



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLAS DE HIDALGO**



FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

TESIS

**“DETERMINACIÓN DE REALIZACIONES EN ESPACIO DE
ESTADO Y FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE
SISTEMAS MODELADOS EN BOND GRAPH”**

Que para obtener el Título de

INGENIERO EN ELECTRÓNICA

Presenta

Mayra Yadira Herrera Contreras

Asesor de Tesis

Dr. Gilberto González Avalos

Febrero del 2011

Agradecimiento

A Dios que me ha permitido llegar hasta este momento de mi vida y permitirme ver una vez más el amanecer de un nuevo día.

A mis padres: Francisco y Teresa que me han apoyado en cada momento de mi vida pero sobre todo por su inmenso amor, comprensión y apoyo incondicional a lo largo de ella, ya que sin ellos no habría podido seguir con mis estudios.

A mis hermanos Rodo, Paco y Rosy que han estado ahí en todo momento, quienes son un gran pilar en mi vida y a quienes tanto amo.

A mis profesores que puede aprender de ellos cosas que no conocía y no imagine que existieran, las cuales me han ayudado a formarme profesionalmente y moralmente, sobre todo a mi asesor el Dr. Gilberto y al Ing. Franco que me motivaron a desarrollar este trabajo de tesis.

Y sin menos importantes a mis compañeros de trabajo que se convirtieron en mis mas grandes amigos Abraham, Chucho, Julio y José Manuel que hicieron tan amenas las largas noches de estudio pero sobre todo por su apoyo incondicional y por su paciencia, compartiendo conmigo tristezas y alegrías.

Dedicatoria

A mis padres y hermanos a quien tanto amo.

A mis amigos Abraham, Chucho, Julio y José Manuel.

A las Arjonas que siempre han estado ahí en las buenas y en las malas.

A mi ángel guardián, la niña que tuve el gusto de conocer y la que me dio una gran lección de vida: Para ti Luz Milda, donde quiera que estés.

Resumen

En esta tesis se aplican técnicas tradicionales como son los diagramas de bloques donde se adquiere la Función de Transferencia de un sistema físico, así mismo, por medio del análisis de ecuaciones diferenciales para llegar a obtener las variables de estado o en dado caso la Función de Transferencia.

Se muestran ejemplos sencillos tanto eléctricos, mecánicos y de nivel de líquido usando la metodología tradicional y posteriormente compararla con los resultados obtenidos con la técnica de bond graph.

Después se aborda el tema de Bond Graph para dar a conocer las bases necesarias a la aplicación de dicho método al modelado de sistemas físicos como son: eléctricos, mecánicos y de nivel de líquido, aplicando las dos maneras de obtener las variables de estado y la Función de Transferencia en Bond Graph, extrayendo así la matriz de estructura unión y las trayectorias causales y lazos causales para la adquisición de las variables de estado y función de transferencia.

Tomando los ejemplos desarrollados en la metodología tradicional, se vuelven a resolver en bond graph en sus dos formas para así mismo hacer las comparaciones y demostrar que se llega al mismo resultado en ambos métodos, con la diferencia que en Bond Graph es más simplificado.

Finalmente, se plantean ejemplos resueltos de sistemas físicos tanto eléctricos, mecánicos como de un nivel de líquido más complejos resueltos exclusivamente en bond graph.

Contenido

	pág.
Agradecimientos.....	ii
Dedicatoria.....	iii
Resumen.....	iv
Contenido.....	v
Capítulo 1. Introducción.....	1
1.1 Antecedentes.....	1
1.2 Objetivos.....	3
1.3 Justificación.....	3
1.4 Metodología.....	3
1.5 Contenido de tesis.....	4
Capítulo 2. Realización de un sistema y modelado en Bond Graph.....	7
2.1 Metodología tradicional.....	7
2.1.1 Modelado de sistemas eléctricos.....	20
2.1.2 Modelado de sistemas mecánico.....	24
2.1.3 Modelado de sistema de nivel de líquido.....	30
2.2 Bond Graph.....	36
2.2.1 Modelado de sistemas eléctricos.....	45
2.2.2 Modelado de sistemas mecánicos.....	49
2.2.3 Modelado de sistema nivel de líquido.....	50

Capítulo 3. Determinación de la relación y función de transferencia en Bond Graph.....	52
3.1 Obtención de la función de transferencia y variables de estado.....	52
3.1.1 Sistema eléctrico.....	66
3.1.2 Sistema mecánico.....	74
3.1.3 Sistema de nivel de líquido.....	80
 Capítulo 4. Aplicaciones de metodología.....	 86
4.1 Sistema eléctrico.....	86
4.2 Sistema mecánico.....	97
4.3 Sistema de nivel de líquido.....	109
 Capítulo 5. Conclusiones.....	 120
 Referencias.....	 121

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se hará una pequeña reseña historia del surgimiento de la técnica de Bond Graph, mencionando a los creadores de dicha técnica, así como también se mostrará un panorama de los elementos que componen el trabajo de esta tesis, su objetivo principal y lo que se presentará en cada capítulo.

1.1 Antecedentes

Un Bond Graph es un método gráfico para el modelado de sistemas físicos en el que los puertos del componente de energía están conectados por curvas que especifican la transferencia de energía entre los componentes del sistema. Es similar al diagrama de bloques y la señal gráfica de flujo.

Esta herramienta es un enfoque general que permite construir modelos de sistemas:

- Eléctricos
- Mecánicos
- Hidráulicos, etcétera.

A través del tiempo, teniendo la necesidad de encontrar una mejor manera de dar explicación a los diferentes fenómenos físicos, en el siglo XIX, Lord Kelvin y James Clerk Maxwell observaron que una amplia gama de fenómenos dan lugar a formas similares de las ecuaciones, llevando a la búsqueda de analogías entre el flujo de calor y fuerza eléctrica y entre las líneas de la fuerza y agilidad de fluidos.

En los años 1940 y 1950, H.M. (Hank) Paynter del MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) trabajó en proyectos de ingeniería interdisciplinario que incluyen plantas

hidroeléctricas, la computación analógica y digital, la dinámica no lineal y control. En base a esta experiencia obtenida señaló que formas similares a las ecuaciones son generadas por los sistemas dinámicos en una amplia variedad de dominios (por ejemplo eléctrica, nivel de líquido y mecánica), es decir, estos sistemas son análogos. Paynter incorporó la noción de un puerto de energía en su metodología, y por lo tanto el Bond Graph fue desarrollado.

Posteriormente, se convirtió en una metodología, junto con Karnopp y Rosenberg en sus libros de texto (1968, 1975, 1983 y 1990), así mismo diseñan la primera herramienta computacional (ENPORT) que soporta simulaciones bajo modelos obtenidos mediante diagramas de Bond Graph.

Los primeros promotores destacados de las técnicas del modelado de bond graph que proponían en ser llevados a la práctica fueron J. Thoma (1975), van Dixhoorn (1982), y Dransfield P. Ellos contribuyeron sustancialmente a la difusión del modelado de Bond Graph en Europa, Australia, Japón, China y la India. Van Dixhoorn fundó una IMACS (*International Association for Mathematics and Computers in Simulation*) el cual tiene un Comité Técnico en el Modelado de Bond Graph presidido por el Sr. J. Thoma por muchos años. Jan van Dixhoorn realiza un rápido prototipo de diagrama de bloques basado en el software TUTSIM, el cual se puede utilizar para ingresar diagramas causales simples de Bond Graph, y ha sido la base para crear más tarde nuevas herramientas para computadoras personales. Esto último sentó las bases para el desarrollo de la tan famosa herramienta computacional, basada en puertos de Bond Graph, 20-Sim de la Universidad de Twente.

Mediante la formulación de Breedveld (1984, 1985), de un marco basado en la termodinámica, él desarrolla un Bond Graph donde hace una descripción del modelado para una teoría de sistemas.

Hoy en día, el éxito en el modelado de sistemas dinámicos utilizando Bond Graph se refleja en una serie de conferencias como es la conferencia de IMACS, primer conferencia internacional SCS explícitamente dedicada a los modelos de Bond Graph en 1993 en San

Diego, en esta conferencia se invitó a una sesión plenaria para el modelado gráfico de bonds dada por Cellier , en la edición de 1990 segunda parte del libro de texto bien conocido de Karnopp y Rosenberg y el nuevo libro de texto de Jean Thoma que fue publicado también en 1990, se han dado seminarios en la industria, y un número creciente de empresas que utilizan gráficos de bonds, especialmente en Francia.

Por último, pero no menos importante, los modeladores de Bond Graph se organizan en asociaciones nacionales, como el club de Bond Graph en los Países Bajos, o el Club de Bond Graphistes en Francia.

1.2. Objetivos

Realizar una comparativa entre el modelado de sistemas dinámicos por el método tradicional (ecuaciones diferenciales, diagramas de bloques, etc.) contra el modelado de sistemas dinámicos en Bond Graph (matriz de estructura unión y trayectoria causal – lazo causal) donde se determinan las variables de estados y función de transferencia en cada uno de ellos. Lo cuál demostrará la simplicidad, rapidez y eficiencia del Bond Graph contra el método tradicional en sistemas eléctricos, mecánicos y de nivel de líquido.

1.3 Justificación

Se pretende dar a conocer una técnica que ya tiene tiempo que fue desarrollada pero que no es muy utilizada en el área de control para la formulación del modelado de sistemas eléctricos, mecánico y nivel de líquido, ya que es una técnica rápida, gráfica y muy eficiente, lo cual ayuda a simplificar pasos matemáticos y obtener resultados en poco tiempo en comparación de los métodos tradicionales.

1.4 Metodología

El método de investigación a desarrollar es de forma inductiva a deductiva, lo cual lleva a redactar una reseña histórica de los antecedentes, fundamentos básicos así como el planteamiento de las necesidades originadas por la técnica de Bond Graph.

Es necesaria también la implementación de ejemplos simples tanto en el método tradicional y el método de Bond Graph donde en cada uno de ellos se obtendrán los mismos resultados.

Se hace uso tanto de lápiz y papel para resolver el modelado de los ejemplos planteados en este trabajo tanto en el método tradicional como en el método de Bond Graph. También cabe mencionar que a causa de la complejidad de algunas ecuaciones obtenidas en los ejercicios elaborados se hace uso del programa de Matlab para resolver suma de matrices, restas, multiplicación, etcétera o simplificar algunas ecuaciones muy grandes obtenidas en algunos ejercicios ya que el resolverlas a mano implicaría invertir tiempo y errores a la hora de realizar. El desarrollo del tema será basado en el esquema estructurado en la figura 1.1

Finalmente se desarrollarán ejemplos complejos que por el método tradicional se tardaría mucho tiempo en resolver, mientras que en Bond Graph se desarrolla en un tiempo más corto, mencionando que los ejemplos planteados son resueltos por matriz de estructura unión y trayectoria causal – lazo causal.

1.5 Contenido de la tesis

En el capítulo 1 titulado “Introducción” se da una pequeña explicación de los antecedentes históricos de Bond Graph, los objetivos que se lograrán obtener, la justificación de la investigación de esta tesis, la metodología planteada y sobre todo se explica de una forma resumida el desarrollo de este tema.

El capítulo 2 titulado “Realización de un sistema y modelado en Bond Graph” se habla sobre la metodología tradicional así como se muestra un ejemplo simple de sistema eléctrico, mecánico e hidráulico. Posteriormente, se explica los elementos necesarios para la implementación del modelado de sistemas eléctricos, mecánicos y nivel de líquido a través de la técnica de Bond Graph utilizando los mismos ejemplos empleados en el método tradicional, pero modelados en Bond Graph.

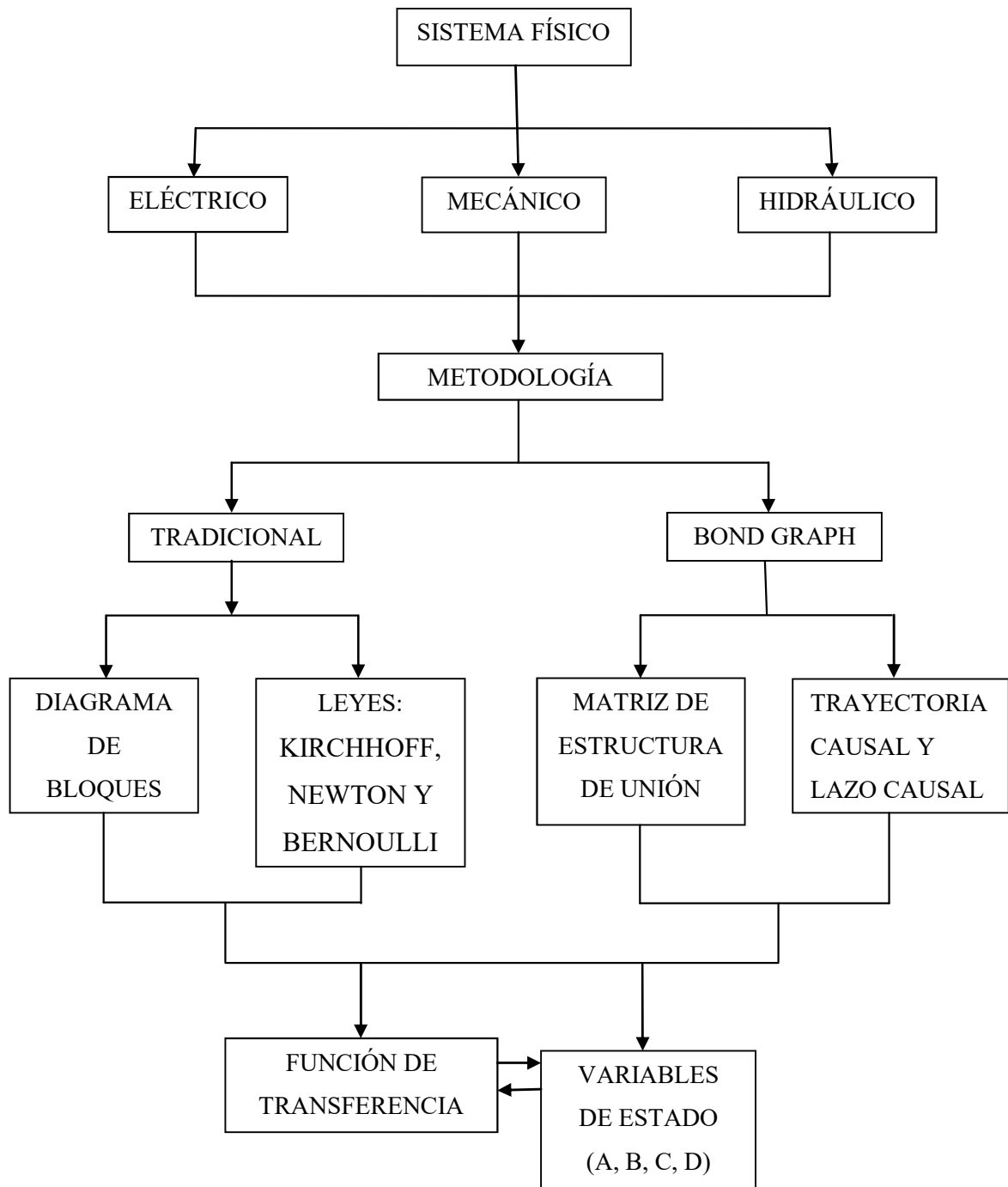


Figura 1.1 Esquema de la Metodología empleada

El capítulo 3 titulado “Determinación de la realización y función de transferencia en Bond Graph”, se explica la forma de obtener la función de transferencia y variables de estado en un sistema eléctrico, mecánico y nivel de líquido en Bond Graph mediante las

dos técnicas: Matriz de Estructura de Unión y Trazo Causal - Lazo Casual, utilizando los mismo ejemplos empleados en el Capítulo 1.

El capítulo 4 titulado “Aplicaciones de metodología” se desarrolla un ejercicio detallado de cada uno de los sistemas dinámicos: eléctricos, mecánico y nivel de líquido en Bond Graph obteniendo sus variables de estado y la función de transferencia por medio de Matriz de Estructura de Unión y Trayectoria Causal-Lazo Causal.

Finalmente en el capítulo 5 titulado “Conclusiones” se exponen las conclusiones obtenida durante el desarrollo de esta tesis, lo cual, en dado caso se realizan comentarios que ayuden a enriquecer la técnica de Bond Graph.

Capítulo 2

Realización de un sistema y modelado en Bond Graph

En este capítulo se hablará en una primera parte sobre el método tradicional, empezando por dar a conocer técnicas principales que son utilizadas para el modelado de sistemas dinámicos lo cual se explicará un poco sobre diagramas de bloques, función de transferencia y variables de estado. De esta manera, se resolverá un ejemplo simple de cada sistema: eléctrico, mecánico e hidráulico.

En la segunda parte se explicará en que consiste el método de Bond Graph y como es utilizado para la realización de modelado de sistemas dinámicos, empleando los mismos ejemplos del método tradicional.

2.1 Metodología tradicional

Un modelo matemático de un sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con precisión:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \quad (2.2)$$

Los modelos matemáticos pueden adoptar muchas formas distintas, dependiendo del sistema del que se trate y de las circunstancias específicas.

Para esto, existen técnicas diferentes las cuales pueden ser una más conveniente que otra como diagramas de bloques y métodos matemáticos; los cuales se apoyan de leyes

como de Kirchhoff, Newton, Bernoulli y D'Alembert, obteniendo así mismo las variables de estado y la función de transferencia donde esta última hace uso de la Transformada de Laplace.

A continuación se mencionan elementos necesarios utilizados para el modelado de sistemas físicos como son en: Transformada de Laplace, diagramas de bloques y espacio de estados.

Transformada de Laplace

La Transformada de Laplace  es un medio operativo que aporta muchas ventajas cuando se usa para resolver ecuaciones diferenciales lineales. Mediante el uso de la transformada de Laplace, es posible convertir muchas funciones comunes, tales como las funciones senoidales, las funciones senoidales amortiguadas y las funciones exponenciales, en funciones algebraicas de una variable s compleja.

Una ventaja de la Transformada de Laplace es que permite el uso de técnicas gráficas para predecir el desempeño del sistema, sin tener que resolver las ecuaciones diferenciales del sistema.

La Función de Transferencia (F.T.) de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal e invariante con el tiempo se define como el cociente entre la Transformada de Laplace de la Salida (Función de respuesta) y la Transformada de Laplace de la Entrada (Función de excitación) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero:

$$G(S) = \frac{\xi(\text{Salida})}{\xi(\text{Entrada})} \quad (2.3)$$

Diagrama de Bloques

Un diagrama de bloques de un sistema es una representación gráfica de las funciones que lleva a cabo cada componente y el flujo de señales. Tal diagrama muestra las relaciones existentes entre los diversos componente.

A diferencia de una representación matemática puramente abstracta, un diagrama de bloques tiene la ventaja de indicar en forma más realista el flujo de las señales del sistema real.

En el diagrama de bloques se enlazan una con otra las variables del sistema, mediante bloques funcionales. El bloque funcional o simplemente bloque es un símbolo para representar la operación matemática que sobre la señal de entrada hace el bloque para producir la salida.

Las F.T. de los componentes por lo general se introducen en los bloques correspondientes, que se conectan mediante flechas para indicar la dirección del flujo de señales.

Las ventajas de la representación mediante diagramas de bloques de un sistema está en la facilidad de formar el diagrama de bloques general de todo el sistema con sólo conectar los bloques de los componentes de acuerdo con el flujo de señales y en que es posible evaluar la cantidad de cada componente al desempeño general del sistema, aun así, es difícil saber por inspección encontrar la Función de Transferencia del sistema.

Los elementos básicos del Diagrama de Bloques son:

- a) Punto Suma: Este elemento indica si se deben de sumar o restar las señales. Es importante que las cantidades que se sumen o resten tengan las mismas dimensiones y las mismas unidades y se muestra en la figura 2.1.

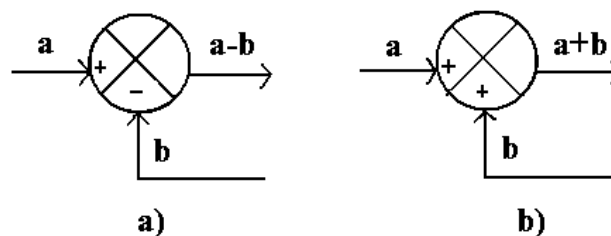


Figura 2.1 a) Punto de suma donde las señales se restan. b) Punto de suma donde las señales se suman

- b) Punto de Ramificación: Un punto de ramificación es aquel a partir del cual la señal de un bloque va de modo concurrente a otro bloque o puntos de suma.

A continuación se muestra un ejemplo de un diagrama de bloques con sus respectivos elementos en la figura 2.2:

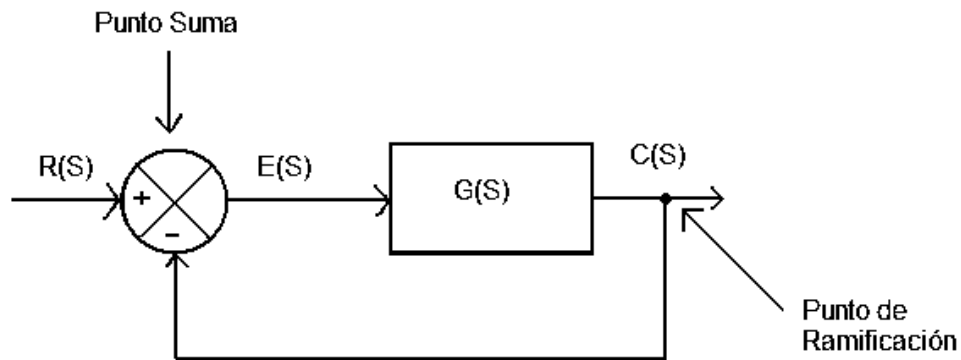


Figura 2.2 Ejemplo de un diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado, especificando los elementos principales que conforman a un diagrama de bloques.

Procedimiento 2.1 El procedimiento para dibujar un diagrama de bloque es:

1. Escribir las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de cada componente que conforman el sistema.
2. A continuación tomar las Transformadas de Laplace de estas ecuaciones, suponiendo que las condiciones iniciales son cero.
3. Representar individualmente en forma de bloques cada ecuación expresada por la Transformada de Laplace.
4. Integre los elementos en un diagrama de bloques completo.

