistema se muestra en la figura 4.79, para facilitar la simulación sólo se inserta una resistencia laminar que equivale a la suma de las dos resistencias laminares en serie.

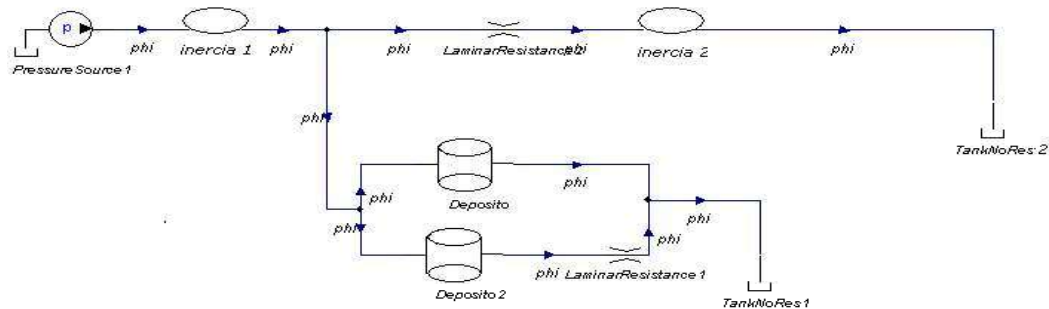


Figura 4.79 Sistema hidráulico equivalente de tres mallas y cuatro elementos dinámicos construido en 20-sim.

Ahora que se ha construido este sistema en 20-sim, se realiza el proceso de simulación utilizando los siguientes valores.

$$\begin{aligned}
 Ps &= 10Pa & Dep2 &= 900 \frac{g}{seg} \\
 Iner1 &= 300g & C_{R1} &= 0.2 \\
 Iner2 &= 100g & C_{R2} + C_{R3} &= 0.6 \\
 Dep1 &= 1.2 \frac{Kg}{se}
 \end{aligned}$$

La respuesta de este sistema se muestra en la figura 4.80.

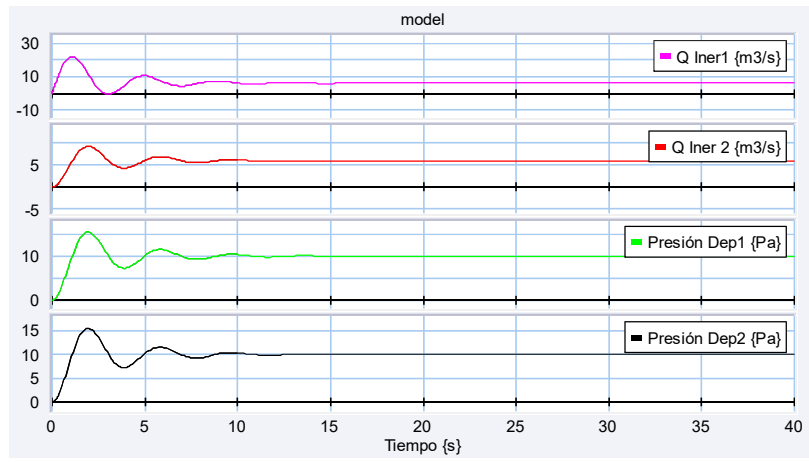


Figura 4.80 Respuesta del SHE de tres mallas y cuatro elementos dinámicos.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo se presentan las conclusiones y recomendaciones de este trabajo.

5.1 Conclusiones

Después de que se ha fundamentado el marco teórico se puede concluir de que existen comportamientos generalizados en los sistemas físicos, esto se observa mediante la similitud de ecuaciones y características de los elementos que participan en estos sistemas físicos.

Se llega también a la conclusión de que los sistemas físicos que se analizan y modelan son equivalentes, debido a que se toman sus elementos generalizados y en el proceso de modelado se llega a su ecuación matricial característica en variables de estado.

