



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS
DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

**“ANÁLISIS DE CAMPOS MAGNÉTICOS
EN MÁQUINAS ELÉCTRICAS USANDO
EL MEF Y COMSOL”**

TESIS

Que para obtener el Título de
INGENIERO ELECTRICISTA

Presenta
Francisco López Castillo

Asesor de Tesis
Dr. Carlos Pérez Rojas

Morelia Michoacán, Agosto del 2012.



Agradecimientos

Agradezco a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por formarme académicamente y por brindarme la oportunidad de conocimiento.

Agradezco al Dr. Carlos Pérez Rojas por su dirección y apoyo en esta tesis.

Agradezco a mi familia, amigos, profesores y a todos aquellos que de alguna u otra forma intervinieron en la realización de este trabajo.

Dedicatoria

A mis padres, que sin su cariño y esfuerzo nada me hubiera sido posible.

A mis hermanas, que siempre me alientan de manera incondicional.

Resumen

Las ecuaciones diferenciales son modelos matemáticos que describen con exactitud una gran cantidad de problemas, en especial problemas y fenómenos físicos relacionados con el área de ingeniería. Sin embargo, es importante señalar que en algunas ocasiones la solución analítica a este tipo de problemas es muy compleja y abstracta, por lo que se opta por utilizar métodos numéricos para aproximar soluciones a dichos problemas. El método del elemento finito o MEF es un método numérico de aproximación que se utiliza en la solución de problemas diferenciales complejos, en especial en problemas que incluyen derivadas parciales o que son de orden superior. La ecuación de Poisson es una ecuación diferencial parcial de segundo orden que puede usarse para describir fenómenos electromagnéticos. En el área de máquinas eléctricas el poder dar solución a la ecuación de Poisson es uno de los problemas fundamentales, en particular en problemas que implican materiales no lineales y geometrías complejas. La solución a la ecuación de Poisson permite el conocimiento detallado sobre la distribución de campo magnético en una máquina eléctrica, facilitando la determinación de parámetros y diseño de la misma.

En el presente trabajo se utiliza COMSOL, software basado en elementos finitos, para aproximar el campo magnético en algunas máquinas eléctricas, destacando la solución de un reactor monofásico con entrehierro y un transformador monofásico tipo núcleo. También se obtiene la deformación magnética generada en un MIRD que presenta fallas eléctricas en la alimentación, como puede ser un desbalance en el voltaje suministrado o la operación de la máquina ante la condición de ausencia de una de las fases. Se analizan los resultados obtenidos y se determina la posible repercusión operativa de cada una de las fallas.

Contenido

Agradecimientos	iii
Dedicatoria	iv
Resumen	v
Contenido	vi
Lista de Figuras	ix
Lista de Tablas	xv
Lista de Símbolos y Abreviaturas	xvi
Capítulo 1. Introducción	1
1.1 Antecedentes	2
1.1.1 Antecedentes históricos del magnetismo	2
1.1.2 Antecedentes del elemento finito en electromagnetismo	3
1.2 Objetivo de la tesis	4
1.3 Justificación	4
1.4 Metodología	4
1.5 Contenido de la tesis	5
Capítulo 2. El Método del Elemento Finito en dos dimensiones	6
2.1 Introducción al Método del Elemento Finito	6
2.2 Antecedentes históricos del MEF	7
2.3 Generalidades del MEF	8
2.3.1 Discretización del dominio	8
2.3.2 Dominio de un elemento finito	9
2.3.3 Interpolación del Elemento Finito	10
2.3.4 Funciones de aproximación	11
2.4 Formulación Variacional	14
2.5 Formulación del Elemento Finito de Rayleigh Ritz	16

2.6 Ensamblado y conectividad de las matrices de los elementos	17
2.7 Elemento triangular lineal	19
2.7.1 Funciones de aproximación del elemento triangular lineal	20
2.7.2 Obtención de las matrices del elemento triangular lineal	22
2.8 Imposición de condiciones frontera	25
2.9 Aplicación del elemento finito al estudio de campos magnéticos	27
2.9.1 Ecuaciones de Maxwell	27
2.9.2 Potencial magnético vectorial y ecuación de Poisson	28
2.9.3 Densidad de flujo magnético	30
2.9.4 Ejemplo ilustrativo	30
Capítulo 3. Análisis de Campos Magnéticos usando COMSOL	43
3.1 Introducción a COMSOL	43
3.1.1 El medio ambiente de COMSOL	44
3.1.2 Descripción de las subventanas de COMSOL	46
3.2 Estudios magnéticos usando COMSOL	54
3.2.1 Aplicación de COMSOL al estudio de un circuito magnético	54
3.2.2 Campo magnético en un conductor eléctrico	80
3.2.3 Campo magnético entre dos conductores paralelos	82
3.2.4 Campo magnético en un reactor monofásico	84
3.2.5 Campo magnético en un reactor monofásico con entrehierro	86
3.2.6 Campo magnético en un transformador monofásico tipo núcleo	87
Capítulo 4. Análisis Magnético de Fallas en la alimentación de un MIRD	90
4.1 Máquina de Inducción de Rotor Devanado	90
4.1.1 Troquelado del MIRD	90
4.1.2 Distribución de devanados en el MIRD	91
4.2 Condiciones de estudio	93
4.3 Distribución de fuerza magnetomotriz en el MIRD	95
4.4 Densidad de corriente en el MIRD	96
4.5 Análisis magnético de Fallas en el MIRD	96

4.5.1 Condición en vacío	97
4.5.2 Condición bajo carga	105
4.5.3 Condición bajo carga con fase A disminuida	111
4.5.4 Condición bajo carga con fase A defasada	118
4.5.5 Condición bajo carga sin fase A	123
Capítulo 5. Conclusiones	129
5.1 Conclusiones	129
5.2 Trabajo futuro	131
Referencias	133

Lista de Figuras

1.1	Piedra de magnetita	2
2.1	Discretización del dominio	8
2.2	Elemento triangular	10
2.3	Elemento lineal	11
2.4	Ensamblado de elementos finitos	18
2.5	Imposición de condiciones frontera y anulación de vectores q_n en la frontera interelemental. (a) Partición del dominio. (b) Anulación de q_n entre elementos. (c) q_n especificada en la frontera del dominio	26
2.6	Geometría y sección transversal del ejemplo ilustrativo	31
2.7	Subdominio analizado en el ejemplo ilustrativo	31
2.8	Discretización del subdominio analizado en el ejemplo ilustrativo	32
2.9	Coordenadas xy del elemento l	34
2.10	Coordenadas xy del elemento 7	37
2.11	Líneas de flujo magnético en el ejemplo ilustrativo	42
3.1	Medio ambiente de COMSOL	44
3.2	Ventanas y subventanas de COMSOL	45
3.3	Reacomodo de ventanas en COMSOL	45
3.4	Asistente del modelo	46
3.5	Constructor del modelo	47
3.6	Submenú de los nodos	48
3.7	Subventana de Ajustes	48
3.8	Actualización de la subventana de Ajustes	49
3.9	Subventana de Gráficos 2D	50
3.10	Numeración automática de dominios por COMSOL	51
3.11	Lista de selecciones	51

3.12	Navegador de materiales	52
3.13	Estado del cálculo	52
3.14	Pestaña Resultados	53
3.15	Pestaña Mensajes	53
3.16	Librería de modelos	54
3.17	Selección del espacio dimensional	55
3.18	Procedimiento para agregar una interfaz física	55
3.19	Procedimiento para agregar una interfaz de Campos magnéticos	56
3.20	Metodología para agregar un estudio al modelo	56
3.21	Metodología para agregar un estudio Estacionario al modelo	57
3.22	Creación de un nodo de Parámetros globales	58
3.23	Declaración de Parámetros con su valor numérico	58
3.24	Creación del Cuadrado que define las condiciones frontera	59
3.25	Pestaña de Ajustes del Cuadrado que auxilia en la especificación de las condiciones frontera	59
3.26	Pestaña de Ajustes del Cuadrado que representa al conductor	60
3.27	Pestaña de Ajustes del Rectángulo que representa un material ferromagnético	61
3.28	Instrucción dada a COMSOL para que identifique dominios, contornos y vértices	61
3.29	Geometría creada en COMSOL para el ejemplo ilustrativo, m	62
3.30	Procedimiento para agregar el material cobre al modelo	63
3.31	Materiales agregados al modelo	63
3.32	Pestaña de Ajustes del material cobre	64
3.33	Atribución de dominios para el material cobre	64
3.34	Dominio agregado al material cobre	65
3.35	Dominios especificados en los cuales se desea aproximar el vector de potencial magnético y aplicar la ley de Ampere	66
3.36	Variable dependiente de la interfaz de Campos magnéticos, el vector de potencial magnético A	66
3.37	Subnodos predefinidos para la interfaz de Campos magnéticos	66
3.38	Lista de contornos atribuidos con la propiedad de Aislamiento magnético	67

3.39	Contornos atribuidos con la propiedad de Aislamiento magnético	67
3.40	Procedimiento para agregar un nodo de Densidad de corriente externa	68
3.41	Nodo de Densidad de corriente externa y su pestaña de Ajustes	69
3.42	Subnodos predefinidos por COMSOL para el nodo Malla	69
3.43	Procedimiento para agregar una malla elemental con elementos triangulares	70
3.44	El nodo Triangular libre y su ventana de Ajustes	70
3.45	Procedimiento para construir la malla de elementos finitos	71
3.46	Malla de elementos finitos inicial para el ejemplo ilustrativo	71
3.47	Procedimiento para agregar un nodo Refinar	72
3.48	El nodo Refinar y su ventana de Ajustes	73
3.49	Malla de elementos finitos final para el ejemplo ilustrativo	73
3.50	Procedimiento para calcular la solución del ejemplo ilustrativo en COMSOL	74
3.51	Densidad de flujo magnético B , Teslas. Ejemplo ilustrativo	75
3.52	Líneas de flujo magnético. Ejemplo ilustrativo	76
3.53	Líneas de flujo magnético con una malla elemental más fina. Ejemplo ilustrativo	79
3.54	Densidad de flujo magnético B , Teslas. Líneas de flujo magnético. Ejemplo ilustrativo	80
3.55	Densidad de flujo magnético B , Teslas. Líneas de flujo magnético. Conductor eléctrico	81
3.56	Dirección de flujo magnético. Conductor eléctrico	82
3.57	Densidad de flujo magnético B , Teslas. Dirección y líneas de flujo magnético. Conductores paralelos con corriente opuesta	83
3.58	Densidad de flujo magnético B , Teslas. Dirección y líneas de flujo magnético. Conductores paralelos con corriente en mismo sentido	84
3.59	Geometría del reactor monofásico, m	85
3.60	Densidad de flujo magnético B , Teslas. Dirección y líneas de flujo magnético. Reactor monofásico	85
3.61	Densidad de flujo magnético B , Teslas. Dirección y líneas de flujo magnético. Reactor monofásico con entrehierro	86
3.62	Flujo magnético de entrehierro en el reactor monofásico	87

3.63	Geometría del transformador monofásico, m	88
3.64	Densidad de flujo magnético B , Teslas. Transformador monofásico	88
3.65	Densidad de flujo magnético. Dirección y líneas de flujo magnético. Flujo magnético de dispersión. Transformador monofásico	89
4.1	Troquelado del MIRD	91
4.2	Distribución lineal del devanado en el estator	92
4.3	Diagrama lineal de la conexión del devanado en el estator	92
4.4	Distribución lineal del devanado en el rotor	92
4.5	Diagrama lineal de la conexión del devanado en el rotor	93
4.6	Diagrama de la conexión estrella serie del MIRD	93
4.7	Alimentación trifásica en el MIRD y tiempos de estudio en base a una referencia t_0 . Secuencia abc . Fase A en rojo. Fase B en negro. Fase C en azul	94
4.8	Distribución de fuerza magnetomotriz en el estator en t_0	95
4.9	Distribución de fuerza magnetomotriz en el rotor en t_0	95
4.10	Densidad de corriente J en las ranuras del MIRD	96
4.11	(a) Corriente trifásica de estator. (b) Corriente trifásica de rotor. Condición en vacío	97
4.12	Tiempos de estudio. (a) Corrientes de estator en vacío. (b) Corrientes de rotor en vacío	98
4.13	Densidad de flujo magnético B , Teslas. Condición en vacío. Tiempo t_0	99
4.14	Densidad de flujo magnético y líneas de flujo. Condición en vacío. Tiempo t_0	100
4.15	Vector de potencial magnético A , Wb/m. Condición en vacío. Tiempo t_0	101
4.16	Potencial magnético y líneas de flujo. Condición en vacío. Tiempo t_0	102
4.17	Líneas de flujo magnético. Condición en vacío. Tiempo t_0	103
4.18	(a) Potencial magnético en t_0 . (b) Potencial magnético en t_1 . Condición en vacío	104
4.19	(a) Potencial magnético en t_2 . (b) Potencial magnético en t_3 . Condición en vacío	104
4.20	(a) Potencial magnético en t_4 . (b) Potencial magnético en t_5 . Condición en vacío	105

4.21	(a) Corriente trifásica de estator. (b) Corriente trifásica de rotor. Condición bajo carga de 10 N-m	106
4.22	(a) Corriente de estator en estado estable. (b) Corriente de rotor en estado estable. Condición bajo carga de 10 N-m	107
4.23	Tiempos de estudio. (a) Corrientes de estator. (b) Corrientes de rotor. Condición bajo carga de 10 N-m	108
4.24	Densidad de flujo magnético B , Teslas. Líneas de flujo magnético Condición bajo carga de 10 N-m. Tiempo t_0	109
4.25	(a) Potencial magnético en t_0 . (b) Potencial magnético en t_1 . Condición bajo carga de 10 N-m	110
4.26	(a) Potencial magnético en t_2 . (b) Potencial magnético en t_3 . Condición bajo carga de 10 N-m	110
4.27	(a) Potencial magnético en t_4 . (b) Potencial magnético en t_5 . Condición bajo carga de 10 N-m	111
4.28	(a) Corriente trifásica de estator. (b) Corriente trifásica de rotor. Condición bajo carga de 10 N-m con fase A disminuida	112
4.29	Corriente de rotor en estado estable con Fase A disminuida	113
4.30	Tiempos de estudio. (a) Corrientes de estator. (b) Corrientes de rotor. Condición bajo carga de 10 N-m con fase A disminuida	114
4.31	Densidad de flujo magnético B , Teslas. Líneas de flujo magnético. Condición bajo carga de 10 N-m con fase A disminuida. Tiempo t_0	115
4.32	Líneas de flujo magnético. Condición bajo carga de 10 N-m con fase A disminuida. Tiempo t_0	116
4.33	(a) Potencial magnético en t_0 . (b) Potencial magnético en t_1 . Condición bajo carga de 10 N-m con fase A disminuida	117
4.34	(a) Potencial magnético en t_2 . (b) Potencial magnético en t_3 . Condición bajo carga de 10 N-m con fase A disminuida	117
4.35	(a) Potencial magnético en t_4 . (b) Potencial magnético en t_5 . Condición bajo carga de 10 N-m con fase A disminuida	118
4.36	(a) Corriente trifásica de estator. (b) Corriente trifásica de rotor. Condición bajo carga de 10 N-m con fase A desfasada	119

4.37	Tiempos de estudio. (a) Corrientes de estator. (b) Corrientes de rotor. Condición bajo carga de 10 N-m con fase A desfasada	120
4.38	Densidad de flujo magnético B , Teslas. Líneas de flujo magnético. Condición bajo carga de 10 N-m con fase A desfasada. Tiempo t_1	121
4.39	(a) Potencial magnético en t_0 . (b) Potencial magnético en t_1 . Condición bajo carga de 10 N-m con fase A desfasada	122
4.40	(a) Potencial magnético en t_2 . (b) Potencial magnético en t_3 . Condición bajo carga de 10 N-m con fase A desfasada	122
4.41	(a) Potencial magnético en t_4 . (b) Potencial magnético en t_5 . Condición bajo carga de 10 N-m con fase A desfasada	123
4.42	(a) Corriente trifásica de estator. (b) Corriente trifásica de rotor. Condición bajo carga de 10 N-m sin fase A	124
4.43	Tiempos de estudio. (a) Corrientes de estator. (b) Corrientes de rotor. Condición bajo carga de 10 N-m sin fase A	125
4.44	Densidad de flujo magnético B , Teslas. Líneas de flujo magnético. Condición bajo carga de 10 N-m sin fase A . Tiempo t_0	126
4.45	(a) Potencial magnético en t_0 . (b) Potencial magnético en t_1 . Condición bajo carga de 10 N-m con sin fase A	127
4.46	(a) Potencial magnético en t_2 . (b) Potencial magnético en t_3 . Condición bajo carga de 10 N-m con sin fase A	127
4.47	(a) Potencial magnético en t_4 . (b) Potencial magnético en t_5 . Condición bajo carga de 10 N-m con sin fase A	128

Lista de Tablas

2.1 Soluciones globales en el ejemplo ilustrativo	41
3.1 Resultados obtenidos en el capítulo dos y en COMSOL. Ejemplo ilustrativo	77
3.2 Resultados obtenidos en COMSOL con una malla elemental más fina. Ejemplo ilustrativo	78

Lista de Símbolos y Abreviaturas

MEF	Método del Elemento Finito
MIRD	Máquina de Inducción de Rotor Devanado
m	metros
mm	milímetros
ms	milisegundos
H.P.	Caballos de potencia
Hz	Hertz
$[K]$	Matriz de coeficientes global en el MEF
$[S]$	Vector solución global en el MEF
$[F]$	Vector de excitación global en el MEF
N	Número de nodos globales en el MEF
Ω	Dominio del campo
B	Densidad de flujo magnético (T) ó (Wb/m ²)
H	Intensidad de campo magnético (A/m)
D	Densidad de flujo eléctrico (C/m ²)
E	Intensidad de campo eléctrico (V/m)
J	Densidad de corriente eléctrica (A/m ²)
A	Potencial magnético (Wb/m)
A_x	Potencial magnético escalar en el eje x (Wb/m)
A_y	Potencial magnético escalar en el eje y (Wb/m)
A_z	Potencial magnético escalar en el eje z (Wb/m)
μ	Permeabilidad (H/m)
μ_o	Permeabilidad del aire (H/m)
μ_r	Permeabilidad relativa
t	Tiempo (s)

Capítulo 1

Introducción

A lo largo del tiempo el hombre ha tratado de comprender la naturaleza que lo rodea, de explicar todos aquellos fenómenos físicos y naturales que forman parte inseparable de su vida y que de una u otra forma determinan y limitan sus condiciones de vida. Por estas razones, la humanidad se ha dado a la tarea de formular leyes y modelos matemáticos que describan y expliquen a dichos fenómenos físicos de manera detallada y concreta.

Las ecuaciones diferenciales son modelos matemáticos que describen una gran cantidad de fenómenos físicos y su solución, en la mayoría de los casos, representa el eje central de una gran cantidad de problemas. Sin embargo, es importante señalar que en ocasiones la solución analítica a este tipo de problemas es muy compleja y abstracta, por lo que se opta por utilizar métodos numéricos para aproximar soluciones a dichos problemas. El método del elemento finito es uno de los métodos más empleados para la solución de problemas que se pueden describir con ecuaciones diferenciales parciales. Su metodología se basa primero, en discretizar o dividir el dominio en subdominios o elementos finitos, y segundo, en transformar la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones algebraicas que represente la partición del dominio y que considere tanto la geometría de los elementos como el ensamblado de los mismos. Al resolver dicho sistema de ecuaciones se aproxima la solución en ciertos puntos discretos llamados nodos, los cuales se encuentran ubicados en los vértices de la malla de elementos y que mediante su interpolación determinan la solución en el dominio completo.

Una de las aplicaciones del elemento finito en el área de ingeniería eléctrica es la de aproximar distribuciones de campo magnético mediante la solución directa de la ecuación de Poisson, ecuación diferencial parcial derivada de la ley de Ampere que describe la relación existente entre los campos magnéticos y las corrientes eléctricas que los generan.

El conocimiento detallado sobre la distribución de campo magnético en una máquina eléctrica es de vital importancia para la determinación de parámetros y diseño de la misma.

1.1 Antecedentes

En esta sección se presentan algunos antecedentes sobre el magnetismo y sobre la aplicación del elemento finito en el área de ingeniería eléctrica.

1.1.1 Antecedentes históricos del magnetismo

Los fenómenos magnéticos fueron observados por primera vez en la antigua Grecia, en la ciudad de Magnesia del Meandro alrededor del año 800 A.C. En este lugar se encontró que ciertas partículas en estado natural (piedra de magnetita mostrada en la figura 1.1) tenían la propiedad de atraerse entre sí y de atraer a su vez pequeñas partículas de hierro, atribuyéndoles las mismas propiedades de atracción. Tiempo después y en honor a la ciudad de Magnesia se denominó a este fenómeno como magnetismo.



Figura 1.1 Piedra de magnetita.

El magnetismo ha sido ampliamente estudiado y aplicado. El primer filósofo que estudio el fenómeno de magnetismo fue Tales de Mileto, filósofo griego de la antigüedad que estudio a detalle los imanes naturales. Posteriormente, científicos como Gilbert, Oersted, Ampere, Faraday y Henry realizaron grandes aportaciones al estudio del

magnetismo, descubriendo la inexistencia de monopolos magnéticos y la relación entre la electricidad y el magnetismo. Sin embargo, la unificación formal de dichas observaciones así como su formulación matemática completa se dio hasta 1865, fecha en la cual Maxwell retomó las ecuaciones descritas por sus antecesores y las reescribió incluyendo el término de corriente de desplazamiento, modificaciones que sirvieron para que en 1885 Heaviside reformulara dichas ecuaciones y estableciera las cuatro ecuaciones fundamentales conocidas como ecuaciones de Maxwell, ecuaciones que hoy en día unifican y describen todos los fenómenos magnéticos y eléctricos en una sola rama de estudio, el electromagnetismo.

1.1.2 Antecedentes del elemento finito en electromagnetismo

Como ya se mencionó, uno de los problemas fundamentales en el área de máquinas eléctricas es el de encontrar solución a la ley de Ampere mediante la solución indirecta de la ecuación de Poisson. En gran cantidad de casos la complejidad del problema magnético requiere el uso de métodos numéricos para su solución. El método del elemento finito es uno de los métodos numéricos más empleados para la solución de problemas diferenciales continuos, teniendo gran aplicación en el estudio de problemas electromagnéticos.

El uso del método del elemento finito en el área de ingeniería eléctrica se remonta a 1968, fecha en la que el elemento finito fue utilizado para resolver problemas de guías de ondas relativamente sencillos. Con el paso del tiempo el método ha sido aplicado a otros problemas de ingeniería eléctrica, como la distribución de campo magnético en máquinas eléctricas y la distribución de carga y corriente en dispositivos eléctricos.

Existen numerosas referencias sobre la aplicación del elemento finito en ingeniería eléctrica y electromagnetismo, tal es el caso de [Silvester69] y [Ahmed69], los cuales utilizaron elementos triangulares lineales para aproximar soluciones a problemas eléctricos. En [Chari71] se realizó el análisis de un turboalternador por medio del elemento finito. En [Daly72] se calcularon capacitancias directamente de las aproximaciones de elementos finitos. Igualmente en [Bird73] se calcularon pérdidas en guías de ondas en base a resultados obtenidos por medio del elemento finito. En [Carpenter75] se dio una interpretación en términos de circuitos eléctricos a los elementos de primer orden. En [Barnes77] y [Buturla81] se presentó la aplicación de elementos finitos al estudio de

dispositivos semiconductores. En [Ferrari78] se utilizaron elementos finitos tridimensionales para el estudio de problemas electromagnéticos y en [Chari81] se aplicaron elementos finitos en la obtención de campos magnéticos y eléctricos.

1.2 Objetivo de la tesis

El objetivo de esta tesis radica en encontrar, por medio de elementos finitos y COMSOL, la deformación de campo magnético generada en un MIRD por diversas fallas eléctricas en la alimentación, así como el impacto de las mismas en la operación de la máquina.

1.3 Justificación

El conocimiento detallado sobre la distribución de campo magnético en una máquina eléctrica es de vital importancia para determinar índices operativos y de diseño de la máquina. En el caso operativo, información sobre la densidad de flujo magnético es útil para conocer la distribución de la energía almacenada y para determinar parámetros de la máquina. Durante el diseño, datos sobre la saturación y la distribución del flujo magnético facilitan la elección de materiales y la determinación geométrica de la máquina.

En la actualidad existe mucha información acerca de la obtención de campos magnéticos utilizando el método del elemento finito. Inclusive, se tiene una gran variedad de programas computacionales basados en dicho método y dedicados al estudio de problemas electromagnéticos. Sin embargo, el área de estudio en ingeniería eléctrica es muy amplia y existen temas poco tratados o estudiados, tal es el caso de la deformación magnética generada en máquinas eléctricas por fallas eléctricas en la alimentación, como lo puede ser un desbalance en el voltaje trifásico suministrado, o inclusive la operación de la máquina ante la condición de ausencia de una las fases, he aquí el objetivo para realizar el presente trabajo.

1.4 Metodología

Primeramente se introduce al método del elemento finito. Se establece la formulación del elemento finito de Rayleigh Ritz utilizando elementos triangulares lineales, y se ilustra su aplicación específica al estudio de campos magnéticos resolviendo un ejemplo

ilustrativo. Posteriormente se comprueba la fidelidad de COMSOL resolviendo el mismo ejemplo ilustrativo y comprobando resultados con la primera solución. Finalmente, utilizando datos obtenidos mediante Simulink, se aplica COMSOL y el elemento finito al estudio de deformación magnética generada en un MIRD por fallas eléctricas en la alimentación.

1.5 Contenido de la tesis

En el capítulo 1 se da una breve introducción a este trabajo. Se mencionan antecedentes, se plantea el problema y se establece el objetivo principal de esta tesis.

En el capítulo 2 se introduce al método del elemento finito en dos dimensiones. Se definen términos, generalidades y bases matemáticas del método. Se establece y se pone énfasis en la formulación del elemento finito de Rayleigh Ritz utilizando elementos triangulares lineales y se describe su aplicación específica al estudio de campos magnéticos resolviendo un ejemplo ilustrativo.

En el capítulo 3 se introduce al software de simulación COMSOL multiphysics y se ilustra su aplicación al estudio de problemas magnéticos. Se describen detalladamente los pasos a seguir en dicho software para la solución del ejemplo ilustrativo visto en el capítulo dos y se resuelven algunos problemas de campo magnético en máquinas eléctricas, destacando la solución de un reactor monofásico con entrehierro y un transformador monofásico tipo núcleo.

En el capítulo 4 se obtiene, usando COMSOL, el campo magnético de un MIRD tanto en condiciones normales de operación como ante diversas fallas eléctricas en la alimentación de la máquina. Se observa la deformación magnética generada por cada una de las fallas y se analiza su posible repercusión operativa.

El capítulo 5 presenta conclusiones de los resultados obtenidos, así como aportaciones y trabajos futuros.

Capítulo 2

El Método del Elemento Finito en dos dimensiones

En este capítulo se estudiarán conceptos introductorios, generalidades y bases matemáticas del método del elemento finito en dos dimensiones. Se analizará en particular la formulación del elemento finito de Rayleigh Ritz utilizando elementos triangulares lineales y se ilustrará su aplicación específica al estudio de problemas magnéticos resolviendo un ejemplo ilustrativo.

Todos los antecedentes, bases matemáticas y conceptos de este capítulo pueden ser encontrados en las referencias [Reddy84], [Pérez90], [Chandrupatla99] y [Silvester89].

2.1 Introducción al Método del Elemento Finito

En un gran número de problemas diferenciales es imposible encontrar soluciones analíticas por medio de las herramientas convencionales del cálculo diferencial. En la actualidad, el uso de métodos numéricos se ha convertido en la única opción para la solución de dichos problemas. Si bien es cierto que estos métodos solo aproximan soluciones, también es importante señalar que el desarrollo de los mismos es tal, que hoy en día son considerados como indispensables para la solución de diversos problemas en el área ingenieril.

También conocido como MEF, el método del elemento finito es un método numérico de aproximación que se ha convertido en una poderosa herramienta en la solución de gran variedad de problemas diferenciales dentro del área de ingeniería, con resultados confiables, de obtención rápida y, en muchos de los casos, aprovechando el potencial de los ordenadores actuales, con soluciones prácticamente exactas.

El MEF presenta una técnica poderosa en la solución de problemas diferenciales continuos. Desde sus orígenes ha sido utilizado en diversas áreas de ingeniería, desde la

ingeniería estructural en sus inicios, hasta problemas de torsión, elasticidad, transferencia de calor, aeronáutica y electromagnetismo.

El principal objetivo del MEF es trasladar un problema de cálculo diferencial a un problema de algebra lineal. Lo que se busca concretamente, es transformar una ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones algebraicas de la forma $[K][S]=[F]$, de manera que una vez encontrada la solución al sistema de ecuaciones, sea posible aproximar la solución al problema diferencial inicial.

2.2 Antecedentes históricos del MEF

A lo largo del tiempo el método del elemento finito ha sido muy bien establecido, de hecho hoy en día es considerado como uno de los mejores métodos para la solución de problemas diferenciales complejos. El inicio de la ideología básica de este método tiene sus orígenes en 1941, cuando Hrenikoff presentó una solución a problemas elásticos usando el “método de trabajo del marco”, en el cual un medio elástico plano era representado como una colección de barras y vigas. En 1943, Courant utilizó funciones de interpolación polinomial para aproximar la solución a problemas de torsión dentro de subdominios representados con elementos triangulares. Si bien es cierto que las bases del MEF pueden ser encontradas en los trabajos de Hrenikoff y Courant, la técnica del MEF fue presentada formalmente hasta 1956, cuando Turner, Clough, Martin y Topp realizaron trabajos sobre elasticidad. Finalmente fue hasta 1960 cuando Clough empleo por primera vez el término de “elemento finito”.

La aplicación del elemento finito en el área de ingeniería eléctrica se dio hasta 1968, fecha en la que el método se utilizó para resolver problemas de guías de ondas relativamente sencillos. De ahí en adelante el uso del método del elemento finito ha sido extendido al estudio de otros efectos electromagnéticos, como lo es el estudio de campos magnéticos en máquinas eléctricas y a la solución de problemas sobre distribuciones de carga y corriente en dispositivos eléctricos.

2.3 Generalidades del MEF

Como todo método numérico, el MEF cuenta con una metodología bien establecida para la solución de problemas diferenciales, la cual consiste en desarrollar los siguientes pasos:

- 1.- División del dominio en subdominios o elementos finitos.
- 2.- Derivación de las funciones de aproximación para cada elemento.
- 3.- Formación de la matriz $[K^{(e)}]$ y $[F^{(e)}]$ de cada elemento.
- 4.- Ensamblado de los elementos en un solo sistema de ecuaciones global $[K][S]=[F]$.
- 5.- Imposición de condiciones frontera.
- 6.- Solución del sistema de ecuaciones global.

2.3.1 Discretización del dominio

Uno de los principios básicos del MEF es el discretizar o dividir el dominio en subdominios o “elementos finitos”, de manera que una vez encontrada la solución en cada subdominio, sea posible aproximar la solución en el dominio completo mediante la unión de soluciones en todos los elementos. La figura 2.1 muestra una discretización hecha por el MEF a un dominio cualquiera.

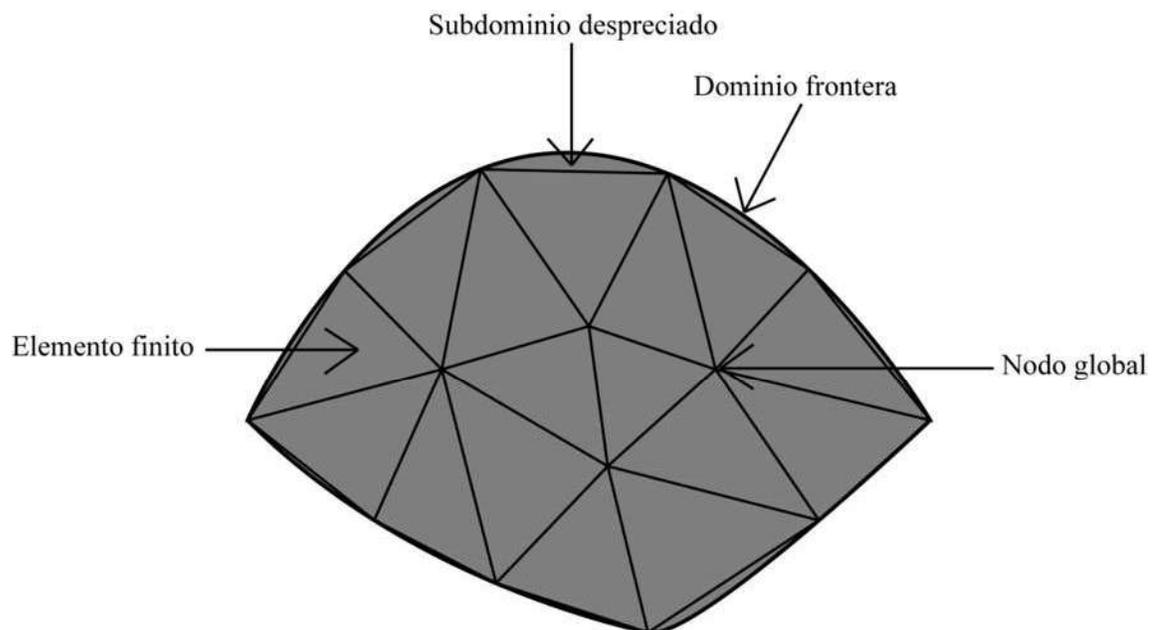


Figura 2.1 Discretización del dominio.

El dominio mostrado en la figura 2.1 es aproximadamente igual a la unión de todos los dominios elementales, matemáticamente esto se expresa de la siguiente forma

$$\Omega \approx \sum_{e=1}^x \Omega^e \quad (2.1)$$

donde

e = número de elemento

Ω = Dominio

Ω^e = Dominio del elemento e

x = número total de elementos

En la mayoría de los casos no es posible encontrar la solución dentro del dominio completo, ya que en ocasiones la geometría de la región solución no es tan sencilla, lo que provoca que el “abarcarse” todo el dominio mediante geometrías simples como triángulos o rectángulos es casi imposible. En la figura 2.1 puede verse que cerca de la frontera del dominio existen “huecos”, es decir, zonas sin elementos finitos en los cuales la solución no se encuentra por el MEF, mejor dicho no se aproxima. Sin embargo, el hecho de usar un gran número de elementos, así como una inteligente selección geométrica y distribución de los mismos, abre la posibilidad de aproximar la solución prácticamente en el dominio completo, de manera que el dominio despreciado sea mínimo y que los resultados puedan extenderse a toda la región solución.

La discretización o partición del dominio cuenta con N nodos globales, los cuales se encuentran en los vértices de la malla de elementos finitos, y se obtienen de la unión de los nodos locales en todos los elementos. Más adelante se definirá con más claridad este término de nodo local y se entenderá porqué la matriz de coeficientes $[K]$ global es una matriz cuadrada de dimensiones $N \times N$.

2.3.2 Dominio de un elemento finito

El dominio de cada elemento está compuesto por su dominio interno y su dominio frontera. Cada elemento cuenta a su vez con n nodos locales, los cuales se encuentran en los vértices de la geometría del elemento y son igual al número de aristas del mismo, tal y como se muestra en la figura 2.2.

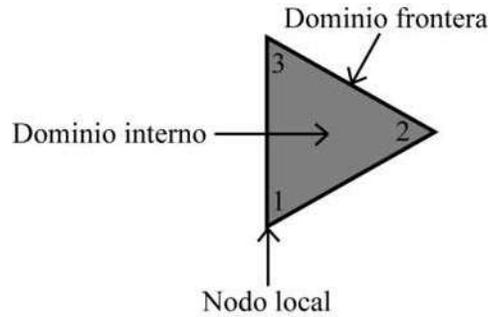


Figura 2.2 Elemento triangular.

Si se toma en cuenta el dominio interno y frontera de cada elemento, la discretización del dominio siempre debe realizarse bajo las siguientes consideraciones:

- 1.- La intersección entre dominios internos de elementos diferentes siempre es nula.
- 2.- Los elementos adyacentes comparten el mismo dominio frontera a lo largo del segmento de adyacencia.

Es importante señalar que la geometría de cada elemento puede tomar cualquier forma geométrica. Sin embargo, el usar una misma forma geométrica en todos los elementos, facilita en gran medida la obtención de la matriz de coeficientes $[K]$ global, la cual en este caso puede obtenerse mediante una forma metódica y bien establecida, lo cual facilita la implementación de algoritmos computacionales.

2.3.3 Interpolación del Elemento Finito

Como se mencionó anteriormente, cada elemento cuenta con n nodos locales, y su solución, según el MEF, está dada por la interpolación de los valores solución en dichos nodos, la cual puede ser lineal, cuadrática o de grado superior.

Actualmente existen diferentes modalidades del MEF, como lo son el modelo de Rayleigh Ritz (expuesto en esta tesis) y el de Residuos Ponderados. Cada uno de ellos tiene una formulación variacional diferente y funciones de aproximación particulares. Sin embargo, ambos proponen que la solución sea obtenida mediante la combinación lineal de los valores solución en los nodos locales del elemento, tal y como se muestra en (2.2).

$$s^e = \sum_{i=1}^n \alpha_i^e s_i^e \quad (2.2)$$

donde

e = número de elemento

i = número de nodo local

s^e = solución en un punto dentro del elemento e

α_i^e = valor escalar dado por el nodo local i para cierto punto

s_i^e = valor solución en el nodo local i

Más adelante se explicará cómo obtener los valores solución en los nodos locales del elemento, se demostrará (2.2), y se verá que los valores escalares en dicha expresión pueden ser sustituidos por funciones, denominadas funciones de aproximación.

2.3.4 Funciones de aproximación

Supóngase que se desean derivar las funciones de aproximación para el elemento lineal de la figura 2.3. Es importante señalar que cuando se menciona “elemento lineal” significa que es un elemento con geometría de línea y su solución se aproxima con interpolación lineal.

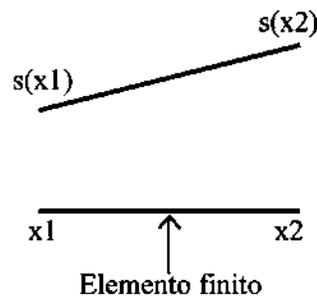


Figura 2.3 Elemento lineal.

La solución dentro del elemento se aproxima en base a la interpolación lineal de los valores solución en los nodos locales 1 y 2. Por lo tanto el valor solución en un punto dentro del elemento está dado por (2.3), que representa la ecuación general de la línea recta.

$$s^e(x) = c_1x + c_2 \quad (2.3)$$

Se debe cumplir que

$$\begin{aligned} s^e(x_1) &= s_1^e = c_1x_1 + c_2 \\ s^e(x_2) &= s_2^e = c_1x_2 + c_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

matricialmente

$$\begin{pmatrix} s_1^e \\ s_2^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

resolviendo para c_1 y c_2

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s_1^e \\ s_2^e \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1 - x_2} & \frac{-1}{x_1 - x_2} \\ \frac{-x_2}{x_1 - x_2} & \frac{x_1}{x_1 - x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^e \\ s_2^e \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s_1^e}{x_1 - x_2} + \frac{-s_2^e}{x_1 - x_2} \\ \frac{-s_1^e x_2}{x_1 - x_2} + \frac{s_2^e x_1}{x_1 - x_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s_1^e - s_2^e}{x_1 - x_2} \\ \frac{s_2^e x_1 - s_1^e x_2}{x_1 - x_2} \end{pmatrix}$$

Si se sustituyen c_1 y c_2 en (2.3) resulta

$$s^e(x) = \left(\frac{s_1^e - s_2^e}{x_1 - x_2} \right) x + \frac{s_2^e x_1 - s_1^e x_2}{x_1 - x_2}$$

en la cual si se reagrupan términos y se factorizan s_1^e y s_2^e se tiene

$$s^e(x) = \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) s_1^e + \left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} \right) s_2^e \quad (2.5)$$

Puede verse en (2.5) que la solución en un punto dentro del elemento está determinada como una combinación lineal de los valores solución en los nodos locales del elemento, donde los valores escalares que multiplican a los valores solución dentro de la combinación lineal están determinados mediante funciones de la variable dependiente, es decir, para cada punto dentro del elemento existen valores escalares propios que intervienen en la combinación lineal. Dichas funciones son mejor conocidas como funciones de interpolación o funciones de aproximación.

La expresión (2.5) demuestra (2.2) y la propuesta de solución del MEF, donde se propone que la solución dentro del elemento puede aproximarse mediante una combinación lineal. La ecuación (2.6) muestra una variación de (2.2), donde los valores escalares α se sustituyen por funciones de aproximación ψ .

$$s^e = \sum_{i=1}^n \psi_i^e s_i^e \quad (2.6)$$

donde

ψ_i = función de aproximación en el nodo local i

s_i = valor solución en el nodo local i

La solución dentro del elemento, según (2.6), puede definirse como una combinación lineal de los valores solución en los nodos locales, multiplicados cada uno de ellos por su función de aproximación. En conclusión, cada nodo local posee una función de aproximación particular que interviene en la solución del elemento.

2.4 Formulación Variacional

También conocida como formulación débil, la formulación variacional es una transformación numérica en la cual una ecuación diferencial es reescrita en una forma integral equivalente. El objetivo de la formulación variacional es convertir un problema diferencial complejo en una expresión con términos integrales que sea más fácil de tratar o analizar matemáticamente, aprovechando algunas propiedades de la integral y la ideología del MEF.

La expresión (2.7) muestra la ecuación general diferencial de segundo orden en dos dimensiones

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + a_{00}v - f = 0 \quad (2.7)$$

La formulación variacional consiste en multiplicar la ecuación diferencial por una función de prueba u e integrar dentro del dominio del elemento.

Si se aplica la formulación variacional a (2.7) se tiene

$$\int_{\Omega^e} u \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + a_{00}v - f \right] \partial x \partial y = 0$$

la cual puede reescribirse como

$$\int_{\Omega^e} u \left[-\frac{\partial}{\partial x} (F_1) - \frac{\partial}{\partial y} (F_2) + a_{00}v - f \right] \partial x \partial y = 0 \quad (2.8)$$

donde

$$F_1 = a_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$F_2 = a_{21} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial y}$$

Del cálculo diferencial se tienen las siguientes identidades

$$\begin{aligned}
 -u \frac{\partial F_1}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x}(uF_1) + \frac{\partial u}{\partial x} F_1 \\
 -u \frac{\partial F_2}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y}(uF_2) + \frac{\partial u}{\partial y} F_2
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Si se utiliza el teorema de divergencia se puede ver que

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x}(uF_1) \partial x \partial y &= \iint_{T^e} uF_1 n_x \partial s \\
 \iint_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial y}(uF_2) \partial x \partial y &= \iint_{T^e} uF_2 n_y \partial s
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde n_x y n_y son las componentes vectoriales del vector unidad normal \hat{n} mostrado en (2.11) y T^e es la longitud de arco a lo largo de la frontera del elemento.

$$\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} \tag{2.11}$$

Si se sustituyen (2.9) y (2.10) en (2.8) se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega^e} u \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + a_{00} uv - uf \right] \partial x \partial y \\
 - \iint_{T^e} u \left[n_x \left(a_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n_y \left(a_{21} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \partial s = 0
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

si se define q_n como

$$q_n = n_x \left(a_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n_y \left(a_{21} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

la ecuación (2.12) puede reescribirse como

$$\int_{\Omega^e} u \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + a_{00} uv - uf \right] \partial x \partial y - \iint_{T^e} u q_n \partial s = 0 \tag{2.13}$$

2.5 Formulación del Elemento Finito de Rayleigh Ritz

El MEF de Rayleigh Ritz aproxima la solución dentro del elemento mediante la combinación lineal expresada en (2.2) como

$$s^e = \sum_{j=1}^n \psi_j^e s_j^e$$

Si se sustituye s^e para v y ϕ para u en la formulación variacional (2.13) se obtiene

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + a_0 \phi \psi_j \right] \partial x \partial y \right\} s_j - \int_{\Omega^e} f \phi \partial x \partial y - \int_{T^e} \phi q_n \partial s = 0 \quad (2.14)$$

La función de prueba ϕ dentro de la formulación variacional debe ser una función continua dentro del dominio del elemento para satisfacer (2.14). Se conoce que las funciones de aproximación definidas en los nodos locales del elemento satisfacen dicha condición de continuidad, por lo que la función de prueba puede ser sustituida por cualquiera de estas funciones, tal y como se muestra a continuación

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + a_0 \psi_i \psi_j \right] \partial x \partial y \right\} s_j - \int_{\Omega^e} f \psi_i \partial x \partial y - \int_{T^e} \psi_i q_n \partial s = 0 \quad (2.15)$$

Puede verse en (2.15) que la función de prueba ϕ fue sustituida por ψ_i , que representa la función de aproximación del nodo local i . Si se formula (2.15) para cada función de interpolación del elemento como función de prueba ϕ se obtiene

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}^{(e)} s_j^{(e)} = F_i^{(e)} \quad (2.16)$$

donde $K_{ij}^{(e)}$ se define como

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + a_0 \psi_i \psi_j \right] \partial x \partial y \quad (2.16a)$$

y $F_i^{(e)}$ como

$$F_i^{(e)} = f_i^e + p_i^e \quad (2.16b)$$

donde

$$f_i^e = \int_{\Omega^e} f \psi_i \partial x \partial y$$

$$p_i^e = \int_{\Gamma^e} q_n \psi_i \partial s$$

Puede verse en (2.16a) que el subíndice i dentro del término $K_{ij}^{(e)}$ significa que la función de prueba dentro de dicha expresión es sustituida por la función de aproximación del nodo local i , así mismo el subíndice j se refiere a que el término $K_{ij}^{(e)}$ multiplica al valor solución del nodo local j . Puede notarse además que $K_{ij}^{(e)} = K_{ji}^{(e)}$ solo cuando $a_{12} = a_{21}$. Más adelante se demostrará que cuando se cumple esta condición la matriz de coeficientes del elemento resulta simétrica.

