



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

**“MODELADO DEL BARRIDO DE BAJA FRECUENCIA DE
UN TRANSFORMADOR TRIFÁSICO DE TRES PIERNAS”**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO ELECTRICISTA**

**PRESENTA:
SERGIO NIETO MENDOZA**

**ASESOR:
DR. CARLOS PÉREZ ROJAS**

**MORELIA, MICHOACÁN
NOVIEMBRE 2010**



AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Carlos Pérez Rojas por su valiosa comprensión y la forma especial de motivarme para la realización del presente trabajo.

Al M.C. José Alberto Ávalos González por su apoyo en el transcurso de mi preparación académica universitaria.

Al Dr. Juan Carlos Silva Chávez por su generosidad en cuanto a orientaciones académicas otorgadas.

Al Ing. Aurelio Mendoza Contreras por todo el apoyo moral y académico a lo largo de mi vida pues ha sido un ejemplo a seguir en mi familia.

A la M.I. Sigridt García Martínez por todas las asesorías y tutorías a través de mi carrera, pues han dado frutos importantes en mi desarrollo.

A la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Con mucho amor y gran respeto para:

Victoria Isabel Mendoza Contreras, **mi Madre**

Sergio Nieto Arréz, **mi Padre**

Cristina Nieto Mendoza, **mi Hermana**

Y con gratitud:

A mi familia, amigos, compañeros y maestros que de alguna u otra forma intervinieron en la elaboración de este trabajo brindándome orientación y apoyo.

RESUMEN

El modelado de cualquier sistema implica que sean representados la mayor cantidad de parámetros que contenga; entre más parámetros se puedan modelar, más se acerca al modelo real del sistema.

La representación gráfica de un transformador en un papel como un circuito magnético, es una tarea difícil y hay diversas formas de hacerlo, depende, como se dijo, de la cantidad de parámetros que se puedan incluir en el modelo, sin embargo en este trabajo se contempla el modelo que se basa en parámetros físicos de los cuales pueda ser fácil obtener su valor para utilizarlos en la solución del propio sistema; ésta es una buena ventaja comparada con modelos que incluyen otro tipo de parámetros para representar de alguna manera la no linealidad del material del núcleo del transformador.

La representación de la no linealidad del material por la saturación magnética del mismo se hace mediante la función arctotangente que permite representarla con bastante exactitud; la curva se determina por: la intensidad de campo magnético, la densidad de flujo magnético y la permeabilidad propia del material (pendiente de la curva), y se le conoce como curva H-B o de magnetización. Al obtener una aproximación de esta curva, mediante la prueba necesaria, se pueden hacer cálculos de cualquiera de sus parámetros, siempre y cuando se conozca la permeabilidad del material.

Obteniendo la permeabilidad podemos resolver el sistema modelado del transformador basado en reluctancias pues éstas sólo dependen de la permeabilidad y de dos parámetros físicos, la longitud y el área transversal; conociendo el comportamiento del sistema entonces se procede a realizar el barrido en baja frecuencia simulando el sistema bajo varias frecuencias de operación; esta simulación se hará mediante el software conocido como MATLAB para facilitar el cálculo y optimizar el tiempo de cómputo para la visualización de los resultados; se usa el circuito RL para ayudar a comprender de mejor forma el comportamiento del transformador trifásico al variar la frecuencia.

Contenido

RESUMEN.....	v
LISTA DE SÍMBOLOS Y ABREVIACIONES.....	ix
LISTA DE FIGURAS.....	x
LISTA DE TABLAS.....	xiii
Capítulo 1 Introducción.....	1
1.1 Introducción general.....	1
1.2 Objetivo.....	7
1.3 Justificación.....	7
1.4 Metodología.....	8
1.5 Contenido de la tesis.....	9
Capítulo 2 Conceptos generales.....	11
2.1 Propiedades de los materiales ferromagnéticos.....	11
2.2 Carga eléctrica.....	13
2.3 El campo magnético y su utilización.....	14
2.4 Producción de un campo magnético.....	15
2.5 Análisis de circuitos ferromagnéticos.....	22
2.6 Enlaces de flujo.....	24
2.7 Excitación en corriente alterna.....	25
2.8 Transformador eléctrico monofásico.....	30

2.8.1	Introducción	30
2.8.2	Estructura y construcción de un transformador	30
2.8.3	Relación de transformación	33
2.8.4	Circuito equivalente del transformador	35
2.9	Obtención de parámetros del transformador	38
2.9.1	Prueba de corto circuito	40
2.9.2	Prueba de circuito abierto	41
2.10	Transformador eléctrico trifásico	42
2.10.1	Introducción	42
2.10.2	Transformadores en circuitos trifásicos	43
2.11	Medición en por unidad	46
2.12	Respuesta en frecuencia	48
2.12.1	Introducción	48
2.12.2	Análisis de respuesta frecuencia	48
Capítulo 3 Modelado del transformador trifásico de tres columnas para		
estudios de barrido de respuesta en baja frecuencia.....		53
3.1	Introducción.....	53
3.2	Modelo del transformador trifásico	54
3.3	Característica de saturación del transformador	63
3.4	Datos para simulación	65

Capítulo 4 Simulaciones y resultados	68
4.1 Introducción	68
4.2 Sistema RL monofásico	69
4.3 Simulación y resultados del sistema RL monofásico	74
4.4 Modelo algebraico-diferencial del transformador trifásico de tres piernas, simulación y resultados.....	88
4.5 Circuito RL del transformador trifásico en función de la velocidad	
angular, simulación y resultados	91
Capítulo 5 Conclusiones.....	95
5.1 Conclusiones generales	95
BIBLIOGRAFÍA.....	98

LISTA DE SÍMBOLOS Y ABREVIACIONES

F	Fuerza electrostática.
q	Carga eléctrica.
d	Distancia.
k	Constante de proporcionalidad.
H	Intensidad de campo magnético.
J	Densidad de corriente.
c	Contorno cerrado.
S	Superficie.
I_{net}	Corriente neta de un conductor.
l_c	Longitud media del núcleo.
N	Número de vueltas.
i	Corriente.
B	Densidad de flujo magnético.
μ	Permeabilidad del material.
μ_0	Permeabilidad del aire.
μ_r	Permeabilidad relativa.
F_{mm}	Fuerza magnetomotriz.
φ	Flujo magnético.
Wb	Webber.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Acomodo de los dominios magnéticos de un material inmerso.....	
en un campo magnético creciente.	12
Figura 2.2 Circuito magnético simple.	17
Figura 2.3 Comparación entre circuitos magnéticos y circuitos eléctricos.	21
Figura 2.4 Estructura magnética de contorno uniforme.....	23
Figura 2.5 Distribución del flujo dentro de una estructura magnética.	24
Figura 2.6 Curva de histéresis.....	29
Figura 2.7 Representación de las estructuras de transformadores monofásicos ..	32
Figura 2.8 Flujos mutuos y de dispersión en un transformador.....	36
Figura 2.9 Circuito equivalente T de un transformador monofásico.	37
Figura 2.10 Circuito equivalente simplificado (rama de magnetización	
lado primario).....	38
Figura 2.11 Conexiones comunes para transformadores.....	43
Figura 2.12 Transformador trifásico con devanados consecutivos.....	
en sus piernas.	45
Figura 2.13 Transformador trifásico con devanados concéntricos	
en sus piernas	45
Figura 2.14 Banco de transformador trifásico.....	46
Figura 2.15 Sistemas con funciones de transferencias $H(s)$ y $H(j\omega)$	52

Figura 3.1 Representación del transformador trifásico de tres columnas	
con dos devanados por fase	55
Figura 3.2 Circuito equivalente eléctrico del transformador trifásico	
de tres columnas	56
Figura 3.3 Circuito equivalente magnético del transformador trifásico	
de tres columnas.	58
Figura 3.4 Mallas del circuito considerando un flujo de malla	
por fuente magnetomotriz	59
Figura 3.5 Curvas de saturación real y aproximada	64
Figura 3.6 Dimensiones físicas del núcleo magnético para el transformador	
trifásico de tres columnas	66
Figura 4.1 Circuito RL con alimentación senoidal	69
Figura 4.2 Gráficas de voltaje y corriente del circuito RL.	75
Figura 4.3 Vista del defasamiento entre el v e i	76
Figura 4.4 Corriente ante el incremento de frecuencia.....	77
Figura 4.5 Corriente del circuito RL a 10 Hz	77
Figura 4.6 Corriente del sistema una frecuencia de 50 Hz.....	78
Figura 4.7 Vista de la corriente a una frecuencia de 100 Hz.....	79
Figura 4.8 Corriente del circuito RL con frecuencia de 150 Hz.....	79
Figura 4.9 Gráfica del voltaje en el circuito RL con variación	
de frecuencia de 10-150 Hz.....	80

Figura 4.10 Corriente del circuito RL con $R=1K\Omega$ frecuencia de 10 a 150 Hz.....	81
Figura 4.11 Corriente del sistema RL con $R=10K\Omega$, frecuencias	
de 10, 50, 100 y 150 Hz	82
Figura 4.12 Corriente de corto circuito en la carga con $R=10\ \Omega$	83
Figura 4.13 Gráfica de la corriente de corto circuito con $R=1\Omega$	84
Figura 4.14 Corriente de corto circuito una carga $R=0.01\Omega$	85
Figura 4.15 Circuito con poca y con mucha carga resistiva	87
Figura 4.16 Corrientes ABC y abc del modelo completo del transformador	89
Figura 4.17 Intensidad de campo magnético y Densidad flujo magnético.....	90
Figura 4.18 Corriente ABC del transformador equivalente.....	93

LISTA DE TABLAS

Tabla 2.1 Analogía entre las variables de los circuitos eléctricos y magnéticos....	22
Tabla 4.1 Cambios en cuanto a frecuencia y corriente respecto a la	
medición inicial	80
Tabla 4.2 Cambio corriente respecto a la medición inicial en circuito abierto	82
Tabla 4.3 Comparación entre cada corriente anterior en corto circuito $R=0.01 \Omega$.	85
Tabla 4.4 Comparación contra la corriente inicial a 0.01Ω en corto circuito.....	86

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción general

A lo largo de la historia, el hombre en la tierra siempre se ha visto en la necesidad de sobrevivir, la manera en cómo lo ha logrado radica en que siempre ha ideado diversas actividades, desarrollado nuevas técnicas, además ha creado y perfeccionado herramientas que le permitan conseguir lo que quiere o necesita.

Existen quienes dan otra definición acerca de la supervivencia o evolución del hombre a través del tiempo, sin embargo muchos coinciden en que esto se da a partir de la necesidad en todos los aspectos; no obstante se sabe que hay actividades naturales del ser humano como son: nacer, crecer o desarrollarse, reproducirse en ocasiones y finalmente morir.

Este punto de vista referente a la evolución puede ser trasladado a muchos ámbitos como la vida cotidiana, la industria, la educación, la investigación, etcétera, sin embargo en este trabajo lo situaremos dentro del campo de la ingeniería eléctrica que a decir verdad es una pequeña parte de todo el universo de estudio que abarca la ingeniería y del cual se sabe que podríamos explorar aun más cada día.

En el mundo actual muy pocas ocasiones se adentra en el porqué de las cosas, así como el origen de ellas, cómo es que surgieron, quién las inventó, con qué finalidad se crearon, en verdad son cosas que hoy damos por hechas y entendidas sin cuestionarlas pero no debería ser así; mencionando al menos un ejemplo sencillo, quién se ha puesto a reflexionar acerca de lo que se necesita para que cuando uno presione un interruptor se encienda un foco o cuando conectamos un aparato a la energía eléctrica éste funcione.

Es lógico pensar que sólo lo sabrían personas que tienen algo que ver o intervengan en alguno de todos los procesos de la comercialización de la energía eléctrica, sin embargo no está de más saber un poco en relación a esto ya sea por inquietud o bien por algo que comúnmente se conoce como cultura general.

Ahora bien para todas las cosas que tienen que ver con la energía eléctrica como tal, su generación, transmisión y distribución, es necesario contar con un sistema eléctrico de potencia, quien es realmente el encargado de todo el proceso pero como sabemos, para realizar las cosas de una mejor manera, éste tiene diversos subsistemas en los cuales se divide, realizando cada uno una actividad específica.

En cuanto a la energía eléctrica, es generada en las centrales eléctricas, las hay de varios tipos; pueden ser termoeléctricas, geotermoeléctricas e hidroeléctricas entre otras, las centrales entregan la energía con un voltaje que oscila entre 13 000 y los 20 000 Volts en los sitios donde se encuentran.

Desafortunadamente casi nunca hay coincidencia entre el sitio donde se genera la energía eléctrica y el lugar donde ésta se consume por lo que es estrictamente necesario transportar esta energía hasta los centros de consumo que se pueden localizar incluso a cientos de kilómetros de distancia, un ejemplo es que la energía eléctrica generada en la central hidroeléctrica de Infiernillo ubicada en el estado de Michoacán de Ocampo; es consumida por los diferentes usuarios de la Ciudad de México, lo que representa una distancia de más de 400 Kilómetros.

La manera usual de transportar la potencia eléctrica es con líneas de transmisión, compuestas de cables de un material conductor; anteriormente era cobre pero en la actualidad están hechos esencialmente de aluminio y aleaciones de éste gracias a que es bastante ligero y también a su menor costo.

Dentro de la gama de líneas de transmisión hay de tipo aéreo y subterráneo, generalmente son aéreas aunque esto depende mucho de los requerimientos de la geografía por donde atraviesen, pues se requiere de un derecho de vía para su construcción; en cuanto a características eléctricas, se sabe que su resistencia debe ser baja para facilitar el flujo de corriente y reducir las pérdidas ocasionadas por el calentamiento de las líneas a lo largo del recorrido.(J. Grainger y Stevenson Jr. 1996)

La experiencia ha demostrado que las pérdidas de energía son función inversa del nivel de tensión que se maneje en las líneas, en otras palabras, a mayor voltaje, menores pérdidas, por lo que inmediatamente después de las centrales generadoras existen unidades especiales llamadas subestaciones eléctricas en las cuales se encuentran las máquinas que realizan esta función de elevar el nivel de voltaje mediante la conversión de energía electromagnética con el fin de buscar esa reducción de pérdidas, estas máquinas se conocen como transformadores eléctricos.

Las subestaciones son parte esencial dentro del proceso de transportación de energía pues son las encargadas de manejar los niveles de voltaje, esto permite clasificarlas de acuerdo a su función como: elevadoras o reductoras, las elevadoras están casi siempre a la salida de las centrales generadoras esto es, al inicio del recorrido mientras que las reductoras se localizan ya cerca de los centros de consumo debido a que al final de todo el recorrido, existe la necesidad de llevar la energía eléctrica a voltajes requeridos por todos los consumidores, ya sean usuarios comerciales, industriales o domésticos.

En la industria encontramos una gran diversidad de máquinas eléctricas principalmente rotatorias, que son usadas como motores eléctricos o generadores

eléctricos, lo más típico es como motores eléctricos los cuales manejan voltajes de 220, 380, 440 V y en ocasiones hasta 660 V; a decir verdad en todos lados encontramos motores, en la agricultura, en la ganadería, en una fábrica, en la pesca, en un molino y hasta en un centro comercial donde se requiere de refrigeración para la conservación de alimentos.

Por otra parte se encuentran los usuarios domésticos, no menos importantes que los comerciales o industriales, puesto que son la mayor parte de todos los consumidores; este tipo de usuario requiere comúnmente de un voltaje de 120 ó 127 V esto debido a todos los aparatos eléctricos que manejan en su casa entre los cuales ubicamos la lavadora, la licuadora, el refrigerador, los focos, etcétera, todos requieren de algunos de estos valores de voltaje para que puedan tener un funcionamiento de manera adecuada.

Lo anterior demuestra gran parte de la importancia de la energía eléctrica así como también de la necesidad de los transformadores eléctricos los cuales son los encargados de proveer una amplia gama de voltajes necesarios para los diferentes usuarios que existen en nuestro país.

Cabe resaltar que la manipulación de la energía eléctrica dentro del sistema eléctrico de potencia además de transformadores requiere de diversos dispositivos más tales como apartarrayos, aisladores, seccionadores, restauradores, interruptores, sincronizadores, relevadores y muchos otros que gracias al desarrollo de nuevas tecnologías, realizan una función específica que hoy en día permite mantener una buena calidad en la entrega de la energía en los domicilios de todos y cada uno de los consumidores.

Ahora bien, el transformador es la máquina eléctrica más usada en la actualidad puesto que su funcionamiento permite manejar diferentes niveles de energía lo que da a éste una gran versatilidad en su uso, puede utilizarse en una subestación de transmisión que maneja grandes cantidades de energía y también incluso estar dentro de aparatos eléctricos como una rasuradora eléctrica o en un foco de luz fluorescente.(Gourishankar 1995)

Las cantidades de energía que maneja están directamente relacionadas con las dimensiones de su fabricación, esto es que entre mayor sea la cantidad de energía que maneje, mayor será su dimensión, tomando en cuenta que su manufactura sea lo más adecuada posible y tenga una robustez que permita un funcionamiento adecuado.

En la fabricación de transformadores, son de una gran importancia los materiales que se utilizan, principalmente en el núcleo, se utilizan materiales ferromagnéticos que permiten una mayor eficiencia en el trabajo de la transformación de la energía.

Aunque existen diferentes materiales para la fabricación del núcleo y tipos de transformadores, es importante mencionar que la función del transformador no cambia en absoluto, sigue siendo su función la conversión de energía electromagnética entre diversos niveles

Todas las personas alguna vez han comprado un producto, generalmente cuando uno paga por ese producto, deseáramos que durara trabajando sin problemas mucho tiempo tratando de sacarle el mayor provecho a la compra, sin embargo no es así, esto depende del mismo producto pues sabemos que tiene una vida útil, podemos resumir este hecho con un dicho que enuncia: “todo por servir se acaba y acaba por no servir”.

A lo largo de la vida útil de todo producto o aparato, existe una actividad que favorece plenamente a alargar la vida de éste, se le conoce como mantenimiento; existen diversos tipos de mantenimiento, entre los más frecuentes está el correctivo (el que debemos evitar) que se da cuando el equipo falla y sale de servicio; los otros tipos de mantenimientos son, por cierto más modernos y efectivos, el preventivo y el predictivo. El preventivo consiste en rutinas periódicas de mantenimiento basadas en la experiencia mientras que el predictivo se apoya en el uso de equipos especializados de diagnóstico (termografía, análisis dinámico, tribología) que nos permiten conocer las condiciones actuales del equipo para programar su mantenimiento en el momento más adecuado.

Conociendo la necesidad de mantener el funcionamiento continuo de cualquier aparato o dispositivo como es el caso de los transformadores eléctricos, nos vemos en la necesidad de conocer todos los elementos que lo componen para saber y determinar cuál es la razón por la cual falla en ese momento o bien tratar de predecir cuándo podría fallar dependiendo de las condiciones de funcionamiento actuales o posteriores.

En el desarrollo del presente trabajo se busca tener un modelo consistente del transformador que permita realizar un estudio que demuestre cómo es que afecta el cambio de la frecuencia en un transformador y qué consecuencias tiene.

Se tomaron en consideración algunos trabajos hechos enfocados a la obtención de un modelo del transformador trifásico basado en permeancia principalmente, aunque en este caso se usará su operación inversa conocida como reluctancia pues se calcula de forma más simple mediante parámetros físicos del transformador.

Habiendo modelado el transformador como un circuito magnético, se usará el software de Mathworks conocido como MATLAB, abreviado del nombre en inglés provenientes de Matrix-Laboratory en el que se digitalizará un código de programa mediante el cual podamos obtener una respuesta aproximada del comportamiento del transformador frente a una excitación senoidal que varíe su frecuencia unos pocos ciclos (cientos).

Este estudio ayudará a comprender de una forma simple e ilustrativa el funcionamiento del transformador visto como un circuito RL (Resistivo-Inductivo), además permitirá visualizar el comportamiento de las curva **H-B** en cualquier parte del transformador (yugo o columna), ya que la teoría hace mención a que esta curva está determinada por la permeabilidad del material del núcleo independientemente de otros factores, así que podemos examinar una de las piernas y sabremos que las otras deben comportarse de manera similar.

1.2 Objetivo

El objetivo es hacer un barrido en baja frecuencia a un modelo de un transformador trifásico de tres piernas basado en sus características físicas y además puedan usarse en la solución del mismo y de esta forma comprender el funcionamiento real del transformador.

El barrido en baja frecuencia consiste en simular un transformador operando a diferentes frecuencias de la nominal con el fin de ver cuáles son las consecuencias del incremento o disminución de la frecuencia de operación y obtener los resultados para hacer un análisis más detallado de los parámetros que se ven afectados por este cambio en la frecuencia.

1.3 Justificación

Los transformadores son equipos eléctricos que antes de estar en el mercado son diseñados y fabricados con características específicas; al decir esto debemos entender que no se puede usar el mismo transformador para casos o situaciones diferentes porque puede ser inclusive una desventaja utilizar un transformador que no esté diseñado para la función que se requiera y podemos provocar un mal funcionamiento o en situaciones extraordinarias un daño irreversible en el mismo.

Esto que se menciona es visto en los tipos de transformadores que existen y las aplicaciones que pueden cubrir, hay transformadores de potencia, de control, de aislamiento, de distribución, elevadores, reductores, de instrumentación; en fin los hay de muchísimos tipos, formas y capacidades.

Los transformadores se encuentran dentro del sistema eléctrico de potencia; en este sistema actualmente encontramos elementos que gracias al desarrollo de la nueva tecnología funcionan mediante electrónica de potencia, esta es una rama de la ingeniería eléctrica que se ha dedicado a mejorar estos sistemas para que tengan una gran eficiencia y excelente seguridad.

Los dispositivos del sistema de potencia que operan bajo la electrónica de potencia lo hacen a frecuencias más allá de la frecuencia fundamental y cabe la posibilidad que en un momento dado cuando exista una falla de cualquier tipo hará que la frecuencia de operación del transformador se vea alterada lo que a consecuencia provocará una situación para la cual no fue diseñado.

1.4 Metodología

El desarrollo de un modelo de un transformador es un desafío aún para todo aquel que desee representarlo de manera real, sin embargo hay una gran variedad de modelos, algunos toman unas características, otros toman otras, este trabajo se ha basado en un artículo que toma la permeancia del material del núcleo del transformador, sin embargo en el presente se toma en cuenta la reluctancia (Pérez Rojas 2004).

La reluctancia de un núcleo magnético sólo está determinada mediante la longitud, el área de la sección transversal y la permeabilidad del material; las dos primeras son características geométricas que podemos medir, sin embargo la permeabilidad es una característica propia del material.

La permeabilidad relaciona dos magnitudes que son importantes, la densidad de flujo magnético y la intensidad de campo magnético, éstas dos cuando son graficadas una contra la otra forman una curva; la pendiente de esa curva en cada punto es la permeabilidad del material.

La curva H-B se aproxima mediante la función arcotangente, esto basado en (Pérez Rojas 2004) y se supone un valor inicial para la permeabilidad pues no se puede comenzar en una permeabilidad cero. Posteriormente con las variables a las que tenemos acceso de forma directa, obtendremos un valor de intensidad de campo magnético (H) con el cual ubicaremos el valor en la curva y obtendremos un valor de densidad de flujo magnético (B), actualizaremos el valor de la permeabilidad haciendo la división B/H para obtener el nuevo valor de la permeabilidad que permitirá calcular la reluctancia.

Después de obtener el valor de todas las reluctancias del transformador se deben tener los valores de los parámetros de voltaje, para solucionar el modelo del transformador y encontrar el valor de los enlaces de flujo y corrientes, mediante un método numérico.

Ya obtenida la solución del sistema mediante una excitación a la frecuencia fundamental, es el momento de aplicar el barrido de baja frecuencia por lo que se recurre a iniciar de nuevo la solución de todo el sistema sólo que se toma una frecuencia de referencia, en este caso el valor fue de 100 Hz y se incrementó en la misma cantidad en cada una de las iteraciones del problema tratando de buscar alguna alteración perceptible.

Finalmente se comparó el modelo del transformador con un simple circuito resistivo-inductivo para realizar las mismas variaciones en la frecuencia y ver el comportamiento al que se podría asemejar el transformador ante dichas alteraciones de la frecuencia de operación.

1.5 Contenido de la tesis

En el capítulo 1 se presenta una introducción general de lo que es la energía eléctrica, se presenta también un pequeño panorama acerca de los transformadores eléctricos, dónde están en nuestra vida cotidiana, qué aplicaciones tienen y cuál es su función vista de una manera simple y poco profunda en cuanto al principio de su funcionamiento.