Al comparar las ecuaciones de un sistema físico que se ha modelado en sistema eléctrico, transformado a sistema mecánico y a sistema hidráulico se puede observar la similitud de las mismas, se puede ver como los elementos resistivos, de inercia y de capacitancia quedan en la misma posición en la matriz A de estas ecuaciones de estado, de igual manera en la matriz de entrada B se observa como intervienen los mismos elementos de tal modo que el comportamiento de estos sistemas físicos sea el mismo.

Al realizar el proceso de simulación se puede concluir que efectivamente los sistemas físicos que se proponen se comportan de la misma manera y esto se observa al realizar la comparativa de una respuesta de un sistema físico inicial con las respuestas respectivas de sus sistemas equivalentes y con esto se cumple uno de los objetivos principales de este trabajo que es llegar a la descripción de sistema equivalentes y la comprobación de los mismos mediante un proceso de simulación.

Los sistemas físicos equivalentes son simulados en 20-sim. Este paquete computacional es muy versátil debido a que se pueden simular sistemas eléctricos, mecánicos, hidráulicos y térmicos; así como sistemas físicos con la técnica de Bond Graph, la metodología de Bond Graph consiste en una representación gráfica de un sistema dinámico donde una colección de componentes interactúan unos con otros a través de puertos de energía. Estos componentes colocados en el sistema describen como fluye la potencia a través del sistema. La representación de los elementos de los sistemas físicos en 20-sim, depende de su ecuación característica, pero también es posible crear elementos con la causalidad deseada, tanto su ecuación, tipo de sistema, puertos de salida y entrada; así como su icono que lo simboliza.

Finalmente se cumple con el objetivo y justificación de este trabajo porque se propone el modelado y la simulación de estos sistemas equivalentes, así como un procedimiento definido para realizar las analogías e implementación de los mismos. La simulación de estos sistemas permite observar que el trabajo va por buen camino. El software 20-sim, es un paquete de simulación de sistemas físicos muy versátil que permite realizar diversos tipos de simulaciones y verificar los resultados de las mismas en el dominio del tiempo.

Al proponer el modelado y simulación de los sistemas físicos equivalentes se logra dar un enfoque distinto en la comprensión de estos sistemas físicos, se comprueba que efectivamente se puede observar un sistema mecánico o hidráulico en el enfoque de un sistema eléctrico o viceversa. Esto se puede aplicar en el aspecto didáctico de tal modo que se facilite la comprensión del comportamiento de un sistema físico, también al darle un enfoque distinto a la comprensión de los sistemas físicos permite generar ideas para la solución problemas físicos aplicables de manera práctica en la vida cotidiana.

5.2 Recomendaciones

Es muy importante mencionar que la respuesta de los sistemas radica en sus parámetros y dinámicas de los sistemas, se observa que en los procesos de simulación algunas gráficas están acotadas a tiempos distintos y valores distintos de los elementos, esto se debe a la causalidad de los sistemas, así como a los comportamientos particulares de cada uno de los elementos. Se menciona lo anterior para aclarar la duda sobre la equivalencia de estos sistemas debido a que se manejan variables y elementos distintos, pero con comportamientos generalizados.

Bibliografía

1. Dinámica de sistemas y control.

Eronini-Umez-Eronini.

Primera edición.

Editorial Thomson Learning.

2. Sistemas de control para ingeniería.

Norman S. Nise.

Tercera edición.

Editorial Cecsca.

3. Dinámica de sistemas.

Francisco J. Rodríguez Ramírez.

UNAM Facultad de ingeniería.

Primera edición.

Editorial Trillas.

4. Teoría de control moderna

Katsuhimo Ogata.

Tercera edición.

Editorial Prentice Hall.

5. Ingeniería de control analógico y digital

Rina Navarro

Primera edición.

Editorial McGraw Hill Interamericana.