La ecuación (2.16) puede verse como un sistema de ecuaciones de dimensiones $n \times n$, donde las incógnitas del sistema son los valores solución en los n nodos locales del elemento. Por lo tanto (2.16) puede reescribirse como

$$[K^{(e)}][S^{(e)}] = [F^{(e)}] \quad (2.17)$$

que representa el sistema de ecuaciones propio de cualquier elemento finito.

2.6 Ensamblado y conectividad de las matrices de los elementos

En la subsección anterior se vio que cada elemento cuenta con un sistema de ecuaciones descrito por (2.17). Sin embargo, para poder aproximar la solución en toda la región solución, es necesario realizar el ensamblado de todos los elementos finitos, identificando su conexión y unificando las matrices en un solo sistema de ecuaciones global que considere soluciones globales y no locales. Para ilustrar el ensamblado de elementos véase la figura 2.4, en la cual se muestran los nodos globales y locales formados por dos elementos finitos adyacentes a y b .

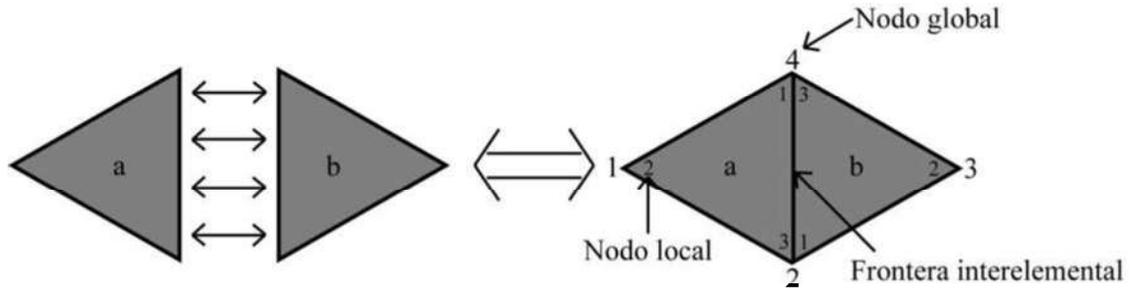


Figura 2.4 Ensamblado de elementos finitos.

Se conoce que cada uno de los elementos finitos cuenta con un sistema de ecuaciones propio de la forma $[K^{(e)}][S^{(e)}]=[F^{(e)}]$. En el caso de los elementos triangulares a y b mostrados en la figura 2.4, las matrices de coeficientes y vectores están definidos por (2.18) y (2.19) respectivamente como

$$[K^{(a)}][S^{(a)}]=[F^{(a)}] \quad (2.18)$$

$$[K^{(b)}][S^{(b)}]=[F^{(b)}] \quad (2.19)$$

que en su forma desarrollada se representan

$$\begin{pmatrix} K_{11}^{(a)} & K_{12}^{(a)} & K_{13}^{(a)} \\ K_{21}^{(a)} & K_{22}^{(a)} & K_{23}^{(a)} \\ K_{31}^{(a)} & K_{32}^{(a)} & K_{33}^{(a)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^{(a)} \\ s_2^{(a)} \\ s_3^{(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^{(a)} \\ F_2^{(a)} \\ F_3^{(a)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K_{11}^{(b)} & K_{12}^{(b)} & K_{13}^{(b)} \\ K_{21}^{(b)} & K_{22}^{(b)} & K_{23}^{(b)} \\ K_{31}^{(b)} & K_{32}^{(b)} & K_{33}^{(b)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^{(b)} \\ s_2^{(b)} \\ s_3^{(b)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^{(b)} \\ F_2^{(b)} \\ F_3^{(b)} \end{pmatrix}$$

Para garantizar la continuidad de la variable dependiente, en este caso de S , debe garantizarse la continuidad de la solución a lo largo de la frontera interelemental. Para lograr esto, en el caso de la figura 2.4, debe cumplirse que la solución local dada por los elementos a y b a lo largo de la frontera interelemental sea la misma. Por lo que deben especificarse y cumplirse las siguientes igualdades

$$S_1 = s_2^{(a)} \quad S_2 = s_3^{(a)} = s_1^{(b)} \quad S_3 = s_2^{(b)} \quad S_4 = s_1^{(a)} = s_3^{(b)} \quad (2.20)$$

Si se toma en cuenta lo definido en (2.20), deberán realizarse ciertas consideraciones para la construcción de las matrices $[K]$ y $[F]$ globales de la malla elemental mostrada en la figura 2.4. En el caso de la matriz de coeficientes $[K]$ deberá considerarse que

$$\begin{aligned} K_{22} &= K_{33}^{(a)} + K_{11}^{(b)} & K_{24} &= K_{31}^{(a)} + K_{13}^{(b)} \\ K_{42} &= K_{13}^{(a)} + K_{31}^{(b)} & K_{44} &= K_{11}^{(a)} + K_{33}^{(b)} \end{aligned}$$

de igual forma para la matriz $[F]$ global deberá tomarse en cuenta que

$$\begin{aligned} F_2 &= F_3^{(a)} + F_1^{(b)} \\ F_4 &= F_1^{(a)} + F_3^{(b)} \end{aligned}$$

Por lo que el ensamblado completo para la malla formada por los elementos a y b es

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(a)} & K_{23}^{(a)} & & K_{21}^{(a)} \\ K_{32}^{(a)} & K_{33}^{(a)} + K_{11}^{(b)} & K_{12}^{(b)} & K_{31}^{(a)} + K_{13}^{(b)} \\ & K_{21}^{(b)} & K_{22}^{(b)} & K_{23}^{(b)} \\ K_{12}^{(a)} & K_{13}^{(a)} + K_{31}^{(b)} & K_{32}^{(b)} & K_{11}^{(a)} + K_{33}^{(b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2^{(a)} \\ F_3^{(a)} + F_1^{(b)} \\ F_2^{(b)} \\ F_1^{(a)} + F_3^{(b)} \end{bmatrix}$$

que representa el sistema de ecuaciones $[K][S]=[F]$ global para la malla mostrada en la figura 2.4.

2.7 Elemento triangular lineal

Como se mencionó anteriormente, la geometría del elemento finito puede tomar cualquier forma geométrica, y la interpolación dentro del elemento puede ser lineal, cuadrática o de grado superior. Sin embargo, la derivación de las funciones de aproximación así como la construcción de la matriz de coeficientes $[K^{(e)}]$ solo se facilita cuando la geometría elemental es simple y la interpolación es de grado menor.

Como se vio anteriormente, en algunas ocasiones es complicado cubrir el dominio completo mediante elementos finitos. El elemento triangular, gracias a su forma geométrica, facilita en gran medida la formación de la malla elemental, lo que abre la posibilidad de poder aproximar la solución prácticamente en el dominio completo, de

manera que el dominio despreciado sea mínimo. La figura 2.2 de la sección 2.3.2 muestra un elemento triangular típico con sus tres nodos locales.

2.7.1 Funciones de aproximación del elemento triangular lineal

La solución dentro del elemento triangular lineal, según el MEF, está determinada por la interpolación lineal de los valores solución en los nodos locales, es decir, la solución del elemento está dada por el plano que pasa a través de los tres valores solución locales del elemento. La función general de dicho plano es la siguiente

$$s(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y \quad (2.21)$$

Dado que el plano pasa a través de los tres valores solución locales, debe cumplirse que

$$s(x_1, y_1) = s_1$$

$$s(x_2, y_2) = s_2$$

$$s(x_3, y_3) = s_3$$

por lo que debe satisfacerse

$$s_1 = s(x_1, y_1) = c_1 + c_2x_1 + c_3y_1$$

$$s_2 = s(x_2, y_2) = c_1 + c_2x_2 + c_3y_2$$

$$s_3 = s(x_3, y_3) = c_1 + c_2x_3 + c_3y_3$$

lo cual matricialmente se expresa como

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

el cual al resolver para las c 's se tiene

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)} \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

Del algebra lineal se conoce que

$$x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2) = Det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} = 2A_e$$

donde

A_e = área del elemento triangular

Por lo que las c 's pueden reescribirse como

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2A_e} \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2A_e} [(x_2y_3 - x_3y_2)s_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)s_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)s_3] \\ c_2 &= \frac{1}{2A_e} [(y_2 - y_3)s_1 + (y_3 - y_1)s_2 + (y_1 - y_2)s_3] \\ c_3 &= \frac{1}{2A_e} [(x_3 - x_2)s_1 + (x_1 - x_3)s_2 + (x_2 - x_1)s_3] \end{aligned}$$

Al sustituir las c 's en (2.21) resulta

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \frac{1}{2A_e} [(x_2y_3 - x_3y_2)s_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)s_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)s_3] \\ &+ \frac{1}{2A_e} [(y_2 - y_3)s_1 + (y_3 - y_1)s_2 + (y_1 - y_2)s_3]x \\ &+ \frac{1}{2A_e} [(x_3 - x_2)s_1 + (x_1 - x_3)s_2 + (x_2 - x_1)s_3]y \end{aligned}$$

si se reagrupan términos se tiene

$$s(x, y) = \psi_1(x, y)s_1 + \psi_2(x, y)s_2 + \psi_3(x, y)s_3 = \sum_{i=1}^3 \psi_i^e s_i^e$$

donde las ψ_i representan las funciones de aproximación del elemento triangular lineal y están determinadas por

$$\psi_i^e = \frac{1}{2A_e}(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.22)$$

en la cual se considera que α_i , β_i y γ_i se definen mediante

$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$\beta_i = y_j - y_k$$

$$\gamma_i = x_k - x_j$$

donde

$$i \neq j \neq k$$

i, j y k permutan en un orden natural

$$\begin{matrix} i & j & k & i & j & k & i & j & k \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

2.7.2 Obtención de las matrices del elemento triangular lineal

Para encontrar la solución del elemento, primero es necesario aproximar los valores solución en los nodos locales, los cuales se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones global. Sin embargo, la solución de dicho sistema solo es posible cuando ya se tienen construidas las matrices $[K^{(e)}]$ y $[F^{(e)}]$ de cada elemento y se han ensamblado. En esta sección se verá cómo obtener dichas matrices utilizando las funciones de aproximación obtenidas en la sección anterior.

Obtención de la matriz de coeficientes $[K^{(e)}]$

De (2.16a) se tiene que

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + a_{00} \psi_i \psi_j \right] dx dy$$

la cual si se desarrolla resulta

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega^e} \left[a_{11} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + a_{21} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + a_{00} \psi_i \psi_j \right] dx dy$$

$$K_{ij}^{(e)} = a_{11} \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy + a_{12} \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy + a_{21} \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy + a_{22} \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy + a_{00} \int_{\Omega^e} \psi_i \psi_j dx dy \quad (2.23)$$

Si se usan las funciones de aproximación del elemento triangular lineal expresadas en (2.22) puede verse que

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \frac{\beta_i}{2A_e} \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial y} = \frac{\gamma_i}{2A_e}$$

donde

$$\frac{\beta_i}{2A_e} \quad \text{y} \quad \frac{\gamma_i}{2A_e} \quad \text{son constantes}$$

Por lo que

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy = \int_{\Omega^e} \frac{\beta_i}{2A_e} \frac{\beta_j}{2A_e} dx dy = \frac{\beta_i \beta_j}{4A_e^2} \int_{\Omega^e} dx dy$$

y si se toma en cuenta que

$$\int_{\Omega^e} dx dy = A_e$$

las integrales de (2.23) quedan de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 1. - \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy &= \frac{\beta_i \beta_j}{4A_e} \\
 2. - \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy &= \frac{\beta_i}{2A_e} \frac{\gamma_j}{2A_e} = \frac{\beta_i \gamma_j}{4A_e^2} \int_{\Omega^e} dx dy = \frac{\beta_i \gamma_j}{4A_e} \\
 3. - \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy &= \frac{\gamma_i \beta_j}{4A_e} \\
 4. - \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy &= \frac{\gamma_i \gamma_j}{4A_e} \\
 5. - \int_{\Omega^e} \psi_i \psi_j dx dy &
 \end{aligned}$$

Nótese que la integral número cinco no puede reducirse como las demás, por lo que esta, en caso de requerirse, deberá resolverse analíticamente. En [Reddy84] pueden encontrarse expresiones matemáticas útiles para su solución rápida y sencilla. Cabe señalar que en el caso de problemas magnéticos, esta integral finalmente no se toma en cuenta, puesto que multiplica a la constante a_{00} , factor que en la ecuación de Poisson toma valor de cero.

Finalmente, y tomando en cuenta la simplificación de las integrales de (2.23), la matriz de coeficientes $[K^{(e)}]$ del elemento triangular puede obtenerse con

$$K_{ij}^{(e)} = \frac{1}{4A_e} (a_{11}\beta_i\beta_j + a_{12}\beta_i\gamma_j + a_{21}\gamma_i\beta_j + a_{22}\gamma_i\gamma_j) + a_{00} \int_{\Omega^e} \psi_i \psi_j dx dy \quad (2.24)$$

Obtención de la matriz $[F^{(e)}]$

Como se vio anteriormente en (2.16b), cada término $F_i^{(e)}$ de cualquier elemento finito está dado por

$$\begin{aligned}
 F_i^{(e)} &= f_i^e + p_i^e \\
 F_i^{(e)} &= \int_{\Omega^e} f \psi_i dx dy + \int_{T^e} q_n \psi_i ds
 \end{aligned}$$

como f es una constante, el término f_i^e para elementos triangulares se encuentra definido como

$$f_i^e = \int_{\Omega^e} f \psi_i \, \partial x \partial y = \frac{f A_e}{3} \quad (2.25)$$

Por lo que el $F_i^{(e)}$ de cada elemento está descrito mediante

$$F_i^{(e)} = \frac{f A_e}{3} + \left[\int_{\Gamma^e} q_n \psi_i \, \partial s \right] \quad (2.26)$$

Más adelante se verá que el término integral de (2.26) no se requiere evaluar para la formación de $[F^{(e)}]$.

Cabe señalar que la f de (2.25), en el caso de problemas magnéticos, es una constante que depende de la permeabilidad del elemento y de la densidad de corriente eléctrica que atraviesa al mismo, la cual actúa como fuente de campo magnético.

2.8 Imposición de condiciones frontera

Como se vio anteriormente, los componentes de la matriz $[F^{(e)}]$ de cada elemento están definidos por (2.16b), donde el término p_i^e se define como

$$p_i^e = \left[\int_{\Gamma^e} q_n \psi_i \, \partial s \right] \quad (2.27)$$

que representa una integral de línea a lo largo de la frontera del elemento.

El término q_n expresado en (2.27), según lo visto en la sección 2.4, se define matemáticamente como

$$q_n = n_x \left(a_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n_y \left(a_{21} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.28)$$

Puede verse en (2.28) que q_n , debido a sus componentes normales n_x y n_y , representa un vector normal a lo largo del dominio frontera del elemento, tal y como se muestra en la figura 2.5, donde se ilustran los vectores q_n de algunos elementos finitos.

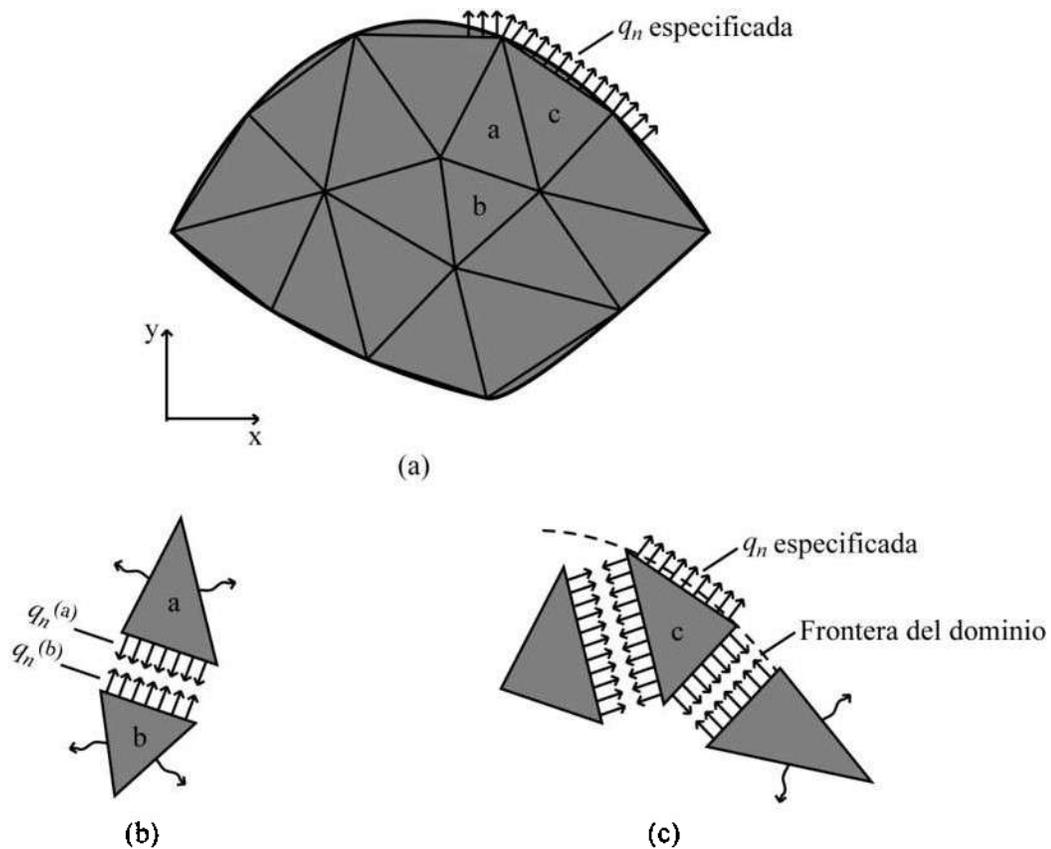


Figura 2.5 Imposición de condiciones frontera y anulación de vectores q_n en la frontera interelemental. (a) Partición del dominio. (b) Anulación de q_n entre elementos. (c) q_n especificada en la frontera del dominio.

Existen dos casos posibles para la evaluación de q_n dentro de las $F_i^{(e)}$. El primero se presenta en los elementos internos de la malla elemental, donde q_n es desconocida, como en los elementos a y b de la figura 2.5(a). Este tipo de elementos debe considerar el ensamblado de elementos visto en la sección 2.6, por lo que aportan componentes a la $[F]$ global del tipo

$$F_i^{(a)} + F_i^{(b)} + F_i^{(c)} + \dots + F_i^{(n)} \quad (2.29)$$

donde $a, b, c \dots n$ representan los elementos ubicados alrededor del mismo nodo global. Dada la consideración de continuidad en el ensamblado, las derivadas contenidas en los posibles $F_i^{(e)}$ de (2.29) son iguales, lo mismo pasa con los termino ψ_i contenidos en dicha expresión. Sin embargo, los componentes n_x y n_y expresados en (2.28) determinan un vector

normal de misma magnitud pero con sentido opuesto para los elementos adyacentes. Esta oposición de vectores q_n en el ensamblado de elementos provoca que las integrales de línea, es decir las p_i^e existentes en las $F_i^{(e)}$ de (2.29), se anulen, lo que conlleva que solo sea requerida la evaluación de las f_i^e para la formación de la $[F]$ global para este caso.

El segundo caso se presenta en aquellos elementos ubicados a lo largo de la frontera del dominio. En esta parte es donde se deben involucrar y especificar las condiciones frontera del problema. En caso de que se conozcan las derivadas de (2.28) a lo largo de la frontera, q_n está especificada, por lo que solo debe evaluarse (2.27) para la obtención de p_i^e y la formación de la matriz $[F]$. Si q_n no está especificada entonces la solución s^e es conocida a lo largo de esa porción de la frontera y no se requiere evaluar q_n .

2.9 Aplicación del elemento finito al estudio de campos magnéticos

El método del elemento finito, en el caso de fenómenos magnéticos, es utilizado para aproximar el campo magnético generado por densidades de corriente eléctricas. En el caso de máquinas eléctricas, el conocimiento detallado de la distribución de flujo magnético dentro de la máquina es de vital importancia para la determinación de parámetros y en la definición de condiciones de operación de la misma.

En esta sección, recordando conceptos generales de electromagnetismo y tomando en cuenta la técnica del MEF expuesta en este capítulo, se mostrará y ejemplificará la aplicación del elemento finito al estudio de campos magnéticos estáticos.

2.9.1 Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell describen, relacionan, y unifican los fenómenos magnéticos y eléctricos en una sola rama de estudio, el electromagnetismo. Las expresiones conocidas como ecuaciones Maxwell son cuatro, las cuales en su forma diferencial parcial están definidas por

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.30)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.31)$$

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (2.32)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.33)$$

La expresión (2.30) es la forma diferencial de la ley de Ampere, que relaciona los campos magnéticos con las corrientes eléctricas que los producen. (2.31) representa la ley de Faraday, que describe la inducción de corriente eléctrica en conductores inmersos en campos magnéticos variables en el tiempo. Las ecuaciones (2.32) y (2.33) definen la ley de Gauss para campos eléctricos y magnéticos respectivamente. Puede verse que (2.33) define la inexistencia de monopolos magnéticos.

2.9.2 Potencial magnético vectorial y ecuación de Poisson

En algunas ocasiones, para simplificar la solución de algún problema, es preferible definir la variable solución en función de otra secundaria, de manera que una vez encontrada la solución a esta última, sea posible encontrar la solución de la variable inicial.

En el caso de electromagnetismo es conveniente definir la densidad de flujo como

$$B = \nabla \times A \quad (2.34)$$

donde A se define como el potencial magnético vectorial, mejor conocido como vector de potencial magnético. Nótese que (2.34) satisface (2.33), ya que

$$\nabla \cdot \nabla \times A = 0$$

por lo que (2.34) es posible.

El electromagnetismo define la siguiente relación constitutiva

$$B = \mu H \quad (2.35)$$

Si se sustituye (2.35) en (2.30) se tiene

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} B \right) = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.36)$$

la cual puede reescribirse como

$$\nabla \times B = \mu \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right)$$

Dado que los estudios realizados en esta tesis son magnetostáticos se tiene que

$$\frac{\partial D}{\partial t} = 0$$

por lo que (2.36) se reduce en

$$\nabla \times B = \mu J \quad (2.37)$$

Si se sustituye (2.34) en (2.37) se tiene la siguiente variante de la ley de Ampere

$$\nabla \times \nabla \times A = \mu J \quad (2.38)$$

la cual al aplicarle el rotacional del rotacional de un vector resulta en

$$\nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A = \mu J \quad (2.39)$$

Como A es una función potencial que también es un vector se cumple que

$$\nabla \cdot A = 0 \quad (2.40)$$

Si se sustituye (2.40) en (2.39) se obtiene la ecuación de Poisson (2.41), que es una ecuación diferencial parcial de segundo orden

$$\nabla^2 A = -\mu J \quad (2.41)$$

la cual si se toma en cuenta que

$$\mu = \mu_r \mu_o \quad (2.42)$$

puede ser reescrita para problemas bidimensionales como

$$-\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \mu_o J \quad (2.43)$$

que representa la forma desarrollada de la ecuación de Poisson.

2.9.3 Densidad de flujo magnético

Una vez encontrado el vector de potencial magnético, la densidad de flujo magnético puede ser aproximada por (2.34) como

$$B = \nabla \times A$$

$$B = x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (2.44)$$

La mayoría de las máquinas eléctricas presentan longitudes axiales grandes, por lo que es posible despreciar los efectos de extremo en el estudio de campos magnéticos, facilitando un análisis en dos dimensiones y obteniendo resultados confiables. En aquellos estudios bidimensionales, la componente en z de la densidad de corriente, según la ley de Ampere, es la única que interviene en la formación de campo magnético, como A tiene la misma dirección que la densidad de corriente, entonces se deduce que A solo tiene valor en el eje z , por lo que (2.44) puede simplificarse en

$$B = x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) + y \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \quad (2.45)$$

2.9.4 Ejemplo ilustrativo

A continuación se aplicará el MEF para aproximar la distribución de flujo magnético existente en el circuito magnético de la figura 2.6, utilizando el modelo de Rayleigh Ritz y elementos triangulares lineales. El problema propuesto está compuesto por un conductor de cobre en el centro de la geometría, el cual conduce una corriente de 1 A, y pequeños materiales ferromagnéticos con permeabilidad relativa de 4000 en las partes laterales, tal y como se muestra en la figura 2.6.

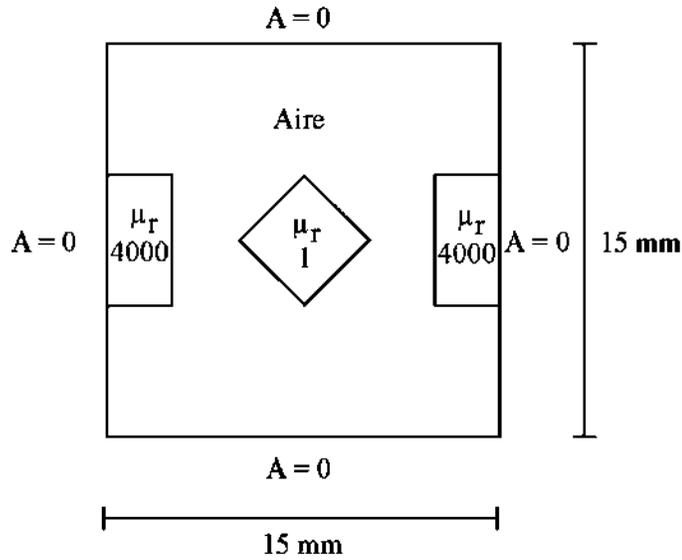


Figura 2.6 Geometría y sección transversal del ejemplo ilustrativo.

Dada la simetría del problema, es posible aproximar la solución en el dominio completo analizando solo una cuarta parte de este, tal y como se muestra en la figura 2.7, donde se observa que para realizar dicha simplificación es necesario especificar las debidas condiciones frontera del subdominio a analizar para garantizar la continuidad de la solución.

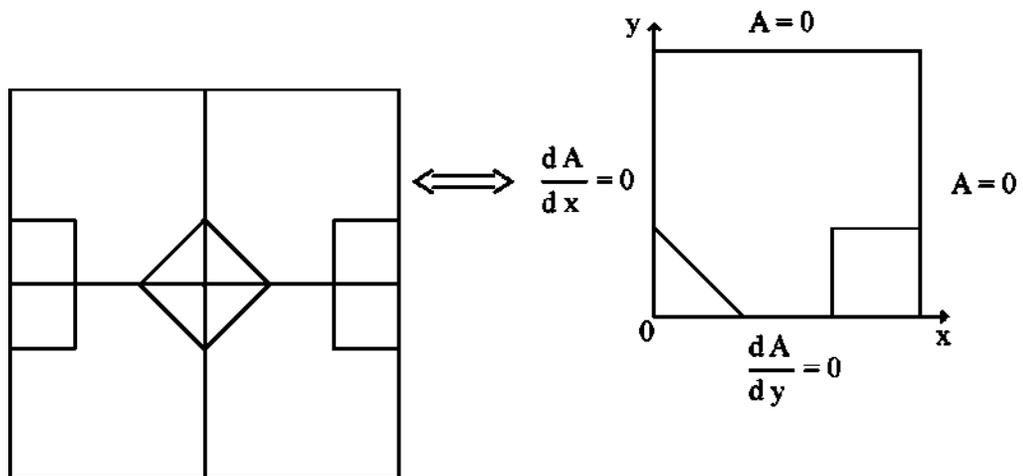


Figura 2.7 Subdominio analizado en el ejemplo ilustrativo.

Cabe señalar que las derivadas expresadas en la figura 2.7 representan las condiciones frontera de Neuman, mientras que los valores de potencial magnético igual a cero definen la condición frontera natural del problema o de Dirichlet.

La figura 2.8 muestra la discretización elegida para el subdominio analizado y su numeración correspondiente de nodos globales, locales y de elementos.

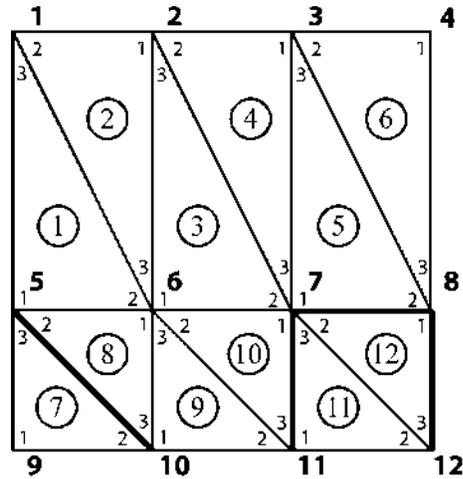


Figura 2.8 Discretización del subdominio analizado en el ejemplo ilustrativo.

La matriz de coeficientes $[K]$ global, considerando el ensamblado de elementos, se muestra a continuación

$$\left\{ \begin{array}{cccccc}
 K_{33}^1 + K_{22}^2 & K_{21}^2 & 0 & 0 & K_{31}^1 & \\
 & K_{11}^2 + K_{33}^3 + K_{22}^4 & K_{21}^4 & 0 & 0 & \\
 & & K_{11}^4 + K_{33}^5 + K_{22}^6 & K_{21}^6 & 0 & \\
 & & & K_{11}^6 & 0 & \\
 & & & & K_{11}^1 + K_{33}^7 + K_{22}^8 & \\
 \end{array} \right.$$

Simétrica

Los vectores $[S]$ y $[F]$ globales del estudio son

$$[S] = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \\ S_9 \\ S_{10} \\ S_{11} \\ S_{12} \end{bmatrix} \quad [F] = \begin{bmatrix} F_3^1 + F_2^2 \\ F_1^2 + F_3^3 + F_2^4 \\ F_1^4 + F_3^5 + F_2^6 \\ F_1^6 \\ F_1^1 + F_3^7 + F_2^8 \\ F_2^1 + F_3^2 + F_1^3 + F_1^8 + F_3^9 + F_2^{10} \\ F_2^3 + F_3^4 + F_1^5 + F_1^{10} + F_3^{11} + F_2^{12} \\ F_2^5 + F_3^6 + F_1^{12} \\ F_1^7 \\ F_2^7 + F_3^8 + F_1^9 \\ F_2^9 + F_3^{10} + F_1^{11} \\ F_2^{11} + F_3^{12} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Una vez hecha la partición del dominio y obtenido el sistema de ecuaciones global en su forma simbólica, se requiere la construcción de la matriz de coeficientes $[K^{(e)}]$ para cada elemento, tal y como se muestra a continuación:

En todos los elementos la matriz de coeficientes $[K^{(e)}]$ se forma en base a las coordenadas de sus nodos locales. La figura 2.9 muestra la ubicación dentro del plano xy del elemento I .

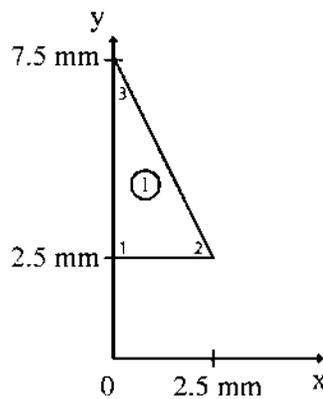


Figura 2.9 Coordenadas xy del elemento I .

Si se toma en cuenta la figura 2.9, la matriz de coeficientes $[K^I]$ del elemento I se obtiene de la siguiente forma:

Los elementos de la matriz de coeficientes $[K^{(e)}]$ están dados por (2.24) como

$$K_{ij}^{(e)} = \frac{1}{4A_e} (a_{11}\beta_i\beta_j + a_{12}\beta_i\gamma_j + a_{21}\gamma_i\beta_j + a_{22}\gamma_i\gamma_j) + a_{00} \int_{\Omega^e} \psi_i\psi_j \, dx dy$$

La ecuación general diferencial de segundo orden en dos dimensiones está dada por (2.7) como

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + a_{00} v = f$$

Y la ecuación diferencial de Poisson esta descrita en (2.43) por

$$-\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \mu_o J$$

Si se comparan (2.7) y (2.43) puede verse que en la ecuación de Poisson se tiene

$$a_{00} = a_{12} = a_{21} = 0$$

por lo que la expresión (2.24) para el estudio de campos magnetostáticos se reduce en

$$K_{ij}^{(e)} = \frac{1}{4A_e} (a_{11}\beta_i\beta_j + a_{22}\gamma_i\gamma_j) \tag{2.46}$$

donde β y γ están determinadas por

$$\begin{aligned} \beta_i &= y_j - y_k \\ \gamma_i &= x_k - x_j \\ i \neq j \neq k & \\ i, j \text{ y } k & \text{ permutan en un orden natural} \\ \begin{matrix} i & j & k & i & j & k & i & j & k \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \end{aligned} \tag{2.47}$$

y a_{11} y a_{22} por

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{\mu_r} \tag{2.48}$$

$\mu_r =$ permeabilidad relativa del elemento

Si se aplican (2.46), (2.47) y (2.48) en la obtención de la matriz de coeficientes $[K^I]$ del elemento I , y tomando en cuenta la permeabilidad del aire, se tiene

$$\beta_1^1 = y_2 - y_3 = 2.5 - 7.5 = -5$$

$$\beta_2^1 = y_3 - y_1 = 7.5 - 2.5 = 5$$

$$\beta_3^1 = y_1 - y_2 = 7.5 - 7.5 = 0$$

$$\gamma_1^1 = x_3 - x_2 = 0 - 2.5 = -2.5$$

$$\gamma_2^1 = x_1 - x_3 = 0 - 0 = 0$$

$$\gamma_3^1 = x_2 - x_1 = 2.5 - 0 = 2.5$$

$$A_1 = (2.5)(5) / 2 = 6.25 \text{ mm}^2$$

$$K_{ij}^1 = \frac{1}{4A_1\mu_r} (\beta_i^1\beta_j^1 + \gamma_i^1\gamma_j^1)$$

$$K_{11}^1 = \frac{1}{4(6.25)(1)} [(-5)(-5) + (-2.5)(-2.5)]$$

$$K_{11}^1 = \frac{1}{25} [(-5)(-5) + (-2.5)(-2.5)] = 1.25$$

$$K_{12}^1 = \frac{1}{25} [(-5)(5) + (-2.5)(0)] = -1$$

$$K_{13}^1 = \frac{1}{25} [(-5)(0) + (-2.5)(2.5)] = -0.25$$

$$K_{21}^1 = \frac{1}{25} [(5)(-5) + (0)(-2.5)] = -1$$

$$K_{22}^1 = \frac{1}{25} [(5)(5) + (0)(0)] = 1$$

$$K_{23}^1 = \frac{1}{25} [(5)(0) + (0)(2.5)] = 0$$

$$K_{31}^1 = \frac{1}{25} [(0)(-5) + (2.5)(-2.5)] = -0.25$$

$$K_{32}^1 = \frac{1}{25} [(0)(5) + (2.5)(0)] = 0$$

$$K_{33}^1 = \frac{1}{25} [(0)(0) + (2.5)(2.5)] = 0.25$$

Por lo que la matriz $[K^I]$ del elemento I resulta

$$[K^I] = \begin{bmatrix} 1.25 & -1 & -0.25 \\ -1 & 1 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Dada la geometría y numeración local de los elementos, las matrices $[K^{(e)}]$ de los elementos 2, 3, 4, 5 y 6 son idénticas a la del elemento 1, por lo que no es requerida su obtención.

La figura 2.10 muestra las coordenadas xy del elemento 7 que representa al conductor con permeabilidad relativa de 1.

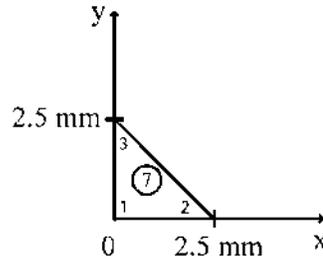


Figura 2.10 Coordenadas xy del elemento 7.

Si se sigue el mismo procedimiento que en el elemento 1, la matriz de coeficientes $[K^7]$ para elemento 7 se obtiene con

$$\beta_1^7 = -2.5$$

$$\beta_2^7 = 2.5$$

$$\beta_3^7 = 0$$

$$\gamma_1^7 = -2.5$$

$$\gamma_2^7 = 0$$

$$\gamma_3^7 = 2.5$$

$$A_7 = 3.125 \text{ mm}^2$$

$$K_{ij}^7 = \frac{1}{4A_7\mu_r} (\beta_i^7 \beta_j^7 + \gamma_i^7 \gamma_j^7)$$

$$K_{11}^7 = 1$$

$$K_{12}^7 = -0.5$$

$$K_{13}^7 = -0.5$$

$$K_{21}^7 = -0.5$$

$$K_{22}^7 = 0.5$$

$$K_{23}^7 = 0$$

$$K_{31}^7 = -0.5$$

$$K_{32}^7 = 0$$

$$K_{33}^7 = 0.5$$

Por lo que la matriz $[K^7]$ del elemento 7 resulta

$$[K^7] = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Igualmente, debido a la numeración y simetría de los elementos finitos, las matrices de los elementos 8, 9 y 10 son idénticas a la matriz del elemento 1, por lo que su cálculo no es requerido. Puede verse que la geometría de los elementos 11 y 12 también es igual que la del elemento 7. Sin embargo, dado que estos elementos representan al material ferromagnético en el ejemplo, la matriz de coeficientes se ve alterada por la permeabilidad de dicho material, la cual se obtiene multiplicando la matriz del elemento 7 por el factor $1/4000$, donde 4000 representa la permeabilidad relativa del material ferromagnético, tal y como se muestra a continuación

$$[K^{11}] = \frac{1}{4000} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$[K^{11}] = \begin{bmatrix} 2.5 \times 10^{-4} & -1.25 \times 10^{-4} & -1.25 \times 10^{-4} \\ -1.25 \times 10^{-4} & 1.25 \times 10^{-4} & 0 \\ -1.25 \times 10^{-4} & 0 & 1.25 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Como ya se mencionó, la matriz $[K^{12}]$ del elemento 12 es idéntica a la del elemento 11, por lo que ya no es necesaria su obtención. Con esto se finaliza la construcción de las matrices de coeficientes $[K^{(e)}]$ de todos los elementos. El paso siguiente, radica en formar y construir las matrices $[F^{(e)}]$ para cada elemento, tal y como se muestra a continuación:

Las $F_i^{(e)}$ de cada elemento están determinadas por (2.16b) como

$$F_i^{(e)} = f_i^e + p_i^e$$

$$F_i^{(e)} = \int_{\Omega^e} f \psi_i \partial x \partial y + \int_{T^e} q_n \psi_i \partial s$$

Sin embargo, de acuerdo a las condiciones frontera de Neuman especificadas en la figura 2.7 y a la anulación de q_n entre fronteras interelementales, los términos p_i^e de todas las $F_i^{(e)}$ se eliminan, por lo que solo es requerida la evaluación de f_i^e para la obtención de la $[F]$ global. Si se comparan nuevamente la ecuación general diferencial de segundo orden y la ecuación de Poisson, y tomando en cuenta (2.25), puede verse que las f_i^e de cada elemento están determinadas por

$$f_i^e = \frac{A_e \mu_0 J}{3}$$

donde μ_0 es la permeabilidad del aire y J es la densidad de corriente eléctrica que atraviesa al elemento perpendicularmente, es decir, en el eje z . Nótese que para todos los elementos se cumple que

$$f_1^e = f_2^e = f_3^e$$

En el caso del ejemplo ilustrativo, puede verse que el único elemento con densidad de corriente es el elemento 7, en el cual dicha densidad se calcula como

$$J = \frac{1 \text{ A}}{\text{Área}} = \frac{1 \text{ A}}{12.5 \text{ mm}^2} = 0.08 \text{ A/mm}^2 = 80,000 \text{ A/m}^2$$

donde Área es el área del rombo que representa al conductor.

Nótese que las únicas f_i^e que tienen valor son

$$f_1^7 = f_2^7 = f_3^7 = \frac{A_e \mu_0 J}{3} = \left(\frac{1}{3}\right) \left(3.125 \times 10^{-6} \text{ m}^2\right) \left(4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A} \cdot \text{v} \cdot \text{m}}\right) \left(80,000 \frac{\text{A} \cdot \text{v}}{\text{m}^2}\right)$$

$$f_1^7 = f_2^7 = f_3^7 = 1.047198 \times 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{m}}$$

y todas las f_i^e en los elementos restantes son cero debido a que no tienen fuente de densidad de corriente. Con lo anterior, es posible la obtención de la matriz $[F]$ global. Sin embargo, antes de encontrar solución al sistema de ecuaciones global, es necesario especificar en dicho sistema las condiciones frontera de Dirichlet definidas en el planteamiento del problema, por lo que se requiere especificar que

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_8 = S_{12} = 0$$

Al sustituir estas condiciones el sistema de ecuaciones global se reduce en

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 + K_{33}^7 + K_{22}^8 & K_{12}^1 + K_{21}^8 & 0 & K_{31}^7 & K_{32}^7 + K_{23}^8 & 0 \\ K_{21}^1 + K_{12}^8 & K_{22}^1 + K_{33}^2 + K_{11}^3 + K_{11}^8 + K_{33}^9 + K_{22}^{10} & K_{12}^3 + K_{21}^{10} & 0 & K_{13}^8 + K_{31}^9 & K_{32}^9 + K_{23}^{10} \\ 0 & K_{21}^3 + K_{12}^{10} & K_{22}^3 + K_{33}^4 + K_{11}^5 + K_{11}^{10} + K_{33}^{11} + K_{22}^{12} & 0 & 0 & K_{13}^{10} + K_{31}^{11} \\ K_{13}^7 & 0 & 0 & K_{11}^7 & K_{12}^7 & 0 \\ K_{23}^7 + K_{32}^8 & K_{31}^8 + K_{13}^9 & 0 & K_{21}^7 & K_{22}^7 + K_{33}^8 + K_{11}^9 & K_{12}^9 \\ 0 & K_{23}^9 + K_{32}^{10} & K_{31}^{10} + K_{13}^{11} & 0 & K_{21}^9 & K_{22}^9 + K_{33}^{10} + K_{11}^{11} \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_9 \\ S_{10} \\ S_{11} \end{bmatrix} \quad [F] = \begin{bmatrix} F_1^1 + F_3^7 + F_2^8 \\ F_2^1 + F_3^2 + F_1^3 + F_1^8 + F_3^9 + F_2^{10} \\ F_2^3 + F_3^4 + F_1^5 + F_1^{10} + F_3^{11} + F_2^{12} \\ F_1^7 \\ F_2^7 + F_3^8 + F_1^9 \\ F_2^9 + F_3^{10} + F_1^{11} \end{bmatrix}$$

$$[K][S] = [F]$$

Si se sustituyen los valores numéricos se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 2.25 & -1.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ -1.5 & 4.5 & -1.5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1.5 & 3.50025 & 0 & 0 & -0.500125 \\ -0.5 & 0 & 0 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -0.5 & 2 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.500125 & 0 & -0.5 & 1.00025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_9 \\ S_{10} \\ S_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.047198 \times 10^{-7} \\ 0 \\ 0 \\ 1.047198 \times 10^{-7} \\ 1.047198 \times 10^{-7} \\ 0 \end{bmatrix}$$

el cual, al resolver para las S 's, aproxima los valores de potencial magnético faltantes del estudio. La tabla 2.1 muestra los valores solución globales aproximados en el estudio.