Ejemplo 2.1 Resolver el circuito RC de la figura 2.3 a través de Diagramas de Bloques:

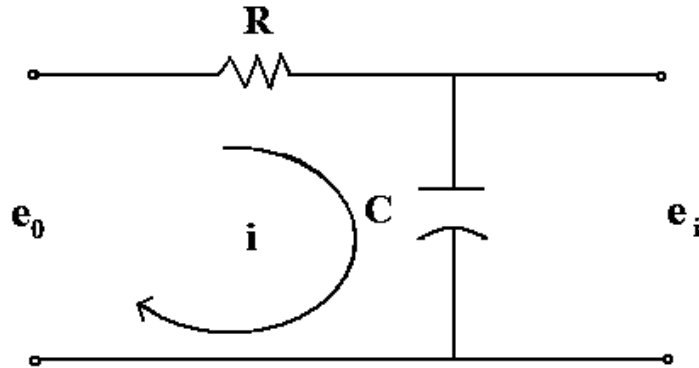


Figura 2.3 Circuito RC

Solución:

Las ecuaciones para el circuito son:

$$i = \frac{e_i - e_0}{R} \quad (2.4)$$

Y

$$e_0 = \frac{\int i dt}{C} \quad (2.5)$$

La Transformada de Laplace de las ecuaciones (2.4) y (2.5) con condiciones iniciales iguales a cero se vuelve:

$$I(S) = \frac{E_i(S) - E_0(S)}{R} \quad (2.6)$$

Y

$$E_0(S) = \frac{I(S)}{CS} \quad (2.7)$$

Para la ec. (2.6) el diagrama de bloque en la figura 2.4:

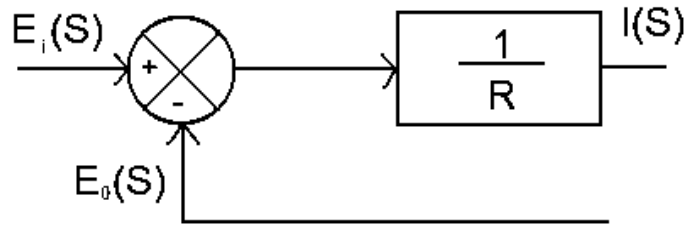


Figura 2.4 Diagrama de bloque de la resistencia del circuito RC

Para la ec. (2.7) su respectivo diagrama de bloques queda:

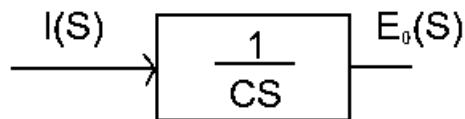


Figura 2.5 Diagrama de bloque del capacitor del circuito RC

Finalmente, el diagrama de bloques de la ec. (2.7) se muestra en la figura 2.6:

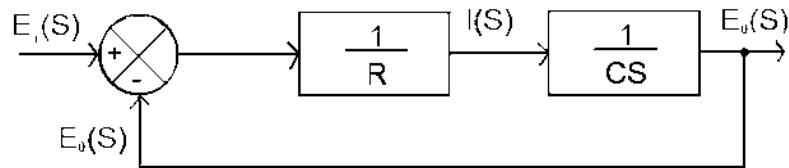


Figura 2.6 Diagrama de bloque del circuito RC

Espacio de estados

Es necesario definir primero algunos conceptos que son necesarios como son: espacio de un sistema dinámico, variable de estados, vector de estado y espacio de estados.

Estado de un sistema dinámico: Es el conjunto de variables más pequeño (llamadas variables de estado), de forma que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el

conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determinando el comportamiento del sistema en cualquier $t \geq t_0$.

Variables de estado: Son las variables que constituyen el menor conjunto de variables que determinan el estado del sistema dinámico. Si al menos se necesitan n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ para describir completamente el comportamiento de un sistema dinámico, entonces tales n variables son un conjunto de variables de estado.

Vector de estados: Un vector de estados es un vector que determina unívocamente el estado del sistema $x(t)$ en cualquier instante del tiempo $t \geq t_0$ especificado.

Espacio de estados: Se le conoce al espacio n -dimensiones cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1 , eje $x_2, \dots$, eje x_n donde $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las variables de estados. Cualquier estado se puede representar como un punto en el espacio de estados.

En el análisis en el espacio de estados se centra la atención en los tres tipos de variables que aparecen en el modelado de los sistemas dinámicos:

- Variables de Entrada
- Variables de Salida
- Variables de Estado

La representación en el espacio de estados de un sistema dado no es única, salvo que el número de variables de estado sea el mismo para cualquier que sea la representación en variables de estado de un mismo sistema.

Las ecuaciones de estado y de salida linealizadas son:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.8)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2.9)$$

Donde $A(t)$ se denomina matriz de estado, $B(t)$ matriz de entrada, $C(t)$ matriz de salida y $D(t)$ matriz de transmisión directa.

Si el sistema no involucra el tiempo t , siendo un sistema invariante con el tiempo queda:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.11)$$

De esta manera se puede ver reflejado de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.13)$$

donde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} \text{ es el vector de estados.}$$

En el vector de estado también:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \text{ es el vector de entradas.}$$

Entonces:

$\mathbf{A}_{n \times n}$ Matriz del sistema

$\mathbf{B}_{n \times m}$ Matriz de entrada

$\mathbf{Y}_p$ Vector de salida

$C_{p \times n}$	Matriz de salida
$D_{p \times n}$	Matriz de acoplamiento directo entrada/salida
$u(t)$	Vector de entrada de orden m
$x(t)$	Vector de estados de orden n

Ahora reconociendo cada parte de la ecuación de estados y la ecuación de salida se explicará la formulación en el espacio de estados para la representación de sistemas físicos y lo primero que se debe realizar para seleccionar un estado, es seleccionar el vector de estados, que debe elegirse de acuerdo con las siguientes condiciones:

1. Debe escoger un número mínimo de variables de estado como las componentes del vector de estado. Este número mínimo de variables de estado es suficiente para describir por completo el estado del sistema. El número mínimo necesario es igual al orden de la ecuación diferencia que describe dicho el sistema. Otra forma de determinar el número de variantes de estado es contar el número de elementos independientes que almacena energía del sistema.
2. Las componentes del vector de estado (es decir, este número mínimo de variables de estado) deben ser linealmente independientes.

Dentro de este método es necesario hacer la relación de la función de transferencia y las ecuaciones en el espacio de estado. Primero hay que obtener la función de transferencia de un sistema con una sola entrada y una sola salida a partir de las ecuaciones en el espacio de estado, teniendo un sistema cuya función de transferencia se obtiene:

$$\frac{Y(S)}{X(S)} = G(S) \quad (2.13)$$

Este sistema se representa en el espacio de estados mediante las ecuaciones:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.14)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.15)$$

donde “ $\dot{x}$ ” es el vector de estado, “ x ” es la entrada e “ y ” es la salida. La transformada de Laplace de las ecuaciones (2.14) y (2.15) se obtiene mediante:

$$SX(S) - x(0) = AX(S) + BU(S) \quad (2.16)$$

$$Y(S) = CX(S) + DU(S) \quad (2.17)$$

Como las condiciones iniciales para $x(0)$, en la F.T. es cero y quedan las ecuaciones de la siguiente manera:

$$SX(S) - AX(s) = BU(s) \quad (2.18)$$

quedando de la siguiente manera:

$$(S \cdot I - A)X(S) = BU(S) \quad (2.19)$$

Después multiplicando la ec. (2.18) por $(SI - A)^{-1}$ queda:

$$X(S) = (S \cdot I - A)^{-1}BU(S) \quad (2.20)$$

Sustituyendo la ecuación (2.20) en la ecuación (2.17) queda:

$$Y(S) = \left[C(S \cdot I - A)^{-1}B + D \right] U(S) \quad (2.21)$$

Haciendo la relación de la salida con la entrada queda:

$$\frac{Y}{U} = C(S \cdot I - A)^{-1}B + D \quad (2.22)$$

La representación en el espacio de estados de sistemas de n-ésimo orden representados mediante ecuaciones diferenciales lineales en las que la función de excitación no contiene términos derivados como el sistema de n-ésimo orden es el siguiente:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u \quad (2.23)$$

Teniendo la siguiente forma la Función de Transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.24)$$

Por lo tanto, se puede definir como:

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Siendo la ec. (2.25) descrita como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= x_n \\ \dot{x}_n &= a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u \end{aligned} \quad (2.26)$$

Así mismo, para la obtención de las ecuaciones de estado expresadas en las ecuaciones (2.14) y (2.15) queda que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.27)$$

de tal manera

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

siendo

$$C = \begin{bmatrix} 0 \dots & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad D = 0 \quad (2.30)$$

Ahora bien, para la representación en el espacio de estados de sistemas de n-ésimo orden representada mediante ecuaciones diferenciales lineales en las que la función de excitación contiene términos derivados se presenta a continuación:

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{b_0 S^n + b_1 S^{n-1} + \dots + b_{n-1} S + b_n}{S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_{n-1} S + a_n} \quad (2.31)$$

Lo cual, para obtener las variables de estado se representa lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u \quad (2.32)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u \quad (2.33)$$

Sabiendo que:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u \quad (2.34)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} u \quad (2.35)$$

por tal:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

y

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = b_0 \quad (2.37)$$

2.1.1 Modelado de un sistema eléctrico

Las leyes fundamentales que gobiernan los circuitos eléctricos son las leyes de Kirchhoff:

- Ley de Corrientes de Kirchhoff
- Ley de Voltajes de Kirchhoff

a) Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK) establece que:

“La suma algebraica de todas las corrientes (I) que entran y salen de un nodo es cero”

$$\sum_n I_n = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n = 0 \quad (2.38)$$

Considerando corriente positiva cuando sale de un punto y la que entra es considerada negativa.

b) Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) establece que:

“En cualquier instante determinado, la suma algebraica de los voltajes (V) alrededor de cualquier malla en un circuito eléctrico es cero”

$$\sum_n V_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = 0 \quad (2.39)$$

Un modelo matemático de un circuito eléctrico se obtiene aplicando una o ambas leyes de Kirchhoff.

Para esto se utilizan dos métodos:

- Análisis de Mallas
- Análisis de Nodos

Análisis de Mallas

Este método consiste en obtener la Función de Transferencia usando la Ley de Voltajes de Kirchhoff y de esta manera se suman voltajes alrededor de las mallas.

Procedimiento 2.2 Se recomiendan los siguientes pasos para mallas complejas:

1. Sustituir los valores de los elementos pasivos con sus impedancias.
2. Sustituir todas las fuentes y variables del tiempo con su transformada de Laplace.
3. Suponer una corriente de transformada y una dirección de corriente en cada malla.
4. Escribir la Ley de Voltajes de Kirchhoff alrededor de cada malla.
5. De las ecuaciones simultáneas despejar la salida.
6. Finalmente formar la Función de Transferencia.

Análisis de Nodos

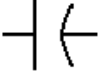
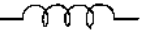
Por medio de este otro método se puede obtener las funciones de transferencia mediante la ley de corrientes que fluyen de los nodos.

Procedimiento 2.3 Los pasos recomendados para redes eléctricas de nodos múltiples son los siguientes:

1. Sustituir los valores de los elementos pasivos con sus admitancias.
2. Sustituir todas las fuentes y variables en el tiempo con su Transformada de Laplace.
3. Sustituir las fuentes de voltaje transformadas con fuentes de corriente transformadas.
4. Escribir la Ley de Corrientes de Kirchhoff en cada nodo.
5. Despejar la salida de las ecuaciones simultáneas
6. Formar la Función de Transferencia.

A continuación se muestra la tabla 2.1 de la representación de capacitores, resistores e inductores:

Tabla 2.1 Relación de voltaje-corriente, voltaje-carga e impedancias para capacitores, resistores e inductores

Componentes	Voltaje-Corriente	Corriente-Voltaje	Voltaje-Carga	Impedancia $Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$	Admitancia $Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)}$
 Capacitor (C)	$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) dt$	$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C} q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	Cs
 Resistor (R)	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R} v(t)$	$v(t) = R \frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
 Inductor (L)	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt$	$v(t) = L \frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls	$\frac{1}{Ls}$

Ejemplo 2.2 Encontrar la Función de Transferencia $\frac{I_2(s)}{V(s)}$ del circuito que se muestra en la figura 2.7:

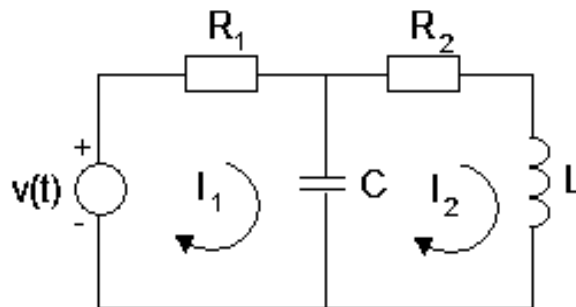


Figura 2.7 Circuito Eléctrico

Solución:

En la malla I se aplica la LVK:

$$-V(s) + R_1 I_1(s) + \frac{1}{C_1 s} [I_1(s) - I_2(s)] = 0 \quad (2.40)$$

Separando términos:

$$R_1 I_1(S) + \frac{1}{CS} I_1(S) - \frac{1}{CS} I_2(S) = V(S) \quad (2.41)$$

quedando la malla I con la ec.:

$$\left(R_1 + \frac{1}{CS} \right) I_1(S) - \frac{1}{CS} I_2(S) = V(S) \quad (2.42)$$

Para la malla II se vuelve aplicar la LVK donde queda:

$$R_2 I_2(S) + L S I_2(S) - \frac{1}{CS} I_1(S) + I_2(S) = 0 \quad (2.43)$$

y separando los términos:

$$R_2 I_2(S) + L S I_2(S) - \frac{1}{CS} I_1(S) + \frac{1}{CS} I_2(S) = 0 \quad (2.44)$$

así mismo se realiza la agrupación:

$$\left(R_2 + LS + \frac{1}{CS} \right) I_2(S) - \frac{1}{CS} I_1(S) = 0 \quad (2.45)$$

Quedando la malla II de la ec. (2.45)

$$-\frac{1}{CS} I_1(S) + \left(R_2 + LS + \frac{1}{CS} \right) I_2(S) = 0 \quad (2.46)$$

La ecs. (2.42) y (2.46) forman la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{CS} & -\frac{1}{CS} \\ -\frac{1}{CS} & R_2 + LS + \frac{1}{CS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(S) \\ I_2(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(S) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Resolviendo la ec. (2.46) nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} I_1(S) \\ I_2(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V(S)}{R_1(CLS^2 + CSR_2 + 1) + LS + R_2} \\ \frac{V(S)}{R_1(CLS^2 + CSR_2 + 1) + LS + R_2} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

De la ec. (2.46) solo se toma la ecuación necesaria para obtención de la F.T. planteada en el problema:

$$I_2(S) = \frac{V(S)}{R_1(CLS^2 + CSR_1R_2 + LS + R_1 + R_2)} \quad (2.49)$$

Despejando nos queda finalmente que:

$$\frac{I_2(S)}{V(S)} = \frac{1}{S^2CR_1L + CR_1R_2 + L\bar{S} + R_1 + R_2} \quad (2.50)$$

2.1.2 Modelado de un sistema mecánico

Para el modelado de los sistemas mecánicos se emplea principalmente la Segunda Ley de Newton que tiene que ver el Principio de D'Alembert y la Tercera Ley de Newton donde estas leyes que se aplica a cualquier sistema mecánico.

a) Segunda Ley de Newton establece que:

“La suma de fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual a cero; la suma de momentos sobre un cuerpo es cero”

Este concepto se expresa de mejor manera en la siguiente ecuación:

$$\Sigma \text{fuerzas} = Ma \quad (2.51)$$

b) Tercera Ley de Newton establece que:

“A toda acción existe siempre una reacción de igual magnitud, pero en sentido contrario”

c) Principio de D'Alembert:

“Las fuerzas aplicadas a un elemento, junto con las fuerzas de inercia, forman un

sistema en equilibrio ”

Los sistemas mecánicos se dividen en dos partes:

- Sistemas Mecánicos de Translación
- Sistemas Mecánicos Rotacionales

Sistemas Mecánicos de Traslación

Los sistemas mecánicos de traslación son redes eléctricas en paralelo al punto que hay analogías entre componentes eléctricos y mecánicos y variables.

Este tipo de sistemas mecánicos, al igual que las redes eléctricas, tienen tres componentes lineales pasivos. Dos de ellos, el resorte y la masa, son elementos que almacena energía; uno de ellos, el amortiguamiento viscoso, disipa energía.

Los dos elementos que almacenan energía son análogos a los dos elementos eléctricos que almacenan energía: el inductor y el capacitor.

El disipador de energía es análogo a la resistencia eléctrica. De esta manera los elementos son los siguientes:

K = Constante de Resorte

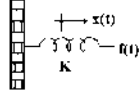
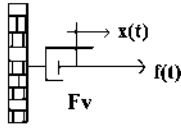
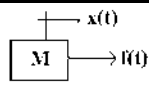
F_v = Coeficiente de fricción viscosa

M =Masa

Se realiza una comparación y se puede decir que la fuerza es análoga a la corriente y la velocidad al voltaje. Así mismo, el resorte es análogo al inductor; el amortiguador viscosa, es análogo al resistor, y la masa es análoga al capacitor.

A continuación se presenta la tabla 2.2 donde se muestran cada uno de los elementos anteriores con sus respectivas representaciones:

Tabla 2.2 Relación de fuerza-velocidad, fuerza-desplazamiento e impedancia para resortes, amortiguadores viscosos y masa de traslación.

Componentes	Fuerza-Velocidad	Fuerza-Desplazamiento	Impedancia $Z_m(S) = \frac{F(S)}{X(S)}$
 Resorte	$f(t) = K \int_0^t v(\tau) d\tau$	$f(t) = Kx(t)$	K
 Amortiguamiento Viscoso	$f(t) = f_v v(t)$	$f(t) = f_v \frac{dx(t)}{dt}$	$f_v S$
 Masa	$f(t) = M \frac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M \frac{d^2x(t)}{dt^2}$	MS^2

Sistemas Mecánicos de Rotación

Los sistemas mecánicos rotacionales se manejan en la misma forma que los sistemas mecánicos de traslación, excepto que un par sustituye a la fuerza y un desplazamiento angular sustituye al desplazamiento lineal.

Los componentes mecánicos para los sistemas rotacionales son los mismos que para los sistemas de traslación, salvo que los componentes experimentan rotación en lugar de traslación.

En este tipo de sistemas mecánicos se utilizan variables como:

K= Constante de Resorte

D=Coeficiente de Fricción Viscosa

J=Momento de Inercia

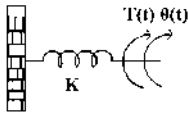
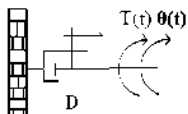
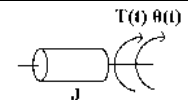
Los valores se pueden hallar si se toma la transformada de Laplace, suponiendo condiciones iniciales cero. El concepto de grados de libertad se presenta para sistemas de rotación, excepto que se prueba un punto de movimiento al giro; mientras se mantienen inmóviles todos los otros puntos de movimiento.

El número de puntos de movimiento que se puede girar, en lo que todos los otros se mantienen inmóvil, es igual al número de ecuaciones de movimiento necesario para describir el sistema.

Escribir las ecuaciones de movimiento para los sistemas de rotación es semejante a escribir las ecuaciones para los sistemas de traslación; la única diferencia es que el diagrama de cuerpo libre consta de pares en lugar de fuerzas.

A continuación se presenta la tabla 2.3 donde se muestra la forma de ser representados dichos elementos:

TABLA 2.3 Relación de par velocidad angular, par desplazamiento angular e impedancia para resortes, amortiguadores viscosos e inercia rotacional.

Componentes	Par Velocidad Angular	Par Desplazamiento Angular	Impedancia $Z_M(S) = \frac{T(S)}{\theta(S)}$
 Resorte	$T(t) = K \int_0^t \omega(\tau) d\tau$	$T(t) = K \theta(t)$	K
 Amortiguador Viscoso	$T(t) = D \omega(t)$	$T(t) = D \frac{d\theta(t)}{dt}$	DS
 Inercia	$T(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$	$T(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	JS ²

A continuación se ha elegido un ejemplo de un sistema mecánico.

Ejemplo 2.3 Encontrar la F.T., $\frac{V(S)}{F(S)}$ y sus variables estado de un sistema mecánico de traslación el cual es presentado en la figura 2.8:

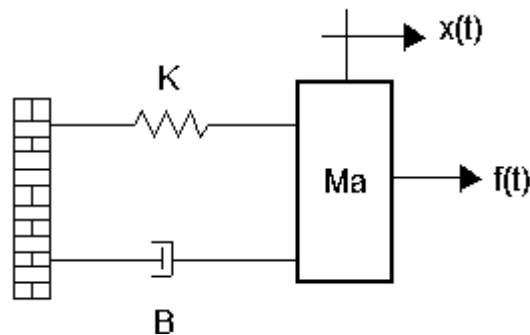


Figura 2.8 Sistema Mecánico de Traslación

Solución:

Para la obtención de la F.T. se dibuja el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 2.9:

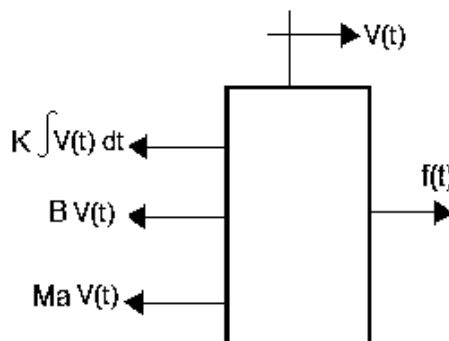


Figura 2.9 Diagrama de cuerpo libre en el dominio del tiempo

Ahora aplicando la Segunda Ley de Newton, se escriben así mismo las ecuaciones diferenciales:

$$K \int v(t) dt + Bv(t) + Ma \frac{dv}{dt} = f(t) \quad (2.52)$$

Se aplica la Transformada de Laplace conforme a cada elemento del sistema mecánico de traslación apreciadas en la figura 2.10:

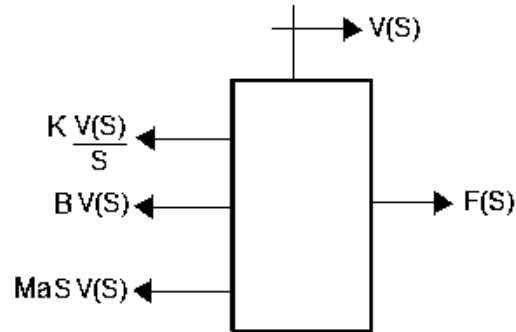


Figura 2.10 Diagrama de cuerpo libre en el dominio de Laplace

Así mismo, aplicando transformada de Laplace, suponiendo condiciones iniciales cero, nos queda:

$$K \frac{V(S)}{S} + B V(S) + MaS V(S) = F(S) \quad (2.53)$$

Realizando el despeje correspondiente, la función de transferencia es:

$$G(S) = \frac{V(S)}{F(S)} = \frac{S}{MaS^2 + BS + K} \quad (2.54)$$

Ya que se ha logrado tener la función de transferencia el paso siguiente es obtener las variables. Para esto es necesario que la ec. (2.50) tome la forma de la ec. (2.29) y para esto se realiza lo siguiente:

$$G(S) = \frac{\frac{S}{Ma}}{S^2 + \frac{BS}{Ma} + \frac{K}{Ma}} \quad (2.55)$$

Teniendo la forma que tiene la ec. (2.55) se puede aplicar la ec. (2.30) y (2.31) quedando:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{Ma} & -\frac{B}{Ma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.56)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{Ma} & -\frac{B}{Ma} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

y

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{Ma} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

siendo

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{Ma} \end{bmatrix} \quad y \quad D = 0 \quad (2.59)$$

2.1.3 Modelado de nivel de líquido

El control de nivel de líquido es muy importante en nuestra vida diaria donde lo podemos encontrar en depósitos (pilas, aljibes, tinacos, etc.), los cuales, el flujo entre ellos es uno de los problemas más comunes que se presentan sobre todo en los procesos industriales tales como: la industria petroquímica, la de fabricación de papel y los de tratamiento de agua. En todos estos procesos industriales, los líquidos son procesados por tratamientos químicos en los tanques, pero siempre el nivel de flujo entre ellos es regulado. Además cabe mencionar que el sistema de nivel de líquido lo encontramos también en el baño de nuestros hogares, en la palanca adjunta a la válvula del tanque de la taza permitiendo el flujo del agua dentro del tanque hasta que el flotador sube cerrando la válvula, así que, este sistema se utiliza frecuentemente en los procesos de control.