Cuando se desarrolla el capítulo 2 se presenta toda la teoría necesaria para la comprensión de los transformadores monofásicos ya que son la base para los transformadores trifásicos, se describen las propiedades de los materiales magnéticos, los dominios magnéticos, las cargas eléctricas, la producción del campo magnético, se conceptualiza el circuito magnético en comparación con el circuito eléctrico debido a su similitud, análisis de circuitos magnéticos mediante el flujo magnético, descripción de la intensidad de campo y la densidad de flujo magnético, cómo es la excitación en corriente alterna, se identifica el enlace de

flujo, se visualiza el concepto de transformador, construcción, funcionamiento, obtención de parámetros; se induce un poco de teoría acerca de los transformadores trifásicos, conexiones, construcción, aplicaciones además se hace mención del sistema por unidad para facilidad de cálculo de transformadores y finalmente se presenta un poco de la respuesta en frecuencia.

Dentro del capítulo 3 se presenta el modelado del transformador trifásico de tres piernas que se utilizará para la solución del mismo y al cual se le aplicará el barrido de respuesta en baja frecuencia, además se muestra cómo se aproxima la curva de saturación de un transformador en base a la función trigonométrica arcotangente la cual por sí sola ya posee una saturación y por último se muestran los datos del transformador utilizado para el modelado.

Al llegar al cuarto capítulo se describe por completo al circuito RL, las ecuaciones que describen el comportamiento del mismo y se centra en la ecuación de la corriente de salida, circuito con el cual se compara al transformador; se muestran además todos los resultados de las simulaciones del circuito RL usado para hacer una comparación con el transformador, en la sección final del capítulo encontramos los resultados de la simulación del transformador trifásico utilizado para el barrido de baja frecuencia.

El capítulo 5 habla acerca de las conclusiones del presente trabajo; se analizan todos los resultados del capítulo anterior que tienen que ver con el circuito RL así como los del sistema del transformador para dar una explicación adecuada y certera del trabajo realizado para buscar que el término del mismo sirva de base para nuevos tópicos que tengan relación a éste, por ejemplo el pronóstico de fallas en transformadores.

Capítulo 2

Conceptos generales

2.1 Propiedades de los materiales ferromagnéticos

Todos aquellos materiales que cuando se colocan dentro de un campo magnético tienen la capacidad de reaccionar con él y pueden incluso modificarlo de alguna forma, se llaman materiales magnéticos. A este proceso se le conoce de manera común como magnetización y a los materiales que presentan esta particular característica se les llama materiales magnéticos.

Estos materiales están clasificados como: diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos según el comportamiento de sus dipolos magnéticos cuando están inmersos en un campo inducido (el enfoque de esta clasificación está basada en la configuración eléctrica de los átomos del material), se mencionan de los menos magnetizantes a los más, los últimos son los más importantes en

nuestro caso pues son los que se usan para la fabricación del núcleo de los transformadores primordialmente y presentan las siguientes características.

1. Llegan a magnetizarse fuertemente en la misma dirección del campo magnético en el que se encuentran situados.
2. La densidad de flujo magnético en los materiales ferromagnéticos varía en forma no lineal con la intensidad magnética, con excepción de pequeños rangos donde la variación es lineal.
3. Los materiales ferromagnéticos presentan saturación, histéresis y retentividad.

La *retentividad* es la tendencia o capacidad del material magnético de retener algo de magnetismo aún después de remover la fuente de excitación.

La *histéresis* es cuando la densidad del flujo magnético se retrasa con respecto a la intensidad de campo (*más adelante se verá su representación*).

La *saturación* es la variación no lineal de dos características que tienen una dependencia mutua (*la representación de ella está en el siguiente capítulo*).

La Figura 2.1 presenta el acomodo de los dominios magnéticos durante la magnetización de una material ferromagnético.

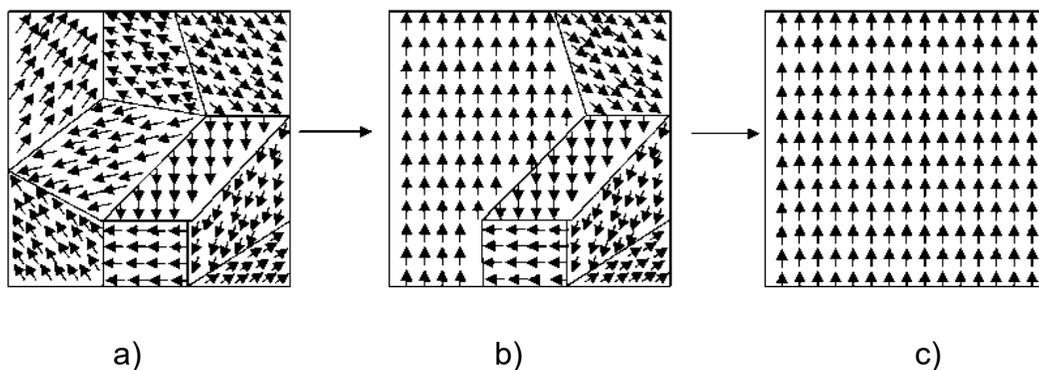


Figura 2.1. Acomodo de los dominios magnéticos de un material inmerso en un campo magnético creciente.

Es evidente el acomodo de los dominios magnéticos, en la Figura 2.1-a se muestra cómo es que los dominios se encuentran en el material cuando aún no se

ha magnetizado, es decir un estado neutral o natural, éstos tienen orientaciones múltiples e incluso completamente opuestas; la Figura 2.1-b presenta ahora mayor cantidad de dominios alineados en una dirección hacia arriba en comparación con la Figura 2.1-a sin embargo aún hay muestra de que se puede seguir magnetizando el material debido a que hay pequeñas zonas donde no se ha logrado que la orientación de dominios sea como la de la zona más grande.

La Figura 2.1-c muestra la completa orientación de los dominios magnéticos pertenecientes al material y es en ese momento cuando se puede decir que el material ha sido magnetizado debido a un campo; este acomodo mostrado es arbitrario, puede ser tal vez hacia abajo, hacia la derecha o bien izquierda, pierde importancia en este caso pues lo que se describe es la orientación de los dominios magnéticos independientemente del sentido de ésta.

Los materiales magnéticos usados en la actualidad son los ferromagnéticos por las características que poseen para una fácil magnetización, esto permite que tengan una gran utilidad en equipos electromagnéticos, estos últimos son los más comúnmente usados en el área de la ingeniería eléctrica.

2.2 Carga eléctrica

La materia como tal, sabemos que tiene diferentes características, entre ellas se sitúa la electricidad para ello es necesario cuantificarla y nos valdremos de la carga eléctrica para realizarlo.

Tomando en cuenta la ley de la conservación de la carga basada en pruebas experimentales se considera que la suma algebraica de todas las cargas en un sistema aislado es constante, mientras tanto existen resultados de pruebas hechas a cuerpos cargados que nos demuestran la existencia de fuerzas entre ellos de unos a otros.

Estas fuerzas inherentes en los cuerpos se denominan fuerzas eléctricas, más tarde Coulomb encontró que estas fuerzas se rigen según su ley que queda determinada por la siguiente expresión.

$$F = k \frac{q_1 q_2}{d^2} \quad (2.1)$$

donde:

q_1 q_2 Son las magnitudes de las cargas

d Es la distancia entre las cargas

k Es la constante de proporcionalidad que depende del medio donde se realice el experimento.

Además se determinó gracias a los trabajos de Coulomb que las cargas con el mismo signo ejercen una fuerza de repulsión entre ellas, mientras que las cargas con signo contrario la ejercen de atracción.

Las cargas eléctricas ejercen fuerzas entre ellas que dependen también de la distancia que hay de separación entre una y otra; esto nos lleva a reflexionar sobre otro importante concepto como es el de campo eléctrico, que en palabras sencillas es el medio o espacio donde la carga es capaz de ejercer fuerza sobre otra carga.

2.3 El campo magnético y su utilización

El campo magnético es considerado por algunos autores como la zona tridimensional del espacio físico donde existen las fuerzas magnéticas producidas por la velocidad de las cargas eléctricas en movimiento; aunque es más simple definir un campo magnético en términos de campos eléctricos en movimiento.

Los campos magnéticos son el mecanismo fundamental para la manipulación y conversión de la energía de una forma a otra en máquinas eléctricas como motores, generadores y transformadores.

Según (Chapman J. 2005), existen cuatro principios fundamentales que describen la utilización de los campos magnéticos en los aparatos eléctricos, estos son:

1. Un conductor que porta corriente produce un campo magnético a su alrededor.
2. Un campo magnético variable en el tiempo induce un voltaje en una bobina de alambre si pasa a través de ella (principio de funcionamiento del transformador).
3. Un conductor que porta corriente en presencia de un campo magnético experimenta una fuerza inducida sobre él (principio de funcionamiento del motor).
4. Un conductor eléctrico que se mueva en presencia de un campo magnético tendrá un voltaje inducido en él (principio de funcionamiento del generador).

En este trabajo tomaremos en cuenta los dos primeros principios que son los que tienen una relación directa con el transformador y que además forma parte de la tesis del trabajo.

2.4 Producción de un campo magnético

Sabemos que cuando se habla de magnetismo, es inminente la aparición de las famosas ecuaciones de Maxwell (*James Clark Maxwell*) que incluyen los trabajos de investigadores como Gauss, Ampere y Faraday principalmente, las complicaciones que encontramos debido a los campos magnéticos se pueden terminar encontrando la solución de estas ecuaciones, sin embargo es importante recordar que las soluciones en el dominio de la frecuencia aún no alcanzan la exactitud requerida, no obstante, para la realización de estudios existen simplificaciones que nos brindan una aproximación útil para nuestro caso.

Para adentrarnos más en el tema y poder entender el concepto de circuito magnético, tomaremos en cuenta la ecuación de Maxwell que nos permite relacionar los campos magnéticos generados por corrientes circulantes en un conductor, esta ecuación es más comúnmente conocida como ley de Ampere.

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (2.2)$$

Esta ecuación dice que la componente tangencial de la intensidad de campo magnético \mathbf{H} alrededor de un contorno cerrado c , es equivalente al total de la corriente que pasa por cualquier superficie S y que une dicho contorno.

En palabras más simples, nosotros sabemos que el flujo de corriente a través de un conductor genera un campo magnético a su alrededor, esto en relación a la ecuación es que la densidad de corriente \mathbf{J} es la que produce un campo magnético con una intensidad determinada. En otras bibliografías se puede encontrar la ley de Ampere expresada como sigue:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{net} \quad (2.3)$$

Similarmente \mathbf{H} es la intensidad de campo magnético que resulta del flujo de la corriente I_{net} y $d\mathbf{l}$ es el elemento diferencial a lo largo de la trayectoria de integración. Si nos encontramos en el Sistema Internacional de unidades (SI), la corriente se mide en Amperes y \mathbf{H} en Amperes-vuelta por metro.

Para llegar a la definición del concepto de circuito magnético, debemos encontrar la intensidad de campo magnético \mathbf{H} y la densidad de flujo magnético \mathbf{B} de una estructura magnética geométrica, lo que es considerablemente complicado. Lo que se ha hecho desde siempre, ha sido simplificar un campo magnético real que está en tres dimensiones y llevarlo a su equivalente en campo magnético unidimensional, esto tiene resultados aceptables y con una precisión considerable.

Ahora bien definiendo el concepto de circuito magnético encontramos que es meramente una estructura formada de materiales magnéticos, en la mayoría de las ocasiones, sino es que siempre, los materiales magnéticos utilizados en estas estructuras tienen una alta permeabilidad.

Es necesaria una mejor comprensión de la definición de un circuito magnético así como de la ley de Ampere, por eso se presenta la Figura 2.2 que muestra un núcleo sencillo de forma rectangular y Área transversal A_c , contiene un devanado de alambre de N vueltas arrollado en una de sus piernas.

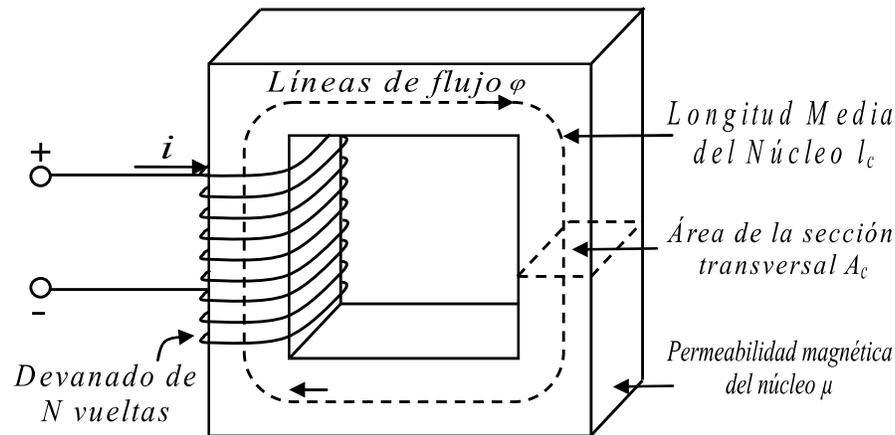


Figura 2.2 Circuito magnético simple.

El material de alta permeabilidad genera un flujo magnético que se concreta a lo que la estructura magnética del núcleo le permite, de manera similar a como sucede en un circuito eléctrico donde la corriente se limita a la estructura de éste, es decir que si el material del núcleo es ferromagnético, casi todo el campo magnético generado debido a la corriente permanecerá dentro del núcleo, de esta forma el camino de integración dicho por Ampere en su ley será ahora la longitud media del núcleo que se denotó en la Figura 2.2 como l_c .

La corriente que fluye por el camino de integración I_{net} es entonces Ni , debido a que la bobina de alambre corta dicho camino N veces mientras pasa la corriente i , lo que esto lleva a expresar la ley de Ampere en otros términos:

$$Hl_c = Ni \quad (2.4)$$

De acuerdo a esta última expresión, la magnitud de la intensidad del campo magnético generada por la corriente aplicada al devanado será:

$$H = \frac{Ni}{l_c} \quad (2.5)$$

El autor (Chapman J. 2005) en su libro menciona que **H** es de cierta forma una medida del “esfuerzo” que produce una corriente al establecer un campo magnético.

La ecuación (2.5) resulta útil para determinar la intensidad de un campo magnético que se genera en una estructura magnética, esto gracias a que las variables en las que está expresada pueden ser conocidas de manera muy sencilla.

Ahora bien, según la literatura hay una relación entre la intensidad de campo magnético **H** y la densidad flujo magnético resultante **B** producida dentro del material magnético y está dada por:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (2.6)$$

En la expresión encontramos la letra griega mu μ que es el símbolo que representa el factor de relación entre **H** y **B** conocido como permeabilidad.

La permeabilidad es una característica que posee un material para que pasen a través de él los campos magnéticos o también se sabe que representa la facilidad relativa para que se pueda establecer un campo magnético. Las unidades de esta característica en el Sistema Internacional de Unidades son los Henrios por metro.

Entre los materiales donde sabemos que los campos magnéticos se pueden generar encontramos al aire, éste marca la pauta y se toma como referencia pues es posible encontrarlo casi en cualquier parte, es considerado como “el espacio libre”. El valor de ésta se considera como:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{H}{m} \quad (2.7)$$

La permeabilidad de cualquiera de los materiales usados en este ámbito, siempre puede ser comparada con la del espacio libre para encontrar lo que se conoce como una permeabilidad relativa, esta es una medida bastante útil para

comparar la capacidad de magnetización de los materiales; el cálculo de esta característica se hace mediante la ecuación que se muestra.

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (2.8)$$

Las permeabilidades relativas de los materiales que se usan para la fabricación de los transformadores están en un rango que va desde 2 000 a 6 000 unidades e incluso hasta 80000 según algunas bibliografías, esto es que por cada cantidad de corriente dada, en la estructura del material se producirá entre 2000, 6000 u 80000 veces más flujo que en el aire.

Un cuestionamiento lógico puede ser ¿cómo se crearía un flujo magnético en el aire, si su composición es tan dispersa?, además no es un material ferromagnético; es debido a este tipo de cuestionamientos que nos damos cuenta de la importancia que tienen los materiales de los que se fabrican los transformadores pues deben garantizar la creación y concentración de flujo magnético en su estructura para garantizar un funcionamiento óptimo.

Las permeabilidades tan altas de los materiales hacen que el flujo producido viaje en mayor parte a través de la estructura magnética sin embargo no impiden que una cantidad de éste circule por el aire, generalmente es muy pequeña debido a la baja permeabilidad del aire respecto a la de un material ferromagnético.

Este efecto en la realidad también se considera y es conocido como flujo de dispersión, este flujo es bastante importante pues ayuda a determinar otras características de los transformadores cómo es el enlace de flujo entre bobinas y las autoinductancias de las bobinas de los transformadores.

Teniendo en consideración (2.6), podemos ahora establecer que la magnitud de la densidad de flujo está dada por parámetros que, la mayoría, son conocidos como se ve a continuación:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \frac{\mu Ni}{l_c} \quad (2.9)$$

En la terminología que se utiliza en circuitos magnéticos Ni es considerado como la fuerza magnetomotriz y es esta fuerza la que actúa sobre el circuito magnético. Su símbolo característico es F .

Hasta ahora hemos hablado muy poco acerca del flujo magnético, sin embargo, existe una ecuación que lo describe matemáticamente de la siguiente forma.

$$\varphi = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.10)$$

Le expresión nos dice que el flujo es la densidad (cantidad o número de líneas de flujo magnético) que atraviesa de forma perpendicular a una área específica; mientras la densidad de flujo en toda el área sea constante se puede hacer la siguiente aseveración:

$$\varphi = \mathbf{B} \mathbf{A} \quad (2.11)$$

La unidad que maneja el flujo magnético en el Sistema Internacional de unidades es el Weber (Wb).

Manipulando (2.9) y (2.11) podemos establecer el flujo en términos simples y que puedan ser conocidos de la manera como se ve enseguida:

$$\varphi = \mathbf{B} \mathbf{A} = \frac{\mu Ni A_c}{l_c} \quad (2.12)$$

El flujo se encuentra expresado en términos de fuerza magnetomotriz, parámetros físicos geométricos conocidos y también de la permeabilidad.

Para una representación más comprensible de cómo es y de qué se compone un circuito magnético, es conveniente utilizar una analogía con los circuitos eléctricos como se puede observar en la Figura 2.3.

En esta figura se presentan una fuente alimentando una carga; una es una fuente magnetomotriz y la otra es electromotriz; las ecuaciones que describen el comportamiento de ambos circuitos se ubican debajo de cada circuito.

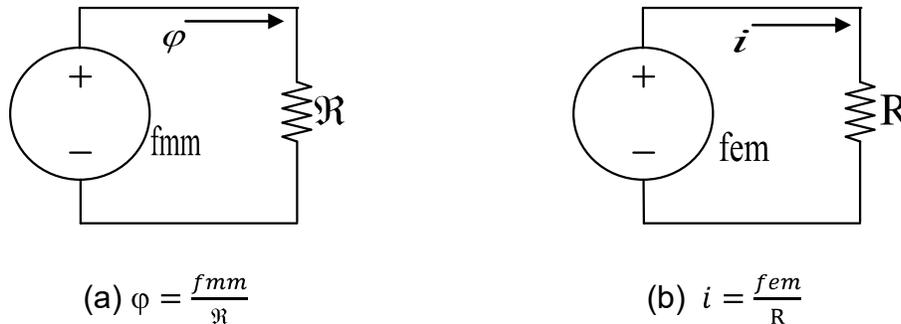


Figura 2.3 Comparación entre circuitos magnéticos y circuitos eléctricos.

a) Circuito magnético y ecuación del flujo.

b) Circuito eléctrico y ecuación de la corriente.

Es importante resaltar la similitud que existe entre los circuitos eléctricos y los magnéticos porque, en cuanto a análisis y solución, algunas de las técnicas que se usan para la solución en los circuitos eléctricos son válidas para resolver circuitos magnéticos; más abajo se presenta una analogía entre los parámetros que se manejan en cada uno de ellos así como su nombre y su símbolo representativo.

Una ley que es usualmente equivalente, es la ley de Ohm para circuitos eléctricos, esta ley, en una de sus formas más usuales que determina el valor de la corriente en un circuito eléctrico, es:

$$i = \frac{V}{R} \quad (2.13)$$

Esta ley muestra la relación existente entre la fuerza electromotriz y la resistencia de un circuito eléctrico; mientras que para los circuitos magnéticos se puede aplicar de manera semejante una relación entre la fuerza magnetomotriz y la reluctancia del circuito de la siguiente manera:

$$\varphi = \frac{Fmm}{\mathcal{R}} \quad (2.14)$$

Se sabe que (2.13) al igual que (2.14) son ecuaciones completamente válidas y que pueden aplicarse en la solución tanto de circuitos eléctricos, como en la solución de circuitos magnéticos.

Tabla 2.1 Analogía entre las variables de los circuitos eléctricos y magnéticos.

CIRCUITO ELÉCTRICO		CIRCUITO MAGNÉTICO	
Fuerza electromotriz	$F_{em} (v)$	Fuerza magnetomotriz	$F_{mm} (F)$
Corriente	I	Flujo	φ
Resistencia	R	Reluctancia	\mathcal{R}
Conductancia	G	Permeancia	P
Conductividad	σ	Permeabilidad	$^*\mu_0$

** Se supone que el medio dentro de la estructura magnética es el vacío.*

La Tabla 2.1 permite identificar cuáles son los parámetros que posee cada circuito, cuál es su parámetro equivalente entre un circuito y otro, además muestra el símbolo por el cual serán representados dentro del trabajo.

2.5 Análisis de circuitos ferromagnéticos

Existen diferentes métodos para la realización de estos análisis, algunos principios forman parte de sus bases como se ve a continuación:

I. Las dimensiones de la estructura magnética no cambian a lo largo de toda la trayectoria con lo que podemos decir que la densidad de flujo magnético puede ser considerada uniforme, con esto el flujo que hay en el núcleo se puede obtener con sólo una multiplicación como se muestra en (2.11).

II. La longitud media de la trayectoria magnética puede ser utilizada en todos los cálculos.

III. Entonces podemos usar (2.15) para calcular la fuerza magnetomotriz total requerida para establecer una cantidad específica de flujo en el circuito magnético.

$$F_{mm} = Ni = Hl_c \quad (2.15)$$

Esto se aplica a lo largo de toda la sección y longitud media de la estructura magnética, como permite mostrar la Figura 2.4.

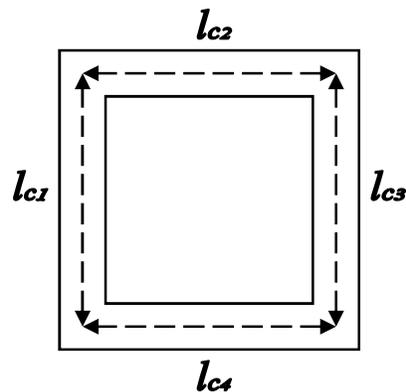


Figura 2.4 Estructura magnética de contorno uniforme

Finalmente tenemos:

$$F_{mm} = Ni = H_1 l_{c1} + H_2 l_{c2} + H_3 l_{c3} + H_4 l_{c4} \quad (2.16)$$

O bien expresado de la siguiente forma

$$F_{mm} = Ni = \sum_j H_j l_{jc} \quad (2.17)$$

Esta ecuación es análoga a la ya conocida Ley de voltaje de Kirchoff para circuitos eléctricos; podemos definir esta ley en términos útiles para nuestro estudio, esto es, en cantidades magnéticas: en todo los circuitos magnéticos, la suma algebraica de los potenciales magnéticos alrededor de una trayectoria cerrada es igual a cero, dicho en otras palabras en un circuito serie cerrado, la suma de las elevaciones de potencial es igual a la suma de las caídas de potencial.

IV. Ahora bien, en la Figura 2.5 consideraremos una sección de la estructura magnética donde los flujos magnéticos de varias partes se combinan; en ella se muestra que la suma de los flujos dirigidos hacia **P** es igual a la suma de los flujos saliendo de **P** (tomando a una región infinitamente pequeña alrededor de **P**).

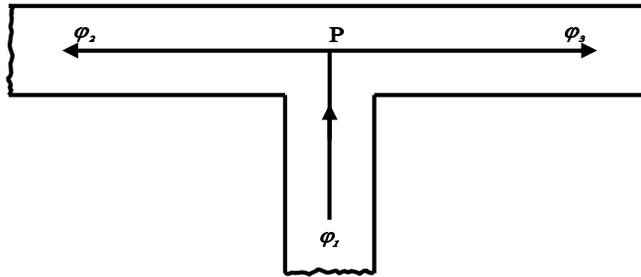


Figura 2.5 Distribución del flujo dentro de una estructura magnética.

Y con la Figura 2.5 se puede notar fácilmente que:

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3 \quad (2.18)$$

Lo que se asemeja ahora a la ley de corriente de Kirchoff; en esta ecuación no son considerados los flujos de dispersión que puedan existir.