Tabla 2.1 Soluciones globales en el ejemplo ilustrativo.

Nodo global	Solución global, Wb/m
S_1	0
S_2	0
S_3	0
S_4	0
S_5	2.515863×10^{-7}
S_6	1.829978×10^{-7}
S_7	1.064839×10^{-7}
S_8	0
S_9	3.737053×10^{-7}
S_{10}	2.863847×10^{-7}
S_{11}	1.963986×10^{-7}
S_{12}	0

Con los valores de potencial magnético globales y la interpolación lineal de los mismos, se obtiene la figura 2.11, en la cual se muestran líneas equipotenciales del vector de potencial magnético resultantes del estudio, que en la teoría de máquinas eléctricas, ejemplifican la forma típica de representar líneas de flujo magnético, las cuales muestran de una manera gráfica e ilustrativa la distribución del campo magnético.

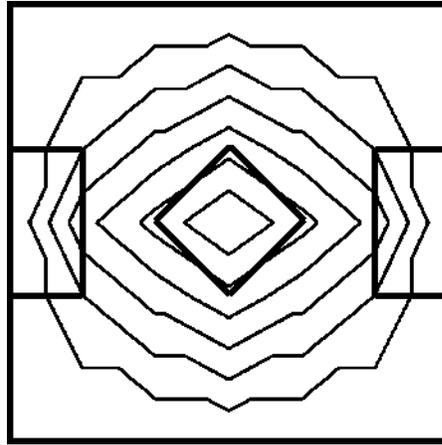


Figura 2.11 Líneas de flujo magnético en el ejemplo ilustrativo.

Capítulo 3

Análisis de Campos Magnéticos usando COMSOL

En este capítulo se realizará una breve introducción al software de simulación COMSOL multiphysics versión 4.0. Se ejemplificará su aplicación específica al estudio de campos magnéticos y se resolverán algunos casos de estudio analizando los resultados.

Las referencias utilizadas en este capítulo fueron [COMSOL], [COMSOL10] y [Halliday99].

3.1 Introducción a COMSOL

El software de simulación representa actualmente una herramienta de vital importancia para el estudio de gran variedad de problemas en ingeniería. Su aplicación va desde la solución de problemas, pasando por la validación y comprobación de resultados, hasta análisis y diseño.

COMSOL está pensado para la solución de problemas de alta complejidad, los cuales consideran múltiples restricciones y ecuaciones que involucran diversas áreas de ingeniería, lo que ha convertido a COMSOL en un software poderoso en el estudio de problemas ingenieriles que van desde lo más sencillo hasta lo más complejo posible.

COMSOL multiphysics es un software diseñado para la solución de problemas diferenciales usando el Método del Elemento Finito. La versión 4.0 es un paquete completo que cuenta con un ambiente gráfico y agradable, lo que hace de COMSOL un software práctico y útil para la solución de diversos problemas. Una de las ventajas de esta versión, es que el modelado del problema se da mediante una secuencia de operaciones o indicaciones, lo que facilita en gran medida el poder realizar posibles cambios en el modelo y actualizar la solución de forma rápida, de manera que en caso de requerir algún cambio en alguna parte del modelo, como en la geometría, en la malla de elementos finitos, en los materiales, etc., éste sea posible mediante una simple modificación en la operación

correspondiente dentro de la secuencia de operaciones, de tal forma que al calcular nuevamente la solución sea posible actualizar los cambios realizados y observar los nuevos resultados.

3.1.1 El medio ambiente de COMSOL

La versión 4.0 de COMSOL, a diferencia de sus antecesores, presenta un ambiente de trabajo totalmente diferente, caracterizado por su interfaz gráfica novedosa y de amplia interactividad con el usuario. La figura 3.1 muestra el medio ambiente de trabajo de COMSOL.

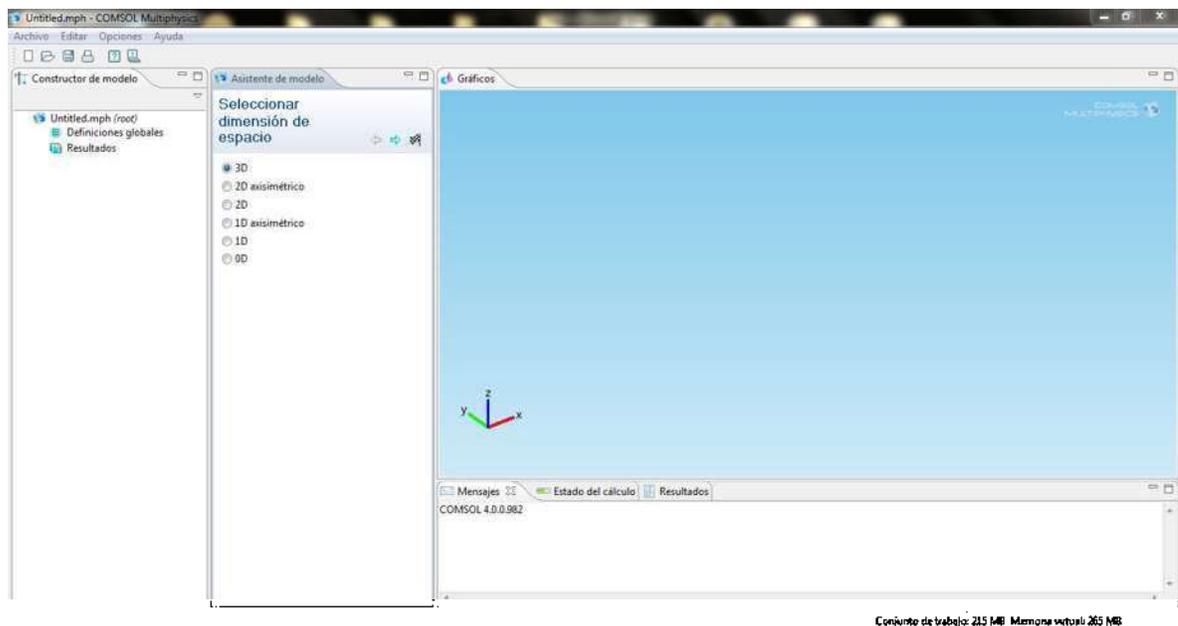


Figura 3.1 Medio ambiente de COMSOL.

El área de trabajo de COMSOL cuenta con ventanas principales, las cuales alojan subventanas que permiten diversas funciones y aplicaciones. Dichas subventanas se visualizan en forma de pestañas dentro de su respectiva ventana principal, tal y como se muestra en la figura 3.2, donde las subventanas se encuentran subrayadas y las ventanas principales se indican con óvalos.

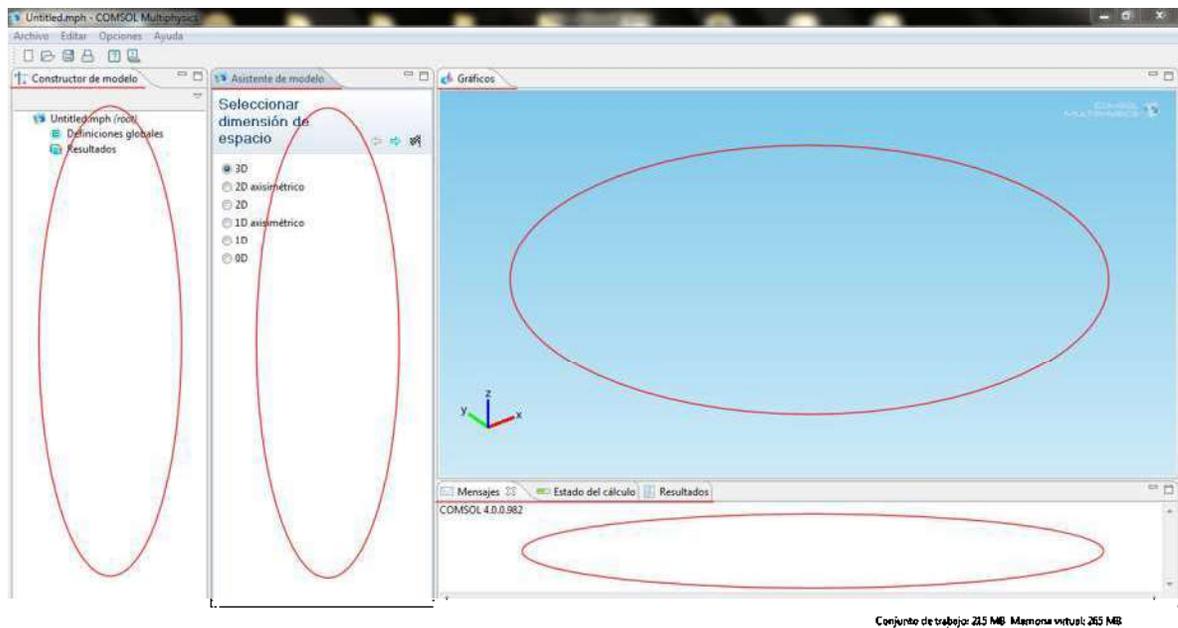


Figura 3.2 Ventanas y subventanas de COMSOL.

La figura 3.3 muestra que la disposición de las ventanas principales y subventanas puede ser personalizada por el usuario. El reacomodo de ventanas se da mediante el “arrastre” de las mismas con el mouse, incluso, algunas subventanas pueden suprimirse y ser activadas nuevamente en el menú opciones de la barra de herramientas.

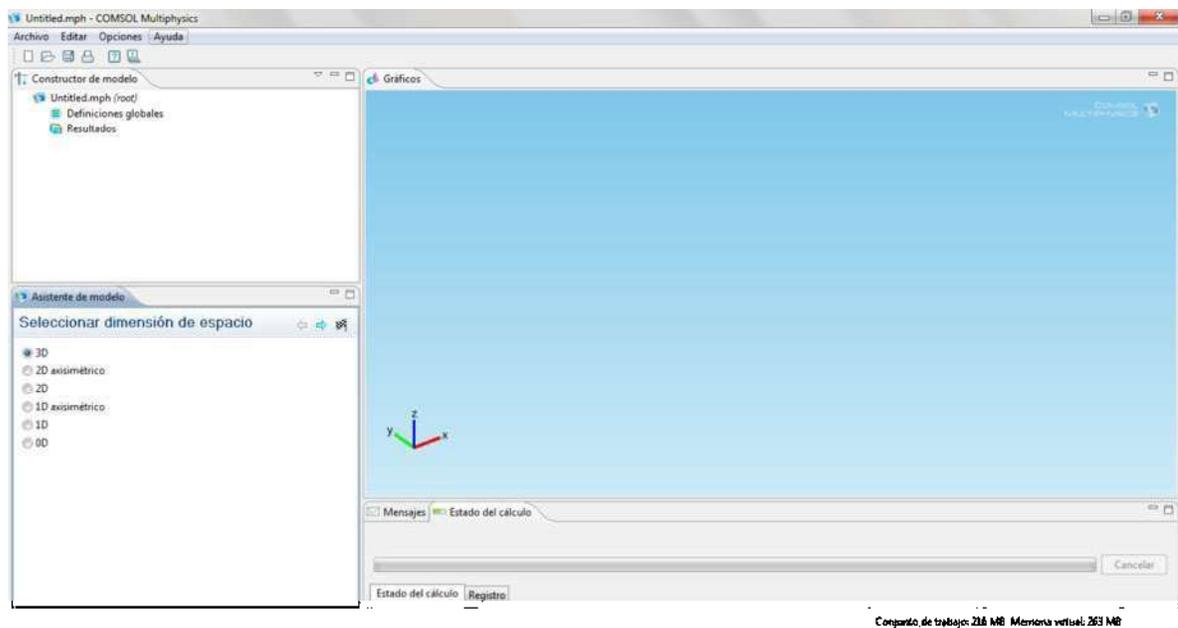


Figura 3.3 Reacomodo de ventanas en COMSOL.

3.1.2 Descripción de las subventanas de COMSOL

Las subventanas apoyan en el modelado del problema y permiten que todas las consideraciones y restricciones del problema puedan ser incluidas en el modelo. A continuación se dará una breve explicación de las subventanas más importantes de COMSOL:

Asistente del modelo

El *Asistente del modelo* sirve para especificar el espacio dimensional, las interfaces físicas y los estudios a realizarse en el modelo, por lo que obligadamente es la primera pestaña que debe utilizarse. Más adelante se entenderá mejor como realizar dichas acciones y se verá de una forma más clara como utilizar esta subventana. La figura 3.4 muestra el *Asistente del modelo*, la cual es una de las pestañas que aparece por omisión al iniciar COMSOL.

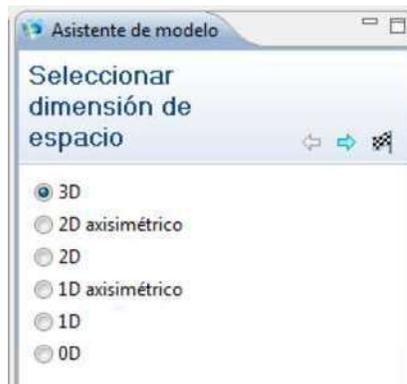


Figura 3.4 Asistente del modelo.

Constructor del modelo

Esta subventana es una de las más importantes de COMSOL, ya que a través de ella se controla la secuencia de operaciones del modelo, las cuales se enlistan en forma de un “sistema de árbol” con ramas y subramas, tal y como se muestra en la figura 3.5.

En esta subventana, principalmente, se especifican y atribuyen los materiales, se realiza la geometría, se estructura la malla de elementos finitos, se determina la visualización de resultados y se detallan las interfaces físicas. En conclusión, esta subventana representa el “cerebro” del estudio y es donde se controla gran parte del modelado del problema.

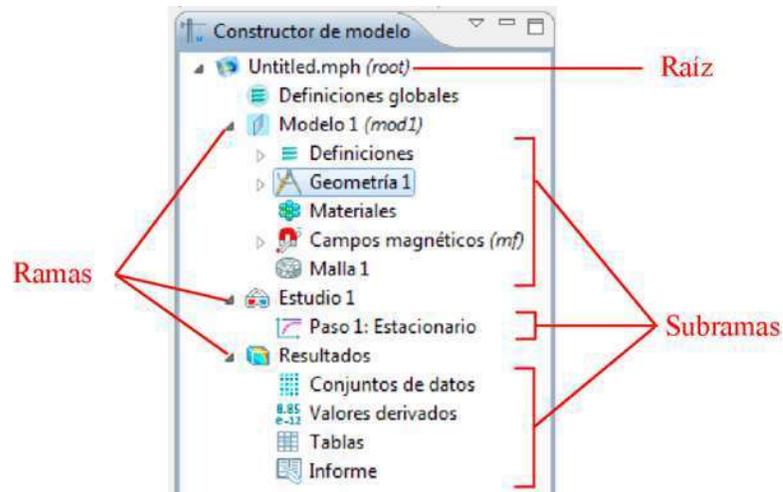


Figura 3.5 Constructor del modelo.

En la figura 3.5 puede verse que en la rama *Modelo* se determina todo lo relacionado a la geometría, la malla de elementos finitos, los materiales y las interfaces físicas. En la rama *Estudio* se especifica lo relacionado a los tipos de estudio y, en la rama *Resultados*, se analizan los resultados. Cabe señalar que los nombres de la raíz, ramas y subramas pueden ser personalizados por el usuario. En este caso, la figura 3.5 muestra los nombres dados por default en COMSOL.

De aquí en adelante se llamará “nodo” a toda raíz, rama y subrama que se desee hacer referencia de manera general dentro del *Constructor del modelo*. Nótese que si se selecciona cualquier nodo y posteriormente se da clic derecho en el mismo, aparece un submenú con diferentes aplicaciones y propiedades del nodo seleccionado, tal y como se muestra en la figura 3.6

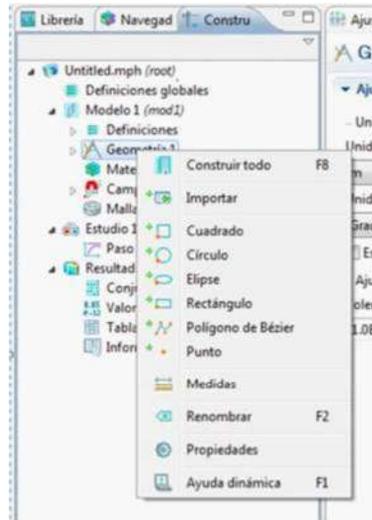


Figura 3.6 Submenú de los nodos.

Ajustes

La pestaña de *Ajustes* aparece cuando el *Asistente del modelo* ha sido cerrado. Cada vez que se selecciona un nodo dentro del *Constructor del modelo*, la subventana de *Ajustes* se actualiza con información del nodo seleccionado, mostrando algunas propiedades y aplicaciones del mismo. Las figuras 3.7 y 3.8 ilustran la subventana *Ajustes* y muestran como se actualiza la información cada vez que se selecciona un nodo diferente.

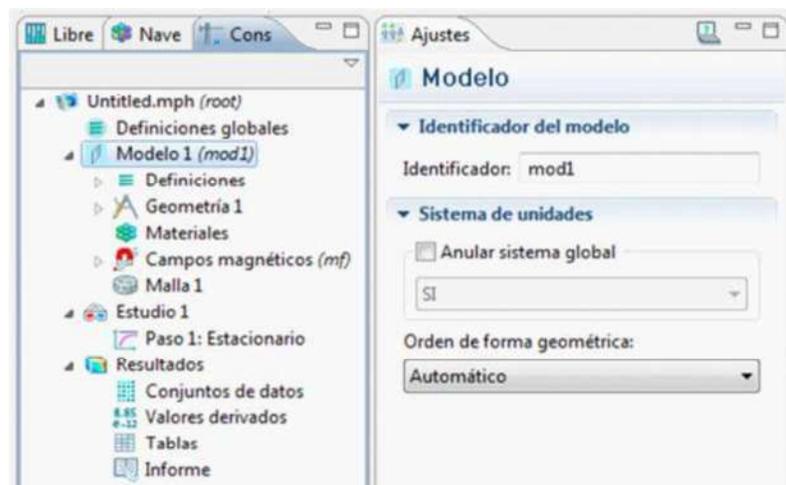


Figura 3.7 Subventana de Ajustes.

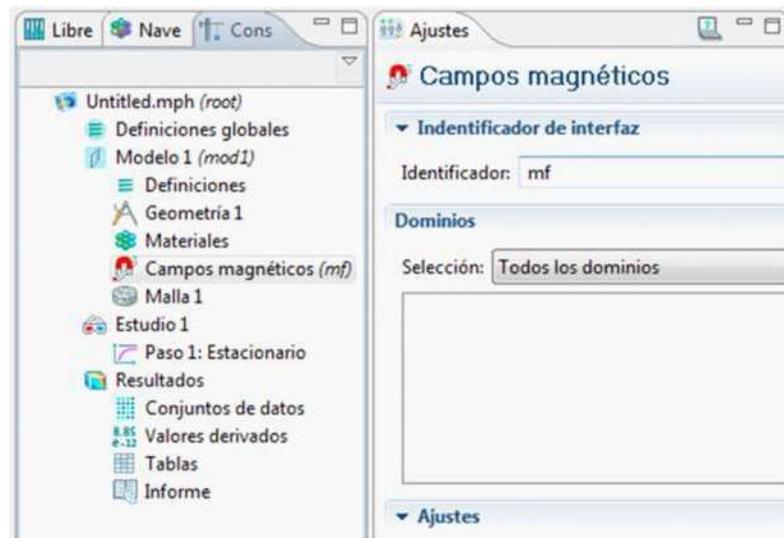


Figura 3.8 Actualización de la subventana de Ajustes.

Gráficos

En esta subventana se muestra gráficamente el espacio dimensional del estudio, el cual puede ser $2D$ ó $3D$, *simétrico* o *axisimétrico*. En esta pestaña se crea y se visualiza tanto la geometría del modelo como la malla de elementos finitos. Se facilita la especificación de dominios en los materiales y en las interfaces físicas de una manera gráfica y sencilla, y es posible observar los resultados en una gran variedad de formas graficas.

La figura 3.9 muestra la subventana de *Gráficos* de un espacio dimensional $2D$.

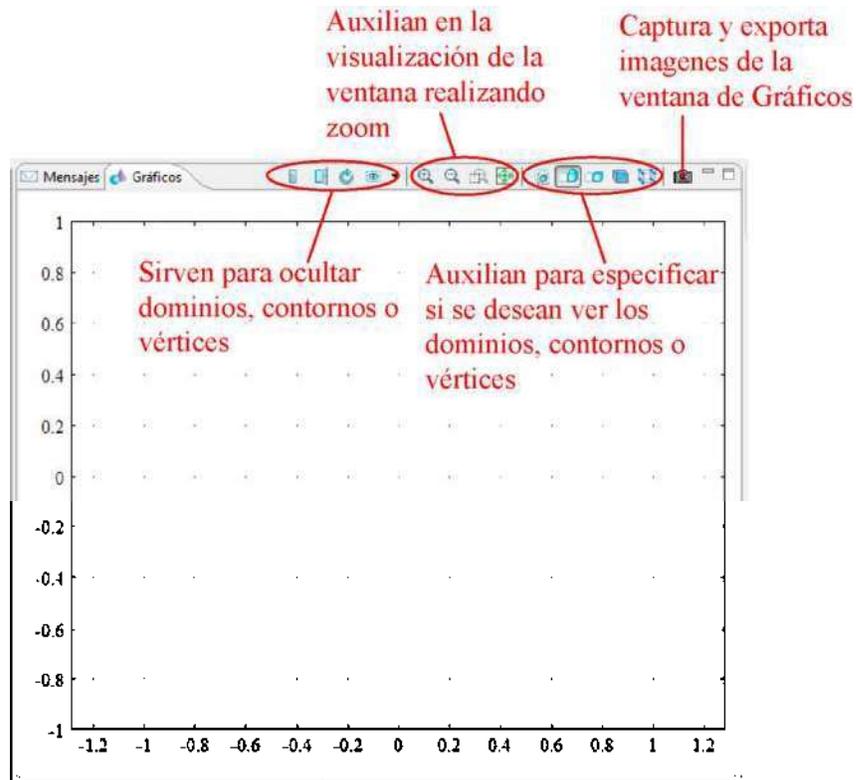


Figura 3.9 Subventana de Gráficos 2D.

En la figura 3.9 puede verse que existen diferentes funciones para personalizar la visualización de los gráficos. Nótese que existen iconos especiales para especificar si se desean ver los dominios, contornos o vértices de la geometría.

Lista de selecciones

Una vez que se ha realizado la geometría, COMSOL automáticamente identifica dominios, contornos y vértices, y los numera de manera automática como se muestra en la figura 3.10. Independientemente de qué se esté visualizando, ya sean dominios, contornos o vértices, la *Lista de selecciones* se actualiza automáticamente y muestra la numeración de dichos elementos en forma de lista, de manera que al seleccionar cualquier número de la lista, éste muestre el dominio, contorno o vértice al que corresponde de color rojo en la pestaña de *Gráficos*, lo que permite su localización fácil y rápida. Más adelante en los casos de estudio se verá que esto facilita principalmente la atribución de dominios en los materiales y en las interfaces físicas.

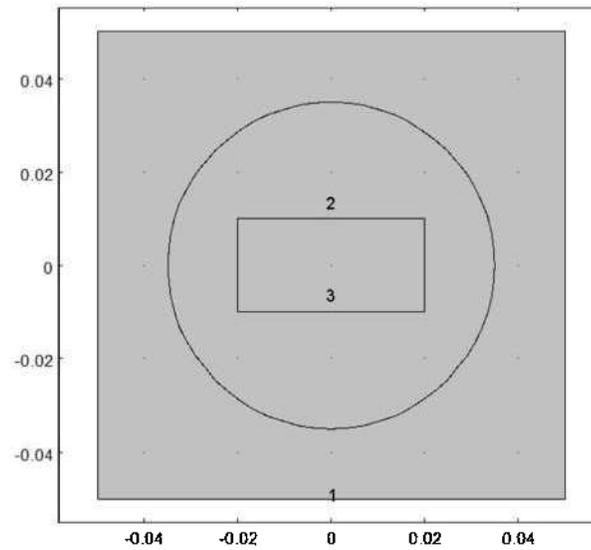


Figura 3.10 Numeración automática de dominios por COMSOL.

La figura 3.11 muestra la *Lista de selecciones* correspondiente a la figura 3.10.

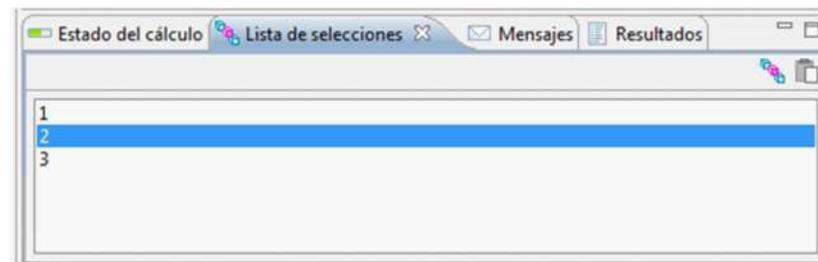


Figura 3.11 Lista de selecciones.

Navegador de materiales

En esta pestaña es posible navegar a través de librerías de materiales predefinidos por COMSOL y agregar dichos materiales al modelo. La figura 3.12 muestra el *Navegador de materiales*.



Figura 3.12 Navegador de materiales.

Estado del cálculo

Una vez que se le indica a COMSOL que realice el cálculo del problema, esta subventana muestra el progreso del cálculo y puede visualizarse dinámicamente en qué parte del cálculo COMSOL se encuentra trabajando. En la figura 3.13 se observa esta pestaña.

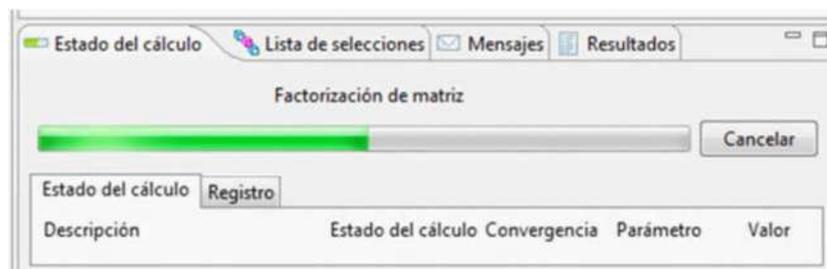
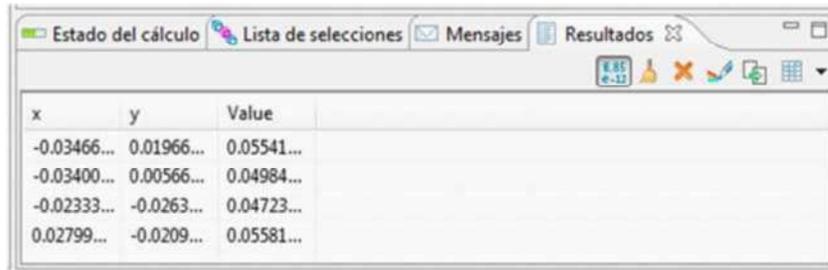


Figura 3.13 Estado del cálculo.

Resultados

Con esta pestaña es posible crear tablas y gráficos 1D de los resultados. La figura 3.14 muestra la pestaña *Resultados*.



x	y	Value
-0.03466...	0.01966...	0.05541...
-0.03400...	0.00566...	0.04984...
-0.02333...	-0.0263...	0.04723...
0.02799...	-0.0209...	0.05581...

Figura 3.14 Pestaña Resultados.

Mensajes

Una vez realizado el cálculo de la solución, esta subventana muestra información acerca del tiempo requerido por COMSOL para la solución de problema, así como los grados de libertad resueltos. Además cuando se realiza la construcción de la malla de elementos, esta pestaña también muestra el número de elementos de la malla. También en esta subventana es posible observar algunos mensajes de error en la secuencia de operaciones del *Constructor del modelo*, lo que ayuda a su rápida detección y futura corrección. La figura 3.15 muestra la pestaña *Mensajes*.

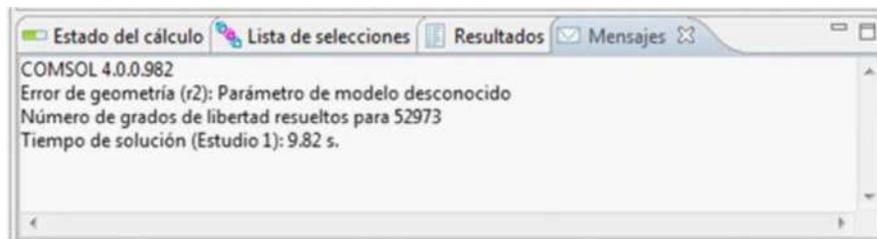


Figura 3.15 Pestaña Mensajes.

Librería de modelos

Esta subventana presenta un archivero de estudios realizados en COMSOL aplicados a diversas áreas de ingeniería. Esta *Librería de modelos* puede servir como referencia a aquellos usuarios con poco conocimiento en el software, de manera que facilite su comprensión, aplicación y uso. En la figura 3.16 se muestra la *Librería de modelos* facilitada por COMSOL.



Figura 3.16 Librería de modelos.

3.2 Estudios magnéticos usando COMSOL

En este apartado se realizarán varios casos de estudio utilizando COMSOL. Se mostrará de una forma más clara la metodología usada por este software para la solución de problemas bidimensionales y se ejemplificará su aplicación específica al cálculo de campos magnéticos en máquinas eléctricas.

3.2.1 Aplicación de COMSOL al estudio de un circuito magnético

En esta parte se aplicará COMSOL en la solución del ejemplo ilustrativo mostrado en el capítulo dos, el cual consiste de un conductor de cobre inmerso en un circuito magnético formado por aire y pequeños materiales ferromagnéticos, tal y como se muestra en la figura 2.6. Se explicarán con detalle los pasos realizados en COMSOL para la aplicación del mismo a dicho estudio, y se visualizarán y analizarán los resultados.

Como ya se mencionó anteriormente, el primer paso en COMSOL para realizar el modelado del problema es especificar en el *Asistente del modelo* el espacio dimensional del estudio, tal y como se muestra en la figura 3.17.

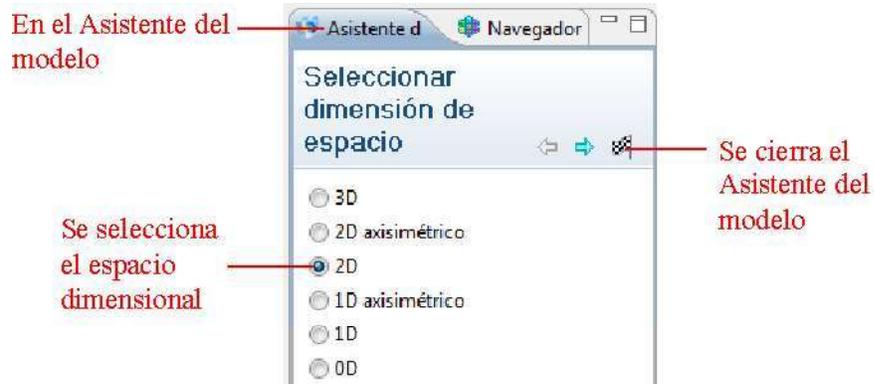


Figura 3.17 Selección del espacio dimensional.

Nótese en la figura 3.17 que para el ejemplo ilustrativo se elige un espacio dimensional 2D. Con el cierre del *Asistente de Modelo* se selecciona el espacio dimensional elegido y se abre la pestaña de *Ajustes*, tal y como se muestra en la figura 3.18, donde se ilustra una metodología para agregar las interfaces físicas al modelo, el grado de interpolación de los elementos y el sistema a unidades a emplear. En este caso se eligió el SI como sistema de unidades e interpolación lineal, con el fin de comparar la solución con los resultados obtenidos en el capítulo dos.

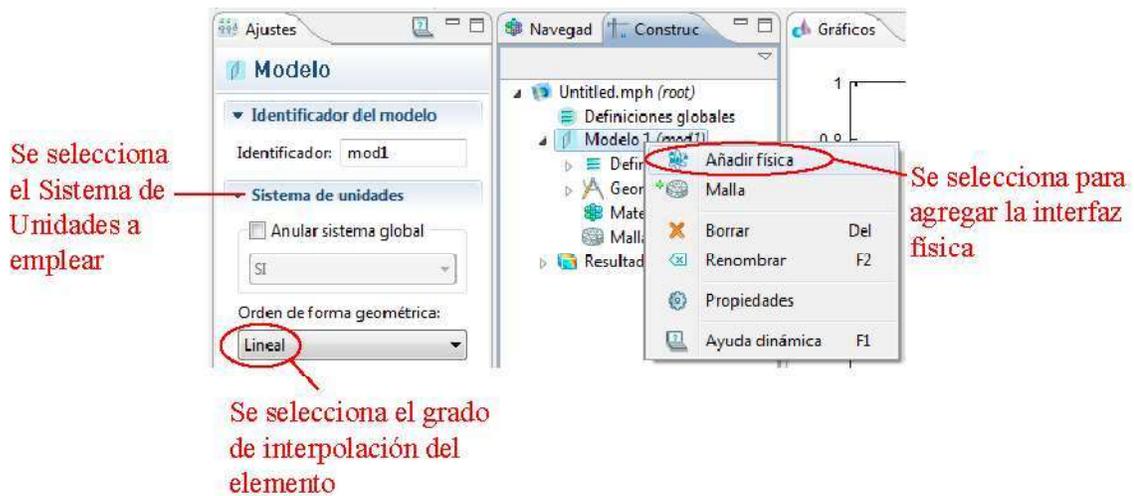


Figura 3.18 Procedimiento para agregar una interfaz física.

Para el estudio de campos magnéticos generados por corrientes eléctricas externas, se requiere la interfaz física de *Campos magnéticos* contenida en el modulo *CA/CC*. Si se selecciona *Añadir física* en la figura 3.18, aparece nuevamente el *Asistente de modelo* y se

cierra temporalmente la pestaña de *Ajustes*, tal y como se muestra en la figura 3.19, la cual muestra a su vez la metodología usada para agregar la interfaz de *Campos magnéticos* al modelo.



Figura 3.19 Procedimiento para agregar una interfaz de Campos magnéticos.

El siguiente paso consiste en especificar el tipo de estudio o estudios que se desean realizar al modelo. En el caso del ejemplo ilustrativo, se requiere un estudio en estado estable o estacionario. La figura 3.20 muestra como agregar un estudio al modelo.

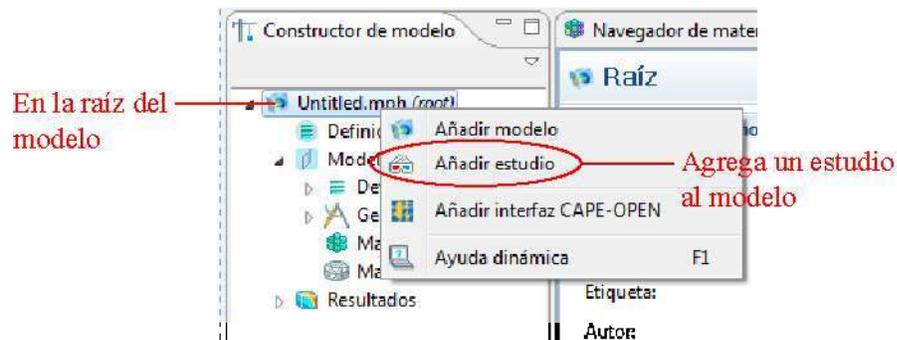


Figura 3.20 Metodología para agregar un estudio al modelo.

Si se selecciona *Añadir estudio* en la figura 3.20 se abre nuevamente el Asistente de modelo, tal y como se muestra en la figura 3.21, donde se ilustra como agregar un estudio *Estacionario* al modelo.

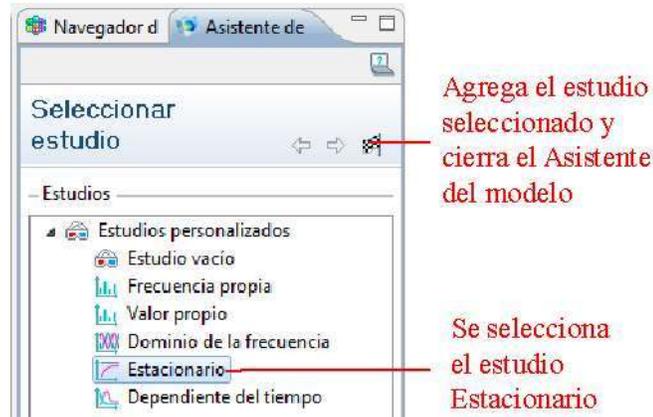


Figura 3.21 Metodología para agregar un estudio Estacionario al modelo.

Ya se agregaron los estudios e interfaces físicas requeridos para el modelado del problema. Ahora se procederá a realizar la geometría del estudio compuesta por el conductor, el aire y los materiales ferromagnéticos.

COMSOL da la facilidad de poder declarar parámetros globales, es decir, variables con valores fijos que pueden ser usados en cualquier parte dentro de la secuencia de operaciones. Esto facilita el uso de cualquier parámetro por medio de su variable sin tener que especificar su valor numérico directamente.

Los parámetros dentro del estudio de máquinas eléctricas generalmente describen condiciones de operación constantes, ya sean eléctricas, magnéticas o geométricas. La declaración de parámetros permite que COMSOL realice estudios en diferentes condiciones de operación sin tener que hacer grandes cambios en el modelado del problema, ya que un ajuste en el valor del parámetro correspondiente y una nueva corrida de la secuencia de operaciones suelen ser suficientes para la visualización de los nuevos resultados.

La figura 3.22 ilustra la manera de definir *Parámetros* globales en COMSOL.

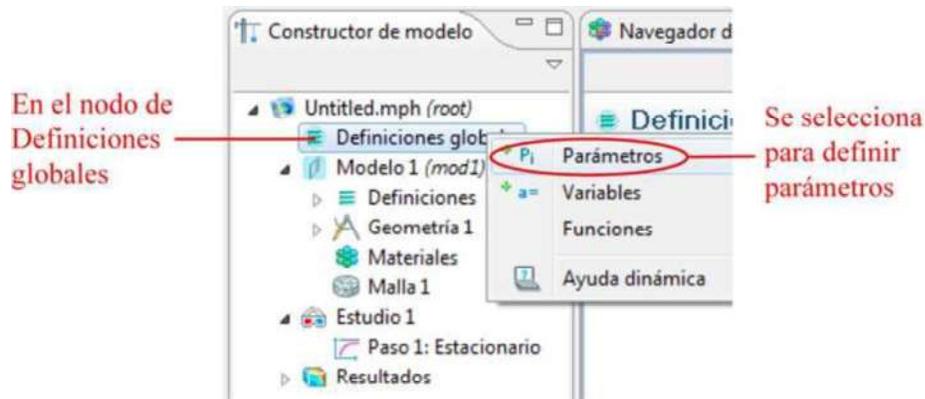


Figura 3.22 Creación de un nodo de Parámetros globales.

La figura 3.23 muestra los *Parámetros* declarados para el estudio del ejemplo ilustrativo, que en este caso representan únicamente condiciones geométricas.

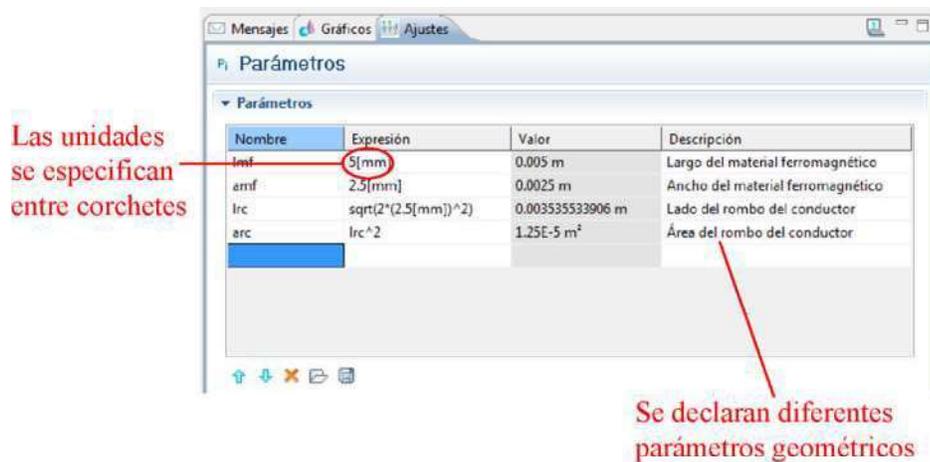


Figura 3.23 Declaración de Parámetros con su valor numérico.

El siguiente paso es construir la geometría del problema que incluya y defina al conductor, los materiales ferromagnéticos, el espacio que representa el aire y el contorno que especifica las condiciones frontera. La figura 3.24 ilustra la metodología para crear el *Cuadrado* que auxilia para definir dichas condiciones frontera.

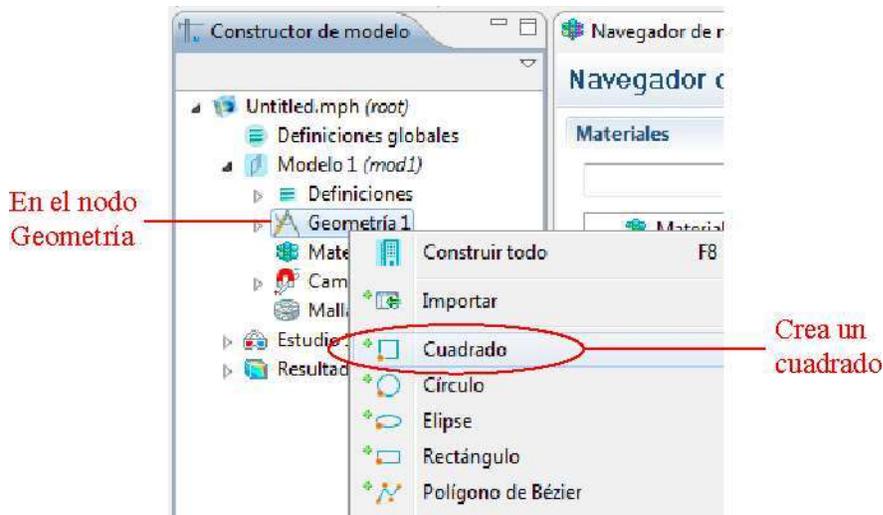


Figura 3.24 Creación del Cuadrado que define las condiciones frontera.

Si se selecciona el icono que crea cuadrados de la figura 3.24, la pestaña de *Ajustes* se actualiza automáticamente mostrando especificaciones del nodo *Cuadrado* recientemente creado. En esta subventana se especifican las dimensiones del *Cuadrado* y su localización dentro del plano *xy*, tal y como se muestra en la figura 3.25.

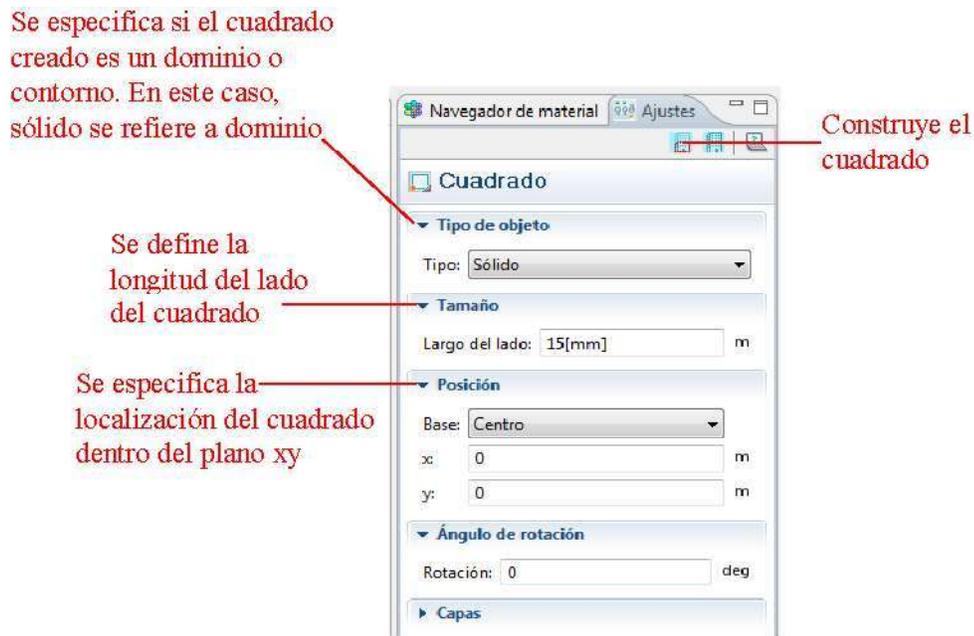


Figura 3.25 Pestaña de Ajustes del Cuadrado que auxilia en la especificación de las condiciones frontera.