Con frecuencia los procesos industriales implican un flujo de líquido a través de tubos y tanques conectados.

Para iniciar el estudio de los sistemas de nivel de líquidos es necesario definir los conceptos de resistencia, el flujo y capacitancia en un tanque que almacena un fluido.

Resistencia

La resistencia R debida a una restricción es lineal cuando el flujo es laminar y se comporta como un sistema no lineal cuando el flujo es turbulento. En ambos casos se define como el cociente de la diferencia de niveles en el recipiente entre el cambio en el gasto.

$$R = \frac{\text{Cambio en la diferencia de nivel, m}}{\text{Cambio en la velocidad de flujo, m}^3/\text{seg}} \quad (2.60)$$

Para el flujo laminar el gasto es proporcional a la columna hidrostática mientras que para el flujo turbulento es proporcional a la raíz cuadrada de la columna hidrostática:

$$Q = K_t \sqrt{H} \quad (2.61)$$

donde:

Q = gasto en m^3/seg

K_l = coeficiente de proporcionalidad para flujo laminar m^2/seg

K_t = coeficiente de proporcionalidad para flujo turbulento m^2/seg

H = columna hidrostática m

Para un sistema con flujo laminar tenemos:

$$R_l = \frac{dH}{dQ} = \frac{H}{Q} \quad (2.62)$$

De igual manera se tiene para una resistencia con flujo turbulento debida a una restricción por

$$R_t = \frac{dH}{dQ} \quad (2.63)$$

donde la diferencia del gasto es:

$$dQ = \frac{K_t}{2\sqrt{H}} dH \quad (2.64)$$

con lo cual la expresión para la resistencia al flujo turbulento queda como:

$$R_t = \frac{dH}{\frac{K_t}{2\sqrt{H}} dH} = \frac{2\sqrt{H}}{K_t} \quad (2.65)$$

despejando K_t de la ec.(2.61) y sustituyendo los valores en la ec. (2.65) tenemos finalmente que:

$$R_t = \frac{2H}{Q} \quad (2.66)$$

Capacitancia

La capacidad C de un tanque se define como el cambio necesario en la cantidad de líquido almacenado, para producir un cambio de una unidad en el potencial:

$$C = \frac{\text{Cambio en el líquido almaceando, } m^3}{\text{Cambio en la altura, } m} \quad (2.67)$$

Lo cual resulta en unidades de área por lo que la capacitancia de un tanque se puede considerar como la sección transversal del tanque bajo estudio.

Por otro lado para resolver este tipo de sistemas las leyes principales que se aplican son: la Ley de Balance de Presiones y Conservación de la Masa, donde las variables de interés son las presiones (**P**) y el gasto (**q**).

a) Ley de Balance de Presiones estable que:

“La suma de las caídas y de presión alrededor de una malla hidráulica es igual a cero”

$$\Sigma P = 0 \quad (2.68)$$

b) Ley de Conservación de la masa la cual establece que:

“La suma algebraica de gastos en un nodo es igual a cero”, o bien “las variables de volumen con respecto al tiempo es igual a la suma de gastos de entrada menos la suma de gastos de salida”

$$\frac{dv}{dt} = \Sigma q_i - \Sigma q_o \quad (2.69)$$

Ejemplo 2.4 Encontrar la F.T. $\frac{Q_o(S)}{Q_i(S)}$ así como sus variables de estado del sistema de nivel de líquido presentado en la figura 2.11.

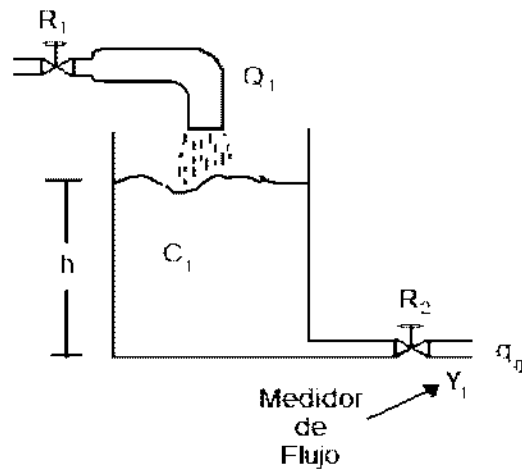


Figura 2.11 Sistema de Nivel de Líquido

Solución:

Dada $q_0(t)$ y $q_i(t)$ como salida y entrada respectivamente, la figura 2.12 muestra relación de los gastos:

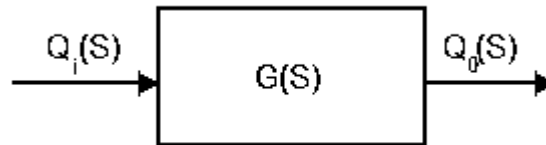


Figura 2.12 Relación de los gastos de entrada y salida para la obtención de la función de transferencia

El volumen del líquido en el tanque del sistema de nivel de líquido es:

$$v(t) = Ch(t) \quad (2.70)$$

Al aplicar la transformada de Laplace a la ec. (2.70) queda:

$$V(S) = CH(S) \quad (2.71)$$

Haciendo un balance del caudal que entra y sale del depósito obtenemos:

$$q_i(t) - q_o(t) = \frac{dv}{dt} \quad (2.72)$$

Aplicar la transformada de Laplace a la ec. (2.72) tenemos:

$$Q_i(S) - Q_o(S) = SV(S) \quad (2.73)$$

Así mismo,

$$h(t) = q_o(t)R_2 \quad (2.74)$$

Donde de igual manera se le aplica la transformada de Laplace a la ec. (2.74):

$$H(S) = Q_0(S)R_2 \quad (2.75)$$

Sustituyendo las ecs. (2.71) y (2.75) en la ec.(2.73):

$$Q_i(S) - Q_0(t) = SCQ_0(S)R_2 \quad (2.76)$$

Con lo anterior la función de transferencia queda:

$$G(S) = \frac{Q_0(S)}{Q_i(S)} = \frac{1}{R_2CS + 1} \quad (2.77)$$

Después de haber obtenido la Función de Transferencia, podemos adquirir las variables de estado donde lo primero que hay que hacer es que la ec. (2.77) tenga la forma de la ec. (2.29), por lo cual es necesario realizar lo siguiente:

$$G(S) = \frac{\frac{1}{R_2C}}{S + \frac{1}{R_2C}} \quad (2.78)$$

Teniendo la forma requerida se hace uso de las ecs. (2.30) y (2.31) para la obtención de las ecuaciones de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2C} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2C} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

y

$$\begin{bmatrix} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

siendo

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ R_2 C \end{bmatrix} \quad D = 0 \quad (2.82)$$

2.2 Bond Graph

Bond Graph es una representación gráfica de un sistema dinámico donde una colección de componentes interactúan unos con otros a través de puertos de energía. Estos componentes colocados en el sistema describen cómo fluye la potencia a través del sistema.

El modelado en Bond Graph es una potente herramienta para el modelado de sistemas de ingeniería, especialmente cuando existen diferentes dominios físicos involucrados.

Bond Graph permite construir modelos de sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos utilizando solamente un pequeño conjunto de elementos ideales.

El componente fundamental de un Bond Graph es el *bond* de energía utilizado para acoplar los puertos de energía de los componentes del sistema.

Un bond es dibujado como un borde con una media flecha muestra apreciar en la figura 2.13 en la que se puede observar hacia dónde va el esfuerzo $e(t)$ y flujo $f(t)$.

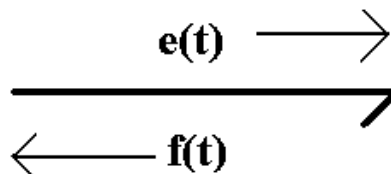


Figura 2.13 Bond con la dirección del esfuerzo $e(t)$ y flujo $f(t)$.

La dirección de esta flecha indica la media dirección positiva del flujo de energía. En principio, la fuente de tensión proporciona una potencia y los demás elementos absorber energía. Las partes principales de un sistema son llamadas subsistemas y las partes no reducibles son llamadas componentes y básicamente, un subsistema es una parte de un sistema que es modelado como un sistema en sí mismo, donde un componente es modelado como una entidad.

Los lugares en los cuales los subsistemas pueden ser interconectados son llamados puertos. Los sistemas multipuertos son denotados por puertos- n , donde n es el número de puertos.

Las variables que describen la unión de dos multipuertos que son conectados son llamadas variables de potencia, las cuales son esfuerzo $e(t)$ y flujo $f(t)$. Estas variables también son llamadas variables de bond generalizadas debido a que pueden ser utilizadas en todos los dominios de energía.

En sistemas que almacenan energía es necesario definir variables que representen el estado del sistema llamados variables de energía denominadas *momento* $p(t)$ o *esfuerzo acumulado* $e_a(t)$ y desplazamiento $q(t)$ o flujo acumulado $f_a(t)$, están dadas por:

$$p(t) = e_a(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (2.83)$$

$$q(t) = f_a(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (2.84)$$

En la tabla 2.4 se muestra las variables generalizadas para sistemas eléctricos, mecánicos de traslación y de rotación así como de nivel de líquido:

Tabla 2.4 Variables generalizadas de sistemas eléctricos, mecánicos de traslación, de rotación y nivel del líquido

Variables	General	Eléctrico	Mecánico de Traslación	Mecánico de Rotación	Nivel de Líquido
Esfuerzo	$e(t)$	$v(t)$ Voltaje	$F(t)$ Fuerza	$\tau(t)$ Par	$P_e(t)$ Presión
Flujo	$f(t)$	$i(t)$ Corriente	$V(t)$ Velocidad	$\omega(t)$ Velocidad angular	$Q(t)$ Caudal
Momento	$p(t) = \int e(t)dt$	$\lambda(t)$ Enlace de Flujo	$P_R(t)$ Momento Rotacional	$H(t)$ Momento angular	$P_p(t)$ Integral de presión
Desplazamiento	$q(t) = \int f(t)dt$	$q(t)$ Carga	$x(t)$ Distancia	$\theta(t)$ Angulo	$V(t)$ Volumen
Potencia	$P(t) = e(t)f(t)$	$v(t)i(t)$	$F(t)V(t)$	$\tau(t)\omega(t)$	$P_e(t)V(t)$
Energía	$E(p) = \int f(p)dp$ $E(q) = \int e(q)dq$	$\int i(\lambda)d\lambda$ $\int e dq$	$\int V(P_R)dP_R$ $\int F(x)dx$	$\int \omega(H)dH$ $\int \tau(\theta)d\theta$	$\int Q(P_p)dP_p$ $\int P_e(V)dV$

Como anteriormente se menciono los sistemas se interconectan por puertos los cuales se clasifican en:

- Puertos 1 – Pasivos, Activos o Fuentes
- Puertos 2 - Elementos ideales
- Puertos 3 – Elementos de Unión

Puertos 1 - Pasivos, Activos o Fuentes

Los elementos pasivos son aquellos que representan disipación de potencia y dos formas de almacenamiento de energía. Se les conoce como Puertos-1 Pasivos a todos aquellos elementos que intercambian potencia en un puerto o elemento sencillo pasivo.

Los elementos gráficos de bonds son los siguientes:

- C: elemento de almacenamiento para una variable de tipo q, por ejemplo, condensador, resorte, etcétera.
- I: elemento de almacenamiento para una variable de tipo p, ejemplo inductor, resorte mecánico, etcétera.
- R: resistencia de disipación de energía libre, por ejemplo, resistencia eléctrica, la fricción mecánica, etcétera.
- SE, SF: fuentes, por ejemplo, red eléctrica (fuente de tensión), la gravedad (fuente vigor), la bomba (fuente de flujo).

En la tabla 2.5 se muestran los elementos de disipación R, de almacenamiento de flujo C y de almacenamiento de esfuerzo I, para sistemas eléctricos, sistemas mecánicos y sistemas de nivel de líquido.

Tabla 2.5. Elementos pasivos de almacenamiento R, C e I.

Elemento	Relación	Eléctrico	Mecánico	Nivel del Líquido
R	Lineal	$v(t) = Ri(t)$	$F(t) = bV(t)$	$\Delta P_r(t) = RQ(t)$
	No-Lineal	$v(t) = \varphi(i)$	$F(t) = \varphi(V)$	$\Delta P = \varphi(Q)$
C	Lineal	$v(t) = \frac{1}{C} \int i dt$	$F(t) = k \int V dt$	$P_r(t) = C \int \Delta Q dt$
	No-Lineal	$v(t) = \varphi(q)$	$F(t) = \varphi(x)$	$P_r(t) = \varphi(V)$
I	Lineal	$i(t) = \frac{1}{L} \int v dt$	$V(t) = \frac{1}{M} \int F dt$	$Q(t) = I \int \Delta P_r dt$
	No-Lineal	$i(t) = \varphi(\lambda)$	$V(t) = \varphi(P)$	$Q(t) = \varphi(P_p)$

Los elementos que introducen energía al sistema son llamados fuentes. Existen dos tipos de fuentes:

- Fuentes de esfuerzo (voltaje, fuerza o presión), la cual se denota como MS_e
- Fuentes de flujo (corriente, velocidad o caudal), la cual se denota como MS_f

A continuación se muestra su representación en la figura 2.14:

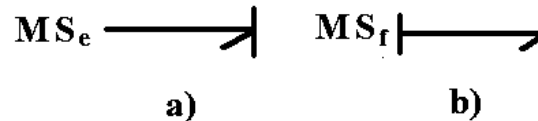


Figura 2.13 Puertos-1 Activos: a) Fuente de esfuerzo y b) Fuente de flujo

Puertos 2 - Elementos ideales

Existen dos elementos ideales puerto-2, llamados transformador (TF) y girador (GY), que son sistemas lineales que cambian la relación entre las variables de flujo y esfuerzo.

TF: transformador, por ejemplo, un transformador eléctrico, ruedas dentadas, la palanca.

GY: girador, por ejemplo, motor eléctrico, bomba centrífuga. Caracterizándose por tener dos puertos, y una relación lineal entre esfuerzo y flujos. Los Bonds que representan a un transformador TF y a un girador GY se muestra en figura 2.15:



Figura 2.15 Representación en Bond Graph de un transformador (TF) y un girador (GY).

Estos elementos juegan un papel muy importante para el modelado de la conversión de potencia de un dominio físico a otro.

Puertos 3 – Elementos de Unión

Este tipo de puertos se llaman uniones ya que sirven para interconectar tres o más puertos de energía dentro de un subsistema, los cuales representan en forma de multipuerto los dos tipos de conexiones en serie y en paralelo.

La unión de flujo, unión-0 o unión de esfuerzo común es utilizada para la conexión en paralelo (ver figura 2.16).

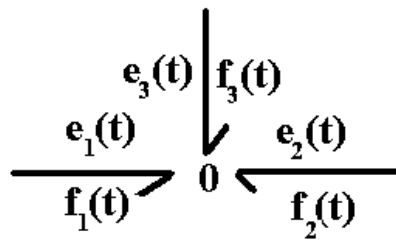


Figura 2.16 Unión 0 para la conexión en paralelo.

Las relaciones de interconexión que describen una unión de flujo están dadas por:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \quad (2.85)$$

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0 \quad (2.86)$$

De esta manera se observa que los esfuerzos en todos los bonds son siempre iguales y la suma algebraica de los flujos es cero.

El otro elemento de puerto-3, es la unión de esfuerzo, unión-1 o de flujo común para la conexión en serie (ver figura 2.17).

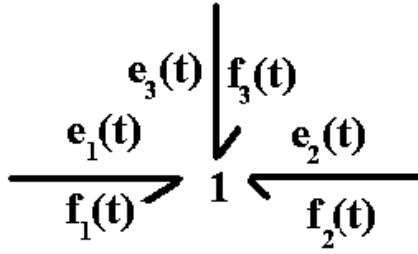


Figura 2.17 Union-1 para la conexión en serie.

Las relaciones de interconexión para este elemento son:

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) \quad (2.87)$$

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \quad (2.88)$$

Los puertos de conexión de esfuerzo y flujo pueden extenderse a puertos de 3 o más puertos.

Una propiedad muy importante en esta técnica es la causalidad o relación causa-efecto. Las relaciones de causa-efecto para esfuerzos y flujos son representadas en direcciones opuestas. Una marca en un bond, llamada trazo causal, indica cómo $e(t)$ y $f(t)$ simultáneamente son determinados causalmente en un bond.

Las diferentes maneras de expresar la causalidad en un bond se puede expresar como se observa en la figura 2.18.

El trazo causal indica un sentido de entrada-salida para $e(t)$ y $f(t)$ en cada puerto de los dos componentes juntos. El esfuerzo entra en un bond en el mismo sentido del trazo causal y por consecuencia el flujo va en dirección contraria.

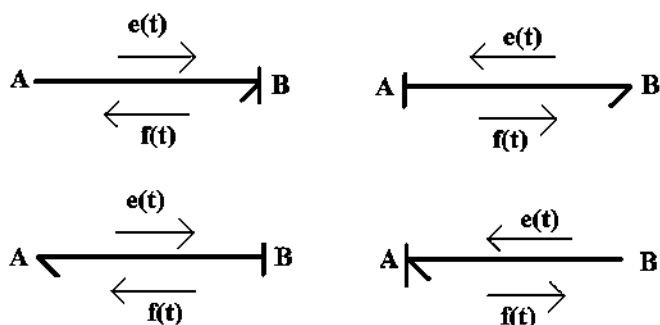


Figura 2.18 Diferentes maneras de expresar la causalidad en un bond

Se deben cumplir reglas, las cuales son mostradas en la tabla 2.6:

Tabla 2.6 Causalidad para los multipuertos básicos

Causalidad Restrictiva	TF	
	GY	
	0	
	1	
Causalidad Derivativa	I	C
Causalidad Integral	I	C
Causalidad Arbitraria	R	R
Causalidad Necesaria	MS_e	MS_f

En la tabla 2.7 se muestran los Puertos 1 con la causalidad correspondiente a cada elemento considerado:

Tabla 2.7 Formas Causales para Puertos 1

Elemento	Forma Causal	Relación Causal
Fuente de Esfuerzo	$\mathbf{MS}_e \longrightarrow \rceil$	$e \mathbf{C} = E \mathbf{C}$
Fuente de Flujo	$\mathbf{MS}_f \rceil \longrightarrow$	$f \mathbf{C} = F \mathbf{C}$
Resistencia	$\rceil \longrightarrow \mathbf{R}$	$e \mathbf{C} = \Phi_R \mathbf{I} \mathbf{C}$
	$\longrightarrow \rceil \mathbf{R}$	$f \mathbf{C} = \Phi_R^{-1} \mathbf{I} \mathbf{C}$
Capacitancia	$\rceil \longrightarrow \mathbf{C}$	$e \mathbf{C} = \Phi_C^{-1} \left[\int^t f \mathbf{C} d\tau \right]$
	$\longrightarrow \rceil \mathbf{C}$	$f \mathbf{C} = \frac{d}{dt} \mathbf{P}_C e \mathbf{C}$
Inductancia	$\longrightarrow \rceil \mathbf{I}$	$f \mathbf{C} = \Phi_I^{-1} \left[\int^t e \mathbf{C} d\tau \right]$
	$\rceil \longrightarrow \mathbf{I}$	$e \mathbf{C} = \frac{d}{dt} \mathbf{P}_I f \mathbf{C}$

Procedimiento 2.4 Para poder obtener las ecuaciones diferenciales es necesario aplicar las reglas establecidas en la tabla 2.6 y seguir el siguiente procedimiento en orden estricto:

1. Considerar cualquier $\mathbf{MS}_e$ o $\mathbf{MS}_f$ y asignar su causalidad requerida e inmediatamente extender las implicaciones causales, usando las restricciones de 0, 1, TF, y GY.
2. Asignar causalidad integral a los elementos C e I respetando las restricciones de la Tabla 2.6.
3. Escoger cualquier R que no esté asignado y dar una causalidad arbitraria a R. Extender las implicaciones usando 0, 1, TF, y GY.

Se dice que un Bond Graph es Causalmente Correcto, cuando no existe conflicto de causalidad entre los elementos y las uniones.

Por otro lado, es necesario mencionar que la causalidad derivativa se presenta cuando un sistema contiene elementos de almacenamiento de energía que no son dinámicamente independientes, en una asignación de causalidad integral predefinida.

El número de elementos que almacenan energía en causalidad integral es el número de ecuaciones diferenciales linealmente independientes y el número de elementos almacenadores en causalidad derivativa es el número de ecuaciones diferenciales linealmente dependientes.

Mediante la creación de la bond graph, el diseño y análisis de la estructura de un sistema a menudo pueden llevarse a cabo usando sólo lápiz y papel y para esto es necesario seguir un procedimiento estricto para cada uno de los sistemas físicos.

2.2.1 Modelado de sistemas eléctricos

Al realizar la representación de sistemas eléctricos en Bond Graph se utiliza el **Procedimiento 2.5** el cual se presenta a continuación:

1. Dibujar una unión-0 (unión paralelo) para cada corriente distinta en el circuito, es decir, donde las trayectorias paralelas coincidan.
2. Dibujar una unión-1 (unión serie) para los voltajes diferentes y conectar el componente apropiado de Bond Graph por un bond en esa unión. La dirección de la semiflecha en cada bond indica la dirección asumida del flujo de potencia, es decir, a partir de fuentes y hacia elementos almacenadores y elementos disipadores.
3. Dibujar bonds entre uniones adyacentes, nuevamente indicando la dirección de flujo de potencia.
4. Remover el punto de referencia donde el nodo sea tierra, el cual tiene un voltaje de cero.
5. Simplificar la gráfica de acuerdo a las siguientes reglas (figura 2.19):



Figura 2.19 Regla para simplificar los bonds.

6. Finalmente se le aplica el procedimiento 2.4 para la aplicación de la causalidad correspondiente.

Ejemplo 2.5 De la figura 2.7 obtener el modelado por medio de Bond Graph.