2.6 Enlaces de flujo

Las líneas de campo o flujo forman una trayectoria cerrada en forma circular o de anillo a través del espacio libre y debido a esto, pueden enlazar a otros circuitos eléctricos; un ejemplo es que un flujo φ que es generado por la circulación de corriente en un devanado de N vueltas, es precisamente enlazado N número de ocasiones y se puede demostrar matemáticamente con:

$$\lambda = N\varphi \quad (2.19)$$

Como se dijo antes, el flujo φ tiene dos componentes, la parte que viaja a través de la estructura y la que viaja por el espacio debida a la dispersión que hay por el devanado, entonces se plantea (2.20).

$$\varphi_{eq} = \varphi_l + \varphi_m \quad (2.20)$$

Podemos pensar en el valor de flujo necesario para encadenar todas las vueltas de un devanado y de esta manera poder producir un enlazamiento fijo o predeterminado; este valor es parte del flujo y se le conoce como el flujo equivalente.

Ahora bien dentro de un circuito magnético compuesto por material magnético con una permeabilidad magnética constante o bien que contenga entrehierro dominante, hay una relación entre el flujo φ y la corriente i que tiene la característica de ser lineal, esta coadyuva a definir la inductancia L en términos de:

$$L = \frac{\lambda}{i} \quad (2.21)$$

Entonces ahora considerando (2.19), (2.14) y sustituyendo en (2.21), obtendremos una ecuación para calcular el valor de inductancia de esta forma:

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}_t} \quad (2.22)$$

Con (2.22) se puede notar que el valor de la inductancia queda determinado directamente por el cuadrado del número de vueltas e inversamente por la reluctancia de la porción del circuito que abarca el devanado.

2.7 Excitación en corriente alterna

En los sistemas que se manejan mediante la presencia de la corriente alterna, las configuraciones de onda de voltaje y flujo son muy cercanas a las funciones senoidales del tiempo. Todas las funciones que tienen una forma periódica o repetitiva como su nombre lo indica, poseen una frecuencia inherente a ellas, esta es representada con el símbolo f y la unidad de medida más usualmente usada es el ciclo por segundo, el nombre es el Hertz.

$$Frecuencia (f) = 1Hz = \frac{1 \text{ ciclo}}{1 \text{ seg}} \quad (2.23)$$

Así (2.23) permite mostrar que la frecuencia f queda definida por los ciclos de una onda alterna periódica, entonces definiremos al periodo, este es el equivalente de un ciclo y se representa por el símbolo T y su medida son los segundos. Un periodo es el tiempo en el cual la onda se repite, de esta forma vemos que (2.24) muestra a ambas variables como función inversa una de la otra de la siguiente manera.

$$T = \frac{1}{f} \quad (2.24)$$

Para la visualización de los conceptos se utilizará como modelo un circuito magnético de núcleo cerrado como el mostrado anteriormente en la Figura 2.1.

Primeramente diremos que los parámetros que se han manejado durante el desarrollo de este trabajo son los mismos en cuanto a las áreas y longitudes de la estructura magnética en análisis y también asumiremos que hay una variación senoidal del flujo en el núcleo de dicha estructura.

La variación del flujo en el tiempo estará definida por la ecuación que a continuación se muestra.

$$\varphi(t) = \varphi_{m\acute{a}x} \text{sen}(\omega t) = A_c B_{m\acute{a}x} \text{sen}(\omega t) \quad (2.25)$$

donde

$\varphi_{m\acute{a}x}$ es la amplitud del flujo del núcleo φ en webers.

$B_{m\acute{a}x}$ es la amplitud de la densidad de flujo B_c en teslas.

ω es la frecuencia angular y equivale a $2\pi f$.

f es la frecuencia en Hz.

Teniendo como referencia la ley de faraday, se puede determinar el voltaje inducido en cualquier número de vuelta un devanado mediante (2.26).

$$e(t) = \omega N \varphi_{m\acute{a}x} \cos(\omega t) = E_{m\acute{a}x} \cos(\omega t) \quad (2.26)$$

donde

$$E_{m\acute{a}x} = \omega N \varphi_{m\acute{a}x} = 2\pi f N A_c B_{m\acute{a}x} \quad (2.27)$$

Cuando se analiza en la corriente alterna, los valores importantes en este caso son los valores eficaces o *rms* de la onda de voltaje y de corriente, sin embargo en general para cualquier función periódica en el tiempo $f(t)$ se aplica lo siguiente para definirla en valor *rms*:

$$F_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \quad (2.28)$$

Se han hecho demostraciones y se ha visto que para ondas senoidales, el valor *rms* de una función senoidal es $1/\sqrt{2}$ veces su valor máximo, así que ahora el valor *rms* del voltaje inducido en este caso será:

$$E_{rms} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N A_c B_{m\acute{a}x} = \sqrt{2} \pi f N A_c B_{m\acute{a}x} \quad (2.29)$$

Si se necesita producir un flujo magnético en el núcleo, es necesario que haya una corriente fluyendo a través del devanado de excitación, la corriente toma el mismo nombre, corriente de excitación i_φ . Las propiedades magnéticas de saturación del núcleo hacen que la configuración de la onda senoidal que corresponde a la excitación sea diferente a la configuración de la onda del flujo.

Como la corriente de excitación no es senoidal, por lo que su valor *rms* se puede calcular mediante la siguiente ecuación que relaciona el valor *rms* de la intensidad de flujo magnético **H** de la siguiente forma.

$$I_{\varphi rms} = \frac{l_c H_{c rms}}{N} \quad (2.30)$$

Sabemos entonces que la corriente de excitación suministra la fuerza magnetomotriz para que se pueda generar un flujo en el núcleo y además suministra la potencia de entrada que se asocian a su vez con la energía dentro del campo magnético en el núcleo.

En lo que se ha mostrado en la teoría descrita hasta ahora, se han idealizado la mayoría de los conceptos, no se han tomado en cuenta las pérdidas inherentes a todas estas percepciones. Hay dos mecanismos de pérdida de energía que están relacionado con los flujos que varían en el tiempo en las estructuras magnéticas, el primero de ellos se asocia al calentamiento óhmico, también conocido como efecto joule en algunas bibliografías y está relacionado con las corrientes parásitas inducidas que se generan dentro del material.

A partir de la ley de Faraday, los campos magnéticos variantes en el tiempo producen un aumento en los campos eléctricos que se generan; en los materiales magnéticos dichos campos resultan en corrientes inducidas conocidas como corrientes de Eddy, las cuales están inmersas en el material del núcleo y se oponen a cambios de la densidad de flujo del material. Para contrarrestar o minimizar el efecto desmagnetizante, la corriente de excitación deberá aumentarse.

De esta forma, la curva **B-H** resultante dinámica bajo la operación de corriente alterna será de alguna manera más pronunciada que la curva de histéresis para variación lenta, además este efecto se incrementa al mismo tiempo que se incrementa la frecuencia de excitación.

Para minimizar las pérdidas de eddy, las estructuras magnéticas se fabrican con laminaciones delgadas de material magnético cubiertas de una fina capa de barniz o esmalte aislante que minimiza la magnitud estas corrientes; entre más delgadas son las laminaciones menores serán las pérdidas.

En general la pérdida de energía por corrientes de eddy tiende a incrementarse al cuadrado de la frecuencia de excitación y también al cuadrado del pico de la densidad de flujo **B** (Fitzgerald, Kingsley Jr. y D. Umans 2004).

El segundo mecanismo de pérdidas se debe a la naturaleza de la histéresis de los materiales magnéticos. La variación en la entrada de excitación originará que el material magnético sufra una alteración cíclica que se describe mediante una curva de histéresis mostrada en la Figura 2.6, donde el área que encierra la figura representa las pérdidas por histéresis del material, estas pérdidas aumentan de manera proporcional con el incremento de la frecuencia.

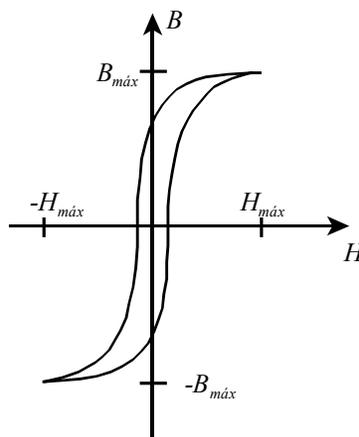


Figura 2.6 Curva de histéresis.

En términos generales, las pérdidas dependen de las propiedades metalúrgicas del material así como de la densidad de flujo (**B**) y de la frecuencia; entonces sí existe pérdida de energía por ciclo y ésta es proporcional a la frecuencia de la excitación que se aplica.

Los fabricantes de equipos (principalmente transformadores) eléctricos y electromagnéticos, presentan a los consumidores las pérdidas del núcleo en forma gráfica utilizando los watts por unidad de peso como función de la densidad de flujo; generalmente se realizan los estudios con diferentes frecuencias (Fitzgerald, Kingsley Jr. y D. Umans 2004)

2.8 Transformador eléctrico monofásico

2.8.1 Introducción

El transformador es una máquina eléctrica, la más sencilla de todas, se conforma de dos circuitos eléctricos acoplados por medio de un circuito magnético que es común para ambos. Visto de otra forma éste se compone de dos devanados principalmente (aunque puede tener más), acoplados a través de un flujo magnético mutuo. Uno de estos devanados se le denomina primario y al otro secundario.

Si se toma el devanado primario y se le conecta a una fuente de voltaje alterno, se producirá un flujo variante alterno el cual depende en magnitud de la amplitud y de la frecuencia del voltaje principal alimentado, así como también del número de vueltas del devanado. El flujo mutuo se enlazará con el otro devanado (secundario) e inducirá un voltaje dentro del mismo cuyo valor dependerá del número de vueltas del devanado secundario, de la magnitud del flujo mutuo y de la frecuencia.

La relación de transformación que existirá entre el voltaje de entrada y el voltaje de salida o bien voltaje en el devanado primario y el devanado secundario, está relacionada con el número de vueltas de ambos devanados, y entonces es posible que se manejen diversas relaciones de transformación.

Para el funcionamiento del transformador, es necesaria únicamente la existencia de un flujo mutuo entre devanados con una variación en el tiempo. Los devanados de un transformador usan el núcleo magnético de alta permeabilidad para concentrar el flujo mutuo, es por eso que son llamados transformadores eléctricos con núcleo de hierro y la mayoría de ellos son de este tipo.

2.8.2 Estructura y construcción de un transformador

Todo equipo eléctrico es construido en base a características específicas, sin embargo éstas deben permitir cumplir con las normas y requerimientos

necesarios para su funcionamiento, primero se deben satisfacer las necesidades de las normas internacionales y quizás después cumplir con las normas específicas de un país o conjunto de países.

En México tenemos normas para la construcción de equipos eléctricos que están desde luego descritas en la NOM (Norma Oficial Mexicana) en el apartado de aparatos eléctricos, éstas son de carácter obligatorio, sin embargo hay particularizaciones de la norma que no suelen ser obligatorias, se manejan como recomendaciones en algunas ocasiones, éstas están descritas en las Normas Mexicanas (NMX), algunas de éstas suelen ser parte de alguna norma internacional o pueden también ser recomendación hecha por otras organizaciones para la normatividad como la ANCE, el IEEE o el ANSI, entre otros; estas normas tienen diferentes objetivos como los más importantes se mencionan la calidad del equipo y la seguridad del personal que opera el equipo además de la seguridad del mismo, sin embargo como todas las normas también buscan estandarizar ciertos parámetros de utilización, un ejemplo es que el voltaje que requieren todos los electrodomésticos utilizados en el país sea de 127 V con una variación de +/- 5 ó 10%.

Esta normatividad es de gran interés para los productores o fabricantes porque entonces ya cuentan con los requerimientos necesarios, recomendados y obligatorios para la construcción o fabricación de una lavadora, un taladro, una licuadora, una bomba hidráulica, en fin prácticamente todos los equipos eléctricos de cualquier área, para el campo, para el hogar o la industria, etc.

Los transformadores son equipos que están diseñados para manejar o manipular una cantidad determinada de potencia, manejar un nivel de voltaje, así como también una cantidad de corriente específica en sus devanados, generalmente estos parámetros se localizan en una placa que el fabricante pone en todos sus equipos, estos datos son conocidos como datos de placa o datos del fabricante, estas características son las primeras que se conocen al adquirir cualquier equipo eléctrico.

Como se ha mencionado anteriormente, la fabricación de los transformadores debe contar con la mejor calidad, para ellos se deben tomar en cuenta los aspectos generales de todos los transformadores, como son: voltaje, corriente, potencia y factor de potencia.

En los transformadores monofásicos, las dos formas de construcción más comunes son las que se ilustran en la Figura 2.7 muy a menudo se nombra al transformador de acuerdo con su forma de construcción, en el caso de la Figura 2-7-a se presenta el transformador de tipo núcleo el cual cuenta con una estructura rectangular donde los devanados se localizan arrollados en las dos columnas de la estructura magnética (recordemos que la estructura está compuesta por un conjunto de laminaciones con aislante que ayudan a reducir las corrientes de eddy).

Otro tipo de transformador monofásico se denomina transformador blindado acorazado, éste se muestra en la Figura 2.7-b donde se hace evidente que las estructuras son diferentes, ésta posee tres columnas a diferencia de la estructura del tipo núcleo; la columna del medio es más ancha que las del transformador anterior, podría considerarse prácticamente que es el doble de las columnas externas de la estructura magnética. Los devanados primario y secundario están arrollados en la columna central de forma concéntrica.

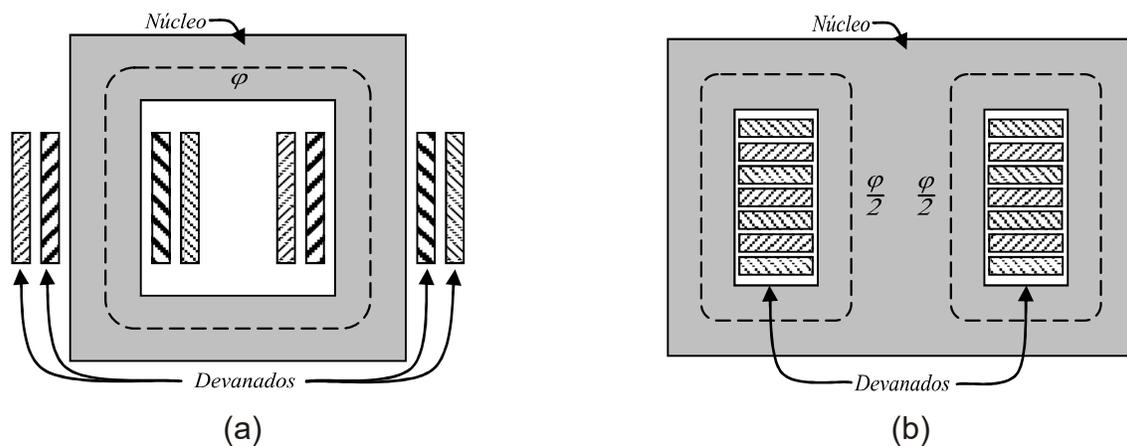


Figura 2.7 Representación de las estructuras de transformadores monofásicos

- a) Estructura tipo núcleo.
- b) Estructura tipo blindado o acorazado.

En ambas estructuras mostradas en la Figura 2.7 el flujo generado en su mayoría viaja por el núcleo debido que es donde está concentrado y es éste quien une a ambos devanados. Los devanados también producen un flujo, este flujo adicional producido recibe el nombre de flujo de dispersión. A pesar de que este flujo de dispersión es solamente una pequeña cantidad del flujo total generado, desempeña una función importante al determinar el comportamiento del transformador.

Para reducir la dispersión generada por los devanados, se subdividen los devanados en secciones que se colocan lo más cercanas posible entre sí, una sección en cada una de las piernas, haciendo que los devanados primario y secundario sean bobinas concéntricas.

En la estructura de tipo blindado o acorazado, se usan distintas formas en el acomodo de las bobinas concéntricas, por ejemplo es posible también que los devanados sean cantidades de bobinas muy delgadas ensambladas en una pila con bobinas primarias y secundarias distribuidas alternadamente.

2.8.3 Relación de transformación

Si se tiene un transformador ideal al cual se le aplica un voltaje alterno v_1 en su devanado primario, producirá un flujo variante en el núcleo φ , de esta forma el flujo enlazará a las N vueltas que tiene el devanado; esto se puede representar de la siguiente forma:

$$v_1 = e_1 = \frac{\lambda_1}{dt} = N_1 \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.31)$$

De (2.31) sabemos ya que λ_1 son los enlaces de flujo debido al devanado primario, φ es el flujo que circula en la estructura magnética y desde luego N_1 es el número de vueltas asociado con el devanado primario, recordando que es un transformador ideal y no hay flujo de dispersión.

El flujo que hay en el núcleo debido a esta excitación, produce una *fem* inducida e_2 y un voltaje inducido en las terminales del devanado secundario v_2 el cual queda determinado mediante (2.32).

$$v_2 = e_2 = N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad (2.32)$$

Analizando y comparando (2.31) y (2.32) se puede determinar la relación que existe entre los voltajes primario y secundario debida a que en ambas ecuaciones se tiene el término $\frac{d\phi}{dt}$ el cual relaciona ambos voltajes, de esta manera obtenemos lo siguiente:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} = a \quad (2.33)$$

En esta relación entre los voltajes primarios y secundarios (2.33), es la misma relación que hay entre los devanados; el término a se denomina relación de transformación.

Ahora, si se considera que se le conecta una carga al devanado secundario del transformador, ésta consumirá una corriente i_2 , como en todo transformador la potencia de entrada es igual a la potencia de salida por el principio de conservación de potencia, entonces se tiene la siguiente expresión.

$$v_1 i_1 \cos\theta_1 = v_2 i_2 \cos\theta_2 \quad (2.34)$$

Teniendo en cuenta que el transformador es ideal y no hay pérdidas ni flujos de dispersión, se puede hacer lo siguiente:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{i_2}{i_1} = a \quad (2.35)$$

De igual forma a sigue siendo la relación de transformación del transformador; finalmente se puede decir que en un transformador ideal los voltajes se convierten en proporción directa con el número de vueltas del devanado y las corrientes los hacen en forma inversa.

2.8.4 Circuito equivalente del transformador

La representación de un transformador como un circuito, es un reto aún para la ingeniería debido a las características que presenta este dispositivo, sin embargo hay circuitos aproximados que son muy utilizados para realizar estudios a los transformadores y que tienen una buena aceptación de sus resultados.

La adecuada, correcta y certera representación del funcionamiento de un transformador es el objetivo que busca todo ingeniero, así que debe dejar de lado las concepciones de transformador ideal y buscar la que se allegue más a la realidad; existen diferencias entre las consideraciones de un transformador ideal y uno real sin embargo, en la medida en que se tomen en consideración estas diferencias se obtendrá un mejor y adecuado análisis.

Un análisis completo, debe tomar en cuenta los efectos de la resistencia del devanado, los flujos de dispersión y por supuesto el valor de la corriente de excitación que presenta de acuerdo con la permeabilidad finita del material del núcleo que causa una variación no lineal.

Hay casos de estudio donde la capacitancia que existe entre los devanados es de suma importancia y afecta en cierta forma el resultado del análisis, esto se nota cuando el transformador es utilizado dentro del rango de frecuencias audibles, es decir de 20 a 2000 Hz, estas condiciones pueden presentarse en el transformador cuando hay un sobrevoltaje debido al alumbrado, sobre todo ahora con los nuevos tipos de alumbrado que transforman el voltaje para la disminución de corriente y ahorrar energía.

Se sabe de dos métodos que toman en cuenta las diferencias técnicas entre los transformadores reales y los transformadores ideales, estos son: 1) una técnica que se basa en el razonamiento físico y da como resultado un circuito equivalente y 2) una aproximación matemática basada en la teoría de los circuitos magnéticamente acoplados. El trabajo se centra en la técnica del circuito equivalente del transformador.

Recordando que el transformador tiene dos devanados, el principal o primario y el devanado secundario, nos ubicaremos en el devanado primario, ya que este devanado producirá un flujo total que se divide en dos componentes: el flujo mutuo resultante, éste está limitado al núcleo y se produce por el efecto combinado de las corrientes primaria y secundaria, además se produce un flujo de dispersión principal que tiene que ver únicamente con el devanado primario.

La Figura 2.8 muestra los flujos mencionados, en donde se colocan los devanados en cada columna para facilidad en la visualización de dichos efectos.

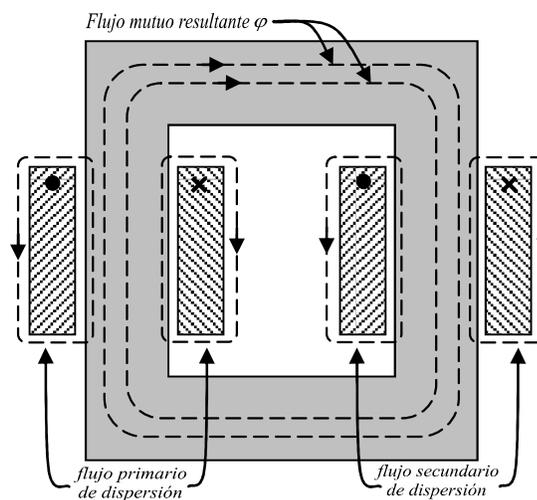


Figura 2.8 Flujos mutuos y de dispersión en un transformador.

El acoplamiento del flujo de dispersión induce un voltaje en el devanado primario que se añade al que se produce por el flujo mutuo. Puesto que la dispersión es mucho mayor a través del aire, este flujo y el voltaje inducido varían de forma lineal con la corriente primaria i_1 , lo que se menciona se puede representar por una inductancia de dispersión correspondiente al devanado primario L_{l1} . Entonces se puede determinar una reactancia de dispersión asociada X_{l1} , la cual queda determinada por la ecuación:

$$X_{l1} = 2\pi f L_{l1} \quad (2.36)$$

Además existirá una caída de voltaje asociada a la resistencia propia del devanado primario.

Continuando con el análisis se observa que, el transformador real será equivalente a uno ideal al cual se le agregarán sus impedancias externas; todas las cantidades tienen la posibilidad de referirse al devanado primario o al secundario. El circuito equivalente por lo general se representa como se muestra en la Figura 2.9, en donde se incluyen los voltajes, corrientes e impedancias.

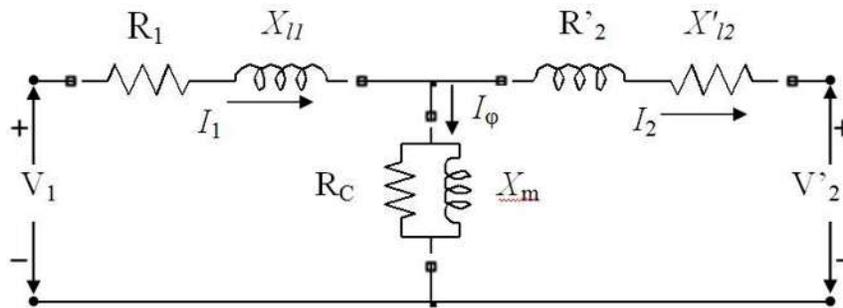


Figura 2.9 Circuito equivalente T de un transformador monofásico.

En la Figura 2.9 vemos que se presentan las resistencias de los devanados R_1 y R'_2 primario y secundario respectivamente, de igual forma están las reactancias X_{l1} y X'_{l2} de ambos devanados, también se muestran los voltajes V_1 y V'_2 junto con la dirección de todas las corrientes que intervienen.

Se muestra la existencia de una rama de magnetización por la cual atraviesa la corriente de excitación I_ϕ , esta corriente es la porción de la corriente principal que es necesaria para garantizar el funcionamiento del transformador provocando que se genere el flujo mutuo resultante; I_ϕ se divide en la corriente de pérdidas en el núcleo I_c y la corriente de magnetización I_m , además encontramos en esta rama su correspondiente resistencia de pérdidas R_c y su reactancia de magnetización X_m ; la resistencia R_c y la componente I_c de la corriente ayudan a representar y aproximar la cuantificación de las pérdidas en el núcleo.

Las variables mostradas en el circuito equivalente pueden estar referenciadas a cualquiera de ambos lados, en este caso se muestran las variables referidas al lado primario; para esta referencia se usan las ecuaciones (2.37) a (2.39).

$$X'_{l2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 X_{l2} \quad (2.37)$$

$$R'_2 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_2 \quad (2.38)$$

$$v'_2 = \frac{N_1}{N_2} v_2 \quad (2.39)$$

2.9 Obtención de parámetros del transformador

Para obtener los parámetros del transformador mostrado en la Figura 2.9, es necesario aún simplificar más el circuito, para ello requerimos de los circuitos equivalentes simplificados, en estos circuitos se mueve la representación de la rama de magnetización a las terminales de uno de los lados, el primario o el lado secundario.

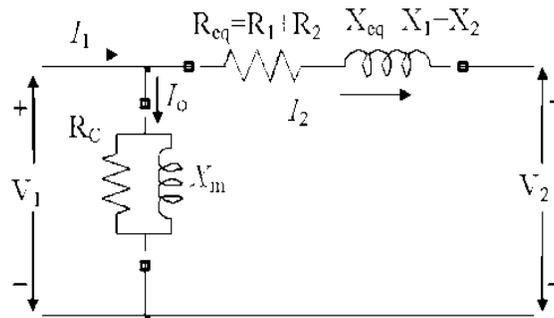


Figura 2.10 Circuito equivalente simplificado (rama de magnetización lado primario).