Cuando se selecciona el icono que construye el cuadrado de la figura 3.25, éste automáticamente se crea y puede visualizarse de forma automática en la subventana de Gráficos. De la misma manera se genera el rombo que representa al conductor, el cual puede verse como un *Cuadrado* girado 45 grados. Las especificaciones de este *Cuadrado* se muestran en la figura 3.26.

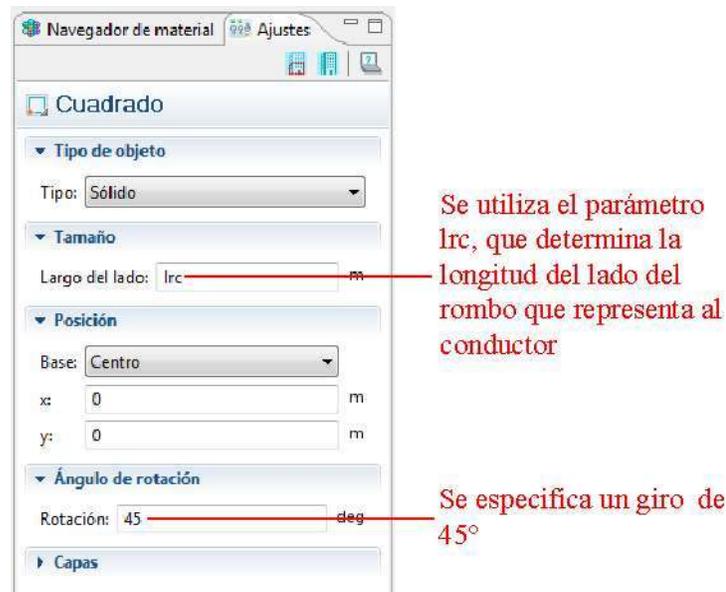


Figura 3.26 Pestaña de Ajustes del Cuadrado que representa al conductor.

La figura 3.27 muestra como generar uno de los materiales ferromagnéticos en la geometría, el cual es creado mediante un *Rectángulo*.

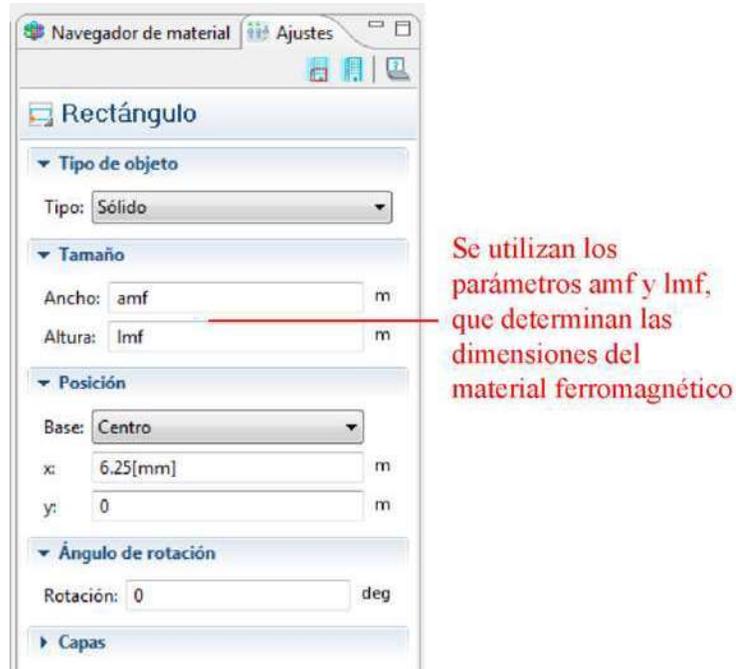


Figura 3.27 Pestaña de Ajustes del Rectángulo que representa un material ferromagnético.

El segundo material ferromagnético se construye de la misma forma que el anterior, nótese que solo cambia su ubicación dentro del plano xy . Con esto se termina la construcción geométrica del problema. Finalmente para terminar con la geometría se selecciona el nodo *Formar unión* dentro del *Constructor de Modelo* y se da clic en el icono *construir seleccionado* en la ventana de Ajustes, tal y como se muestra en la figura 3.28. Con esto COMSOL identifica dominios, contornos y vértices y los numere de forma automática

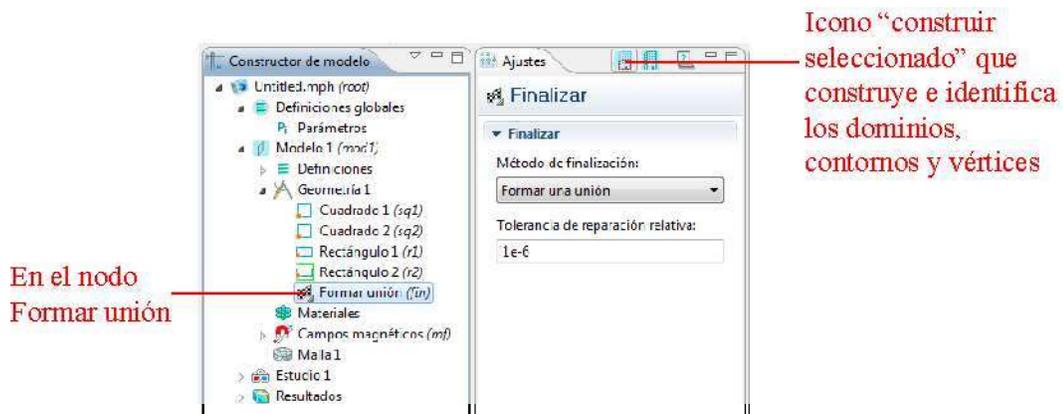


Figura 3.28 Instrucción dada a COMSOL para que identifique dominios, contornos y vértices.

En la figura 3.29 se ilustra la geometría creada para este estudio y la numeración dada por COMSOL a cada dominio.

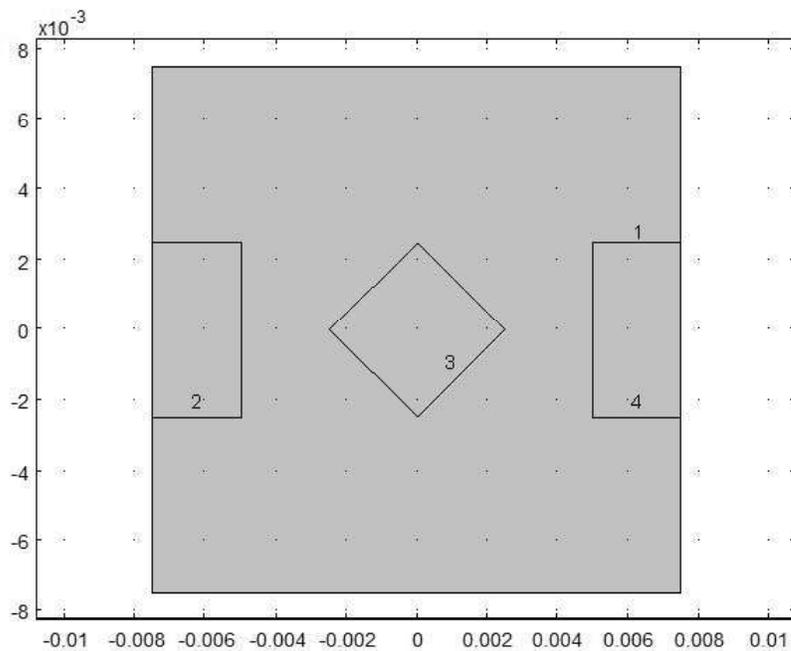


Figura 3.29 Geometría creada en COMSOL para el ejemplo ilustrativo, m.

El siguiente paso consiste en agregar los materiales al modelo y atribuirlos a los dominios correspondientes dentro de la geometría. En este caso, para el estudio del ejemplo ilustrativo, se requiere cobre para el conductor, hierro para los materiales ferromagnéticos y aire para el resto de la geometría. En la figura 3.30 se muestra la metodología usada para agregar dichos materiales al modelo, utilizando el *Navegador de materiales* y ejemplificando el procedimiento con el material cobre.

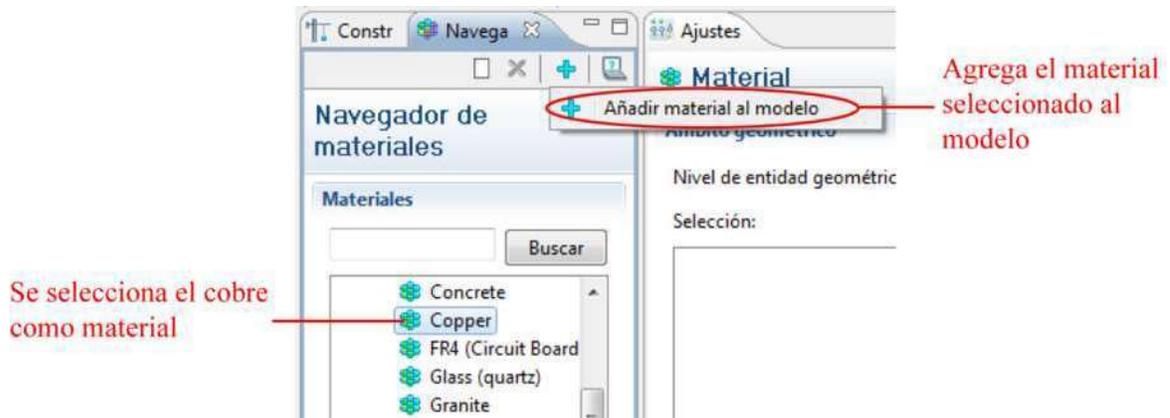


Figura 3.30 Procedimiento para agregar el material cobre al modelo.

Al seleccionar *Añadir material al modelo* de la figura 3.30 se agrega el material cobre al modelo. Este mismo procedimiento debe ser utilizado para agregar los materiales hierro y aire. La figura 3.31 muestra los tres materiales agregados al modelo.

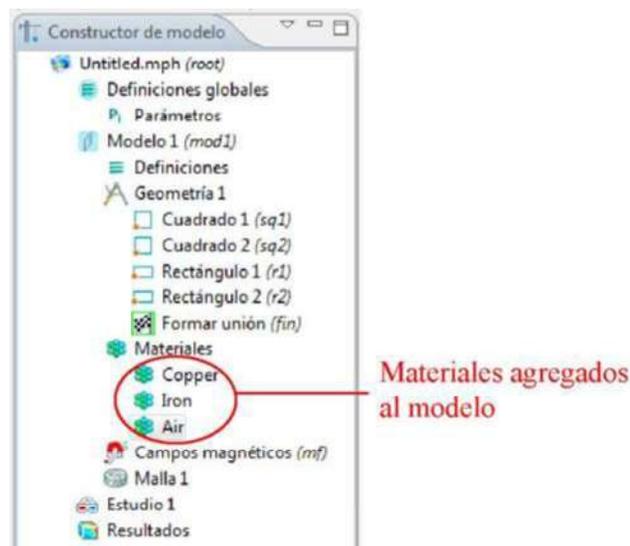


Figura 3.31 Materiales agregados al modelo.

Una vez que se han agregado los materiales al modelo es necesario atribuirlos dentro de la geometría del modelo. Si se selecciona el nodo *Copper* dentro del constructor de modelo, la pestaña de *Ajustes* se actualiza y muestra lo que se ilustra en la figura 3.32.

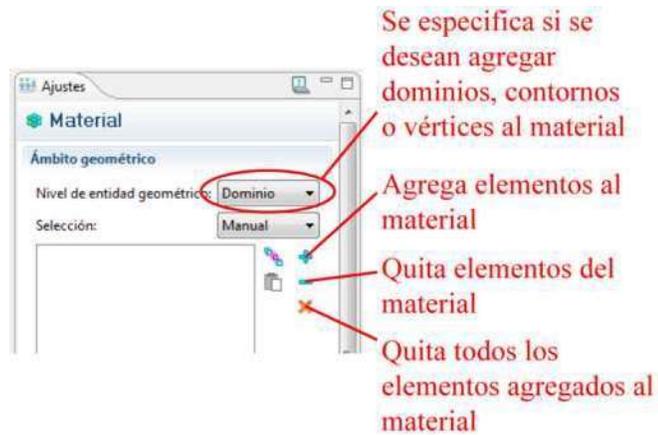


Figura 3.32 Pestaña de Ajustes del material cobre.

La atribución del material a los dominios correspondientes se da seleccionando los elementos, ya sea en la lista de selecciones o directamente en la subventana de *Gráficos*, y posteriormente dando clic en el icono que agrega los elementos al material de la figura 3.32, tal y como se muestra en la figura 3.33.

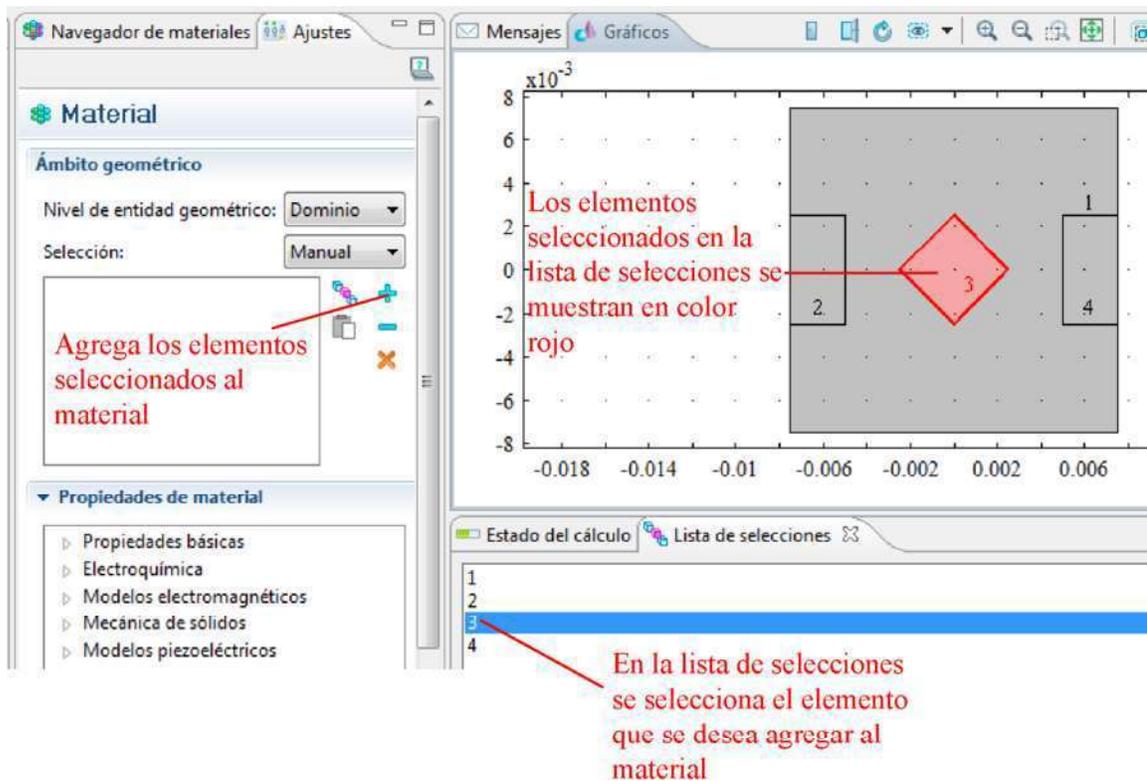


Figura 3.33 Atribución de dominios para el material cobre.

En este caso, en la figura 3.33 se asignó el material cobre al dominio del conductor, tal y como se demuestra en la figura 3.34.

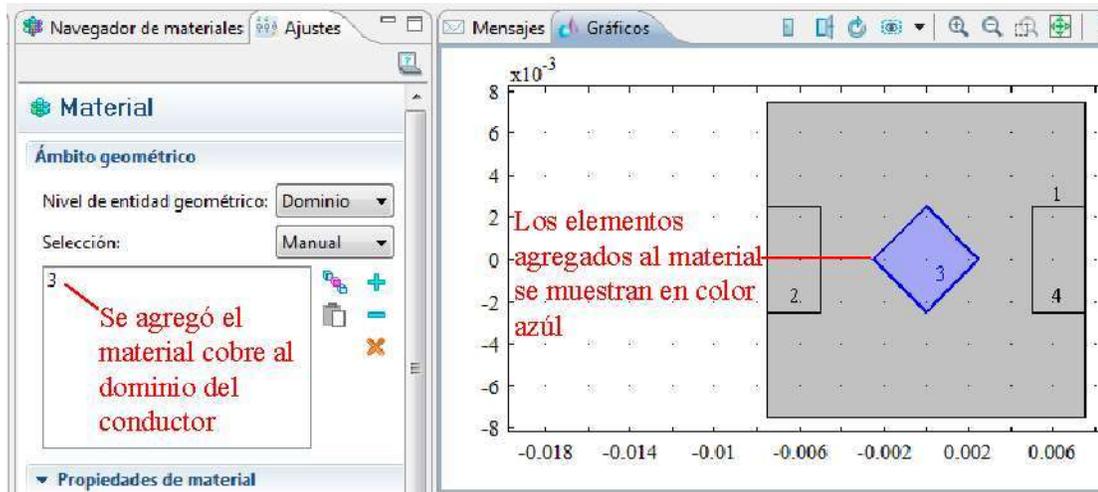


Figura 3.34 Dominio agregado al material cobre.

De igual forma se agrega el material Aire al dominio 1, que representa al aire que rodea al conductor, y hierro a los dominios 2 y 4, los cuales describen a los materiales ferromagnéticos.

El paso siguiente es utilizar y aplicar la interfaz de *Campos magnéticos* al estudio. Como se sabe, las ecuaciones de Maxwell describen y relacionan los campos magnéticos y eléctricos. La interfaz de *Campos Magnéticos* provee las herramientas suficientes para el modelado de problemas con campos magnéticos creados por corrientes eléctricas externas. Esta interfaz, al aplicar la Ley de Ampere, define la solución para el vector de potencial magnético en los dominios especificados. Como se sabe, el conocer la distribución de potencial magnético facilita de manera directa la obtención de otras variables magnéticas, como lo son la densidad de flujo o la intensidad de campo magnético. En las figuras 3.35 y 3.36 se ilustra algo de lo mostrado en la pestaña de *Ajustes* al seleccionar el nodo de *Campos Magnéticos* creado con anterioridad. Puede verse que es necesario especificar los dominios en los cuales se desea aproximar el vector de potencial magnético, el cual representa la variable solución del estudio, tal y como se muestra en dichas figuras.

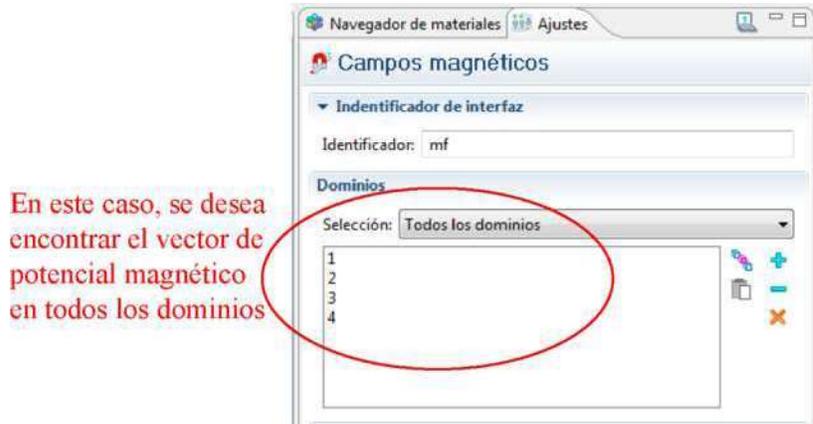


Figura 3.35 Dominios especificados en los cuales se desea aproximar el vector de potencial magnético y aplicar la ley de Ampere.



Figura 3.36 Variable dependiente de la interfaz de Campos magnéticos, el vector de potencial magnético A .

Las ramas o subnodos predefinidos por COMSOL para la interfaz de *Campos magnéticos* se ilustran en la figura 3.37.

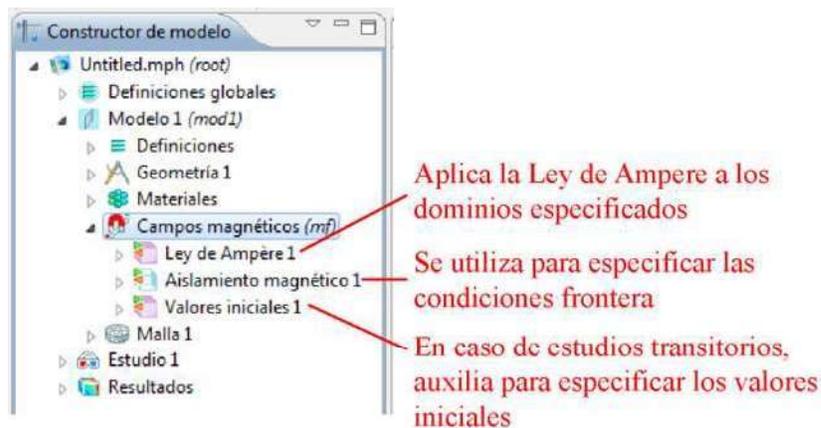


Figura 3.37 Subnodos predefinidos para la interfaz de Campos magnéticos.

El nodo de *Aislamiento magnético* sirve para especificar las condiciones frontera con potencial magnético igual a cero. Al seleccionar dicho nodo, la ventana de *Ajustes* muestra lo ilustrado en la figura 3.38. Puede verse que el *Aislamiento magnético* es una propiedad que se aplica únicamente sobre contornos, y que COMSOL la atribuye automáticamente a aquellos contornos que limitan la geometría, es decir, los más externos en la geometría. Con esto se cumplen e igualan las condiciones frontera especificadas en el ejemplo ilustrativo del capítulo dos.



Figura 3.38 Lista de contornos atribuidos con la propiedad de Aislamiento magnético.

La figura 3.39 muestra gráficamente los contornos atribuidos con la propiedad de *Aislamiento magnético*, los cuales pueden verse en la subventana de *Gráficos* al seleccionar el nodo de *Aislamiento magnético*.

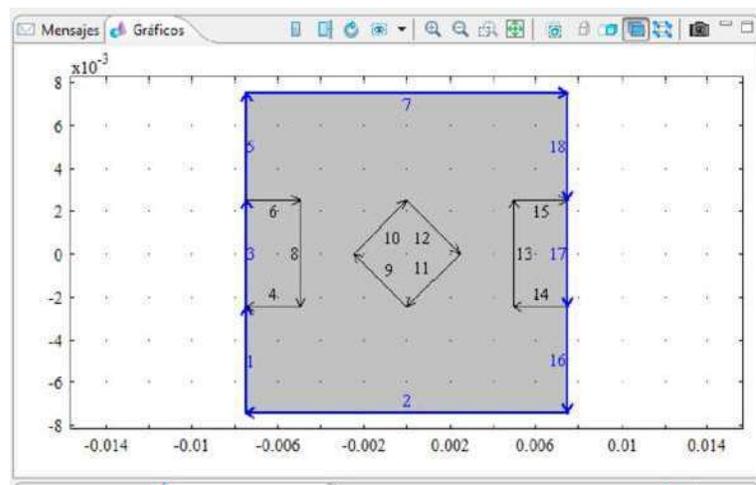


Figura 3.39 Contornos atribuidos con la propiedad de Aislamiento magnético.

Si se abre el submenú del nodo *Campos magnéticos* aparecen varias aplicaciones y subnodos específicos para el estudio de campos magnéticos, tal y como se muestra en la figura 3.40, donde se muestra como agregar un nodo que incluye en el modelo una *Densidad de corriente externa*, que sirve para simular la corriente eléctrica que atraviesa la sección transversal del conductor.

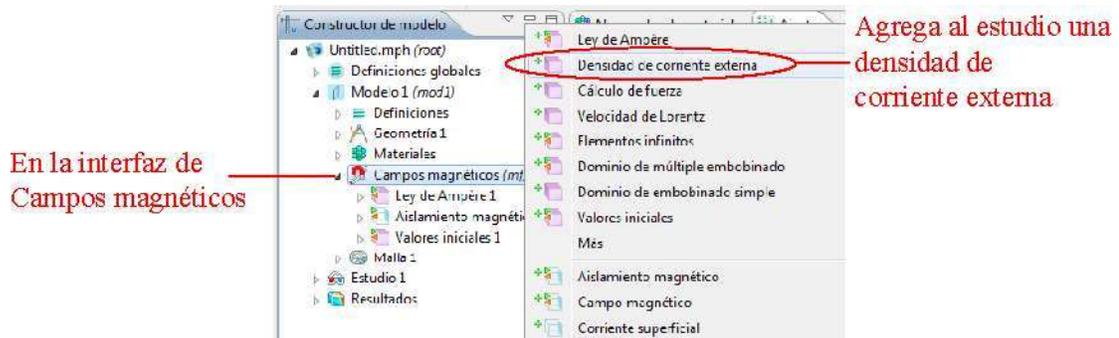


Figura 3.40 Procedimiento para agregar un nodo de Densidad de corriente externa.

En la figura 3.41 se muestra el nuevo nodo *Densidad de corriente externa* y su correspondiente subventana de *Ajustes*, en la cual debe especificarse el dominio que atraviesa la densidad de corriente y su valor en forma de vector y especificado en base a sus componentes tridimensionales, tal y como se muestra en la figura 3.41, donde por obvias razones solo se especifica una componente en el eje z con valor positivo, que indica una corriente saliente de la página. Nótese que para obtener la densidad de corriente se dividió I A , que es la corriente que conduce el conductor, entre el área del conductor arc declarada como parámetro global.

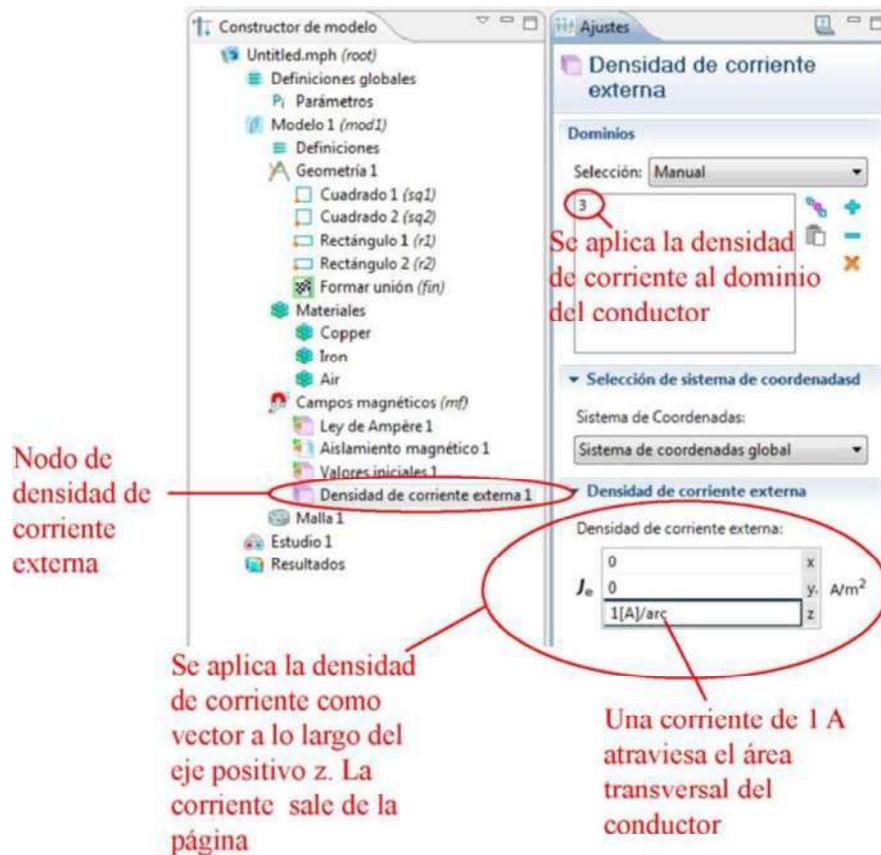


Figura 3.41 Nodo de Densidad de corriente externa y su pestaña de Ajustes.

El último paso para poder resolver el estudio es construir la malla de elementos finitos. En la figura 3.42 se muestra el nodo *Malla* y su correspondiente subnodo predefinido por COMSOL llamado *Tamaño*, que es donde precisamente se indica el tamaño de los elementos, tal y como se ilustra en dicha figura.



Figura 3.42 Subnodos predefinidos por COMSOL para el nodo Malla.

El tipo de elemento se especifica en el submenú del nodo *Malla*, tal y como se muestra en la figura 3.43, donde se eligen los elementos triangulares estudiados en el capítulo dos.

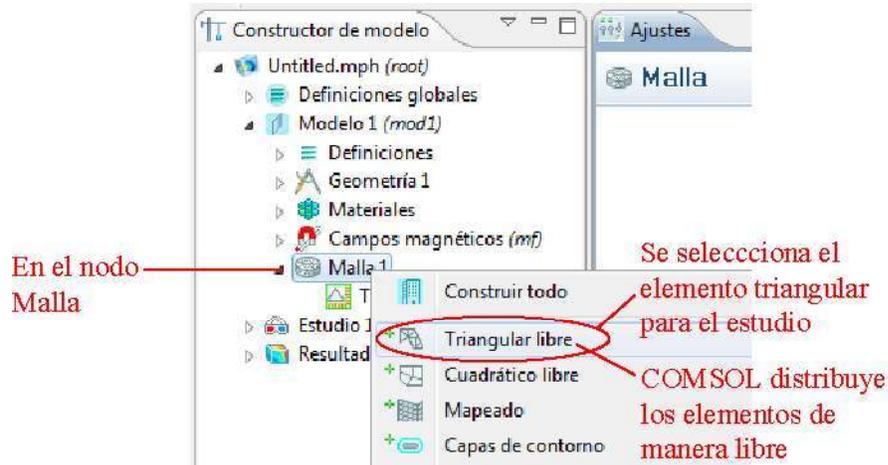


Figura 3.43 Procedimiento para agregar una malla elemental con elementos triangulares.

Si se seleccionan los elementos triangulares de la figura 3.43, se crea un nuevo subnodo del nodo *Malla* llamado *Triangular Libre*. En la subventana de *Ajustes* del nodo *Triangular libre*, deben especificarse los dominios en los cuales se desea incorporar los elementos triangulares, en este caso y con el objetivo de comparar resultados con la solución del ejemplo resuelto en el capítulo dos, dichos elementos abarcarán la geometría entera del modelo, tal y como se ilustra en la figura 3.44.

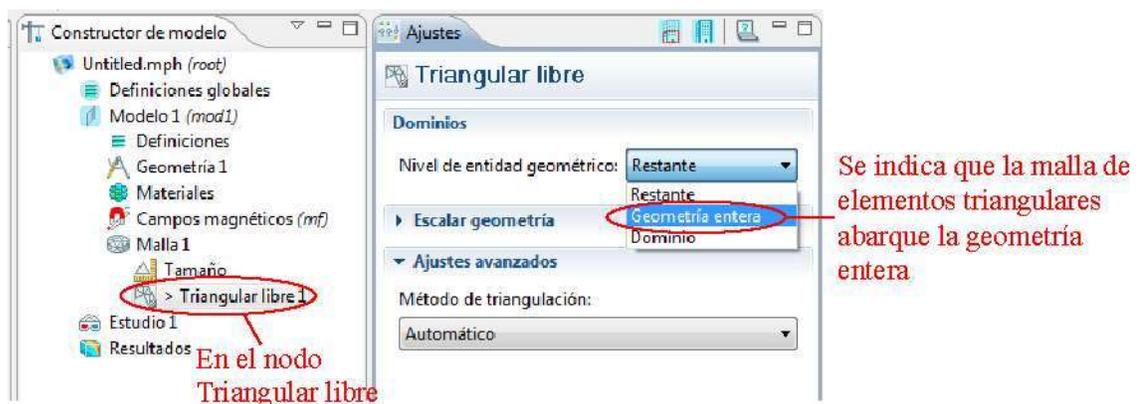


Figura 3.44 El nodo Triangular libre y su ventana de Ajustes.

Finalmente debe de construirse la malla de elementos finitos. Esta acción se realiza en el submenú del nodo *Malla*, tal y como se muestra en la figura 3.45.

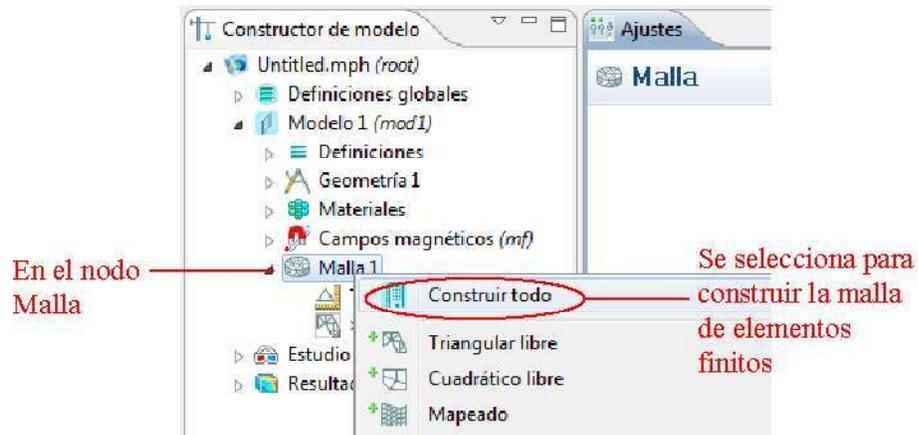


Figura 3.45 Procedimiento para construir la malla de elementos finitos.

En la figura 3.46 se muestra la malla de elementos finitos generada para el estudio.

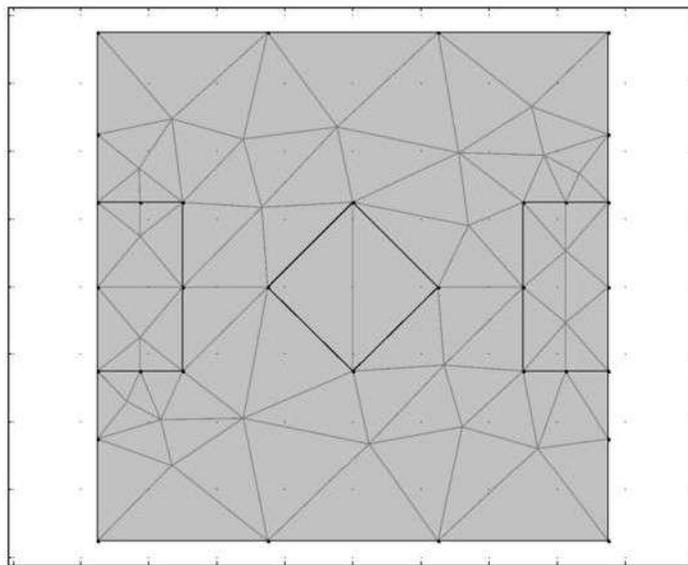


Figura 3.46 Malla de elementos finitos inicial para el ejemplo ilustrativo.

Como se ha mencionado, la exactitud de la solución por elementos finitos depende del número de elementos. En este caso, se incluirán más elementos en el dominio del conductor para aproximar una mejor solución dentro del mismo. La figura 3.47 ilustra como agregar al modelo un nodo *Refinar*.

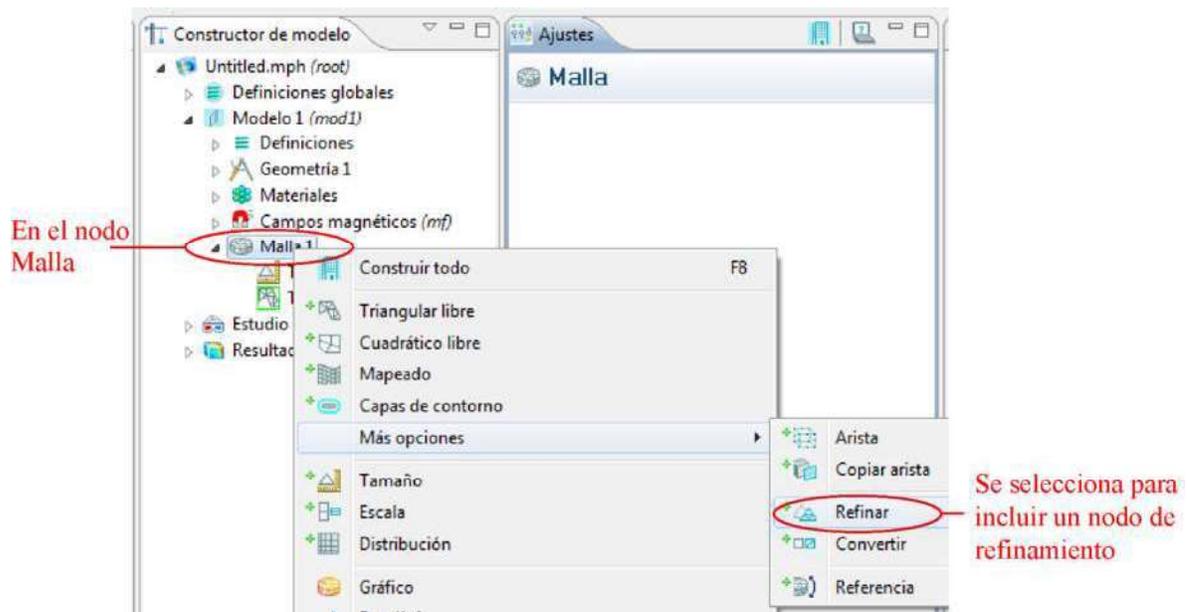


Figura 3.47 Procedimiento para agregar un nodo Refinar.

La figura 3.48 muestra las características del refinamiento y el procedimiento para construir la nueva malla de elementos finitos.

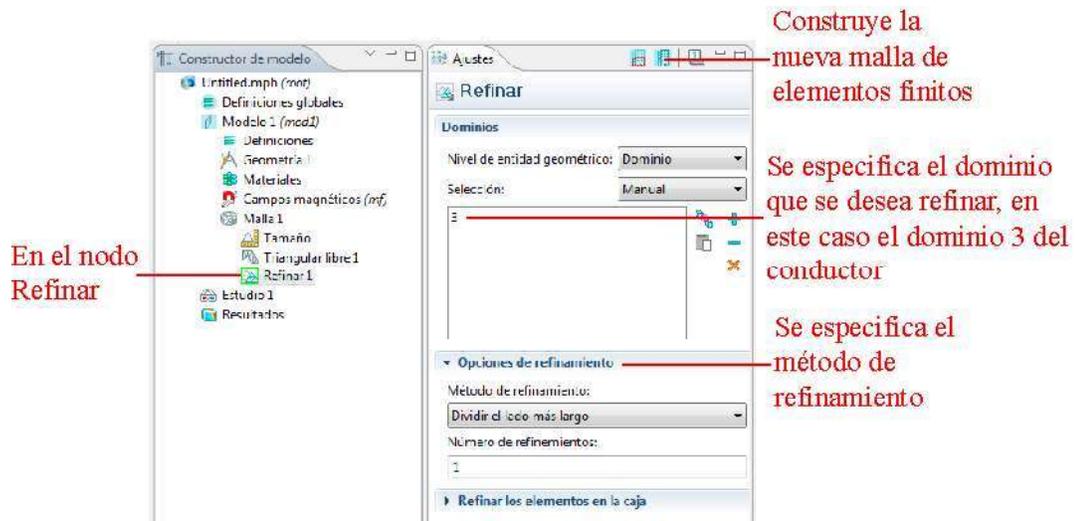


Figura 3.48 El nodo Refinar y su ventana de Ajustes.

La figura 3.49 muestra la nueva malla de elementos finitos generada para el estudio con un mayor número de elementos para el dominio del conductor.

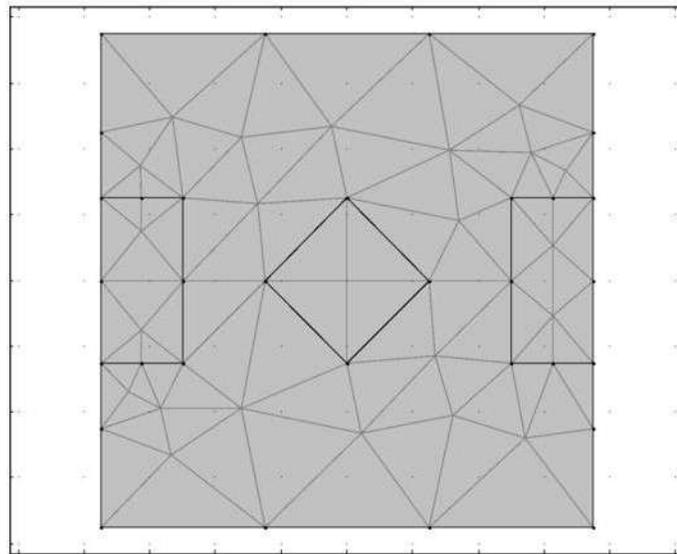


Figura 3.49 Malla de elementos finitos final para el ejemplo ilustrativo.

Puede verse que con la generación de la malla elemental se finaliza el modelado del problema. Ya se tiene la geometría, los materiales, la densidad de corriente y la malla

elemental, ahora solo falta indicarle a COMSOL que aproxime la solución del estudio. La figura 3.50 muestra el procedimiento para especificarle a COMSOL que calcule la solución, utilizando el nodo *Estudio* y su aplicación llamada *Calcular*.

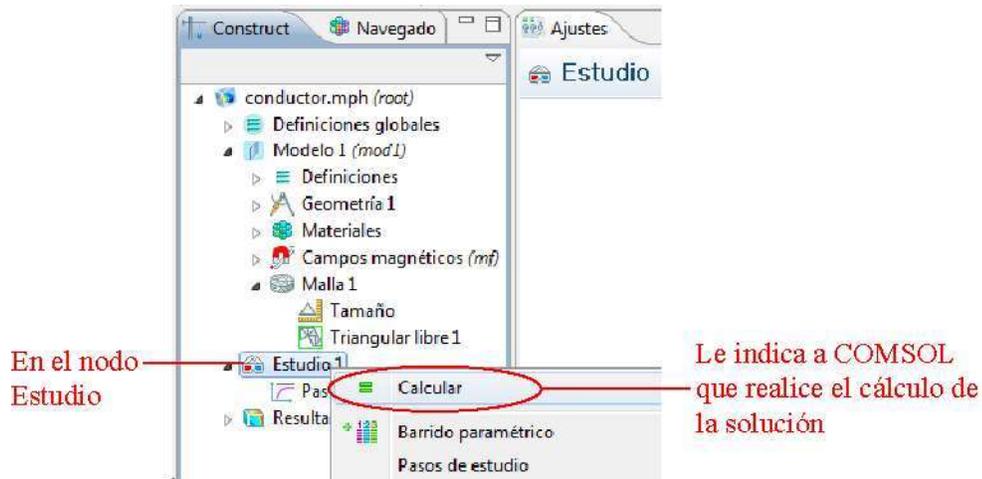


Figura 3.50 Procedimiento para calcular la solución del ejemplo ilustrativo en COMSOL.

Una vez que se ha realizado el cálculo de la solución, COMSOL genera por default un gráfico que muestra los resultados de alguna de las variables más representativas derivadas de la solución. En el caso de la interfaz de *Campos magnéticos*, COMSOL presenta un gráfico de superficie con la densidad de flujo magnético resultante del estudio, tal y como se muestra en la figura 3.51.

