



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN  
NICOLÁS DE HIDALGO**



**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA**

---

**TESIS**

**“ANÁLISIS DE RESPUESTA A LA FRECUENCIA DE SISTEMAS  
MODELADOS EN BOND GRAPH”**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**INGENIERO ELECTRICISTA**

**PRESENTA:**

**JUAN LUIS ROSAS PÉREZ**

**ASESOR:**

**DOCTOR EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**GILBERTO GONZÁLEZ AVALOS**

**OCTUBRE DEL 2014**

# Agradecimientos

*Quiero agradecer primeramente a dios por permitirme llegar hasta este momento tan importante en mi vida y poder culminar mis estudios de licenciatura por medio de este trabajo de tesis.*

*Un infinito agradecimiento a mis padres: **María de los Ángeles Pérez y Luis Rosas** por brindarme la educación que he recibido a costa de un gran esfuerzo y sobre todo mucho sacrificio, gracias por el apoyo incondicional que siempre me han brindado y por sus consejos que me han hecho ser un hombre de bien.*

*A mi novia **Fabiola Quiroz** por estar a mi lado durante los momentos de alegría pero principalmente por estar ahí apoyándome siempre en los momentos de tristeza y no dejarme caer dándome los ánimos para salir adelante.*

*A mi asesor de tesis el **Dr. Gilberto González Avalos** por dedicar su tiempo a transmitirme sus conocimientos y por motivarme a desarrollar este trabajo de tesis. Además por demostrarme con su carácter y forma de ser que no importa el que dirán siempre y cuando uno se guíe por la verdad y con principios éticos así como morales.*

*A todos mis amigos que conocí en la facultad y que lograron que la estadía en ella fuera muy amena y agradable, pero en especial a mis amigos aquellos con los cuales realizábamos equipos de estudio para practicar en los laboratorios y para estudiar para los exámenes, muchas de esas veces a altas horas de la madrugada, sin duda de los mejores momentos compartidos con ellos.*

*A la Facultad de Ingeniería Eléctrica y a todo su cuerpo académico que me forjaron para llegar a ser lo que ahora soy, a todos ellos mil gracias por transmitirme sus conocimientos.*

*Al **Ing. José de Jesús Moreno** por haberme dado la oportunidad de realizar mis prácticas profesionales en mrg Fraternity y de esta manera aplicar mis conocimientos, además por enseñarme a ver el campo de la ingeniería eléctrica desde otro punto de vista. Por motivarme a crecer como profesionista y sobre todo como persona.*

# Dedicatoria

*A mis padres y hermanos que tanto quiero por estar siempre al pendiente de mi.*

*A mi sobrina que algún día espero ser una fuente de inspiración para ella.*

*A todos mis familiares, en especial a los que ya no están y que seguro estoy estarán orgullosos de mi por ser el primer ingeniero de la familia.*

*A todas aquellas personas que directa e indirectamente estuvieron apoyándome.*

*A esas personas de mi rancho que alguna vez me dijeron: para qué estudias?, espero y algún día cambien su forma de pensar.*

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>II</b>
<b>Indice general</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Palabras clave</b>	<b>VII</b>
<b>Abstract</b>	<b>VIII</b>
<b>Keywords</b>	<b>IX</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>X</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. La respuesta a la frecuencia en sistemas . . . . .	1
1.2. Objetivo . . . . .	2
1.3. Justificación . . . . .	2
1.4. Metodología . . . . .	2
1.5. Contenido de la tesis . . . . .	3
<b>2. Modelado en Bond Graph y Respuesta a la Frecuencia</b>	<b>5</b>
2.1. Introducción . . . . .	5
2.2. Sistema . . . . .	5
2.2.1. Clasificación de Sistemas . . . . .	6
2.3. Modelado . . . . .	7
2.4. Bond Graph . . . . .	8
2.4.1. Introducción . . . . .	8
2.4.2. Componentes Básicos de un Bond Graph . . . . .	10
2.4.3. Elementos puerto-1 . . . . .	11
2.4.4. Elementos puerto-2 . . . . .	12
2.4.5. Elementos puerto-3 o multipuertos . . . . .	13
2.4.6. Bond activo . . . . .	16

2.4.7. Causalidad . . . . .	17
2.4.8. Procedimiento para la asignación de causalidad en un multipuerto . . . . .	20
2.4.9. Procedimiento para modelar sistemas en Bond Graph . . . . .	20
2.4.10. Modelado de sistemas eléctricos . . . . .	21
2.4.11. Estructura de unión en sistemas multipuerto . . . . .	24
2.4.12. Vectores clave o vectores significativos . . . . .	24
2.4.13. Relaciones de campo y ecuaciones de estado . . . . .	25
2.4.14. Procedimiento para la obtención de la estructura de unión de un modelo en Bond Graph. . . . .	30
2.4.15. Ejemplo: Obtención de la estructura de unión de un modelo en Bond Graph. . . . .	30
2.5. Respuesta en la frecuencia . . . . .	34
<b>3. La Respuesta a la Frecuencia de un Sistema Modelado en Bond Graph</b>	<b>36</b>
3.1. Introducción . . . . .	36
3.2. Obtención de la función de transferencia a partir de la representación en espacio de estados . . . . .	38
3.3. Ejemplo: Obtención de la función de transferencia de un circuito RLC por el método tradicional y por el método de Bond Graph . . . . .	39
3.4. Bond Graph en causalidad derivativa . . . . .	43
3.4.1. Ejemplo: Obtención de la estructura de unión de un circuito modelado en Bond Graph en causalidad derivativa . . . . .	46
3.5. La relación de Bond Graph en causalidad integral y causalidad derivativa . . . . .	49
3.5.1. Ejemplo: Comprobación de la relación entre GBI y BGD . . . . .	52
3.6. Procedimiento para determinar un Bond Graph en el dominio de la frecuencia. . . . .	53
3.6.1. Ejemplo : Obtención de un Bond Graph en el dominio de la frecuencia de un circuito de dos mallas . . . . .	55
<b>4. Casos de Estudio</b>	<b>59</b>
4.1. Obtención de la función de transferencia de un motor de CD. . . . .	59
4.2. Modelado de un sistema de nivel de líquido . . . . .	63
<b>5. Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>74</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>75</b>

# Resumen

La energía juega un papel muy importante cuando se tienen sistemas conformados por diferentes dominios físicos y más aún cuando las energía interactúa entre ellos, por lo que obtener el modelo matemático de un sistema mediante la teoría clásica que hace uso de leyes y teoremas en la mayoría de los casos puede resultar bastante tedioso y confuso, además de que puede tomar un tiempo considerable el modelar un sistema. Es por eso que en este trabajo de tesis se presentan los conceptos básicos para la descripción de un sistema mediante el modelado con Bond Graph el cual es una manera de modelar sistemas de diferentes dominios de energía de manera gráfica y sencilla .

Se dan a conocer los conceptos y elementos de la teoría de Bond Graph necesarios para poder realizar un modelado, se presentan ejemplos de circuitos eléctricos para poder comprender los pasos, reglas y procedimientos que se deben seguir para un correcto modelado con Bond Graph, además se introduce el concepto de causalidad el cual es uno de los pilares fundamentales de esta teoría. Mediante esta herramienta de modelado se tiene la particularidad de que se minimiza el tiempo de obtención del modelo matemático de un sistema, lo cual se traduce en la obtención de resultados de una simulación en un corto periodo de tiempo.

También se explica porqué es importante el análisis de la respuesta a la frecuencia en sistemas, el cual se hace a partir de la función de transferencia de un sistema, además de que una vez que se obtiene la función de transferencia se puede diseñar un controlador para obtener la respuesta deseada ante una entrada en el sistema.

Se describe la manera de obtener la función de transferencia de un sistema a partir de las variables de estado, donde éstas se determinan a partir del modelo en Bond Graph en causalidad integral, después se describe matemáticamente la relación que existe entre aplicar causalidad integral o causalidad derivativa a un sistema.

Por último, se describe un nuevo procedimiento por el cual es posible determinar la función de transferencia de un sistema de manera rápida y sencilla insertando un nuevo elemento de disipación de energía multiplicado por la variable compleja  $s$  en cada unión donde existe un elemento de almacenamiento de energía, todo esto cuando se tiene el Bond Graph del sistema en causalidad integral, posteriormente a este Bond Graph se le cambia la causalidad a derivativa y se obtienen sus variables de estado, obteniendo así la función de transferencia del sistema. Este nuevo procedimiento se ejemplifica mediante dos casos de estudio, el primer caso será un motor de cd y el segundo caso de estudio será un sistema de nivel de líquido conformado

por dos tanques, finalmente se dan las conclusiones obtenidas durante la realización de este trabajo de tesis.

# Palabras clave

Energía, diferentes dominios físicos, modelo matemático, circuito eléctrico, función de transferencia.



# Abstract

The energy plays an important role when you have made up different physical domains and more when energy interacts between them, so you get the mathematical model of a system using the classical theory that makes use of laws and theorems in most cases it can be quite tedious and confusing, also you can take a considerable time modeling a system. That's why in this thesis the basic concepts for the description of a system are presented using Bond Graph which is a way to model systems of different power domains graphically and easily.

Disclosed concepts and elements of Bond Graph theory necessary to perform modeling, examples of electrical circuits are presented to understand the steps, rules and procedures that must be followed for a correct modeling with Bond Graph, further introduces the concept of causality which is one of the cornerstones of this theory. Through this modeling tool has the peculiarity that the time to obtain the mathematical model of a system, which results in obtaining simulation results in a short period of time is minimized.

It also explains why it is important to analyze the frequency response systems, which is based on the transfer function of a system, and that once the transfer function is obtained can be designed a controller for obtain the desired response to input into the system.

Described how to get the transfer function of a system from the state variables, where they are determined from Bond Graph model in integral causality, then the relationship between implementing integral causality or derivative causality is described mathematically.

Finally, a new procedure by which it is possible to determine the transfer function of a system quickly and easily by inserting a new element of power dissipation multiplied by the complex variable  $s$  at each junction where a storage element exist, all this when you have the Bond Graph in integral causality of the system, then this Bond Graph is changed to derivative causality and state variables are obtained, thus obtaining the transfer function of the system. This new procedure is exemplified by two case studies, the first case is a dc motor and the second case study will be a liquid level system that consists of two tanks, finally give the conclusions obtained during the thesis.

# Keywords

Energy, different physical domains, mathematical model, electrical circuit, transfer function.

# Índice de figuras

2.1. Representación de un sistema mediante diagrama de bloques. . . . .	6
2.2. Sistemas no lineales. . . . .	7
2.3. Bond y puertos. . . . .	10
2.4. Bond con sus variables de potencia. . . . .	11
2.5. Elementos activos $S_e$ y $S_f$ . . . . .	11
2.6. Elementos pasivos. . . . .	11
2.7. Elementos activos $MS_e$ y $MS_f$ . . . . .	12
2.8. Elemento transformador y de un girador. . . . .	12
2.9. Unión-0. . . . .	13
2.10. Unión-1. . . . .	14
2.11. Relaciones entre las variables (Cellier, 2002). . . . .	15
2.12. Bond activo. . . . .	16
2.13. Ejemplo de un Bond Graph con un bond activo. . . . .	16
2.14. Detectores de esfuerzo y flujo. . . . .	17
2.15. Trazo causal. . . . .	18
2.16. Circuito eléctrico en causalidad derivativa. . . . .	19
2.17. Regla para la reducción de uniones. . . . .	21
2.18. Circuito eléctrico para modelar en Bond Graph. . . . .	22
2.19. Aplicación del paso 1, 2 y 3. . . . .	22
2.20. Aplicación del Paso 4. a) Eliminación del nodo de referencia con sus bonds y reducción de la unión-0, b) Reducción de la unión-1. . . . .	23
2.21. Representación del circuito anterior en Bond Graph. . . . .	23
2.22. Diagrama a bloques de la estructura de unión de un Bond Graph. . .	24
2.23. Reglas para obtener los vectores clave. . . . .	30
2.24. Circuito de dos mallas. . . . .	31
2.25. Bond Graph del circuito de la Figura 2.24. . . . .	31
3.1. Del espacio de estados a la función de transferencia. . . . .	38
3.2. Circuito RLC serie. . . . .	39
3.3. Bond Graph del circuito RLC serie. . . . .	40
3.4. Estructura de unión de un Bond Graph en causalidad derivativa. . . .	43
3.5. Circuito de dos mallas. . . . .	46
3.6. Bond Graph en causalidad derivativa del circuito de dos mallas. . . .	47
3.7. Relación entre BGI y BGD. . . . .	49
3.8. BGI del circuito de dos mallas. . . . .	52
3.9. Bond Graph Transformado del circuito de dos mallas. . . . .	56

3.10. Bond Graph de Frecuencia del circuito de dos mallas . . . . .	56
4.1. Motor de CD. . . . .	60
4.2. Bond Graph con causalidad integral del motor de CD. . . . .	60
4.3. Bond Graph Transformado del motor de CD. . . . .	61
4.4. Bond Graph de Frecuencia del motor de CD. . . . .	61
4.5. Sistema de nivel de líquido con dos tanques. . . . .	63
4.6. BGI del sistema de nivel de líquido. . . . .	63
4.7. Bond Graph Transformado . . . . .	64
4.8. Bond Graph con Causalidad Derivativa de BGT . . . . .	65

# Índice de tablas

2.1. Variables generalizadas de algunos sistemas. . . . .	10
2.2. Puertos pasivos. . . . .	16
2.3. Causalidades para los elementos en Bond Graph. . . . .	19
2.4. Relación causal y relación causal de los elementos puerto-1. . . . .	20

# 1 Introducción

## 1.1. La respuesta a la frecuencia en sistemas

Cuando se desea utilizar y controlar un sistema real, una de las cosas que debemos saber primero es conocer como se comporta el sistema si se aplican diferentes señales de entrada. Una manera para encontrar la respuesta del sistema es aplicar una señal de prueba a la entrada y observar la salida del sistema. Aunque es posible utilizar diferentes señales, una entrada senoidal es simple y muy útil como la señal de prueba por que generalmente la respuesta del sistema es también una señal senoidal pero con una amplitud y fase diferentes a la señal de entrada. El análisis de la respuesta a la frecuencia es una versión especial de la respuesta dinámica del sistema y consiste en analizar la salida del sistema en términos de amplitud y fase cuando distintas señales de entrada senoidal se aplican al sistema.

Estas son las principales razones por las cuales el análisis de la respuesta a la frecuencia es muy importante. Especialmente, las mediciones de respuesta a la frecuencia pueden ser usadas para cuantificar directamente el rendimiento del sistema y directamente diseñar el controlador requerido. Esto es un avance muy significativo para los métodos de identificación de sistemas por que la mayoría de métodos para identificar la dinámica de un sistema a partir de datos de entrada y salida no pueden ser usados directamente para el análisis y diseño. Típicamente se requiere mayor procesamiento y manipulación de datos antes de que puedan ser usados. Con la respuesta a la frecuencia tenemos exactamente lo que necesitamos.

El análisis de la respuesta a la frecuencia es también muy útil porque la señal senoidal es una señal de prueba muy conocida que tiene algunas propiedades muy importantes:

- Solamente se utiliza una frecuencia cada vez y la amplitud de la senoidal puede cambiarse para cada frecuencia. Esto significa que si el sistema tiene una fuerte resonancia en ciertos valores de frecuencia, la amplitud de entrada puede ser reducida para prevenir cualquier daño al sistema. De la misma forma, si el sistema tiene una ganancia muy pequeña en cierto rango de frecuencias entonces es posible incrementar la amplitud de la señal de prueba.
- El método es muy selectivo con respecto a la frecuencia por lo cual puede rechazar ruido en la entrada excelentemente y de forma controlable.
- Otras señales de prueba distintas a la señal senoidal exhiben problemas con las

no linealidades en el sistema por lo que se requieren técnicas especiales para cada caso.

Se debe saber que la información que se busca en el análisis de un sistema de control es normalmente la respuesta temporal de éste, sin embargo, la respuesta temporal es difícil de obtener analíticamente a causa de la cantidad de cálculos que implica. Por consiguiente la respuesta a la frecuencia de un sistema de control se obtiene a menudo por medio de métodos gráficos (representaciones polares y rectangulares tales como los diagramas de Nyquist y Bode), donde el punto de partida para el análisis de respuesta en frecuencia es la función de transferencia.

También, es importante mencionar que el análisis a la respuesta en frecuencia es considerado como pasado de moda por algunos investigadores. En algunos lugares ni siquiera se enseña en los cursos de dinámica de sistemas. Ciertamente se desarrolló muchos años atrás, pero para el ingeniero de control en la vida real, es una herramienta muy valiosa y práctica para encontrar un buen diseño, por lo que cada ingeniero de control debería conocerla.

## 1.2. Objetivo

El objetivo de este trabajo de tesis es dar a conocer y promover la herramienta de Bond Graph que puede ser utilizada para determinar la respuesta a la frecuencia de algunos sistemas físicos y de esta manera demostrar la simplicidad, rapidez y eficiencia que se tiene mediante el uso de Bond Graph contra algún método tradicional de modelado de sistemas eléctricos, mecánicos, etc.

## 1.3. Justificación

Debido a la gran variedad de dominios de energía que se tienen en un sistema, es necesario tener las herramientas para el modelado y análisis que permitan estudiar el sistema en un mismo dominio de energía, esto se logra mediante el uso de la herramienta de Bond Graph, es por eso que se pretende dar a conocer esta técnica que tiene tiempo que fue desarrollada pero que no es muy utilizada en el área de control para la formulación del modelado de sistemas, debido a que esta técnica es rápida, gráfica y muy eficiente, con lo cual ayuda a simplificar pasos matemáticos y obtener resultados en poco tiempo en comparación con los métodos tradicionales.