De acuerdo con la Figura 2.10 ahora queda en serie una rama que es la que representa entonces la combinación de las resistencias y las reactancias de los devanados del lado de alta y de baja; en numeradas ocasiones se les conoce como impedancia serie equivalente Z_{eq} . De aquí que esta impedancia esté conformada por el valor de la resistencia serie equivalente R_{eq} y de la reactancia serie equivalente X_{eq} como se muestra en (2.40). El valor de la resistencia equivalente está dado por (2.41), mientras que (2.42) determina el valor de la reactancia equivalente.

$$Z_{eq} = R_{eq} + X_{eq} \quad (2.40)$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad (2.41)$$

$$X_{eq} = X_1 + X_2 \quad (2.42)$$

Sin embargo hay otros circuitos que también se aplican a transformadores de gran potencia, éstos desde luego tienen la finalidad de simplificar más el circuito y por ello toman en consideración sólo la reactancia equivalente, pues se considera que la resistencia es tan pequeña que puede ser despreciable en ocasiones.

El circuito simplificado tiene una característica peculiar pues permite calcular la resistencia y la reactancia equivalentes (R_{eq}, X_{eq}) mediante una sencilla prueba que consiste en colocar en corto circuito una de las terminales, sin embargo resulta muy complicado el cálculo de las reactancias individuales de los devanados.

Para realizar los cálculos que tiene que ver con la inductancia de magnetización y las impedancias de dispersión es un requisito obligatorio el conocimiento del número de vueltas de ambos devanados del transformador.

No obstante es posible demostrar únicamente con mediciones en las terminales que la proporción de vueltas, la reactancia de magnetización o las reactancias de dispersión son características particulares de un circuito equivalente de transformador. Cada circuito equivalente obtenido presentará las mismas características eléctricas en sus terminales.

Realizando dos útiles y sencillas pruebas se pueden determinar los parámetros del circuito equivalente de un transformador; éstas consisten en medir el voltaje de entrada, la corriente que se suministra y la potencia del devanado primario, todo esto cuando el devanado secundario se encuentra en corto circuito y posteriormente cuando se encuentran las terminales del devanado secundario estando abiertas.

2.9.1 Prueba de corto circuito

Esta prueba se emplea con el objetivo de determinar la impedancia serie equivalente Z_{cq} , aunque la elección del devanado que se pondrá en corto circuito sea de manera arbitraria se recomienda que se haga en el lado que requiera de menor corriente para llegar a su valor nominal.

Para la realización de esta prueba es muy conveniente que el lado de alto voltaje sea el lado primario puesto que a menudo en los transformadores la impedancia serie es pequeña, en consecuencia el voltaje primario aplicado dentro de un rango de 10 a 15 % del valor nominal provocará que aparezca el valor de la corriente nominal.

Es de suma importancia medir los valores de corriente en ambos devanados para evitar que se excedan los valores de corriente nominales y se provoquen daños irreversibles a los devanados del transformador.

Ahora bien conforme lo que se hace en esta prueba, se busca la impedancia de corto circuito Z_{cc} , la cual está determinada por (2.43), donde se toma como referencia el circuito de la Figura 2.10 en la cual la rama de magnetización está ubicada en el lado primario y los valores del devanado secundario están referidos al primario.

$$Z_{cc} = R_1 + jX_{l1} = \frac{Z_\phi(R_2 + jX_{l2})}{Z_\phi + R_2 + jX_{l2}} \quad (2.43)$$

Puesto que la impedancia de la rama de excitación es mucho mayor que la de la impedancia de dispersión secundaria, sin embargo la impedancia de corto circuito se puede ahora aproximar con la expresión siguiente.

$$Z_{cc} \approx R_1 + jX_{l1} + R'_2 + jX'_{l2} = R_{eq} + jX_{eq} \quad (2.44)$$

En esta prueba se deberá hacer la medición de la magnitud *rms* del voltaje V_{cc} , la corriente I_{cc} y por supuesto la potencia P_{cc} , estas tres cantidades

características permiten calcular la resistencia equivalente R_{eq} al igual que la reactancia X_{eq} .

$$|Z_{eq}| = |Z_{cc}| = \frac{V_{cc}}{I_{cc}} \quad (2.45)$$

$$R_{eq} = R_{cc} = \frac{P_{cc}}{I_{cc}^2} \quad (2.46)$$

$$X_{eq} = X_{cc} = \sqrt{|Z_{cc}|^2 - R_{cc}^2} \quad (2.47)$$

Cabe hacer mención que para la resistencia equivalente, se puede obtener el valor usando una medición de corriente continua aplicada a los devanados primario y secundario del transformador, así obtendremos los valores de los parámetros de (2.41) que es similar a (2.46).

Desafortunadamente no existe una prueba tan sencilla para el caso de las reactancias de dispersión inherentes a los devanados del transformador X_{l1} y X_{l2} expuestas en (2.42).

Para el circuito equivalente T del transformador comúnmente se considera: $R_1 = R_2 = 0.5R_{eq}$ y de igual forma la reactancia equivalente $X_1 = X_2 = 0.5X_{eq}$, sólo si todos los valores de las impedancias estén referenciados al mismo lado.

2.9.2 Prueba de circuito abierto

La realización de esta prueba se hace a menudo aplicando el voltaje nominal en el devanado primario y teniendo el lado secundario en circuito abierto para que de esta forma, se presente una corriente de excitación pequeña comparada con la corriente de carga que puede circular por el devanado secundario. Por conveniencia en esta prueba el devanado de bajo voltaje es el primario del transformador, recordando las referencias de los valores.

La impedancia de circuito abierto Z_{ca} reflejada hacia el lado primario del transformador bajo estas condiciones es como lo muestra (2.48).

$$Z_{ca} = R_1 + jX_{l1} + Z_\varphi = \frac{R_c(jX_m)}{R_c + jX_m} \quad (2.48)$$

En este caso la impedancia de la rama de magnetización es bastante grande comparada con la impedancia del devanado primario, por lo que se puede evitar su consideración y tener entonces.

$$Z_{ca} \approx Z_\varphi = \frac{R_c(jX_m)}{R_c + jX_m} \quad (2.49)$$

Al igual que en la prueba de corto circuito podemos hacer la medición del voltaje de circuito abierto V_{oc} , la corriente circulante I_{oc} y desde luego la potencia P_{oc} , haciendo las consideraciones pertinentes y utilizando estas tres mediciones, se puede calcular la resistencia de magnetización (o de pérdidas) y la reactancia magnetizante con (2.50) a (2.52).

$$R_c = \frac{V_{oc}^2}{P_{oc}} \quad (2.50)$$

$$|Z_\varphi| = \frac{V_{oc}}{I_{oc}} \quad (2.51)$$

$$X_m = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{|Z_\varphi|}\right)^2 - \left(\frac{1}{R_c}\right)^2}} \quad (2.52)$$

Esta prueba se hace para obtener el valor de las pérdidas en el núcleo con buenas aproximaciones además de verificar el valor de la corriente de excitación.

2.10 Transformador eléctrico trifásico

2.10.1 Introducción

En los sistemas eléctricos de potencia el manejo de grandes cantidades de energía requiere de elementos capaces de soportarla para transformarla y convertirla, en general los sistemas tienen varias fases, un sistema que consta de

n fases requiere de fuentes de voltaje que posean el mismo número de voltajes, estos voltajes deben ser de igual magnitud y son defasados en forma consecutiva en un ángulo de fase de $360^\circ/n$.

En los sistemas trifásicos se utilizan tres fuentes de voltaje los cuales deben estar desplazados 120° entre cada fuente de acuerdo a lo mencionado; este tipo de sistemas traen ventajas económicas y en cuanto a la construcción de estos sistemas, se basa en los transformadores trifásicos, estos últimos están compuestos por tres transformadores monofásicos y es así que todo lo descrito en los temas 2.8 y 2.9 puede ser aplicado a los transformadores trifásicos.

2.10.2 Transformadores en circuitos trifásicos

Como en la sección anterior, es posible conectar tres transformadores monofásicos y formar un banco de transformador trifásico, existen varias formas de conectar los transformadores, las formas más comunes se muestran en la Figura 2.11, los devanados primarios se ubican en el lado izquierdo, mientras que los secundarios se localizan en el lado derecho, los devanados son representados por las líneas más gruesas; a cada devanado primario le corresponde uno secundario que se encuentra en forma paralela, también se muestran las proporciones de los voltajes en las diferentes terminales de los transformadores.

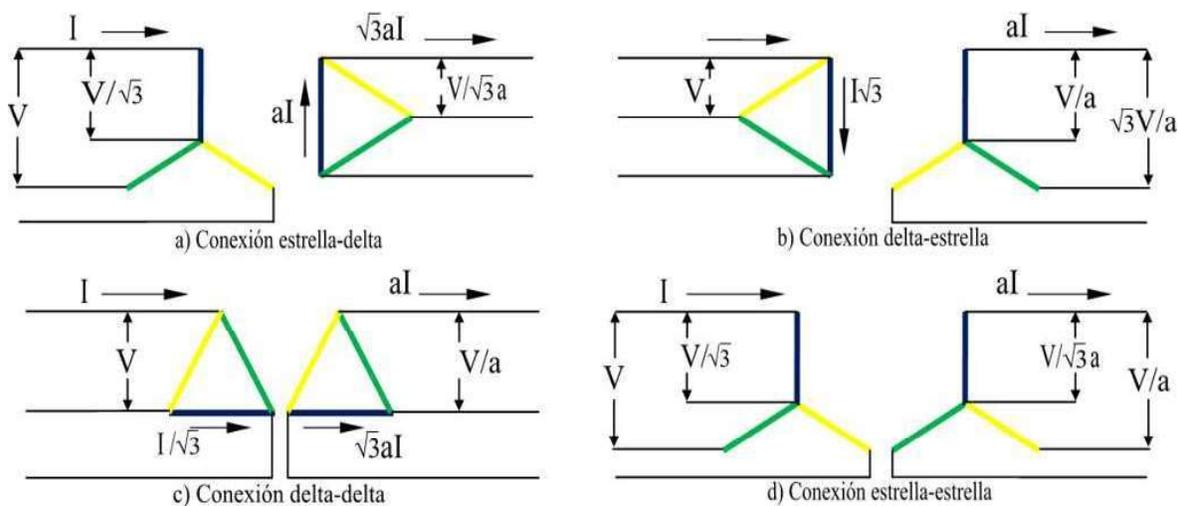


Figura 2.11 Conexiones comunes para transformadores.

En la Figura 2.11 podemos observar cuatro conexiones diferentes, la Figura 2.11-a muestra la conexión de los devanados primarios en estrella, es decir comparten todos un punto en común, a este punto se le denomina punto neutro; los devanados primarios están conectados es delta, los tres devanados comparten sus terminales, una de ellas con un devanado y la otra con el otro devanado, aquí no hay punto en común; esta conexión se denomina estrella delta.

La conexión contraria sería la que muestra la Figura 2.11-b es decir que este banco de transformadores está conectado en delta estrella, los primarios están conectados en delta mientras que los secundarios están comunicados en estrella con el punto neutro en común.

La conexión delta delta se ve en la parte inferior izquierda, esta corresponde a la Figura 2.11-c, no olvidemos mencionar la característica perteneciente de los banco; todos los devanados primarios y secundarios deben ubicarse en forma paralela, para esta figura los devanados correspondientes son los inferiores en ambas deltas, los del lado izquierdo y los del lado derecho.

El mismo caso se presenta en la última de las conexiones más frecuentes la cual le corresponde la Figura 2.11-d, en ella se muestra una conexión de tipo estrella estrella donde ahora se tienen dos puntos neutros, uno en el lado primario y otro en el lado secundario del transformador.

Todas las conexiones de la Figura 2.11 pueden ser realizadas ya sea en un banco trifásico de transformadores monofásicos o bien en un transformador trifásico, el cual es constituido por una estructura magnética de tres piernas en donde cada una de las piernas tiene dos o más devanados, éstos tienen sus terminales disponibles para realizar los tipos de conexiones.

Lo más usual hoy en día es la construcción de transformadores trifásicos, ya que son fáciles de construir, son mucho más ligeros, tienen un tamaño más pequeño que un banco de transformadores monofásicos, son menos costosos y desde luego más eficientes. La Figura 2.12 expone un transformador trifásico.



Figura 2.12 Transformador trifásico con devanados consecutivos en sus piernas.

En la Figura 2.12 se expone la estructura del transformador, donde se percibe que las terminales de alta y de baja se encuentran en la parte superior de, este transformador presenta los devanados separados en la misma pierna, sin embargo existen tipos en los cuales uno de los devanados está posicionado encima del otro de forma concéntrica, como el mostrado en la Figura 2.13.



Figura 2.13 Transformador trifásico con devanados concéntricos en sus piernas.

Un banco de transformador trifásico está constituido como lo muestra la Figura 2.14 con tres yugos en forma de triángulo y tres piernas en los vértices de los yugos las cuales unen a los yugos superiores con los inferiores; cada una de las piernas corresponde a uno de los tres transformadores monofásicos de los que se conforma; la imagen muestra un transformador al frente y detrás los otros dos.



Figura 2.14 Banco de transformador trifásico.

En algunas conexiones de los transformadores se generan defasamientos angulares en los voltajes, estos se presentan cuando los primarios y secundarios son conectados de distinta forma. En este caso las primeras dos conexiones de la Figura 2.11 que son delta estrella y estrella delta provocan esta pequeña alteración; en ambas conexiones, el voltaje secundario se desfasa 30° respecto del voltaje primario.

Existen aún más conexiones como la conexión delta abierta, estrella abierta, la conexión Scott-T y la conexión “T trifásica”, pero solamente son mencionadas pues no son parte del estudio de este trabajo. (Chapman J. 2005)

2.11 Medición en por unidad

La solución de circuitos eléctricos en las que intervienen transformadores puede resultar ser un poco tediosa debido a la necesidad de hacer referencia a un voltaje en cualquiera de ambos lados del transformador, esto para tener datos consistentes y bien referenciados; además es el paso principal para la solución de circuitos donde se encuentren transformadores, imaginemos cuán difícil será un circuito donde existan varios transformadores y cada uno con un nivel de voltaje distinto, tan sólo con escucharlo suena complicado.

Hay otra manera de resolver circuitos donde haya transformadores, con esta forma es posible eliminar la necesidad de referenciar los voltajes de cualquier

transformador a uno de sus lados; esto se hace por sí solo y ya no debe uno preocuparse por hacer los cambios necesarios en los voltajes del transformador. Esta forma o método se le llama sistema de medidas por unidad (*p.u.*).

En el sistema *p.u.* no se miden las magnitudes eléctricas como el voltaje, la corriente, la impedancia, potencia en unidades del sistema internacional (volts, amperes, ohms, watts), lo que se mide en cada magnitud eléctrica es una fracción decimal de un nivel base, cualquier cantidad puede expresarse en una base por unidad como indica (2.53).

$$\text{Cantidad por unidad} = \frac{\text{Valor real}}{\text{Valor base de la cantidad}} \quad (2.53)$$

En (2.53) valor real hace referencia a la cantidad del sistema internacional, pueden ser omhs, volts, amperes, watts, etcétera.

Comúnmente se utilizan dos cantidades base para definir un sistema por unidad, las más usadas son el voltaje y la potencia; una vez seleccionadas las cantidades base, todos las demás cantidades o magnitudes se relacionan con ellas a través de ecuaciones eléctricas válidas para así tener todo el sistema sobre la misma base. Las relaciones eléctricas más usadas se muestran en (2.54) a (2.56).

$$S_{base} = V_{base} I_{base} \quad (2.54)$$

$$Z_{base} = \frac{V_{base}}{I_{base}} \quad (2.55)$$

$$Z_{base} = \frac{(V_{base})^2}{S_{base}} \quad (2.56)$$

Este método se utiliza mucho en los sistemas de potencia en donde es común que se tomen como valores base el voltaje y la potencia aparente nominal del sistema; en lo que se refiere a los transformadores, éstos no se ven afectados porque están diseñados para transferir potencia, esto es que la potencia que

reciben a la entrada es la misma que ellos entregan en sus terminales de salida, únicamente variando el voltaje y la corriente, manteniendo la misma proporción ya que son funciones inversas; si el nivel de voltaje aumenta, la corriente disminuye, conservando así la potencia debida al producto VI.

El valor base cambia de acuerdo con su relación de vueltas al pasar por cada transformador del sistema; como las cantidades base cambian en cada transformador, el proceso de referir las cantidades a un voltaje común se tiene presente de manera automática durante la conversión en por unidad de todo el sistema, el cual incluye todos los transformadores.

2.12 Respuesta en frecuencia

2.12.1 Introducción

La respuesta que posee un sistema en estado estacionario ante una excitación senoidal se le conoce como respuesta en frecuencia; este concepto es regido por el comportamiento de la respuesta forzada y su variación con respecto a la frecuencia angular.

La resonancia es una condición especial ya que existe cuando una excitación senoidal de una amplitud constante produce una respuesta de amplitud máxima. El sistema resonante puede ser eléctrico, mecánico, hidráulico, acústico o de cualquier otro tipo. El análisis que permite examinar la forma en que se comporta un circuito como función de la frecuencia de su entrada, es la llamada respuesta en frecuencia del circuito.

2.12.2 Análisis de respuesta frecuencia

La respuesta en frecuencia es una representación de la respuesta del sistema a entradas senoidales a distintas frecuencias. Esta salida será también una onda senoidal pero con diferente fase y módulo. Si se aplica una entrada senoidal a un sistema, la respuesta forzada se observa como otra señal senoidal de la misma frecuencia.

La respuesta en frecuencia se define como los cambios o diferencias de magnitud y fase entre la entrada y la salida de un sistema. Esta característica es de un sistema que tiene una respuesta medida, es decir que es el resultado de aplicar una entrada conocida. La respuesta en frecuencia de cualquier sistema debería ser plana, esto es que debe tratar de igual forma a todas las entradas.

El uso de técnicas de respuesta en frecuencia brinda una alternativa a los criterios de comportamiento en el dominio temporal de los sistemas invariantes en el tiempo. La herramienta matemática básica utilizada es el álgebra de fasores.

Usando la representación de fasores de la entrada así como de la componente forzada de la salida, la razón de la salida respecto de la entrada es una función algebraica que se puede expresar a cualquier frecuencia como un número complejo. Una relación de transferencia que se determina para una frecuencia única, sólo representa la respuesta en estado estacionario a una entrada senoidal. No obstante, una expresión que es válida cuando la frecuencia varía desde cero hasta infinito constituye un modelo lineal completo.

La función de transferencia es la relación de la entrada y la salida del sistema, es obtenida a partir del análisis de respuesta en frecuencia. La función de transferencia es un modelo matemático que tiene por objetivo describir el comportamiento de un sistema; conocer cómo responderá cuando en su entrada se le aplica una variable física.

Cualquier sistema físico, sea mecánico, eléctrico o hidráulico, se puede representar mediante a una serie de valores matemáticos a través de los cuales se conoce el comportamiento frente a valores concretos.

Existe una relación útil entre los modelos de función de transferencia obtenidos mediante álgebra de fasores y los obtenidos utilizando técnicas de basadas en la transformada de Laplace. Las funciones de transferencia son intercambiables entre las dos técnicas sustituyendo sólo el término s por $j\omega$.

Aunque el álgebra de fasores no presenta parecido con la metodología de Laplace con respecto a la representación de señales, hay una visible similitud con respecto a cómo se aplican las relaciones operacionales al modelo del sistema. Ambas técnicas convierten relaciones de ecuaciones diferenciales a relaciones de ecuaciones algebraicas y las operaciones de derivación e integración se sustituyen por multiplicación y división respectivamente, por la variable transformada. Por lo tanto, tienen un grado limitado de cosas en común, como se observa en la estructura del modelo del sistema.

Una característica interesante de la relación entre las funciones de transferencia de Laplace y el álgebra de fasores se visualiza imaginando una descripción tridimensional de la función de transferencia evaluada en el plano s . Si se evalúa la función de transferencia para valores específicos de s en el plano complejo s , la evaluación de cada punto proporciona un número complejo que se puede describir en términos de una magnitud y un ángulo. Así, si se añade una tercera coordenada al plano s , la magnitud o el ángulo, cualquiera de las dos permiten evaluar cada punto del espacio s . La evaluación en todo el espacio s genera una superficie. La superficie que representa la magnitud tiene picos y valles, con puntos de amplitud cero e infinito en las situaciones de los ceros y polos, respectivamente.

Hay una conclusión experimental de la función de transferencia, mediante el álgebra de fasores se obtiene aplicando una entrada senoidal de alguna frecuencia ω , a la entrada y midiendo la magnitud relativa y/o la diferencia en la fase del ángulo de la señal de salida en estado estacionario con respecto a la señal de entrada.

La ganancia se obtiene como la razón de la amplitud de la salida entre la amplitud de entrada, y el desplazamiento de fase se determina como la diferencia entre el ángulo del fasor de la salida y el fasor de entrada. Este procedimiento se repite para diferentes frecuencias de la entrada senoidal.

El valor de la respuesta forzada para cada una de las frecuencias se obtiene asumiendo que la respuesta natural ha decaído a un valor muy pequeño que es relativamente insignificante. Aunque la respuesta en frecuencia se aplica a un sistema estable o inestable, la función de transferencia mediante álgebra de fasores tiene un significado (como una medida física) si el sistema es inestable.

La aplicación de diversas técnicas de respuesta en frecuencia para estudiar el comportamiento de sistemas lineales y su metodología proporciona una alternativa para utilizar técnicas en el plano s . La interpretación de los datos experimentales está claramente relacionada con la estructura del modelo. Generalmente se aplican conceptos de respuesta en frecuencia al problema que presenta identificar la composición de un modelo de función de transferencia.

El análisis en el dominio de la frecuencia permite obtener la función de transferencia además coadyuva a tener una pequeña idea del comportamiento del sistema por simple observación.

Cuando la excitación de una red es una señal senoidal tal como $x(t) = X \text{sen}(\omega t)$ la respuesta en estado estacionario también será una onda senoidal de igual frecuencia pero teniendo amplitud y fase diferentes: $y(t) = Y \text{sen}(\omega t + \Phi)$. Si la excitación tiene magnitud unitaria y fase cero, las funciones “Y” y “Φ” se denominan respuesta en frecuencia de la red, y dependen de la frecuencia angular.

Sea la siguiente entrada senoidal y su adecuada transformada de Laplace:

$$x(t) = X \text{sen}(\omega t) \quad \longleftrightarrow \quad X(s) = \frac{X\omega}{s^2 + \omega^2}$$

ω = frecuencia de la señal (no del sistema)

La salida tendrá una forma como la que sigue:

$$y(t) = Y \text{sen}(\omega t + \Phi)$$

donde Φ es ángulo de fase.

Para realizar el análisis en frecuencia de la salida en estado estacionario de un sistema para una entrada senoidal se puede sustituir en la función de transferencia s por $j\omega$, donde ω es la frecuencia, esto equivale a decir que la transferencia senoidal sólo considera la parte imaginaria de s . A esta función de transferencia se la denomina función de transferencia senoidal, pudiéndose representar mediante su módulo y fase. La Figura 2.15 muestra un ejemplo de un sistema con una entrada $X(s)$, una función de transferencia $H(s)$ y una salida $Y(s)$.

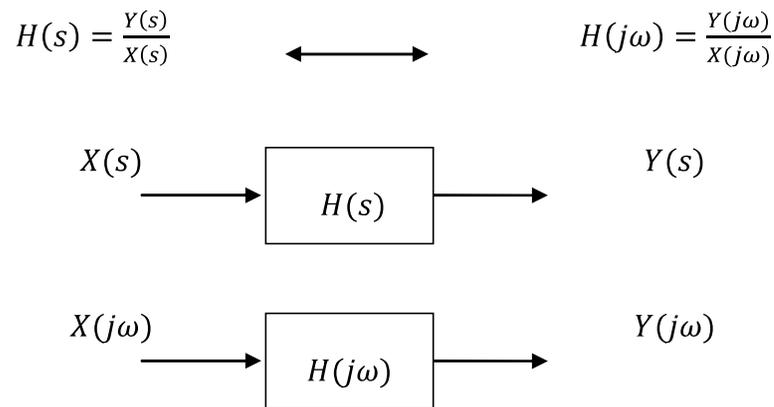


Figura 2.15 Sistemas con funciones de transferencias $H(s)$ y $H(j\omega)$.

Se desea conocer la respuesta del sistema ante una entrada senoidal pues se sabe que toda señal real periódica será en a grandes rasgos una poliarmónica, la que a su vez se podrá descomponer en series de senos y cosenos donde se tendrá en cuenta las funciones pares o impares, mediante análisis de Fourier, luego si el sistema es lineal se analizarán las señales senoidales por separado. Conociendo la respuesta del sistema a las componentes senoidales de la señal de entrada, puede reconstruirse por análisis de Fourier la señal de salida.