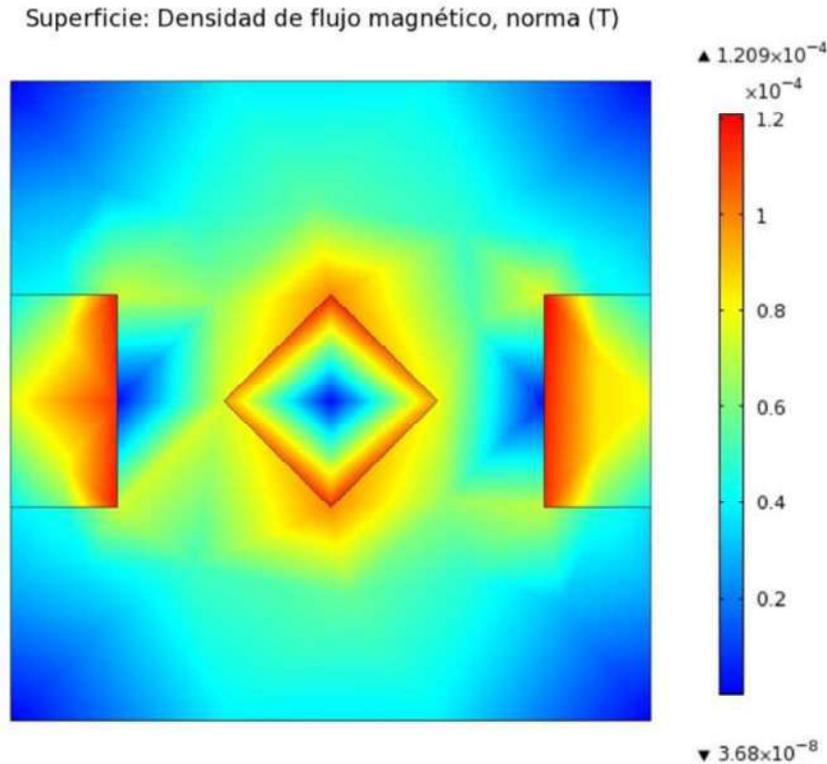


Figura 3.51 Densidad de flujo magnético B , Teslas. Ejemplo ilustrativo.

En la figura 3.51 puede verse que los resultados son mostrados en base a una escala de colores, es decir, cada color representa un valor específico en la solución, el cual está determinado por la barra de colores situada en la parte derecha de la figura. Nótese que la densidad de flujo con valores mayores se encuentra en la periferia cercana al conductor y en la parte interna de los materiales ferromagnéticos, los cuales por su menor reluctancia, tienden a “atraer” las líneas de flujo y a guardarlas en su interior, tal y como se ilustra en la figura 3.52, que muestra líneas equipotenciales del vector de potencial magnético resultantes del estudio, las cuales simulan líneas de flujo y ejemplifican de una mejor forma la distribución del campo magnético.

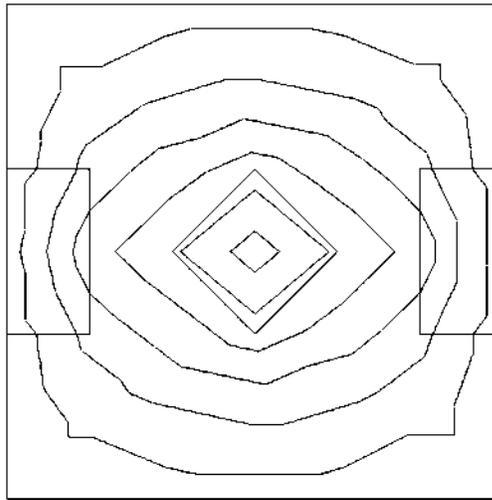


Figura 3.52 Líneas de flujo magnético. Ejemplo ilustrativo.

En la figura 3.52 puede verse que los resultados obtenidos en COMSOL son muy similares a los obtenidos en el capítulo dos (figura 2.11). La tabla 3.1 muestra la comparación entre ambos resultados, nótese que la tabla solo compara la solución en los 12 nodos globales considerados en el capítulo dos.

Tabla 3.1 Resultados obtenidos en el capítulo dos y en COMSOL. Ejemplo ilustrativo.

Nodo global	Solución capítulo dos, Wb/m	COMSOL, Wb/m
S_1	0	0
S_2	0	0
S_3	0	0
S_4	0	0
S_5	2.515863×10^{-7}	2.858375×10^{-7}
S_6	1.829978×10^{-7}	2.132070×10^{-7}
S_7	1.064839×10^{-7}	1.312281×10^{-7}
S_8	0	0
S_9	3.737053×10^{-7}	4.296174×10^{-7}
S_{10}	2.863847×10^{-7}	3.094685×10^{-7}
S_{11}	1.963986×10^{-7}	2.245661×10^{-7}
S_{12}	0	0

En la tabla 3.1 puede verse que los resultados obtenidos en el capítulo dos y en COMSOL son muy cercanos entre sí. La pequeña diferencia entre soluciones se debe a que se consideró una malla de elementos finitos diferente para cada caso. En el caso del capítulo dos se construyó una malla atípica con pocos elementos, mientras que en el caso de COMSOL se consideró una malla mejor distribuida con cerca del doble de elementos. Se conoce que el número de elementos impacta directamente en la exactitud de la solución, por lo que los resultados de COMSOL presentan mayor exactitud respecto a los obtenidos en el capítulo dos.

La tabla 3.2 muestra una segunda solución obtenida en COMSOL considerando una malla de elementos todavía más fina.

Tabla 3.2 Resultados obtenidos en COMSOL con una malla elemental más fina. Ejemplo ilustrativo.

Nodo global	Solución capítulo dos, Wb/m	COMSOL, Wb/m	COMSOL con refinamiento, Wb/m
S_1	0	0	0
S_2	0	0	0
S_3	0	0	0
S_4	0	0	0
S_5	2.515863×10^{-7}	2.858321×10^{-7}	2.858354×10^{-7}
S_6	1.829978×10^{-7}	2.132070×10^{-7}	2.203733×10^{-7}
S_7	1.064839×10^{-7}	1.312259×10^{-7}	1.312317×10^{-7}
S_8	0	0	0
S_9	3.737053×10^{-7}	4.296174×10^{-7}	4.296193×10^{-7}
S_{10}	2.863847×10^{-7}	3.094685×10^{-7}	3.094689×10^{-7}
S_{11}	1.963986×10^{-7}	2.245631×10^{-7}	2.245688×10^{-7}
S_{12}	0	0	

Nótese en la tabla anterior que pareciera no existir gran diferencia entre la primera solución de COMSOL y la segunda solución con refinamiento. Sin embargo, nótese en la figura 3.53 que si existe diferencia, en el segundo caso las líneas de flujo magnético se encuentran más definidas respecto a la primera solución (figura 3.52). Por lo que puede concluirse que, en el proceso de aumento de elementos, se llega un momento en el cual la única ventaja de seguir incrementando los elementos es obtener soluciones en un mayor número de puntos, evitando el tener que aproximar soluciones mediante interpolación lineal, interpolación que regularmente representa la más inexacta de todas.

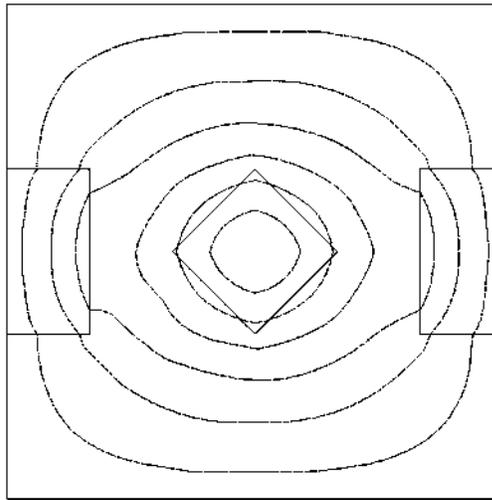


Figura 3.53 Líneas de flujo magnético con una malla elemental más fina. Ejemplo ilustrativo.

La figura 3.54 muestra otra alternativa para presentar los resultados obtenidos con la malla de elementos más fina. Nótese que ahora se graficaron un mayor número de líneas de flujo magnético, así como un mejor contraste de colores que permite visualizar a su vez la densidad de flujo magnético resultante del estudio.

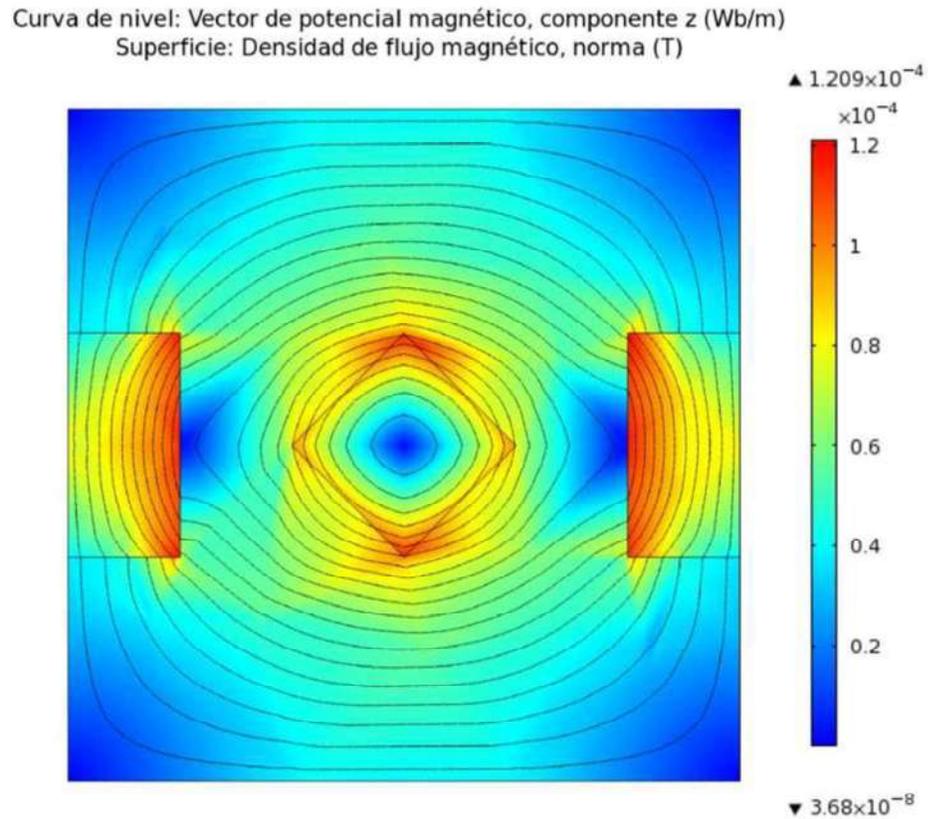


Figura 3.54 Densidad de flujo magnético B , Teslas. Líneas de flujo magnético. Ejemplo ilustrativo.

3.2.2 Campo magnético en un conductor eléctrico

En esta sección se estudia el campo magnético generado por un conductor eléctrico que conduce una corriente eléctrica de 10 A. La figura 3.55 ilustra la solución obtenida usando COMSOL.

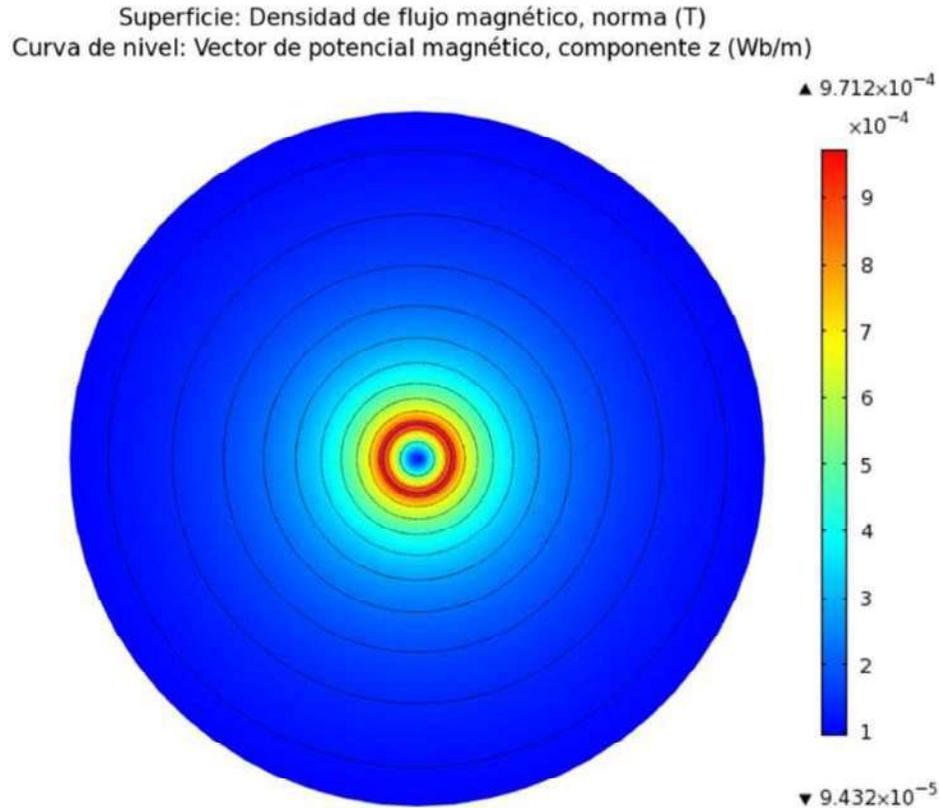


Figura 3.55 Densidad de flujo magnético B , Teslas. Líneas de flujo magnético. Conductor eléctrico.

Como era de suponerse, la figura 3.55 muestra que la densidad de flujo magnético es más intensa en la periferia cercana al conductor y disminuye conforme se aleja del mismo. Cabe señalar que también se ilustra la densidad de flujo magnético interna en el conductor, la cual no es muy difundida o estudiada, sin embargo, concuerda con la teoría de máquinas eléctricas, la cual explica que el campo magnético interno, contrariamente a lo que pasa con el externo, es más intenso en la periferia del conductor y se reduce conforme se acerca al centro del conductor, lugar en el que la densidad de flujo magnético es cero.

La figura 3.56 ilustra la dirección de flujo magnético en forma de campo vectorial, con lo que se ratifica la regla de la mano derecha, que describe la dirección del campo magnético generado por una corriente eléctrica. En este caso, la corriente sale de la página, por lo que la dirección del campo concuerda con dicha teoría, la cual es ampliamente conocida y difundida en el campo del electromagnetismo.

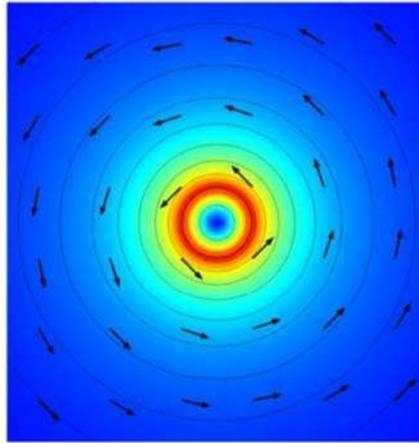


Figura 3.56 Dirección de flujo magnético. Conductor eléctrico.

3.2.3 Campo magnético entre dos conductores paralelos

En este apartado se estudiará la interacción entre los campos magnéticos generados por dos conductores idénticos y paralelos entre sí. Se realizarán dos casos de estudio, el primer caso se presenta cuando los dos conductores conducen una corriente eléctrica de 10 A pero con sentido opuesto. La figura 3.57 muestra el campo generado en este primer caso, el conductor de la izquierda conduce una corriente que sale de la página y el de la derecha una que entra. Puede verse que los resultados concuerdan con los conceptos básicos de electromagnetismo. En este caso, la regla de la mano derecha obliga que los campos magnéticos se sumen en la región existente entre conductores, generando un campo magnético intenso en esta región.

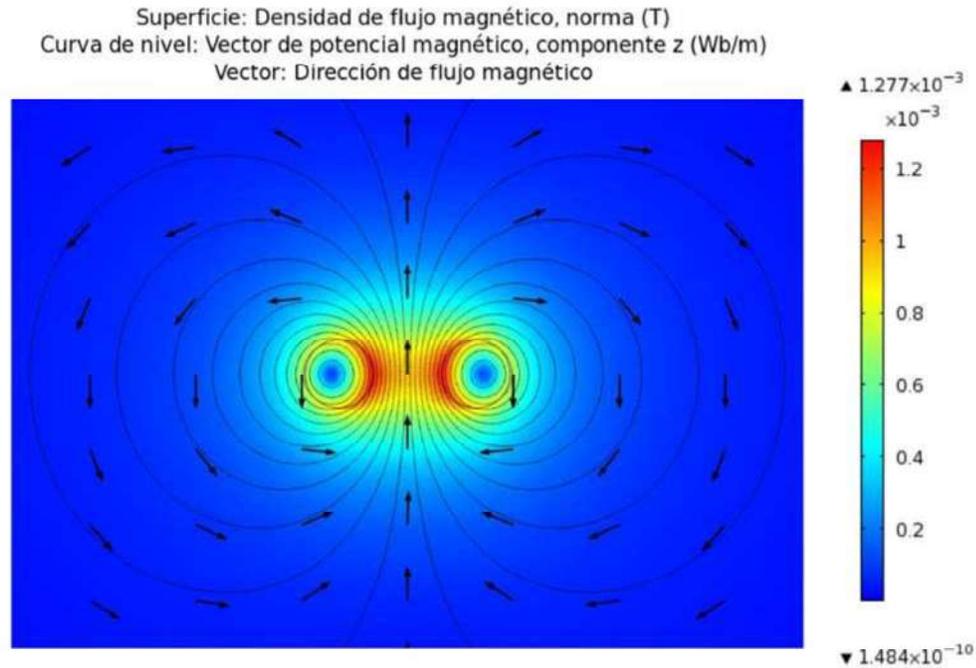


Figura 3.57 Densidad de flujo magnético B , Teslas. Dirección y líneas de flujo magnético. Conductores paralelos con corriente opuesta.

La figura 3.58 ejemplifica el segundo caso estudiado en esta subsección, en el cual los conductores conducen la corriente de 10 A en la misma dirección. En este caso el conductor ubicado a la derecha en la figura 3.57 cambio su sentido de conducción de una corriente que entra a una corriente que sale de la página, igual que el conductor ubicado en la izquierda. Esto provoca que los campos magnéticos se contrarresten en la región ubicada entre conductores, resultando una densidad de flujo nula en el centro la geometría. Dada la regla de la mano derecha, el campo existente alrededor de los conductores es la suma de los campos magnéticos individuales, lo que genera un campo magnético intenso alrededor de los conductores.

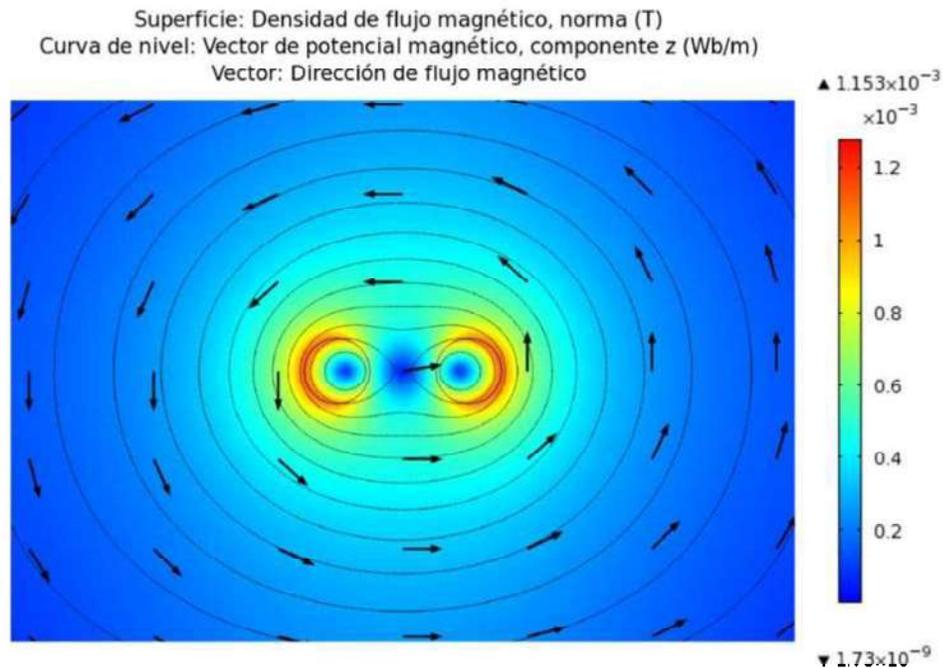


Figura 3.58 Densidad de flujo magnético B , Teslas. Dirección y líneas de flujo magnético.
Conductores paralelos con corriente en mismo sentido.

3.2.4 Campo magnético en un reactor monofásico

En esta subsección se analizará el campo magnético generado en un reactor monofásico. El reactor consta de un núcleo de hierro con permeabilidad relativa de 4000 y un devanado monofásico de 500 vueltas ubicado en la columna superior del circuito, tal y como se muestra en la figura 3.59, donde el devanado es representado mediante rectángulos. La corriente del reactor es de 1 A y sale del rectángulo superior para ingresar en el rectángulo inferior.

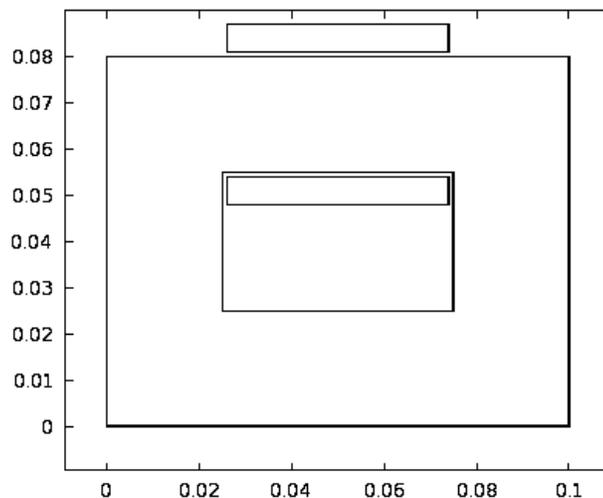


Figura 3.59 Geometría del reactor monofásico, m.

La figura 3.60 muestra la densidad de flujo magnético resultante del estudio.

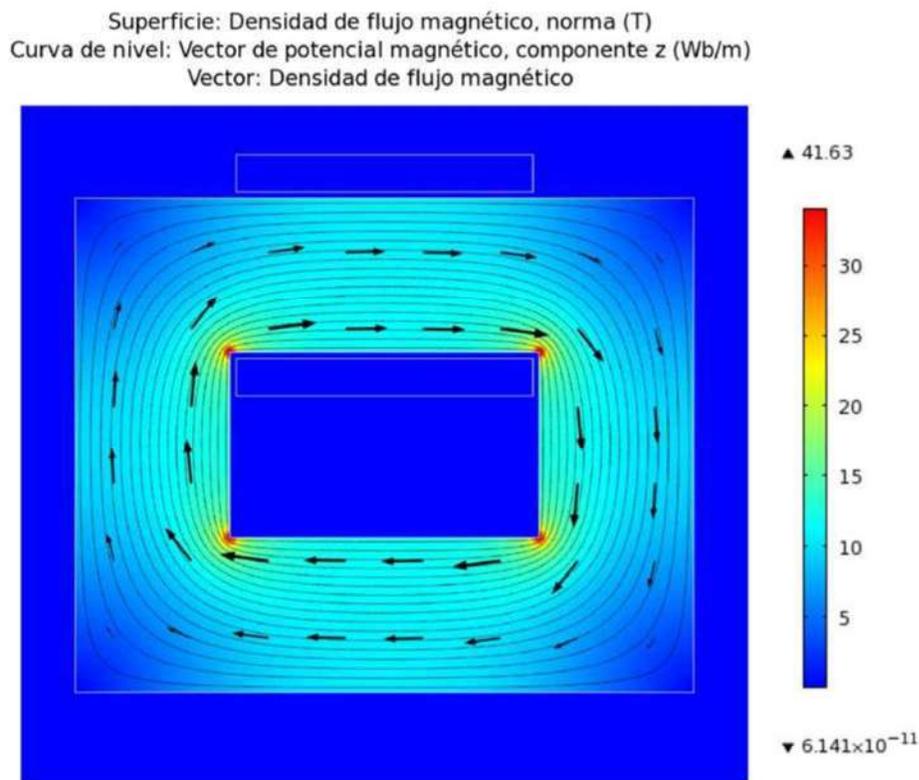


Figura 3.60 Densidad de flujo magnético B , Teslas. Dirección y líneas de flujo magnético. Reactor monofásico.

Nótese que la figura 3.60 muestra también la dirección del campo magnético, así como líneas de flujo resultantes del estudio. Puede verse que la densidad de flujo magnético es más intensa en las regiones internas del núcleo. Esto debido a que las longitudes menores de núcleo ferromagnético generan valores más pequeños de reluctancia, lo que provoca que el flujo magnético tienda a circular con mayor facilidad por dichas regiones. Esto explica la alta densidad de flujo magnético en las esquinas internas y la baja densidad de flujo en las esquinas externas del reactor.

3.2.5 Campo magnético en un reactor monofásico con entrehierro

En esta subsección se estudia el efecto de entrehierros en los circuitos magnéticos. En este caso, se agregó un entrehierro de 5 mm en una de las columnas laterales del reactor monofásico visto en la subsección anterior, tal y como se muestra en la figura 3.61.

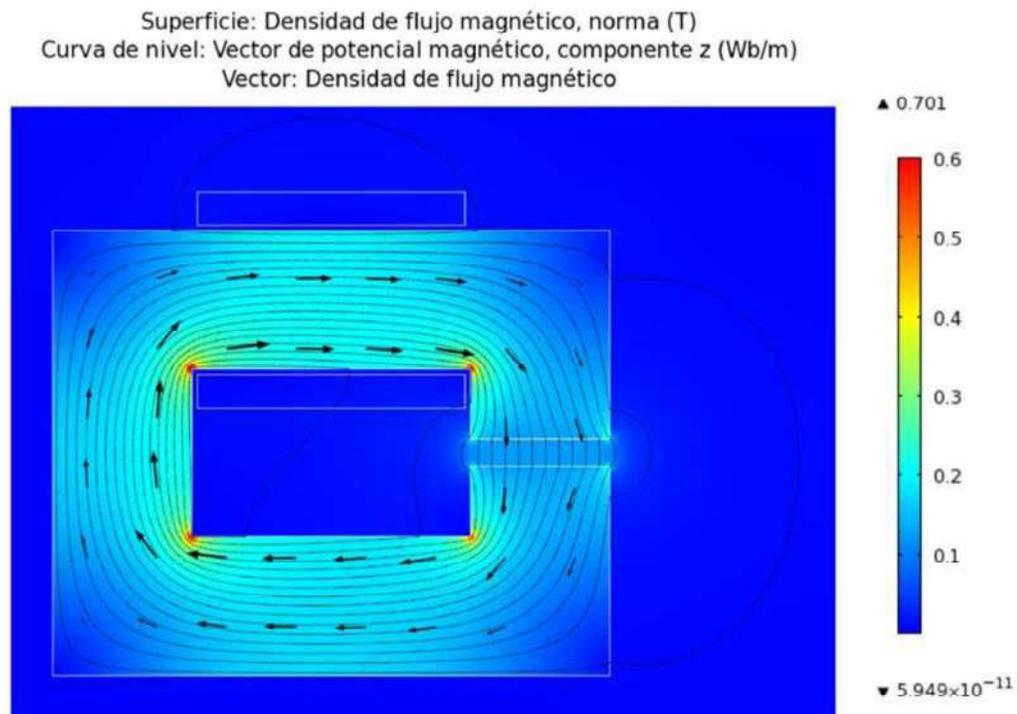


Figura 3.61 Densidad de flujo magnético B , Teslas. Dirección y líneas de flujo magnético. Reactor monofásico con entrehierro.

Puede verse en la figura 3.61 que la densidad de flujo magnético se reduce considerablemente respecto al caso sin entrehierro. El entrehierro aumenta la reluctancia

del circuito magnético, reduciendo el flujo magnético interno en el reactor y aumentando el flujo magnético de dispersión.

La figura 3.62 muestra de forma más clara el flujo magnético de entrehierro en el reactor, el cual concuerda con lo ampliamente difundido y expuesto por la teoría generalizada de máquinas eléctricas. En este caso el flujo de entrehierro puede considerarse como uniforme e igual al del núcleo, ya que el flujo de dispersión en el entrehierro es muy pequeño y prácticamente todas las líneas de flujo entran nuevamente al núcleo magnético.

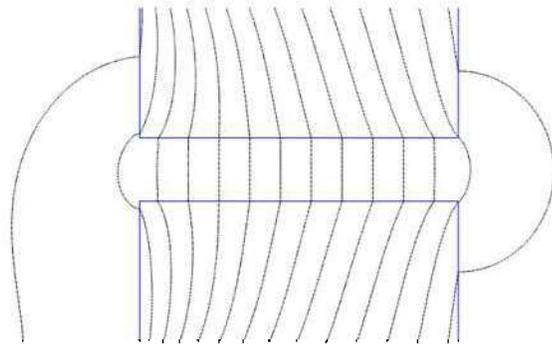


Figura 3.62 Flujo magnético de entrehierro en el reactor monofásico.

3.2.6 Campo magnético en un transformador monofásico tipo núcleo

En esta subsección se estudia la distribución de flujo magnético existente en un transformador monofásico tipo núcleo. Dado que los transformadores operan en CA, el estudio se realiza en un instante de tiempo en condiciones de estado estacionario. Los lados primario y secundario del transformador cuentan con devanados de 1000 y 500 vueltas respectivamente, por lo que la relación de transformación es de 0.5. Las corrientes primaria y secundaria son de 0.5 y 0.98 A respectivamente y la permeabilidad relativa del núcleo es de 5000. La figura 3.63 muestra la geometría del reactor y la figura 3.64 la densidad de flujo magnético resultante del estudio.

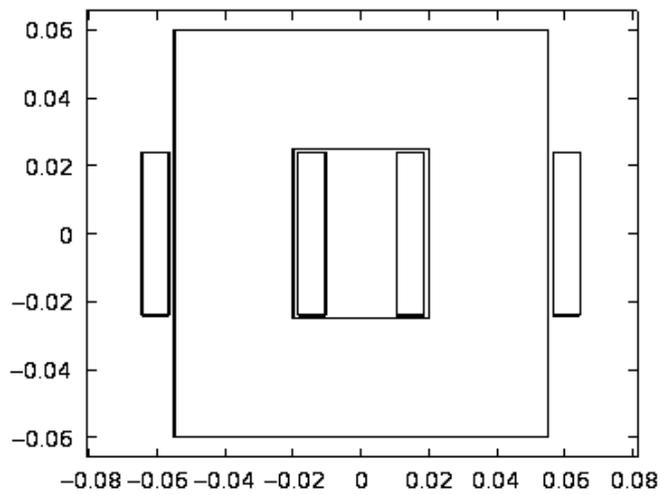


Figura 3.63 Geometría del transformador monofásico, m.

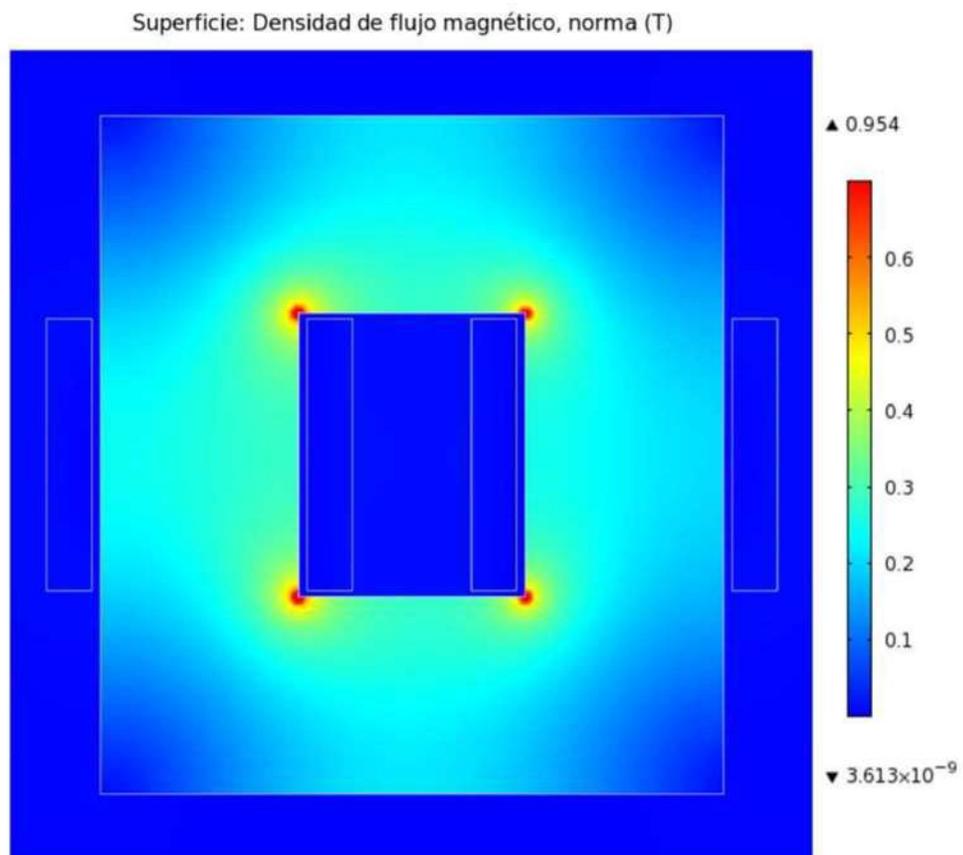


Figura 3.64 Densidad de flujo magnético B , Teslas. Transformador monofásico.

En la figura 3.64 pueden observarse resultados similares a la solución del reactor. Las zonas con alta densidad de flujo magnético son aquellas que forman parte de valores de reluctancia menores, concentrando las líneas en las esquinas internas del transformador y alejándolas de las externas, tal y como se muestra en la figura 3.65, donde también es posible visualizar los flujos de dispersión existentes en los devanados primario (izquierdo en la figura) y secundario (derecho en la figura) del transformador.

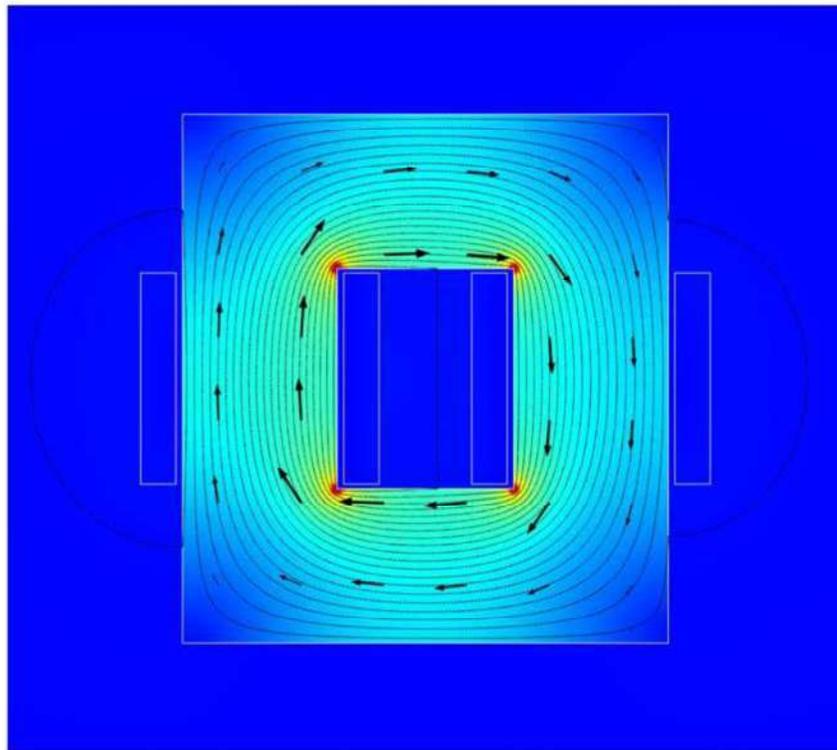


Figura 3.65 Densidad de flujo magnético. Dirección y líneas de flujo magnético. Flujo magnético de dispersión. Transformador monofásico.

Capítulo 4

Análisis Magnético de Fallas en la alimentación de un MIRD

En este capítulo, usando el MEF y COMSOL, se modelará una máquina de inducción de rotor devanado (MIRD). Se visualizará su campo magnético en condiciones normales de operación, y se observará su deformación ante diversas fallas eléctricas en la alimentación del MIRD.

Las referencias utilizadas en este capítulo fueron [Pérez90], [Fitzgerald05], [Chapman06] y [Nasar84].

4.1 Máquina de Inducción de Rotor Devanado

La MIRD estudiada en este capítulo es una máquina de inducción de 4 polos, con potencia nominal de 5 H.P. a 460 V y devanados distribuidos conectados en estrella tanto en el estator como en el rotor.

4.1.1 Troquelado del MIRD

Como se vio anteriormente, para la solución de problemas por medio de elementos finitos, es necesario conocer las condiciones físicas del estudio. En el caso de fenómenos magnéticos, se requiere conocer tanto la permeabilidad de los materiales como la geometría del problema. Para el MIRD tratado en este capítulo, el material utilizado tanto en el estator como en el rotor es material ferromagnético con permeabilidad relativa de 10000. La figura 4.1 muestra el troquelado o geometría del MIRD.

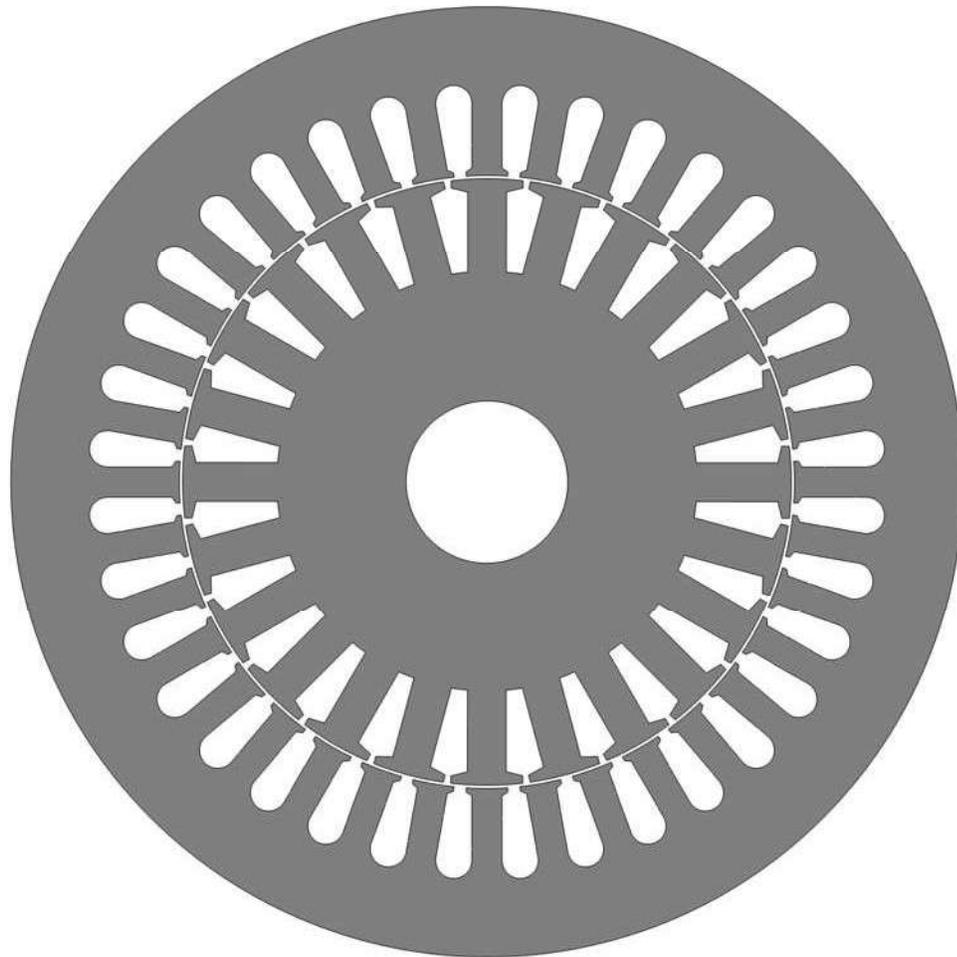


Figura 4.1 Troquelado del MIRD.

4.1.2 Distribución de devanados en el MIRD

El devanado completo de estator es un devanado distribuido compuesto por 36 bobinas de 40 espiras cada una. Si se toma en cuenta que la máquina es trifásica, conectada en estrella y de 4 polos, se tienen 9 bobinas/polo, 3 bobinas/fase/polo y 12 bobinas serie/fase. La figura 4.2 muestra la distribución lineal del devanado en el estator. Nótese que los pasos polar y de bobina constan de 9 y 8 ranuras respectivamente, y que la figura 4.2 solo muestra la mitad del estator, puesto que la otra mitad es idéntica.

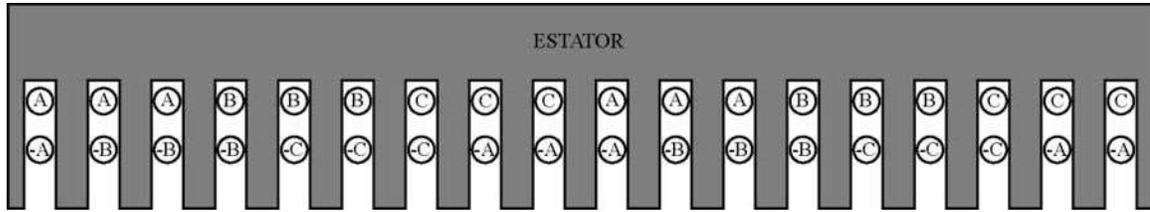


Figura 4.2 Distribución lineal del devanado en el estator.

Cabe señalar que las literales A y $-A$ mostradas en la figura 4.2 indican el sentido de arrollamiento de las bobinas de la fase A . Lo mismo pasa con las bobinas de las fases B y C .

La figura 4.3 muestra la conexión trifásica de las 36 bobinas en el estator.

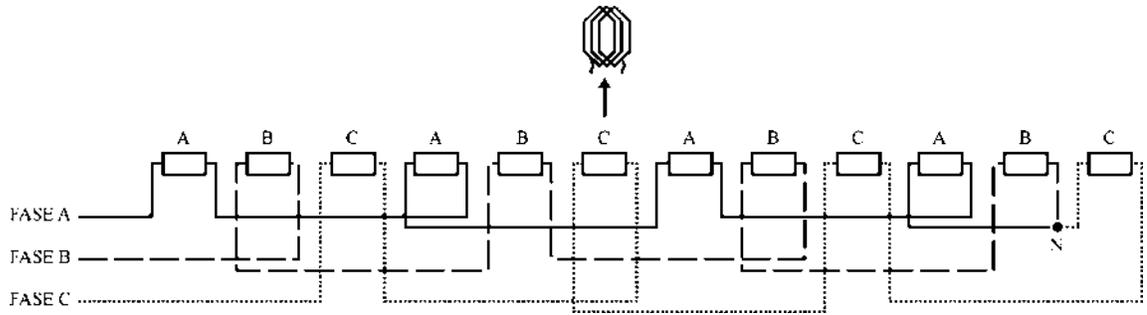


Figura 4.3 Diagrama lineal de la conexión del devanado en el estator.

Nótese en la figura 4.3 que cada rectángulo mostrado representa un conjunto de 3 bobinas conectadas en serie.

El devanado distribuido del rotor está constituido por 24 bobinas de 30 espiras cada una. En el rotor se tienen 4 polos, 6 bobinas/polo, 2 bobinas/fase/polo, 8 bobinas serie/fase y tanto paso polar como de bobina de 6 ranuras. La figura 4.4 muestra la distribución lineal del devanado en el rotor.

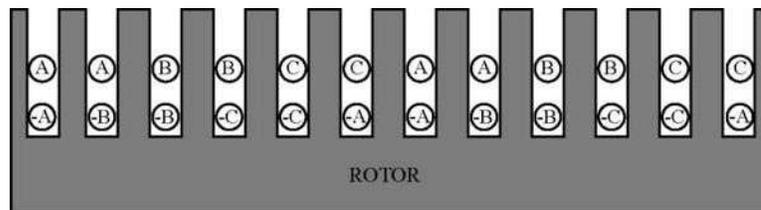


Figura 4.4 Distribución lineal del devanado en el rotor.

La conexión completa del devanado en el rotor se ilustra en la figura 4.5, en la cual cada rectángulo representa un conjunto de 2 bobinas conectadas en serie.