## 1.4. Metodología

Un modelo matemático de un sistema se define como un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con una cierta precisión. Los modelos matemáticos pueden adoptar muchas formas distintas, dependiendo del sistema del que

se trate y de las circunstancias específicas. Para esto, existen técnicas diferentes las cuales pueden ser una más conveniente que otra como diagramas de bloques y métodos matemáticos; los cuales se apoyan de leyes como de Kirchhoff, Newton o Bernoulli, obteniendo así las variables de estado y la función de transferencia donde esta última hace uso de la Transformada de Laplace.

Para realizar esta tesis primero se inicia con el estudio de lo que es un sistema, después se darán a conocer los elementos, procedimientos y reglas para realizar un modelado con Bond Graph. Se analizarán dos casos de estudio donde se obtendrá su respuesta a la frecuencia empleando este método, con ello se demostrará la eficiencia y rapidez de Bond Graph. Al final se dan las conclusiones y recomendaciones acerca del uso de Bond Graph para determinar la respuesta a la frecuencia de un sistema. Se hace uso de lápiz y papel para resolver el modelado de los ejemplos planteados. Debido a la complejidad de algunas ecuaciones se usa el software Mathematica para resolver las operaciones matriciales y simplificar algunas ecuaciones que de realizar a mano implicarían tiempo y posibles errores a la hora de resolverlas.

## 1.5. Contenido de la tesis

La presente tesis consta de 5 capítulos que se encuentran descritos de manera general y organizados de la siguiente manera:

En el capítulo 1 titulado "Introducción" se presenta la importancia sobre este trabajo de tesis utilizando la herramienta de Bond Graph, destacando lo importante que es modelar un sistema para conocer cómo es que se comporta éste, se menciona también por qué es importante obtener la respuesta en frecuencia de sistemas, se da el objetivo, la justificación y la metodología que se seguirá en esta investigación.

En el capítulo 2 titulado "Modelado en Bond Graph y Respuesta a la Frecuencia" se da la definición de un sistema y su clasificación, también se explica que es modelado y su importancia. Posteriormente, se explica que es Bond Graph y cuales son los elementos básicos necesarios para realizar un modelo, se dan a conocer las reglas y procedimientos para hacer un correcto modelado mediante Bond Graph, esto se demuestra mediante el modelado de algunos circuitos eléctricos, por último se describe el procedimiento para obtener la estructura de unión y a partir de ésta obtener la representación en espacio de estados, esto también se demuestra con el ejemplo de un circuito eléctrico.

En el capítulo 3 titulado "La Respuesta a la Frecuencia de un Sistema Modelado en Bond Graph" se da una breve explicación de la importancia del modelado en espacio de estados y el uso de la función de transferencia para analizar sistemas, así mismo se presenta el procedimiento tradicional que se sigue para determinar la función de transferencia a partir de las ecuaciones de estado. También se presenta la manera de obtener la matriz estructura de unión cuando a un Bond Graph se le



aplica causalidad derivativa y cómo a partir de ésta se obtiene la representación en espacio de estados de un sistema.

Posteriormente se demuestra matemáticamente y mediante un ejemplo la relación que existe entre un Bond Graph en causalidad integral y un Bond Graph en causalidad derivativa, demostrándose que teniendo la relación constitutiva  $F$  y las variables de estado  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  del Bond Graph en causalidad integral es posible determinar las variables de estado  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  y  $D^*$  del Bond Graph en causalidad derivativa.

Por último se presenta un procedimiento por medio del cual es posible determinar la función de transferencia de un sistema de manera sencilla y en unos cuantos pasos, mediante la introducción de un nuevo elemento de disipación en cada unión donde existe un elemento de almacenamiento de energía, esto se realiza cuando se tiene el Bond Graph en causalidad integral, ahora llamado Bond Graph Transformado, a éste se le cambia la causalidad integral por causalidad derivativa, obteniéndose el Bond Graph de Frecuencia, del cual se obtendrá la función de transferencia de un sistema, todo esto se muestra mediante un ejemplo.

En el capítulo 4 titulado "Casos de Estudio" se analizan dos sistemas, de los cuales se obtendrán sus funciones de transferencia por el método descrito en el capítulo 3, el primer caso corresponde al motor de cd y el segundo caso corresponde a un sistema de nivel de líquido con dos tanques.

Por último en el capítulo 5 titulado "Conclusiones y Recomendaciones" se presentan las conclusiones a cerca de este trabajo de tesis así como las recomendaciones para futuros trabajos con este tema y por ende dar a conocer aún más la herramienta de Bond Graph.

# 2 Modelado en Bond Graph y Respuesta a la Frecuencia

## 2.1. Introducción

En la actualidad el control automático representa un papel muy importante para el avance de la ingeniería y la ciencia. Por lo que representa una gran importancia en los sistemas de vehículos espaciales, guiado de misiles, control numérico de las máquinas-herramienta de las industrias de manufactura, en el diseño de sistemas de pilotos automáticos en la industria aeroespacial, y en el diseño de automóviles y camiones en la industria automotriz. También es esencial en las operaciones industriales como el control de presión, temperatura, humedad, viscosidad y flujo en las industrias que realizan diferentes procesos [9].

Gracias a los avances que se han tenido en el control automático se puede obtener un desempeño óptimo de los sistemas dinámicos, mejorar la productividad, aligerar la carga de muchas operaciones manuales repetitivas y rutinarias, así como de otras actividades, es por esto que los ingenieros y científicos deben tener un buen conocimiento de este campo [9].

Es muy importante entender y ser capaz de determinar la respuesta dinámica de un sistema, ya que esto se hace continuamente en la enseñanza de la ingeniería y debido a que ahora las computadoras digitales se han vuelto más baratas y compactas, se usan cada vez más como parte integral de los sistemas de control, por ejemplo en sistemas mecánicos, procesos químicos, biológicos, biomédicos, económicos y otras muchas áreas.

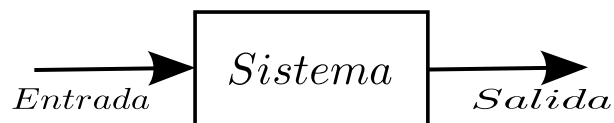
## 2.2. Sistema

Un sistema es aquel que se define como una combinación de componentes que interactúan conjuntamente para realizar un objetivo determinado [9]. Donde un componente es una unidad particular en su función dentro del sistema. Esta definición no se limita a los sistemas físicos, se puede aplicar también a fenómenos dinámicos abstractos, tales como los que se encuentran en la economía, el transporte, el crecimiento poblacional y la biología [8].

Un sistema se llama dinámico si su salida en el presente depende de una entrada en el pasado; por el contrario si su salida en curso depende solamente de la entrada en curso, el sistema se conoce como estático. Se dice que la salida de un sistema estático permanece constante si la entrada no cambia. En un sistema dinámico la salida cambia con el tiempo cuando el sistema no está en un su estado de equilibrio [8].

Es importante resaltar el hecho de que no es necesario conocer el funcionamiento interno de un sistema, o cómo actúan entre sí los diversos elementos, para poder caracterizar éste. Para ello, sólo se necesita conocer la relación que existe entre la entrada y la salida del proceso que realiza el mismo principio (principio de caja negra). El aspecto más importante de un sistema es el conocimiento de su dinámica, es decir, como se comporta la señal de salida frente a una variación de la señal de entrada. Si se tiene un conocimiento preciso de la relación entrada/salida es posible predecir la respuesta del sistema y así seleccionar una acción de control adecuada para mejorarla.

En cualquier sistema físico, la energía puede almacenarse, disiparse o intercambiarse y cuando se unen dos sistemas, aparecen distintos flujos de potencia entre ellos. En la Figura 2.1 se muestra la representación de un sistema mediante diagrama de bloques.



**Figura 2.1:** Representación de un sistema mediante diagrama de bloques.

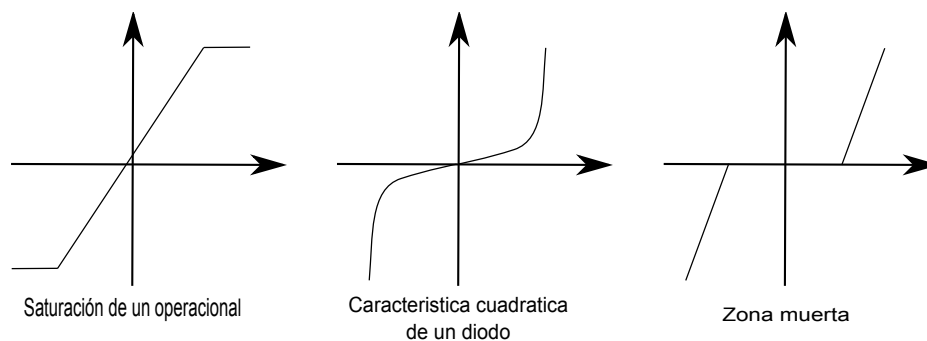
### 2.2.1. Clasificación de Sistemas

Los sistemas se pueden clasificar en sistemas lineales y no lineales, otra posible clasificación los divide en sistemas variantes o invariantes en el tiempo.

- **Sistemas lineales:** Estos sistemas son aquellos que pueden ser descritos mediante ecuaciones diferenciales. La propiedad más importante de los sistemas lineales es que permiten el principio de superposición. Este principio establece que la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos funciones de excitación diferentes o entradas, es la suma de dos respuestas individuales. En consecuencia, en los sistemas lineales la respuesta a varias entradas puede calcularse tratando una entrada cada vez y después sumando los resultados. Como resultado del principio de superposición, las complicadas soluciones de

las ecuaciones diferenciales lineales se pueden obtener de la suma de soluciones simples. Esta propiedad puede utilizarse para determinar de un modo experimental si un sistema es o no lineal.

- **Sistemas no lineales:** Estos sistemas son aquellos que no son lineales; es decir se caracterizan por ecuaciones diferenciales no lineales. Para este tipo de sistemas, el principio de superposición no es aplicable. En general, los procedimientos para encontrar la solución de problemas que involucran tales sistemas son extremadamente complicados. A causa de la dificultad matemática que representan los sistemas no lineales, con frecuencia es necesario linealizarlos alrededor de una condición de operación. Una vez que un sistema no lineal se aproxima mediante un modelo matemático lineal, se deben usar términos lineales para propósitos de análisis y diseño. En la Figura 2.2 se muestran algunos ejemplos de sistemas no lineales.



**Figura 2.2:** Sistemas no lineales.

Los sistemas lineales son usualmente descritos matemáticamente en uno de los siguientes dominios: dominio del tiempo y dominio de la frecuencia.

## 2.3. Modelado

En la actualidad cada vez es mayor la necesidad de modelar y simular sistemas dinámicos y se ha vuelto cada vez más importante en el proceso de diseño y análisis debido a que con la simulación podemos obtener el comportamiento del sistema y por lo tanto, también podemos obtener información crítica sin la necesidad de tener un prototipo de prueba el cual tiene un costo mucho mayor que el desarrollo de la simulación del mismo [1].

Es muy importante tener en cuenta que una descripción completa y precisa de un sistema físico puede resultar demasiado compleja y laboriosa, es por eso que debemos modelar el sistema llegando a un compromiso entre la exactitud y la sencillez

requeridas. En cualquier caso se debe garantizar que el modelo obtenido responda a las exigencias iniciales del estudio, pues ello determina el rango de validez de un modelo. De hecho, un modelo será válido mientras se cumplan las hipótesis que han permitido simplificarlo.

Mediante la aplicación de las leyes físicas a un sistema en específico, es posible desarrollar un modelo matemático que lo describa. Tal sistema puede incluir parámetros desconocidos, los cuales se deben evaluar mediante pruebas reales. Sin embargo, algunas veces las leyes físicas que gobiernan el comportamiento de un sistema no están completamente definidas, y la formulación de un modelo matemático puede resultar imposible. Si esto sucede, se puede utilizar un procedimiento de modelado experimental. En este procedimiento, se somete al sistema a un conjunto de entradas conocidas y se miden sus salidas. A partir de las relaciones de entrada y salida se deriva entonces el modelo matemático [8].

Cabe mencionar que ningún modelo matemático puede representar cualquier componente o sistema físico con precisión.

Para poder obtener el modelo matemático de un sistema se pueden seguir diferentes metodologías de solución; dentro de los métodos más utilizados se encuentran el método de la función de transferencia y el método de las variables de estado. La función de transferencia es válida sólo para sistemas lineales, mientras que el método de variables de estado es válido tanto para sistemas lineales como para sistemas no lineales. En particular para este trabajo de tesis se utilizará la técnica llamada *Bond Graph*, que se puede utilizar tanto para sistemas lineales como para sistemas no lineales [7].

## 2.4. Bond Graph

### 2.4.1. Introducción

La teoría de Bond Graph fue desarrollada por el profesor H. M. Paynter del Instituto Tecnológico de Massachusetts, E.U. en el año de 1961 y consiste en un procedimiento por medio del cual el trabajo de obtener las ecuaciones diferenciales que describen el modelo matemático de un sistema físico pueda ser efectuado por una computadora, esta técnica se encuentra posicionada entre el sistema físico de cualquier proceso y los modelos matemáticos asociados a éste. Para que este concepto se lleve a cabo es necesario que la descripción del sistema sea de forma clara, de manera que al introducir los datos a la computadora se pueda llevar a cabo un procedimiento algorítmico que permita obtener las ecuaciones diferenciales y su solución. El lenguaje en el que es posible transportar un sistema físico a un diagrama gráfico y ser resuelto por una computadora se conoce como Bond Graph [10].

Un Bond Graph son gráficos de dominio independiente que describen el comportamiento dinámico de los sistemas físicos. Esto quiere decir que los sistemas de

diferentes dominios de energía (hidráulico, mecánico, eléctrico, acústico, termodinámico, etc.) se describen de la misma forma, esto es una gran ventaja cuando se tienen diferentes sistemas acoplados o trabajando en conjunto en un proceso ya sea industrial, económico o biológico. El modelado mediante Bond Graph es una poderosa herramienta para modelar sistemas en ingeniería. Además los submodelos de Bond Graph pueden ser reutilizados debido a que pueden ser vistos como una forma de modelado de sistemas físicos orientada a objetos. Un modelo en Bond Graph permite conocer información sobre las interacciones de energía entre sus elementos, lo que da origen a tener un mejor entendimiento de la dinámica del sistema.

Gracias a que Bond Graph es un método gráfico, al tener modelado un sistema se pueden observar de forma directa algunas características o propiedades del sistema, como pueden ser el orden (que está ligado directamente con la dependencia e independencia lineal de los elementos), la observabilidad y la controlabilidad sin necesidad de realizar operaciones matemáticas más complejas como las requeridas para conocer la observabilidad y controlabilidad utilizando métodos tradicionales (con uso de ecuaciones diferenciales e inversión de matrices) [1].

En particular el modelado en Bond Graph representa un enfoque unificado para el modelado y manipulación de sistemas dinámicos de ingeniería que permite obtener sus ecuaciones de estado, basado en una representación gráfica y la generalización de los conceptos de variable de flujo y esfuerzo [2]. En un sistema dinámico existe una colección de componentes que interactúan unos con otros a través de puertos de energía, donde estos componentes describen como fluye la potencia a través del sistema [5].

En un modelo de Bond Graph, un sistema físico se representa por elementos pasivos básicos que pueden ser capaces de intercambiar potencia: resistencias ( $R$ ), capacitancias ( $C$ ) e inercias ( $I$ ). Aunque estos nombres sugieren una aplicación directa en sistemas eléctricos, son usados en otros dominios de igual forma. Generalmente modelan: disipación de energía, almacenamiento de energía potencial y almacenamiento de energía cinética, respectivamente.

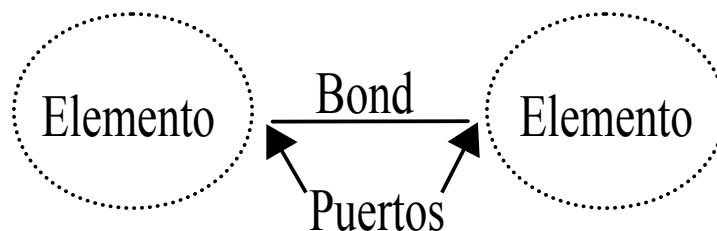
Cada elemento tiene uno o más puertos de energía donde el intercambio de potencia puede ocurrir. Esta potencia ( $P$ ) es expresada como un producto de dos variables conjuntas: esfuerzo ( $e$ ) y flujo ( $f$ ) en general como función de tiempo ( $t$ ). Estos nombres son usados extensamente en todos los dominios pero tienen un único nombre en cada dominio. En un sistema eléctrico, es costumbre seleccionar el voltaje (o potencial eléctrico) como la variable de esfuerzo, y la corriente como la variable de flujo. En un sistema mecánico traslacional, la fuerza será tratada como esfuerzo, y la velocidad como flujo. En un sistema rotacional, el par es asumido como el esfuerzo, y la velocidad angular como flujo. Variables adicionales son definidas: momento ( $p$ ) como la integral de tiempo del esfuerzo y el desplazamiento ( $q$ ) como la integral de tiempo del flujo. En la Tabla 2.1 se dan a conocer las variables generalizadas para diferentes sistemas [11].