Capítulo 3

Modelado del transformador trifásico de tres columnas para estudios de barrido de respuesta en baja frecuencia.

3.1 Introducción

Dentro del desarrollo de este trabajo, se ha visto la importancia que tiene un transformador eléctrico en cualquier parte de un sistema eléctrico, puede ser en baja, media y alta potencia esto es posible gracias a que el transformador posee una gran versatilidad porque maneja diferentes niveles de energía sin problema alguno.

Es sumamente importante representar al transformador trifásico mediante un modelo lo más cercano a la posible realidad sin importar el número de parámetros considerados, siempre y cuando permita realizar estudios de respuesta en frecuencia para conocer su comportamiento.

Los resultados obtenidos del análisis del comportamiento del modelo del transformador trifásico serán utilizados en el siguiente capítulo ya que serán parte crucial a la hora de presentar las conclusiones del presente trabajo.

3.2 Modelo del transformador trifásico

Un modelo es una descripción de algún aparato, artefacto, fenómeno o situación; en las descripciones intervine e influye el pensamiento de quien en este caso proporciona la descripción, no obstante también hay descripciones matemáticas de los fenómenos que están hechas con el propósito generalmente de observar y analizar el comportamiento de lo que se estudia bajo diversas circunstancias; esto permitirá conocer más a fondo lo que se representa en base a un modelo certero.

Existe una inmensa cantidad de artículos de investigación en relación a estudios hechos por investigadores quienes presentan su modelo dando la explicación del mismo.

Dentro de los trabajos mencionados acerca de cómo representar esta no linealidad, encontramos a quién representa esta mediante un elemento no lineal dentro del circuito eléctrico equivalente de un transformador; este elemento se encuentra en paralelo con la rama de magnetización.

Otros dicen que los transformadores trifásicos de dos y tres devanados se forman por medio de las diferentes conexiones de los transformadores monofásicos, donde la saturación se representa mediante característica lineal por tramos.

Entonces, un modelo que se base en las características físicas del transformador y haga uso de ellas en la solución, ayudará al usuario a comprender cómo funciona el transformador de manera real.

La selección y uso de esta representación del transformador en base a sus características físicas hace que se obtenga la información de los voltajes y corrientes instantáneas de manera simple y se pueda estudiar la corriente inrush (corriente de magnetización del transformador) con diversas condiciones de magnetización, resonancia o hacer estudios con fallas en los devanados de forma desbalanceada o no, corto circuito, y otras.

No olvidemos que la representación de la no linealidad del material ferromagnético es un desafío difícil de conquistar a pesar de que se cuente con modelos muy complejos y sofisticados.

Para el desarrollo del modelo que servirá para realizar el estudio, se ha tomado en consideración el siguiente transformador trifásico de tres columnas mostrado de la Figura 3.1.

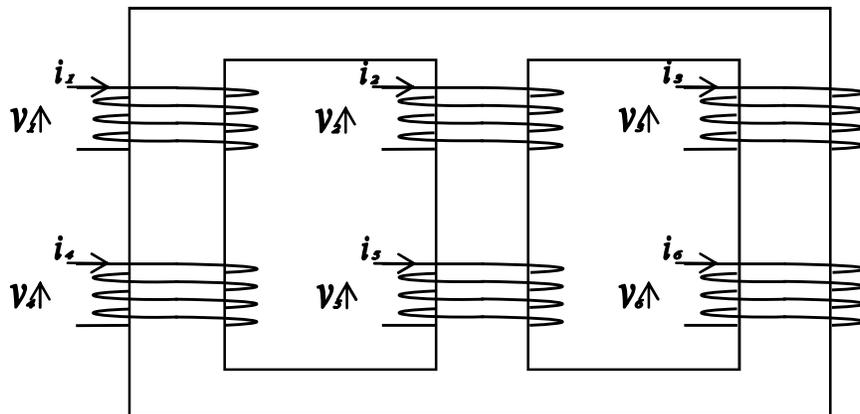


Figura 3.1 Representación del transformador trifásico de tres columnas con dos devanados por fase.

Ahora bien este transformador modelado en base a sus características físicas permite un control bastante bueno del mismo, casi en su totalidad, de hecho puede tener incluso más de dos devanados por cada una de las fases, ya sea en el lado primario o en el secundario del transformador; sin embargo nosotros tomamos el transformador de la Figura 3.1 que muestra simplemente dos devanados por fase, los cuales representan los devanados que se conocen comúnmente de todo transformador, el del lado de alta y el de baja.

Es necesario tener una representación del circuito eléctrico equivalente del transformador pues con él buscamos obtener sus parámetros de inductancias \mathbf{L} y por medio de éstas determinar su \mathbf{L}^{-1} , este parámetros es el que estará cambiando en cada una de las iteraciones respecto a la no linealidad o saturación del material ferromagnético del transformador. En la Figura 3.2 se deja ver que lo que se modela es la matriz de inductancias \mathbf{L} del transformador, esto permite que la

alimentación se derive de cualquier conexión trifásica donde se dejan las terminales libres para que si es necesario se agreguen otros dispositivos.

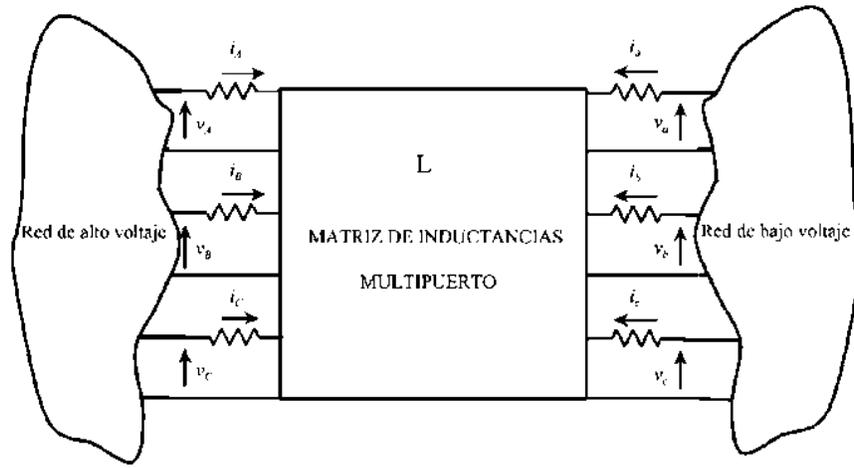


Figura 3.2 Circuito equivalente eléctrico del transformador trifásico de tres columnas

La matriz de inductancias multipuerto de la Figura 3.2 es la que depende de todas las características físicas del transformador, esta matriz es la que nos ayudará a determinar la exactitud que se desea para el modelo, otra característica que podemos manipular es si el transformador tuviese diferentes tipos de material en su estructura en diversas regiones, ya que el análisis permite ver que el flujo magnético depende también del material.

Este modelo nos permite analizar cualquier sección del transformador, ya sea una de las piernas o yugos de este, gracias a que se representa en base a su núcleo y estrictamente se sabe que es el mismo material a través de toda la estructura.

El modelo no toma en cuenta el parámetro de la capacitancia que en la realidad se encuentra presente en el transformador, lo cual indica que sólo tenemos presentes los efectos de la resistencia y la inductancia, sin embargo y con base en el objetivo que se busca sólo se manejarán frecuencias bajas en el análisis, no más allá de los 600 Hz, esto permite hacer una comparación del modelo del transformador con la forma en que un circuito RL llegaría a tener bajo estos condicionantes.

Para el modelado de un transformador lineal, no existe una diferencia importante entre que variables de estado se elijan, si los enlaces de flujo o las corrientes; pero en uno no lineal hay ventaja si se toman los enlaces de flujo como variables pues cambian más lentamente que las corrientes que los producen, lo que se refleja en una estabilidad computacional del modelo.

Si tomamos esa elección, para obtener la estabilidad, entonces la ecuación para resolver los enlaces de flujo, queda determinada de la siguiente forma:

$$\frac{d\lambda}{dt} = v - \mathbf{R}i \quad (3.1)$$

donde :

- λ Representa a los enlaces de flujo instantáneos.
- v Representa los voltajes instantáneos.
- i Representa las corrientes instantáneas.
- \mathbf{R} Representa la matriz de resistencias de los devanados.

Cada una de las variables es un vector de 6x1 de cada uno de los devanados del transformador; mientras que la otra variable de la ecuación, \mathbf{R} representa una matriz diagonal de 6x6 que es la resistencia en cada uno de los devanados.

Existe una relación entre los enlaces de flujo y las corrientes que queda determinada por:

$$i = \mathbf{L}^{-1}\lambda = \Gamma\lambda \quad (3.2)$$

El conjunto de (3.1) y (3.2) forman el modelo diferencio-algebraico del transformador trifásico para el cual es necesario el cálculo de Γ (gama; el inverso de la inductancia); primeramente debemos calcular la inductancia \mathbf{L} la cual dependen exclusivamente de los parámetros físicos del transformador.

Se asume que en el transformador hay una condición cuasi-estática, es decir que no existe retardo entre las corrientes y los enlaces de flujo que estas generan en el núcleo del transformador.

La Figura 3.3 representa el modelo del transformador basado en el parámetro de las reluctancias; las columnas del transformador donde se encuentran ubicados los devanados primario y secundario, se representan por \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 y \mathfrak{R}_3 , las secciones de los yugos entre las columnas también se representan, son respectivamente \mathfrak{R}_4 y \mathfrak{R}_5 . Los yugos son las distancias netas de los yugos inferior y superior, por lo que \mathfrak{R}_4 representa los yugos de la parte izquierda y \mathfrak{R}_5 representa de manera análoga los de la derecha.

Estas cinco reluctancias (\mathfrak{R}_1 a \mathfrak{R}_5), presentan una saturación y cambian en relación a la característica magnética del material, de manera común se asume que la característica del material es la misma para estos segmentos del circuito debido a que el núcleo está fabricado del mismo material, pero pueden existir transformadores que tengan materiales diferentes entre los yugos y columnas.

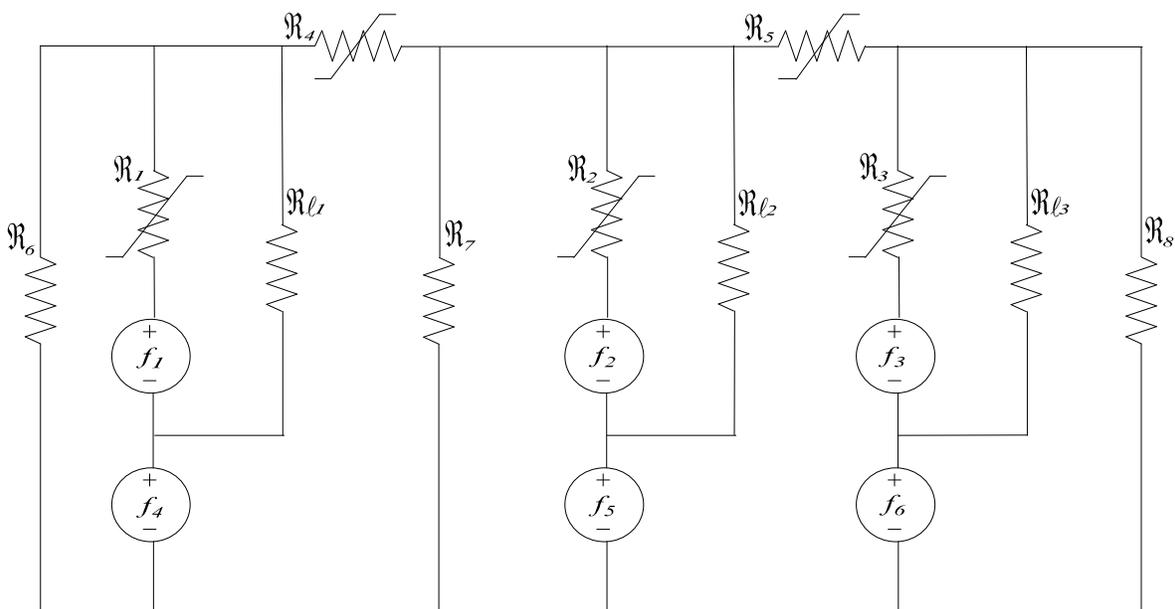


Figura 3.3 Circuito equivalente magnético del transformador trifásico de tres columnas.

Las reluctancias que aparecen en la Figura 3.3 como \mathcal{R}_6 , \mathcal{R}_7 y \mathcal{R}_8 , son las reluctancias que se considera que viajan a través del aire y de la pared del tanque del transformador, son reluctancias de dispersión, mientras que en los devanados también hay una reluctancia en el aire entre el primario y el secundario y se denotan en el circuito por \mathcal{R}_{l1} , \mathcal{R}_{l2} y \mathcal{R}_{l3} estos valores son difíciles de calcular, así que sólo se usará un valor proporcional a los segmentos a los que se relacione.

Entonces procederemos a realizar el análisis como se muestra en la Figura 3.4 donde se aplica el método de análisis por mallas para la solución de circuitos, tomando en cuenta que uno y sólo uno de los flujos de malla atraviese a cada una de las fuentes magnetomotrices presentadas en la figura, para lo cual obtenemos una relación entre cada una de las fuerzas magnetomotrices externamente aplicadas, f_i .

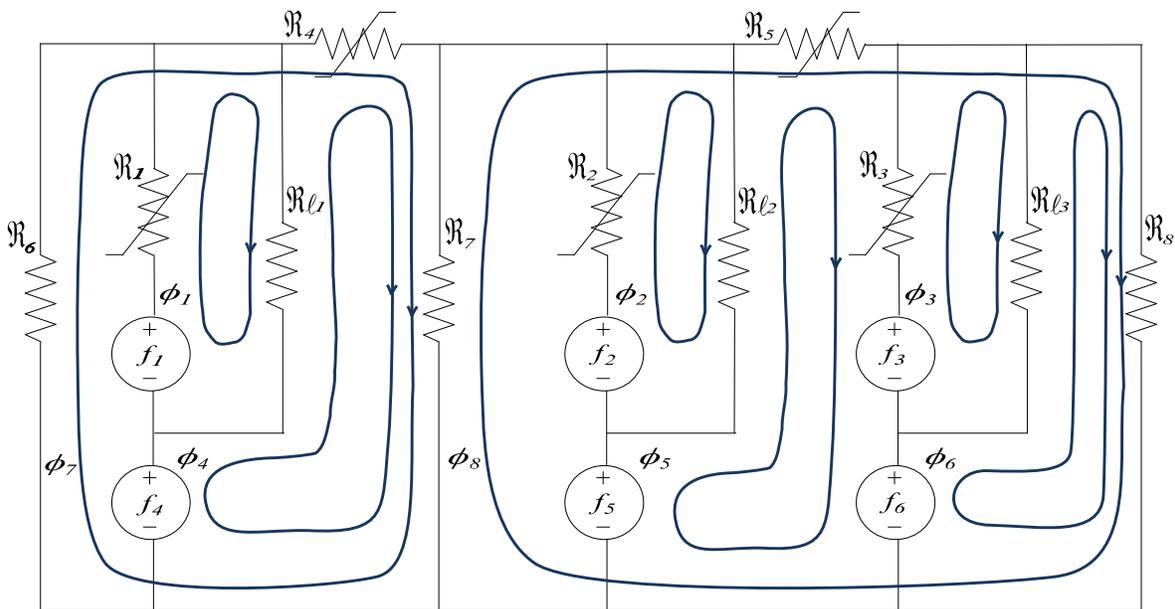


Figura 3.4 Mallas del circuito considerando un flujo de malla por fuente magnetomotriz.

La relación a la cual se hace referencia, es la que muestra una modificación de (2.14), donde se despeja la fuerza magnetomotriz y permite que la matriz sea de la forma:

donde:

\mathcal{R} es la reluctancia.

l es la longitud.

μ es la permeabilidad.

A es el área de la sección transversal.

k es el número de segmento del núcleo o estructura del transformador.

Si la selección de las mallas para el circuito es adecuada, habrá mallas que no estén directamente alimentadas mediante fuerzas magnetomotrices, por lo tanto su valor será cero. Mediante la reducción de matrices de Kron, se obtendrá nuevamente una matriz de reluctancias, sólo que ahora en la matriz habrá el mismo número de filas y columnas, que corresponden al número de incógnitas del sistema, en este caso serán 6, la reducción se determina por medio de:

$$\mathbf{A}^m = \mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}^T \quad (3.7)$$

Se pueden obtener las matrices que intervienen en esta reducción tomando en cuenta:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11} & & & \mathcal{R}_{14} & & \\ & \mathcal{R}_{22} & & & \mathcal{R}_{25} & \\ & & \mathcal{R}_{33} & & & \mathcal{R}_{36} \\ \mathcal{R}_{41} & & & \mathcal{R}_{44} & & \\ & \mathcal{R}_{52} & & & \mathcal{R}_{55} & \mathcal{R}_{56} \\ & & \mathcal{R}_{63} & & \mathcal{R}_{65} & \mathcal{R}_{66} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{74} & & & \mathcal{R}_{77} & \mathcal{R}_{78} \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{84} & \mathcal{R}_{85} & \mathcal{R}_{86} & \mathcal{R}_{87} & \mathcal{R}_{88} \end{bmatrix}$$

Para el caso donde el parámetro de la permeabilidad es necesario, en cada iteración de la solución se debe obtener la intensidad de campo (**H**) en cada uno de los segmentos de la estructura del transformador; para desarrollar este paso primero es necesario el cálculo de las fuerzas magnetomotrices en cada uno de los nodos como se muestra en:

$$fn_k = f_k + f_{k+3} + \mathcal{R}_k \frac{\lambda_k}{N_k} \quad (k = 1 \dots 3) \quad (3.12)$$

Posterior a la solución de las fuerzas nodales se hace el cálculo de H para las columnas del transformador:

$$\mathbf{H}_k = \frac{(f_k + f_{k+3} - fn_k)}{l_k} \quad (3.13)$$

Para los yugos del modelo se tiene:

$$\mathbf{H}_{k+3} = \frac{fn_k - fn_{k+1}}{l_{k+3}} \quad (k = 1 \dots 2) \quad (3.14)$$

Con la **H** que se tiene en cada instante o segmento del transformador, se puede obtener la **B** para el mismo valor de la curva de saturación y se actualiza la permeabilidad con la fórmula:

$$\mu_k = \frac{B_k}{H_k} \quad (k = 1 \dots 5) \quad (3.15)$$

Si se trabaja en *p.u.*, de (3.8) y (3.9) se induce que bajo esta referencia $\phi_k = \lambda_k$, $fmm_k = i_k$ para ($k=1\dots6$) y $\mathbf{A}^m = \Gamma$, la cual es una matriz simétrica y dispersa. Por ende la formación directa de Γ implica únicamente un manejo de la característica no lineal de saturación **H-B** en *p.u.*

3.3 Característica de saturación del transformador

Muchas investigaciones se han realizado para representar la característica no lineal que existe en los materiales magnéticos debido a la saturación, sin

embargo lo único cierto es que sólo se puede obtener una aproximación de dicha característica.

En este trabajo usaremos la aproximación que proporciona el uso de la función trigonométrica arcotangente, ésta por sí misma aporta la forma de la saturación, sin embargo lo que se requiere ahora es una normalización además de obtener el número de parámetros ínfimo para controlarla.

La ecuación propuesta para la aproximación de la curva de saturación en este caso será:

$$\lambda_m(i_m) = \lambda_n \operatorname{atan}(m i_m) + \Delta \lambda i_m \quad (3.16)$$

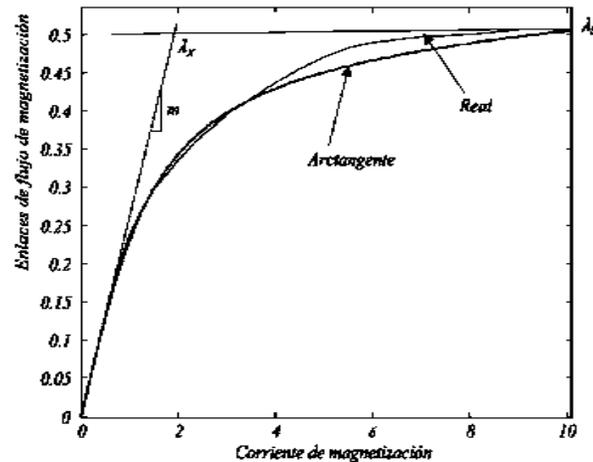


Figura 3.5 Curvas de saturación real y aproximada.

De (3.16) se puede notar que existe una dependencia en este caso de tres constantes, las cuales permiten ser calculadas a partir de los datos de posee la curva real de la siguiente manera:

$$\lambda_n = \lambda_x \frac{2}{\pi} \quad (3.17)$$

$$m = \frac{\Delta \lambda \pi}{\Delta i 2 \lambda_s} \quad (3.18)$$

$$\Delta \lambda = \frac{[\lambda_s - \lambda_n \operatorname{atan}(m i_s)]}{i_s} \quad (3.19)$$

donde:

λ_x es el valor de λ_m en el punto de cruce de las pendientes indicadas en la Figura anterior.

λ_n es el valor de λ_x normalizada al valor máximo que tiende la función arcotangente, $\frac{\pi}{2}$.

λ_s es el valor de saturación de λ_m de la característica real.

m es la pendiente inicial de la curva, normalizada al valor máximo de la arcotangente, $\frac{\pi}{2}$, y al valor de la saturación λ_s .

i_s es el valor de i para cuando se tiene el punto λ_s .

$\Delta\lambda$ es el incremento lineal de λ_m .

λ_m enlaces de flujo de magnetización.

i_m corriente de magnetización.

3.4 Datos para simulación

El modelo del transformador descrito con anterioridad por las ecuaciones diferencio-algebraicas (3.1) y (3.2) complementadas con las correspondientes a las reluctancias individuales, las corrientes y la curva de saturación permiten su implementación de manera computacional.

Parámetros para el transformador:

S, potencia nominal = 150 MVA

V, voltaje nominal = 20/20 KV

I, corriente nominal = 75 KA

R, resistencia = 0.0015 / 0.0015 p.u.

X_{cc} , reactancia de corto circuito = 0.1 p.u.

X_m , reactancia de magnetización = 1.86 p.u.

Las dimensiones del núcleo en *p.u.*, se ven en la Figura 3.6.

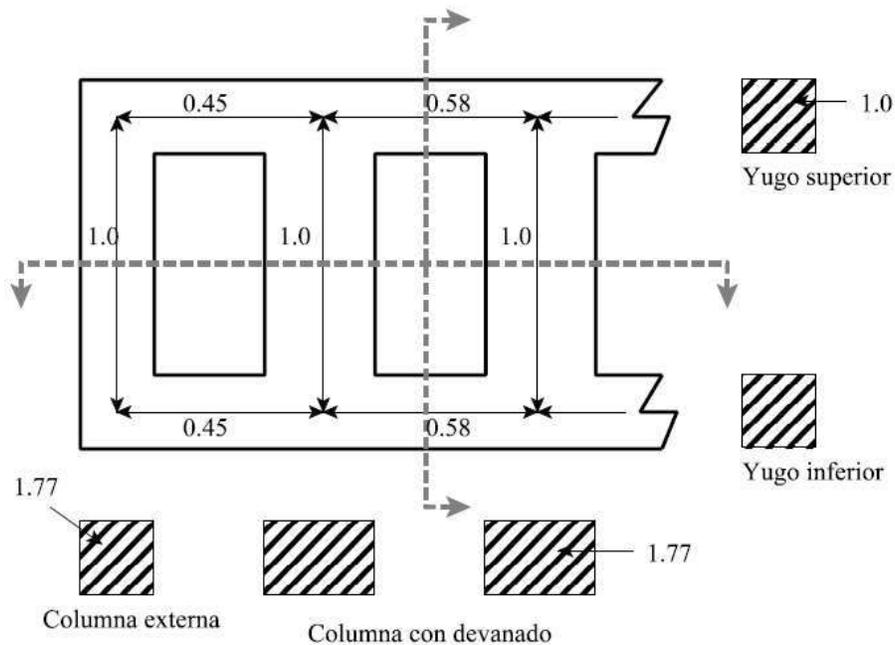


Figura 3.6 Dimensiones físicas del núcleo magnético para el transformador trifásico de tres columnas.

Datos de la curva de saturación en *p.u.*

B (0 0.8 0.9 1.0 1.1 1.15 1.2 1.24)

H (0.002 0.005 0.012 0.025 0.048 0.105 0.2)

Ahora bien, la simulación del modelo del transformador se realiza en conexión delta-estrella aterrizada. Las reluctancias no lineales \mathfrak{R}_1 a \mathfrak{R}_5 se calculan tomando en cuenta los parámetros físicos del núcleo del transformador, longitud, permeabilidad y área en *p.u.*

La permeabilidad se calcula de la característica de saturación, la cual se representa mediante la función arcotangente de la siguiente manera

$$B(H) = 0.7 \tan^{-1}(754 H) + 0.95 H \quad (3.20)$$

Donde para la obtención de B , se requiere de un valor de H y además usando (3.14) se consigue el valor de la permeabilidad en cada segmento del núcleo del transformador.