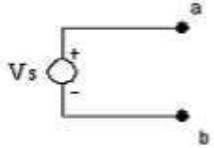
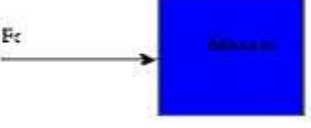
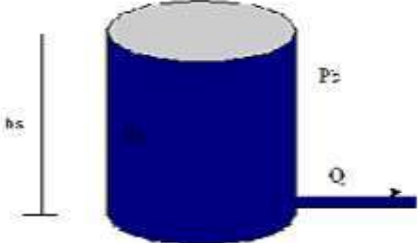
6. Documentación de 20-sim.

www.20sim.com

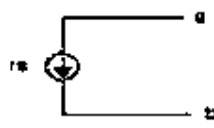
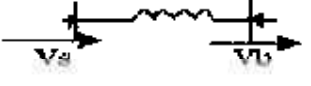
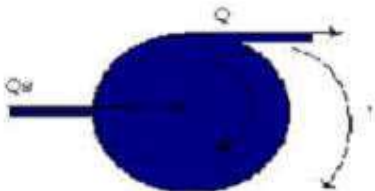
Apéndice A Algunos Modelos Físicos

Los elementos generalizados activos y pasivos en los sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos, se presentan a continuación.



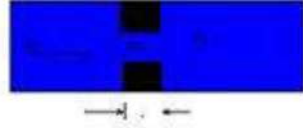
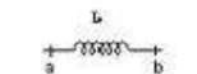
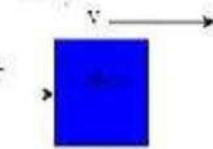
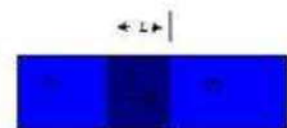
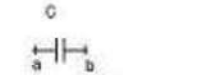
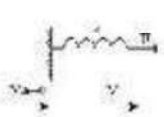
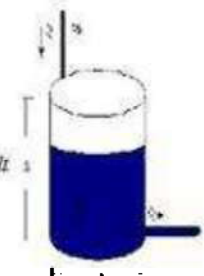
Fuentes de esfuerzo

Sistema	Esquema	Ecuación
Eléctrico		$V_s = (V_a - V_b)$ $S_e = V_s$
Mecánico Traslacional		$F = F_s$ $S_e = F_s$
Hidráulico		$P_s = (P_a - P_i)$ $P_s = \rho g h_s$ $S_e = P_s$

Fuentes de Flujo

Sistema	Esquema	Ecuación
Eléctrico		$i_s = (i_a - i_b)$ $S_f = i_s$
Mecánico Traslacional		$V_a - V_b$ $S_f = V_s$
Hidráulico		$w = \text{Desplacado} = C t_s$ $Q = Q_s$ $S_f = Q_s = f_D(w)$

Elementos pasivos

	Eléctrico	Mecánico	Hidráulico
Resistencia	 $(V_a - V_b) = R(i_a - i_b)$ $R = \frac{(V_a - V_b)}{(i_a - i_b)}$	 $F = \beta v_{rel}$ $F = f_{Magn}(V_{rel})$ $V_{rel} = V_{final} - V_{inicial}$ $R \cong \beta$	 $Q = C^* (P_a - P_b)^{\frac{1}{2}}$ $R = f_R(Q)$
Inercia	 $(i_a - i_b) = \frac{1}{L} \int_0^t (V_a - V_b) dt$ $(V_a - V_b) = L \frac{d}{dt} (i_a - i_b)$ $l = L$	 $V = \frac{1}{m} \int_0^t F dt$ $F = m \frac{d}{dt} V$ $F = ma$ $l = m$	 $Q = \frac{A^2}{\rho L} \int_0^t (P_a - P_b) dt$ $l = \frac{\rho L}{A}$
Capacitancia	 $(V_a - V_b) = \frac{1}{C} \int_0^t (i_a - i_b) dt$ $C = C$	 $F = K \int_0^t v dt$ $C = \frac{1}{K}$	 $(P_a - P_b) = \frac{\rho g}{A} \int_0^t Q dt$ $C = \frac{A}{\rho g}$