Solución:

Utilizando el procedimiento 2.5 se tiene:

1. Se dibujan las uniones 0 las cuales representan las uniones en paralelo o los nodos del sistema (figura 2.20):

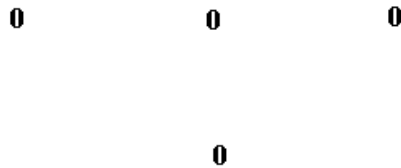


Figura 2.20 Representación de la uniones 0

2. Se dibujan las uniones 1 que representan las uniones en serie, así como también se añaden las conexiones de los componentes que conforman el circuito (figura 2.21):

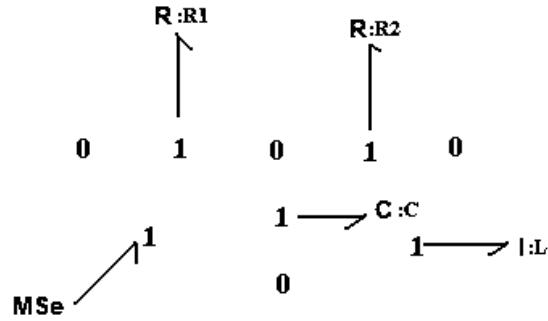


Figura 2.21 Representación de las uniones con los componentes que conforman el circuito

3. Se realizan las conexiones adyacentes indicando la dirección del flujo de potencia e identificando el punto de referencia que es la tierra (figura 2.22):

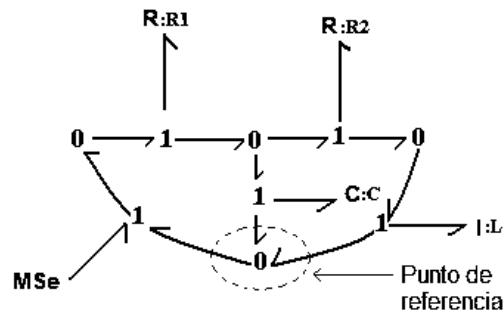


Figura 2.22 Diagrama con las conexiones adyacentes indicando el punto de referencia

4. Se renueva el punto de referencia, eliminando los bond que quedan sueltos apreciados en la figura 2.23:

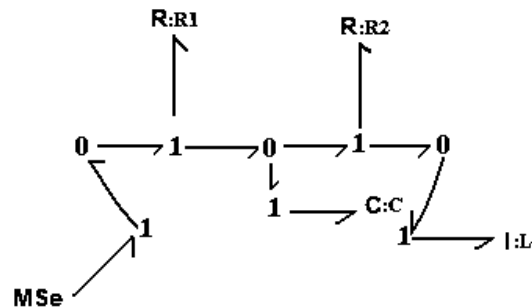


Figura 2.23 Diagrama sin el punto de referencia y los bonds adyacentes a él.

5. Haciendo uso del paso número 5 planteado en el procedimiento 2.5 queda (figura 2.24):

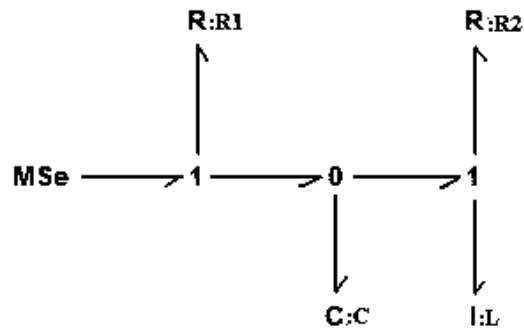


Figura 2.24 Reducción del Bond Graph

6. Ya tendiendo el Bond Graph reducido se le aplica las reglas de causalidad establecidas en el procedimiento 2.4 apoyadas en la tabla 2.6. La figura 2.25 muestra el resultado de la aplicación de estas reglas.

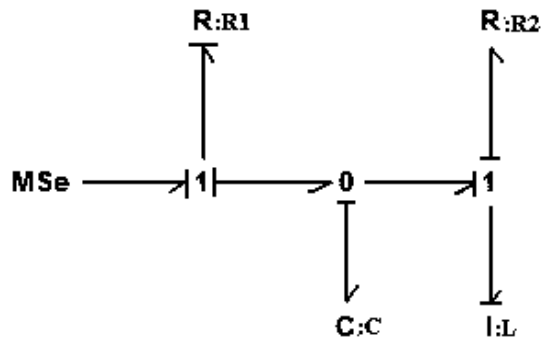


Figura 2.25 Bond Graph del circuito eléctrico

2.2.2 Modelado de sistemas mecánicos

El procedimiento utilizado para el modelado de sistemas mecánicos es similar al método de construcción para redes eléctricas.

Procedimiento 2.6

1. Para cada velocidad distinta establecer una unión-1.
2. Insertar los elementos de generación de fuerzas de puerto-1 entre el par apropiado de uniones-1 usando uniones -0. También, añadir inercias a sus respectivas uniones-1.
3. Dibujar bonds entre uniones adyacentes, nuevamente indicando la dirección de flujo de potencia.
4. Remover la unión-0 que presente el punto de referencia recordando que para este sistema el nodo particular de tierra es cualquier velocidad cero; remover todos los bonds conectados a esta unión.
5. Simplificar el bond de acuerdo a la regla establecida la figura 2.19.
6. Aplicar las reglas de causalidad descritas en el procedimiento 2.4

Ejemplo 2.6 De la figura 2.8 obtener el modelado en Bond Graph

Solución:

Aplicando los pasos 1 , 2, y 3 del procedimiento 2.6 se obtiene la figura 2.26.

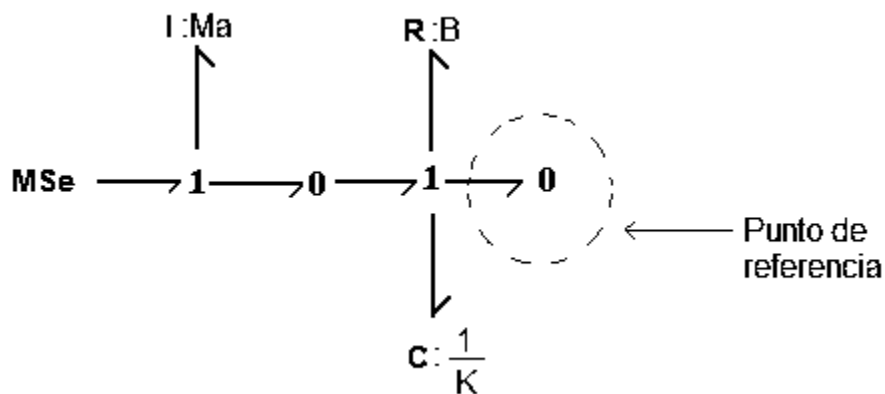


Figura 2.26 Modelado del sistema mecánico

A continuación se aplican los pasos 4, 5 y 6 los cuales se pueden observar en la figura 2.27.

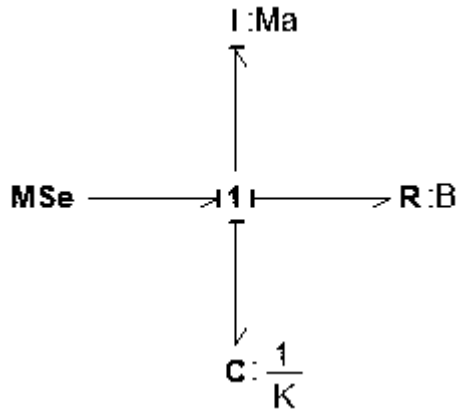


Figura 2.27 Bond Graph del sistema mecánico de traslación

2.2.3 Modelado de nivel de líquido

El modelado de nivel de líquido puede ser tratado como un circuito siempre y cuando el flujo de volumen sea conservativo y el fluido sea cercanamente incompresible. Para ellos se plantea el **Procedimiento 2.7** que consiste en:

1. Dibujar para cada presión distinta una unión-0, esto indica que la conexión es paralela.
2. Insertar cada elemento entre el par de uniones-0 apropiadas, usando uniones-1 y añadiendo fuentes de presión y de flujo.
3. Dibujar bonds entre uniones adyacentes, indicando la dirección de flujo de potencia.
4. Definir todas las presiones relativas a una presión de referencia (la mayoría de veces es la atmosférica) y eliminar la unión 0 de referencia y sus bonds adyacentes a éste.
5. Simplificar el bond con la ayuda de la figura 2.18
6. Aplicar el procedimiento 2.4 el cual trata de la causalidad de los sistemas.

Ejemplo 2.7 Obtener el bond Graph de la figura 2.11

Solución:

Se dibujan las uniones 0-1 donde las conexiones están en serio o bien en paralelo (ver figura 2.28).



Figura 2.28 Unión-0 y unión-1

Se completa el paso 2 colocando los elementos y fuentes que conforman el sistema y se aplica el paso 3 y 4 (figura 2.29).

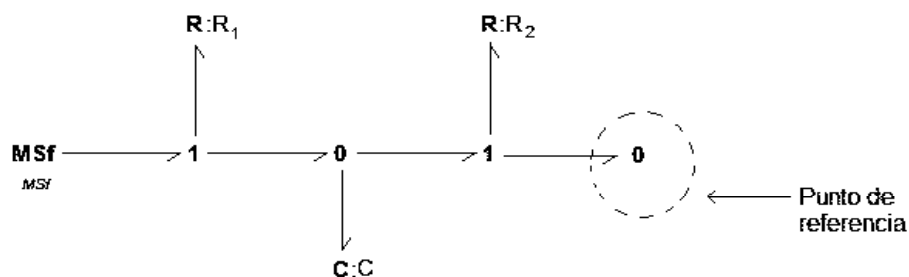


Figura 2.29 Bond Graph con los elementos que conforman al sistema de nivel de líquido

Se completa el paso 4 eliminando el punto de referencia. Se aplica inmediatamente el paso 6 al no existir el paso 5, quedando el Bond Graph como se aprecia en la figura 2.30.

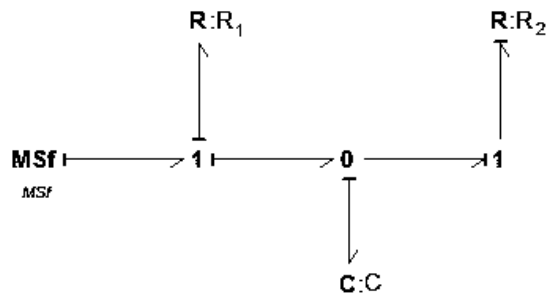


Figura 2.30 Bond Graph del sistema de Nivel de Líquido

Capítulo 3

Determinación de la Función de Transferencia y variables de estado en Bond Graph

Dentro de la metodología de Bond Graph existen dos maneras de obtener la función de transferencia así como las variables de estado. En esta parte del tema se comenzará explicando el primer método que es por medio de la obtención de la Matriz de Estructura de Unión calculando primero las variables de estado y después continuando con la función de transferencia. En el segundo método a desarrollar es a través de Trayectorias Causales - Lazos Causales donde primero se puede obtener las variables de estado o bien la función de transferencia ya en este caso el orden a realizar no es necesario como en el caso del primer método. Se tomarán los ejemplos de los sistemas utilizados en el capítulo 2 para así mismo comparar los resultados.

3.1 Obtención de la Función de Transferencia y variables de estado en Bond Graph

Bond Graph es una técnica gráfica con dos maneras diferentes de obtener las variables de estado y la Función de Transferencia. Estos métodos son a través de la Matriz de Estructura Unión y por medio de Trayectoria Causal-Lazo Causal.

Matriz de Estructura de Unión

El conjunto de los nueve componentes ya vistos en la sección 2.2 que conforman un bond graph (R, C, I, TF, GY, Se, Sf, 0 y 1) más uno nuevo que es D que denota la salida o detector, pueden clasificarse en cinco grupos o campos de acuerdo a su poder o las propiedades de la energía:

- a) El campo de la disipación de R, en el que se pierde la energía del sistema.
- b) El campo de almacenamiento de C e I, que son la energía conservativa.
- c) El grupo general de conexiones de estructura 0,1, TF, y GY, que conserva la energía.
- d) Los campos de origen Se y Sf y e) el campo D que es el detector .

Dicha clasificación recibe el nombre de Estructura de Unión, su representación gráfica se aprecia en la figura 3.1.

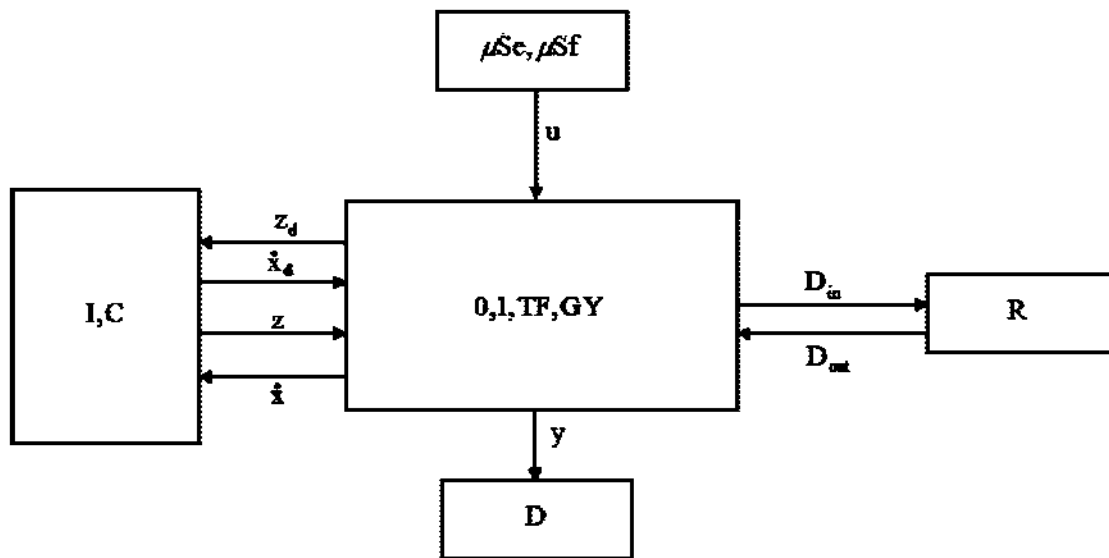


Figura 3.1 Diagrama de la Estructura de Unión de un Bond Graph

Los puntos representan el conjunto de todos los vínculos que unen la estructura de la salida al campo dado. Al vínculo que conecta los campos a la estructura de cruce se

llaman bonds externos (R, C, I, MSe y MSf), y los bonds que se unen a un elemento de la estructura de unión son llamados bonds internos (TF, GY, 0,1).

Los vectores asociados en la figura 3.1 se definen como:

X = Vector de estado Φ en I, q en $C_{\sim}$

$\dot{X}$ = Vector de las derivadas de X en función del tiempo

Z = Vector de estado complementario Ψ en I, e en $C_{\sim}$

U = Vector de la fuente de salida Ψ en S_e , f en $S_f_{\sim}$

D_{in} = Vector de entrada al campo R

D_{out} = Vector de salida del campo R

Para sistemas lineales con coeficientes constantes, tanto de almacenamiento como de disipación, las limitaciones de campo pueden expresarse en forma matricial.

Para el campo de disipación se escribe:

$$D_{out} = L D_{in} \quad (3.1)$$

donde L es una matriz diagonal cuadrada de dimensión igual al número de elementos que conforman el puerto del campo R. Los valores de la diagonal son los parámetros de las R.

Para el campo de almacenamiento con causalidad integral se escribe:

$$Z = F X \quad (3.2)$$

donde F es una matriz cuadrada en forma de diagonal, con dimensiones igual al número de elementos que conforman el puerto del campo C e I. Los valores de la diagonal son los parámetros de C e I.

La relación que tienen los vectores dentro de la estructura de unión, llamada Matriz de Estructura de Unión es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} Z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

donde S es

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Los elementos que conforman la matriz S toman valores dentro del conjunto $\{ \pm 1, \pm n, \pm r \}$ donde n y r son los módulos del transformador y girador.

Las submatrices S_{ij} tiene dos propiedades principales: S_{11} y S_{22} (que es la dimensión de Z y la dimensión de D_{out}) son matrices cuadradas antisimétricas y S_{12} (dimensiones de D_{in}) es la matriz transpuesta negativa de S_{21} (dimensiones X) y viceversa. Estas dos propiedades están basadas en el principio de conservación de energía.

La expansión de la ec.(3.3) es:

$$\dot{x} = S_{11}Z + S_{12}D_{out} + S_{13}u \quad (3.5)$$

$$D_{in} = S_{21}Z + S_{22}D_{out} + S_{23}u \quad (3.6)$$

$$y = S_{31}Z + S_{32}D_{out} + S_{33}u \quad (3.7)$$

Tomando la ec. (3.6) y sustituyendo en ella las ecs. (3.1) y (3.2) quedando:

$$D_{in} = S_{21}FX + S_{22}LD_{in} + S_{23}u \quad (3.8)$$

Despejando D_{in} nos queda:

$$D_{in} = (-S_{22}L)^{-1} S_{21}FX + (-S_{22}L)^{-1} S_{23}u \quad (3.9)$$

Ahora tomamos la ec. (3.5) y sustituimos en ella las ec. (3.1) y (3.2):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{S}_{11}\mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{S}_{12}\mathbf{L}\mathbf{D}_{in} + \mathbf{S}_{13}\mathbf{u} \quad (3.10)$$

Sustituyendo la ec. (3.8) en ec. (3.10) nos queda:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{S}_{11}\mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{S}_{12}\mu\mathbf{S}_{21}\mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{S}_{12}\mu\mathbf{S}_{23}\mathbf{u} + \mathbf{S}_{13}\mathbf{u} \quad (3.11)$$

donde

$$\mu = \mathbf{L}(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}\mathbf{L})^{-1} \quad (3.12)$$

Así que:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{12}\mu\mathbf{S}_{21} + \mathbf{I}]\mathbf{F}\mathbf{X} + [\mathbf{S}_{13} + \mathbf{S}_{12}\mu\mathbf{S}_{23}]\mathbf{u} \quad (3.13)$$

Por lo tanto

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{12}\mu\mathbf{S}_{21} + \mathbf{I} \quad (3.14)$$

y

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}_{13} + \mathbf{S}_{12}\mu\mathbf{S}_{23} \quad (3.15)$$

Tomando la ec. (3.7) y sustituimos las ecs. (3.1) y (3.2) quedando:

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}_{31}\mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{S}_{32}\mathbf{L}\mathbf{D}_{in} + \mathbf{S}_{33}\mathbf{u} \quad (3.16)$$

Sustituyendo la ec.(3.8) en la ec.(3.16) nos queda:

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}_{31}\mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{S}_{32}\mu\mathbf{S}_{21}\mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{S}_{32}\mu\mathbf{S}_{23}\mathbf{u} + \mathbf{S}_{33}\mathbf{u} \quad (3.17)$$

donde μ es la ec. (3.11). La ec. (3.16) al agrupar los términos nos queda:

$$\mathbf{y} = [\mathbf{S}_{31} + \mathbf{S}_{32}\mu\mathbf{S}_{21}]\mathbf{F}\mathbf{X} + [\mathbf{S}_{33} + \mathbf{S}_{32}\mu\mathbf{S}_{23}]\mathbf{u} \quad (3.18)$$

entonces

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{31} + S_{32} \mu S_{21} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_F \quad (3.19)$$

$$D = S_{33} + S_{32} \mu S_{23} \quad (3.20)$$

Ya teniendo los variables de estado a través de las ecs. (3.13), (3.14), (3.18) y (3.19) se aplica la ec. (2.22) obtenida en el capítulo 2, de esta manera se obtienen la Función de Transferencia del sistema que se está resolviendo.

Trayectoria Causal- Lazo Causal

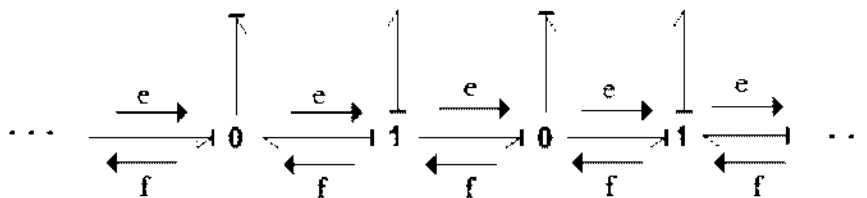
Un bond graph muestra no sólo estructuras topográficas de un sistema si no también la organización causal, donde esta última indica las relaciones de causa y efecto, esta estructura causal da la noción de Trayectoria Causal.

Una trayectoria causal de una estructura de unión es una secuencia alternante de bonds y nodos tal que:

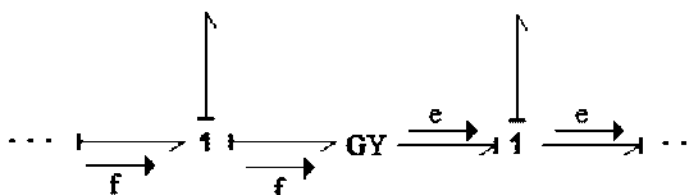
- Para una gráfica que no tiene la causalidad aplicada a sus elementos o bonds, la secuencia forma una cadena sencilla.
- Todos los nodos en la secuencia tienen una completa y correcta causalidad establecida por medio del procedimiento.
- Dos bonds de una trayectoria causal tiene en el mismo nodo orientaciones causales opuestas.

Existen 5 trayectorias causales:

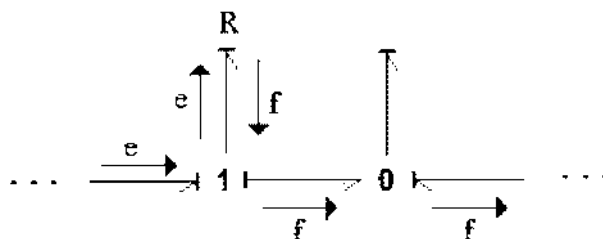
1. Trayectoria causal simple: es aquella que a través de la misma, sigue solamente una misma variable, tal como se muestra en la siguiente figura 3.2.



2. Trayectoria causal mezclada: directa es aquella trayectoria donde existe un cambio de variable debido a la presencia de un GY (ver figura 3.3).



3. Trayectoria causal mezclada indirecta: es aquella trayectoria que se da cuando existe un cambio de la trayectoria al pasar a través de algún elemento R, C, o I (ver figura 3.4).



4. Trayectoria causal directa: es una trayectoria causal entre una entrada y un detector (salida).
5. Trayectoria causal indirecta: es una trayectoria que pasa a través de elementos R, C o I, las relaciones constitutivas de estos elementos deben ser tomadas en cuenta.

La función característica de una trayectoria causal está definida como la función la cual enlaza la variable de salida del elemento correspondiente al origen de la trayectoria, a la variable de entrada del elemento formando el fin de la trayectoria.

La función característica, indexada i, para una trayectoria causal directa mezclada o simple es:

$$T_i = \left(\prod_{j=1}^{n+n_0} \left(m_j \text{ ó } \frac{1}{m_j} \right) \left(r_k \text{ ó } \frac{1}{r_k} \right) \right) \quad (3.21)$$

tal que

n_0 y n_1 representa el número total de cambios de orientación de los bonds, respectivamente en las uniones -0 mientras se siga la variable de flujo y mientras que en las uniones -1 se siga la variable de esfuerzo. Lo antes mencionada se puede apreciar mejor en la figura 3.5.