Las reluctancias \mathfrak{R}_6 , \mathfrak{R}_7 y \mathfrak{R}_8 constantes y toman un valor determinado por $1/\mathbf{L}_0 = 1/X_0$ donde X_0 es la reactancia no saturada de magnetización de secuencia cero en *p.u.*

Para las reluctancias de dispersión $\mathfrak{R}_{\ell 1}$, $\mathfrak{R}_{\ell 2}$ y $\mathfrak{R}_{\ell 3}$ al igual que las anteriores también son constantes y su cálculo se determina con $1/\mathbf{L}_{ps} = 1/X_{ps}$ donde X_{ps} es la reactancia no saturada en *p.u.* de corto circuito de los devanados del transformador.

La energización del transformador se hace considerando R_L como la resistencia de carga; cuando se encuentra a plena carga $R_L = 1$ *p.u.* es importante mencionar que para la simulación no se considera que existe un magnetismo remanente y el voltaje de alimentación es senoidal sin defasamiento alguno.

La simulación y los resultados del modelo del transformador trifásico de tres piernas (3.1) y (3.2) se desarrollarán y analizarán en el capítulo cuatro.

Capítulo 4

Simulaciones y resultados

4.1 Introducción

En este capítulo se analizará un sistema monofásico resistivo inductivo, o RL con el fin de coadyuvar a la mejor comprensión del transformador; con este modelo se tendrán las bases para encontrar una ecuación que describa el comportamiento del mismo; dicha ecuación debe contener entre sus variables a la velocidad angular, la cual depende de la frecuencia; con esto se podrá analizar el modelo aplicándole el barrido en baja frecuencia, con la aplicación de esta técnica se estudiarán los resultados que presente la simulación.

Posteriormente se desarrollará la simulación del modelo del transformador del capítulo anterior descrito por (3.1) y (3.2) y al igual que el sistema monofásico, se le aplicará el barrido de frecuencia para visualizar los cambios que proporcione la prueba; mientras tanto se usará un sistema RL trifásico como representación del transformador y se modelará en función de los parámetros del modelo del transformador de tres columnas e incluyendo la velocidad angular

4.2 Sistema RL monofásico

Para el estudio del circuito RL simple, tomaremos en cuenta sólo la respuesta forzada (o de estado permanente), ya que en este trabajo lo que importa es el estado estable.

Consideraremos el circuito de la Figura 4.1, para esquematizar y determinar las ecuaciones que se utilizarán para modelar el circuito en MATLAB y establecer la similitud con el circuito modelado del transformador trifásico de tres columnas del capítulo anterior.

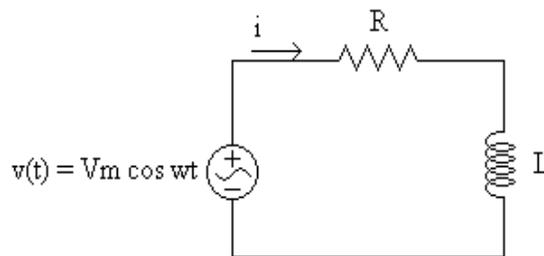


Figura 4.1 Circuito RL con alimentación senoidal.

Este circuito se analizará bajo los términos de respuesta a estado permanente y una excitación senoidal dada por:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t) \quad (4.1)$$

Aplicando la Ley de Voltajes de Kirchoff al circuito de la Figura 4.1, obtenemos la siguiente expresión.

$$v(t) = v_L + v_R \quad (4.2)$$

Debemos tomar en cuenta la que el voltaje que posee un inductor está determinado de la manera siguiente por:

$$v_L = L \frac{di(t)}{dt} \quad (4.3)$$

Entonces podemos sustituir (4.1) en (4.2) y expresando el voltaje en la resistencia v_R como el producto iR para obtener (4.3) como se ve a continuación.

$$V_m \cos(\omega t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) \quad (4.4)$$

Como la excitación del circuito es senoidal, hace que la corriente por ende lo sea también y se puede expresar de la siguiente forma:

$$i(t) = I_1 \cos(\omega t) + I_2 \sen(\omega t) \quad (4.5)$$

Entonces $\frac{di(t)}{dt}$, será:

$$-I_1 \omega \sen(\omega t) + I_2 \omega \cos(\omega t) \quad (4.6)$$

Sustituyendo entonces (4.5) y (4.6) en (4.4), se tiene:

$$L(-I_1 \omega \sen(\omega t) + I_2 \omega \cos(\omega t)) + R(I_1 \cos(\omega t) + I_2 \sen(\omega t)) = V_m \cos(\omega t) \quad (4.7)$$

Analizando la ecuación y aplicando algebra para la agrupación de términos iguales con las funciones seno y coseno, se llega a:

$$(-LI_1\omega + RI_2) \sen(\omega t) + (LI_2\omega + RI_1 - V_m) \cos(\omega t) = 0 \quad (4.8)$$

Para que (4.8) se cumpla en cualquier tiempo, se debe cumplir que los coeficientes que multiplican a las funciones seno y coseno sean igual cero, esto es que:

$$-\omega LI_1 + RI_2 = 0 \quad (4.9)$$

$$\omega LI_2 + RI_1 - V_m = 0 \quad (4.10)$$

Por lo tanto se puede observar que con (4.9) y (4.10) se tiene ahora un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas; puede utilizarse cualquier método de solución, en este caso se usará el método de sustitución para encontrar los valores de las corrientes.

En este método primeramente debe despejarse una de las dos incógnitas de cualquiera de las ecuaciones del sistema, en este caso se usará (4.9) y se procederá a despejar I_1 .

$$\omega L I_1 = R I_2 \quad (4.11)$$

$$I_1 = \frac{R I_2}{\omega L} \quad (4.12)$$

Este primer despeje, deja una de las incógnitas en función de la otra para que posteriormente la incógnita despejada I_1 se pueda sustituir en (4.10), ecuación que no se usó para el primer despeje (el de I_1) y así encontrar el valor la incógnita I_2 sin dependencia de la incógnita I_1 .

$$\omega L I_2 + R \left(\frac{R I_2}{\omega L} \right) = V_m \quad (4.13)$$

$$I_2 \left(\omega L + \frac{R^2}{\omega L} \right) = V_m \quad (4.14)$$

Un paso importante en el desarrollo del método es en este caso la multiplicación del término ωL en ambos lados de la igualdad que permite facilitar el despeje de I_2 de la forma siguiente:

$$I_2 (\omega^2 L^2 + R^2) = V_m \omega L \quad (4.15)$$

$$I_2 = \frac{V_m \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} \quad (4.16)$$

Finalmente resta sustituir esta segunda incógnita encontrada I_2 en la primera ecuación que resultó de despejar la primera incógnita donde I_1 estaba en función de I_2 .

$$I_1 = \frac{R I_2}{\omega L} = \frac{R V_m}{\omega^2 L^2 + R^2} \quad (4.17)$$

Esto hace que la respuesta forzada de la corriente $i(t)$, se describe como lo muestra (4.5) con los valores de las corrientes de (4.12) y (4.16).

$$i(t) = \frac{R V_m}{\omega^2 L^2 + R^2} \cos(\omega t) + \frac{V_m \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} \text{sen}(\omega t) \quad (4.18)$$

Para el estudio de respuesta forzada o respuesta de estado permanente, podemos suponer que se obtendrá una respuesta de la forma:

$$i(t) = A \cos(\omega t - \theta) \quad (4.19)$$

Con esta forma de la corriente en función del tiempo se requiere conocer los valores de A y θ , para ello se desarrollará el coseno de esa resta de ángulos; aplicando la identidad trigonométrica descrita por (4.20).

$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \text{sen}(x)\text{sen}(y) \quad (4.20)$$

Entonces los parámetros que sí se conocen de (4.18) y los que se requieren conocer de (4.19) están vinculados en la expresión (4.21):

$$A \cos(\theta) A \cos(\omega t) + A \text{sen}(\theta) A \text{sen}(\omega t) = \frac{RV_m}{\omega^2 L^2 + R^2} \cos(\omega t) + \frac{V_m \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} \text{sen}(\omega t) \quad (4.21)$$

De (4.21) podemos observar que los términos siguientes.

$$A \cos(\theta) = \frac{RV_m}{\omega^2 L^2 + R^2} \quad (4.22)$$

$$A \text{sen}(\theta) = \frac{V_m \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} \quad (4.23)$$

Entonces ahora se puede obtener la tangente mediante la división de los dos términos anteriores como se presenta ahora:

$$\tan \theta = \frac{A \text{sen}(\theta)}{A \cos(\theta)} = \frac{\frac{V_m \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2}}{\frac{RV_m}{\omega^2 L^2 + R^2}} \quad (4.24)$$

Gracias a (4.24) y mediante una reducción de términos semejantes se obtiene de forma simple el ángulo θ .

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \quad (4.25)$$

Para el término que hace falta obtener, es decir A , se hace lo siguiente tomando en consideración (4.22) y (4.23) elevadas al cuadrado y la siguiente expresión que representa una identidad trigonométrica:

$$\text{sen}(\theta)^2 + \text{cos}(\theta)^2 = 1 \quad (4.26)$$

$$[A \text{sen}(\theta)]^2 = \left[\frac{V_m \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} \right]^2$$

$$[A \text{cos}(\theta)]^2 = \left[\frac{RV_m}{\omega^2 L^2 + R^2} \right]^2$$

Si se suman las ecuaciones se tendrá:

$$A^2 \text{sen}(\theta)^2 + A^2 \text{cos}(\theta)^2 = \left[\frac{V_m \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} \right]^2 + \left[\frac{RV_m}{\omega^2 L^2 + R^2} \right]^2$$

$$A^2 [\text{sen}(\theta)^2 + \text{cos}(\theta)^2] = \left[\frac{V_m \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} \right]^2 + \left[\frac{RV_m}{\omega^2 L^2 + R^2} \right]^2$$

$$A^2 = \frac{V_m^2 (\omega^2 L^2 + R^2)}{(\omega^2 L^2 + R^2)^2}$$

Efectuando las operaciones necesarias para obtener A , se tiene:

$$A = \frac{V_m}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} \quad (4.27)$$

Retomando ahora (4.19), podemos entonces obtener la corriente para el circuito de la Figura 4.1 tomando en cuenta la excitación senoidal y un defasamiento natural por la carga.

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right) \quad (4.28)$$

Finalmente (4.28) es la ecuación que nos sirve para modelar el circuito en MATLAB y así poder ver su respuesta frente a los cambios que se mencionaron, ahora se codificará el programa para la visualización de los resultados.

4.3 Simulación y resultados del sistema RL monofásico

El código base para la programación del modelado de un sistema RL monofásico es el propuesto en las siguientes líneas:

```
clear all;
clc;
R = 10;
L = 30e-3;
frec=60;
tiempo = linspace(0, (2/60), 1000);
    w = 2*pi*frec;
    v = 100*cos(w*tiempo);
    a = 100/sqrt(R^2+w^2*L^2);
    fase = atan(w*L/R);
    i = a*cos(w*tiempo - fase);
subplot(2,1,1)
plot(tiempo,v,'r', 'LineWidth',2);
title('Voltaje');
xlabel('tiempo (seg)');
ylabel('v(volts)');
legend('v(t)',4);
hold on;
grid on;
subplot(2,1,2)
plot(tiempo,i,'k','LineWidth',2);
title('Corriente');
xlabel('tiempo (seg)');
ylabel('i (Amps)');
legend('i(t)',4);
hold on;
grid on;
```

El resultado que se obtiene al correr el código en MATLAB, es el que se puede apreciar en la Figura 4.2 donde se notan en forma clara el voltaje y la corriente del circuito propuesto con anterioridad, el voltaje está ubicado en la parte superior y debajo de él se distingue la corriente.

Típicamente las formas de onda son senoidales y la gráfica no es la excepción puesto que la alimentación del circuito es de esta forma.

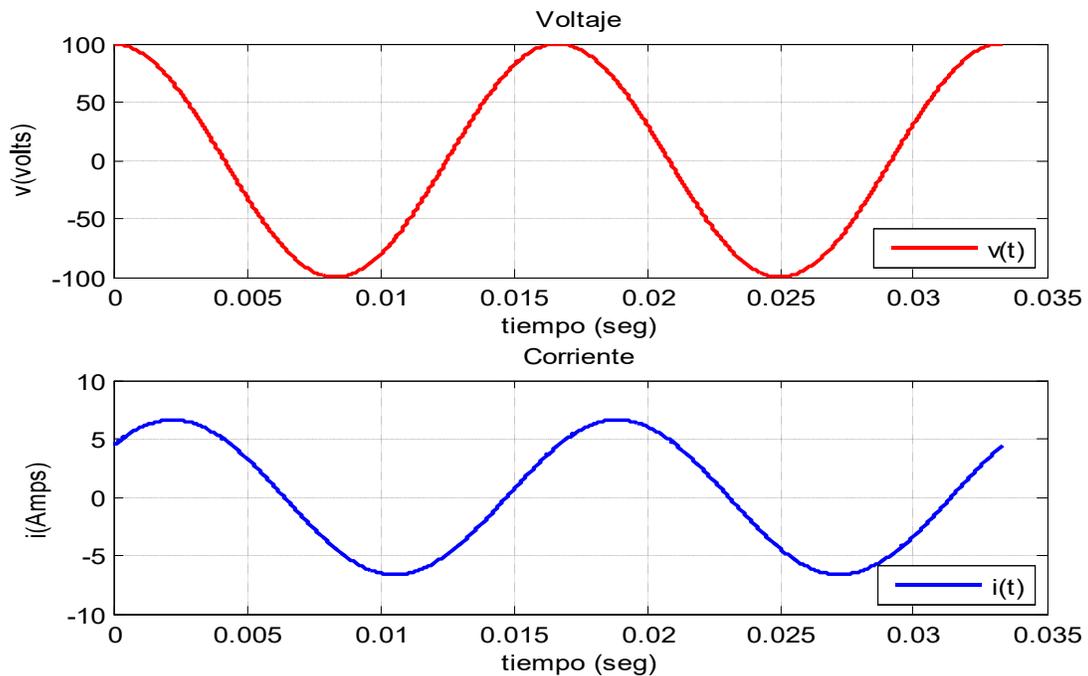


Figura 4.2 Gráficas de voltaje y corriente del circuito RL

La Figura 4.2 deja ver que el tiempo de simulación del programa es de aproximadamente 32 milisegundos, en este caso son 2 ciclos (periodos) a una frecuencia de 60 Hz, la frecuencia fundamental en México.

Se percibe además un pequeño defasamiento que es provocado por la existencia de elementos no lineales, tales como la inductancia, si uno observa detenidamente, verá que cuando se presenta el máximo valor de corriente, el máximo valor de voltaje no se produce en el mismo tiempo.

El software usado cuenta con diferentes herramientas para la manipulación de las gráficas que se generan con él y en este caso sirven para hacer un acercamiento a las gráficas de la Figura 4.2. También se pueden agregar etiquetas con información en cualquiera de todos los puntos de dicha representación; aquí se muestran las de los puntos máximos revelados en los resultados en la Figura 4.3.

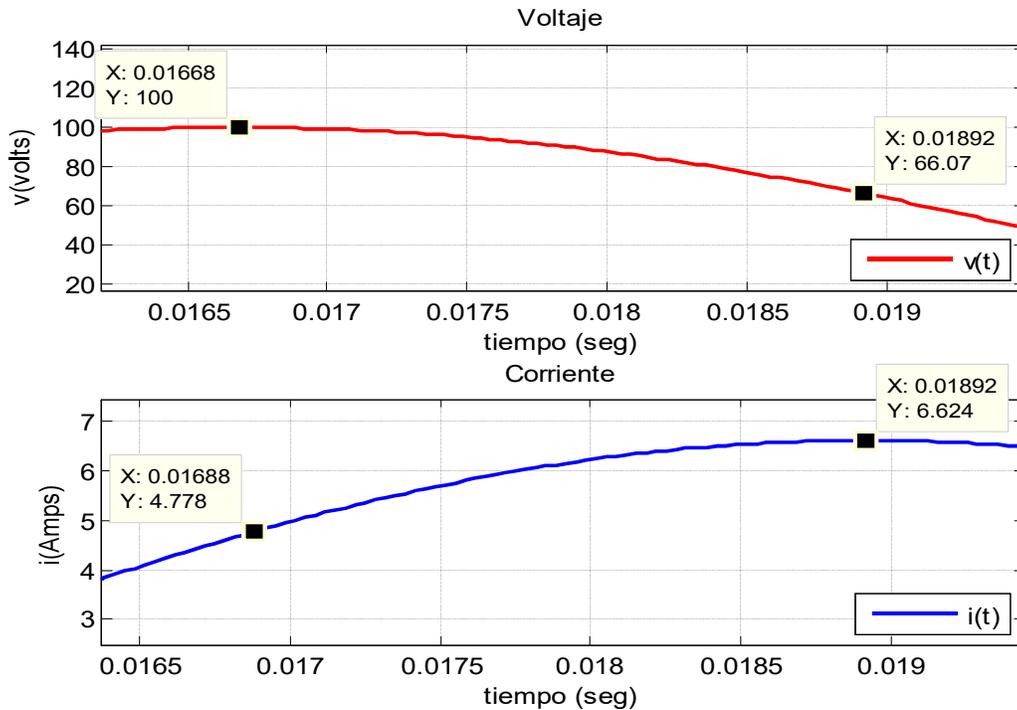


Figura 4.3 Vista del defasamiento entre el v e i

La Figura 4.3 permite ver de manera más clara el efecto de defasamiento debido al inductor del circuito; tomando como referencia los mismos puntos en cuanto el eje “x” de la gráfica que representa el tiempo ubicaremos en cada una de las gráficas el máximo valor correspondiente cuando el eje “y” toma el máximo valor; en otras palabras, en el punto cuando el voltaje es máximo, el tiempo aproximado es de 16.68 ms, en ese mismo tiempo, la corriente aún no alcanza su máximo valor; ésta alcanza su máximo valor cuando ocurre el tiempo de 18.92 ms, es decir 2.24 ms después, lo cual ratifica que las ondas verdaderamente están defasadas, el defasamiento que muestra el programa está calculado en radianes debido a que el sistema manejado es el internacional, sin embargo también se puede obtener en grados sexagesimales usando la equivalencia:

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ \quad (4.29)$$

Con los valores de simulación iniciales existe un defasamiento de 0.8468 rad lo cual equivale a 48.5171° sexagesimales, aproximadamente lo que en tiempo se reflejaba en 2.24 ms.

Si el sistema resistivo inductivo es sometido a cambios de frecuencia, debe existir una alteración en las condiciones de la corriente de salida, ahora analizaremos el mismo sistema aumentando la frecuencia de manera que sean visibles los cambios, para ello se encuentran las siguientes gráficas.

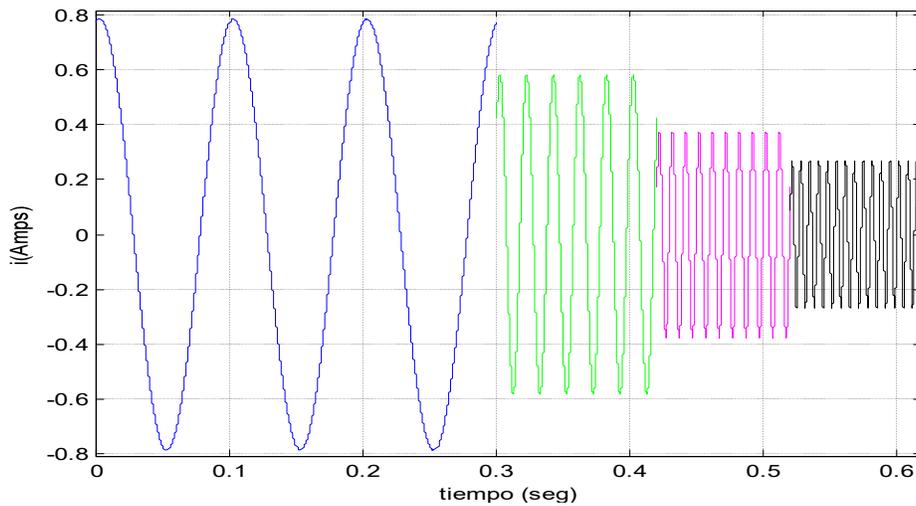


Figura 4.4 Corriente ante el incremento de frecuencia

En la Figura 4.4, se ve cómo es el comportamiento de la corriente cuando hay incrementos en la frecuencia, es evidente la disminución de ésta, la primera parte del lado izquierdo corresponde a una frecuencia de 10 Hz, el valor de la corriente es cercano a 0.8 A, sin embargo la gráfica de la Figura 4.5 nos ayuda a visualizar el valor más aproximado, en este caso la corriente son 0.7862 A, el valor máximo negativo también corresponde a ese valor.

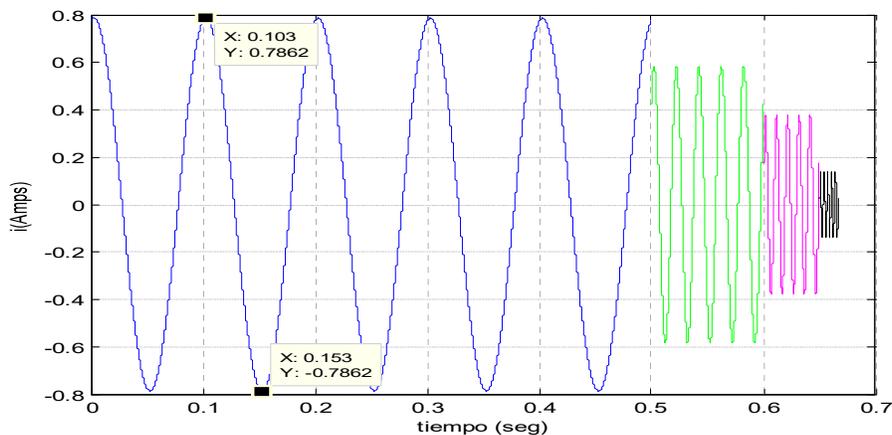


Figura 4.5 Corriente del circuito RL a 10 Hz

Haciendo un acercamiento, la segunda frecuencia de la onda de corriente se encuentra a 50 Hz y vemos que la corriente aún sigue disminuyendo, entonces si tomamos los primeros valores como referencia, tenemos que la frecuencia base en este ejemplo son 10 Hz que equivalen al 100% y además tenemos 0.7862 A como el 100% de la corriente de entrada.

La Figura 4.6 presenta la gráfica del acercamiento de la sección que tiene una frecuencia de 50 Hz, además de los valores máximos que alcanza la corriente en el transcurso de los cinco ciclos de muestra. El valor de la corriente valor de la corriente se decrementa hasta 0.5822 A es decir ahora está aproximadamente al 74% del valor de la corriente de la frecuencia anterior de 10 Hz.

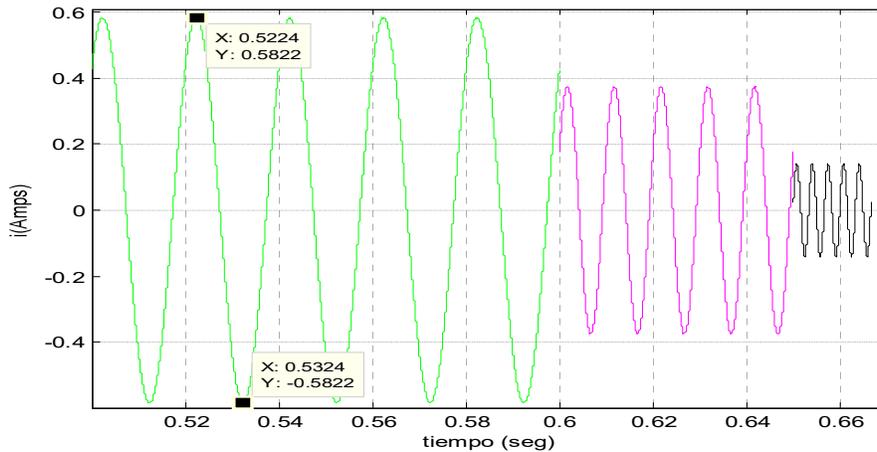


Figura 4.6 Corriente del sistema una frecuencia de 50 Hz

El siguiente incremento también será de 50 Hz para ahora ubicarnos en 100 Hz, la disminución de la magnitud de la corriente aún se mantiene, podemos ver en la Figura 4.7 que la frecuencia se ha aumentado 10 veces conforme a la frecuencia de referencia de 10 Hz, los valores de la corriente son cada vez menores, ahora están cerca del 50% del valor inicial, concretamente están por debajo, ya que son el 47.68% que refleja el valor de los 0.3749 A mostrados en la gráfica de la corriente a 100 Hz, la disminución en cuanto a porcentaje de la corriente con respecto a la frecuencia anterior es de 26.32%, lo que equivale a 0.2073 A respectivamente.