**Tabla 2.1:** Variables generalizadas de algunos sistemas.

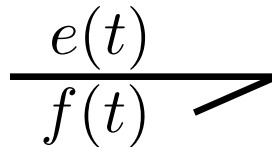
Sistema Físico	Esfuerzo ( $e$ )	Flujo ( $f$ )	Momento ( $p$ )	Desplazamiento ( $q$ )
Mecánica Traslacional	Fuerza $f (N)$	Velocidad $V (m/s)$	Momento lineal $P (N \cdot s)$	Desplazamiento $X (m)$
Mecánica Rotacional	Par $M (N \cdot m)$	Velocidad Angular $\omega (rad \cdot s)$	Momento angular $H (N \cdot m \cdot s)$	Angulo girado $\theta (rad)$
Hidráulica	Presión $p (N/m^2)$	Caudal $Q (m^3/s)$	Momento $P (N \cdot s/m^2)$	Volumen $(m)$
Electricidad	Voltaje $e (V)$	Corriente $I (Amp)$	Flujo $F (V \cdot s)$	Carga $Q (c)$
Sistemas Térmicos	Temperatura $T (K)$	Flujo de calor $q (w)$		Calor $(Q)$

### 2.4.2. Componentes Básicos de un Bond Graph

El concepto de Bond Graph incluye el puerto y el bond, elementos, variables, causalidad y relaciones constitutivas. En la Figura 2.3 se muestra el concepto básico de Bond Graph. Entre dos elementos, siempre existe un bond de energía, donde éste se utiliza para acoplar los puertos de energía de los elementos del sistema. Cada bond tiene dos variables de potencia, una es esfuerzo ( $e$ ), y la otra es flujo ( $f$ ) asociadas a él. La energía fluirá a través del bond en cualquier dirección. Los puertos son los lugares en los cuales se tiene la transferencia de energía entre los elementos de un sistema. Se puede decir también que son los que realizan el contacto entre los subsistemas.

**Figura 2.3:** Bond y puertos.

Un bond se representa mediante una semiflecha indicando la dirección de ésta cómo fluye la energía entre los puertos al cual está conectado, en la Figura 2.4 se muestra su representación [2].

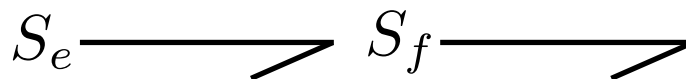


**Figura 2.4:** Bond con sus variables de potencia.

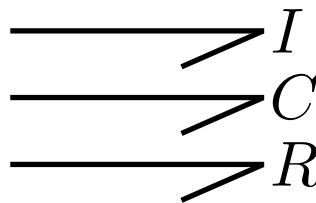
Bond Graph consiste de nueve tipos de elementos, estos son fuente de esfuerzo ( $S_e$ ), fuente de flujo ( $S_f$ ), inductor ( $I$ ), capacitor ( $C$ ), resistencia ( $R$ ), transformador ( $TF$ ), girador ( $GY$ ), unión-0 y unión-1. Estas designaciones se derivan de sistemas mecatrónicos, pero no se refieren a estas clases de elementos en otros sistemas. Los elementos antes mencionados se pueden dividir en tres categorías: elementos puerto-1, elementos puerto-2 y elementos puerto-3 o elementos multipuertos.

### 2.4.3. Elementos puerto-1

Los elementos puerto-1 incluyen elementos activos, los cuales tienen como función suministrar potencia al sistema, su representación se muestra en la Figura 2.5, y los elementos pasivos, los cuales son los elementos idealizados porque no contienen fuentes de energía, su representación se da en la Figura 2.6.  $S_e$  y  $S_f$  son elementos puerto-1 activos, representando fuente de esfuerzo (voltaje, fuerza o presión) y fuente de flujo (corriente, velocidad o caudal), respectivamente. Los elementos  $I$ ,  $C$ , y  $R$  son elementos puerto-1 pasivos representando el inductor (almacenamiento de esfuerzo), capacitor (almacenamiento de flujo) y resistencia (disipación), respectivamente.



**Figura 2.5:** Elementos activos  $S_e$  y  $S_f$ .



**Figura 2.6:** Elementos pasivos.



Existe otra forma de representar a una fuente con entrada de comando, y se muestra en la Figura 2.7, que a diferencia de las fuentes normales sobre las que no se tiene un control, las fuentes  $MS_e$  y  $MS_f$  pueden ser controladas mediante una señal externa o perturbación proveniente de una parte del sistema o incluso de otro. La letra  $M$  significa modulación, propiedad de estas fuentes que permite variar la salida de la variable de esfuerzo o de flujo [10].

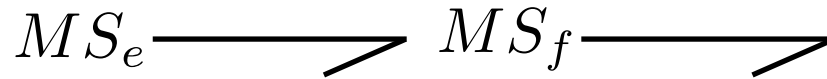


Figura 2.7: Elementos activos  $MS_e$  y  $MS_f$ .

#### 2.4.4. Elementos puerto-2

Los elementos puerto-2 son dos elementos ideales, llamados transformador ( $TF$ ) y girador ( $GY$ ), los cuales son sistemas lineales que cambian la relación entre las variables de flujo y esfuerzo. Caracterizándose por tener dos puertos, y una relación lineal entre esfuerzos y flujos. El transformador no crea, almacena o disipa energía, éste conserva la potencia y transmite el factor de potencia con un escalar de potencia que es definido por el módulo del transformador [2]. El girador que es usado en más de los casos donde la potencia de un dominio físico es transferida a otro.

Los bonds que representan a un transformador y a un girador se muestran en la Figura 2.8, donde  $n$  y  $r$  son los módulos del transformador y del girador, respectivamente.

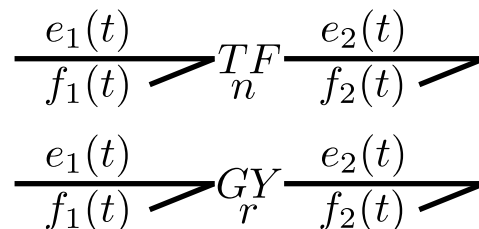


Figura 2.8: Elemento transformador y de un girador.

La relación de las variables de bond generalizadas para el transformador están dadas por:

$$e_1(t) = ne_2(t) \tag{2.1}$$

$$f_1(t) = \frac{1}{n} f_2(t) \quad (2.2)$$

y la relación de las variables de bond generalizadas para el girador son:

$$e_1(t) = r f_2(t) \quad (2.3)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{r} e_2(t) \quad (2.4)$$

Es muy importante mencionar que estos elementos juegan un papel muy importante para el modelado de la conversión de potencia de un dominio físico a otro.

### 2.4.5. Elementos puerto-3 o multipuertos

Estos puertos-3 son llamados uniones dado que sirven para interconectar tres o más puertos de energía dentro de un subsistema. Estos puertos-3 representan una de las ideas fundamentales del formalismo de Bond Graph, representan en forma de multipuerto los dos tipos de conexiones (serie y paralelo) [2].

Se considera la unión-0 o unión de esfuerzo común para la conexión en paralelo. En la Figura 2.9 se representa esta unión.

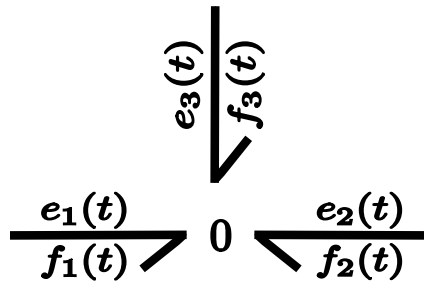


Figura 2.9: Unión-0.

Las relaciones de interconexión que describen a la unión-0 están dadas por:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \quad (2.5)$$

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0 \quad (2.6)$$

Estas ecuaciones especifican que en una unión-0, los esfuerzos en todos los bonds son siempre iguales y la suma algebraica de los flujos es cero.

El otro elemento es la unión-1 o de flujo común para la conexión en serie, su representación se muestra en la Figura 2.10.

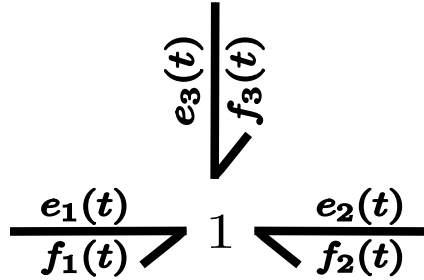


Figura 2.10: Unión-1.

Las relaciones de interconexión para la union-1 son:

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) \quad (2.7)$$

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \quad (2.8)$$

Se observa que en esta unión-1, los flujos en los bonds son siempre iguales y la suma algebraica de las variables de esfuerzo en los bonds es cero.

Las variables en Bond Graph incluyen esfuerzo, flujo, momento, desplazamiento, potencia y energía. Las siguientes son variables y relaciones constitutivas de Bond Graph (Thoma, 1975 y 1990; Karnopp, et al 2000).

$e(t)$  es una cantidad de esfuerzo, y  $f(t)$  es una cantidad de flujo. El producto del esfuerzo y flujo es la potencia instantánea,  $P(t)$ , fluyendo entre dos multipuertos. En un sistema dinámico las variables de esfuerzo y de flujo, y por lo tanto la potencia, fluctúan en el tiempo.

$$P(t) = e(t)f(t) \quad (2.9)$$

El momento  $p(t)$ , es definido como la integral de tiempo de un esfuerzo. Que es:

$$p(t) \equiv \int e(t)dt = p_0 + \int_{t_0}^t e(t)dt \quad (2.10)$$

Un desplazamiento variable,  $q(t)$ , es la integral de tiempo de un flujo variable:

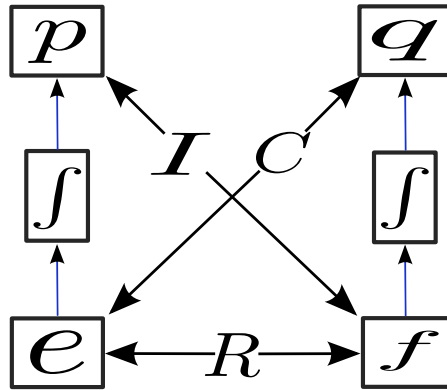
$$q(t) \equiv \int f(t)dt = q_0 + \int_{t_0}^t f(t)dt \quad (2.11)$$

La energía,  $E(t)$ , que ha pasado hacia dentro o fuera de un puerto es la integral de tiempo de la potencia,  $P(t)$ . Que es:

$$E(t) \equiv \int P(t)dt = \int e(t)f(t) \quad (2.12)$$

La Figura 2.11 muestra la relación entre las variables. En adición a las relaciones constitutivas de “esfuerzo y momento” y “flujo y desplazamiento”, esto también implica las relaciones constitutivas de los elementos  $I$ ,  $C$ , y  $R$  como:

$$p = I * f, \quad I = \frac{p}{f}; \quad q = C * e, \quad C = \frac{q}{e}; \quad e = R * f, \quad R = \frac{e}{f} \quad (2.13)$$



**Figura 2.11:** Relaciones entre las variables (Cellier, 2002).

La Tabla 2.2 muestra los elementos de disipación  $R$ , almacenamiento de flujo  $C$  y almacenamiento de esfuerzo  $I$  para sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos [5].

**Tabla 2.2:** Puertos pasivos.

Elemento	Relación	Eléctrico	Mecánico	Hidráulico
$R$	Lineal	$v(t) = Ri(t)$	$F(t) = bV(t)$	$\Delta P_r(t) = RQ(t)$
	No lineal	$v = \varphi(i)$	$F = \varphi(V)$	$\Delta P = \varphi(Q)$
$C$	Lineal	$v(t) = \frac{1}{C} \int i dt$	$F(t) = k \int V dt$	$P_r(t) = C \int \Delta Q dt$
	No lineal	$v = \varphi(q)$	$F(t) = \varphi(x)$	$P_r(t) = \varphi(V)$
$I$	Lineal	$i(t) = \frac{1}{L} \int v dt$	$V(t) = \frac{1}{M} \int F dt$	$Q(t) = I \int \Delta P_r dt$
	No lineal	$i(t) = \varphi(\lambda)$	$V(t) = \varphi(P)$	$Q(t) = \varphi(P_r)$

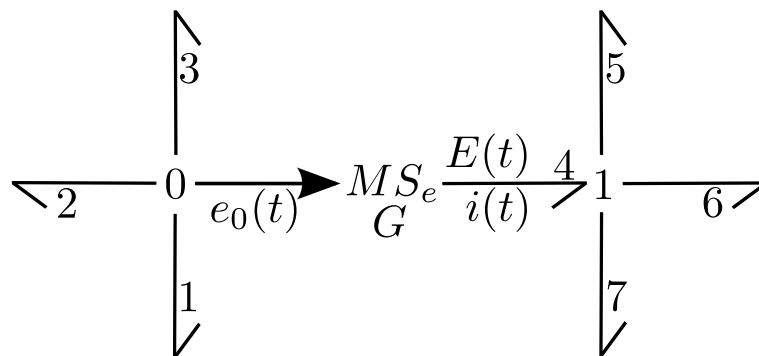
### 2.4.6. Bond activo

El bond activo utiliza sólo una de las dos señales, esfuerzo ( $e$ ) o flujo ( $f$ ) en una dirección a diferencia de lo representado por una semiflecha que posee dos señales. Se representa por una flecha completa como se muestra en la Figura 2.12 y representa una señal con un consumo de potencia de cero, se utiliza para transmitir una señal de flujo o esfuerzo de un bloque de un sistema a otro, sin que se consuma energía [10].



**Figura 2.12:** Bond activo.

En la Figura 2.13 se muestra el uso de un bond activo [2].



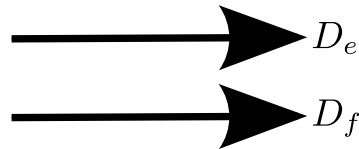
**Figura 2.13:** Ejemplo de un Bond Graph con un bond activo.

El bond activo que entra a  $MS_e$  indica que  $E(t)$  es modulada por  $e_0(t)$ , así,  $E(t) = Ge_0(t)$ , donde  $G$  es a ganancia de voltaje.

El bond activo viene de una unión-0, el voltaje  $e_0(t)$  es el mismo que  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$ . Además, el bond activo tiene potencia cero debido a que se considera que la corriente correspondiente a  $e_0(t)$  es despreciable. La suma de las corrientes en la unión-0, se debe unicamente a  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ .

### 2.4.6.1. Detectores

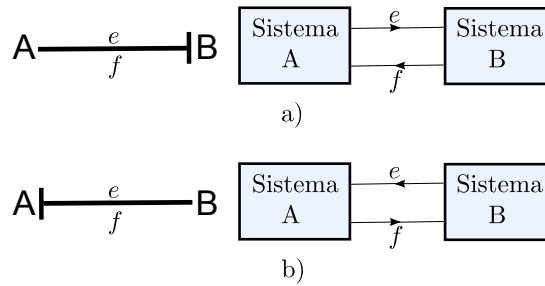
Los detectores en la metodología de Bond Graph son empleados como sensores de medición de alguna de las variables: esfuerzo y flujo, y son expresados por  $D_e$  para los detectores de esfuerzo y  $D_f$  para los detectores de flujo. Estos elementos no consumen potencia, es por eso que se les considera como elementos de instrumentación ideales para la medición. Su representación gráfica en Bond Graph se muestra en la Figura 2.14 [10].



**Figura 2.14:** Detectores de esfuerzo y flujo.

### 2.4.7. Causalidad

La causalidad establece la relación de causa y efecto entre los factores de potencia, que son esfuerzo y flujo. En cada bond, la entrada y la salida son caracterizadas por el trazo causal que se coloca al extremo de un lado de un bond. En la Figura 2.15a), el esfuerzo es la salida de A y el flujo es la salida de B; en la Figura 2.15b), el esfuerzo es la salida de B y el flujo es la salida de A. El esfuerzo y el flujo siempre se mueven en direcciones opuestas. El trazo causal siempre indica la dirección de la señal del esfuerzo.



**Figura 2.15:** Trazo causal.

### 2.4.7.1. Propiedades del puerto causal

Cada tipo de puerto tiene un cierta propiedad causal. Las principales causalidades son descritas a continuación.

- Causalidad necesaria: Esté tipo de causalidad sólo se aplica a los elementos activos o fuentes en los cuales no puede asignarse una causalidad diferente. Una fuente de esfuerzo sólo puede proporcionar esfuerzo a los elementos de un sistema y la de flujo solo flujo.
- Causalidad integral: Esta causalidad tiene una gran importancia y se presenta en los elementos almacenadores de esfuerzo y flujo. En el caso del elemento I tiene una causalidad integral que se define como la integral de entrada  $e(t)$  y se relaciona con la salida  $f(t)$ .

$$f(t) \triangleq \int e(t) dt \quad (2.14)$$

- Causalidad restrictiva: Esta causalidad se aplica al los elementos puerto-3 (uniones) e ideales puerto-2 (giradores y transformadores), ya que una vez que se asigna la causalidad en alguno de sus bonds está determinada la causalidad de los demás en ese elemento y no puede ser cambiada. En la unión-0 sólo un bond lleva el trazo causal cerca de esta unión y en la unión-1 sólo un bond lleva el trazo causal lejos de la unión.
- Causalidad derivativa: Este tipo de causalidad se presenta cuando un sistema contiene elementos de almacenamiento de energía que no son dinámicamente independientes, en una asignación de causalidad integral, su representación para este caso es:

$$e(t) = \frac{d}{dt} \{f(t)\} \quad (2.15)$$

- Causalidad arbitraria: Esta se presenta en los elementos disipadores, no importa la causalidad integral, ya que esté elemento no tiene términos con definición integral en sus relaciones constitutivas.

### 2.4.7.2. La causalidad derivativa en un Bond Graph

La causalidad derivativa se presenta cuando un sistema contiene elementos de almacenamiento de energía que no son dinámicamente independientes, en un asignación de causalidad integral predefinida. Esto se presenta por ejemplo, cuando en un sistema eléctrico, se encuentran dos capacitores en paralelo como se muestra en la Figura 2.16 [2].

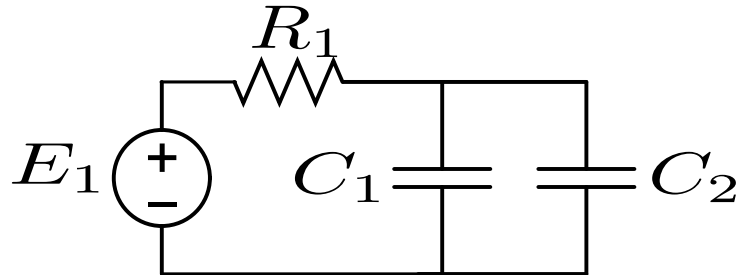


Figura 2.16: Circuito eléctrico en causalidad derivativa.

En la Tabla 2.3 se muestran las causalidades de los elementos que conforman el modelado en Bond Graph [10].