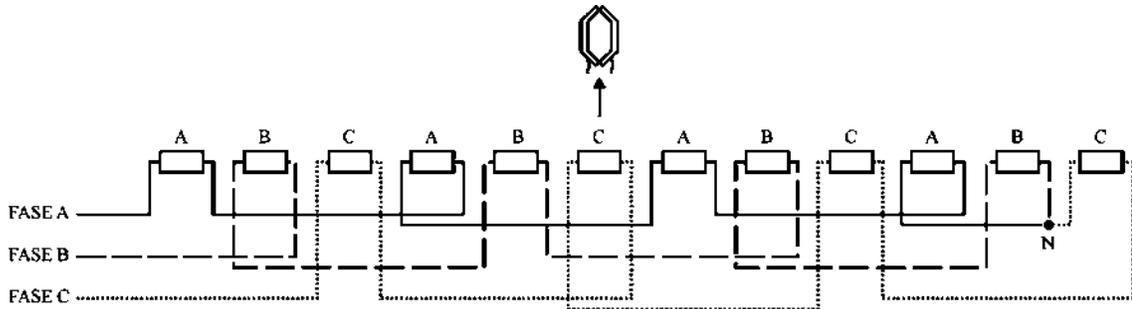


Figura 4.5 Diagrama lineal de la conexión del devanado en el rotor.

La figura 4.6 muestra la conexión estrella serie existente tanto en el estator como en el rotor. Nótese los 120 grados eléctricos entre devanados de diferente fase y el cortocircuito existente en el devanado del rotor.

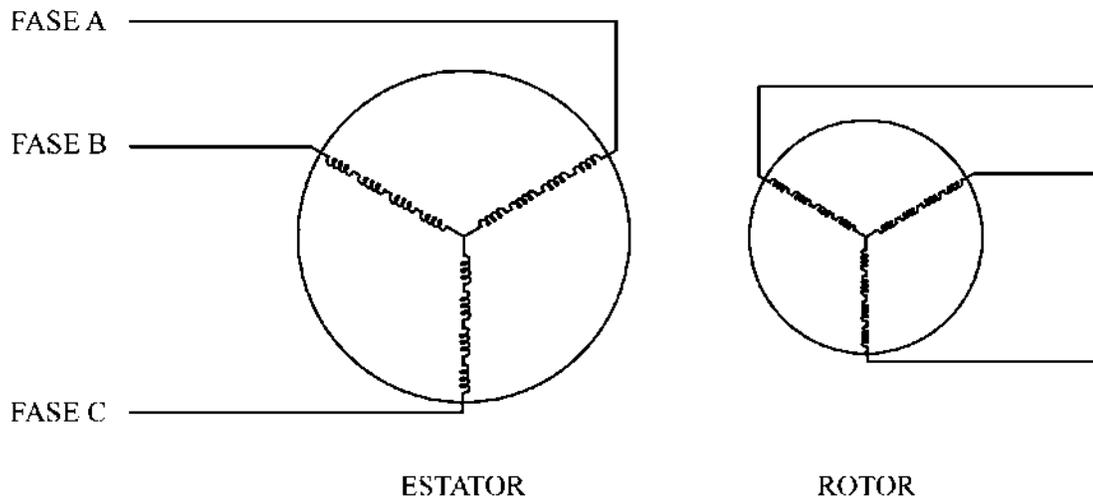


Figura 4.6 Diagrama de la conexión estrella serie del MIRD.

4.2 Condiciones de estudio

Cuando al MIRD se le proporciona una alimentación trifásica balanceada como la mostrada en la figura 4.7, una vez que ha pasado el transitorio, la interacción existente entre la alimentación y la distribución de devanados en el MIRD genera un campo magnético

giratorio, cambiante respecto a alguna referencia fija. Sin embargo, si se analiza el campo magnético en un instante de tiempo t_0 , éste puede verse como un campo magnético estacionario. De manera que si es conocida la distribución de corriente en t_0 , es posible la aplicación el MEF para aproximar el campo magnético existente en la máquina en dicho instante de tiempo.

Los estudios estarán enfocados a encontrar el campo magnético del motor en seis instantes de tiempo, tanto en condiciones normales de operación como ante diversas fallas eléctricas en la alimentación del MIRD. Se tomará como referencia inicial t_0 aquel tiempo en el cual el rotor de la máquina cumpla una revolución completa, y los siguientes cinco instantes de tiempo estarán determinados por un periodo de muestreo de 3.333 ms, los cuales multiplicados por cinco dan como resultado un tiempo de muestreo total de 16.666 ms, el cual tomando en cuenta que la máquina es de 4 polos con frecuencia nominal de 60 Hz, representa el tiempo ideal requerido por el motor para girar media revolución. Los valores de corriente en cada fase así como la posición angular del rotor se obtendrán simulando la máquina en la interfaz gráfica Simulink de Matlab. La figura 4.7 ilustra, como ejemplo, la alimentación de corriente trifásica en el MIRD en condiciones normales de operación y los tiempos de estudio en base a un tiempo de referencia t_0 .

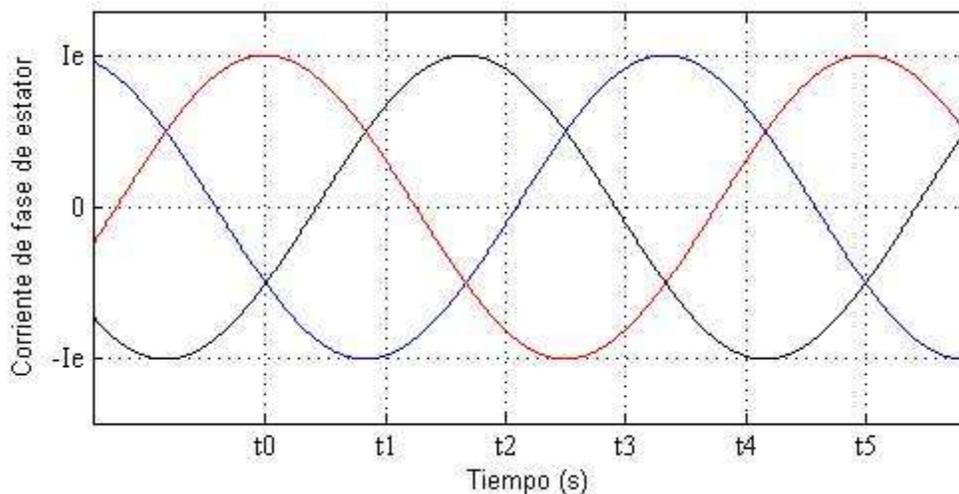


Figura 4.7 Alimentación trifásica en el MIRD y tiempos de estudio en base a una referencia t_0 .

Secuencia *abc*. Fase *A* en rojo. Fase *B* en negro. Fase *C* en azul.

4.3 Distribución de fuerza magnetomotriz en el MIRD

En esta sección se ejemplificará la distribución de fuerza magnetomotriz en el MIRD en un instante de tiempo. Si se toma en cuenta el tiempo t_0 y las corrientes mostradas en la figura 4.7, así como la distribución de devanados expuesta en la sección 4.1.2, las figura 4.8 y 4.9 muestran la distribución de fuerza magnetomotriz del MIRD en t_0 . Nótese que

$$i_a = I_e$$

$$i_b = i_c = -0.5I_e$$

Por lo que las distribuciones en t_0 resultan

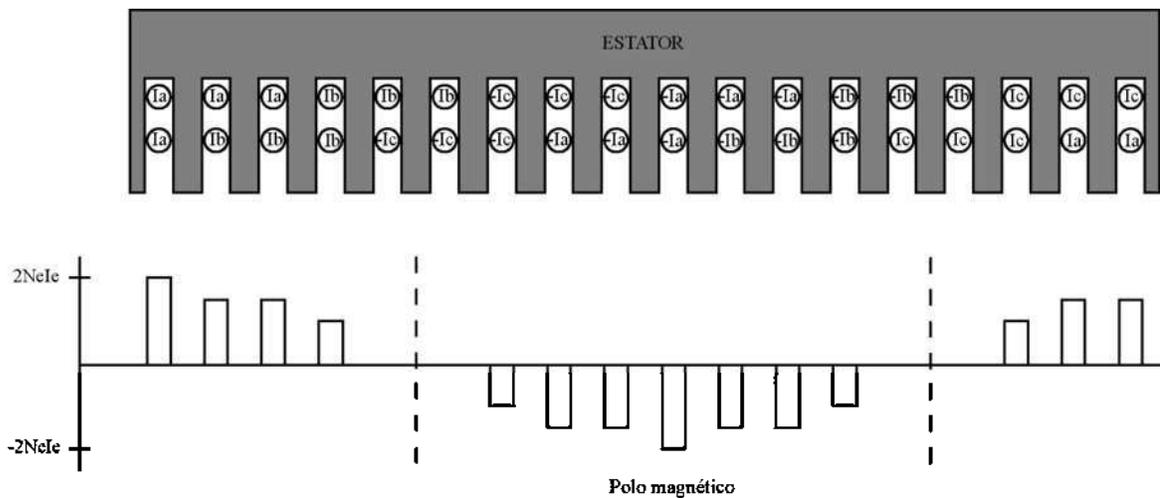


Figura 4.8 Distribución de fuerza magnetomotriz en el estator en t_0 .

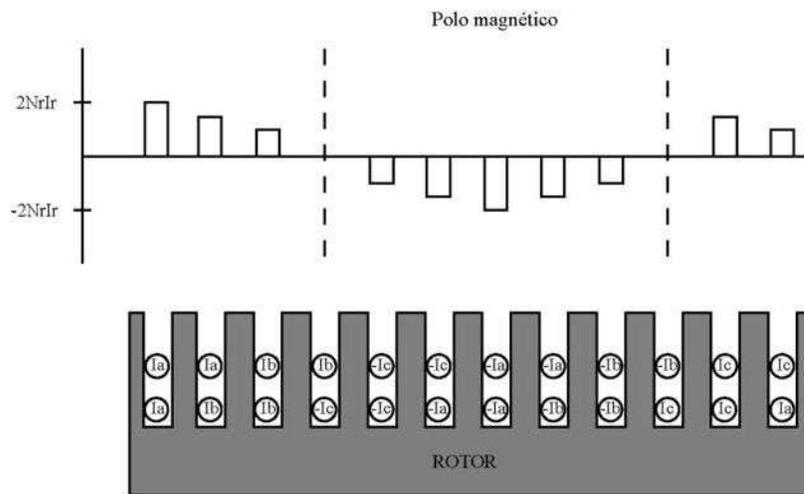


Figura 4.9 Distribución de fuerza magnetomotriz en el rotor en t_0 .

4.4 Densidad de corriente en el MIRD

Como se vio anteriormente, para poder aplicar el MEF al estudio de campos magnéticos y dar solución a la ecuación de Poisson, se requiere conocer la distribución de corriente que existe en el problema magnético. En el caso del MIRD, la densidad de corriente J generada por cada bobina depende del número de vueltas que tiene la bobina, la corriente que circula por ella y el área que ocupa en la ranura de la máquina, tal y como se muestra en la figura 4.10

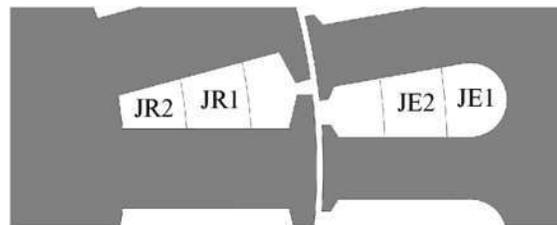


Figura 4.10 Densidad de corriente J en las ranuras del MIRD.

La expresión 4.1 muestra como calcular la densidad de corriente para cualquier bobina del MIRD.

$$J_k = \frac{N_k i_k}{A_k} \quad (4.1)$$

donde

k = número de bobina

J = densidad de corriente eléctrica

N_k = número de vueltas de la bobina k

i_k = corriente que circula por la bobina k

A_k = área que ocupa la bobina k en la ranura

4.5 Análisis magnético de Fallas en el MIRD

En esta sección, utilizando COMSOL y el MEF, se visualizará el campo magnético del MIRD tanto en condiciones normales de operación como ante diferentes fallas eléctricas en

la alimentación de la máquina, se analizarán los resultados obtenidos y se observará la posible repercusión operativa de cada una de las fallas.

4.5.1 Condición en vacío

Si se toman en cuenta las condiciones de estudio vistas en la sección 4.2, las corrientes de fase tanto en el estator como en el rotor para la condición en vacío son

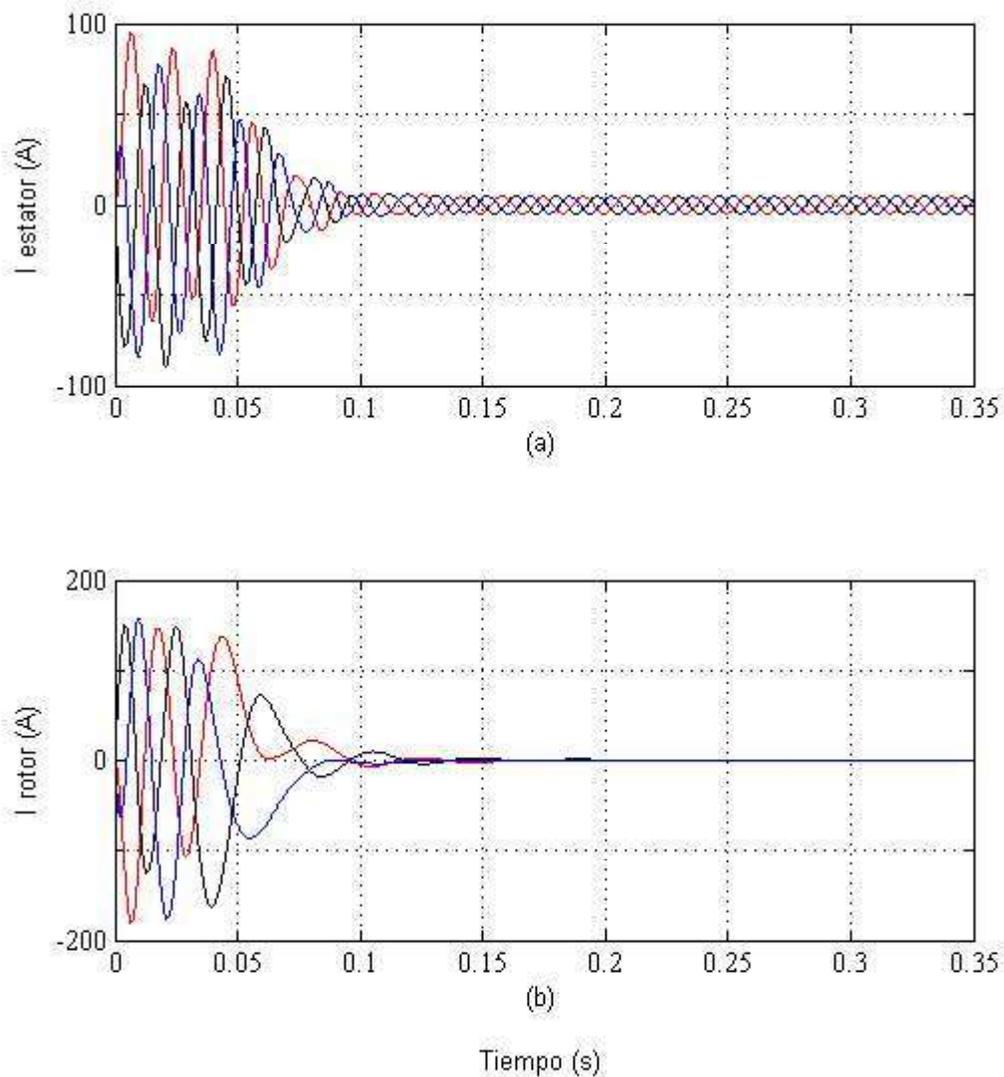


Figura 4.11 (a) Corriente trifásica de estator. (b) Corriente trifásica de rotor. Condición en vacío.

En la figura 4.11 puede verse que en estado estable las corrientes de estator y rotor presentan una respuesta trifásica balanceada. Sin embargo, dada la condición en vacío, las corrientes de rotor tienden a ser muy pequeñas debido a la poca variación de flujo magnético en el rotor. El deslizamiento en vacío es pequeño y la velocidad de rotor alcanza prácticamente la velocidad síncrona. La figura 4.12 muestra los tiempos de estudio y sus respectivas corrientes de estator y rotor en estado estable.

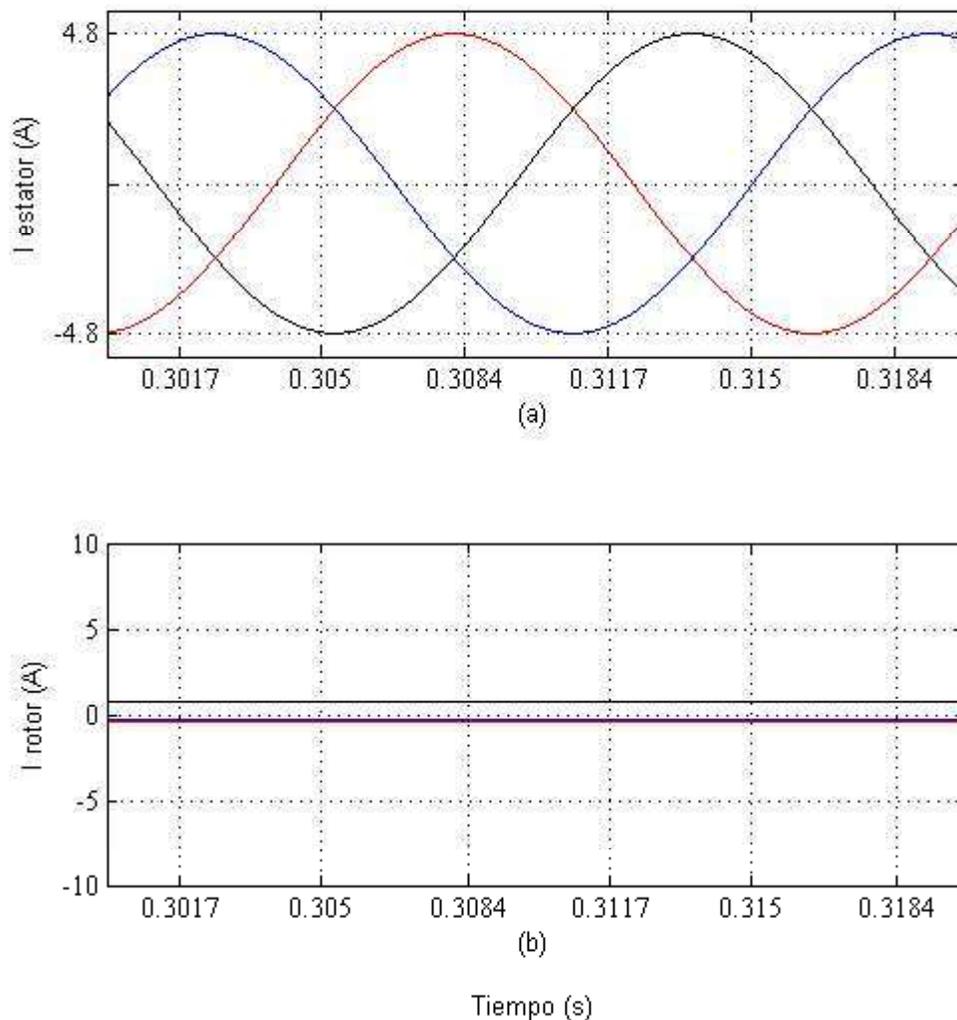


Figura 4.12 Tiempos de estudio. (a) Corrientes de estator en vacío. (b) Corrientes de rotor en vacío.

Si se toman en cuenta las corrientes obtenidas en Simulink y mostradas en la figura 4.12, la figura 4.13 muestra la densidad de flujo magnético resultante en COMSOL para la condición en vacío en el tiempo t_0 .

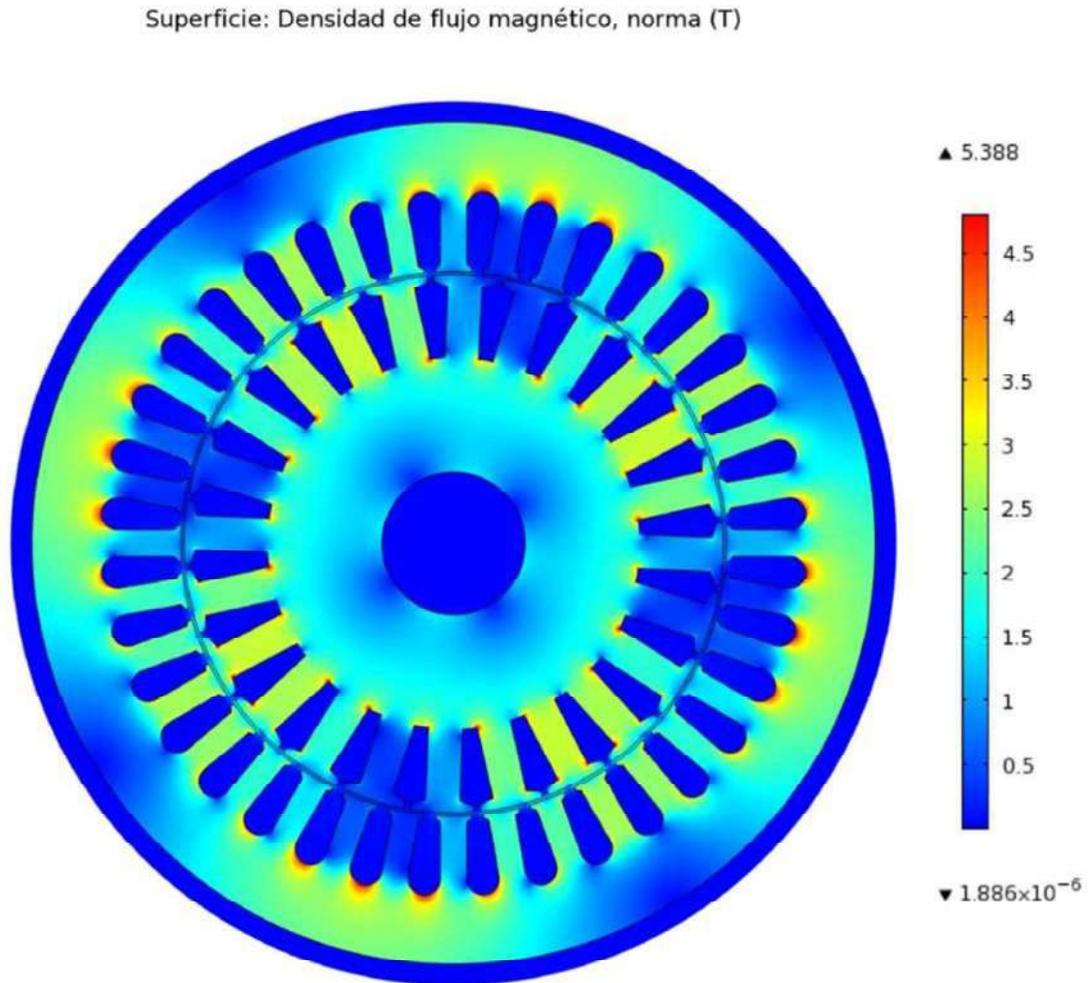


Figura 4.13 Densidad de flujo magnético B , Teslas. Condición en vacío. Tiempo t_0 .

En la figura 4.13 puede verse la distribución de campo magnético en el MIRD y las zonas con alta densidad de flujo magnético en t_0 . Más adelante se verá que en condiciones normales de operación esta distribución se mantiene prácticamente constante y girando a una velocidad uniforme.

La figura 4.14 muestra la densidad de flujo magnético y líneas de flujo magnético resultantes en t_0 .

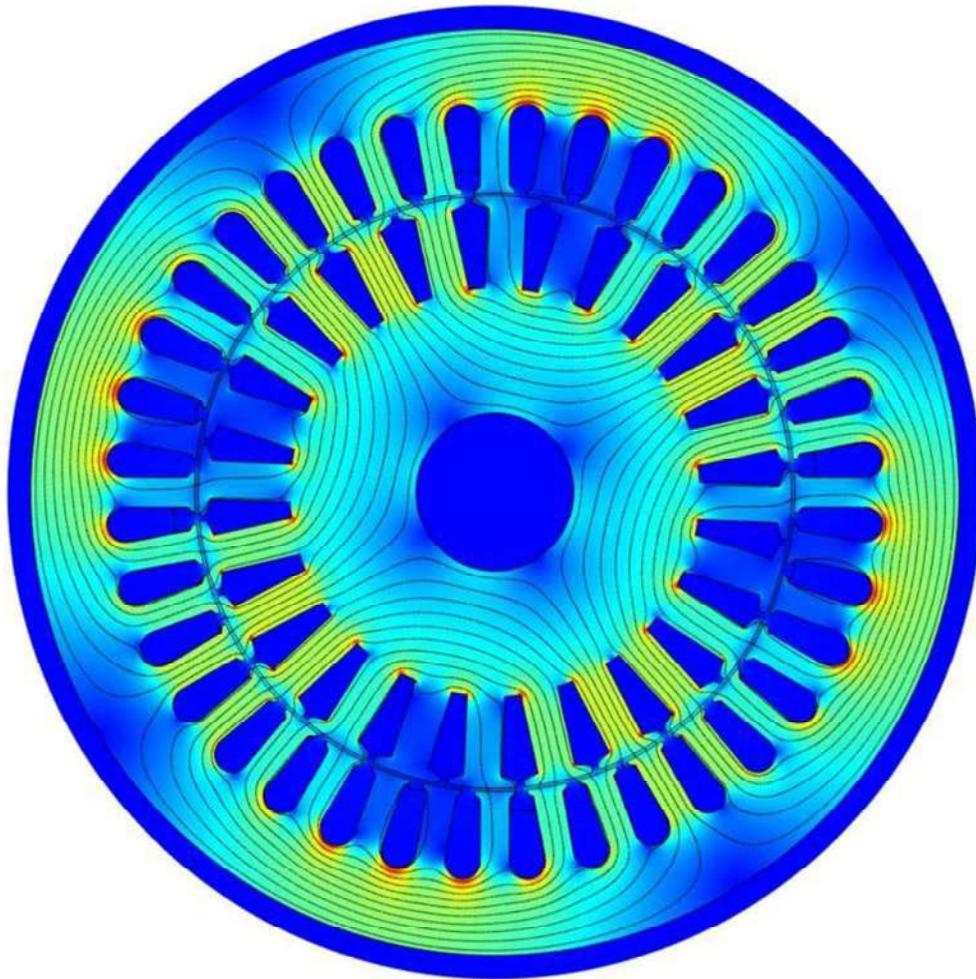


Figura 4.14 Densidad de flujo magnético y líneas de flujo. Condición en vacío. Tiempo t_0 .

La figura 4.15 muestra un gráfico de superficie con la solución del vector de potencial magnético.

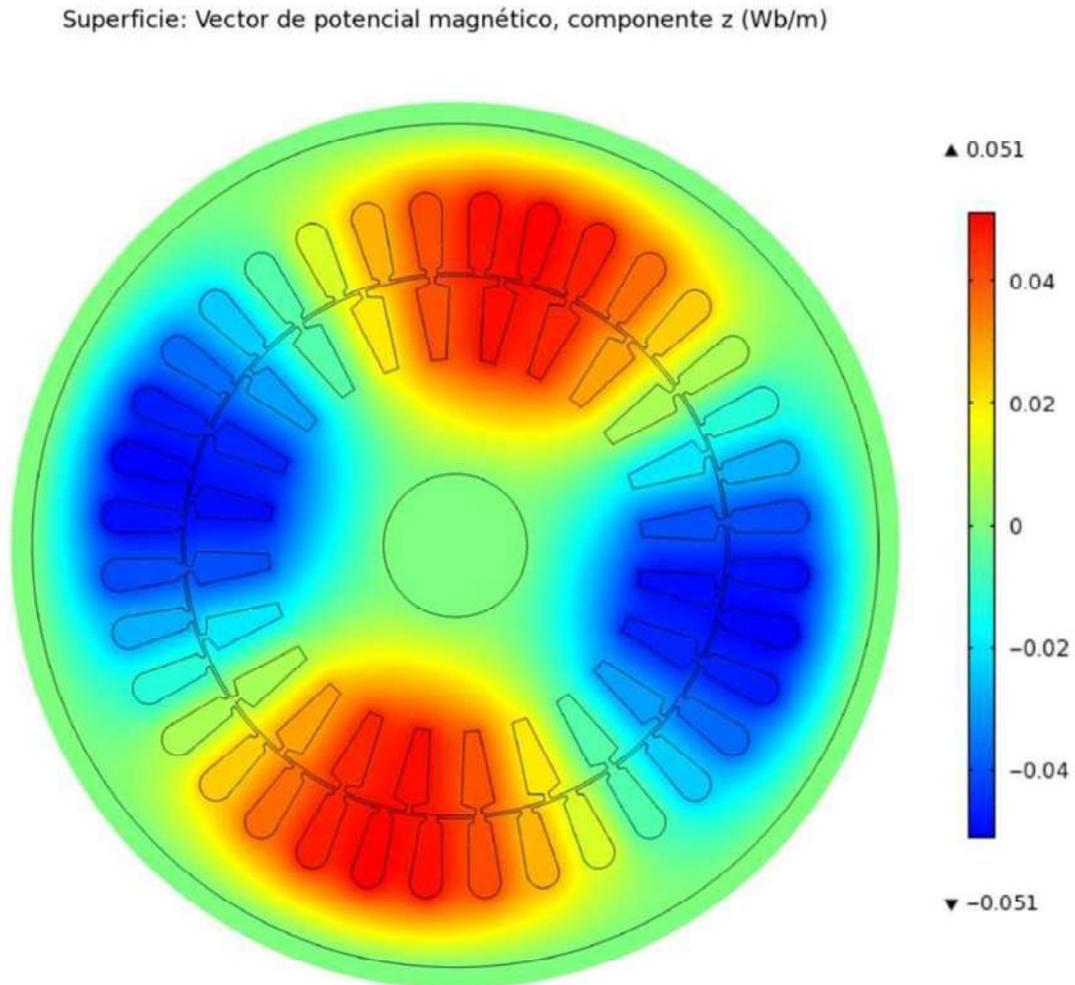


Figura 4.15 Vector de potencial magnético A , Wb/m. Condición en vacío. Tiempo t_0 .

Nótese que la figura 4.15 evidencia la existencia de cuatro polos magnéticos en el MIRD, dos nortes y dos sures. Cabe señalar que los ejes polares de los 4 polos magnéticos coinciden con el cambio de signo del potencial magnético, es decir, los ejes polares se encuentran sobre la línea imaginaria que divide geoméricamente los colores azul y rojo de potencial magnético

La figura 4.16 muestra el vector de potencial magnético y líneas de flujo.

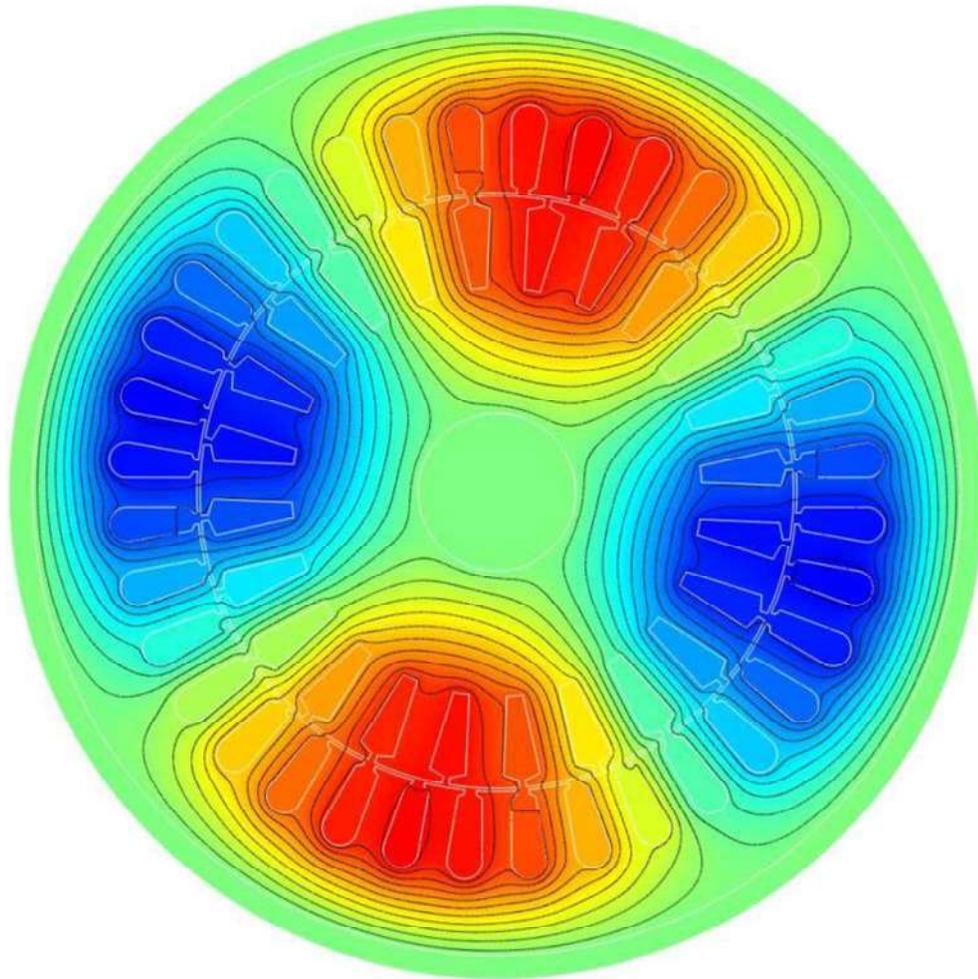


Figura 4.16 Potencial magnético y líneas de flujo. Condición en vacío. Tiempo t_0 .

La figura 4.17 muestra únicamente líneas de flujo magnético.

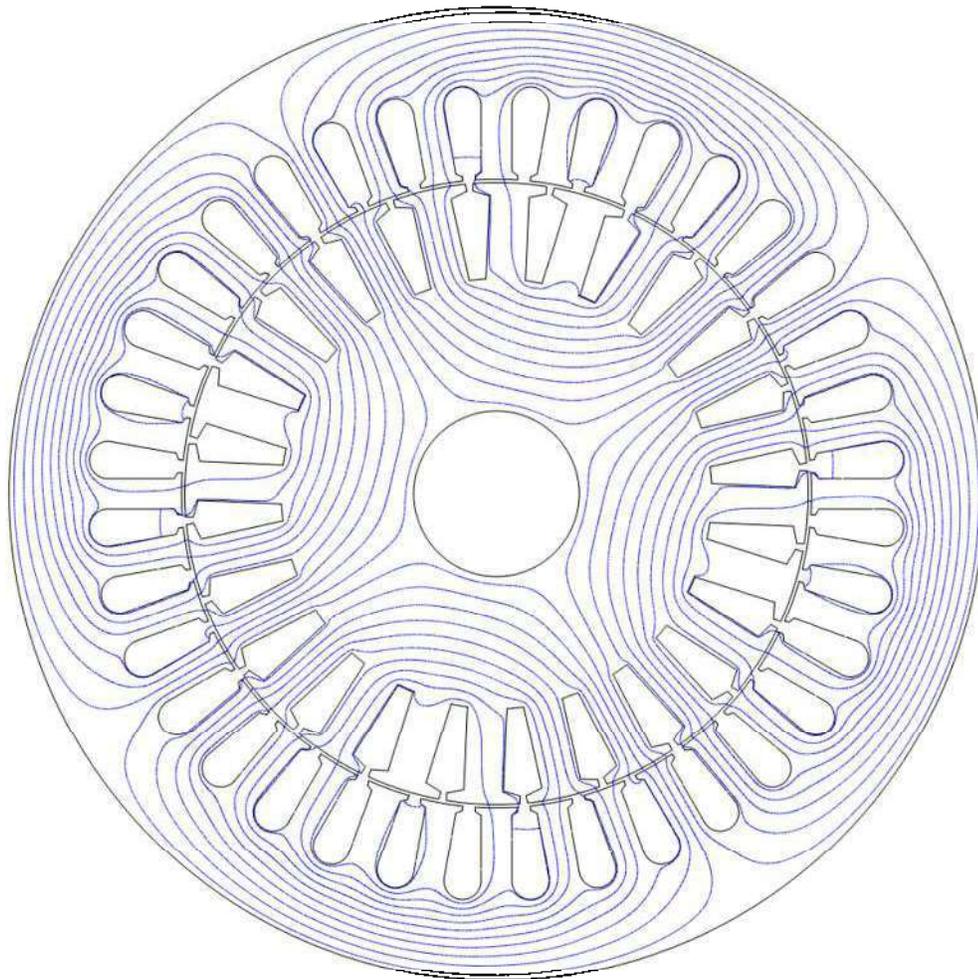


Figura 4.17 Líneas de flujo magnético. Condición en vacío. Tiempo t_0 .

La figuras 4.18, 4.19 y 4.20 muestran el potencial magnético y líneas de flujo para los seis tiempos de estudio mostrados en la figura 4.12.

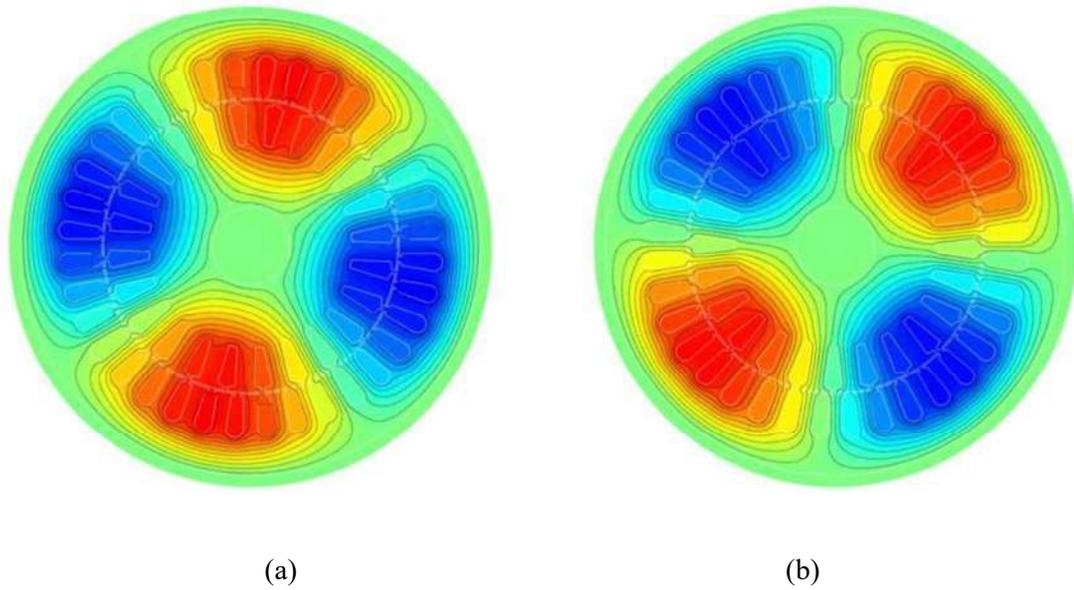


Figura 4.18 (a) Potencial magnético en t_0 . (b) Potencial magnético en t_1 . Condición en vacío.

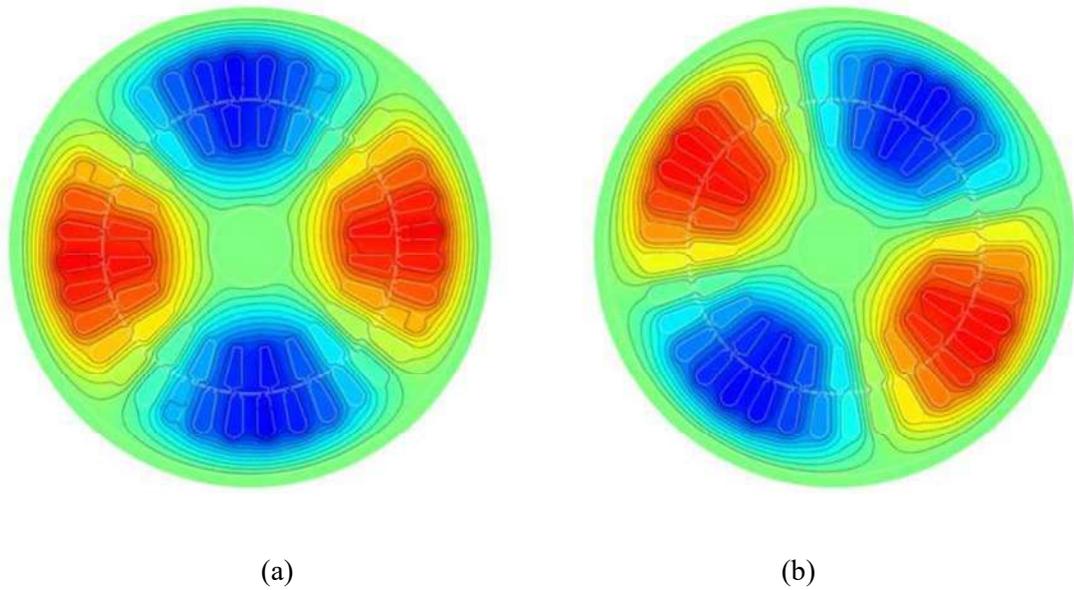


Figura 4.19 (a) Potencial magnético en t_2 . (b) Potencial magnético en t_3 . Condición en vacío.

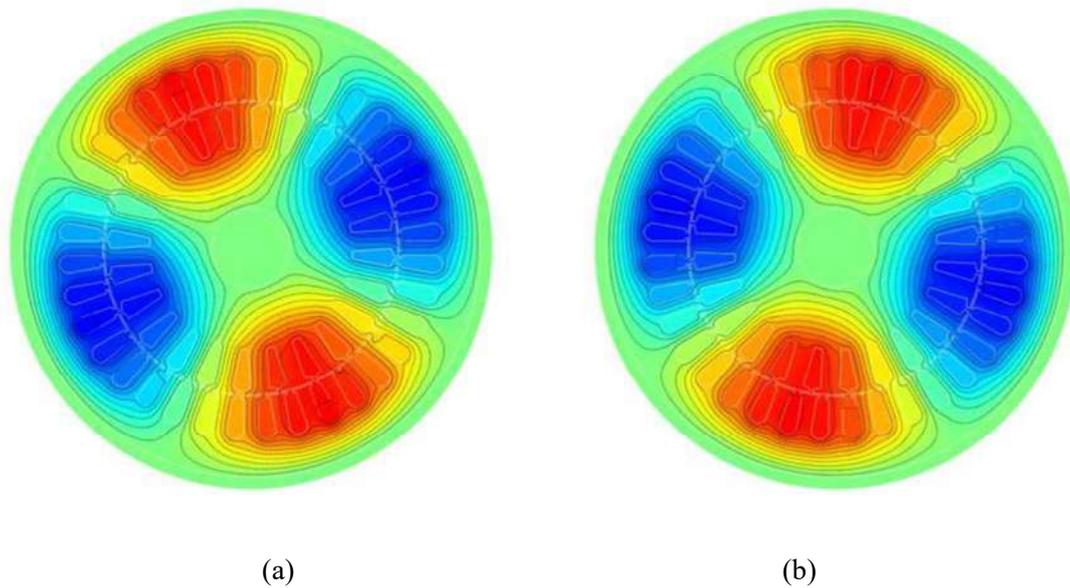


Figura 4.20 (a) Potencial magnético en t_4 . (b) Potencial magnético en t_5 . Condición en vacío.

En las figuras anteriores puede verse el campo magnético giratorio del MIRD. Nótese que el campo magnético permanece prácticamente constante y girando a una velocidad uniforme. En este caso, tomando en cuenta el tiempo de muestreo de 16.666 ms, el campo magnético alcanzó a girar media revolución mecánica, algo que era de esperarse dado que la máquina es de 4 polos y 60 Hz nominales.

4.5.2 Condición bajo carga

En este estudio se considera que la máquina opera con un par de carga de 10 N-m. La figura 4.21 muestra las corrientes de estator y rotor obtenidas bajo esta condición.