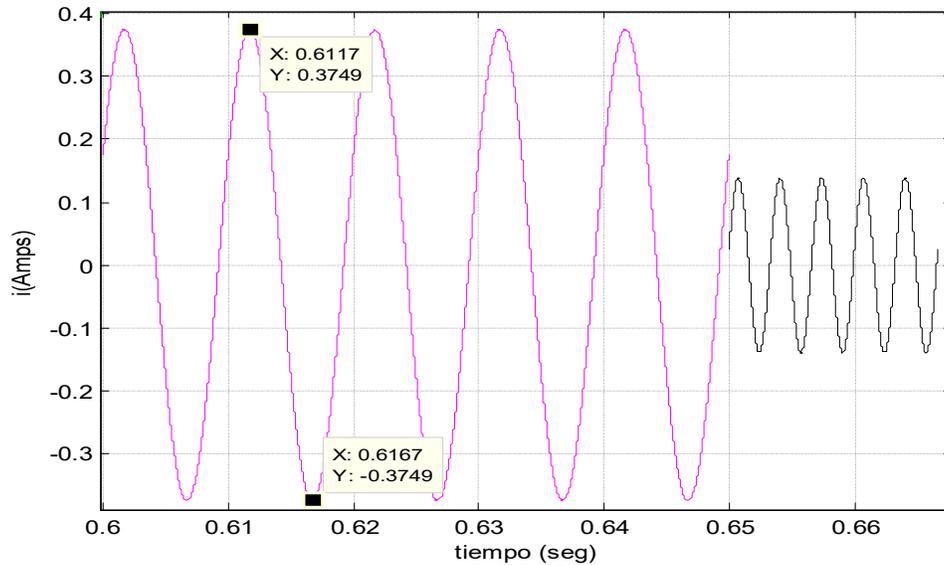


Figura 4.7 Vista de la corriente a una frecuencia de 100 Hz

Para la última parte de la gráfica del circuito RL ya se cuenta con una frecuencia entonces de 150 Hz, aún sigue cayendo la corriente hasta valores que presenta la Figura 4.7; estos valores ya no son importantes prácticamente puesto que ya son muy pequeños, estamos hablando del 33.92% de la corriente inicial, la corriente baja de un 66.08% del valor inicial y un 13.76% del valor de corriente anterior a la frecuencia de 100 Hz; este nuevo valor de corriente de 0.2667 A se muestra en la gráfica e indica que se redujeron ahora 0.1082 A.

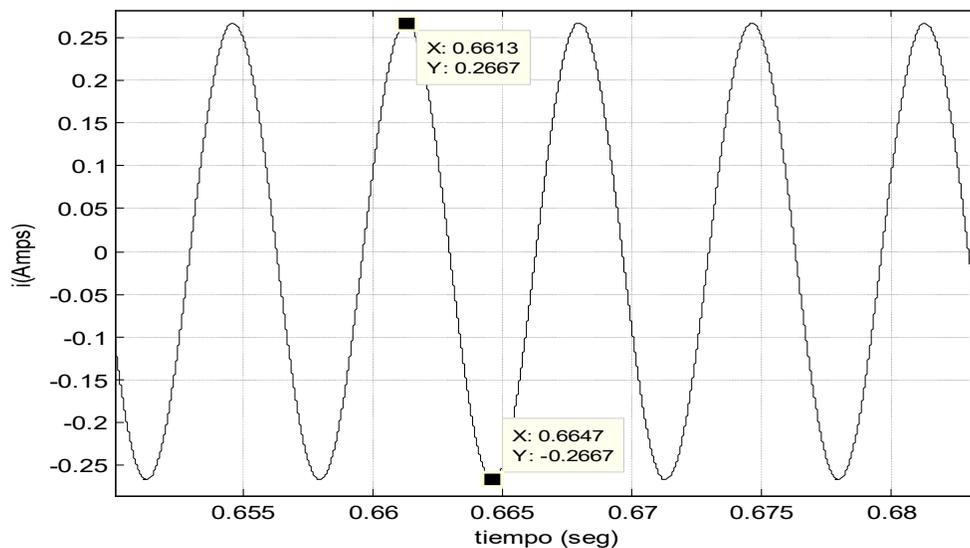


Figura 4.8 Corriente del circuito RL con frecuencia de 150 Hz

Hasta ahora sólo se han visto los cambios que sufre la corriente del circuito debido a la frecuencia, para ratificar que sólo existen cambios en la corriente, se presenta la Figura 4.9 que nos muestra una ejecución del programa con los mismos cambios de frecuencia que se realizaron para el estudio de la corriente.

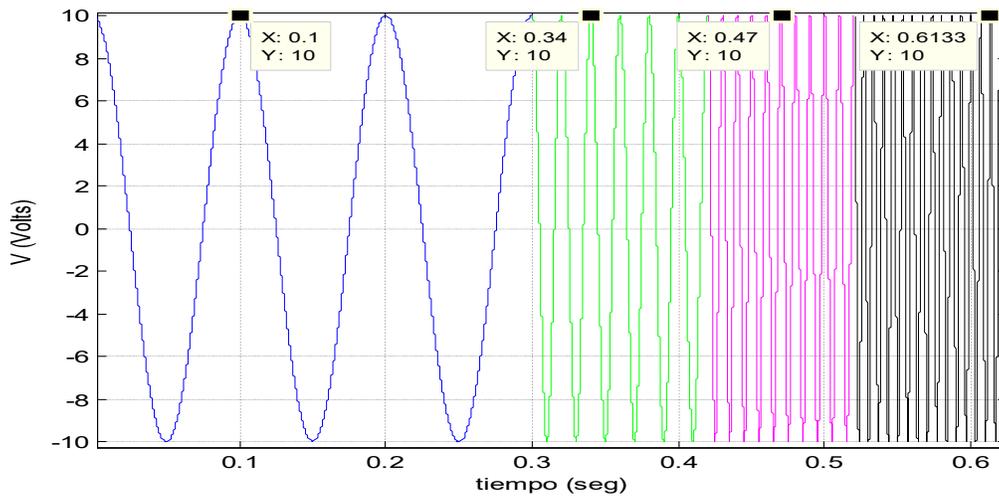


Figura 4.9 Gráfica del voltaje en el circuito RL con variación de frecuencia de 10-150 Hz

La gráfica 4.9 deja en claro que el valor de la frecuencia no influye de manera alguna en cuanto a una disminución de voltaje.

La información acerca de la simulación del circuito RL se resume en la Tabla 4.1, para visualizar los cambios que sufre el circuito.

Tabla 4.1 Cambios en cuanto a frecuencia y corriente respecto a la medición inicial.

Frecuencia	Corriente (a)	Diferencia corriente inicial (a)	Corriente inicial (%)	Diferencia corriente inicial (%)
10 Hz	0.7862	-	100	-
50 Hz	0.5822	0.2040	74.05	26.95
100 Hz	0.3749	0.4113	47.68	52.32
150 Hz	0.2667	0.5195	33.92	66.08

En la Tabla 4.1 se puede observar en cada frecuencia cómo es que se va modificando el parámetro de la corriente, muestra tanto el porcentaje de la

corriente respecto a la que se toma como base o referencia además del valor de corriente en Amperes.

Si el circuito RL estuviera abierto de sus terminales, supondríamos hay una resistencia demasiado grande entre ellas, la cual impediría el paso de la corriente; consideremos ahora una resistencia de carga mucho más grande que en el caso anterior, $R = 1\text{ K}\Omega$, para este estudio será de 100 veces más; los resultados de la simulación de esta nueva configuración del circuito, se muestran abajo en la Figura 4.10.

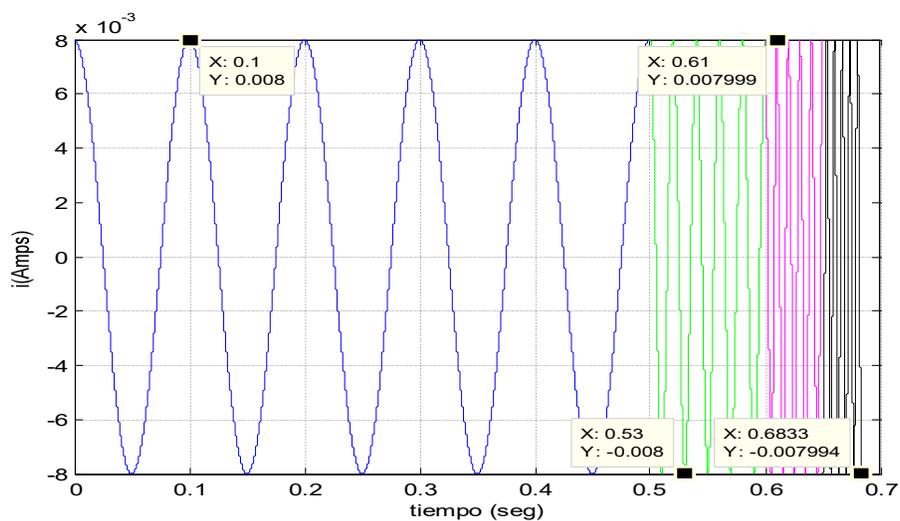


Figura 4.10 Corriente del circuito RL con $R=1\text{K}\Omega$ frecuencia de 10 a 150 Hz

La Figura 4.10 muestra una simulación similar los casos anteriores, donde la frecuencia aumenta después de cinco ciclos, en este caso se muestran los valores máximos de corriente en cada frecuencia de la simulación.

La disminución de corriente es poco visible en la gráfica, usaremos las opciones de MATLAB y así agregar las etiquetas que muestran los valores máximos de corriente y es sólo de esta manera como se puede determinar que la disminución existe, sin embargo es muy pequeña tanto así que se observa que de una frecuencia de 10 Hz a 50 Hz, el valor máximo de corriente es igual, 0.008 A , para la siguiente frecuencia, el valor es de corriente es 0.007999 A en 100 Hz, mientras que para 150 Hz el valor es de 0.007994 A .

La Tabla 4.1 resume la información, por lo que ahora haremos uso de la misma estructura pero analizando ahora la información de la configuración de circuito abierto, es decir que la resistencia de carga será muy grande comparada con la inductancia, para ello se mostrarán los resultados en la Tabla 4.2 siguiente.

Tabla 4.2 Cambio corriente respecto a la medición inicial en circuito abierto.

Frecuencia	Corriente (A)	Diferencia corriente inicial (A)	Corriente inicial (%)	Diferencia corriente inicial (%)
10 Hz	0.008	-	100	-
50 Hz	0.008	0	100	0
100 Hz	0.007999	0.000001	99.9875	0.0125
150 Hz	0.007994	0.000006	99.925	0.075

Si aumenta la carga diez veces más, es decir $R = 10 \text{ K}\Omega$, la disminución de la corriente no se puede visualizar con certeza, quizás en los valores numéricos que realiza el programa se puedan notar los cambios, pero con este valor de resistencia para la Figura 4.11 ya no representa un cambio en la corriente inicial pues es demasiado pequeña.

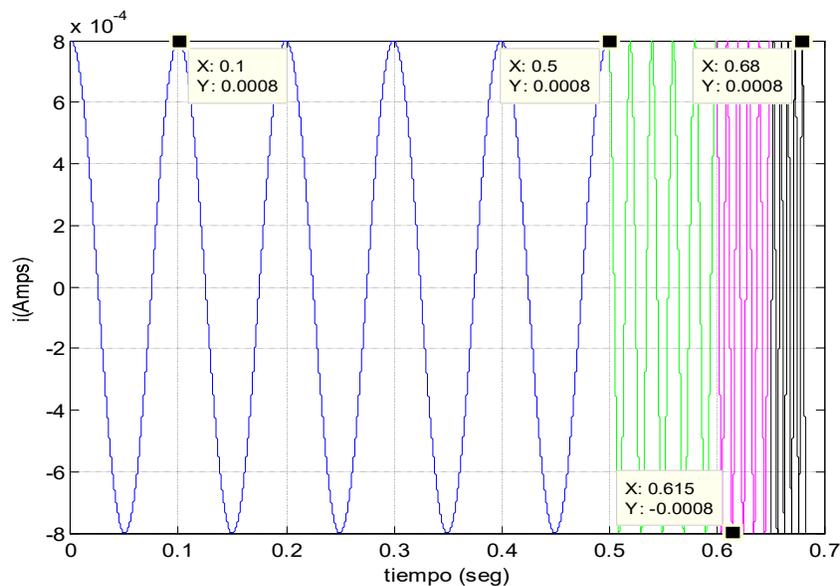


Figura 4.11 Corriente del sistema RL con $R=10\text{K}\Omega$, frecuencias de 10, 50, 100 y 150 Hz

Las simulaciones que corresponden a las Figuras 4.2 a 4.11, se hicieron utilizando sólo cinco ciclos de muestreo entre cada aumento de frecuencia, la representación de las frecuencias que fueron utilizadas es la siguiente: 10 Hz es representada por la línea de color azul, 50 Hz por la línea verde, la línea rosa o magenta muestra la operación del sistema a una frecuencia de 100 Hz y finalmente la frecuencia de 150 Hz está representada mediante la línea negra.

Se han analizado las simulaciones del circuito cuando está abierto; por otra parte se analizará la opción de corto circuito, esto es que estuviesen sus terminales en corto, lo que hace que la resistencia que hay entre ellas es tan pequeña que provocaría la aparición de la máxima corriente que pudiese circular por el sistema; para el caso de estudio se analizará ahora el sistema con diferentes valores de resistencia, primeramente será una resistencia de 10Ω , posteriormente utilizaremos una resistencia menor, repitiendo este proceso para finalizar con un valor de resistencia de 0.01Ω y así determinar nuevamente el comportamiento que tendrá el circuito RL ante cada nueva configuración.

La primera simulación del sistema con una resistencia considerable de 10Ω muestra su resultado en la Figura 4.12.

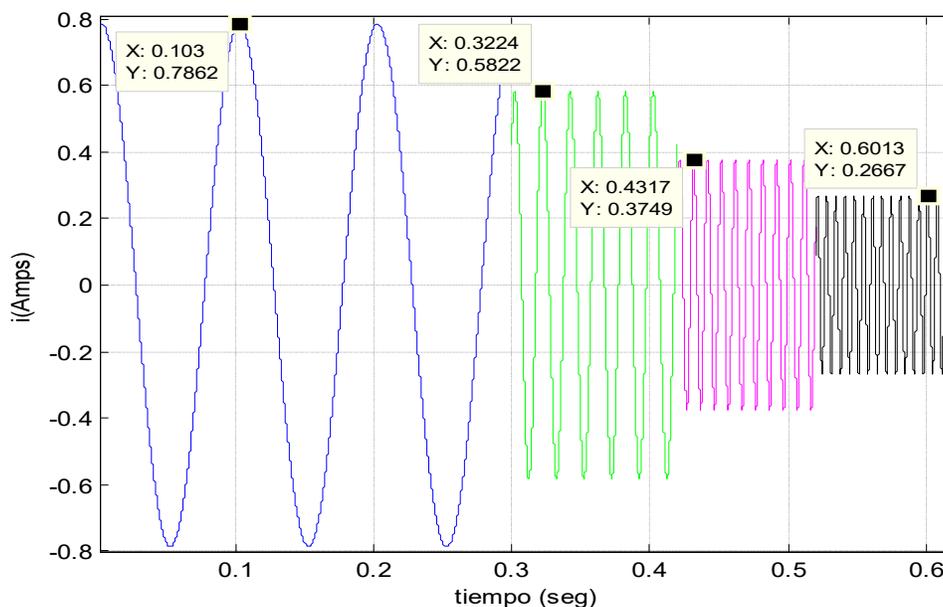


Figura 4.12 Corriente de corto circuito en la carga con $R=10 \Omega$

Vemos que se repite un patrón similar en cuanto a la disminución de corriente en el circuito, los aumentos de frecuencia son los mismos, analicemos a continuación que pasa si disminuye la resistencia de carga a $R = 1 \Omega$.

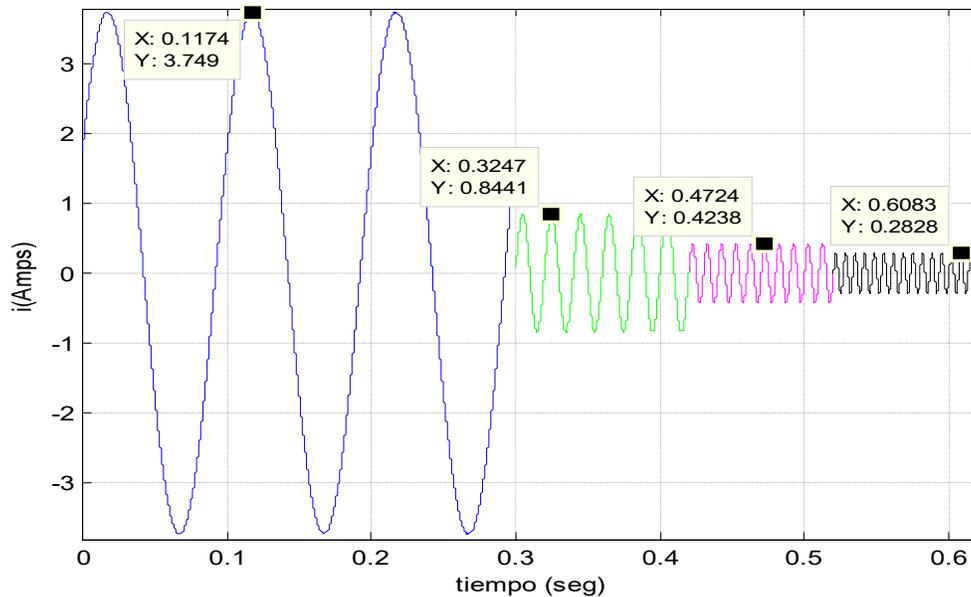


Figura 4.13 Gráfica de la corriente de corto circuito con $R=1\Omega$.

Respecto al caso anterior hay un aumento de corriente que es evidente en la Figura 4.13, ahora los nuevos valores de corriente se encuentran en un rango de 0.2828 a 3.749 A, que comparados con el caso de 10Ω , es notable el incremento, de 0.2667 pasa a 0.2828 A en 150 Hz, el cambio es mínimo a esta frecuencia; a la frecuencia de 10 Hz el cambio de corriente es mucho más evidente ya que pasa de 0.7862 a 3.749 A; las corrientes pertenecientes a la frecuencias intermedias de 50 y 100 Hz también tienen un aumento.

Analizando el circuito y buscando mejores resultados con la simulación, corremos el programa y se reduce la resistencia, en esta ocasión será 100 veces menor que la anterior y ahora quedará un valor de 0.01Ω en la resistencia de carga. La Figura 4.14 muestra que sigue existiendo un comportamiento similar ante el aumento de la frecuencia, sin embargo se ve también que aumentaron los valores de las corrientes respecto a la Figura 4.13, siendo ahora un rango entre 0.2829 A como mínimo y 4.244 A como el valor máximo.

Ahora la resistencia es 0.01Ω , los resultados se muestran la Figura 4.14.

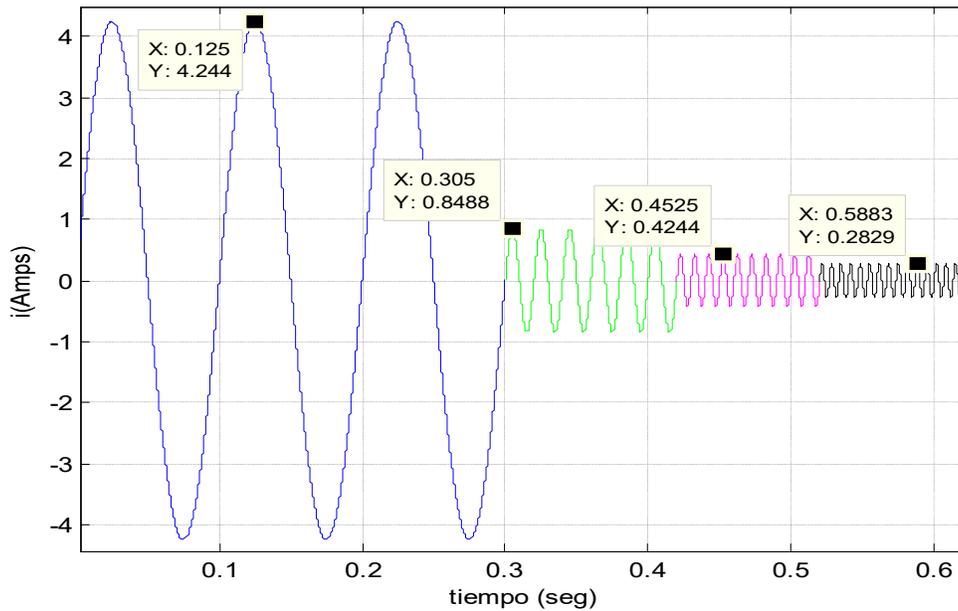


Figura 4.14 Corriente de corto circuito una carga $R=0.01\Omega$

Esta gráfica comparada con la que muestra la Figura 4.13 es muy similar; en realidad los cambios a la menor frecuencia son cambios de 0.001 A y a través de las simulaciones se ha visto que conforme aumenta la frecuencia, la reducción de corriente es menor, por lo que hacer más análisis sería poco productivo, además se está igualando el valor de la inductancia con el valor de la resistencia, esto hace que el circuito se vuelva más inductivo.

Tabla 4.3 Comparación entre cada corriente anterior en corto circuito $R=0.01\Omega$

Frecuencia	Corriente (A)	Decremento de corriente (A)	Decremento de corriente (%)	Diferencia de corriente (%)
10 Hz	4.244	-	100	0
50 Hz	0.8488	3.5752	84.24	15.76
100 Hz	0.4244	0.4244	50	34.24
150 Hz	0.2829	.1415	33.34	16.66

La Tabla 4.3 deja ver que las corrientes disminuyen a través del aumento de la frecuencia, sin embargo cabe mencionar que esta caída de corriente es cada vez menor en magnitud, sin embargo no hay proporción entre la caída en amperes y en porcentaje a pesar del incremento de frecuencia de 50 en 50 Hz.

Tabla 4.4 Comparación contra la corriente inicial a 0.01 Ω en corto circuito

Resistencia	Corriente (A)	Diferencia entre corriente inicial (A)	Decremento de corriente inicial (%)	Diferencia de corriente (%)
10 Hz	4.244	-	100	0
50 Hz	0.8488	3.5752	84.24	15.76
100 Hz	0.4244	3.8196	90.00	10.00
150 Hz	0.2829	4.1025	96.66	3.34

Hasta ahora sólo se ha analizado el sistema resistivo inductivo que ha servido de referencia para el modelado del transformador que se presentará más adelante; se ha visto cómo se comporta en circuito abierto y corto circuito; en ambas simulaciones se ha considerado el aumento de la frecuencia.

En la siguiente simulación usaremos el circuito RL codificado de MATLAB, haciendo modificaciones de manera que se visualicen los dos casos mencionados; la Figura 4.17 presenta las simulaciones del sistema, cada una representa un caso diferente, en cuanto a la gráfica de la parte superior vemos el caso del circuito con una resistencia muy pequeña (corto circuito), mientras que la gráfica de la parte inferior demuestra el caso de una resistencia muy grande (circuito abierto). Esta simulación muestra tres pasos de frecuencia, aumentando ésta en múltiplos de la frecuencia fundamental de nuestro país, esto refiere múltiplos de 60 Hz, además se utilizan 120 y 180 Hz para toda la simulación.

En la parte superior, está la simulación donde sólo aumenta la frecuencia; la resistencia de carga es pequeña y se puede considerar al sistema RL en corto circuito, a continuación se presenta el resultado de la simulación.

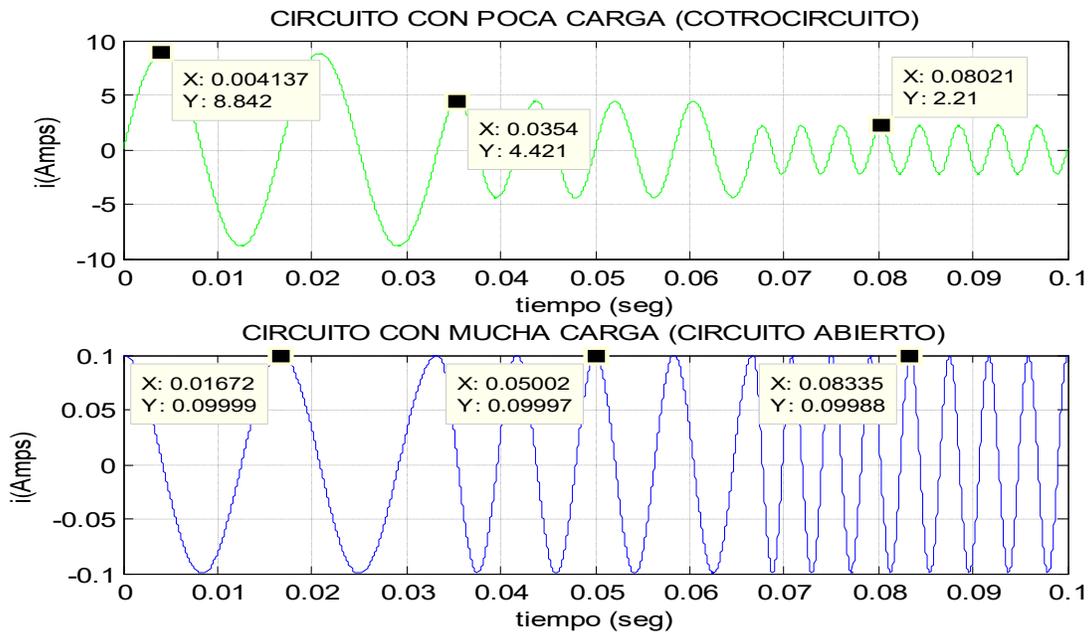


Figura 4.15 Circuito con poca y con mucha carga resistiva

En la parte inferior, está el caso de circuito con mucha carga, la gráfica muestra el sistema con carga constante, sólo varia la frecuencia, la resistencia de carga es $1K\Omega$ y se percibe que el cambio de corriente es considerablemente bajo.