Tabla 2.3: Causalidades para los elementos en Bond Graph.

Elemento	Causalidad Restrictiva	
Union-0		
Union-1		
Transformador		
Girador		
	Causalidad Necesaria	
Fuentes		
	Causalidad	
	Integral	Derivativa
Inercia		
Capacitancia		
	Causalidad Arbitraria	
Resistencia		



### 2.4.8. Procedimiento para la asignación de causalidad en un multipuerto

1. Considerar cualquier  $MS_e$  o  $MS_f$  y asignar su causalidad necesaria y en seguida extender las implicaciones causales, usando las restricciones de 0, 1,  $TF$  y  $GY$  que se muestran en el Tabla 2.3.
2. Asignar causalidad integral a los elementos  $C$  e  $I$  respetando las restricciones de la Tabla 2.3.
3. Escoger cualquier  $R$  que no este asignada y darle una causalidad arbitraria. Extender las implicación usando 0, 1,  $TF$  y  $GY$  de la Tabla 2.3.

Se dice que un Bond Graph es *Causalmente correcto*, cuando no existe conflicto de causalidad entre los elementos y las uniones [2].

En la Tabla 2.4 se muestra la relación causal y forma causal de los elementos  $R$ ,  $C$ ,  $I$ ,  $MS_e$  y  $MS_f$  (elementos puerto-1).

**Tabla 2.4:** Relación causal y relación causal de los elementos puerto-1.

Elemento	Forma Causal		Relación Causal	
	Integral	Derivativa	Integral	Derivativa
Resistencia	$\dashv\rightarrow R$	$\vdash\rightarrow R$	$e(t) = \Phi_R\{f(t)\}$	$f(t) = \Phi_R^{-1}\{e(t)\}$
Capacitancia	$\vdash\rightarrow C$	$\dashv\rightarrow C$	$e(t) = \Phi_C^{-1}\{\int f(t) dt\}$	$f(t) = \frac{d}{dt}\{\Phi_C \cdot e(t)\}$
Inercia	$\dashv\rightarrow I$	$\vdash\rightarrow I$	$f(t) = \Phi_I^{-1}\{\int e(t) dt\}$	$e(t) = \frac{d}{dt}\{\Phi_I \cdot f(t)\}$
Fuente de esfuerzo	$MS_e \dashv\rightarrow$		$e(t) = E(t)$	
Fuente de flujo	$MS_f \vdash\rightarrow$		$f(t) = F(t)$	

\* $\Phi_x$  = representa las relación constitutiva en causalidad integral del elemento x.

### 2.4.9. Procedimiento para modelar sistemas en Bond Graph

El modelado en Bond Graph se ha descrito como una herramienta para modelar sistemas de diferentes dominios físicos en uno generalizado, es así como se describieron previamente, los elementos y las restricciones para ser usados; sin embargo no se ha abordado un tema importante que es ¿Cómo es que se construyen? ¿Qué pasos se deben de seguir?, por ésto a continuación se explica cuales son los pasos a seguir para cambiar el dominio de energía de un sistema al dominio de Bond Graph.

### 2.4.9.1. Creación y reducción de modelos en Bond Graph

A continuación se plantea un procedimiento general para la construcción y diseño del modelo que es aplicable a los sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos [10].

1. Para un sistema en el que exista un punto donde las trayectorias de esfuerzo o flujo coincidan, se deberá crear una unión-0 o unión-1 según sea el caso en el sistema.
2. Dibujar una unión-1 o unión-0 para cada componente en una trayectoria serie o paralela y conectar el componente apropiado de Bond Graph por medio de un bond en esa unión. La dirección de la semiflecha en cada bond indica la dirección asumida del flujo de potencia, es decir, a partir de fuentes hacia elementos almacenadores y disipadores.
3. Dibujar bonds entre uniones adyacentes, indicando la dirección en que se estará transfiriendo el flujo de potencia.
4. Se debe remover la unión-0 que representará el punto de referencia, también se deberán remover los bonds que estén conectados a esta unión.
5. Se podrá reducir el Bond Graph mediante las siguientes reglas cuando se tengan uniones como las que se muestran en la Figura 2.17.
6. Asignar causalidades a los elementos, comenzando con las fuentes (causalidad necesaria), después a los elementos almacenadores (causalidad integral) y para finalizar a los elementos disipadores (causalidad arbitraria).



**Figura 2.17:** Regla para la reducción de uniones.

Este procedimiento es generalizado ya que existen variantes en la colocación de uniones. Lo que es posible sin ninguna restricción es el procedimiento 4, 5 y 6 no importando el sistema.

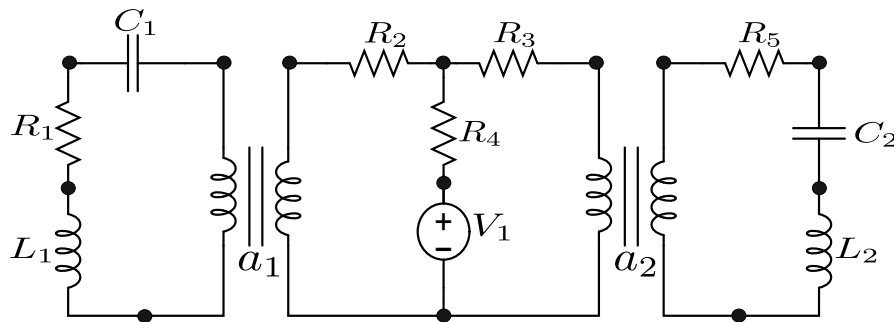
A continuación se muestra el procedimiento para crear el modelo de Bond Graph específicamente para un sistema eléctrico.

### 2.4.10. Modelado de sistemas eléctricos

El procedimiento descrito anteriormente es un procedimiento general para obtener el Bond Graph de un sistema. Para el caso de sistemas eléctricos, se realizan las siguientes observaciones:

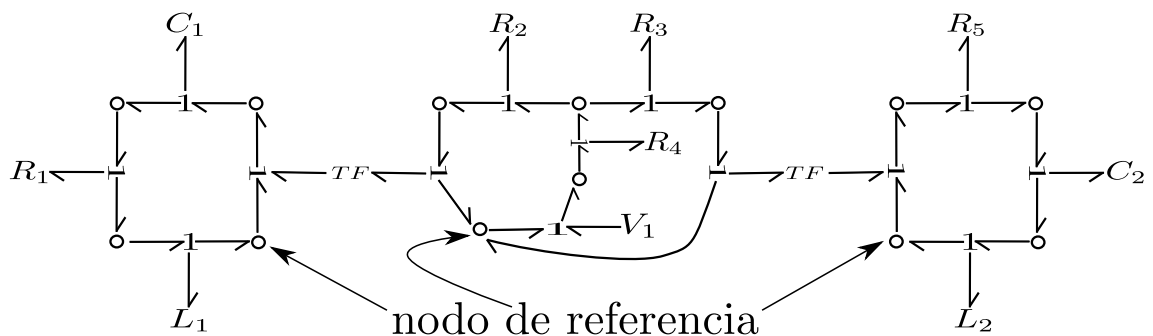
- En el paso 1, para cada voltaje distinto en el circuito le corresponde una unión-0.
- En el paso 2, se colocan uniones-1 entre las uniones-0, si existe un elemento puerto-1 en el sistema o circuito eléctrico y de éste se derivará el elemento puerto-1.
- Consideración en el paso 4, en este caso se deberá de considerar el nodo de referencia como la tierra en el circuito.
- Por último, también en el paso 4, eliminar todos los bonds que van al nodo de referencia y reducir las uniones-0 y uniones-1 para después asignar las causalidades a los elementos (iniciando con las fuentes, seguido de los elementos almacenadores, uniones y elementos pasivos).

Considérese el circuito eléctrico de la Figura 2.18 del cual se obtendrá su Bond Graph, aplicando el procedimiento descrito anteriormente.



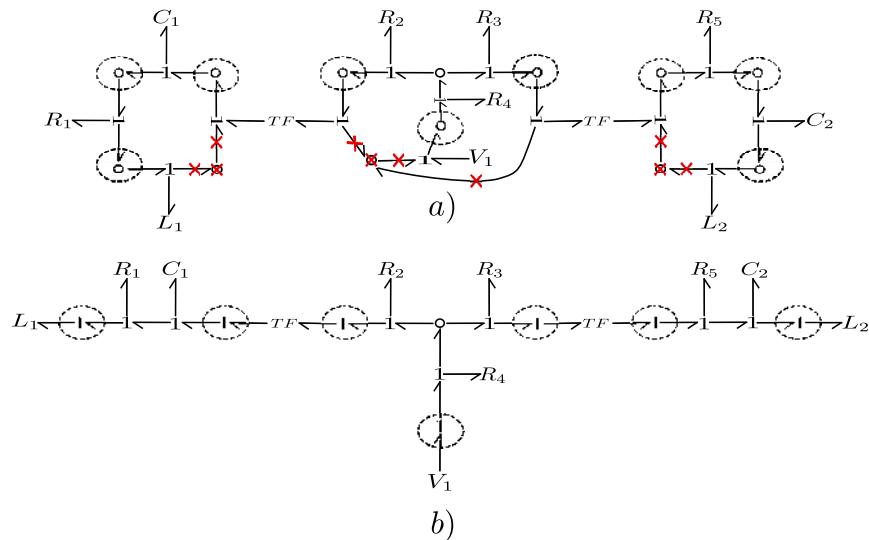
**Figura 2.18:** Circuito eléctrico para modelar en Bond Graph.

Primeramente identificamos los diferentes voltajes en el circuito y colocamos la unión-0, también se coloca la unión-1 entre las uniones-0 y se deriva el elemento puerto-1 de la unión-1 e identificamos el nodo de referencia o tierra en el circuito.



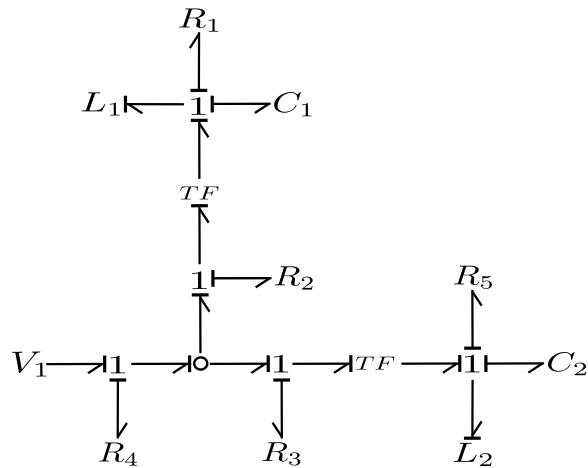
**Figura 2.19:** Aplicación del paso 1, 2 y 3.

A continuación en la Figura 2.20 a) se elimina el nodo de referencia y se reduce la unión-0 y en b) se reduce la unión-1 mediante las reglas de reducción de uniones.



**Figura 2.20:** Aplicación del Paso 4. a) Eliminación del nodo de referencia con sus bonds y reducción de la unión-0, b) Reducción de la unión-1.

En la Figura 2.21 se muestra la representación del circuito en Bond Graph con la asignación de causalidad integral a sus elementos.



**Figura 2.21:** Representación del circuito anterior en Bond Graph.

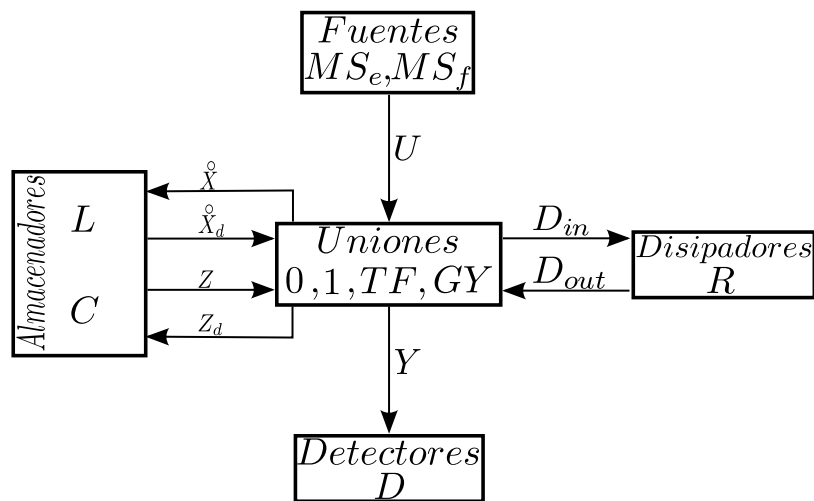
### 2.4.11. Estructura de unión en sistemas multipuerto

La estructura de unión es una representación análoga a una representación en espacio de estados tradicional en donde se visualiza la dinámica del sistema, la diferencia radica en que se utilizan variables de energía y no los estados en sí, aunque se sabe la relación entre estas variables de energía y sus estados correspondientes, por lo que a partir de esta representación podemos obtener una representación en espacio de estados tradicional [1].

Un diagrama a bloques de la estructura de unión de un modelo se muestra en la Figura 2.22, donde se puede ver con claridad todos los elementos que conforman cualquier sistema dinámico. Para la obtención de la estructura de unión de un sistema, es necesario conocer los vectores clave y las relaciones de campo o relaciones constitutivas.

### 2.4.12. Vectores clave o vectores significativos

En los modelos de Bond Graph es posible clasificar a los elementos o puertos que conectan a  $R$ ,  $C$ ,  $I$ ,  $MS_e$  y  $MS_f$  como *bonds externos* y a los que se conectan con los elementos  $0$ ,  $1$ ,  $TF$ , y  $GY$  se les conoce comúnmente como *bonds internos*.



**Figura 2.22:** Diagrama a bloques de la estructura de unión de un Bond Graph.

En la Figura 2.22 se puede apreciar la composición de los elementos para cada bloque, desde las fuentes ( $MS_e$  y  $MS_f$ ) elementos almacenadores ( $L$  y  $C$ ), disipadores ( $R$ ), detectores ( $D$ ) y por último se tiene en la estructura de unión donde intervienen los transformadores, giradores y uniones  $0$  y  $1$  ( $TF$ ,  $GY$ , *unión*  $- 1$  y *unión*  $- 0$ ) [7].

Los vectores clave en Bond Graph son los que representan a un sistema físico de diferente o mismo dominio de energía. Estos vectores se muestran en la Figura 2.22 en forma de diagrama a bloques, haciendo notar las variables que son objeto de estudio en todo sistema representado en Bond Graph; comenzando con  $u(t)$  la cual aporta todas las variables de potencia (esfuerzos y flujos) definidos por los elementos activos o fuentes en la estructura de unión. Los estados  $x(t)$  y  $x_d(t)$  compuestos de las variables de energía: momento generalizado  $p(t)$  el cual se encuentra en los elementos almacenadores flujo ( $I$ ) y desplazamiento generalizado  $q(t)$  en elementos  $C$  en causalidad integral y derivativa respectivamente;  $z(t)$  y  $z_d(t)$  son las variables de co-energía, ya sea en causalidad integral o derivativa según se estén empleando,  $D_{in}(t)$  y  $D_{out}(t)$  es una combinación de los esfuerzos y flujos que se están analizando en el sistema estos contienen los intercambios de energía entre el campo de disipación y la estructura de unión y  $Y(t)$  son los detectores ya sea de esfuerzo o flujo.

### 2.4.13. Relaciones de campo y ecuaciones de estado

Las relaciones de campo no lineales de los elementos de almacenamiento y de disipación de la Figura 2.22 se muestran en las expresiones siguientes.

$$z(t) = \Phi_F(x) \quad (2.16)$$

$$z_d(t) = \Phi_{Fd}(x_d) \quad (2.17)$$

$$D_{out}(t) = \Phi_L(D_{in}) \quad (2.18)$$

donde:

- $\Phi_F$  Representa una función que relaciona cada  $z_i$  con  $x_i$  para  $i = 1, \dots, n$ .
- $\Phi_{Fd}$  Denota una función que relaciona cada  $z_{di}$  con  $x_{di}$  para  $i = 1, \dots, m$ .
- $\Phi_L$  Se refiere a una función que relaciona cada  $D_{outi}$  con  $D_{ini}$  para  $i = 1, \dots, r$ .

Donde  $n$  es el número de elementos de almacenamiento en causalidad integral,  $m$  es el número de elementos en causalidad derivativa y  $r$  es el número de elementos disipadores [1].

El comportamiento de un elemento específico se describe por una ley física la cual se conoce como *relación constitutiva*. Si las relaciones constitutivas son lineales tenemos:

$$z(t) = Fx(t) \quad (2.19)$$

$$z_d(t) = F_d x_d(t) \quad (2.20)$$

$$D_{out}(t) = L D_{in}(t) \quad (2.21)$$

donde,  $L$ ,  $F$ , y  $F_d$  son matrices reales de dimensión  $r \times r$ ,  $n \times n$  y  $m \times m$ , respectivamente. Por lo tanto las relaciones de la estructura de unión están dadas por la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Donde:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Los elementos dentro de la matriz de estructura de unión  $S$  toman valores dentro del conjunto  $\{0, \pm 1, \pm m, \pm r\}$  en los cuales  $m$  y  $r$  son los módulos de transformación del  $TF$  y  $GY$ . La matriz  $S$  se encuentra dividida de acuerdo a la dimensión de los vectores clave que la forman. Las submatrices  $S_{11}$ ,  $S_{12}$  y  $S_{22}$  presentan las siguientes propiedades que deben de ser consideradas al momento de crear la matriz  $S$ :

- $P1$ .-  $S_{11}$  y  $S_{22}$  son matrices cuadradas antisimétricas.
- $P2$ .-  $S_{12}$  es la matriz transpuesta negativa de  $S_{21}$  y viceversa ( $S_{12} = -S_{21}^T$ ).

Las propiedades  $P1$  y  $P2$  que representa la matriz  $S$  están basadas en el principio de la conservación de la energía.