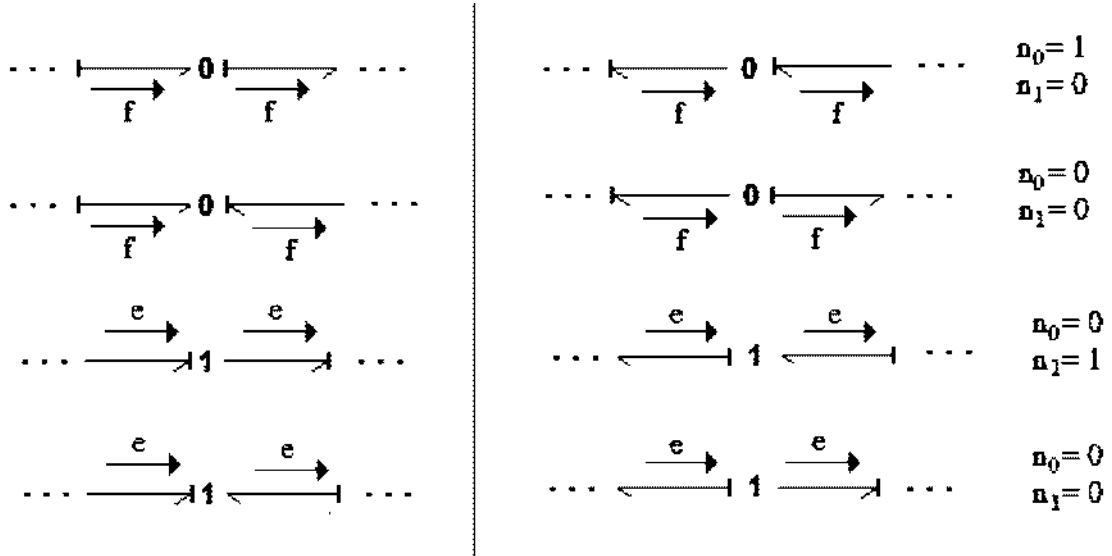


Figura 3.5 Principales cambios de orientación de Bonds

m_j , $\frac{1}{m_j}$ y r_k , $\frac{1}{r_k}$ son los módulos de los elementos TF y GY los cuales intervienen en la trayectoria causal, dependiendo de sus causalidades.

También es necesario tomar en cuenta las conexiones causales y sus correspondientes transmitancias las cuales se pueden observar en la tabla 3.1.

Tabla 3.1 Conexiones causales y sus transmitancias

Conexión Causal	Transmitancia
$C \xleftarrow{1} \mathbf{0} \xrightarrow{\quad} \dots \xrightarrow{\quad} R$	$-\frac{1}{RCS}$
$I \xleftarrow{\quad} \mathbf{1} \xrightarrow{\quad} \dots \xrightarrow{\quad} R$	$-\frac{R}{IS}$
$I \xleftarrow{\quad} \mathbf{1} \xrightarrow{\quad} \dots \xrightarrow{\quad} C$	$-\frac{1}{CS^2}$
$R_1 \xleftarrow{\quad} \mathbf{1} \xrightarrow{\quad} \dots \xrightarrow{\quad} R_2$	$-\frac{R_2}{R_1}$
$C \xleftarrow{\quad} \mathbf{0} \xrightarrow{\quad} \frac{TF}{m} \xrightarrow{\quad} \dots \xrightarrow{\quad} R$	$-\frac{1}{RCSm^2}$
$C \xleftarrow{\quad} \mathbf{0} \xrightarrow{\quad} \frac{GY}{r} \xrightarrow{\quad} \dots \xrightarrow{\quad} R$	$-\frac{R}{SCr^2}$

Un **lazo causal** es una trayectoria causal sencilla cerrada.

Un **lazo Mason** es un lazo causal de la salida de un puerto a la entrada del mismo sin trazar el mismo bond en la misma dirección más de una vez.

El polinomio característico está dado por:

$$D \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} = 1 - \sum_j L_{1j} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} + \sum_K L_{2K} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} - \sum_l L_{3l} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} + \dots \quad (3.22)$$

donde $L_{rk} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}$ es el producto de las ganancias de lazo del K^{th} conjunto del r^{th} lazo de Mason, los cuales no se tocan unos con otros.

La L_{ij} ganancia del J^{th} lazo de Mason está definida por:

$$L_{ij} = (-1)^{n_0+n_1} \prod_{j,k} \left(m_j \text{ ó } \frac{1}{m_j} \right) \left(r_k \text{ ó } \frac{1}{r_k} \right) \prod_h G_h \quad (3.23)$$

n_0 y n_1 representan el número total de cambios de orientación de los bonds, respectivamente en las uniones -0, al seguir a la variable de flujo; y en las uniones -1 al seguir a la variables de esfuerzo; $\prod_{j,k}$ denota el producto de m_j ó $1/m_j$ y r_k ó $1/r_k$ son los módulos de los elementos de TF y GY, los cuales son incluidos en la trayectoria causal, dependiendo de sus causalidades y $\prod_h$ designa el producto de ganancias de los elementos que componen el lazo.

Un **lazo individual** es que lazo causal que existe en un Bond Graph formado por un elemento disipativo y un elemento de almacenamiento o dos elementos de almacenamiento (ver figura 3.6).

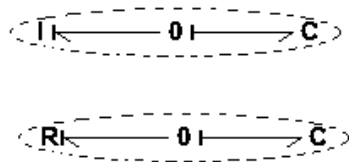


Figura 3.6 Lazos individuales

Los lazos disjuntos se forman entre dos o más lazos individuales, los cuales no se tocan entre sí, como se puede ver en la figura 3.7.

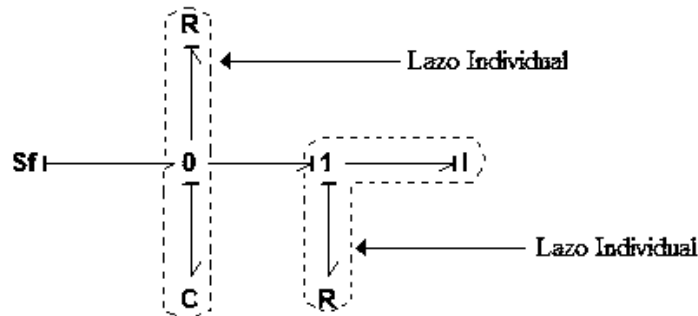


Figura 3.7 Bond Graph con dos lazos individuales y son además disjuntos

Para la obtención de las variables de estado se aplica el siguiente procedimiento:

Procedimiento 3.1

1. Identificar el número de elementos de almacenamiento $\int$ y enumerar cada uno de ellos.
2. Identificar el número de elementos disipativos C y enumerar cada uno de ellos.
3. Obtener la variable A, estableciendo relación entre elementos disipativos y elementos de almacenamiento, tomando en cuenta que:
 - 3a) A será una matriz cuadrada que dependerá del número de elementos de almacenamiento: $A_{n \times n}$.
 - 3b) Los valores de la diagonal (figura 3.6) de A serán la Σ de los lazos causales individuales que forman un elemento de almacenamiento con cada uno de los elementos disipativos, recordando que la trayectoria causal establecida solo se pasa una vez por el elemento disipativo.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

← Diagonal

Figura 3.6 Diagonal de la matriz A

Ejemplo 3.1:

- Para a_{11} se suman los lazos existentes entre el elemento de almacenamiento $\int$ con cada uno de los elementos disipativos.
 - Para a_{22} se suman los lazos existentes entre el elemento de almacenamiento $\int$ con cada uno de los elementos disipativos, etc.
- 3c) Para los valores externos a la diagonal se obtienen a base de trayectorias causales formadas entre un elemento de almacenamiento y otro elemento de

almacenamiento. El sub-índice de cada termino de la matriz A nos indican los elementos que conforman la trayectoria causal (ver figura 3.7).

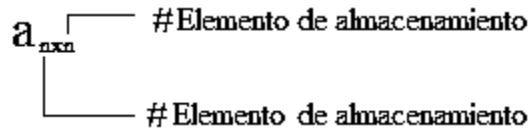


Figura 3.7 Terminos a indicando los sub-índices que corresponden a cada elemento

Ejemplo 3.2:

- Para a_{12} es la trayectoria causal del elemento de almacenamiento C al otro elemento de almacenamiento C

3d) El signo en cada caso depende de la ec. (3.23)

3e) En caso de no existir un lazo causal o una trayectoria causal entre sus elementos, automáticamente el valor correspondiente es 0.

4. La obtención de los valores para la variable B

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1xf} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2xf} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{nx1} & b_{nx2} & \dots & b_{nxf} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

se tiene a partir de las trayectorias causales establecidas entre las fuentes C y elementos de almacenamiento C , tomando en cuenta:

- 4a) Al realizar la trayectoria causal pasar solamente por elementos disipativos.
- 4b) El subíndice de cada termino de la matriz B nos indica los elementos que conforman la trayectoria causal (ver figura 3.8).

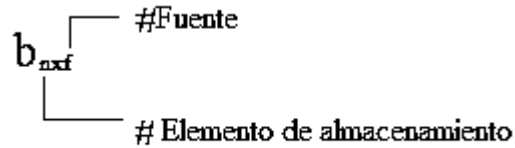


Figura 3.8 Termino b indicando lo sub-índices que corresponde a cada elemento

Ejemplo 3.3:

Para b_{21} la trayectoria causal se realiza de la fuente  y elemento de almacenamiento .

4c) El signo resulta de la ec. (3.23).

4d) En caso existir trayectoria causal, el resultado será un 0.

5. La obtención de los elementos que conforman la matriz C

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1xn} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2xn} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{dx1} & c_{dx2} & \dots & c_{dxn} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

se obtiene con la relación de los elementos de almacenamiento $_n$ y detectores $_d$ por lo cual se toma en cuenta lo siguiente:

5a) La trayectoria causal debe pasar solamente por elementos disipativos.

5b) El sub-índice de cada término de la matriz C nos indica los elementos que conforman la trayectoria causal (figura 3.9).

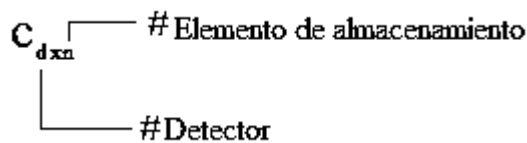


Figura 3.9 Termino c indicando lo sub-índices que corresponde a cada elemento

Ejemplo 3.4:

Para c_{31} la trayectoria causal va del elemento de almacenamiento C_{31} al detector C_{31} .

5c) El signo correspondiente a cada elemento se obtiene de utilizar la ec. (3.23)

5d) En caso de no existir trayectoria causal, colocar un 0.

6. Finalmente, para la obtención de los términos de la variable D

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1xf} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2xf} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ d_{dx1} & d_{dx2} & \dots & d_{dx f} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

se establece la relación de las trayectorias causales entre fuentes C_{31} y detectores C_{31} tomando en cuenta los siguiente criterios:

6a) Pasar únicamente por elementos disipativos.

6b) El sub-índice de cada término de la matriz D indica los elementos los cuales se hace la relación de la trayectoria causal (figura 3.10)

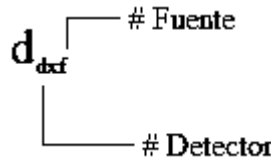


Figura 3.10: Termino d indicando lo sub-índices que corresponde a cada elemento

6c) El signo correspondiente a cada término se obtiene de la ec. (3.23)

6d) En caso de no existir trayectoria causal, automáticamente corresponde un 0.

7. En cualquiera de los casos recordar que se encuentra en el dominio de la Laplace, así que cada vez que se pase por un elemento de almacenamiento agregar el grado correspondiente a la variable S.

Para la obtención de la Función de Transferencia se aplica la siguiente fórmula:

$$G = \frac{P - \sum L_{ino}}{\Delta} \quad (3.27)$$

donde

P es la trayectoria causal de la fuente al detector permitiendo pasar sólo una vez por elementos disipativos y elementos de almacenamiento.

L_{ino} son todos aquellos lazos individuales que NO tocan la trayectoria de P.

$$\Delta = 1 - \sum L_{in} - \sum L_{2ind} + \sum L_{3ind} \dots \quad (3.28)$$

siendo

L_{in} todos los lazos individuales que forman el Bond Graph.

L_{2in} aquellos lazos disjuntos formados entre dos lazos individuales.

L_{3in} lazos disjuntos formados entre tres lazos individuales, etc.

3.1.1. Sistema Eléctrico

Tomando el ejemplo 2.2 el cual, es un sistema eléctrico, se volverá a resolver pero utilizando la técnica de Bond Graph: Matriz Estructura Unión y Trayectoria Causal-Lazo Causal.

Matriz Estructura Unión

Tomando el bond graph correspondiente a dicho sistema visto en la figura 2.25, se enumeran los bonds, lo cual se puede apreciar en la figura 3.11:

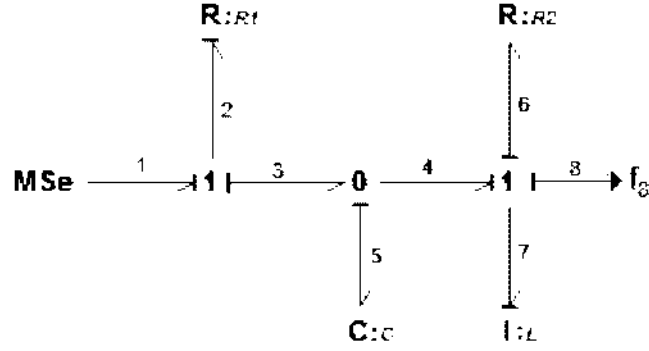


Figura 3.11: Bond Graph del sistema eléctrico con sus bonds enumerados

A continuación se obtienen los vectores clave:

$$x = \begin{bmatrix} q_5 \\ p_7 \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} f_5 \\ e_7 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} e_5 \\ f_7 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} f_8 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} e_1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Utilizando la ec. (3.1), D_{out} queda:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

donde

$$L = \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_1}, R_2 \right\} \quad (3.32)$$

Así mismo se hace uso de la ec.(3.2), quedando z :

$$\begin{bmatrix} e_5 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_5 \\ p_6 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

donde

$$F = \text{diag}\left\{\frac{1}{C_1}, \frac{1}{L_1}\right\} \quad (3.34)$$

Para la obtención de la matriz unión se sustituyen los valores en la ec.(3.3) :

$$\begin{bmatrix} f_5 \\ e_7 \\ - \\ e_2 \\ f_6 \\ - \\ f_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & | & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & | & 0 & -1 & | & 0 \\ - & - & | & - & - & | & - \\ -1 & 0 & | & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 & | & 0 \\ - & - & | & - & - & | & - \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ f_7 \\ - \\ f_2 \\ e_6 \\ - \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

siendo

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & | & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & | & 0 & -1 & | & 0 \\ - & - & | & - & - & | & - \\ -1 & 0 & | & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 & | & 0 \\ - & - & | & - & - & | & - \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Teniendo la Matriz de Estructura Unión se procede a la obtención de las variables de estado y para esto se comenzará con la sustitución de valores en la ec.(3.12):

$$\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (3.37)$$

quedando

$$\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Para la obtención de la variable A se utiliza la ec. (3.14), quedando:

$$A = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Resolviendo lo anterior:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Para la obtención de la variable de estado B se utiliza la ec. (3.15), donde sólo se sustituyen valores:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Resolviendo las matrices anteriores queda que:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Obteniendo la variable de estado C en base a la ec. (3.19) queda:

$$C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Realizando operaciones:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Aplicando la ec. (3.20) se obtiene la variable de estado D:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Resolviendo las operaciones anteriores se obtiene lo siguiente:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Después de haber obtenido las variables de estado, las ecuaciones de estado quedan:

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_5 \\ \dot{e}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_5 \\ p_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

y

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_5 \\ \dot{p}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_5 \\ p_7 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Ahora para la obtención de la función de transferencia se sustituyen los valores de las ecs. (3.40), (3.42), (3.44) y (3.46) en la ec. (2.22):

$$G_{11}(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \left(S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Comenzando a resolver la ec. (3.49):

$$G_{11}(S) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S + \frac{1}{R_1 C} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & S + \frac{R_2}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$G_{11}(S) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S + \frac{R_2}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & S + \frac{1}{R_1 C} \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

donde

$$\Delta = \left(S + \frac{1}{R_1 C} \right) \left(S + \frac{R_2}{L} \right) - \left(\frac{1}{L} \right) \left(-\frac{1}{C} \right) \quad (3.52)$$

Resolviendo queda:

$$\Delta = \frac{S^2 R_1 C L + S(R_1 R_2 C + L) + R_1 + R_2}{R_1 C L} \quad (3.53)$$

Llamando al numerador Δ_1 y por tal motivo la ec. (3.53) queda:

$$\Delta = \frac{\Delta_1}{R_1 C L} \quad (3.54)$$

Continuando la solución de la ec. (3.51) nos queda:

$$G_{11}(S) = \left[\frac{1}{R_1 C L} \right] \frac{1}{\Delta} \quad (3.55)$$

Sustituyendo la ec. (3.54) en la ec. (3.55):

$$G_{11}(S) = \left[\frac{1}{R_1 C L} \right] \frac{R_1 C L}{\Delta_1} \quad (3.56)$$

Quedando finalmente:

$$G_{11}(S) = \frac{1}{S^2 R_1 C L + S(R_1 R_2 C + L) + R_1 + R_2} \quad (3.57)$$

Trayectoria Causal-Lazo Causal

Usando el Bond Graph de la figura 3.6 y aplicando el procedimiento 3.1, haciendo antes que nada la observación que el sistema es de segundo orden; sabiendo esto se comienza a calcular los términos de la variable de estado A:

$$a_{11} = (5,3,2,2,3,5) = -\frac{1}{R_1 C} \quad (3.58)$$

$$a_{22} = (7,6,6,7) = -\frac{R_2}{L} \quad (3.59)$$

$$a_{12} = (7,7,4,5) = -\frac{1}{L} \quad (3.60)$$

$$a_{21} = (5,5,4,7) = \frac{1}{C} \quad (3.61)$$

Sustituyendo los valores en la matriz A nos queda:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Para la variable B se tiene:

$$b_{11} = (1,2,2,3,5) = \frac{1}{R_1} \quad (3.63)$$

$$b_{12} = 0 \quad (3.64)$$

Sustituyendo los valores de las ecs. (3.63) y (3.64) en la ec. (3.24):

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Calculando la variable C:

$$c_{11} = 0 \quad (3.66)$$

$$c_{12} = (7,7,8) = \frac{1}{L} \quad (3.67)$$

Quedando:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Calculando D nos queda:

$$d_{11} = 0 \quad (3.69)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Para la obtención de la Función de Transferencia se realiza lo siguiente:

Lazos individuales

$$L_1 = (2,3,5,5,3,2) = -\frac{1}{R_1 C S} \quad (3.71)$$

$$L_2 = (5,4,7,7,4,5) = -\frac{1}{C L S^2} \quad (3.72)$$

$$L_3 = (7,6,6,7) = -\frac{R_2}{L S} \quad (3.73)$$

Lazos disjuntos

$$L_{13} = L_1 \cdot L_3 = \frac{R_2}{R_1 CLS^2} \quad (3.74)$$

Obteniendo el denominador de la ec. (3.24) por medio de la ec. (3.28) se tiene que:

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3 + L_{13} \quad (3.75)$$

Sustituyendo las ecs. (3.71), (3.72), (3.73) y (3.74) en la ec. (3.76) tenemos que:

$$\Delta = 1 + \frac{1}{R_1 CS} + \frac{1}{CLS^2} + \frac{R_2}{LS} + \frac{R_2}{R_1 CLS^2} \quad (3.76)$$

Resolviendo tenemos:

$$\Delta = \frac{S^2 R_1 CL + S(R_1 R_2 C + L) + R_1 + R_2}{R_1 CLS^2} \quad (3.77)$$

De esta manera llamaremos al numerador como Δ_1 , quedando:

$$\Delta = \frac{\Delta_1}{R_1 CLS^2} \quad (3.78)$$

Trayecto directo

De la ec. (3.24) se calcula el numerador, el cual es el siguiente:

$$P_{11} = (1,2,2,3,5,5,4,7,7,8) = \frac{1}{R_1 CLS^2} (1 - 0) \quad (3.79)$$

Sustituyendo los valores de la ecs. (3.78) y (3.79) en la ec. (3.24) da como resultado:

$$G_{11}(S) = \frac{R_1 CLS^2}{R_1 CLS^2 \cdot \Delta_1} \quad (3.80)$$

Y finalmente F.T queda como:

$$G_{11}(S) = \frac{1}{S^2 R_1 CL + S(R_1 R_2 C + L) + R_1 + R_2} \quad (3.81)$$

Los valores de las variables de estado y función de transferencia obtenidos a través de la matriz estructura unión y trayectoria causal-lazo causal, son los mismos resultados que en el ejemplo 2.2.

3.1.2. Sistema Mecánico

Considerando el ejemplo 2.3 de un sistema mecánico, se resuelve ahora utilizando la técnica de Bond Graph: Matriz Estructura Unión y Trayectoria Causal-Lazo Causal.