Esta comparación visual nos lleva a la reflexión del porqué de la misma, pero como se sabe, en un circuito que funciona con corriente alterna, la carga es la impedancia del circuito y no sólo la resistencia; para ello debemos recordar que la impedancia está conformada por la resistencia y la reactancia en conjunto, ésta puede ser inductiva o capacitiva; en el caso del circuito RL no se puede presentar la reactancia capacitiva debido a que no aparece ningún dispositivo capacitor, sin embargo debido a la inductancia está presente la reactancia inductiva.

La reactancia inductiva se rige similarmente a (2.36); de aquí se ve la relación proporcional que ésta tiene con la frecuencia, por lo que si aumenta la frecuencia en la simulación aumentará la reactancia inductiva del sistema; al darse el incremento de la reactancia, aumentará la impedancia en consecuencia y esto provoca la caída de la corriente que se ve en la Figura 4.15.

En las simulaciones, a pesar de las diferentes características de simulación de cada gráfica, el comportamiento del circuito es el mismo, ante un incremento de frecuencia hay un decremento de corriente; la gráfica de corto circuito aclara eso, pero en la gráfica inferior, no se percibe la disminución y gracias a las etiquetas de los puntos máximos de corriente sí se nota una disminución.

Como se dijo antes, la diferencia que existe entre las gráficas de la Figura 4.15 está relacionada con la impedancia del circuito, en una de ellas (superior) el efecto de la resistencia es menor que el efecto de la reactancia inductiva, por eso la disminución de corriente es muy evidente, en este caso el sistema es más inductivo que resistivo; en la gráfica inferior está el caso contrario donde el sistema es más resistivo que inductivo y es por eso que el efecto de la reactancia es mucho menor y la disminución de corriente es casi imperceptible debido a que la resistencia no tiene dependencia alguna con la frecuencia.

4.4 Modelo algebraico-diferencial del transformador trifásico de tres piernas, simulación y resultados

Ahora bien para el análisis del modelo completo del transformador que se desea simular (mostrado en las ecuaciones del capítulo tres), se presenta la gráfica de la Figura 4.16 la cual revela cómo cambia la corriente, según el incremento de la frecuencia, este análisis se hizo a diferentes frecuencias, comprende un rango que va de los 100 Hz hasta los 600 Hz.

Se consideró dicho rango porque los parámetros del modelo pueden provocar matrices singulares a mayores frecuencias y ocasionar una simulación errónea; además el estudio que se realiza es a bajas frecuencias porque no se toma en cuenta el efecto capacitivo de los devanados del transformador.

Un estudio similar al caso del circuito RL monofásico donde se aumente la frecuencia en diferentes tiempos ayuda a comprender mejor el comportamiento de la corriente en dicho modelo, ésta se relaciona con la intensidad de campo magnético \mathbf{H} , mientras que el voltaje con la densidad de flujo magnético \mathbf{B} .

Para cada aumento de frecuencia en el programa, se toman en cuenta los primeros ciclos; los aumentos se dan en múltiplos de 100 Hz, comenzando precisamente en ese valor y hasta llegar a 600 Hz, sin embargo para el objetivo del trabajo es suficiente, porque las aportaciones de las corrientes de fuga entre devanados es despreciable a unos pocos cientos de Hertz.

La simulación del sistema (transformador) con carga constante, muestra en la Figura 4.16 que existe la reducción de corriente pero es mínima. En el lado de alta hay 1.05 *p.u.* de corriente al inicio de la simulación y de 1.03 *p.u.* al final.

Estos valores pueden resultar debido a que usaron los primeros ciclos y aquí es donde se presenta el estado transitorio, sin embargo utilizando los ciclos transitorios iniciales para todas las frecuencias se obtienen un valor de corriente de 1.03 *p.u.*, lo que deja claro el decremento de corriente en dicho sistema.

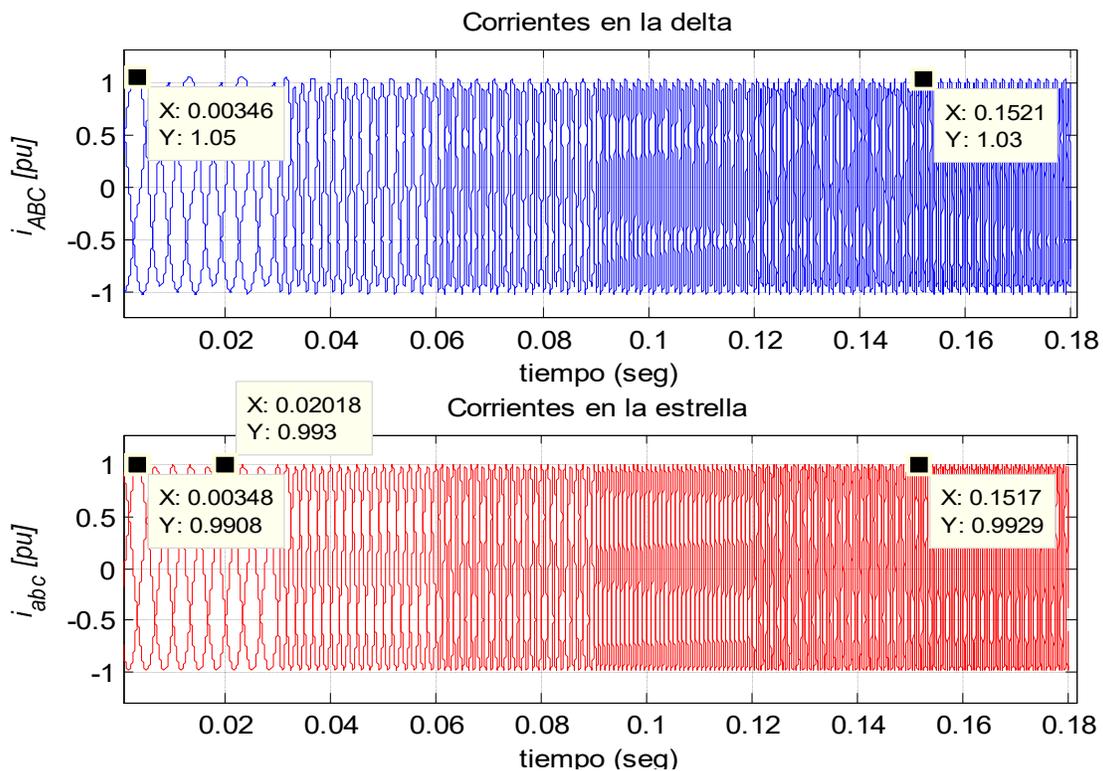


Figura 4.16 Corrientes ABC y abc del modelo completo del transformador

Para el lado de baja del sistema, buscamos similarmente los puntos donde se encuentren los mayores índices de corriente, tomando en cuenta de antemano que se encontrarán en los primeros ciclos de cada frecuencia debido al estado transitorio, a una frecuencia de 100 Hz ubicamos el valor en 99.3% de la corriente total y a 600 Hz vemos que gráficamente no disminuye mucho, pues localizamos un punto donde el valor de corriente es 99.29% de la total.

Las etiquetas en la gráfica de la Figura 4.16 muestran el valor de las corrientes en tiempos muy similares lo cual permite conocer en qué forma cambian las corrientes en el lado de alta así como en el lado de baja en instantes de tiempo muy próximos.

Para estas características de simulación del modelo del transformador se muestran ahora en la Figura 4.17 las gráficas que representan a la intensidad de campo magnético y a la densidad de flujo magnético del sistema; ambas se presentan con respecto al tiempo.

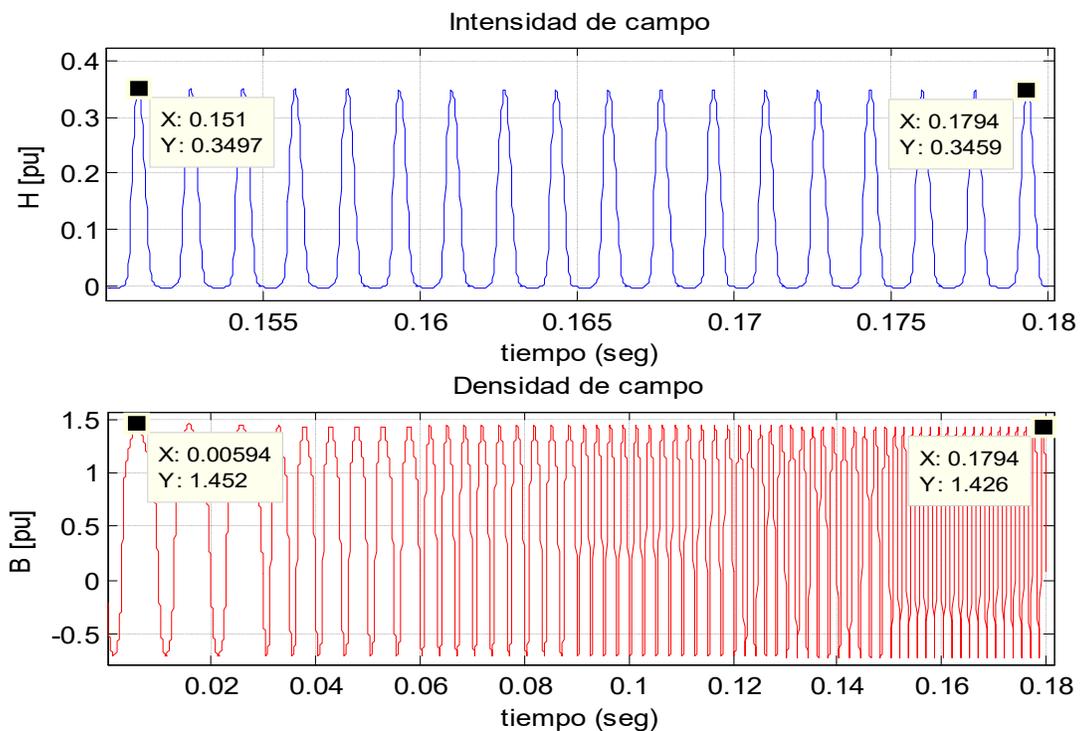


Figura 4.17 Intensidad de campo magnético y Densidad flujo magnético

Aún en la Figura 4.17 se nota la disminución que causa el aumento de la frecuencia, en el caso de la intensidad de campo magnético, pasa de 34.97% a 34.59% de su valor total, lo que representa una disminución de 0.38%; mientras que la densidad de flujo magnético se reduce también de un valor de 1.452 *p.u.*, a 1.426 *p.u.*, esto es una reducción aproximada de 0.026 *p.u.*

Hasta aquí los resultados previos pertenecen al modelo completo del transformador; donde el incremento de la frecuencia, las características de simulación y los parámetros del transformador; hace que disminuya muy poco la corriente. Pero se debe recordar que gracias a los parámetros de dicho modelo, a muy altas frecuencias pueden existir fallas en la simulación.

4.5 Circuito RL del transformador trifásico en función de la velocidad angular, simulación y resultados

Ahora se puede analizar un poco más el modelo completo del transformador trifásico de tres piernas y obtener otros resultados, para ello es necesario hacer simulaciones del sistema sin considerar el estado transitorio (presentado generalmente en los primeros ciclos y que además es de corta duración) y enfocándose al estado estacionario el cual está presente más a menudo; en el caso del circuito monofásico se hizo un barrido a baja frecuencia en estado estable.

Para hacer notar de mejor forma el efecto que tiene la frecuencia sobre el transformador a bajas frecuencias, se analizará un circuito RL trifásico equivalente del transformador y así siguiendo toda la metodología desarrollada para el circuito de la Figura 4.1; se obtendrá una expresión para la corriente en función del tiempo.

$$I_{A1}\omega \sin(\omega t) - I_{A2} \omega \cos(\omega t) - \frac{\Re_{11}R_{11}[I_{A1}\cos(\omega t) + I_{A2}\sin(\omega t)]}{N_1^2} + \frac{\Re_{11}V_A \cos(\omega t)}{N_1^2} \quad (4.30)$$

$$I_{B1}\omega \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - I_{B2}\omega \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\Re_{22}R_{22}[I_{B1}\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + I_{B2}\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})]}{N_2^2} + \frac{\Re_{22}V_B \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3})}{N_2^2} \quad (4.31)$$

$$I_{C1}\omega \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) - I_{C2}\omega \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\Re_{33}R_{33}[I_{C1}\cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) + I_{C2}\sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})]}{N_3^2} + \frac{\Re_{33}V_C \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})}{N_3^2} \quad (4.32)$$

Y si éstas se colocan en forma de (4.28), se tiene:

$$\sqrt{\frac{N_1^4 \Re_{11}^2 V_A^2 \omega^2}{(N_1^4 \omega^2 + \Re_{11}^2 R_{11}^2)^2} + \frac{N_1^4 \Re_{11}^4 V_A^2 R_{11}^4}{(N_1^6 \omega^3 + N_1^2 \Re_{11}^2 R_{11}^2 \omega)^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{N_1^2 \omega^2}{\Re_{11} R_{11}^2}\right) \quad (4.33)$$

$$\sqrt{\frac{N_2^4 \Re_{22}^2 V_B^2 \omega^2}{(N_2^4 \omega^2 + \Re_{22}^2 R_{22}^2)^2} + \frac{N_2^4 \Re_{22}^4 V_B^2 R_{22}^4 \omega^2}{(N_2^6 \omega^3 + N_2^2 \Re_{22}^2 R_{22}^2 \omega)^2}} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \tan^{-1} \frac{N_2^2 \omega}{\Re_{22} R_{22}}\right) \quad (4.34)$$

$$\sqrt{\frac{N_3^4 \Re_{33}^2 V_C^2 \omega^2}{(N_3^4 \omega^2 + \Re_{33}^2 R_{33}^2)^2} + \frac{N_3^4 \Re_{33}^4 V_B^2 R_{33}^4 \omega^2}{(N_3^6 \omega^3 + N_3^2 \Re_{33}^2 R_{33}^2 \omega)^2}} \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \tan^{-1} \frac{N_3^2 \omega (N_3^4 \omega^2 + \Re_{33}^2 R_{33}^2)}{\Re_{33} R_{33} (N_3^4 \omega^2 + \Re_{22}^2 R_{22}^2)}\right) \quad (4.35)$$

donde:

Todos los parámetros son representados por su símbolo el cual ha sido descrito en los capítulos anteriores.

Con el conjunto de (4.33) a (4.35), el cual está basado en los parámetros físicos del transformador, se realizó un barrido de baja frecuencia, desde la fundamental que es 60Hz, hasta cuatro veces la misma; el resultado lo presenta la Figura 4.18.

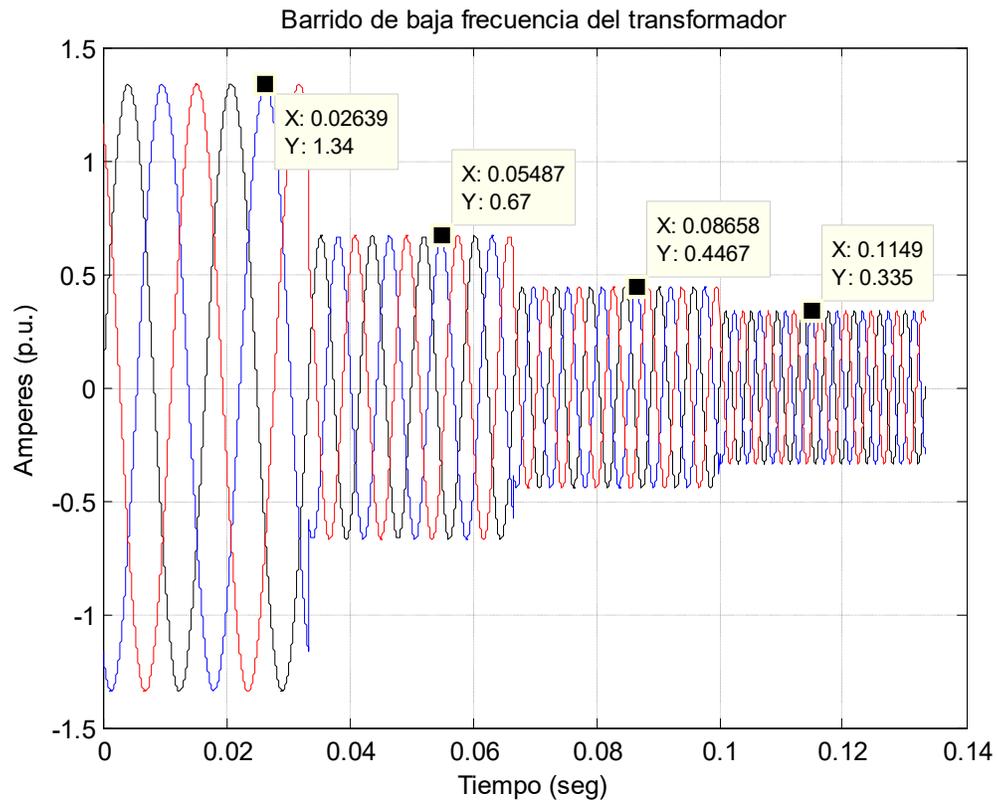


Figura 4.18 Corriente ABC del transformador equivalente

Como se observa en la Figura 4.18 existe una disminución del valor de la corriente cada determinado tiempo, en este caso los pasos o disminuciones son dependientes de la frecuencia, en cada uno presentará una disminución del valor de la corriente y un aumento la frecuencia en 60 Hz; dichos intervalos son múltiplos enteros consecutivos de la fundamental y llegan a cuatro veces ésta.

La disminución de la corriente en *p.u.* es aproximadamente de 1.005 *p.u.* desde la frecuencia fundamental hasta los 240 Hz de simulación del transformador; este es un valor considerable en nuestro ejemplo y permite demostrar que en la representación del transformador solamente como un circuito

resistivo inductivo (como es el caso), el uso de grandes frecuencias producirán grandes incrementos en la reactancia inductiva del sistema y provocarán fallas de simulación; por eso se recomienda utilizar otra representación del transformador con más aspectos a considerar; uno de ellos es el efecto capacitivo.

Este análisis usando un circuito trifásico equivalente ayuda a la comprensión de lo que sucede si se concibe al transformador como un circuito RL, no obstante como siempre pasa al usar equivalencias, se pueden hacer ciertas consideraciones o incluso aproximaciones en los valores de los parámetros que lógicamente traen como consecuencia errores en el estudio.

Por otro lado se ha planteado esta consideración del circuito resistivo inductivo con el objetivo de facilitar el estudio, pese a esto no se pretende decir que otra consideración o consideraciones sean inválidas; existen incluso modelos más complejos y sofisticados que sí toman en cuenta el efecto capacitivo presente en el transformador.

Este estudio donde sólo se considera el efecto inductivo de los devanados de un transformador es útil siempre y cuando se analice el sistema a bajas frecuencias pues no olvidemos que el efecto capacitivo tiene repercusiones sólo a partir de unos pocos cientos de Hz.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1 Conclusiones generales

A través del desarrollo de los capítulos se vio que para la mejor comprensión del funcionamiento de los transformadores eléctricos, es necesario e indispensable que se traten tópicos referentes a electricidad, magnetismo, teoría de circuitos eléctricos y magnéticos, modelado de circuitos, métodos numéricos y muchos otros más, sin embargo la conjunción de todos estos temas permitió que el trabajo se desarrollara de una manera más práctica y sencilla.

Sin embargo el objetivo del presente fue determinar cómo y en qué afecta el incremento de la frecuencia en un transformador trifásico de tres piernas; para ello se consideraron gran parte de los conceptos relacionados con el funcionamiento del transformador, desde la operación básica de conversión de energía, hasta el modelado y simulación del transformador trifásico de dos devanados por fase.

El modelado del transformador es aún un reto para la ingeniería pues hay quienes toman aspectos diferentes; en este trabajo, se aprovechó el modelo del transformador basado en reluctancias, las cuales pueden ser calculadas básicamente a partir de parámetros físicos del mismo considerando un valor determinado de permeabilidad; esto con la finalidad de encaminar una mejor comprensión de su funcionamiento.

Para asimilar más fácilmente el comportamiento real del transformador a la perturbación de bajas frecuencias, se utilizó una simplificación, la cual tiene como finalidad ver al transformador como un circuito RL es decir que está compuesto por una resistencia y una inductancia, lo cual no afectó el objetivo principal del trabajo; además recordemos que en estudios de potencia, se reduce aún más el transformador y se presenta sólo como una inductancia.

Cuando se realiza la simulación del modelo algebraico-diferencial del transformador en el capítulo 4, se usaron las frecuencias de 100 Hz y hasta los 600 Hz, es un rango en donde se podría pensar que los efectos capacitivos despreciados tendrían algún efecto perceptible en la corriente de salida del sistema, como se mencionó al final del capítulo 4, pero no fue así.

En el modelado del transformador utilizado se hizo una consideración importante, ésta se presenta al trabajar el sistema en por unidad *p.u.*, pues dicho modelo se desarrolló considerando implícitamente la velocidad angular constante, ésta interviene en los cálculos de la reactancia inductiva como lo muestra (2.36); en este modelo se usó la frecuencia fundamental para obtener el valor de la reactancia.

Para la aplicación de la técnica conocida como barrido de frecuencia, no se puede asumir la invariabilidad de la reactancia inductiva, pues dicha reactancia tiene una dependencia directa con la frecuencia de operación y es por eso que para las frecuencias de simulación, el comportamiento del sistema no presentó cambios significativos en la corriente.

El estudio efectuado fue por ende a bajas frecuencias puesto que el modelo utilizado no requirió de los efectos capacitivos que pueden encontrarse presentes entre los devanados del transformador; éstos se sabe que provocan un efecto considerable sólo a partir de unos pocos cientos de Hz, podríamos pensar incluso hasta en 300 ó 400 Hz, sin embargo esta cifras que quedan fuera del rango de frecuencias utilizadas en el capítulo 4, donde se realiza la simulación del circuito trifásico RL del transformador que incluye la velocidad angular.

Se usaron las frecuencias de 10, 50, 100 y 150 Hz para el caso del estudio del circuito RL monofásico mientras que para el modelo trifásico en función de la velocidad angular se usaron 60, 120, 180 y 240 Hz mostrándose los resultados obtenidos en gráficas donde se pueden observar de mejor forma.

Hasta ahora con los resultados que arrojaron los resultados del capítulo 4 se puede determinar de manera certera que el modelo algebraico-diferencial del transformador utilizado, no permite la aplicación del análisis de barrido de baja frecuencia, no obstante haciendo una modificación al modelo e incluyendo el parámetro la velocidad angular, se puede realizar dicha prueba y apreciar el efecto que produce la frecuencia en el transformador.

Al comparar los resultados del modelo monofásico y el modelo trifásico modificado del transformador que incluye la velocidad angular, se corrobora que el asumir a éste como un circuito resistivo inductivo es válido para frecuencias bajas de operación, y a partir de esto se obtengan resultados igualmente válidos para un estudio futuro.

Este trabajo realizado debería ser tomado en cuenta para el pronóstico o bien para predeterminar un comportamiento inadecuado o incorrecto de los transformadores cuando están bajo diversas circunstancias, entre las cuales está el cambio de la frecuencia de operación.

BIBLIOGRAFÍA

Chapman J., Steven. *Máquinas Eléctricas*. México: Mc Graw Hill, 2005.

Fitzgerald, A. E., Charles Kingsley Jr., y Stephen D. Umans. *Máquinas eléctricas*. México: Mc Graw Hill, 2004.

Gourishankar, Vembu. *Conversión de energía electromecánica*. Colombia: Alfaomega, 1995.

J. Grainger, John, y William D. Stevenson Jr. *Análisis de sistemas de potencia*. México: Mc Graw Hill, 1996.

Ogata, Katsuhiko. *Ingeniería de Control Moderna*. Madrid: Pearson Prentice Hall, 2003.

Pérez Rojas, Carlos. «Modelos avanzados de elementos del sistema eléctrico de potencia en coordenadas de fase para estudios de estabilidad dinámica.» Tesis doctoral, Nuevo León, México, 2004, 91-111.