A continuación se muestra la deducción de las ecuaciones  $D_{in}$ ,  $\dot{x}$ , y  $y$  a partir de las relaciones de estructura de unión.

$$D_{in} = S_{21}z + S_{22}D_{out} + S_{23}u$$

De las relaciones constitutivas tenemos que  $D_{out} = L D_{in}$ , por lo que la sustituimos en la ecuación anterior y realizamos operaciones.

$$D_{in} = S_{21}z + S_{22}LD_{in} + S_{23}u$$

$$D_{in} - S_{22}LD_{in} = S_{21}z + S_{23}u$$

$$(I - S_{22}L)D_{in} = S_{21}z + S_{23}u$$

De la expresión anterior se despeja  $D_{in}$  para encontrar su valor.

$$D_{in} = (I - S_{22}L)^{-1} (S_{21}z + S_{23}u) \quad (2.24)$$

Ahora se determinará el valor de  $\dot{x}$ :

$$\dot{x} = S_{11}z + S_{12}D_{out} + S_{13}u$$

Se sustituye el valor de  $D_{out}$  en la ecuación anterior.

$$\dot{x} = S_{11}z + S_{12}LD_{in} + S_{13}u$$

Ahora se sustituye el valor de la Ecuación (2.24) en la ecuación anterior.

$$\dot{x} = S_{11}z + S_{12}L(I - S_{22}L)^{-1}(S_{21}z + S_{23}u) + S_{13}u$$

Donde  $M$ :

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1} \quad (2.25)$$

$$\dot{x} = S_{11}z + S_{12}M(S_{21}z + S_{23}u) + S_{13}u$$

Realizando operaciones se tiene que:



$$\dot{x} = S_{11}z + S_{12}MS_{21}z + S_{12}MS_{23}u + S_{13}u$$

Factorizando  $z$  y  $u$  se tiene la siguiente ecuación:

$$\dot{x} = (S_{11} + S_{12}MS_{21})z + (S_{13} + S_{12}MS_{23})u$$

De las relaciones constitutivas tenemos que  $z = Fx$ , por lo que la sustituimos en la ecuación anterior y obtenemos  $\dot{x}$ .

$$\dot{x} = (S_{11} + S_{12}MS_{21})Fx + (S_{13} + S_{12}MS_{23})u$$

De la ecuación anterior se asignan los siguientes valores a las variables  $A$  y  $B$ .

$$\mathbf{A} = (\mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{12}\mathbf{M}\mathbf{S}_{21}) \mathbf{F} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{S}_{13} + \mathbf{S}_{12}\mathbf{M}\mathbf{S}_{23}) \quad (2.27)$$

Por lo que finalmente se obtiene la ecuación de estado.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.28)$$

A continuación se realiza el mismo procedimiento que se utilizó para determinar  $\dot{x}$ , pero ahora para determinar el valor de  $y$ :

$$y = S_{31}z + S_{32}D_{out} + S_{33}u$$

$$y = S_{31}z + S_{32}LD_{in} + S_{33}u$$

$$y = S_{31}z + S_{32}L(I - S_{22}L)^{-1}(S_{21}z + S_{23}u) + S_{33}u$$

$$y = S_{31}z + S_{32}M(S_{21}z + S_{23}u) + S_{33}u$$

$$y = S_{31}z + S_{32}MS_{21}z + S_{32}MS_{23}u + S_{33}u$$

$$y = (S_{31} + S_{32}MS_{21})z + (S_{33} + S_{32}MS_{23})u$$

$$y = (S_{31} + S_{32}MS_{21})Fx + (S_{33} + S_{32}MS_{23})u$$

De la ecuación anterior se asignan los siguientes valores a las variables  $C$  y  $D$ .

$$C = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (2.29)$$

$$D = (S_{33} + S_{32}MS_{23}) \quad (2.30)$$

Por último se obtiene la ecuación de salida en espacio de estados.

$$y = Cx + Du \quad (2.31)$$

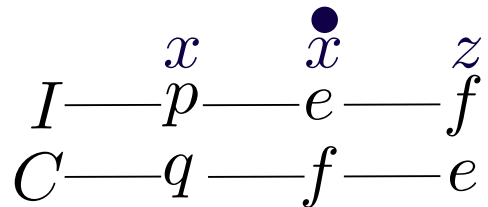
Las ecuaciones de estado en un sistema LTI (lineal con parámetros invariantes en el tiempo) y MIMO (múltiple entrada múltiple salida) son representadas mediante la Ecuación (2.28) y la Ecuación (2.31).

Donde  $A$  se denomina matriz de estado,  $B$  matriz de entrada,  $C$  matriz de salida y  $D$  matriz de transmisión directa.

Todas estas expresiones permiten la obtención del modelo de un sistema físico en variables de estado, utilizando la representación de Bond Graph, además es importante notar que un sistema representado en Bond Graph contiene las relaciones causales que determinan propiedades estructurales como controlabilidad y observabilidad.

### 2.4.14. Procedimiento para la obtención de la estructura de unión de un modelo en Bond Graph.

1. Una vez obtenido el modelo en Bond Graph, se enumeran los bonds.
2. Se crean los vectores clave, tomando en cuenta la Figura 2.23.



**Figura 2.23:** Reglas para obtener los vectores clave.

Donde  $p$  es el momento generalizado,  $q$  es el desplazamiento generalizado,  $f$  y  $e$  son los flujos y esfuerzos (corriente y voltaje en un sistema eléctrico respectivamente).

El número asignado a cada bond se usa como subíndice.

3. Para establecer las relaciones constitutivas se considera:

$$Z = Fx \quad \implies F = \text{diag}\left(\frac{1}{M_1}, \dots, \frac{1}{M_n}\right) \text{ donde } M_n \text{ son los elementos almacenadores de energía en causalidad integral.}$$

$$D_{out} = LD_{in} \quad \implies L = \text{diag}\left(N_1, \dots, N_n, \dots, \frac{1}{\tilde{N}_1}, \dots, \frac{1}{\tilde{N}_n}\right) \text{ donde } N_n \text{ y } \tilde{N}_n \text{ son los elementos resistivos y de conductancia respectivamente.}$$

4. La matriz  $S$  se obtiene aplicando las reglas de interconexión que describen una unión de flujo común (Unión-1), así como de una unión de esfuerzo común (Unión-0). Para así tener completa la estructura de unión del modelo.

### 2.4.15. Ejemplo: Obtención de la estructura de unión de un modelo en Bond Graph.

A continuación en la Figura 2.24 se muestra a manera de ejemplo un circuito de dos mallas del cual se obtendrá su representación en Bond Graph, los vectores clave, sus relaciones constitutivas, su estructura de unión y finalmente su representación en espacio de estados.

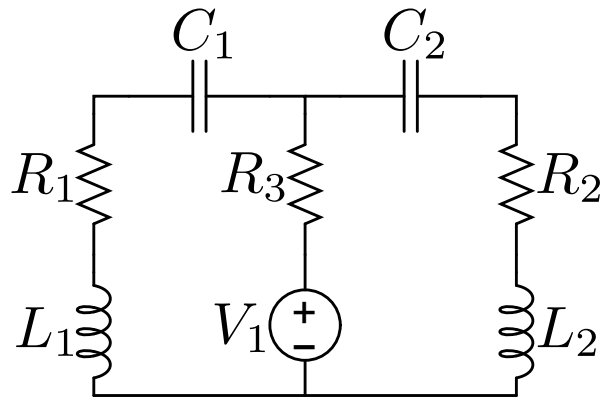


Figura 2.24: Circuito de dos mallas.

En la Figura 2.25 se muestra la representación en Bond Graph del circuito anterior así como la numeración de sus bonds.

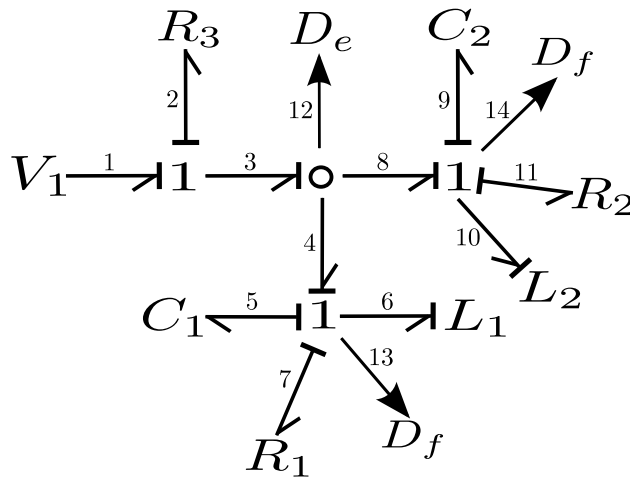


Figura 2.25: Bond Graph del circuito de la Figura 2.24.

Una vez que se tiene la representación en Bond Graph del circuito se obtienen sus vectores clave y las relaciones constitutivas, éstas se muestran a continuación.

Los vectores clave son los siguientes:

$$x = \begin{pmatrix} q_5 \\ p_6 \\ q_9 \\ p_{10} \end{pmatrix} \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} f_5 \\ e_6 \\ f_9 \\ e_{10} \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} e_5 \\ f_6 \\ e_9 \\ f_{10} \end{pmatrix} \quad D_{\text{in}} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_7 \\ f_{11} \end{pmatrix} \quad D_{\text{out}} = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_7 \\ e_{11} \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} e_1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} e_{12} \\ f_{13} \\ f_{14} \end{pmatrix}$$

y las relaciones constitutivas son:

$$z = Fx \quad y \quad D_{out} = LD_{in}$$

$$\begin{pmatrix} e_5 \\ f_6 \\ e_9 \\ f_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_5 \\ p_6 \\ q_9 \\ p_{10} \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} e_2 \\ e_7 \\ e_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_3 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_7 \\ f_{11} \end{pmatrix}$$

Donde:

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{C_1}, \frac{1}{L_1}, \frac{1}{C_2}, \frac{1}{L_2} \right\} \quad y \quad L = \text{diag} \{ R_3, R_1, R_2 \}$$

Mediante la obtención de los vectores clave obtenemos las relaciones de estructura de unión y la la matriz  $S$ , estas se muestran a continuación.

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} f_5 \\ e_6 \\ f_9 \\ e_{10} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_2 \\ f_7 \\ f_{11} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e_{12} \\ f_{13} \\ f_{14} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e_5 \\ f_6 \\ e_9 \\ f_{10} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e_2 \\ e_7 \\ e_{11} \\ e_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Como podemos observar nuestra estructura de unión es correcta ya que  $S_{11}$  y  $S_{22}$  son matrices cuadradas antisimétricas y  $S_{12}$  es la matriz transpuesta negativa de  $S_{21}$  y viceversa. Con esto se procede a la obtención de las variables de estado  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  para la representación en espacio de estado del circuito.

Se tiene que:

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1} \rightarrow S_{22} = 0 \quad \therefore M = L$$

Sustituyendo los valores correspondientes en la Ecuación (2.26) y la Ecuación (2.27) y realizando las operaciones indicadas se obtiene el valor de  $A$  y  $B$  :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & \frac{-R_1-R_3}{L_1} & 0 & -\frac{R_3}{L_2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & -\frac{R_3}{L_1} & -\frac{1}{C_2} & \frac{-R_2-R_3}{L_2} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo el valor de los vectores clave así como de  $A$  y  $B$  en la Ecuación (2.28) se obtiene la representación en espacio de estados del circuito de dos mallas.

$$\begin{pmatrix} f_5 \\ e_6 \\ f_9 \\ e_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & \frac{-R_1-R_3}{L_1} & 0 & -\frac{R_3}{L_2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & -\frac{R_3}{L_1} & -\frac{1}{C_2} & \frac{-R_2-R_3}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_5 \\ p_6 \\ q_9 \\ p_{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (e_1)$$

Ahora se sustituyen los valores correspondientes en la Ecuación (2.29) y la Ecuación (2.30) y se realizan las operaciones correspondientes para obtener el valor de  $C$  y  $D$ :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{R_3}{L_1} & 0 & -\frac{R_3}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se sustituye el valor de los vectores clave así como de  $C$  y  $D$  en la Ecuación (2.31) obteniendo la representación de la salida en espacio de estados del circuito de dos mallas.

$$\begin{pmatrix} e_{12} \\ f_{13} \\ f_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{R_3}{L_1} & 0 & -\frac{R_3}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_5 \\ p_6 \\ q_9 \\ p_{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (e_1)$$

## 2.5. Respuesta en la frecuencia

Cuando se aplica una entrada senoidal a un sistema lineal, éste tiende a vibrar a su propia frecuencia natural así como a seguir la frecuencia de la entrada. En presencia de amortiguamiento, esta porción del movimiento no sostenido por la entrada senoidal desaparecerá gradualmente. Como resultado, la respuesta en estado permanente es senoidal a la misma frecuencia que la entrada. La salida en estado permanente difiere de la entrada solamente por la amplitud y el ángulo de fase. Así que la relación de las amplitudes de salida / entrada y el ángulo de fase entre salida y la senoide de entrada son los dos únicos parámetros necesarios para predecir la salida de un sistema lineal cuando la entrada es una senoide. En general, la relación de amplitudes y el ángulo de fase dependen de la frecuencia de entrada [8].

El concepto respuesta en frecuencia se refiere a la respuesta que presenta un sistema de control en estado estable ante una entrada senoidal. Para todas las frecuencias de cero a infinito, la respuesta en frecuencia característica de un sistema puede ser completamente descrita mediante la relación de amplitud salida / entrada y el ángulo de fase entre la salida y la senoide de entrada. En este método de análisis de sistemas, variamos la frecuencia de la señal de entrada dentro de una amplia escala y estudiamos la respuesta resultante [8].

Hay tres razones principales para considerar con énfasis la respuesta en frecuencia en el análisis de sistemas [8].

1. Muchos fenómenos naturales son de naturaleza senoidal (por ejemplo, los movimientos armónicos simples generalmente son generados en sistemas eléctricos y mecánicos).
2. Cualquier señal periódica puede representarse mediante una serie de componentes senoidales.
3. Las señales senoidales son importantes en las comunicaciones tanto como en la generación y transmisión de potencia eléctrica.

Una ventaja del empleo de este método es la fácil disponibilidad de señales de prueba sinusoidales para diversos intervalos de frecuencia y amplitudes ya que en general son sencillas y pueden ser muy precisas dependiendo del tipo de generadores de señales senoidales y equipos de medición empleados en dichas pruebas [6]. Comúnmente, las funciones de transferencia de los sistemas más complejos se determinan experimentalmente mediante pruebas de respuesta en frecuencia debido a que es el método más seguro y sencillo para el análisis de dichos sistemas. Además, este enfoque tiene la ventaja de que permite diseñar un sistema de control en el que se desprecian los efectos inconvenientes del ruido, así como su extensión en el análisis y diseño de ciertos sistemas de control no lineales.

Una segunda ventaja de este método es que puede obtenerse la función de transferencia que describe el comportamiento sinusoidal en el estado estacionario de un sistema, reemplazando  $s$  por  $j\omega$  en la función de transferencia del sistema  $G(s)$ . La

función de transferencia que representa el comportamiento sinusoidal en el estado estacionario de un sistema es, entonces, una función de la variable compleja  $j\omega$  y de su propia función compleja  $G(j\omega)$  que tiene una magnitud y un ángulo de fase. La magnitud y el ángulo de fase de  $G(j\omega)$  se representan fácilmente mediante gráficas que proporcionan un conocimiento significativo para el análisis y diseño de sistemas de control [6].

Por lo general, se utilizan tres representaciones gráficas para visualizar el comportamiento de la función de transferencia sinusoidal con respecto a la frecuencia, los cuales son [9]:

1. Diagramas de Bode.

Los diagramas de Bode están formados por dos gráficas: en la primera se presenta el logaritmo de la magnitud de una función de transferencia sinusoidal y en la otra el ángulo de fase, ambas se grafican contra la frecuencia en la escala logarítmica. El diagrama de Bode se considera como una de las herramientas básicas más potentes para analizar y diseñar sistemas de control.

2. Diagramas POLARES o de Nyquist.

Los diagramas polares representan un diagrama de magnitud en función del ángulo de fase de una función de transferencia sinusoidal  $G(j\omega)$ . Una ventaja de utilizar un diagrama polar es que se presentan las características de respuesta en frecuencia de un sistema en todo el rango de frecuencias, en un sólo diagrama.

Además, este tipo de diagramas es útil para determinar la estabilidad de un sistema de lazo cerrado a partir de la respuesta en frecuencia de un lazo abierto (criterio de Nyquist). Para poder construir el diagrama de Nyquist, se requiere calcular la magnitud  $|G(j\omega)|$  y el ángulo de fase  $\angle G(j\omega)$  para cada frecuencia  $\omega$ , la cual debe variar desde cero hasta infinito.

3. Diagramas de magnitud logarítmica contra fase o diagramas de Nichols.

Otro método para representar gráficamente la característica de la respuesta en frecuencia es utilizar los diagramas de Nichols, estos diagramas son una representación de la magnitud logarítmica en decibels del módulo en función del ángulo de fase. Los diagramas de Bode usan dos curvas para representarlos, mientras que los de Nichols emplean una única curva. Estos diagramas pueden construirse fácilmente a partir de los diagramas de Bode. La mayor ventaja de estos diagramas es la facilidad para determinar la estabilidad relativa.



# 3 La Respuesta a la Frecuencia de un Sistema Modelado en Bond Graph

## 3.1. Introducción

Con la llegada de la exploración espacial, los requerimientos de los sistemas de control aumentaron en alcance. El modelado de sistemas mediante el uso de ecuaciones diferenciales lineales, invariantes con el tiempo, así como de funciones de transferencia subsiguientes, se hizo inadecuado. El método en el espacio de estados (también conocido como método moderno, o en el dominio del tiempo) es un método unificado para modelar, analizar y diseñar una amplia variedad de sistemas. Por ejemplo, se puede usar el método en el espacio de estados para representar sistemas no lineales que tengan juego, saturación y zona muerta. Del mismo modo, se pueden manejar cómodamente sistemas con condiciones iniciales diferentes de cero. Los sistemas variantes con el tiempo (por ejemplo, los proyectiles con variantes niveles de combustible; el ascenso en un avión que vuela a diferentes altitudes) pueden ser representados en el espacio de estados. Los sistemas de múltiples entradas y salidas (por ejemplo, un vehículo con la dirección de entrada y velocidad de entrada que produzcan una dirección de salida y una velocidad de salida) pueden ser representados de manera compacta en el espacio de estados con un modelo semejantes en forma y complejidad al empleado para los sistemas de una sola entrada y una salida.