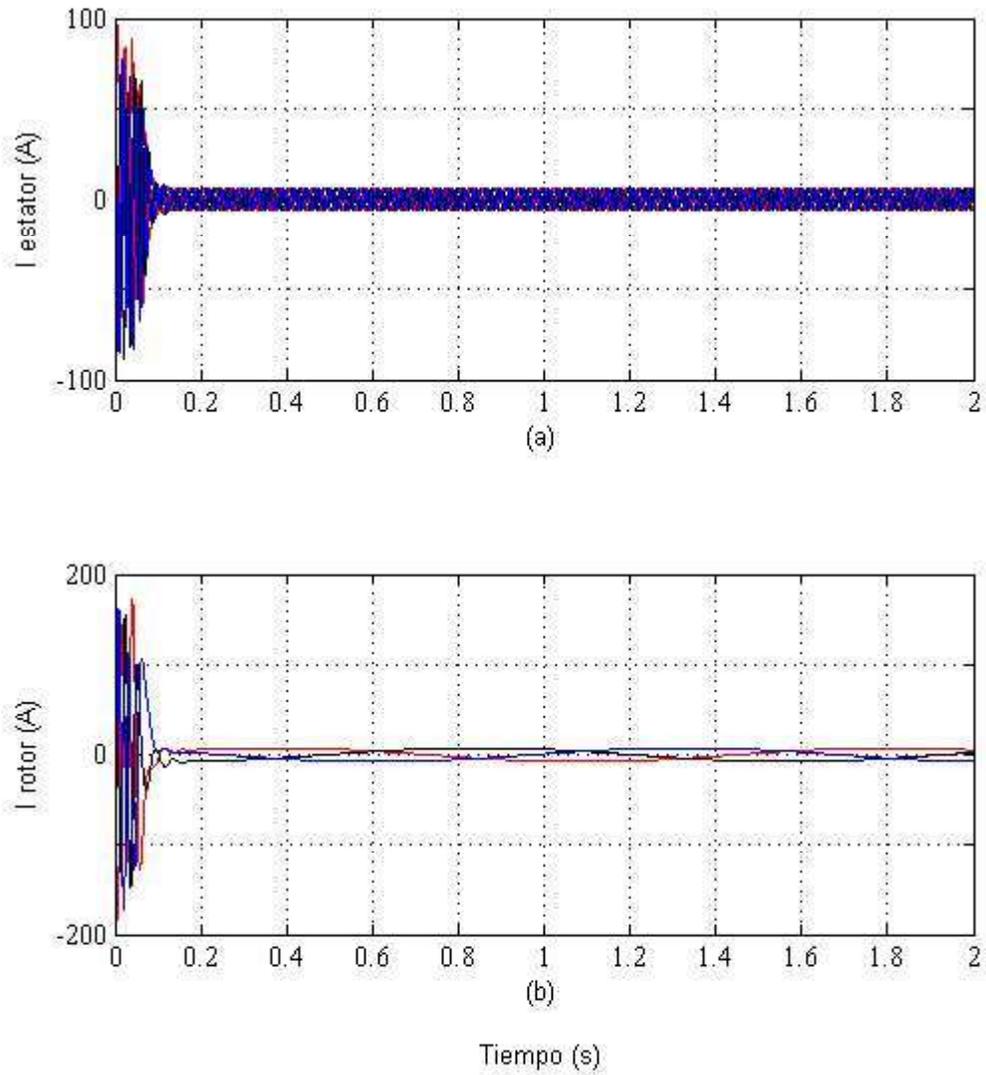


Figura 4.21 (a) Corriente trifásica de estator. (b) Corriente trifásica de rotor. Condición bajo carga de 10 N-m.

La figura 4.22 muestra las corrientes de estator y rotor en estado estable.

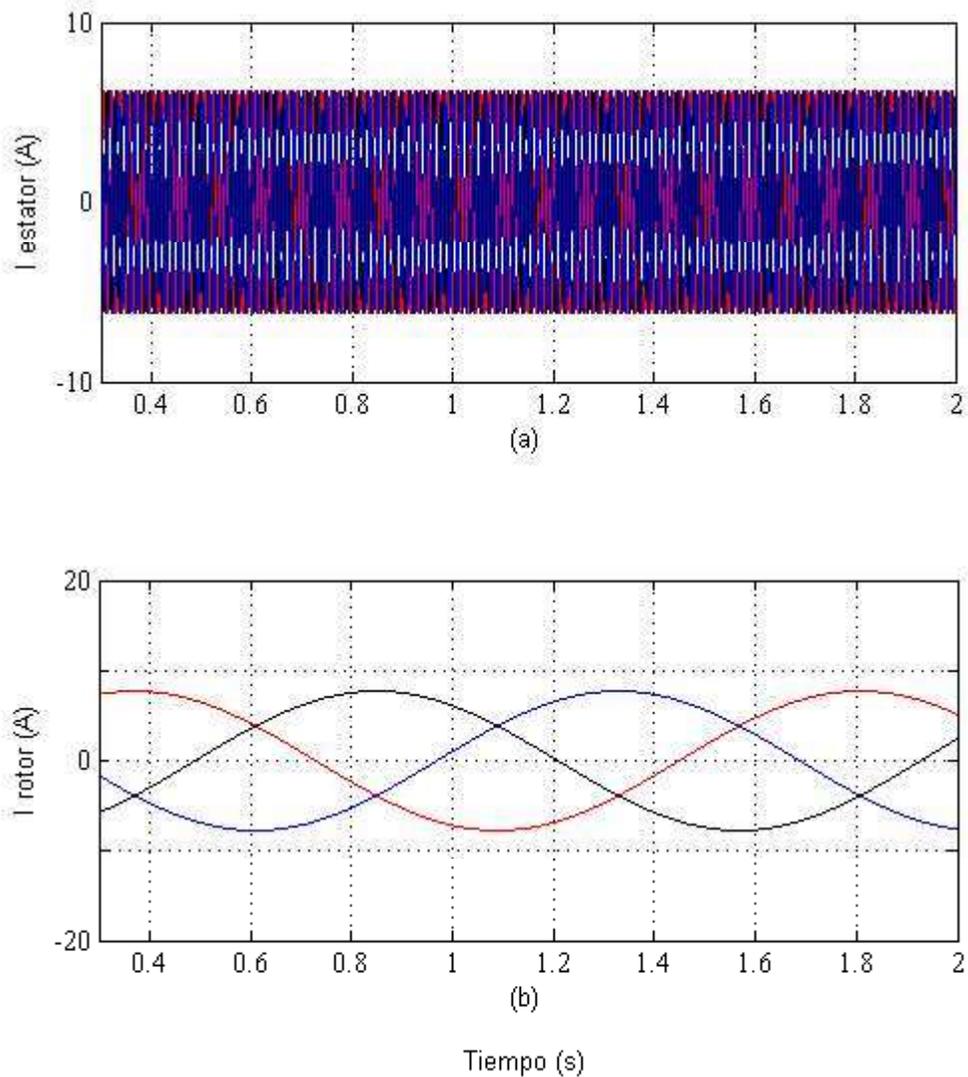


Figura 4.22 (a) Corriente de estator en estado estable. (b) Corriente de rotor en estado estable.
Condición bajo carga de 10 N-m.

En la figura 4.22 puede notarse la alta frecuencia de la corriente de estator respecto a la de rotor, la cual presenta una baja frecuencia generada por el deslizamiento de la máquina.

La figura 4.23 muestra los tiempos de estudio y sus respectivas corrientes de estator y rotor.

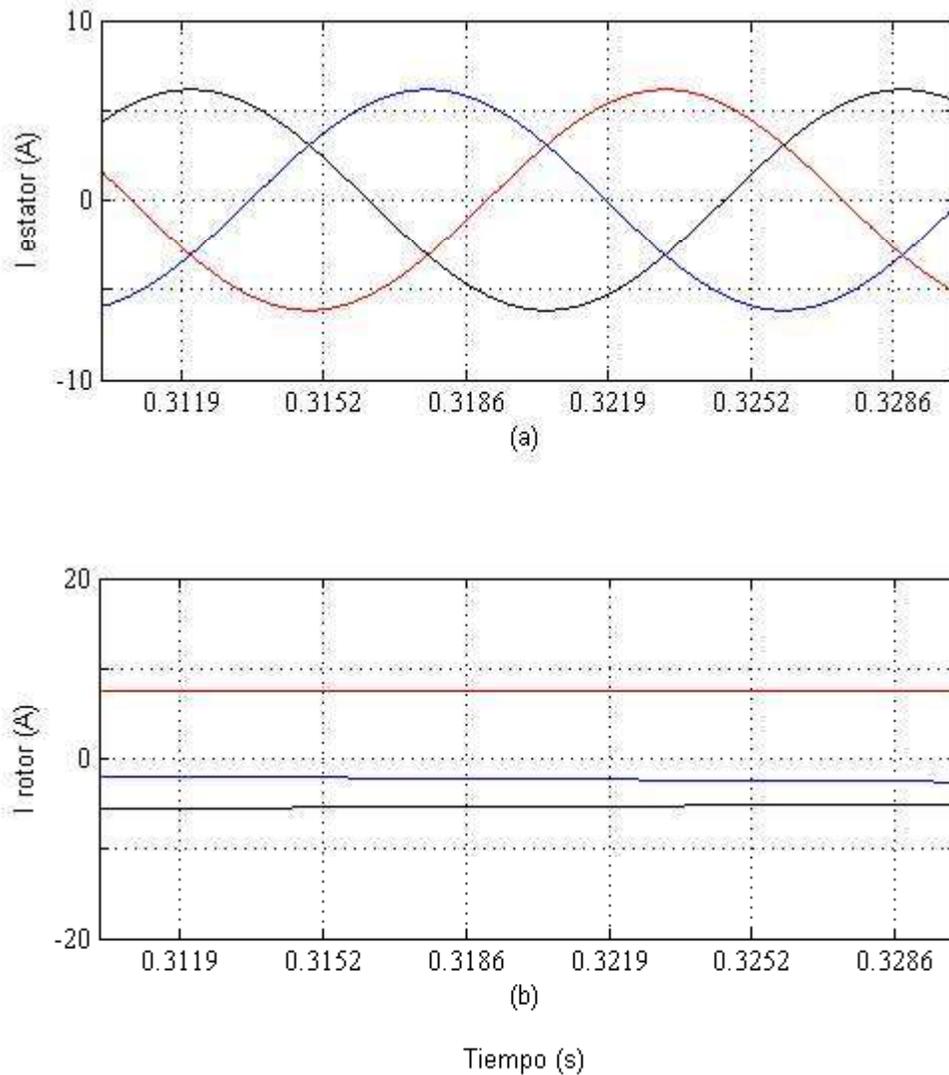


Figura 4.23 Tiempos de estudio. (a) Corrientes de estator. (b) Corrientes de rotor. Condición bajo carga de 10 N-m.

Nótese en la figura 4.23 que durante un ciclo de la corriente de estator la corriente de rotor permanece prácticamente constante debido a su baja frecuencia.

Con las corrientes mostradas en la figura 4.23, la figura 4.24 muestra la densidad y líneas de flujo magnético resultantes para el tiempo t_0 .

Superficie: Densidad de flujo magnético, norma (T)
Curva de nivel: Vector de potencial magnético, componente z (Wb/m)

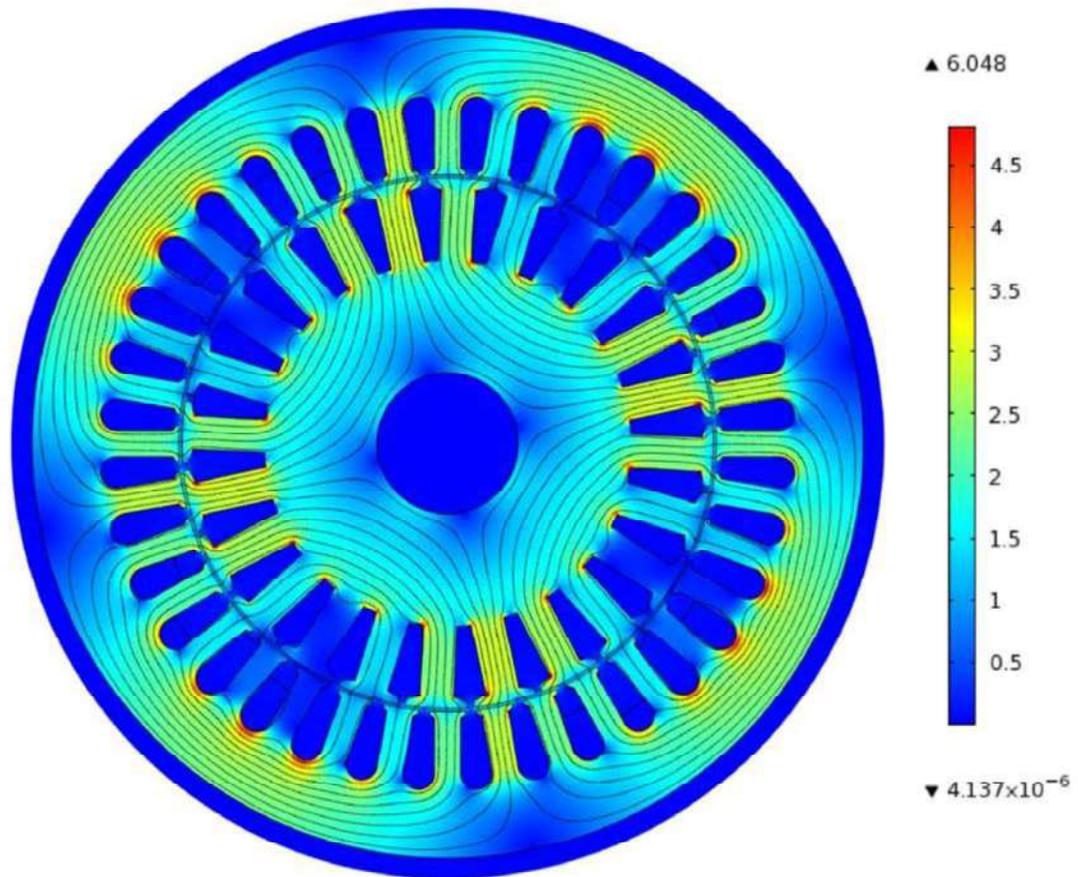


Figura 4.24 Densidad de flujo magnético B , Teslas. Líneas de flujo magnético. Condición bajo carga de 10 N-m. Tiempo t_0 .

En la figura 4.24 puede verse que la distribución de flujo magnético bajo carga es prácticamente la misma que en el caso en vacío. Sin embargo, nótese que la intensidad de colores aumenta un poco respecto a la figura 4.13 (en vacío), lo que evidencia mayores densidades de flujo magnético bajo carga. Esta diferencia también puede comprobarse con los valores máximos de densidad de flujo alcanzados para cada caso, los cuales son mostrados en la parte alta en la escala de valores de resultados. Cabe señalar que conforme aumenta la carga, la máquina se ve forzada a aumentar un poco más el flujo, esto para satisfacer el par demandando y así suministrar la potencia requerida.

La figuras 4.25, 4.26 y 4.27 muestran el potencial magnético y líneas de flujo para los seis tiempos de estudio.

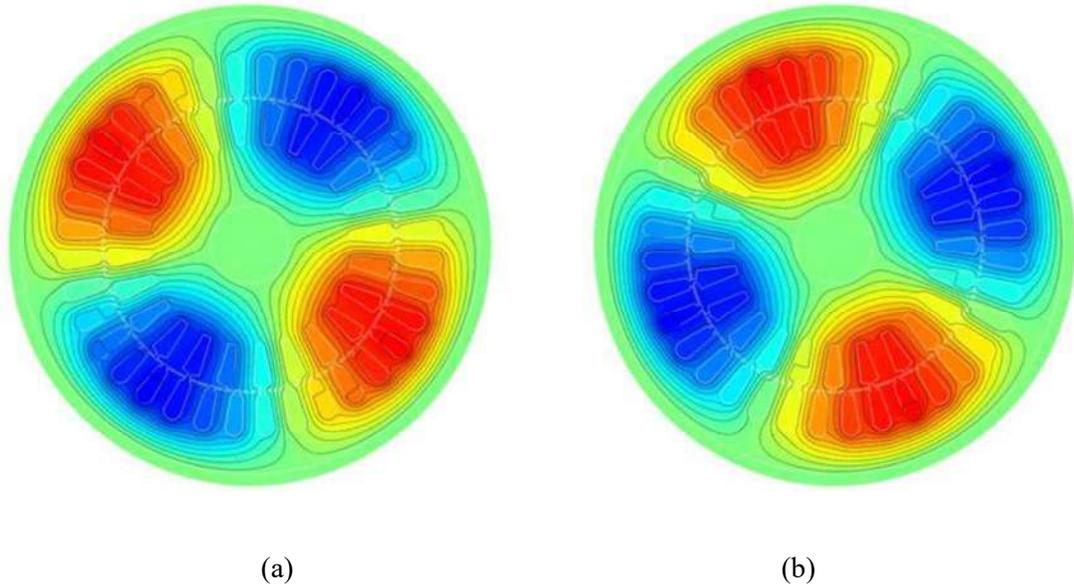


Figura 4.25 (a) Potencial magnético en t_0 . (b) Potencial magnético en t_1 . Condición bajo carga de 10 N-m.

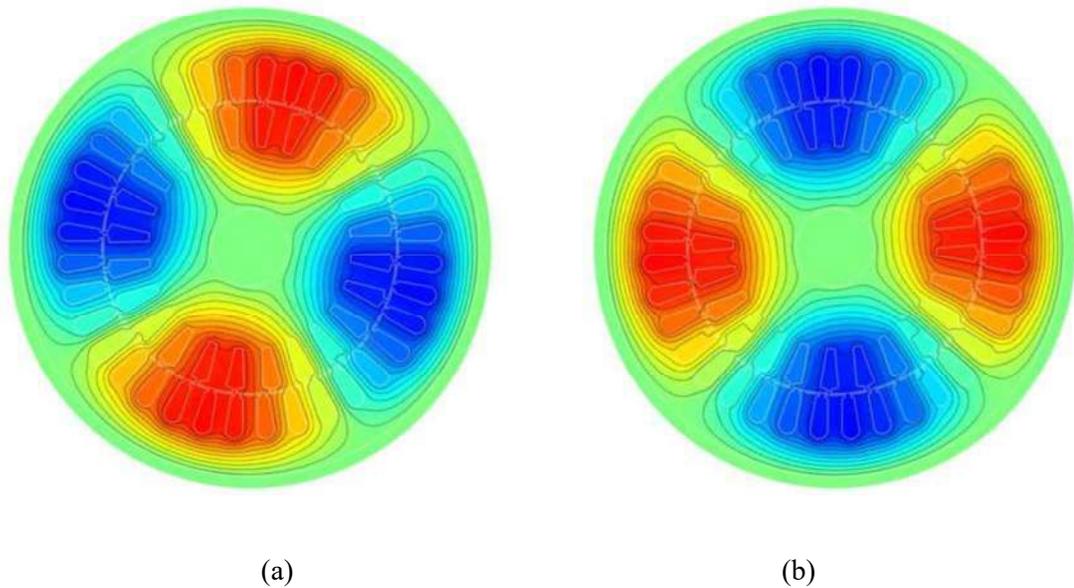


Figura 4.26 (a) Potencial magnético en t_2 . (b) Potencial magnético en t_3 . Condición bajo carga de 10 N-m.

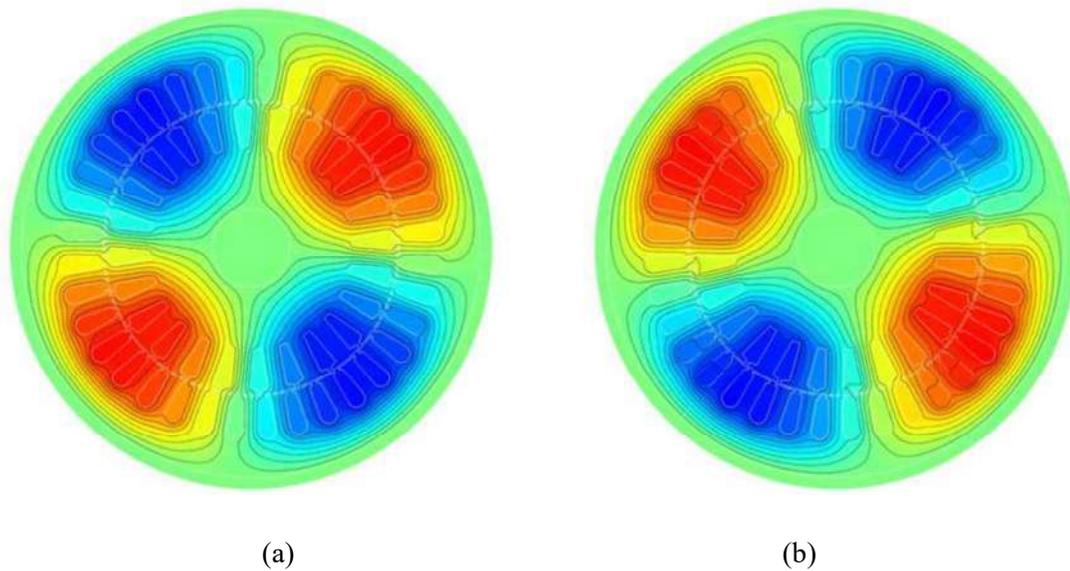


Figura 4.27 (a) Potencial magnético en t_4 . (b) Potencial magnético en t_5 . Condición bajo carga de 10 N-m.

4.5.3 Condición bajo carga con fase A disminuida

En este caso de estudio se ejemplificará la operación de la máquina con una fase disminuida. La simulación se realizó considerando una disminución en magnitud de la fase A en 0.5 p.u, en 0.4 segundos y en operación normal bajo carga de 10 N-m. La figura 4.28 muestra las corrientes obtenidas en el MIRD bajo esta condición.

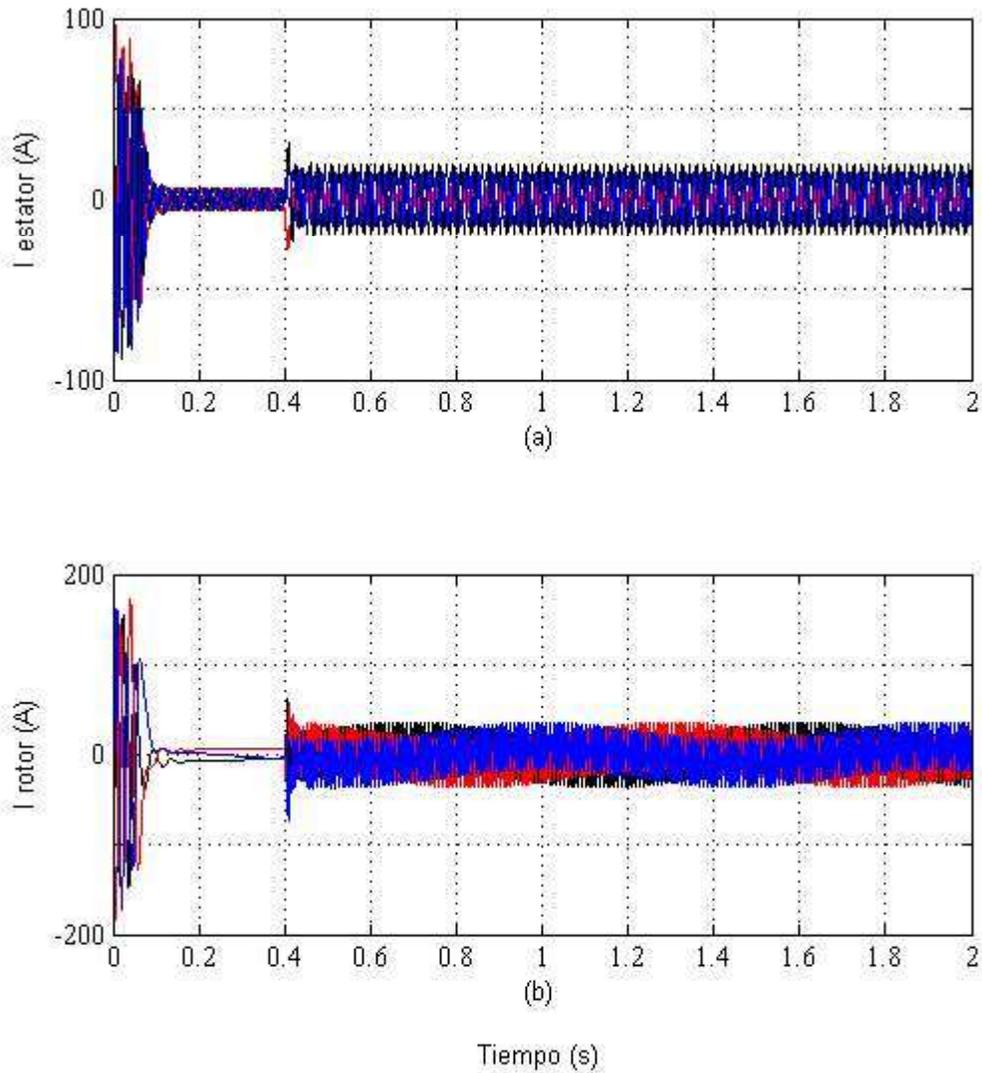


Figura 4.28 (a) Corriente trifásica de estator. (b) Corriente trifásica de rotor. Condición bajo carga de 10 N-m con fase *A* disminuida.

La figura 4.29 ilustra de una mejor forma la corriente de rotor, nótese la onda fundamental de las corrientes de fase y su gran cantidad de armónicos.

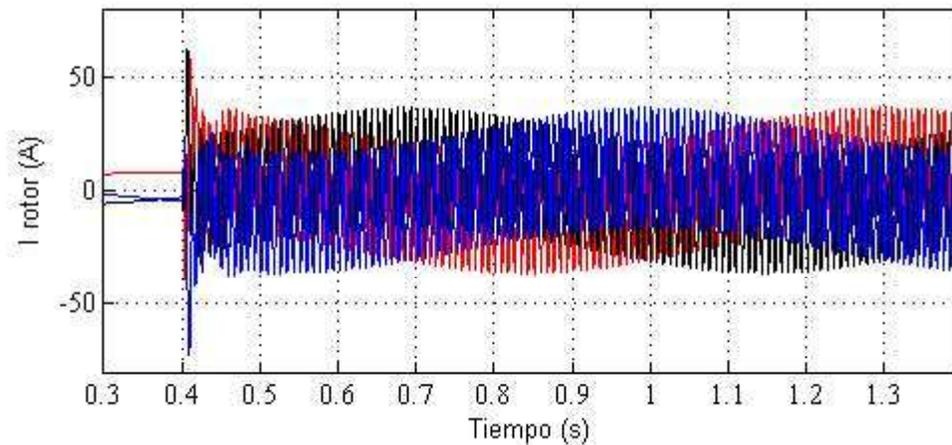


Figura 4.29 Corriente de rotor en estado estable con Fase *A* disminuida.

En la figura 4.29 puede verse que las corrientes de fase de rotor presentan una misma respuesta pero desfasada 120 grados eléctricos entre sí. Esto debido a que la variación de flujo magnético, con falla o sin falla, es la misma para los tres devanados trifásicos, y desplazada en el tiempo los 120 grados eléctricos existentes entre devanados.

La figura 4.30 muestra los tiempos de estudio y sus respectivas corrientes de estator y rotor.

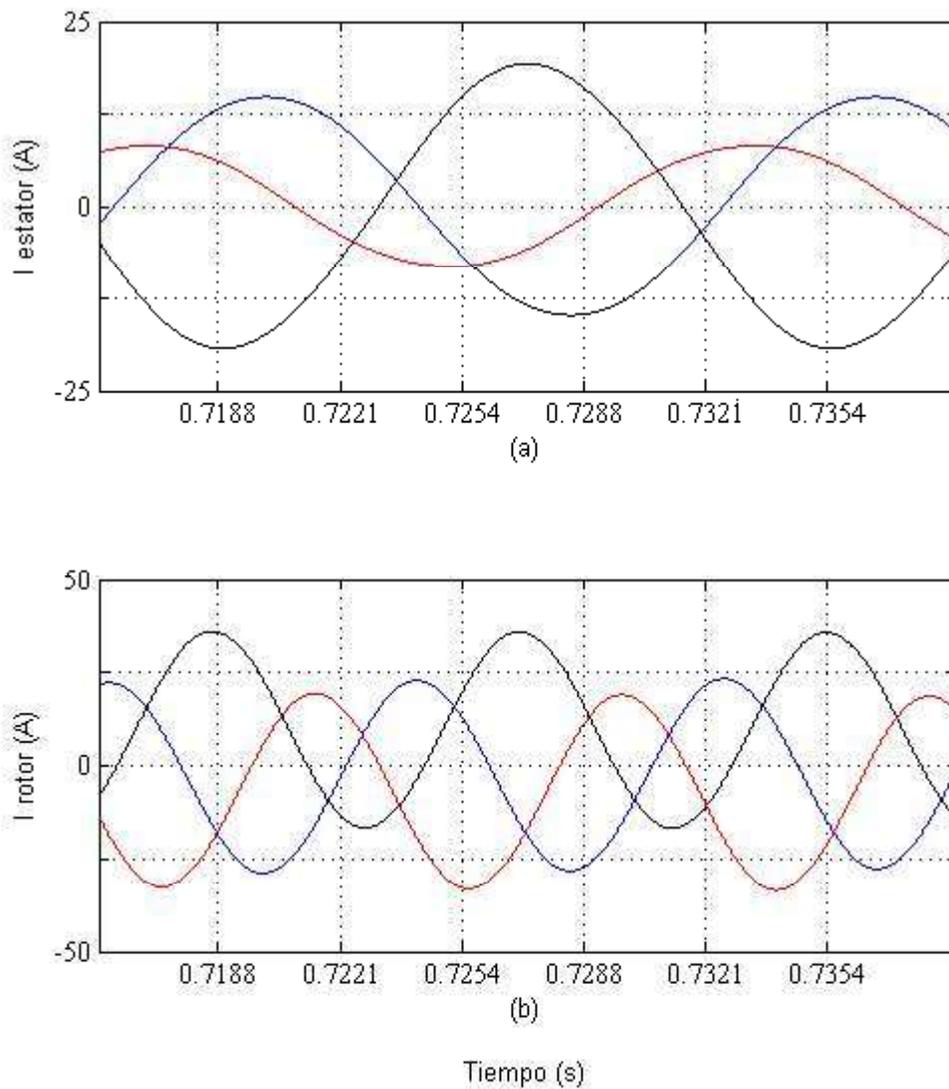


Figura 4.30 Tiempos de estudio. (a) Corrientes de estator. (b) Corrientes de rotor. Condición bajo carga de 10 N-m con fase *A* disminuida.

Con las corrientes mostradas en la figura 4.30, la figura 4.31 muestra la densidad y líneas de flujo magnético resultantes en t_0 .

Superficie: Densidad de flujo magnético, norma (T)
Curva de nivel: Vector de potencial magnético, componente z (Wb/m)

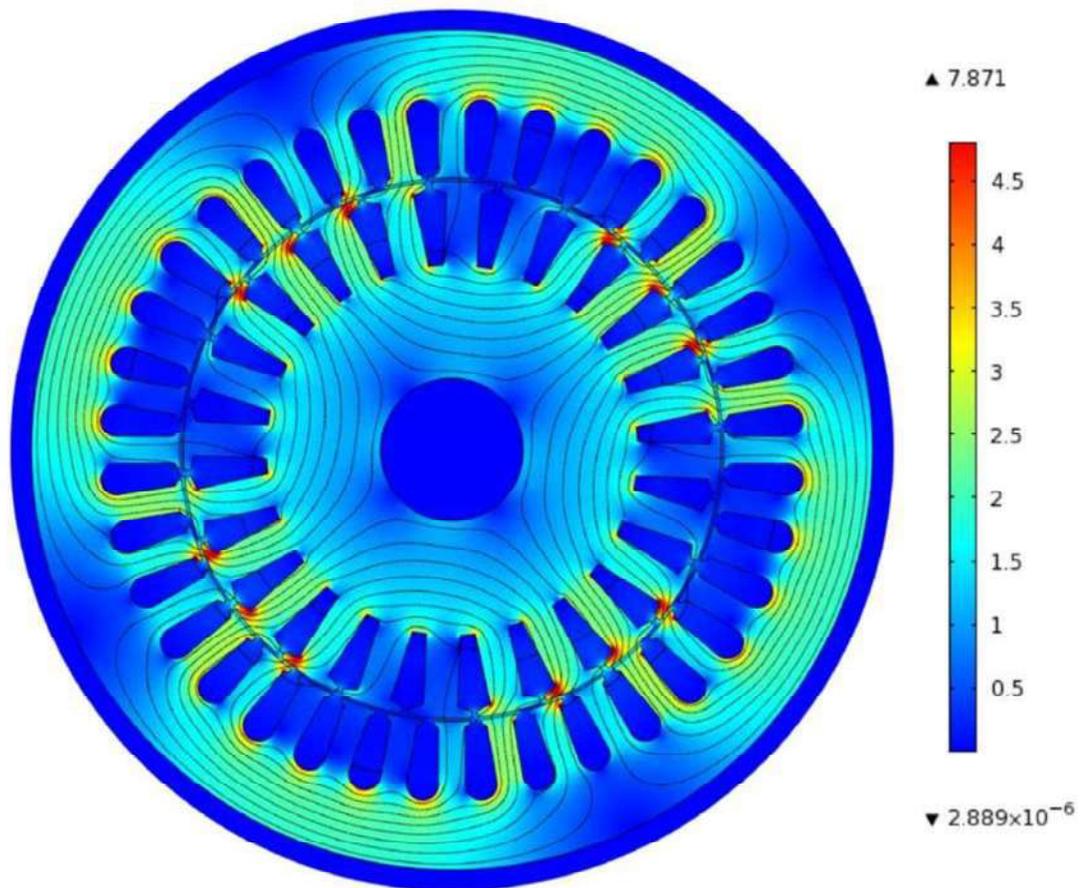


Figura 4.31 Densidad de flujo magnético B , Teslas. Líneas de flujo magnético. Condición bajo carga de 10 N-m con fase A disminuida. Tiempo t_0 .

En la figura 4.31 puede notarse la deformación magnética generada por el desbalance en magnitud. Nótese la deformación de las líneas de flujo respecto a los casos sin falla (en vacío y bajo carga), así como la disminución en las intensidades de densidad magnética en gran parte de la máquina.

La figura 4.32 muestra únicamente líneas de flujo magnético resultantes del estudio.

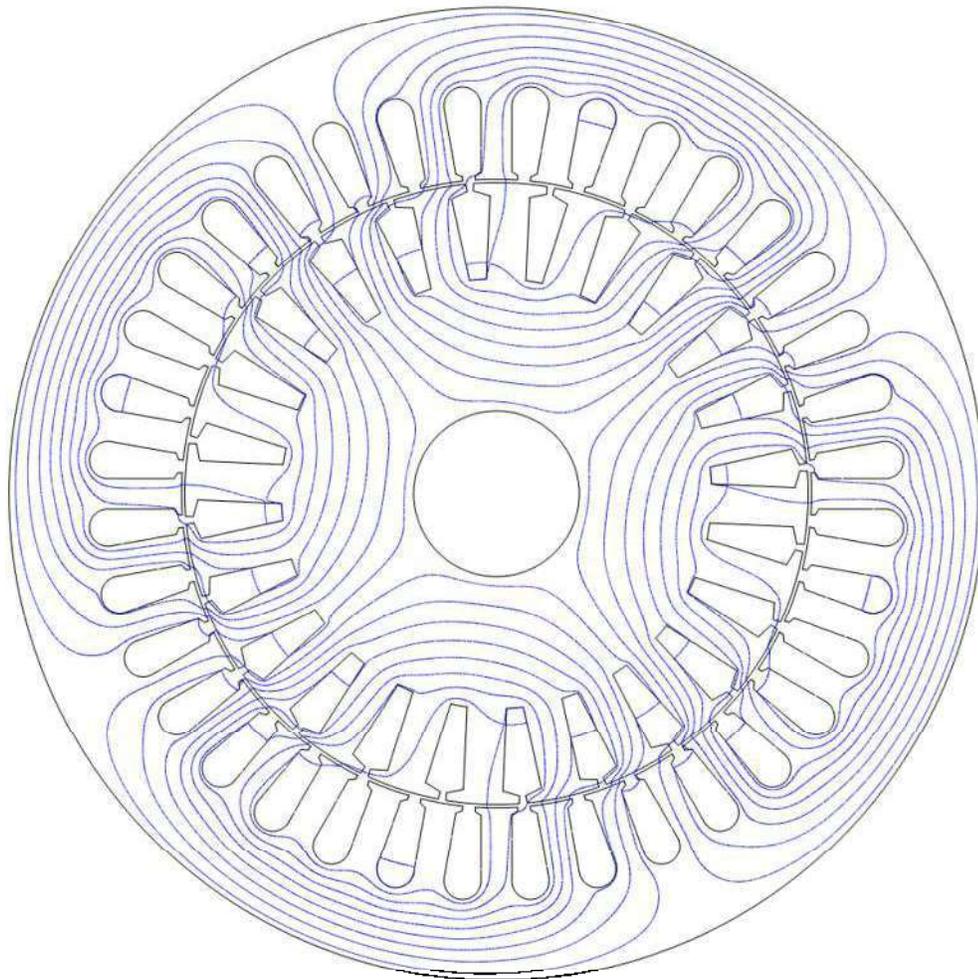


Figura 4.32 Líneas de flujo magnético. Condición bajo carga de 10 N-m con fase A disminuida.

Tiempo t_0 .

Las figuras 4.33, 4.34 y 4.35 muestran el potencial magnético y líneas de flujo para los seis tiempos de estudio.

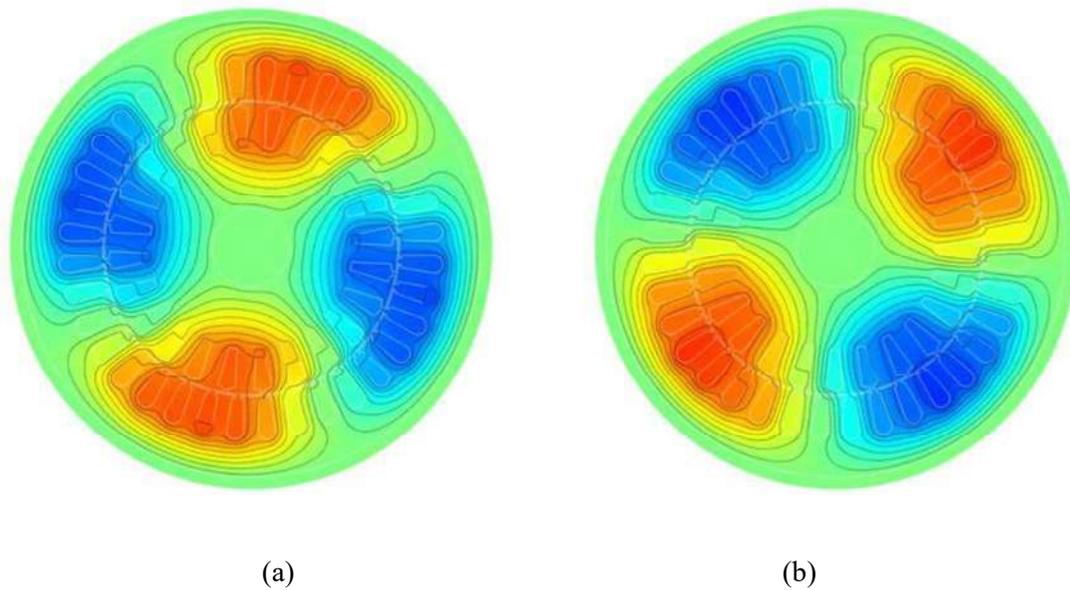


Figura 4.33 (a) Potencial magnético en t_0 . (b) Potencial magnético en t_1 . Condición bajo carga de 10 N-m con fase A disminuida.

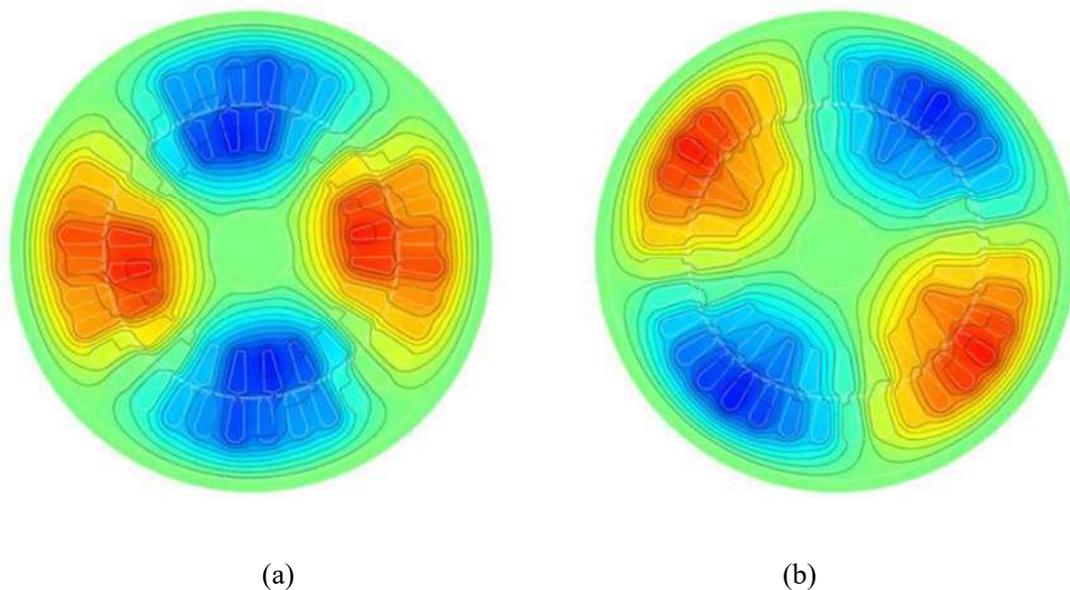


Figura 4.34 (a) Potencial magnético en t_2 . (b) Potencial magnético en t_3 . Condición bajo carga de 10 N-m con fase A disminuida.

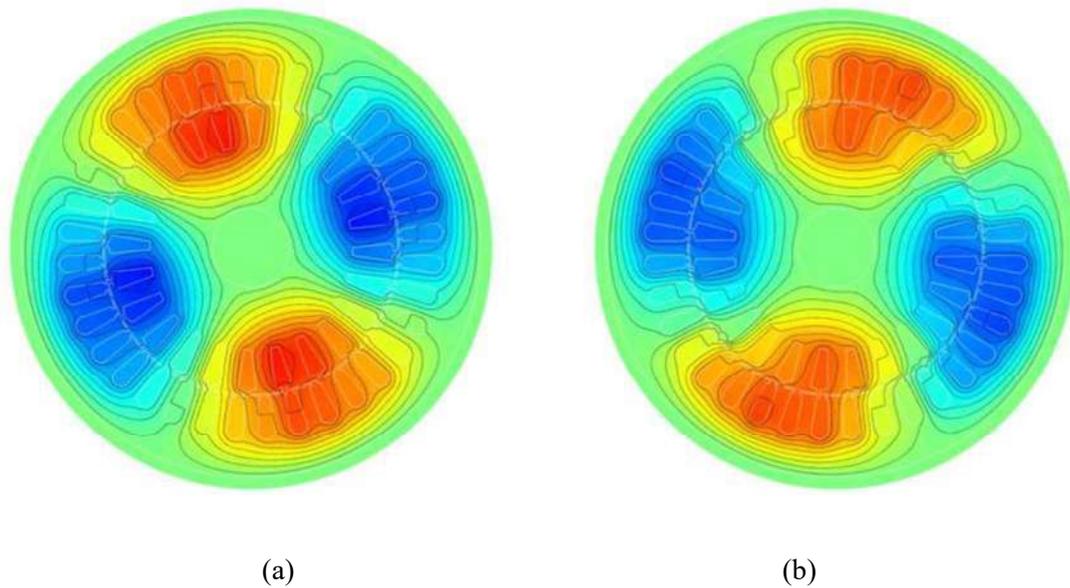


Figura 4.35 (a) Potencial magnético en t_4 . (b) Potencial magnético en t_5 . Condición bajo carga de 10 N-m con fase A disminuida.

Puede verse en las figuras anteriores que tanto el campo magnético como la distribución de potencial magnético no permanecen uniformes en el tiempo. Nótese como los potenciales magnéticos de rotor y estator pareciera que se desalinean en ciertos instantes de tiempo. Esto genera que el par de la máquina no sea constante y que la velocidad varíe provocando vibraciones en el MIRD.

4.5.4 Condición bajo carga con fase A defasada

En esta sección se simulará la operación del motor considerando un desbalance en ángulo de fase, es decir, se considerará que la fase A de la alimentación presenta un ángulo de fase de +30 grados, que difiere de los 0 grados ideales considerados en un sistema trifásico balanceado secuencia abc con referencia en la fase A . La figura 4.36 muestra las corrientes obtenidas en la simulación.