Matriz Estructura Unión

Tomando el bond graph correspondiente a dicho sistema visto en la figura 2.27, se enumeran los bonds, lo cual se puede apreciar en la figura 3.12:

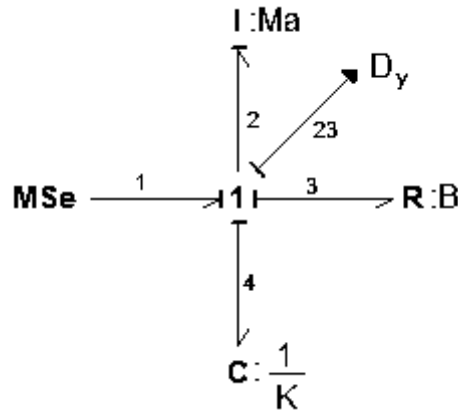


Figura 3.12: Bond Graph del sistema mecánico con los bonds enumerados

Obteniendo los vectores clave se tiene:

$$x = \begin{bmatrix} q_4 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} f_4 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} e_5 \\ f_7 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} f_8 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} f_1 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_3 \end{bmatrix} \quad D_{out} = \begin{bmatrix} f_3 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Haciendo uso de la ec. (3.1) tenemos:

$$\begin{bmatrix} f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

donde

$$L = \text{diag} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

Así mismo, para obtener z en base a los vectores clave se usa la ec. (3.2):

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{1}{Ma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

y

$$F = \text{diag}\left\{K, \frac{1}{Ma}\right\} \quad (3.87)$$

Para la obtención de la matriz de estructura unión se sustituyen los vectores clave en la ec. (3.3):

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_2 \\ - \\ f_3 \\ - \\ f_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ -1 & 0 & | & -1 & 1 \\ - & - & | & - & - \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ - & - & | & - & - \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ f_2 \\ - \\ e_3 \\ - \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

De esta manera se procede a la obtención de las variables de estado empleando la ec. (3.12):

$$\mu = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{1}{Ma} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Resolviendo ec. (3.89) queda que:

$$\mu = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{1}{Ma} \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Para la obtención de la variable A se sustituyen los valores de la ec. (3.87), los extraídos de la matriz expresa en la ec. (3.88) y ec. (3.90) en la ec. (3.14), la cual queda de la siguiente manera:

$$A = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{1}{Ma} \end{bmatrix} \right) \quad (3.91)$$

Solucionando la ec. (3.92) queda que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{Ma} \\ -K & -\frac{B}{Ma} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Para la obtención de la variable de estado B se hace uso de la ec. (3.15) donde se sustituyen los valores extraídos de la ecs. (3.88) y (3.90):

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Resolviendo las matrices anteriores queda:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Para el cálculo de la variable de estado C es necesario sustituir los valores extraídos de las ecs. (3.87), (3.88) y (3.90) en ec. (3.19):

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Realizando las operaciones queda:

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

Aplicando la ec. (3.20) y usando los valores de las ecs. (3.88) y (3.90) se obtiene la variable de estado D:

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

Realizando las operaciones anteriores se obtiene lo siguiente:

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

Teniendo las variables de estado, las ecuaciones de estado conforme a la ec. (3.11) y (3.18):

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_4 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{Ma} \\ -K & -\frac{B}{Ma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{Ma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

Ahora para la función de transferencia se sustituyen los valores de las ecs. (3.92), (3.94), (3.96) y (3.98) en la ec. (2.22):

$$G_{11}(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{Ma} \end{bmatrix} \left(S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{Ma} \\ -K & \frac{-B}{Ma} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

$$G_{11}(S) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{Ma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & -\frac{1}{Ma} \\ K & S + \frac{B}{Ma} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

$$G_{11}(S) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{Ma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S + \frac{B}{Ma} & \frac{1}{Ma} \\ -K & S \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

donde

$$\Delta = \left(S + \frac{B}{Ma} \right) - \left(-\frac{1}{Ma} \right) \quad (3.104)$$

Resolviendo:

$$\Delta = \frac{MaS^2 + BS + K}{Ma} \quad (3.105)$$

Nombrando al numerador Δ_1 y así conviniendo que:

$$\Delta = \frac{\Delta_1}{Ma} \quad (3.106)$$

Retomando la solución de la ec. (3.103) queda:

$$G_{11}(S) = \begin{bmatrix} \frac{S}{Ma} \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta} \quad (3.107)$$

Sustituyendo la ec. (3.106) en la ec. (3.107):

$$G_{11}(S) = \begin{bmatrix} \frac{S}{Ma} \end{bmatrix} \frac{Ma}{\Delta_1} \quad (3.108)$$

Finalmente la F.T. es:

$$G_{11}(S) = \frac{S}{MaS^2 + BS + K} \quad (3.109)$$

Trayectoria Causal - Lazo Causal

Considerando el bond graph de la figura 3.12 y realizando la observación del bond graph del sistema mecanico a resolver, se puede decir que el sistema es de segundo orden; utilizando el procedimiento 3.1 se comienza calculando los términos de la variable A:

$$a_{11} = 0 \quad (3.110)$$

$$a_{22} = (2,3,3,2) = -\frac{B}{Ma} \quad (3.111)$$

$$a_{12} = (2,2,4) = \frac{1}{Ma} \quad (3.112)$$

$$a_{21} = (4,4,2) = -\frac{1}{K} \quad (3.113)$$

Resultando:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{Ma} \\ -K & -\frac{B}{Ma} \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Continuando con los pasos se calcula la variable B:

$$b_{11} = 0 \quad (3.115)$$

$$b_{21} = (1,2) = 1 \quad (3.116)$$

Sustituyendo los valores de las ecs. (3.115) y (3.116) en la ec. (3.24):

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

Calculando la variable C:

$$c_{11} = 0 \quad (3.118)$$

$$c_{12} = (2,2,23) = \frac{1}{Ma} \quad (3.119)$$

Sustituyendo los valores de las ecs. (3.118) y (3.119) en ec. (3.25):

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{Ma} \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

Calculando finalmente la variable D:

$$d_{11} = 0 \quad (3.121)$$

Con el valor obtenido en la ec. (3.121) se sustituye en la ec. (3.26):

$$D = \mathbf{I}^- \quad (3.122)$$

Para la adquirir la Función de Transferencia es necesario obtener los lazos individuales y los lazos disjuntos los cuales de muestran a continuación:

Lazos individuales

$$L_1 = (2,3,3,2) = -\frac{B}{MaS} \quad (3.123)$$

$$L_2 = (2,4,4,2) = -\frac{K}{MaS^2} \quad (3.124)$$

Lazos disjuntos

Los lazos disjuntos en este sistema no existen así que el valor para ellos es 0 .

Continuando con el proceso de la obtención de la F.T., es necesario calcular el denominador el cual se conoce como Δ :

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 \quad (3.125)$$

Sustituyendo las ecs. (3.123) y (3.124) en la ec. (3.125) queda:

$$\Delta = 1 + \frac{B}{MaS} + \frac{K}{MaS^2} \quad (3.126)$$

$$\Delta = \frac{MaS^2 + BS + K}{MaS^2} \quad (3.127)$$

$$\Delta = \frac{\Delta_1}{MaS^2} \quad (3.128)$$

donde

$$\Delta_1 = MaS^2 + BS + K \quad (3.129)$$

Trayectoria directa

De la ec. (3.24) se calcula el numerador el cual resulta lo siguiente:

$$P_{11} = (1,2,2,3) = \frac{1}{MaS}(1 - 0) \quad (3.130)$$

Entonces sustituyendo valores de las ecs. (3.128) y (3.130) en la ec. (3.24) y reduciendo la ecuación queda:

$$G_{11}(S) = \frac{MaS^2}{MaS\Delta_1} \quad (3.131)$$

Y finalmente, la F.T. queda:

$$G_{11}(S) = \frac{S}{MaS^2 + BS + K} \quad (3.132)$$

Estos valores obtenidos tanto de las variables de estado y función de transferencia mediante la matriz estructura unión y trayectoria causal-lazo causal, son los mismos resultados que en el ejemplo 2.3.

3.1.3. Sistema de Nivel de Líquido

El ejemplo 2.4 muestra la solución de un sistema de nivel de líquido, el cual en esta sección se resolverá utilizando la técnica de Bond Graph: Matriz Estructura Unión y Trayectoria Causal-Lazo Causal.

Matriz Estructura Unión

El bond Graph correspondiente a este ejemplo es el presentado en la figura 2.30, el cual los bond que lo conforma se han enumerado como se puede apreciar en la figura 3.13:

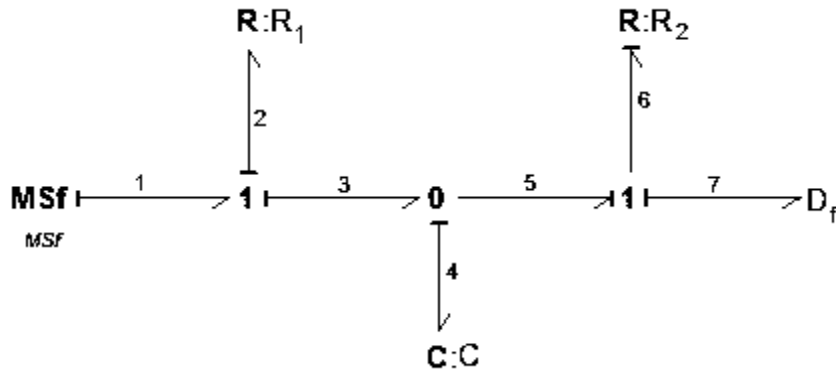


Figura 3.13: Bond Graph del sistema de nivel de líquido con los bonds enumerados

Sacando los vectores clave:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \end{bmatrix} \quad D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

Empleando la ec. (3.1) se adquiere D_{out} queda que:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \end{bmatrix} \quad (3.135)$$

en el cual

$$L = diag\left\{R_1, \frac{1}{R_2}\right\} \quad (3.136)$$

Así mismo se obtiene z se utilizando la ec. (3.2):

$$z_4 = \left[\frac{1}{C} \right] z_4 \quad (3.137)$$

donde

$$F = diag\left\{\frac{1}{C}\right\} \quad (3.138)$$

Para la obtención de la matriz de estructura unión se recurre a la ec. (3.3), teniendo como resultado:

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ - \\ f_2 \\ e_6 \\ - \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ e_2 \\ - \\ f_6 \\ - \\ f_1 \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

De esta manera se procede a la obtención de las variables de estado y para esto es necesario obtener μ , por lo tanto se emplea la ec. (3.12) quedando:

$$\mu = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (3.140)$$

$$\mu = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

Para la obtención de la variable A se extraen los valores adquiridos en las ec. (3.138) y (3.141) y se sustituyen en la ec. (3.14):

$$A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

Resolviendo queda:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

Para la obtención de la variable de estado B se utiliza la ec. (3.15) donde se sustituyen los valores extraídos en las ec. (3.139) quedando:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

reflejando

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

Para obtener la variable de estado C se sustituyen los valores de las ecs. (3.138), (3.139) y (3.141) en la ec. (3.96) quedando:

$$C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

Realizando operaciones

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2 C} \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

Aplicando la ec. (3.20) se obtiene la variable de estado D, sustituyendo en ella los valores de las ec. (3.139) y (3.141) dando como resultado:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

Teniendo las variables de estado, las ecuaciones de estado quedan:

$$\dot{x}_4 = \left[-\frac{1}{R_2 C} \right] x_4 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.150)$$

$$\dot{x}_7 = \left[\frac{1}{R_2 C} \right] x_4 \quad (3.151)$$

Ahora para la obtención de la función de transferencia se sustituyen los valores de las ecs. (3.143), (3.145), (3.147) y (3.149) en la ec. (2.22):

$$G_{11}(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\frac{1}{R_2 C} \right] \left(S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

Finalmente la F.T. queda:

$$G_{11}(S) = \frac{1}{R_2 C S + 1} \quad (3.153)$$

Trayectoria Causal-Lazo Causal

Usando el bond graph de la figura 3.14 y el procedimiento 3.1 se procede a obtener las variables de estado pero antes hay que mencionar que el sistema es de primera grado. Comenzando a calcular la variable de estado **A** conforme al procedimiento queda:

$$a_{11} = (4,5,6,6,5,4) = -\frac{1}{CR_2} \quad (3.154)$$

haciendo la sustitución:

$$A = \left[-\frac{1}{CR_2} \right] \quad (3.155)$$

Para calcular la variable se tiene:

$$b_{11} = (1,3,4) = 1 \quad (3.156)$$

quedando:

$$B = \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

Calculando la variable C:

$$c_{11} = (4,4,5,6,6,7) = \frac{1}{CR_2} \quad (3.158)$$

resultando:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{CR_2} \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

Calculando D:

$$d_{11} = 0 \quad (3.160)$$

Teniendo finalmente

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

Para la obtención de la Función de Transferencia es necesario obtener los lazos individuales y lazos disjuntos.

Lazos individuales

$$L_1 = (4,5,6,6,5,4) = -\frac{1}{R_2 CS} \quad (3.162)$$

Lazos disjuntos

Como no existen los lazos disjuntos en el bond Graph, estos tienen el valor de 0. Sacando primero el denominador de la ec. (3.24) que es el Δ , quedando así:

$$\Delta = 1 - L_1 \quad (3.163)$$

Ahora sustituyendo de la ec. (3.162) en la ec. (3.163) nos queda que:

$$\Delta = 1 + \frac{1}{R_2 CS} \quad (3.164)$$

Resolviendo nos queda que:

$$\Delta = \frac{R_2 CS + 1}{R_2 CS} \quad (3.165)$$

De esta manera llamaremos al numerador de la ec. (3.165) como Δ_1 , quedando:

$$\Delta = \frac{\Delta_1}{R_2 CS} \quad (3.166)$$

Trayecto directo

Retomando la ec. (3.24) se calcula ahora el numerador quedando así:

$$P_{11} = (1,3,4,4,5,6,6,7) = \frac{1}{R_2 CS} (1 - 0) \quad (3.166)$$

$$P_{11} = \frac{1}{R_2 CS} \quad (3.167)$$

Sustituyendo los valores en las ecs. (3.166) y (3.167) en la ec. (3.24) obtenemos la F.T quedando:

$$G_{11}(S) = \frac{R_2 CS}{R_2 CS \cdot \Delta_1} \quad (3.168)$$

Finalmente tenemos:

$$G_{11}(S) = \frac{1}{R_2 CS + 1} \quad (3.169)$$

Se observa que valores obtenidos tanto de las variables de estado y función de transferencia mediante la matriz estructura unión y trayectoria causal-lazo causal, son los mismos resultados adquiridos en el ejemplo 2.4.

Capítulo 4

Aplicaciones de Metodología

Como se mostró en los capítulos anteriores la forma de resolver los sistemas físicos a través de la metodología tradicional puede ser demasiado complicada en la aplicación de sistemas dinámicos con varios elementos que los conforma, el cual su modelado matemático resulta demasiado largo y tedioso. Por lo cual, en este capítulo, se plantean ejemplos resueltos solamente con el método de Bond Graph tanto por la matriz de estructura unión y por medio de Trayectoria Causal - Lazo Causal en sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos.

4.1 Sistema Eléctrico

El sistema eléctrico que se modelara en esta parte es el mostrado en la figura 4.1:

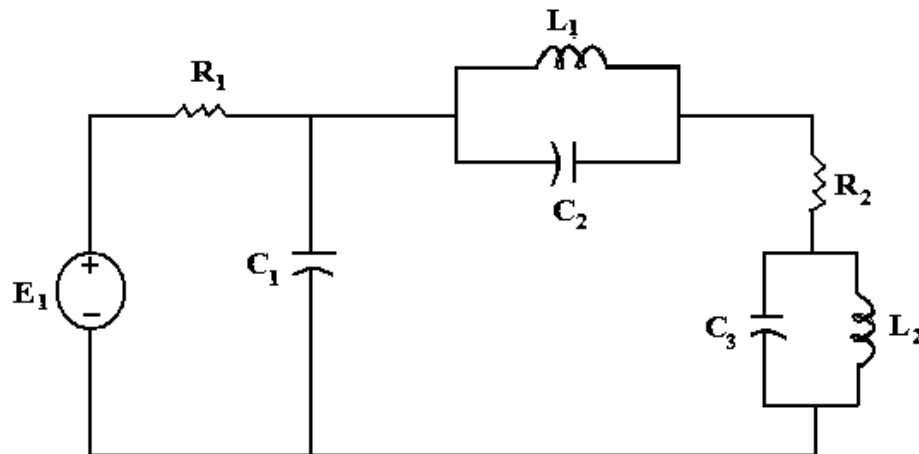


Figura 4.1 Sistema eléctrico con múltiples componentes

El Bond Graph de dicho sistema se puede apreciar en la figura 4.2 donde también se puede apreciar la enumeración de sus bonds ya que es una ayuda a la hora de identificar los esfuerzos y los flujos que conforman el sistema.

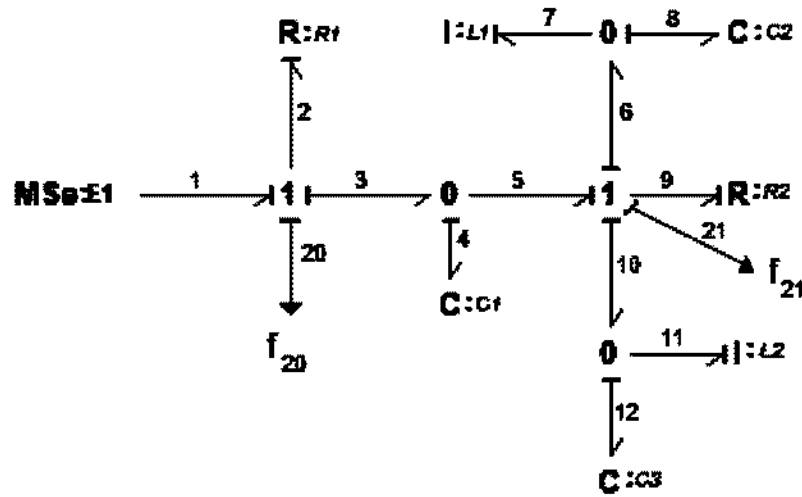


Figura 4.2 Bond Graph del sistema eléctrico

Matriz de Estructura Unión

Obteniendo los vectores clave:

$$x = \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \\ q_8 \\ p_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \\ f_8 \\ e_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \\ e_8 \\ f_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} f_{20} \\ f_{21} \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_9 \end{bmatrix} \quad D_{out} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_9 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Aplicando la ec. (3.1) queda:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ f_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_9 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

donde

$$L = \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2} \right\} \quad (4.4)$$

Así mismo se obtiene z en base a la ec. (3.2):

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \\ e_8 \\ f_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \\ q_8 \\ p_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

donde

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{C_1}, \frac{1}{L_1}, \frac{1}{C_2}, \frac{1}{L_2}, \frac{1}{C_3} \right\} \quad (4.6)$$

Para la obtención de la matriz de estructura unión se aplica la ec. (3.3) quedando:

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \\ f_8 \\ e_{11} \\ f_{12} \\ - \\ e_2 \\ e_9 \\ - \\ f_{20} \\ f_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & | & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & | & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \\ e_8 \\ f_{11} \\ e_{12} \\ - \\ - \\ f_2 \\ f_9 \\ - \\ - \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

De esta manera se procede a la obtención de las variables de estado obteniendo antes que nada μ en base a la ec. (3.12):

$$\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (4.8)$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Para la obtención de la variable A se aplica ec. (3.14) la cual queda expresada de la siguiente manera:

$$A = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Resolviendo da como resultado:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & 0 & \frac{1}{C_2 R_2} & 0 & \frac{1}{C_3 R_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{C_2 R_2} & 0 & -\frac{1}{C_3 R_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \\ \frac{1}{C_1 R_2} & 0 & -\frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{L_2} & -\frac{1}{C_3 R_2} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Para la obtención de la variable de estado B se aplica la ec. (3.15) quedando expresada:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Resolviendo lo anterior queda que:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Para la obtención de la variable de estado C se aplica la ec. (3.19) quedando expresada de la siguiente manera:

$$C = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Haciendo operaciones:

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1 R_2} & 0 & -\frac{1}{C_2 R_2} & 0 & -\frac{1}{C_3 R_2} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Aplicando la ec. (3.20) se obtiene la variable de estado D la cual queda de la siguiente manera:

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

quedando:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Después de haber obtenido las variables de estado, las ecuaciones de estado quedan expresadas conforme a las ecs. (3.11) y (3.18):

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \\ f_8 \\ e_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & 0 & \frac{1}{C_2 R_2} & 0 & \frac{1}{C_3 R_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{C_2 R_2} & 0 & -\frac{1}{C_3 R_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \\ \frac{1}{C_1 R_2} & 0 & -\frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{L_2} & -\frac{1}{C_3 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \\ q_8 \\ p_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{1}_1^- \quad (4.18)$$

y

$$\begin{bmatrix} f_{20} \\ f_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1 R_2} & 0 & -\frac{1}{C_2 R_2} & 0 & -\frac{1}{C_3 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \\ q_8 \\ p_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{1}_1^- \quad (4.19)$$

Ahora para la obtención de la función de transferencia se utiliza la ec. (2.22) donde se sustituyen en ella los valores encontrados en las ecs. (4.11), (4.13), (4.15) y (4.17) quedando:

$$\begin{bmatrix} G_{11}(S) \\ G_{21}(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1 R_2} & 0 & -\frac{1}{C_2 R_2} & 0 & -\frac{1}{C_3 R_2} \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & 0 & \frac{1}{C_2 R_2} & 0 & \frac{1}{C_3 R_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{C_2 R_2} & 0 & -\frac{1}{C_3 R_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \\ \frac{1}{C_1 R_2} & 0 & -\frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{L_2} & -\frac{1}{C_3 R_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Resolviendo

$$\begin{bmatrix} G_{11}(S) \\ G_{21}(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^5 \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \mathbf{R}_2 \} S^4 \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 + \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \} \\ + S^3 \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{R}_2 + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{R}_2 \} \\ + S^2 \mathbf{C}_1 \mathbf{L}_1 + \mathbf{C}_1 \mathbf{L}_2 + \mathbf{C}_2 \mathbf{L}_1 + \mathbf{C}_3 \mathbf{L}_2 \} S \mathbf{C}_1 \mathbf{R}_2 + 1 \\ S^4 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 + S^2 \mathbf{C}_2 \mathbf{L}_1 + \mathbf{C}_3 \mathbf{L}_2 \} 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta} \quad (4.21)$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta = & S^5 C_1 C_2 C_3 L_1 L_2 R_1 R_2 + S^4 \left(C_1 C_2 L_1 L_2 R_1 + C_1 C_3 L_1 L_2 R_1 + C_2 C_3 L_1 L_2 R_2 + C_2 C_3 L_1 L_2 R_1 \right) + \\ & + S^3 \left(C_1 C_2 L_1 R_1 R_2 + C_1 C_3 L_2 R_1 R_2 + C_2 L_1 L_2 + C_3 L_1 L_2 \right) + \\ & + S^2 \left(C_3 L_2 R_2 + C_2 L_1 R_2 + C_1 L_1 R_1 + C_1 L_2 R_1 + C_2 L_1 R_1 + C_3 L_2 R_1 \right) + S \left(C_1 R_1 R_2 + L_1 + L_2 \right) + R_1 + R_2\end{aligned}\quad (4.22)$$

De esta manera quedan las F.T de la siguiente manera:

$$G_{11}(S) = \frac{S^5 \left(C_1 C_2 C_3 L_1 L_2 R_2 \right) + S^4 \left(C_1 C_2 L_1 L_2 + C_1 C_3 L_1 L_2 + C_2 C_3 L_1 L_2 \right) + S^3 \left(C_1 C_2 L_1 R_2 + C_1 C_3 L_2 R_2 \right) + S^2 \left(C_1 L_1 + C_1 L_2 + C_2 L_1 + C_3 L_2 \right) + S C_1 R_2 + 1}{\Delta} \quad (4.23)$$

$$G_{21}(S) = \frac{S^4 C_2 C_3 L_1 L_2 + S^2 \left(C_2 L_1 + C_3 L_2 \right) + 1}{\Delta} \quad (4.24)$$

Trayectoria Causal-Lazo Causal

Usando el Bond Graph de la figura 4.2 se puede ver a simple vista que el sistema es de quinto grado. Aplicando el procedimiento 3.1 se obtiene las variables de estado.