El método de la transformada de Laplace es un método operacional que puede usarse ventajosamente en la solución de ecuaciones diferenciales lineales, invariantes en el tiempo. Su ventaja principal es que la diferenciación de la función del tiempo corresponde a la multiplicación de la transformada por una variable compleja  $s$  [8].

La función de transferencia de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, invariantes en el tiempo, se define como la relación de la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función impulsora) bajo la suposición que todas las condiciones sean cero [8].

Considérese el sistema lineal definido por la siguiente ecuación diferencial:

$$a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\dot{x} + a_nx = b_0p^{(m)} + b_1p^{(m-1)} + \dots + b_{m-1}\dot{p} + b_m p \quad (n \geq m)$$

donde  $x$  es la salida del sistema y  $p$  es la entrada.

$$\text{Función de transferencia} = G(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{salida}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]} \Big|_{\text{condiciones iniciales cero}}$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$$

Al usar el concepto de función de transferencia, es posible representar la dinámica de los sistemas mediante ecuaciones algebraicas en  $s$ . Si la potencia más alta de  $s$  en el denominador de la función de transferencia es igual a  $n$ , el sistema se llama sistema de orden  $n$  – *esimo* [8].

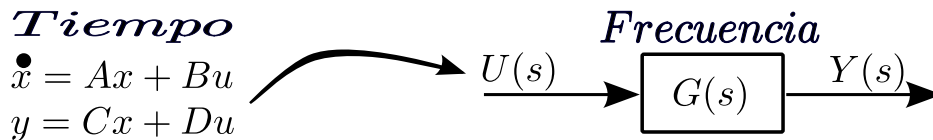
El enfoque de función de transferencia, se usa extensamente para en el análisis y el diseño de sistemas. A continuación hacen algunos comentarios acerca de la función de transferencia [9]:

1. La función de transferencia de un sistema es un modelo matemático que implica un método operacional de expresar la ecuación diferencial que relaciona la variable de salida con la variable de entrada.
2. La función de transferencia es una propiedad del sistema en sí mismo, independiente de la magnitud y naturaleza de la función de entrada o excitación.
3. La función de transferencia incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida; sin embargo, no proporciona información alguna concerniente a la estructura física del sistema. (Las funciones de transferencia de muchos sistemas físicamente diferentes pueden ser idénticas.)
4. Si la función de transferencia de un sistema se conoce, puede estudiarse la salida o respuesta para varias formas de entrada teniendo presente la comprensión de la naturaleza del sistema.
5. Si no se conoce la función de transferencia de un sistema, ésta puede establecerse experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando la salida del sistema. Una vez establecida, una función de transferencia se da una descripción completa de las características dinámicas del sistema, sin recurrir a su descripción física.

El modelado y control de sistemas basado en la transformada de Laplace, es un enfoque muy sencillo y de fácil aplicación. Permite analizar sistemas utilizando una serie de reglas algebraicas en lugar de trabajar con ecuaciones diferenciales. Los sistemas reales presentan no linealidades, pueden tener más de una entrada o salida, sus parámetros cambian en el tiempo y sus condiciones iniciales no siempre tienen un valor de cero. Afortunadamente, para muchos sistemas es posible considerar esas limitaciones, trabajar sobre un punto de interés, linealizar y utilizar las ventajas del análisis por Laplace.

### 3.2. Obtención de la función de transferencia a partir de la representación en espacio de estados

En esta sección se usará la transformada de Laplace para poder pasar de la representación de un sistema en el dominio del tiempo mediante sus ecuaciones de estado a su representación en el dominio de la frecuencia mediante su función de transferencia. La Figura 3.1 ilustra la relación entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia.



**Figura 3.1:** Del espacio de estados a la función de transferencia.

De las ecuaciones de estado se toma la transformada de Laplace, suponiendo condiciones iniciales cero y considerando  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  como constantes se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\dot{x}(t) &= \mathcal{L}Ax(t) + \mathcal{L}Bu(t) \\ sx(s) &= Ax(s) + Bu(s) \\ sx(s) - Ax(s) &= Bu(s) \\ (sI - A)x(s) &= Bu(s) \end{aligned}$$

despejamos  $x(s)$  y obtenemos su valor.

$$x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s) \tag{3.1}$$

donde  $I$  es la matriz de identidad.

Ahora se realizan las mismas operaciones para la ecuación de salida y se encuentra  $y(s)$ .

$$\mathcal{L}y(t) = \mathcal{L}Cx(t) + \mathcal{L}Du(t)$$

$$y(s) = Cx(s) + Du(s) \tag{3.2}$$

### 3.3 Ejemplo: Obtención de la función de transferencia de un circuito RLC por el método tradicional y por el método de Bond Graph

---

sustituyendo el valor de  $x(s)$  en  $y(s)$  y realizando operaciones se encuentra el nuevo valor de  $y(s)$ .

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}Bu(s) + Du(s)$$

se factoriza  $u(s)$  y se obtiene:

$$y(s) = [D + C(sI - A)^{-1}B] u(s) \quad (3.3)$$

donde el termino  $[D + C(sI - A)^{-1}B]$  se llama matriz de funciones de transferencia, puesto que relaciona el vector de salida,  $y(s)$ , con el vector de entrada,  $u(s)$ . Por lo tanto la función de transferencia se define como sigue:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = D + C(sI - A)^{-1}B \quad (3.4)$$

### 3.3. Ejemplo: Obtención de la función de transferencia de un circuito RLC por el método tradicional y por el método de Bond Graph

En esta parte se muestra un ejemplo sencillo donde se determinará la función de transferencia de un circuito RLC serie, con esto se demostrará que se llega al mismo resultado usando Bond Graph y el método tradicional. En la Figura 3.2 [8] se muestra un circuito RLC serie en el cual  $e_i$  es el voltaje de entrada y  $e_o$  es el voltaje de salida.

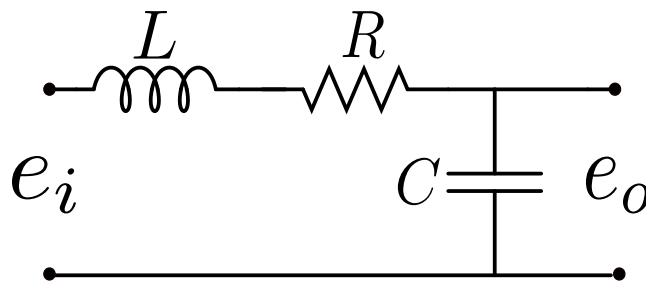


Figura 3.2: Circuito RLC serie.

### 3.3 Ejemplo: Obtención de la función de transferencia de un circuito RLC por el método tradicional y por el método de Bond Graph

Aplicando la ley de voltajes de Kirchoff al circuito resultan las siguientes ecuaciones:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_i$$

$$\frac{1}{C} \int i dt = e_o$$

Al tomar la transformada de Laplace de estas dos ecuaciones y suponiendo condiciones iniciales de cero, tenemos:

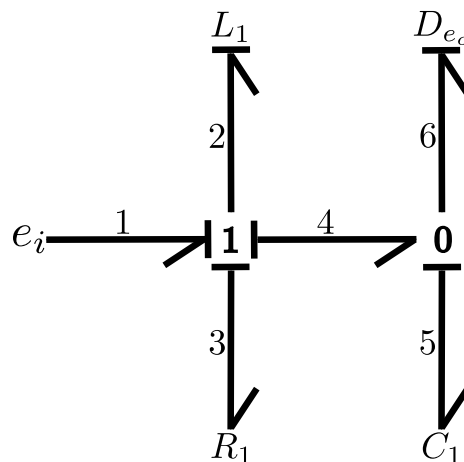
$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_o(s)$$

Por lo tanto tomando la relación de la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de entrada, donde la función de transferencia de este circuito es [8]:

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (3.5)$$

A continuación se utilizará el método de Bond Graph para obtener la función de transferencia del circuito mostrado en la Figura 3.2, en la Figura 3.3 se muestra el Bond Graph del circuito en estudio.



**Figura 3.3:** Bond Graph del circuito RLC serie.

### 3.3 Ejemplo: Obtención de la función de transferencia de un circuito RLC por el método tradicional y por el método de Bond Graph

---

Los vectores clave del circuito son los siguientes:

$$x = \begin{pmatrix} p_2 \\ q_5 \end{pmatrix} \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} e_2 \\ f_5 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} f_2 \\ e_5 \end{pmatrix} \quad D_{in} = (f_3) \quad D_{out} = (e_3)$$

$$u = e_1 \quad y = e_6$$

Se determinan las relaciones constitutivas del circuito:

$$z = Fx$$

$$\begin{pmatrix} f_2 \\ e_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ q_5 \end{pmatrix}$$

$$D_{out} = LD_{in}$$

$$(e_3) = (R_1)(f_3)$$

Mediante la obtención de los vectores clave obtenemos la relación de estructura de unión y la matriz S.

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_5 \end{pmatrix} \\ (f_3) \\ (e_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (0) & (0) \\ (0) & (0) & (0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ e_5 \end{pmatrix} \\ (e_3) \\ (e_1) \end{pmatrix}$$

Se observa que la submatriz  $S_{22} = 0$ , por lo tanto  $M = L$ .

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1} \rightarrow S_{22} = 0 \quad \therefore M = L$$

A continuación se determina el valor de la matriz de estados  $A$  y de la matriz de entrada  $B$ , sustituyendo los valores correspondientes en la Ecuación (2.26) y la Ecuación (2.27) y realizando operaciones se tiene:

### 3.3 Ejemplo: Obtención de la función de transferencia de un circuito RLC por el método tradicional y por el método de Bond Graph

---

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{L_1} & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo el valor de las matrices  $A$  y  $B$  en la Ecuación (2.28) se obtiene la ecuación de estados del circuito:

$$\begin{pmatrix} e_2 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{L_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ q_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e_1$$

Ahora se procede a determinar el valor de la matriz de salida  $C$  y de la matriz de transmisión directa  $D$ , se sustituyen los valores correspondientes en la Ecuación (2.29) y la Ecuación (2.30) y realizando operaciones se tiene:

$$C = \left( 0 \quad \frac{1}{C_1} \right) \quad y \quad D = (0)$$

Sustituyendo el valor de las matrices  $C$  y  $D$  en la Ecuación (2.31) se obtiene la ecuación de salida del circuito:

$$(e_6) = \left( 0 \quad \frac{1}{C_1} \right) \begin{pmatrix} p_2 \\ q_5 \end{pmatrix} + (0) e_1$$

Ahora utilizando la Ecuación(3.4) y sustituyendo el valor de las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  se puede encontrar la función de transferencia del circuito realizando las siguientes operaciones matriciales:

$$G(s) = (0) + \left( 0 \quad \frac{1}{C_1} \right) \left( \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{L_1} & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G(s) = \left( 0 \quad \frac{1}{C_1} \right) \begin{pmatrix} \frac{sL_1+R_1}{L_1} & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{L_1} & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G(s) = \left( 0 \quad \frac{1}{C_1} \right) \begin{pmatrix} \frac{s}{s^2 + \frac{1}{C_1 L_1} + \frac{sR_1}{L_1}} & -\frac{1}{C_1 \left( s^2 + \frac{1}{C_1 L_1} + \frac{sR_1}{L_1} \right)} \\ \frac{1}{L_1 \left( s^2 + \frac{1}{C_1 L_1} + \frac{sR_1}{L_1} \right)} & \frac{sL_1+R_1}{L_1 \left( s^2 + \frac{1}{C_1 L_1} + \frac{sR_1}{L_1} \right)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1 L_1 \left( s^2 + \frac{1}{C_1 L_1} + \frac{sR_1}{L_1} \right)} & \frac{sL_1+R_1}{C_1 L_1 \left( s^2 + \frac{1}{C_1 L_1} + \frac{sR_1}{L_1} \right)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G(s) = \left( \frac{1}{C_1 L_1 \left( s^2 + \frac{1}{C_1 L_1} + \frac{s R_1}{L_1} \right)} \right)$$

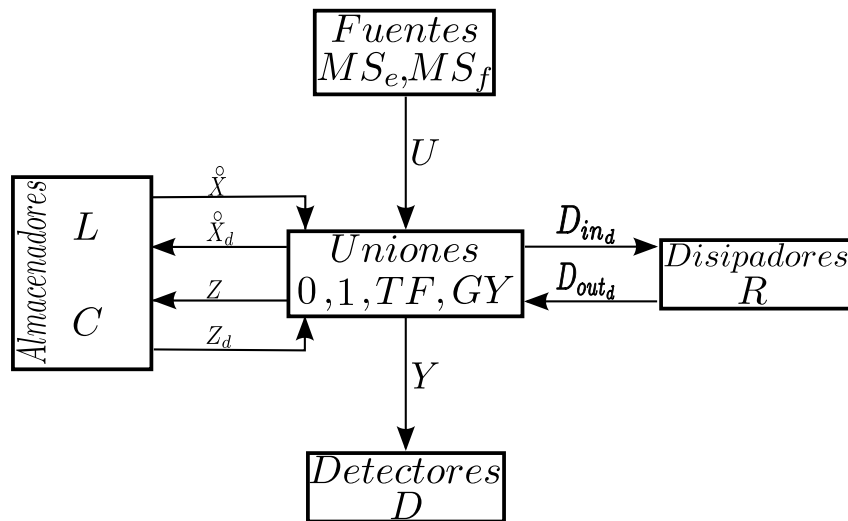
Por lo tanto, la función de transferencia del circuito es:

$$G(s) = \left( \frac{1}{s^2 C_1 L_1 + s R_1 C_1 + 1} \right) \quad (3.6)$$

Con esto se comprueba que la Ecuación (3.5) y la Ecuación (3.6) son iguales, por lo que se llega al mismo resultado utilizando el método tradicional y el método de Bond Graph.

### 3.4. Bond Graph en causalidad derivativa

Se conoce que el Bond Graph en causalidad derivativa ha sido usado para el análisis estructural de las propiedades de controlabilidad y observabilidad de un sistema lineal invariante en el tiempo y para determinar la representación en espacio de estados. La configuración de la estructura de unión de un Bond Graph en causalidad derivativa se muestra en la Figura 3.4, nótese que los vectores clave entre las uniones y los elementos de almacenamiento están cambiados respecto a la Figura 2.22.



**Figura 3.4:** Estructura de unión de un Bond Graph en causalidad derivativa.



La estructura de unión está dada por:

$$\begin{pmatrix} z \\ D_{in_d} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ D_{out_d} \\ u \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Donde las submatrices de  $H$  tienen las mismas propiedades que  $S$ . También, los vectores clave de los elementos de disipación  $D_{in_d}$  y  $D_{out_d}$  son definidos de la misma manera que  $D_{in}$  y  $D_{out}$ , considerando que:

$$D_{out_d} = L_d D_{in_d} \quad (3.8)$$

De la Ecuación (3.7) se obtiene el valor de  $D_{in_d}$  :

$$D_{in_d} = H_{21}\dot{x} + H_{22}D_{out_d} + H_{23}u \quad (3.9)$$

Sustituyendo el valor de la Ecuación (3.8) en la Ecuación (3.9) y realizando operaciones se obtiene el valor de  $D_{in_d}$ .

$$D_{in_d} = H_{21}\dot{x} + H_{22}L_d D_{in_d} + H_{23}u$$

$$D_{in_d} - H_{22}L_d D_{in_d} = H_{21}\dot{x} + H_{23}u$$

$$(I - H_{22}L_d)D_{in_d} = H_{21}\dot{x} + H_{23}u$$

$$D_{in_d} = (I - H_{22}L_d)^{-1} (H_{21}\dot{x} + H_{23}u) \quad (3.10)$$

También de la Ecuación (3.7) se obtiene el valor de  $z$ .

$$z = H_{11}\dot{x} + H_{12}D_{out_d} + H_{13}u \quad (3.11)$$

Sustituyendo la Ecuación (3.8) y la Ecuación (3.10) en la Ecuación (3.11) y realizando operaciones se encuentra el valor de  $z$ .

$$z = H_{11}\dot{x} + H_{12}L_d(I - H_{22}L_d)^{-1}(H_{21}\dot{x} + H_{23}u) + H_{13}u$$

$$z = \left[ H_{11} + H_{12}L_d(I - H_{22}L_d)^{-1}H_{21} \right] \dot{x} + \left[ H_{13} + H_{12}L_d(I - H_{22}L_d)^{-1}H_{23} \right] u$$

$$z = A^*\dot{x} + B^*u \tag{3.12}$$

Donde  $A^*$ ,  $B^*$  y  $M_d$  se definen a continuación:

$$A^* = [H_{11} + H_{12}M_dH_{21}] \tag{3.13}$$

$$B^* = [H_{13} + H_{12}M_dH_{23}] \tag{3.14}$$

$$M_d = L_d(I - H_{22}L_d)^{-1} \tag{3.15}$$

Ahora se procede a determinar el valor de  $y$  de la Ecuación (3.7).

$$y = H_{31}\dot{x} + H_{32}L_dD_{in_d} + H_{33}u \tag{3.16}$$

Se sustituyen los valores de la Ecuación (3.10) en la Ecuación (3.16) y realizando operaciones se obtiene:

$$y = H_{31}\dot{x} + H_{32}L_d(I - H_{22}L_d)^{-1}(H_{21}\dot{x} + H_{23}u) + H_{33}u$$

$$y = \left[ H_{31} + H_{32}L_d(I - H_{22}L_d)^{-1}H_{21} \right] \dot{x} + \left[ H_{32}L_d(I - H_{22}L_d)^{-1}H_{23} + H_{33} \right] u$$

$$y = [H_{31} + H_{32}M_dH_{21}] \dot{x} + [H_{33} + H_{32}M_dH_{23}] u$$

$$y = C^* \dot{x} + D^* u \quad (3.17)$$

Donde  $C^*$ ,  $D^*$  se definen a continuación:

$$C^* = H_{31} + H_{32} M_d H_{21} \quad (3.18)$$

$$D^* = H_{33} + H_{32} M_d H_{23} \quad (3.19)$$

### 3.4.1. Ejemplo: Obtención de la estructura de unión de un circuito modelado en Bond Graph en causalidad derivativa

En esta parte se realizará un ejemplo para obtener la estructura de unión del circuito mostrado en la Figura 3.5 haciendo uso de Bond Graph en causalidad derivativa.