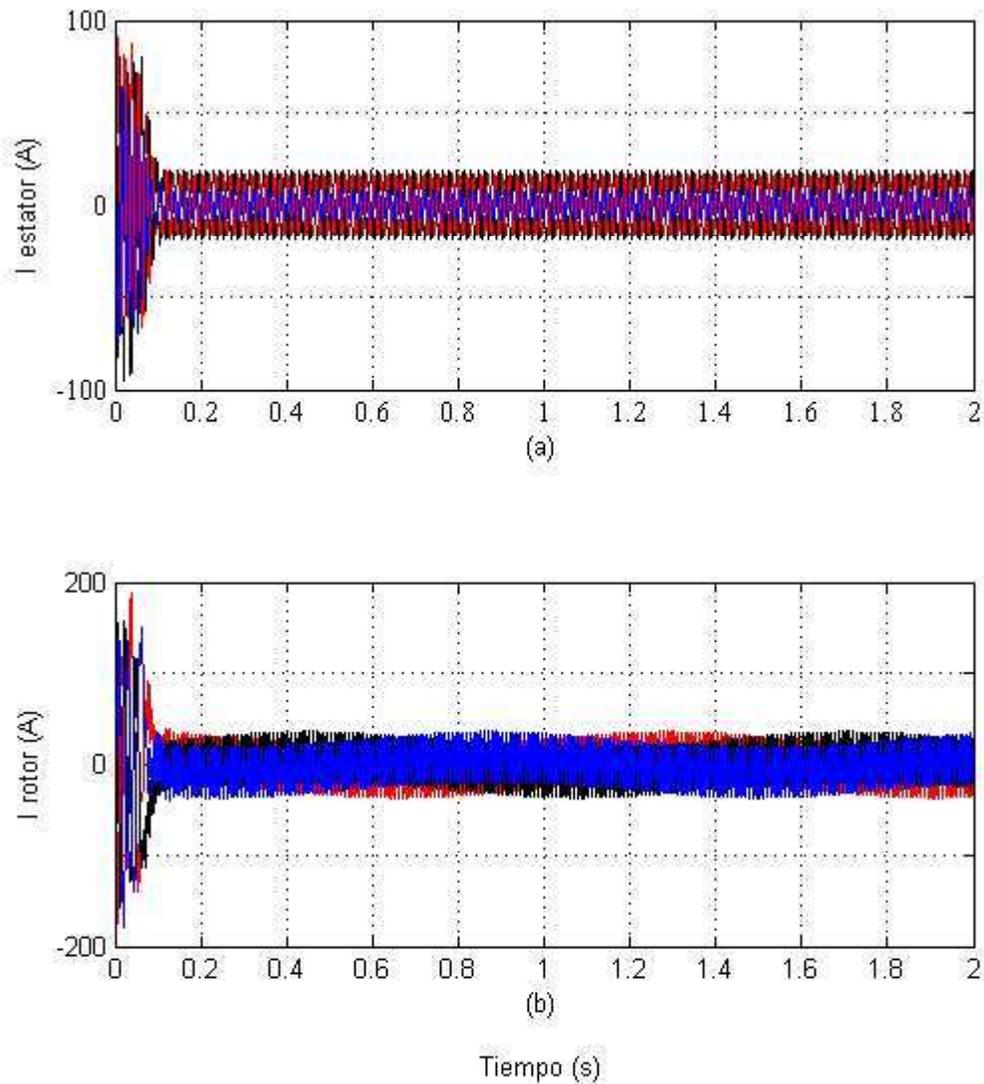


Figura 4.36 (a) Corriente trifásica de estator. (b) Corriente trifásica de rotor. Condición bajo carga de 10 N-m con fase *A* desfasada.

Nótese en la figura 4.36 que la respuesta en el rotor es igual a la obtenida con un desbalance en magnitud, es decir, con ondas fundamentales de fase balanceadas y con gran cantidad de armónicos.

La figura 4.37 muestra los tiempos de estudio y las corrientes obtenidas en estado estable.

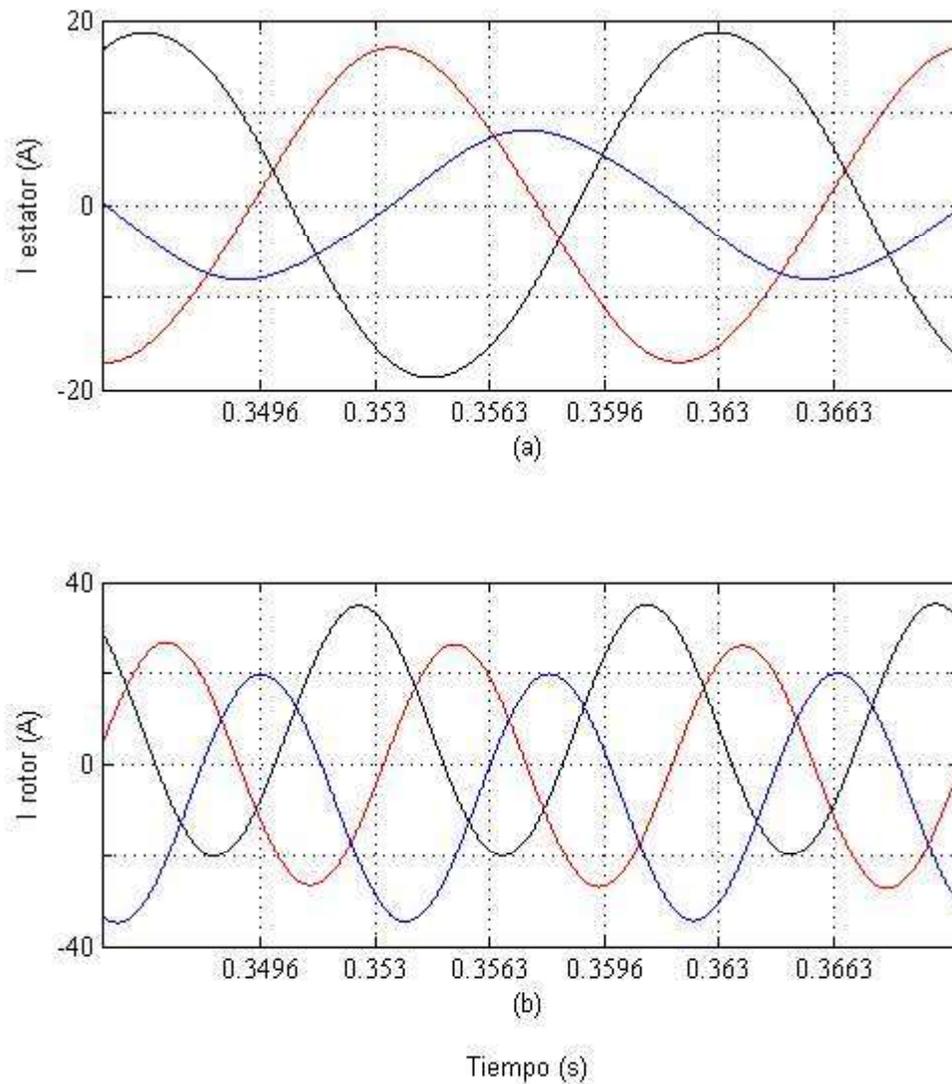


Figura 4.37 Tiempos de estudio. (a) Corrientes de estator. (b) Corrientes de rotor. Condición bajo carga de 10 N-m con fase *A* desfasada.

Con las corrientes mostradas en la figura 4.37, la figura 4.38 muestra la densidad y líneas de flujo magnético resultantes en t_l , tiempo en el cual los potenciales magnéticos de rotor y estator se encuentran desalineados.

Superficie: Densidad de flujo magnético, norma (T)
Curva de nivel: Vector de potencial magnético, componente z (Wb/m)

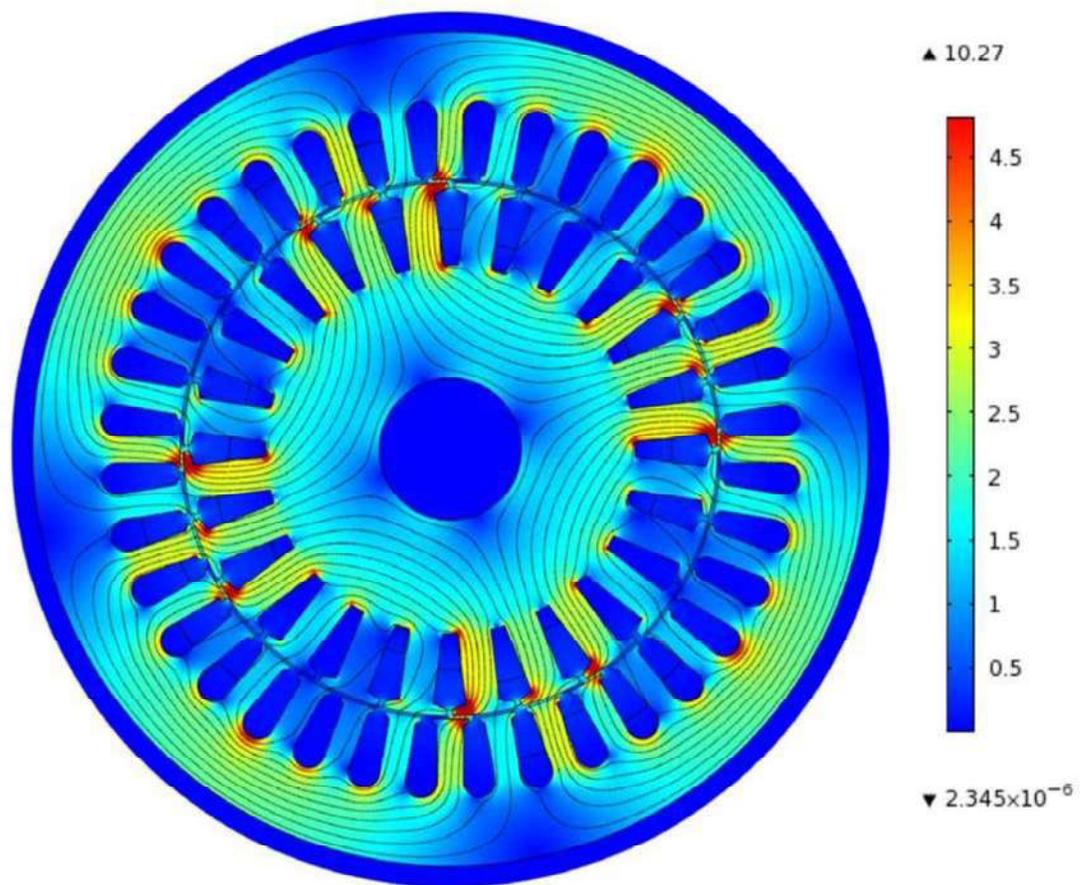


Figura 4.38 Densidad de flujo magnético B , Teslas. Líneas de flujo magnético. Condición bajo carga de 10 N-m con fase A desfasada. Tiempo t_1 .

Nótese en la figura 4.38 que los resultados son parecidos a los obtenidos con desbalance en magnitud. Sin embargo, las intensidades de densidad de flujo magnético son mayores respecto al caso con disminución en la fase A . Esto se debe a que la disminución de voltaje en la fase A , en este último caso, genera corrientes menores en la máquina y por consiguiente densidades de flujo más pequeñas.

La figuras 4.39, 4.40 y 4.41 muestran el potencial magnético y líneas de flujo para los seis tiempos de estudio.

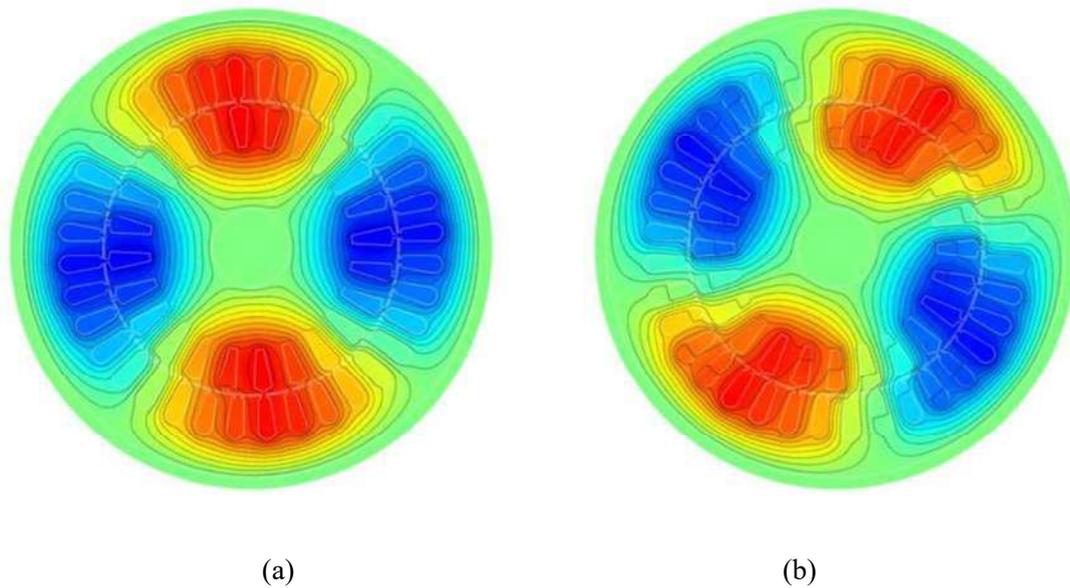


Figura 4.39 (a) Potencial magnético en t_0 . (b) Potencial magnético en t_1 . Condición bajo carga de 10 N-m con fase A desfasada.

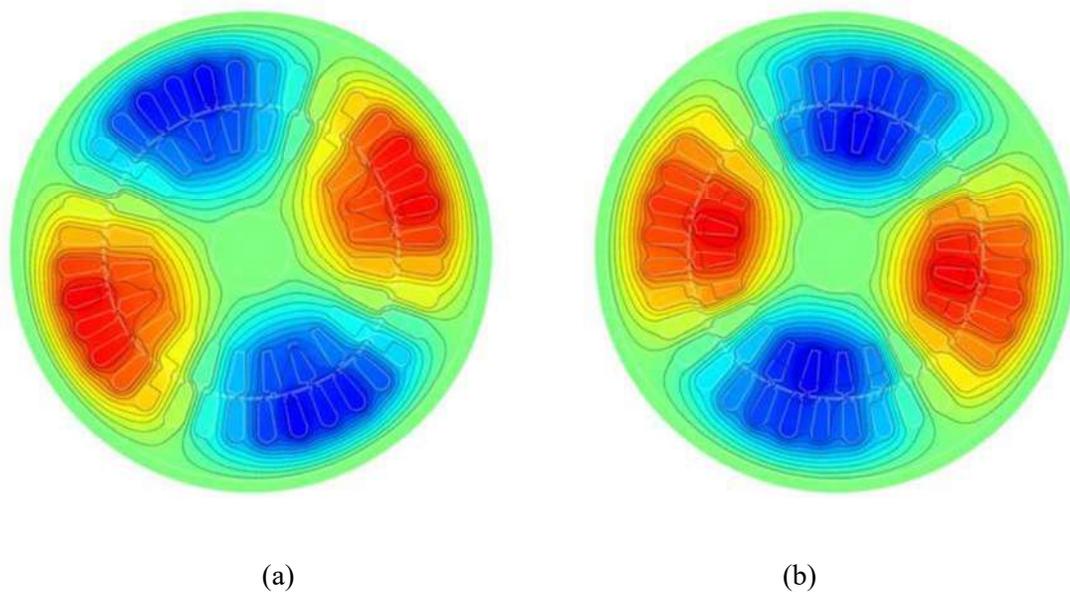


Figura 4.40 (a) Potencial magnético en t_2 . (b) Potencial magnético en t_3 . Condición bajo carga de 10 N-m con fase A desfasada.

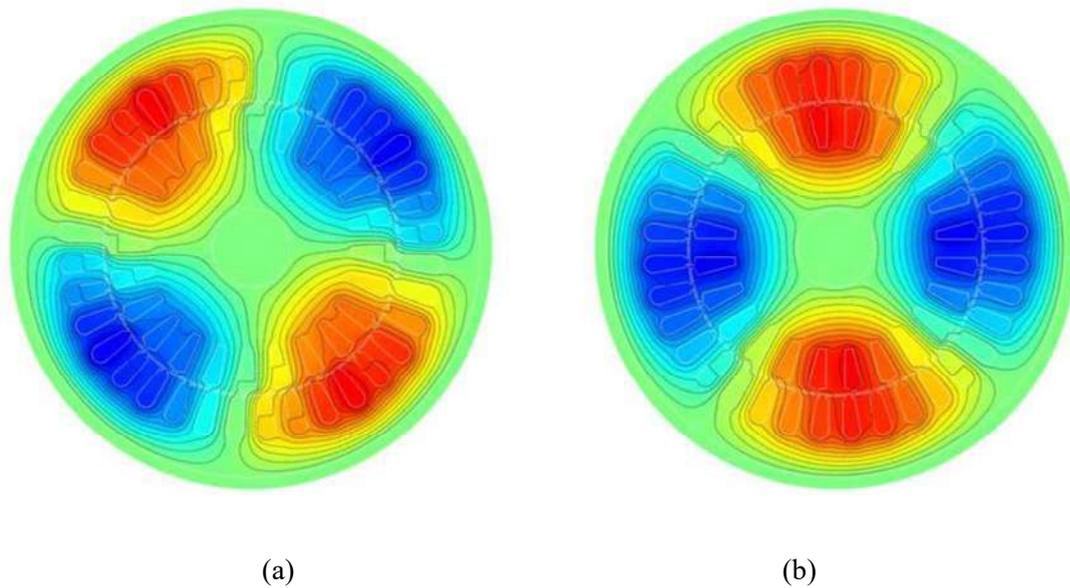


Figura 4.41 (a) Potencial magnético en t_4 . (b) Potencial magnético en t_5 . Condición bajo carga de 10 N-m con fase A desfasada.

Puede verse que para este caso también se presentan los fenómenos de campo magnético no uniforme y el de desalineamiento de los potenciales magnéticos de rotor y estator, generando pares no constantes en la máquina y por consiguiente vibraciones.

4.5.5 Condición bajo carga sin fase A

En esta sección se simulará la operación de la máquina sin una fase en la alimentación. Se considera una condición bajo carga de 10 N-m y que la fase A sale de operación en 0.4 segundos. En la figura 4.42 se muestran las corrientes obtenidas para esta condición.

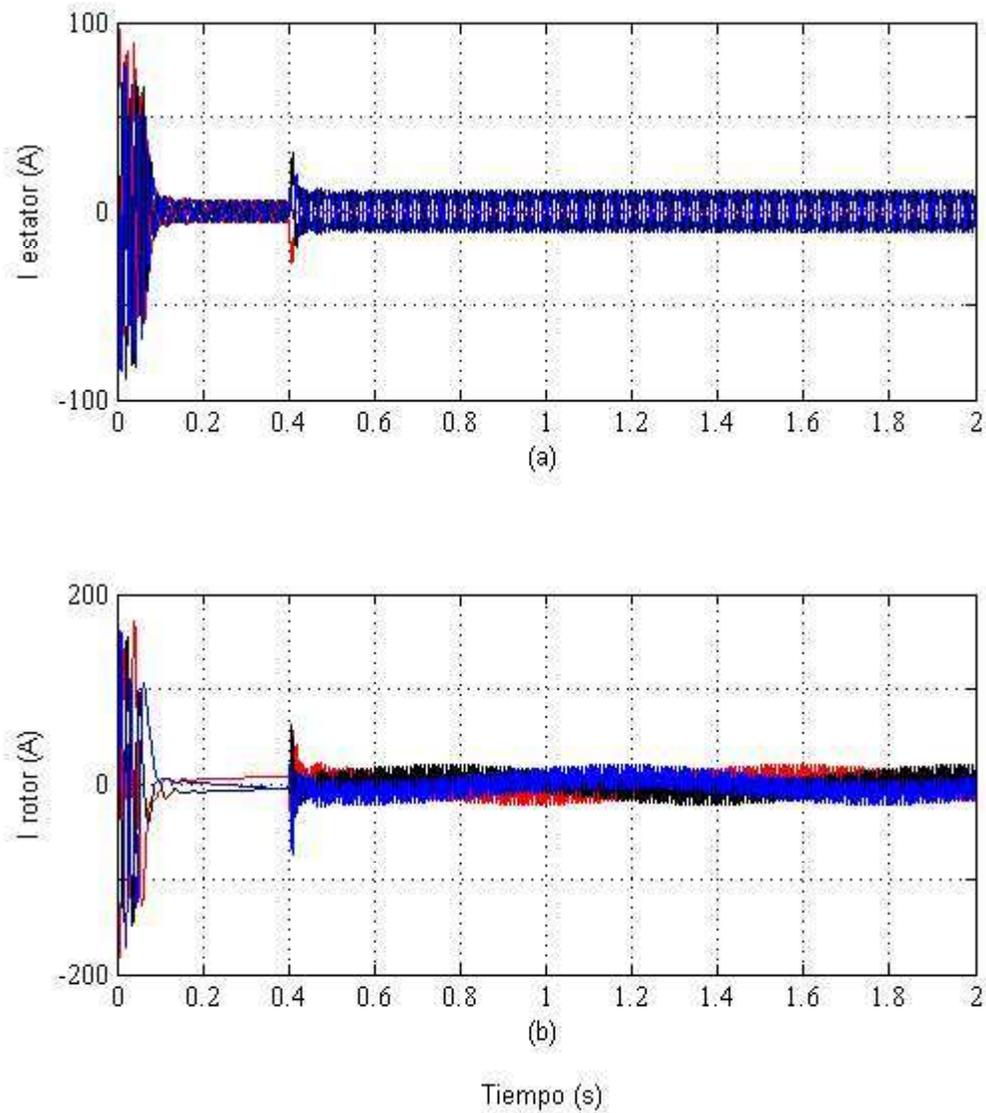


Figura 4.42 (a) Corriente trifásica de estator. (b) Corriente trifásica de rotor. Condición bajo carga de 10 N-m sin fase *A*.

La figura 4.43 muestra los tiempos de estudio y sus respectivas corrientes de estator y rotor.

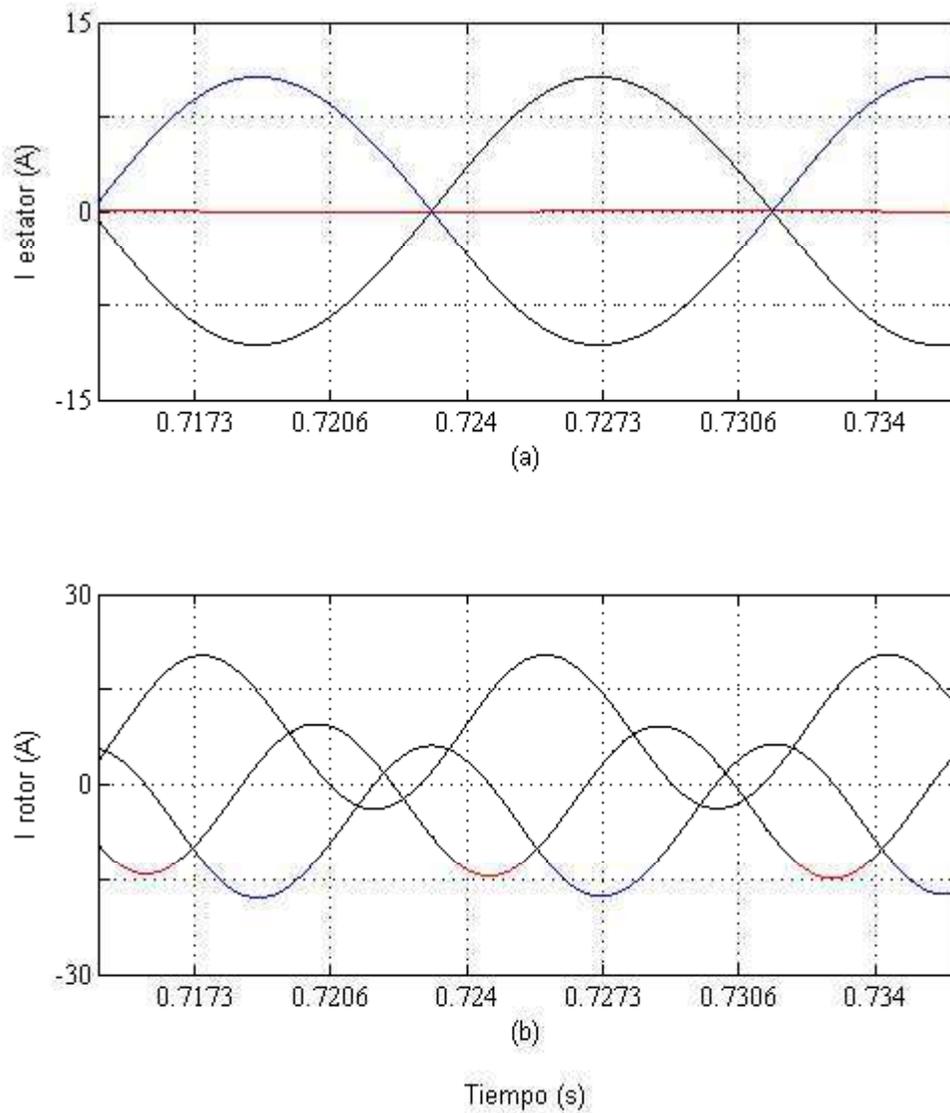


Figura 4.43 Tiempos de estudio. (a) Corrientes de estator. (b) Corrientes de rotor. Condición bajo carga de 10 N-m sin fase *A*.

Con las corrientes mostradas en la figura 4.43, la figura 4.44 muestra la densidad y líneas de flujo magnético resultantes en el tiempo t_0 .

Superficie: Densidad de flujo magnético, norma (T)
Curva de nivel: Vector de potencial magnético, componente z (Wb/m)

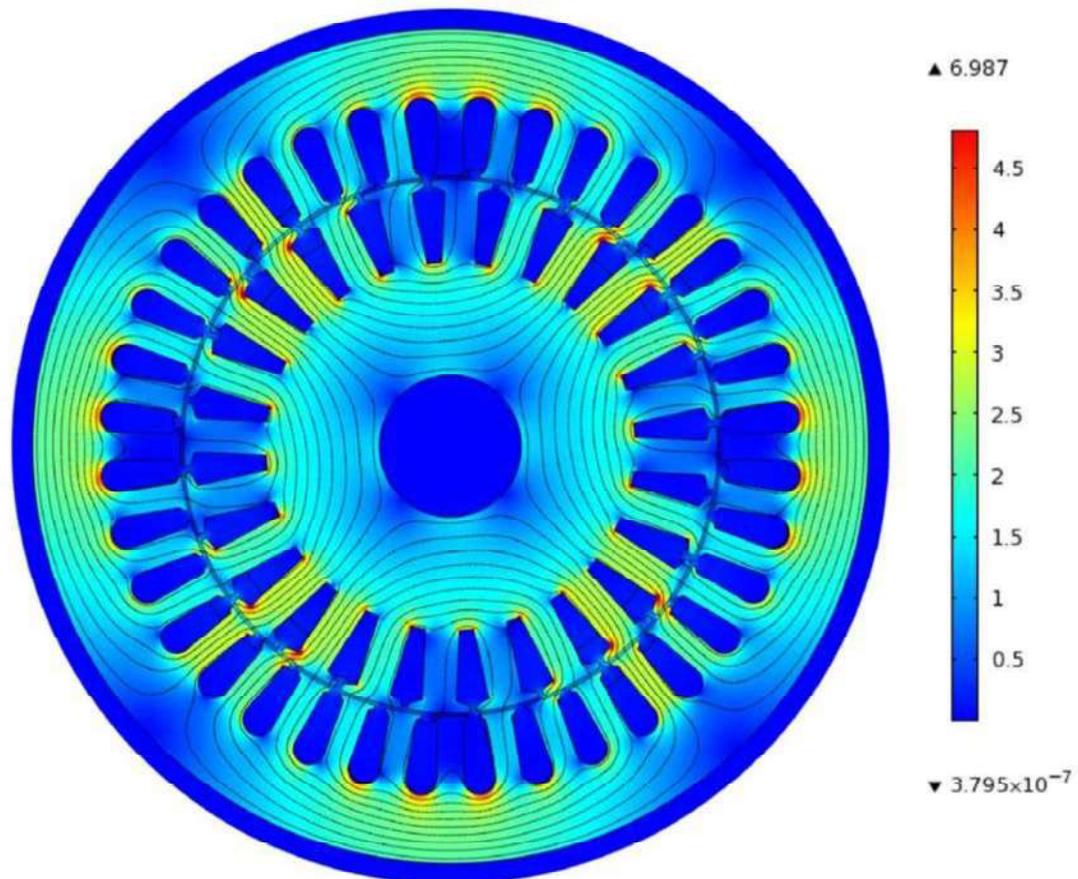


Figura 4.44 Densidad de flujo magnético B , Teslas. Líneas de flujo magnético. Condición bajo carga de 10 N-m sin fase A . Tiempo t_0 .

En la figura 4.44 puede verse que para este caso la deformación magnética no es tan grande como en los casos con fase A disminuida o desfasada. Nótese que para este caso, la deformación magnética es parecida a la que se genera naturalmente en los motores bifásicos, algo que es razonable, dado que el MIRD se encuentra operando precisamente solo con dos fases.

Las figuras 4.45, 4.46 y 4.47 muestran el potencial magnético y líneas de flujo para los seis tiempos de estudio.

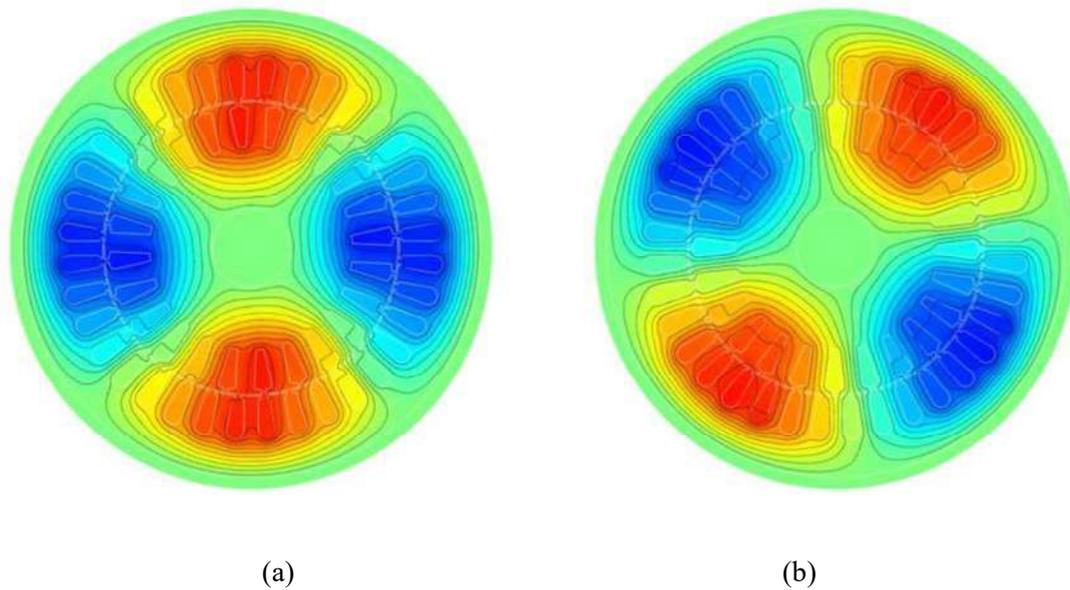


Figura 4.45 (a) Potencial magnético en t_0 . (b) Potencial magnético en t_1 . Condición bajo carga de 10 N-m con sin fase A .

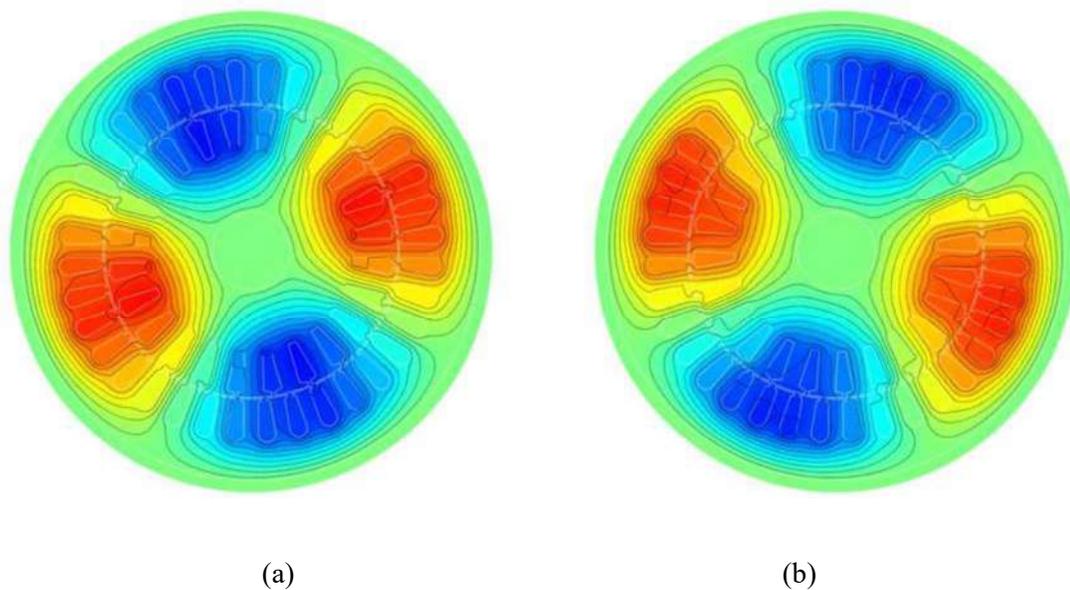


Figura 4.46 (a) Potencial magnético en t_2 . (b) Potencial magnético en t_3 . Condición bajo carga de 10 N-m con sin fase A .

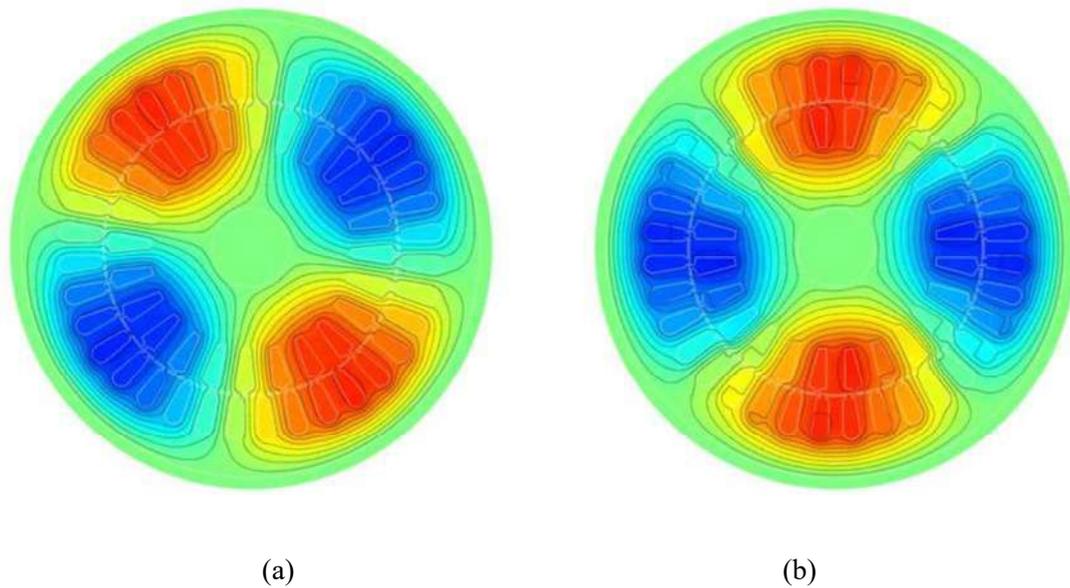


Figura 4.47 (a) Potencial magnético en t_4 . (b) Potencial magnético en t_5 . Condición bajo carga de 10 N-m con sin fase A .

En las figuras anteriores puede verse que para este caso también existen los fenómenos de deformación de campo y el desalineamiento de potencial magnético, si bien es cierto que los fenómenos se presentan en menor medida respecto a los casos con desbalanceo en magnitud o en fase, también es importante señalar que pequeñas vibraciones se seguirán presentando en el MIRD, y serán parecidas a las que se generan en un motor bifásico en operación normal.

Capítulo 5

Conclusiones

En este capítulo se presentan conclusiones del presente trabajo. Se muestran observaciones generales sobre la aplicación del elemento finito a problemas diferenciales y sobre su aplicación específica al estudio de campos magnéticos en máquinas eléctricas, así como aportaciones y trabajos futuros.

5.1 Conclusiones

El método del elemento finito representa, con ayuda de los ordenadores actuales, una herramienta poderosa en la solución de problemas diferenciales complejos. Su transformación, caracterizada por trasladar un problema diferencial a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales o no lineales, hace que el método sea práctico y útil en su aplicación.

En el uso del MEF, conocimientos generales sobre el método, así como conocimientos técnicos sobre la rama en que se aplica, son de vital importancia para obtener resultados confiables en tiempos de cómputo razonables. Un mayor número de elementos finitos mejora la exactitud en la solución pero incrementa el tiempo de cómputo. El equilibrio entre exactitud y tiempo de solución solo se obtiene mediante la intuición y experiencia del analista, mismas que se obtienen con el tiempo y que al igual que la técnica numérica en sí, forman parte importante en el uso y aplicación del elemento finito.

La exactitud del MEF depende del número de elementos y del grado de interpolación de los mismos. La mayoría de los fenómenos físicos tienen comportamientos no lineales, por lo que generalmente entre mayor sea el grado de las funciones de aproximación mejor será la exactitud. Sin embargo, debe tomarse en cuenta que con grados de interpolación mayores la derivación de las funciones de aproximación se torna más compleja, lo que incrementa el tiempo de cómputo.

En la actualidad el uso del elemento finito está íntimamente ligado al uso de computadoras. La capacidad de procesamiento de los ordenadores actuales facilita en gran medida el análisis del MEF mediante el manejo de sistemas matriciales de gran tamaño.

Las matrices obtenidas por medio del elemento finito tienen mucha similitud, en cuanto a simetría y dispersidad se refiere, con las obtenidas en un sistema eléctrico de potencia. El uso de técnicas de dispersidad para el manejo de matrices puede mejorar el tiempo de cómputo y la liberación de espacio en la memoria del ordenador.

Se validó la aplicación de COMSOL al estudio de campos magnéticos en máquinas eléctricas.

La teoría de máquinas eléctricas muchas veces idealiza los estudios con el objetivo de simplificar la solución a diversos problemas. Por ejemplo, en el estudio de reactores monofásicos se considera para fines prácticos que el flujo magnético interno en el núcleo permanece constante, lo que facilita aproximar valores de inductancias y hacer cálculos de diversas variables magnéticas. Sin embargo, un estudio detallado requiere resolver a rigor las ecuaciones de Maxwell sin realizar simplificaciones. Con la ayuda del elemento finito y COMSOL se observó la distribución de flujo magnético real en un reactor y en un transformador monofásico. Se concluyó que la densidad de flujo magnético en ambos casos está lejos de permanecer constante a lo largo del núcleo, y que contrariamente, existen zonas con densidades de flujo mucho mayores que en otras, como lo son las esquinas internas del núcleo las cuales por su baja reluctancia tienden a “atraer” las líneas de flujo y a alejarlas de las esquinas externas, las cuales por su alta reluctancia permanecen con bajas densidades de flujo magnético.

Se comprobó que el campo magnético giratorio en un MIRD, tanto en vacío como bajo carga, permanece prácticamente constante y girando a una velocidad uniforme. Sin embargo, la condición bajo carga obliga al MIRD a incrementar un poco el flujo respecto a la condición en vacío para satisfacer el par demandado. Conforme aumenta la carga el MIRD se ve obligado a incrementar todavía un poco más el flujo para proporcionar el par demandado y así suministrar la potencia requerida.

Las vibraciones generadas en un MIRD por desbalance en la alimentación son producidas por el desalineamiento discontinuo de los potenciales magnéticos de rotor y estator. Este desalineamiento produce un par no constante en la máquina, generando vibraciones.

Se observó que en el MIRD los desbalances tanto en fase como en magnitud generan resultados similares, es decir, en ambos casos se presentan vibraciones generadas por el desalineamiento de potencial magnético. Sin embargo, cabe señalar que en el caso de desbalance en magnitud se obtuvieron densidades de flujo un poco menores gracias a la disminución de 0.5 p.u. en una de las fases.

Se concluyó que son más severas las fallas con desbalance, ya sea en magnitud o en fase, que la propia operación del motor sin una de las fases. En este último caso el MIRD encuentra un cierto balance tanto en las corrientes de rotor como en las de estator, generando un desalineamiento de potencial magnético menor y produciendo vibraciones más pequeñas, parecidas a las existentes en un motor bifásico.

Se observó la característica de la corriente de fase del rotor cuando existen desbalances, la cual presenta una corriente fundamental con gran cantidad de armónicos. Si se toma en cuenta solo la señal fundamental, las corrientes del rotor presentan una respuesta trifásica balanceada.

5.2 Trabajo futuro

Un estudio tridimensional mediante elementos finitos y COMSOL que permita obtener los parámetros reales de diversas máquinas eléctricas, facilitando una predicción más exacta del comportamiento de la máquina ante diversas situaciones.

Realizar análisis transitorios de campo magnético en máquinas eléctricas usando el MEF y COMSOL.

Utilizar COMSOL en el diseño de motores y de máquinas eléctricas en general.

Aplicar COMSOL al estudio de campos eléctricos, permitiendo, entre muchas de las aplicaciones, el cálculo preciso de pérdidas eléctricas generadas por corrientes parasitas.

Realizar estudios magnéticos en máquinas eléctricas considerando la no linealidad de materiales.

Referencias

- [Silvester69] Silvester, P. Finite element solution of homogeneous waveguide problems. *Alta Frequenza*, 38:313-317, 1969.
- [Ahmed69] Ahmed, S. y Daly, P. Waveguide solutions by the finite element methods. *Radio and Electronic Engineer*, 38:217-223, 1969.
- [Chari71] Chari, M. V. K. y Silvester, P. Analysis of turboalternator magnetic fields by finite elements. *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Power Apparatus and Systems*, págs. 454-464, 1971.
- [Daly72] Daly, P. y Helps, J. D. Direct method of obtaining capacitance from finite elements matrices. *Electronics Letters*, 8:132-133, 1972.
- [Carpenter75] Carpenter, C. J. Finite element network models and their application to eddycurrent problems. *Institution of Electrical Engineers Proceedings*, 122:455-462, 1975.
- [Barnes77] Barnes, J. J. y Lomax, R. J. Finite element methods in semiconductor device simulation. *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Electron Devices*, 24:1082-1089, 1977.
- [Ferrari78] Ferrari, R. L. y Maile, G. L. Three-dimensional finite element method for solving electromagnetic problems. *Electronic letters*, vol. 14, No. 15, págs. 467-468, 1978.

- [Buturla81] Buturla, E. M., Cottrell, P. E., Grossman, B. M. y Salsburg, K. A. Finite element analysis of semiconductor devices: the FIELDAY program. *IBM Journal of Research and Development*, 25:218-231, 1981.
- [Silvester89] Silvester, P. y Ferrari, R. Elementos finitos para ingeniería eléctrica. 1ra ed., edit. Limusa, México, 1989.
- [Reddy84] Reddy, J. An introduction to the finite element method. 2nd ed., edit. McGraw-Hill, USA, 1984.
- [Chandrupatla99] Chandrupatla, T. y Belegundu, A. Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería. 2da ed., edit. Prentice Hall, México, 1999.
- [Pérez90] Pérez, C. Cálculo de campos magnéticos en máquinas eléctricas utilizando el método del elemento finito. Tesis de Licenciatura, U.M.S.N.H, Julio, 1990.
- [Fitzgerald05] Fitzgerald, A., Kingsley, C. y Umans, S. Máquinas eléctricas. 6ta ed., edit. McGraw-Hill, México, 2005.
- [Chapman06] Chapman, S. Máquinas eléctricas. 4ta ed., edit. MacGraw-Hill, México, 2006.
- [Nasar84] Nasar, S. Máquinas eléctricas y electromecánicas. 1ra ed., edit. MacGraw-Hill, Mexico, 1984.
- [Halliday99] Halliday, D. Resnick, R. y Krane, K. Física vol. 2. 4ta ed., edit. Continental, México, 1999.

[COMSOL10] COMSOL. *COMSOL Multiphysics User's Guide*. COMSOL, inc, 2010.

[COMSOL] COMSOL. Pagina web oficial. <http://www.comsol.com>