Para el llenado de la diagonal de la variable A se tiene:

$$a_{11} = (4,3,2,2,3,4) + (4,5,9,9,5,4) = -\frac{1}{C_1 R_1} - \frac{1}{C_1 R_2} \quad a_{55} = 0$$

$$a_{22} = 0$$

$$a_{33} = (8,6,9,9,6,8) = -\frac{1}{C_2 R_2} \quad a_{44} = (12,10,9,9,10,12) = -\frac{1}{C_3 R_2}$$

Para el resto de la matriz de la variable A se tiene:

$$a_{12} = 0 \quad a_{13} = (8,8,6,9,9,5,4) = \frac{1}{C_2 R_2} \quad a_{14} = (12,12,10,9,9,5,4) = \frac{1}{C_3 R_2}$$

$$a_{15} = 0 \quad a_{21} = 0 \quad a_{23} = (8,8,7) = \frac{1}{C_2}$$

$$a_{24} = 0 \quad a_{25} = 0 \quad a_{31} = (4,4,5,9,9,6,8) = \frac{1}{C_1 R_2}$$

$$a_{32} = (7,7,8) = -\frac{1}{L_1} \quad a_{34} = (12,12,10,9,9,6,8) = -\frac{1}{C_3 R_2}$$

$$a_{41} = (4,4,5,9,9,10,12) = \frac{1}{C_1 R_2}$$

$$a_{42} = 0$$

$$a_{43} = (8,8,6,9,9,10,12) = -\frac{1}{C_2 R_2}$$

$$a_{45} = (11,11,12) = -\frac{1}{L_2}$$

$$a_{52} = 0$$

$$a_{53} = 0$$

$$a_{54} = \frac{1}{C_3}$$

De esta manera la variable de estado A queda expresada de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & 0 & \frac{1}{C_2 R_2} & \frac{1}{C_3 R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_3 R_2} & 0 \\ \frac{1}{C_1 R_2} & 0 & -\frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_3 R_2} & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Para la obtención de la variable B se tiene:

$$b_{11} = (1,2,2,3,4) = \frac{1}{R_1}$$

$$b_{21} = 0$$

$$b_{31} = 0$$

$$b_{41} = 0$$

$$b_{51} = 0$$

Quedando la matriz de la siguiente manera:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Para la obtención de la variable C se tiene:

$$c_{11} = (4,4,3,2,2,20) = -\frac{1}{C_1 R_1}$$

$$c_{12} = 0$$

$$c_{13} = 0$$

$$c_{14} = 0$$

$$c_{15} = 0$$

$$c_{21} = (4,4,5,9,9,21) = \frac{1}{C_1 R_2}$$

$$c_{22} = 0$$

$$c_{23} = (8,8,6,9,9,21) = -\frac{1}{C_2 R_2}$$

$$c_{24} = (12,12,10,9,9,21) = -\frac{1}{C_3 R_2}$$

$$c_{25} = 0$$

Quedando la matriz C:

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1 R_2} & 0 & -\frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_3 R_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Por último se calcula la variable D:

$$d_{11} = (1,2,2,20) = \frac{1}{R_1} \quad d_{21} = 0$$

Donde su resultado es:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Ahora para obtener la función de transferencia se obtiene:

Lazos individuales

$$L_1 = (4,3,2,2,3,4) = -\frac{1}{C_1 R_1 S}$$

$$L_2 = (4,5,9,9,5,4) = -\frac{1}{C_1 R_2 S}$$

$$L_3 = (7,8,8,7) = -\frac{1}{C_2 L_1 S^2}$$

$$L_4 = (8,6,9,9,6,8) = -\frac{1}{C_2 R_2 S}$$

$$L_5 = (12,10,9,9,10,12) = -\frac{1}{C_3 R_2 S}$$

$$L_6 = (12,11,11,12) = -\frac{1}{C_3 L_2 S^2}$$

Lazos disjuntos

$$L_{13} = L_1 \cdot L_3 = \frac{1}{C_1 C_2 L_1 R_1 S^3}$$

$$L_{14} = L_1 \cdot L_4 = \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2 S^2}$$

$$L_{15} = L_1 \cdot L_5 = \frac{1}{C_1 C_3 R_1 R_2 S^2}$$

$$L_{16} = L_1 \cdot L_6 = \frac{1}{C_1 C_3 R_1 L_2 S^3}$$

$$L_{24} = L_2 \cdot L_4 = \frac{1}{C_1 C_2 R_2 L_1 S^3}$$

$$L_{26} = L_2 \cdot L_6 = \frac{1}{C_1 C_3 R_2 L_2 S^3}$$

$$L_{35} = L_3 \cdot L_5 = \frac{1}{C_2 C_3 R_2 L_1 S^3}$$

$$L_{36} = L_3 \cdot L_6 = \frac{1}{C_2 C_3 L_1 L_2 S^4}$$

$$L_{46} = L_4 \cdot L_6 = \frac{1}{C_2 C_3 R_2 L_2 S^3}$$

$$L_{135} = L_1 \cdot L_3 \cdot L_5 = -\frac{1}{C_1 C_2 C_3 R_1 R_2 L_1 S^4}$$

$$L_{136} = L_1 \cdot L_3 \cdot L_6 = -\frac{1}{C_1 C_2 C_3 R_1 L_1 L_2 S^5} \quad L_{146} = L_1 \cdot L_4 \cdot L_6 = -\frac{1}{C_1 C_2 C_3 R_1 R_2 L_2 S^4}$$

$$L_{236} = L_2 \cdot L_3 \cdot L_6 = -\frac{1}{C_1 C_2 C_3 R_2 L_1 L_2 S^5}$$

Sacando el denominador Δ de la ec. (3.24) no queda que:

$$\Delta = 1 - L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 - L_{13} - L_{14} - L_{15} - L_{16} - L_{46} - L_{24} - L_{26} - L_{35} - L_{36} + L_{135} + L_{146} + L_{136} + L_{236} \quad (4.29)$$

Sustituyendo los valores tanto de los lazos individuales como de lazos disjuntos en la ec. (4.29) nos queda de la siguiente manera:

$$\Delta = 1 + \frac{1}{S C_1 R_1} + \frac{1}{S C_1 R_2} + \frac{1}{S^2 C_2 L_1} + \frac{1}{S C_2 R_2} + \frac{1}{S C_3 R_2} + \frac{1}{S^2 C_3 L_2} + \frac{1}{S^3 C_1 C_2 L_1 R_1} + \frac{1}{S^2 C_1 C_2 R_1 R_2} +$$

$$+ \frac{1}{C_1 C_3 R_1 R_2 S^2} + \frac{1}{S^3 C_1 C_3 L_2 R_1} + \frac{1}{S^3 C_2 C_3 L_2 R_2} + \frac{1}{S^3 C_1 C_2 L_1 R_2} + \frac{1}{S^3 C_1 C_3 L_2 R_2} + \frac{1}{S^3 C_2 C_3 L_1 R_2} +$$

$$+ \frac{1}{S^4 C_2 C_3 L_1 L_2 S_4} + \frac{1}{S^4 C_1 C_2 C_3 L_1 R_1 R_2} + \frac{1}{S^4 C_1 C_2 C_3 L_2 R_1 R_2} + \frac{1}{S^5 C_1 C_2 C_3 L_1 L_2 R_1} + \frac{1}{S^5 C_1 C_2 C_3 L_1 L_2 R_2} \quad (4.30)$$

Simplificando nos queda:

$$\Delta = S^5 C_1 C_2 C_3 L_1 L_2 R_1 R_2 + S^4 (C_1 C_2 L_1 L_2 R_1 + C_1 C_3 L_1 L_2 R_1 + C_2 C_3 L_1 L_2 R_2 + C_2 C_3 L_1 L_2 R_1) +$$

$$+ S^3 (C_1 C_2 L_1 R_1 R_2 + C_1 C_3 L_2 R_1 R_2 + C_2 L_1 L_2 + C_3 L_1 L_2) +$$

$$+ S^2 (C_3 L_2 R_2 + C_2 L_1 R_2 + C_1 L_1 R_1 + C_1 L_2 R_1 + C_2 L_1 R_1 + C_3 L_2 R_1) + S (C_1 R_1 R_2 + L_1 + L_2) + R_1 + R_2 \quad (4.31)$$

Trayecto Directo

Esta parte se obtiene sacando el numerado de la ec. (3.24), observando también que existen dos trayectos directos, el primero queda:

$$P_{11} = (2,2,20) (1 - L_2 - L_3 - L_4 - L_5 - L_6 + L_{46} + L_{24} + L_{26} + L_{35} + L_{36} - L_{236}) \quad (4.31)$$

Sustituyendo en la ec. (4.31) los valores de los lazos individuales y disjuntos que no tocan la trayectoria directa, queda expresado de la siguiente manera:

$$P_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{S C_1 R_1 R_2} + \frac{1}{S^2 C_2 L_1 R_1} + \frac{1}{S C_2 R_1 R_2} + \frac{1}{S C_3 R_1 R_2} + \frac{1}{S^2 C_3 L_2 R_1} + \frac{1}{S^3 C_2 C_3 L_2 R_1 R_2} +$$

$$+ \frac{1}{S^3 C_1 C_2 L_1 R_1 R_2} + \frac{1}{S^3 C_1 C_3 L_2 R_1 R_2} + \frac{1}{S^3 C_2 C_3 L_1 R_1 R_2} + \frac{1}{S^4 C_2 C_3 L_1 L_2 R_1} + \frac{1}{S^5 C_1 C_2 C_3 L_1 L_2 R_1 R_2} \quad (4.32)$$

El segundo trayecto directo queda como:

$$P_{21} = (1,2,2,3,4,4,5,9,9,21)(1 - L_3 - L_6 + L_{36}) \quad (4.33)$$

De igual manera como se hizo para obtener el primer trayecto, se sustituyen en la ec. (4.94) todas las trayectorias que no tocan el trayecto directo quedando como:

$$P_{21} = \frac{1}{SC_1R_1R_2} + \frac{1}{S^3C_1C_2L_1R_1R_2} + \frac{1}{S^3C_1C_3L_2R_1R_2} + \frac{1}{S^5C_1C_2C_3L_1L_2R_1R_2} \quad (4.34)$$

Al tener dos trayectos directos, significa la obtención de dos Funciones de Transferencia las cuales quedan expresadas de la siguiente manera en base a la ec. (3.24):

$$\begin{bmatrix} f_{20} \\ f_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \mathbf{I}_1 \quad (4.35)$$

Para $G_{11}(S)$ queda:

$$G_{11}(S) = \frac{P_{11}}{\Delta} \quad (4.36)$$

Sustituyendo la ec. (4.32) en la ec. (4.36) nos queda que:

$$G_{11}(S) = \frac{S^5 C_1 C_2 C_3 L_1 L_2 R_2 + S^4 C_1 C_2 L_1 L_2 + C_1 C_3 L_1 L_2 + C_2 C_3 L_1 L_2 + S^3 C_1 C_2 L_1 R_2 + C_1 C_3 L_2 R_2 + S^2 C_1 L_1 + C_1 L_2 + C_2 L_1 + C_3 L_2 + SC_1 R_2 + 1}{\Delta} \quad (4.37)$$

Para $G_{21}(S)$:

$$G_{21}(S) = \frac{P_{21}}{\Delta} \quad (4.38)$$

Sustituyendo la ec. (4.34) en la ec. (4.38):

$$G_{21}(S) = \frac{S^4 C_2 C_3 L_1 L_2 + S^2 C_2 L_1 + C_3 L_2 + 1}{\Delta} \quad (4.39)$$

Se aprecia que tanto los resultados obtenidos a través de la matriz de estructura unión como los obtenidos por trayectoria causal-lazo causal son iguales mismos.

4.2 Sistema Mecánico

El sistema mecánico que se modelará en esta sección es el mostrado en la figura 4.3:

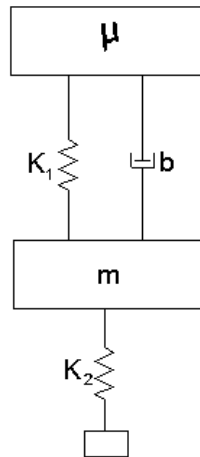


Figura 4.3 Sistema mecánico con múltiples componentes

El diagrama en Bond Graph es:

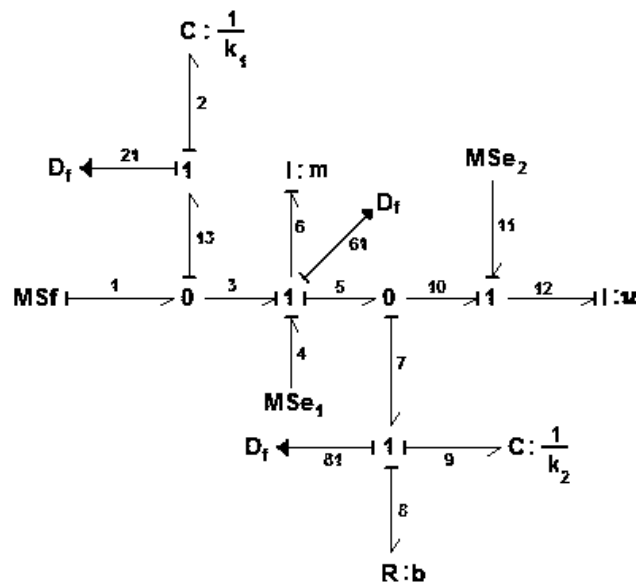


Figura 4.4 Bond Graph del sistema mecánico

Matriz de Estructura Unión

En base al bond graph de la figura 4.4 se procede a obtener los vectores clave los cuales quedan expresados de la siguiente manera:

$$x = \begin{bmatrix} q_2 \\ p_6 \\ q_9 \\ p_{12} \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \\ f_9 \\ e_{12} \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \\ e_9 \\ f_{12} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} f_{81} \\ f_{21} \\ f_{61} \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} f_1 \\ e_4 \\ e_{11} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_{out} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Teniendo los vectores clave se puede calcular D_{out} usando la ec. (3.1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

donde

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Así mismo para obtener z se aplica la ec. (3.2) quedando así:

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \\ e_9 \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ p_6 \\ q_9 \\ p_{12} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

donde

$$F = \text{diag} \left\{ k_1, \frac{1}{m}, k_2, \frac{1}{u} \right\} \quad (4.45)$$

Para la obtención de la matriz de estructura unión es necesario hacer uso de la ec. (3.3), quedando expresada:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \\ f_9 \\ e_{12} \\ f_8 \\ f_{81} \\ f_{21} \\ f_{61} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \\ e_9 \\ f_{12} \\ e_8 \\ f_1 \\ e_4 \\ e_{11} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Para la obtención de las variables de estado es necesario obtener μ por medio de la ec. (3.12) y sustituyendo valores queda:

$$\mu = \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

De esta manera haciendo uso de la ec. (3.14) se le sustituyen los valores extraídos de las ec. (4.45), (4.46) y (4.47) así se obtiene la variable A:

$$A = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{u} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

donde el resultado es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & -\frac{b}{m} & -k_2 & \frac{b}{u} \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{u} \\ 0 & \frac{b}{m} & k_2 & -\frac{b}{u} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Ahora para obtener la variable de estado B utilizamos la ec. (3.15):

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Haciendo cálculos queda:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Ahora para obtener la variable C se aplica la ec. (3.19):

$$C = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{u} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

dando como resultado:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{u} \\ 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Finalmente se calcula la variable D con la ec. (3.20):

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Resolviendo queda:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

De las ec. (3.13) y (3.18) se obtienen las ecuaciones de estado:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \\ f_9 \\ e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & -\frac{b}{m} & -k_2 & \frac{b}{u} \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{u} \\ 0 & \frac{b}{m} & k_2 & -\frac{b}{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ p_6 \\ q_9 \\ p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ e_4 \\ e_{11} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$\begin{bmatrix} f_{81} \\ f_{21} \\ f_{61} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{u} \\ 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ p_6 \\ q_9 \\ p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ e_4 \\ e_{11} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Teniendo las variables de estado se obtiene la Función de Transferencia recurriendo a la ec. (2.22) donde se sustituyen los resultados de las ecs. (4.49), (4.51), (4.53) y (4.55):

$$\begin{bmatrix} G_{81}(S) \\ G_{21}(S) \\ G_{61}(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{u} \\ 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(S \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & -\frac{b}{m} & -k_2 & \frac{b}{u} \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{u} \\ 0 & \frac{b}{m} & k_2 & -\frac{b}{u} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Resolviendo

$$\begin{bmatrix} G_{81}(S) \\ G_{21}(S) \\ G_{61}(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S^2 k_1 u & S^3 u & -S^3 m + S k_1 \\ -(S^2 k_1 u + S b k_1 + k_1 k_2) & -(S^3 u + S^2 b + k_2) & -(S^2 b + S k_2) \\ S^2 k_1 u + S b k_1 + k_1 k_2 & S^3 u + S^2 b + S k_2 & S^2 b + S k_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta} \quad (4.59)$$

donde

$$\Delta = u m S^4 + S^3 (m b + u b) + S^2 (k_1 u + k_2 m + k_2 u) + S b k_1 + k_1 k_2 \quad (4.60)$$

La estructura de los resultados obtenidos queda como:

$$\begin{bmatrix} f_{81} \\ f_{21} \\ f_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(S) & G_{12}(S) & G_{13}(S) \\ G_{21}(S) & G_{22}(S) & G_{23}(S) \\ G_{31}(S) & G_{32}(S) & G_{33}(S) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ e_4 \\ e_{11} \end{bmatrix}$$

Entonces las funciones de transferencia quedan expresadas:

$$G_{11}(S) = \frac{S^2 k_1 \mathcal{U}}{\Delta} \quad (4.61)$$

$$G_{12}(S) = \frac{S^3 \mathcal{U}}{\Delta} \quad (4.62)$$

$$G_{13}(S) = \frac{S^3 m + S k_1}{\Delta} \quad (4.63)$$

$$G_{21}(S) = \frac{S^4 m \mathcal{U} + S^3 (mb + \mathcal{U}b) + S^2 (k_2 m + k_2 \mathcal{U})}{\Delta} \quad (4.64)$$

$$G_{22}(S) = -\frac{S^3 \mathcal{U} + S^2 b + k_2 \mathcal{U}}{\Delta} \quad (4.65)$$

$$G_{23}(S) = -\frac{S^2 b + S k_2}{\Delta} \quad (4.66)$$

$$G_{31}(S) = -\frac{S^3 \mathcal{U} + S^2 b + k_1 k_2 \mathcal{U}}{\Delta} \quad (4.67)$$

$$G_{32}(S) = -\frac{S^3 \mathcal{U} + S^2 b + S k_2}{\Delta} \quad (4.68)$$

$$G_{33}(S) = -\frac{S^2 b + S k_2}{\Delta} \quad (4.69)$$

Trayectoria causal - Lazo causal

Utilizando el bond graph de la figura 4.4 se obtienen los elementos que conforman a la matriz A según el procedimiento 3.1 observando antes que nada que el sistema es de cuarto orden:

$$a_{11} = 0 \quad a_{12} = (6,6,3,13,2) = -\frac{1}{m} \quad a_{13} = 0 \quad a_{14} = 0 \quad a_{21} = (2,2,13,3,6) = k_1$$

$$a_{22} = (6,5,7,8,8,7,5,6) = -\frac{b}{m}$$

$$a_{23} = (9,9,7,5,6) = -k_2$$

$$a_{24} = (12,12,10,7,8,8,7,5,6) = \frac{b}{u}$$

$$a_{31} = 0$$

$$a_{32} = (6,6,5,7,9) = \frac{1}{m}$$

$$a_{33} = 0$$

$$a_{34} = (12,12,10,7,9) = -\frac{1}{u}$$

$$a_{41} = 0$$

$$a_{42} = (6,6,5,7,8,8,7,10,12) = \frac{b}{m}$$

$$a_{43} = (9,9,7,10,12) = k_2$$

$$a_{44} = (12,10,7,8,8,7,10,12) = -\frac{b}{u}$$

De esta manera la matriz A queda:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & -\frac{b}{m} & -k_2 & \frac{b}{u} \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{u} \\ 0 & \frac{b}{m} & k_2 & -\frac{b}{u} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Siguiendo el procedimiento, se continúa el cálculo de la variable B:

$$b_{11} = (1,1,3,2) = 1$$

$$b_{12} = 0$$

$$b_{13} = 0$$

$$b_{21} = 0$$

$$b_{22} = (4,6) = 1$$

$$b_{23} = 0$$

$$b_{31} = 0$$

$$b_{32} = 0$$

$$b_{33} = 0$$

$$b_{41} = 0$$

$$b_{42} = 0$$

$$b_{43} = 1$$

Sustituyendo los valores en la ec. (3.32) queda:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Para la obtención de la variable C se tiene:

$$c_{11} = 0$$

$$c_{12} = (6,6,5,7,8,1) = \frac{1}{m}$$

$$c_{13} = 0$$

$$c_{14} = (12,12,10,7,8,1) = -\frac{1}{u}$$

$$\begin{aligned}
c_{21} &= 0 & c_{22} &= (6,6,3,13,21) = -\frac{1}{m} & c_{23} &= 0 & c_{24} &= 0 \\
c_{31} &= 0 & c_{32} &= (6,6,61) = \frac{1}{m} & c_{33} &= 0 & c_{34} &= 0
\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores anterior en la ec. (3.19) queda:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{U} \\ 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

Obteniendo la variable D:

$$\begin{aligned}
d_{11} &= 0 & d_{12} &= 0 & d_{13} &= 0 \\
d_{21} &= (1,3,21) = 1 & d_{22} &= 0 & d_{23} &= 0 \\
d_{31} &= 0 & d_{32} &= 0 & d_{33} &= 0
\end{aligned}$$

De esta manera, los valores anteriores se acomodan en la ec. (3.20), la cual queda expresada de la siguiente manera:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Para la obtención de la Función de Transferencia es necesario adquirir los lazos individuales y los lazos disjuntos.

Lazos individuales

$$\begin{aligned}
L_1 &= (1,3,3,6,6,3,13,2) = -\frac{k_1}{mS^2} & L_2 &= (5,7,8,8,7,5,6) = -\frac{b}{mS} \\
L_3 &= (5,7,9,9,7,5,6) = -\frac{k_2}{mS^2} & L_4 &= (2,10,7,9,9,7,10,12) = -\frac{k_2}{US^2} \\
L_5 &= (2,10,7,8,8,7,10,12) = -\frac{b}{US}
\end{aligned}$$

Lazos disjuntos

$$L_{14} = L_1 \cdot L_4 = -\frac{k_1 k_2}{mUS^4} \quad L_{15} = L_1 \cdot L_5 = -\frac{k_1 b}{mUS^3}$$

Utilizando la ec. (3.28) sacamos el denominador:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 - L_{14} - L_{15}) \quad (4.74)$$

Sustituyendo

$$\Delta = 1 + \frac{k_1}{mS^2} + \frac{b}{mS} + \frac{k_2}{mS^2} + \frac{k_2}{US^2} + \frac{b}{US} + \frac{k_1 k_2}{mUS^4} + \frac{k_1 b}{mUS^3} \quad (4.75)$$

Desarrollando el polinomio:

$$\Delta = \frac{mUS^4 + S^3 (k_1 U + bm) + S^2 (k_1 U + k_2 U + k_2 m) + Sbk_1 + k_1 k_2}{mUS^4} \quad (4.76)$$

Al cual al numerador de la ec. (4.77) se llamará Δ_1 , quedando la ecuación como:

$$\Delta = \frac{\Delta_1}{mUS^4} \quad (4.77)$$

Trayecto Directo

Es necesario obtener el numerado de la ec. (3.28) y para esto es necesario mencionar que existen nueve trayectos directos.