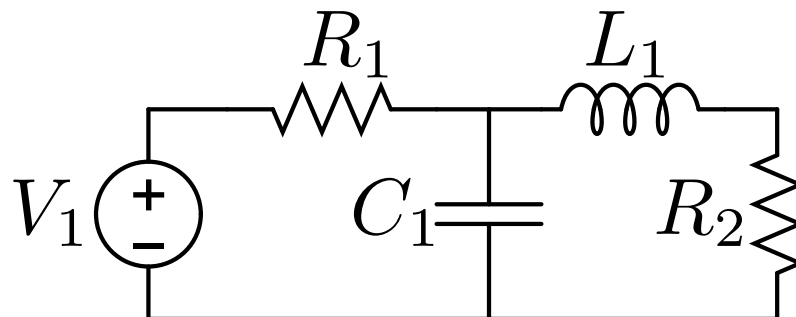
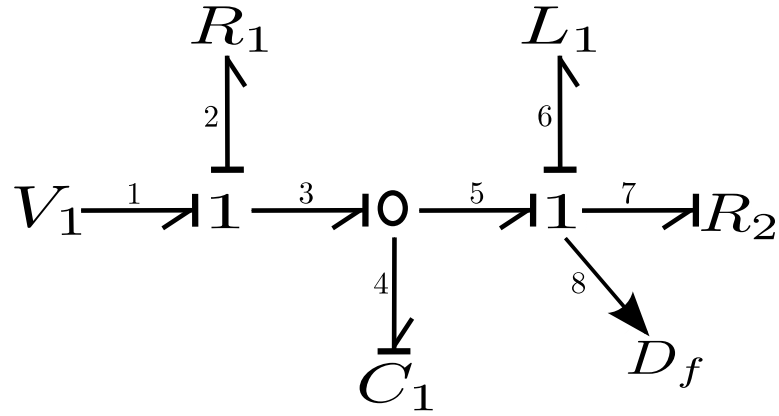


Figura 3.5: Circuito de dos mallas.

En la Figura 3.6 se muestra la representación del Bond Graph en causalidad derivativa del circuito de la Figura 3.5



**Figura 3.6:** Bond Graph en causalidad derivativa del circuito de dos mallas.

A partir de la representación en Bond Graph se obtienen los vectores clave y las relaciones constitutivas, éstas se muestran a continuación:

$$x = \begin{pmatrix} q_4 \\ p_6 \end{pmatrix} \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} f_4 \\ e_6 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} e_4 \\ f_6 \end{pmatrix} \quad D_{\text{ind}} = \begin{pmatrix} f_2 \\ e_7 \end{pmatrix} \quad D_{\text{outd}} = \begin{pmatrix} e_2 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} e_1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} f_8 \end{pmatrix}$$

$$z = Fx \quad y = D_{\text{outd}} = L_d D_{\text{ind}}$$

$$\begin{pmatrix} e_4 \\ f_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_4 \\ p_6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} e_2 \\ f_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ e_7 \end{pmatrix}$$

Mediante los vectores clave obtenemos las relaciones de estructura de unión y la matriz  $H$ .

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e_4 \\ f_6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_2 \\ e_7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e_2 \\ f_7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} f_4 \\ e_6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e_2 \\ f_7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Como podemos observar nuestra estructura de unión es correcta ya que  $S_{11}$  y  $S_{22}$  son matrices cuadradas antisimétricas y  $S_{12}$  es la matriz transpuesta negativa de  $S_{21}$  y viceversa. Con esto se procede a la obtención de las variables de estado  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$ ,  $D^*$  para la representación en espacio de estado del circuito.

Primeramente se determina el valor de  $M_d$  sustituyendo el valor de  $H_{22}$  de la Ecuación (3.20) y el valor de  $L_d$  en la Ecuación (3.15) y realizando operaciones se obtiene:

$$M_d = \begin{pmatrix} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} & \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ -\frac{R_1}{R_1 + R_2} & \frac{1}{R_1 + R_2} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Ahora se determina  $A^*$  sustituyendo los valores de la Ecuación (3.20) y la Ecuación (3.21) en la Ecuación (3.13) obtenemos:

$$A^* = \begin{pmatrix} -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} & \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ -\frac{R_1}{R_1 + R_2} & -\frac{1}{R_1 + R_2} \end{pmatrix}$$

También se determina  $B^*$  sustituyendo el valor de la Ecuación (3.21) y los valores correspondientes de la Ecuación (3.20) en la Ecuación (3.14) y realizando operaciones se tiene:

$$B^* = \begin{pmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ \frac{1}{R_1 + R_2} \end{pmatrix}$$

Finalmente sustituyendo los valores de  $A^*$  y  $B^*$  en la Ecuación (3.12) se encuentra el valor de la ecuación de estados  $z$ .

$$\begin{pmatrix} e_4 \\ f_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} & \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ -\frac{R_1}{R_1 + R_2} & -\frac{1}{R_1 + R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_4 \\ e_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ \frac{1}{R_1 + R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \end{pmatrix}$$

Se procede a determinar el valor de  $C^*$  sustituyendo el valor de la Ecuación (3.21) y las submatrices correspondientes de la Ecuación (3.20) en la Ecuación (3.18) y realizando operaciones se tiene:

$$C^* = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{R_1 + R_2} & -\frac{1}{R_1 + R_2} \end{pmatrix}$$

Se determina el valor de  $D^*$  sustituyendo el valor de la Ecuación (3.21) y las submatrices correspondientes de la Ecuación (3.20) en la Ecuación (3.19) y haciendo operaciones se tiene:

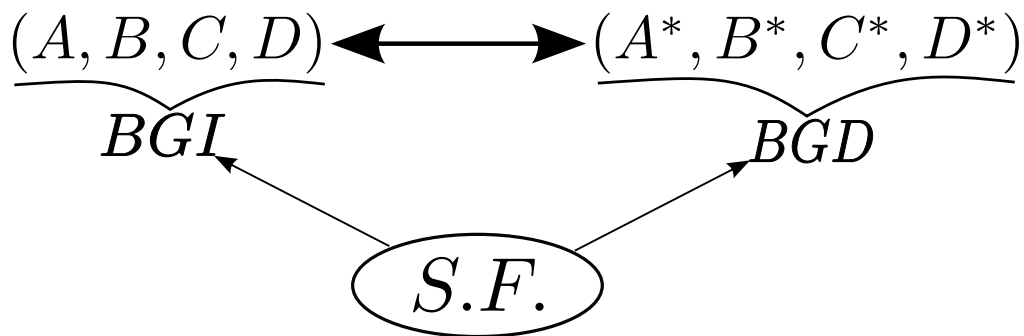
$$D^* = \left( \frac{1}{R_1+R_2} \right)$$

Por último se sustituyen los valores de  $C^*$  y  $D^*$  en la Ecuación (3.17) y se encuentra el valor de la ecuación de salida  $y$ .

$$\begin{pmatrix} f_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{R_1+R_2} & -\frac{1}{R_1+R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_4 \\ e_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1+R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \end{pmatrix}$$

### 3.5. La relación de Bond Graph en causalidad integral y causalidad derivativa

A continuación se da a conocer matemáticamente la relación que existe entre un Bond Graph en causalidad integral y un Bond Graph en causalidad derivativa.



**Figura 3.7:** Relación entre BGI y BGD.

En la Figura 3.7 se muestra la relación que existe en un sistema físico entre BGI y BGD, en particular en esta sección se mostrará cómo a partir de las variables de estado en BGI es posible obtener las variables de estado en BGD.

Se tienen las ecuaciones que representan al sistema en espacio de estados usando Bond Graph en causalidad integral:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

También se tienen las ecuaciones que representan al sistema en espacio de estado mediante Bond Graph en causalidad derivativa:

$$z = A^* \dot{x} + B^* u$$

$$y = C^* \dot{x} + D^* u$$

Tenemos que:

$$z = Fx$$

Sustituyendo  $z$  en la Ecuación (3.12) y haciendo operaciones tenemos:

$$A^* \dot{x} + B^* u = Fx$$

se despeja  $\dot{x}$  y encontramos su valor:

$$\dot{x} = (A^*)^{-1} Fx - (A^*)^{-1} B^* u$$

se realiza lo siguiente y se encuentra el valor de  $A^*$  relacionado con Bond Graph en causalidad integral.

$$A = (A^*)^{-1} F \implies (A^*)^{-1} = AF^{-1} \implies A^* = (AF^{-1})^{-1} = FA^{-1}$$

$$\therefore \boxed{A^* = FA^{-1}} \tag{3.22}$$

se hace lo mismo para encontrar el valor de  $B^*$  que lo relaciona con Bond Graph en causalidad integral.

$$B = -(A^*)^{-1} B^* \implies B^* = -A^* B \implies B^* = -FA^{-1}B$$

$$\therefore \boxed{B^* = -FA^{-1}B} \quad (3.23)$$

Se encuentra el valor de  $y$  sustituyendo el valor de  $\dot{x}$  en la Ecuación (3.17) y realizando operaciones se tiene:

$$y = C^* \left[ (A^*)^{-1} Fx - (A^*)^{-1} B^* u \right] + D^* u$$

$$y = C^* (A^*)^{-1} Fx + \left[ D^* - C^* (A^*)^{-1} B^* \right] u$$

Se tiene en cuenta la ecuación de salida en BGI para la deducción de  $C^*$  y  $D^*$ .

$$y = Cx + Du$$

Si se hace lo siguiente se encuentra el valor de  $C^*$  que lo relaciona con Bond Graph en causalidad integral.

$$C = C^* (A^*)^{-1} F \implies CF^{-1} = C^* (A^*)^{-1} \implies C^* = CF^{-1} A^* \implies C^* = C \cancel{F^{-1}} \cancel{F} A^{-1}$$

$$\therefore \boxed{C^* = CA^{-1}} \quad (3.24)$$

Se realiza lo mismo para encontrar el valor de  $D^*$ .

$$D = D^* - C^* (A^*)^{-1} B^* \implies D^* = D + C^* (A^*)^{-1} B^* \implies D^* = D + CF^{-1} \cancel{A^*} (A^*)^{-1} B^*$$

$$D^* = D + CF^{-1} B^* \implies D^* = D + CF^{-1} (-FA^{-1}B) \implies D^* = D - C \cancel{F^{-1}} \cancel{F} A^{-1} B$$

$$\therefore \boxed{D^* = D - CA^{-1}B} \quad (3.25)$$



### 3.5.1. Ejemplo: Comprobación de la relación entre GBI y BGD

En esta parte se muestra la comprobación de la relación que existe al aplicar a un Bond Graph causalidad integral y causalidad derivativa. Esto se hace empleando el ejemplo del circuito de dos mallas mostrado en la Figura 3.5.

En la Figura 3.8 se muestra el Bond Graph en causalidad integral del circuito de la Figura 3.5.

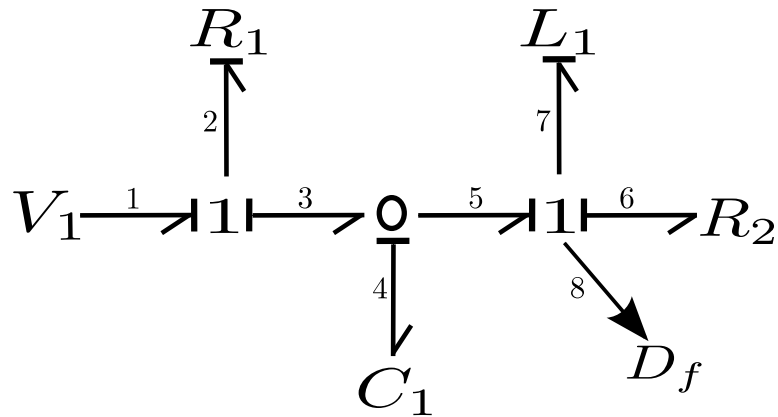


Figura 3.8: BGI del circuito de dos mallas.

De la representación en Bond Graph mostrada en la Figura 3.8 se obtienen las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $F$ .

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo las matrices correspondientes en la Ecuación (3.22) se encuentra  $A^*$ :

$$A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} & \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ -\frac{R_1}{R_1 + R_2} & -\frac{1}{R_1 + R_2} \end{pmatrix}$$

De igual forma se toman las matrices correspondientes y se sustituyen en la Ecuación (3.23) para encontrar  $B^*$ :

$$B^* = - \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ \frac{1}{R_1 + R_2} \end{pmatrix}$$

A continuación también se sustituyen las matrices en la Ecuación (3.24) y se obtiene el valor de  $C^*$ :

$$C^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{R_1 + R_2} & -\frac{1}{R_1 + R_2} \end{pmatrix}$$

Finalmente se encuentra el valor de  $D^*$  sustituyendo las matrices en la Ecuación (3.25) :

$$D^* = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 + R_2} \end{pmatrix}$$

Con esto se comprueba que teniendo la representación en espacio de estados mediante Bond Graph en causalidad integral podemos pasar directamente aplicando estas fórmulas a la representación en espacio de estados de un Bond Graph en causalidad derivativa.

### 3.6. Procedimiento para determinar un Bond Graph en el dominio de la frecuencia.

El problema que se considera en esta sección es determinar la respuesta en el dominio de la frecuencia cuando una representación en variables de estado es modelada por un Bond Graph de un sistema. El procedimiento propuesto es el siguiente [4] [3]:

1. Se considera el Bond Graph con causalidad integral del sistema. Este paso produce la descripción de  $(A, B, C, y D)$ .
2. Se asigna el negativo a las relaciones constitutivas de los elementos de almacenamiento.

$$z_s = -F x_s \tag{3.26}$$

y la matriz de estado es  $-A$ .

### 3.6 Procedimiento para determinar un Bond Graph en el dominio de la frecuencia.

3. Se conecta un elemento de disipación en la respectiva unión para cada elemento de almacenamiento. El valor de este nuevo elemento es  $s$  multiplicado por el valor dado al elemento de almacenamiento, donde  $s$  es el operador de Laplace. La representación en variables de estado de este nuevo Bond Graph es llamado Bond Graph Transformado (BGT) y se define como:

$$\dot{x}_s = A_s x_s + B u \quad (3.27)$$

$$y_s = C_s x_s + D u \quad (3.28)$$

donde :

$$A_s = (sI - A) \quad (3.29)$$

$$C_s = -C \quad (3.30)$$

la relación de este nuevo sistema es  $(A_s, B, C_s, D)$ .

4. Obtener el Bond Graph en causalidad derivativa, llamado Bond Graph de Frecuencia (BGF) del BGT, entonces las variables de estado en el dominio de Laplace son:

$$x(s) = F^{-1} B_s^* u(s) \quad (3.31)$$

y las salidas del sistema en el dominio de Laplace son:

$$y(s) = D_s^* u(s) \quad (3.32)$$

donde  $B_s^*$  y  $D_s^*$  son determinadas por la Ecuación (3.14) y la Ecuación (3.19) con BGF.

Mediante el uso de la relación de la Ecuación (3.23) con la Ecuación (3.29), la Ecuación (3.26) y la Ecuación (3.31) probamos la Ecuación (3.1). De la Ecuación (3.25), Ecuación (3.29), Ecuación (3.30) y la Ecuación (3.32) probamos la Ecuación (3.3).

### 3.6.1. Ejemplo : Obtención de un Bond Graph en el dominio de la frecuencia de un circuito de dos mallas

Considere el circuito de la Figura 3.5 donde su representación en Bond Graph con causalidad integral es representado en la Figura 3.8. Los vectores clave de este circuito en BGI son:

$$x = \begin{pmatrix} q_4 \\ p_7 \end{pmatrix} \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} f_4 \\ e_7 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} e_4 \\ f_7 \end{pmatrix} \quad D_{\text{in}} = \begin{pmatrix} e_2 \\ f_6 \end{pmatrix} \quad D_{\text{out}} = \begin{pmatrix} f_2 \\ e_6 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} e_1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} f_8 \end{pmatrix}$$

las relaciones constitutivas del circuito son las siguientes:

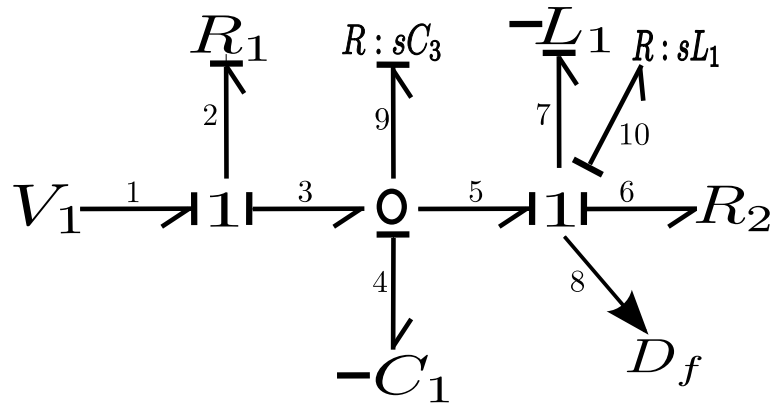
$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

y la estructura de unión es:

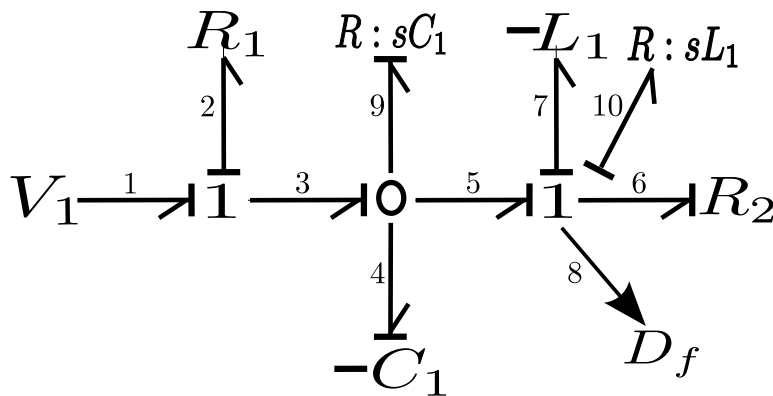
$$S = \left( \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

El Bond Graph Transformado se muestra en la Figura 3.9, aquí cada elemento de almacenamiento tiene un trazo causal con el nuevo resistor y el valor de de cada elemento de almacenamiento es el negativo del valor original. Con esto la matriz de estado del sistema es  $(sI - A)$ .