El primer trayecto que se obtiene de la entrada 1 a la salida 1:

$$P_{11} = (1, 3, 2, 2, 1, 3, 3, 6, 5, 7, 8, 1)(1 - 0) \quad (4.78)$$

dando como resultado:

$$P_{11} = \frac{k_1}{mS^2} \quad (4.79)$$

Calculando el segundo trayecto que va de la entrada 2 a la salida 1:

$$P_{12} = (4, 6, 6, 5, 7, 8, 1)(1 - 0) \quad (4.80)$$

siendo

$$P_{12} = \frac{1}{mS} \quad (4.81)$$

El tercer trayecto directo va de la entrada 3 a la salida 1:

$$P_{13} = (1, 1, 2, 1, 0, 7, 8, 1)(1 - L_1) \quad (4.82)$$

resultando

$$P_{13} = \frac{UmS^3 - k_1 US}{U^2 m S^4} \quad (4.83)$$

El cuarto trayecto es de la entrada 1 a la salida 2:

$$P_{21} = (13,21) - L_2 - L_3 - L_4 - L_5 + 0) \quad (4.84)$$

deduciendo que

$$P_{21} = \frac{m^2 U^2 S^6 + b m U^2 S^5 + k_2 m^2 U S^4 + b m^2 U S^6}{m^2 U^2 S^6} \quad (4.85)$$

El siguiente trayecto directo va de la entrada 2 a la salida 2:

$$P_{22} = (4,6,6,3,13,21) (1 - L_4 - L_5) \quad (4.86)$$

quedando

$$P_{22} = \frac{-k_2 m^2 U S^3 - b m^2 U S^4 - m^2 U^2 S^5}{m^3 U^2 S^6} \quad (4.87)$$

El sexto trayecto directo va de la entrada 3 a la salida 2 deduciéndose:

$$P_{23} = (11,12,12,10,7,8,8,7,5,6,6,3,13,21)(1 - 0) \quad (4.88)$$

y resultando

$$P_{23} = \frac{-b U m S^2 - k_2 U m S^2}{U^2 m^2 S^4} \quad (4.89)$$

Séptimo trayecto va de la entrada 1 a la salida 3:

$$P_{31} = (13,2,2,13,3,6,6,6,1) - L_4 - L_5 \quad (4.90)$$

obteniendo

$$P_{31} = \frac{k_1 m^2 U^2 S^7 + k_1 k_2 m^2 U S^5 + k_1 b m^2 U S^6}{m^3 U^2 S^9} \quad (4.91)$$

El trayecto directo número ocho va de la entrada 2 a la salida 3:

$$P_{32} = (6,6,6,6,1) - L_4 - L_5 \quad (4.92)$$

dando como resultado:

$$P_{32} = \frac{m^2 U^2 S^3 + k_2 m^2 U S^2 + b m^2 U S^3}{m^3 U^2 S^4} \quad (4.93)$$

Finalmente el último trayecto va de la entrada 3 a la salida 3:

$$P_{33} = (1,12,10,7,8,7,5,6,6,6,1) - 0 \quad (4.94)$$

$$P_{33} = \frac{b U m S^2 + k_2 U m S^2}{U^2 m^2 S^4} \quad (4.95)$$

La matriz con las funciones de transferencia dados en este sistema queda como:

$$\begin{bmatrix} f_{81} \\ f_{21} \\ f_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(S) & G_{12}(S) & G_{13}(S) \\ G_{21}(S) & G_{22}(S) & G_{23}(S) \\ G_{31}(S) & G_{32}(S) & G_{33}(S) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ e_4 \\ e_{11} \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

Es necesario utilizar la ec. (3.24) y sustituir los valores obtenidos en cada trayectoria directa:

Para $G_{11}(S)$ se utiliza el valor de la ec. (4.79):

$$G_{11}(S) = \frac{P_{11}}{\frac{\Delta_1}{m\mathcal{U}S^4}} \quad (4.96)$$

Simplificando da como resultado:

$$G_{11}(S) = \frac{k_1 \mathcal{U}S^2}{\Delta_1} \quad (4.97)$$

Para $G_{12}(S)$ se usa el valor obtenido en la ec. (4.81):

$$G_{12}(S) = \frac{P_{12}}{\frac{\Delta_1}{m\mathcal{U}S^4}} \quad (4.98)$$

quedando

$$G_{12}(S) = \frac{\mathcal{U}S^3}{\Delta_1} \quad (4.99)$$

Para $G_{13}(S)$ se utiliza la ec. (4.83):

$$G_{13}(S) = \frac{P_{13}}{\frac{\Delta_1}{m\mathcal{U}S^4}} \quad (4.100)$$

deduciéndose entonces

$$G_{13}(S) = \frac{mS^3 - k_1 S}{\Delta_1} \quad (4.101)$$

Para $G_{21}(S)$ el valor correspondiente es el de la ec. (4.85):

$$G_{21}(S) = -\frac{P_{21}}{\frac{\Delta_1}{mUS^4}} \quad (4.102)$$

resultando

$$G_{21}(S) = -\frac{mU + bm + bUS + k_2m}{S^2\Delta_1} \quad (4.103)$$

Para $G_{22}(S)$ usamos el valor de la ec. (4.87):

$$G_{22}(S) = -\frac{P_{22}}{\frac{\Delta_1}{mUS^4}} \quad (4.104)$$

obteniendo

$$G_{22}(S) = -\frac{S^2k_2 + S(b + k_1)}{\Delta_1} \quad (4.105)$$

La ec. (4.89) es el valor para obtener $G_{23}(S)$:

$$G_{23}(S) = \frac{P_{23}}{\frac{\Delta_1}{mUS^4}} \quad (4.106)$$

el resultado es

$$G_{23}(S) = -\frac{S^2k_1 + k_2}{\Delta_1} \quad (4.107)$$

Para $G_{31}(S)$ el valor correspondiente a utilizar es el de la ec. (4.91):

$$G_{31}(S) = \frac{P_{31}}{\frac{\Delta_1}{mUS^4}} \quad (4.108)$$

sustituyendo el valores queda:

$$G_{31}(S) = -\frac{k_1US^2 + k_1bS + k_1k_2}{\Delta_1} \quad (4.109)$$

La ec. (4.93) se toma para obtener $G_{32}(S)$:

$$G_{32}(S) = \frac{P_{32}}{\frac{\Delta_1}{mUS^4}} \quad (4.110)$$

resultando

$$G_{32}(S) = -\frac{S^3(u+b)S^2k_2 + b}{\Delta_1} \quad (4.111)$$

Finalmente para obtener $G_{33}(S)$ se utiliza la ec. (4.95):

$$G_{33}(S) = \frac{P_{33}}{\frac{\Delta_1}{mUS^4}} \quad (4.112)$$

quedando

$$G_{33}(S) = -\frac{S^2(k_2)}{\Delta_1} \quad (4.113)$$

Los resultados obtenidos en los dos métodos de bond graph son los mismos valores tanto en las variables de estado como en la función de transferencia.

4.3 Sistema de Nivel de Líquido

El sistema de nivel de líquido del cual se obtendrán las variables de estado y su función de transferencia es el sistema presentado en la figura 4.5.

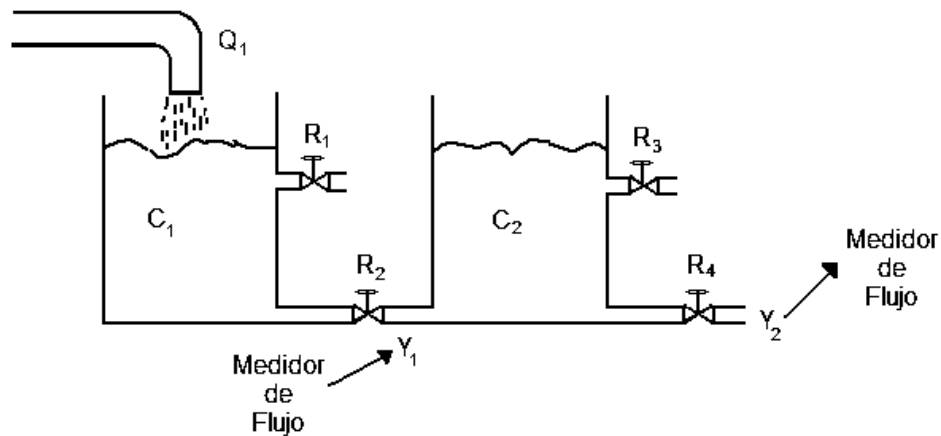


Figura 4.5 Sistema de nivel de líquido

El bond correspondiente de dicho sistema se observa en la figura 4.6:

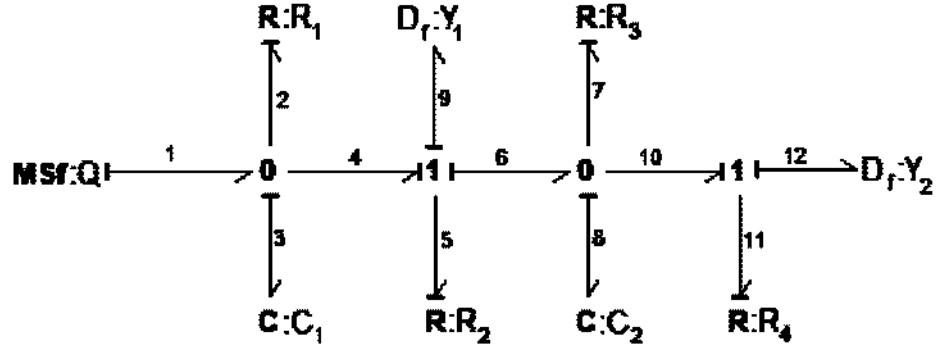


Figura 4.6 Bond Graph del sistema de nivel de líquido con varios componentes

Ya modelado el sistema de nivel de líquido se resolverá a continuación por medio de la matriz de estructura unión y por trayectoria causal-lazo causal.

Matriz de Estructura de Unión

Obteniendo los vectores clave se tiene:

$$x = \begin{bmatrix} q_3 \\ q_8 \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_8 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_8 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} f_9 \\ f_{12} \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_5 \\ e_7 \\ e_{11} \end{bmatrix} \quad D_{out} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_5 \\ f_7 \\ f_{11} \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

Aplicando la ec. (3.1) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ f_5 \\ f_7 \\ f_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_5 \\ e_7 \\ e_{11} \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

donde

$$L = \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \frac{1}{R_3}, \frac{1}{R_4} \right\} \quad (4.117)$$

Así mismo se obtiene z utilizando la ec. (3.2):

$$\begin{bmatrix} e_3 \\ e_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3 \\ q_8 \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

siendo

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{C_1}, \frac{1}{C_2} \right\} \quad (4.119)$$

Para la obtención de la matriz de estructura unión se sustituyen lo valores correspondientes conforme a la ec. (3.3):

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_8 \\ - \\ e_2 \\ e_5 \\ e_7 \\ e_{11} \\ - \\ f_9 \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & -1 & -1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 & 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ - & - & | & - & - & - & - & | & - \\ 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ - & - & | & - & - & - & - & | & - \\ 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_8 \\ - \\ f_2 \\ f_5 \\ f_7 \\ f_{11} \\ - \\ f_1 \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

Se procede a la obtención de las variables de estado donde antes que nada es necesario calcular μ , por lo cual se sustituyen los valores obtenidos en las ecs. (4.117) y (4.120) quedando:

$$\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \right) \quad (4.121)$$

y el resultado es el siguiente

$$\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

Para la obtención de la variable A aplica la ec. (3.14) quedando:

$$A = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

Entonces al resolver la ec. (4.123) queda de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{C_2 R_2} \\ \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

Para la obtención de la variable de estado B se hace uso de la ec. (3.15) y haciendo las sustituciones correspondientes queda:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

Resolviendo las matrices anteriores queda:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

Obteniendo la variable de estado C se aplica la ec. (3.19) en la cual se sustituyen las ecs. (4.119), (4.120) y (4.122):

$$C = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \quad (4.127)$$

Realizando operaciones resulta:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} \\ 0 & \frac{1}{C_2 R_4} \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

Aplicando la ec. (3.20) y sustituyendo en ella los valores obtenidos en las ecs. (4.120) y (4.122) se encuentra la variable de estado D:

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.129)$$

Resolviendo las operaciones anteriores se obtiene lo siguiente:

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.130)$$

Después de haber obtenido las variables de estado, las ecuaciones de estado quedan:

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_3 \\ \dot{f}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{C_2 R_2} \\ \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3 \\ q_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.131)$$

y

$$\begin{bmatrix} f_9 \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} \\ 0 & \frac{1}{C_2 R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3 \\ q_8 \end{bmatrix} \quad (4.132)$$

Ahora para la obtención de la función de transferencia se sustituyen los valores obtenidos en las ecs. (4.124), (4.126), (4.128) y (4.130) en la ec. (2.22) quedando:

$$\begin{bmatrix} G_{11}(S) \\ G_{21}(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} \\ 0 & \frac{1}{C_2 R_4} \end{bmatrix} \left(S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{C_2 R_2} \\ \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.133)$$

Resolviendo la parte inversa de la ecuación resulta:

$$\begin{bmatrix} G_{11}(S) \\ G_{21}(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} \\ 0 & \frac{1}{C_2 R_4} \end{bmatrix} \left[S + \frac{1}{C_2 R_4} + \frac{1}{C_2 R_2} + \frac{1}{C_2 R_3} \right] \frac{1}{\Delta} \quad (4.134)$$

donde el Δ es:

$$\Delta = \left(S + \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} \right) \left(S + \frac{1}{C_2 R_4} + \frac{1}{C_2 R_2} + \frac{1}{C_2 R_3} \right) - \left(-\frac{1}{C_2 R_2} \right) \left(-\frac{1}{C_1 R_2} \right) \quad (4.135)$$

Resolviendo la ec. (4.135) queda como:

$$\Delta = S^2 + \frac{S}{C_2 R_4} + \frac{S}{C_2 R_2} + \frac{S}{C_2 R_3} + \frac{S}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_4} + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2} + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_3} + \frac{S}{C_1 R_2} \\ + \frac{1}{C_1 C_2 R_2 R_4} + \frac{1}{C_1 C_2 R_2 R_3} \quad (4.136)$$

Multiplicando la ec. (4.136) por $\frac{1}{S^2}$ nos queda:

$$\Delta = S^2 \left(1 + \frac{1}{C_2 R_4 S} + \frac{1}{C_2 R_2 S} + \frac{1}{C_2 R_3 S} + \frac{1}{C_1 R_1 S} + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_4 S^2} + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2 S^2} + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_3 S^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{C_1 R_2 S} + \frac{1}{C_1 C_2 R_2 R_4 S^2} + \frac{1}{C_1 C_2 R_2 R_3 S^2} \right) \quad (4.137)$$

Al desarrollar el polinomio queda:

$$\Delta = \frac{\left[C_1^2 C_2 R_1 R_2 R_3 R_4^2 + S C_1 R_1 R_4 (R_2 R_3 + R_4 R_3 + R_4 R_2) + S C_2 R_3 R_4^2 (R_1 + R_2) + \right. \\ \left. C_1 C_2 (R_2 R_3 + R_3 R_4 + R_2 R_4 + R_1 R_3 + R_1 R_4) \right]}{C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 R_4} \quad (4.138)$$

De esta manera, el numerador será llamado Δ_1 , quedando entonces:

$$\Delta = \frac{\Delta_1}{C_1 C R_1 R_2 R_3 R_4} \quad (4.139)$$

Retomando la ec. (4.134) se sustituye en ella la ec. (4.139):

$$\begin{bmatrix} G_{11}(S) \\ G_{21}(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{S C_2 R_3 R_4 + R_3 + R_4}{C_1 C_2 R_2 R_3 R_4} \\ \frac{1}{C_1 C_2 R_2 R_4} \end{bmatrix} \frac{C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 R_4}{\Delta_1} \quad (4.140)$$

Así mismo resolviendo para $G_{11}(S)$:

$$G_{11}(S) = \frac{S C_2 R_3 R_4 + R_3 + R_4}{\Delta_1} \quad (4.141)$$

Y resolviendo para $G_{21}(S)$:

$$G_{21}(S) = \frac{R_1 R_3}{\Delta_1} \quad (4.142)$$

Trayectoria Causal - Lazo Causal

Aprovechando la figura 4.6, se puede observar que nuestro sistema es de segundo orden; de esta manera obtienen las trayectorias causales y los lazos causales requeridos.

Así mismo usando el procedimiento 3.1 se comenzará por encontrar los términos que conforman a la matriz A:

$$a_{11} = \langle 1,2,2,3 \rangle \langle 4,5,5,4,3 \rangle = -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad a_{12} = (8,8,6,5,5,4,3) = \frac{1}{C_2 R_2}$$

$$a_{21} = (3,3,4,5,5,6,8) = \frac{1}{C_1 R_2}$$

$$a_{22} = \langle 7,7,8 \rangle \langle 6,5,5,6,8 \rangle \langle 10,11,11,10,8 \rangle = -\frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right)$$

Resultando entonces

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{C_2 R_2} \\ \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

Para la obtención de la variable B los términos quedan como:

$$b_{11} = (1,3) = 1 \quad b_{21} = 0$$

Los valores obtenidos son sustituidos en la ec. (3.24) reflejando lo siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.144)$$

Para la obtención de la variable C se tiene:

$$c_{11} = \langle 3,4,5,5,9 \rangle = \frac{1}{C_1 R_2} \quad c_{12} = 0$$

$$c_{21} = \langle 8,6,5,5,9 \rangle = -\frac{1}{C_2 R_2} \quad c_{22} = (8,8,10,11,11,12) = \frac{1}{C_2 R_4}$$

Donde los estos valores se sustituyen en la ec. (3.25) y dando como resultado:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_2} & 0 \\ -\frac{1}{C_2 R_2} & \frac{1}{C_2 R_4} \end{bmatrix} \quad (4.145)$$

Finalmente, calculando la variable D:

$$d_{11} = 0 \quad d_{21} = 0$$

La expresamos según la ec. (3.26) quedando de la siguiente manera:

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.146)$$

Para la obtención de la Función de Transferencia del sistema es necesario obtener los lazos individuales así como los lazos disjuntos.

Lazos individuales

$$L_1 = \textcircled{1,2,2,3} = -\frac{1}{C_1 R_1 S}$$

$$L_2 = \textcircled{4,5,5,4,3} = -\frac{1}{C_1 R_2 S}$$

$$L_3 = \textcircled{6,7,7,8} = -\frac{1}{C_2 R_3 S}$$

$$L_4 = \textcircled{6,5,5,6,8} = -\frac{1}{R_2 C_2 S}$$

$$L_5 = \textcircled{10,11,11,10,8} = -\frac{1}{C_2 R_4 S}$$

Lazos disjuntos

$$L_{13} = L_1 \cdot L_3 = \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_3 S^2}$$

$$L_{14} = L_1 \cdot L_4 = \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2 S^2}$$

$$L_{15} = L_1 \cdot L_5 = \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_4 S^2}$$

$$L_{25} = L_2 \cdot L_5 = \frac{1}{C_1 C_2 R_2 R_4 S^2}$$

$$L_{23} = L_2 \cdot L_3 = \frac{1}{C_1 C_2 R_2 R_3 S^2}$$

Siguiendo la estructura de la ec. (3.24) se opta por tener primero el Δ :

$$\Delta = 1 - \textcircled{1} + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 - L_{13} - L_{14} - L_{15} - L_{25} - L_{23} \quad (4.147)$$

donde en la ec. (4.147) se realizan las sustituciones de los lazos individuales y disjuntos descritos con anterioridad, queda:

$$\Delta = \left(1 + \frac{1}{C_1 R_1 S} + \frac{1}{C_1 R_2 S} + \frac{1}{C_2 R_3 S} + \frac{1}{C_2 R_2 S} + \frac{1}{C_2 R_4 S} + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_3 S^2} + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2 S^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_4 S^2} + \frac{1}{C_1 C_2 R_2 R_4 S^2} + \frac{1}{C_1 C_2 R_2 R_3 S^2} \right) \quad (4.148)$$

Desarrollando el polinomio:

$$\Delta = \frac{S^2 C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 R_4^2 + SC_1 R_1 R_4 (R_2 R_3 + R_4 R_3 + R_4 R_2) + SC_2 R_3 R_4^2 (R_1 + R_2) + SC_1 C_2 (R_2 R_3 + R_3 R_4 + R_2 R_4 + R_1 R_3 + R_1 R_4)}{S^2 C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 R_4} \quad (4.149)$$

Donde al numerador de la ec. (4.149) se le llamara Δ_1 , que dando entonces:

$$\Delta = \frac{\Delta_1}{S^2 C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 R_4} \quad (4.150)$$

Trayecto Directo

Resolviendo la estructura de la ec. (3.24), (a continuación el numerador correspondiente a cada trayectoria existen).

La primera trayectoria directa es de la entrada 1 a la salida 1 quedando:

$$P_{11} = (3,3,4,5,5,9) - L_3 - L_5 \quad (4.51)$$

Y realizando las sustituciones de los lazos individuales y disjuntos que no tocan el trayecto queda:

$$P_{11} = \frac{SC_2 R_3 R_4 + R_3 + R_4}{C_1 C_2 R_2 R_3 R_4 S^2} \quad (4.152)$$

La segunda trayectoria va de la entrada 1 a la salida 2 quedando expresada de la siguiente manera:

$$P_{21} = (1,3,3,4,5,5,6,8,8,10,11,11,12) (1-0) \quad (4.153)$$

Sustituyendo los valores indicados en la ec. (4.153) queda entonces:

$$P_{21} = \frac{1}{C_1 C_2 R_2 R_4 S^2} \quad (4.154)$$

Así la estructura de las Funciones de Transferencia del sistema de nivel de líquido queda como:

$$\begin{bmatrix} f_9 \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (4.155)$$

Para $G_{11}(S)$ le corresponde la ec. (4.152) resultando:

$$G_{11}(S) = \frac{P_{11}}{\Delta_1} \quad (4.156)$$

y haciendo las operaciones correspondientes obtenemos:

$$G_{11}(S) = \frac{SC_2R_3R_4 + R_3 + R_4}{\Delta_1} \quad (4.157)$$

Para $G_{21}(S)$ le toca la ec. (4.154) quedando:

$$G_{21}(S) = \frac{P_{21}}{\Delta_1} \quad (4.158)$$

y el resultado es:

$$G_{21}(S) = \frac{R_1R_3}{\Delta_1} \quad (4.159)$$

Se puede observar que los valores obtenidos a través de la matriz de estructura unión como de trayectoria causal-lazo causal son los mismos; cabe mencionar que tanto por un método como por otro se obtiene todas las funciones de transferencia relacionadas con este sistema.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se ha desarrollado ejemplos del método tradicional (diagramas de bloque, ecuaciones diferenciales, etc) así como del método de Bond Graph (Matriz de estructura de unión y Trayectoria Causal- Lazo Causal), demostrando que el método de Bond Graph es más eficiente sobre los métodos tradicionales a la hora de modelar un sistema físico y adquirir las variables de estado y Función de Transferencia. Además, el método de Bond Graph es más fácil, rápido y práctico aún cuando utiliza elementos como es la ecuación $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ empleada también en el método tradicional.

Conocido las sencillas reglas que se plantean en Bond Graph que son muy fáciles al aplicarlas a sistemas físicos como fue el caso de sistemas eléctricos, mecánicos y de nivel de líquido, es suficiente para comenzar el modelado de sistemas dinámicos más grandes que en el método tradicional resultaría imposibles de resolver.

Por otro lado se deja abierto para aportaciones sobre la aplicación no sólo en el ámbito de sistemas eléctricos, mecánicos y nivel de líquido, sino que en sistemas como biológicos, económicos, estadísticos, químicos, etc.

Referencias

1. LAZÁRO Castillo, Isidro I. Ingeniería de sistemas de control continuo. México. Ed. COECYT. 2008.
2. NICE, Norman S. Sistemas de control para ingeniería. México, Ed. CECSA. 2006.
3. OGATA, Katsuhito. Ingeniería de control moderno. México. Ed. Pearson Prentice Hall. 2007.
4. ROSENBERG, Ronald C. ; KARNOOP, Dean C. Introduction to physical system dynamics. Estados Unidos de América. Ed. McGraw-Hill. 1976
5. Técnicas de Control, Basadas en el Dominio Físico para Sistemas LTI MIMO. Aplicación a la Máquina Síncrona, Universidad Autónoma de Nuevo León. Gilberto González Avalos. 2004.