**Figura 3.9:** Bond Graph Transformado del circuito de dos mallas.

Con el fin de obtener el Bond Graph de Frecuencia del circuito de dos mallas obtenemos el Bond Graph con causalidad derivativa del Bond Graph Transformado, este se muestra en la Figura 3.10



**Figura 3.10:** Bond Graph de Frecuencia del circuito de dos mallas

Los vectores clave del Bond Graph de Frecuencia son:

$$D_{ind}^s = \begin{pmatrix} f_2 \\ e_6 \\ e_9 \\ f_{10} \end{pmatrix} \quad D_{out}^s = \begin{pmatrix} e_2 \\ f_6 \\ f_9 \\ e_{10} \end{pmatrix}$$

### 3.6 Procedimiento para determinar un Bond Graph en el dominio de la frecuencia.

y la relación constitutiva es:

$$L_d^s = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_1 s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 s \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

La estructura de unión del Bond Graph de Frecuencia es:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e_4 \\ f_7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_2 \\ e_6 \end{pmatrix} \\ e_9 \\ \begin{pmatrix} f_{10} \\ f_8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} f_4 \\ e_7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e_2 \\ f_6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_9 \\ e_{10} \end{pmatrix} \\ e_1 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Mediante la sustitución de la Ecuación (3.35) y la submatriz  $H_{22}$  de la Ecuación (3.36) en la Ecuación (3.15) obtenemos:

$$M_d = \begin{pmatrix} \frac{C_1 R_1 s(L_1 s + R_2)}{\Delta} & \frac{C_1 R_1 s}{\Delta} & \frac{R_1(L_1 s + R_2)}{\Delta} & -\frac{C_1 L_1 R_1 s^2}{\Delta} \\ -\frac{C_1 R_1 s}{\Delta} & \frac{C_1 s + R_1}{\Delta} & -\frac{R_1}{\Delta} & -\frac{L_1 s(C_1 s + R_1)}{\Delta} \\ -\frac{R_1(L_1 s + R_2)}{\Delta} & -\frac{R_1}{\Delta} & \frac{L_1 s + R_1 + R_2}{\Delta} & \frac{L_1 R_1 s}{\Delta} \\ -\frac{C_1 L_1 R_1 s^2}{\Delta} & \frac{L_1 s(C_1 s + R_1)}{\Delta} & -\frac{L_1 R_1 s}{\Delta} & \frac{L_1 s(C_1 R_1 s + C_1 R_2 s + R_2 R_1) s}{\Delta} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

donde:

$$\Delta = C_1 L_1 s^2 + C_1 R_1 s + C_1 R_2 s + L_1 R_1 s + R_1 R_2$$

Sustituyendo la Ecuación (3.37) y las submatrices de la Ecuación (3.36) en la Ecuación (3.14) obtenemos el valor de  $B^*$ .

$$B_s^* = \begin{pmatrix} \frac{s C_1 (s L_1 + R_2)}{C_1 L_1 s^2 + C_1 R_1 s + L_1 R_1 s + C_1 R_2 s + R_1 R_2} \\ \frac{s C_1}{C_1 L_1 s^2 + C_1 R_1 s + L_1 R_1 s + C_1 R_2 s + R_1 R_2} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

### 3.6 Procedimiento para determinar un Bond Graph en el dominio de la frecuencia.

Mediante el uso de la Ecuación (3.33) y la Ecuación (3.38), se realizan las operaciones correspondientes para encontrar el valor de la respuesta de las variables de estado en el dominio de la frecuencia mediante la Ecuación (3.31):

$$x(s) = \left( \frac{\frac{sC_1^2(sL_1+R_2)}{C_1L_1s^2+C_1R_1s+L_1R_1s+C_1R_2s+R_1R_2}}{\frac{sC_1L_1}{C_1L_1s^2+C_1R_1s+L_1R_1s+C_1R_2s+R_1R_2}} \right) u(s) \quad (3.39)$$

Por último sustituimos el valor de la Ecuación (3.37) y las submatrices de la Ecuación (3.36) para obtener el valor de  $D^*$ :

$$D^* = \left( \frac{sC_1}{C_1L_1s^2+C_1R_1s+L_1R_1s+C_1R_2s+R_1R_2} \right) \quad (3.40)$$

Sustituimos el valor de la Ecuación (3.40) en la Ecuación (3.32) y obtenemos:

$$y(s) = \left( \frac{sC_1}{C_1L_1s^2+C_1R_1s+L_1R_1s+C_1R_2s+R_1R_2} \right) u(s) \quad (3.41)$$

donde:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{sC_1}{C_1L_1s^2 + C_1R_1s + L_1R_1s + C_1R_2s + R_1R_2} \quad (3.42)$$

La Ecuación (3.42) describe al circuito en el dominio de la frecuencia mediante su función de transferencia, se demuestra que siguiendo el procedimiento propuesto se puede determinar la función de transferencia de un sistema de manera rápida y sencilla.

## 4 Casos de Estudio

### 4.1. Obtención de la función de transferencia de un motor de CD.

Las máquinas de cd tienen una gran importancia histórica debido a que su empleo como generadores o dínamos representaron el primer procedimiento para producir energía eléctrica a gran escala.

Donde quiera que exista progreso, la presencia del motor eléctrico es imprescindible. Es lo que acciona máquinas y equipos al servicio del hombre. Los motores de corriente directa rara vez se utiliza en aplicaciones industriales ordinarias ya que todos los sistemas eléctricos suministran corriente alterna, sin embargo en aplicaciones especiales como fabrica de acero, minas y trenes eléctricos, en ocasiones es conveniente transformar la corriente alterna en corriente directa para utilizar motores de cd y poder transformar la energía eléctrica en energía mecánica para de esta manera impulsar dispositivos tales como malacates, ventiladores, bombas, calandrias y carros ya que combina las ventajas de la utilización de la energía eléctrica a bajo costo, facilidad de transporte y limpieza además de su construcción simple, costo reducido, gran versatilidad de adaptación a las cargas diversas y mejores rendimientos.

La principal ventaja de los motores de cd frente a los motores de ca ha sido su mayor grado de flexibilidad para el control de la velocidad y del par, ya que se pueden variar dentro de un amplio intervalo sin perder su alta eficiencia, lo cual ha hecho muy interesante su aplicación en diversos accionamientos industriales. Sin embargo, debe destacarse que debido al gran desarrollo que ha tenido la electrónica de potencia, su aplicación incluso en estos campos, en los que mantenía su primacía hasta finales del siglo XX, se ha ido reduciendo en pro de los motores de ca, cuyo coste de fabricación y mantenimiento es más reducido. No obstante, la versatilidad de las máquinas de corriente directa y la relativa simplicidad de sus sistemas de mando garantizan su uso continuo en diversas aplicaciones.

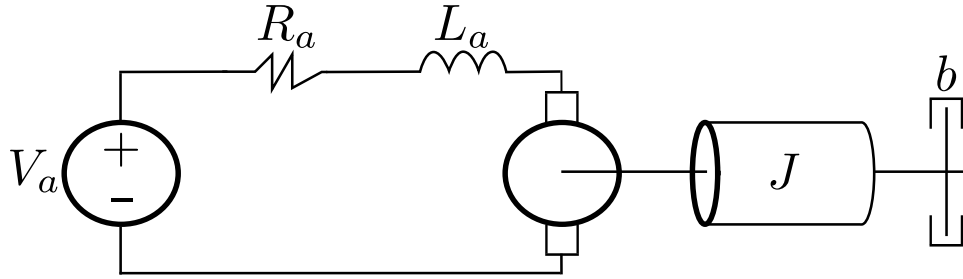
Hoy en día, este planteamiento general puede ser cuestionado porque la disponibilidad de manejadores eléctricos complejos han hecho posible utilizar motores de corriente alterna en aplicaciones de velocidad variable. No obstante, aún existen millones de motores de cd en servicio y se están produciendo algunos millones más cada año.

En la Figura 4.1 se muestra el circuito que representa al motor de cd, el cual será el primer caso de estudio y del cual se obtendrán dos funciones de transferencia que



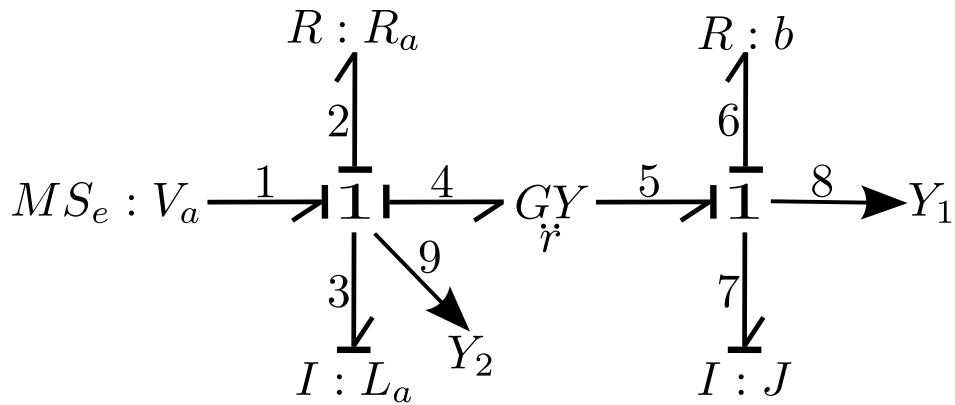
#### 4.1 Obtención de la función de transferencia de un motor de CD.

relacionen la salida de la corriente en la armadura y la velocidad angular cuando se aplica un voltaje de entrada.



**Figura 4.1:** Motor de CD.

En la Figura 4.2 se tiene la representación en Bond Graph en causalidad integral del motor de cd.



**Figura 4.2:** Bond Graph con causalidad integral del motor de CD.

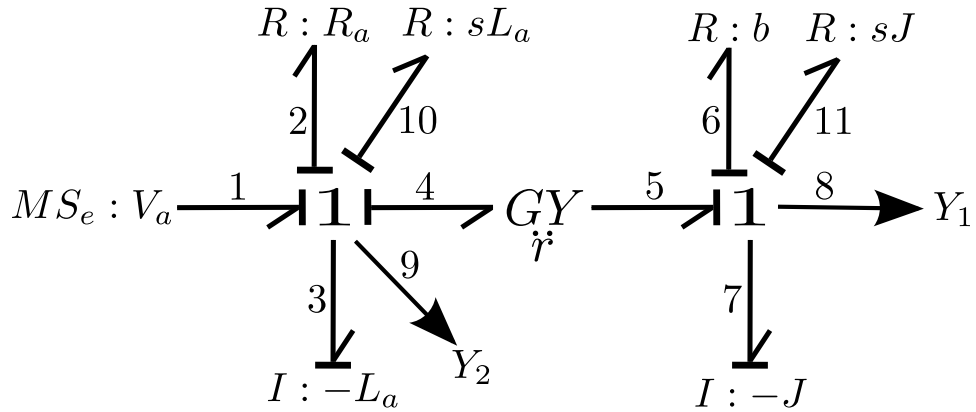
A partir del BGI del motor de cd se obtienen los vectores clave y las relaciones constitutivas:

$$x = \begin{pmatrix} p_3 \\ p_7 \end{pmatrix} \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} e_3 \\ e_7 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} f_3 \\ f_7 \end{pmatrix} \quad D_{\text{in}} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_6 \end{pmatrix} \quad D_{\text{out}} = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_6 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} e_1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} f_8 \\ f_9 \end{pmatrix}$$

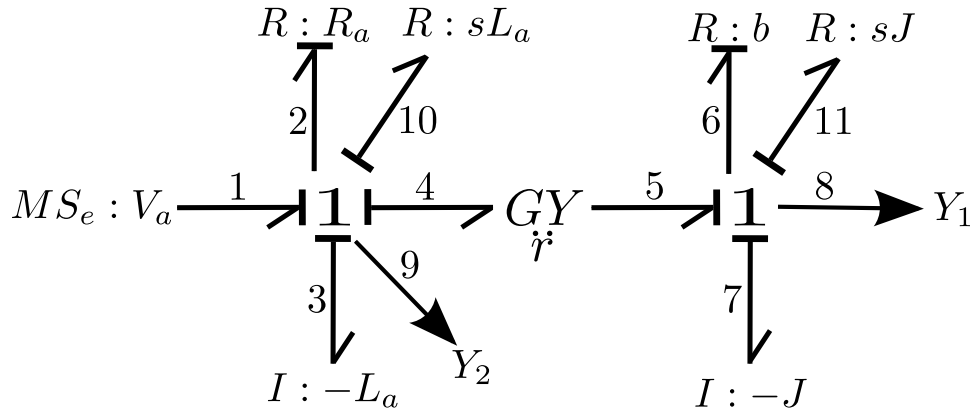
$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} R_a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

En la Figura 4.3 se muestra el Bond Graph Transformado del motor de cd.



**Figura 4.3:** Bond Graph Transformado del motor de CD.

En la Figura 4.4 se tiene el Bond Graph de Frecuencia en causalidad derivativa el cual se obtiene a partir del BGT.



**Figura 4.4:** Bond Graph de Frecuencia del motor de CD.

A continuación se determinan los vectores clave  $D_{ind}^s$  y  $D_{outd}^s$  y la relación constitutiva  $L_d^s$  a partir del Bond Graph de Frecuencia.

$$D_{ind}^s = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_6 \\ f_{10} \\ f_{11} \end{pmatrix} \quad D_{outd}^s = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_6 \\ e_{10} \\ e_{11} \end{pmatrix}$$

$$L_d^s = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sL_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sJ \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

La Ecuación (4.2) representa la estructura de unión del motor de cd.

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -r & -1 & 0 \\ r & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Se sustituye la Ecuación (4.1) y la submatriz  $H_{22}$  de la Ecuación (4.2) en la Ecuación (3.15) y se obtiene  $M_d$ :

$$M_d = \begin{pmatrix} \frac{b+Js}{\Delta} & -\frac{r}{\Delta} & -\frac{sL_a(b+Js)}{\Delta} & \frac{Jrs}{\Delta} \\ \frac{r}{\Delta} & \frac{sL_a+R_a}{\Delta} & -\frac{rsL_a}{\Delta} & -\frac{Js(sL_a+R_a)}{\Delta} \\ \frac{sL_a(b+Js)}{\Delta} & -\frac{rsL_a}{\Delta} & \frac{sL_a(R_a(b+Js)+r^2)}{\Delta} & \frac{Jrs^2L_a}{\Delta} \\ \frac{Jrs}{\Delta} & \frac{Js(sL_a+R_a)}{\Delta} & -\frac{Jrs^2L_a}{\Delta} & \frac{Js(bsL_a+bR_a+r^2)}{\Delta} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Donde:

$$\Delta = s^2JL_a + s(bL_a + JR_a) + bR_a + r^2$$

Se sustituye el valor de la Ecuación (4.3) junto con las submatrices correspondientes de la Ecuación (4.2) en la Ecuación (3.19) para poder obtener las salidas del sistema motor de cd en el dominio de la Laplace representadas por la Ecuación (3.32).

La Ecuación (4.4) representa las dos funciones de transferencia que describen el comportamiento del motor de cd en el dominio de la frecuencia.

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{pmatrix} u(s) \quad (4.4)$$

Donde:

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{u(s)} = \frac{r}{s^2JL_a + s(bL_a + JR_a) + bR_a + r^2}$$

$$G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{u(s)} = \frac{sJ + b}{s^2JL_a + s(bL_a + JR_a) + bR_a + r^2}$$

## 4.2. Modelado de un sistema de nivel de líquido

El control de nivel de líquido es muy importante en nuestra vida diaria ya que lo podemos encontrar en depósitos (pilas, aljibes, tinacos, etc.), en los cuales, el flujo entre ellos es uno de los problemas más comunes que se presentan sobre todo en los procesos industriales tales como: la industria petroquímica, la de fabricación de papel y los de tratamiento del agua. En todos estos procesos industriales, los líquidos son procesados por tratamientos químicos en los tanques, pero siempre el nivel de flujo entre ellos es regulado. Además cabe mencionar que el sistema de nivel de líquido lo encontramos también en el baño de nuestros hogares, en la palanca adjunta a la válvula del tanque de la taza, permitiendo el flujo del agua dentro del tanque hasta que el flotador sube cerrando la válvula, así que, este sistema se utiliza frecuentemente en los procesos de control.

Con frecuencia los procesos industriales implican un flujo de líquido a través de tubos y tanques conectados. En la Figura 4.5 se muestra el segundo caso de estudio del cual se obtendrán dos funciones de transferencia ya que tenemos dos salidas de flujo, una en cada tanque y una entrada en el tanque 1 del sistema de nivel de líquido.

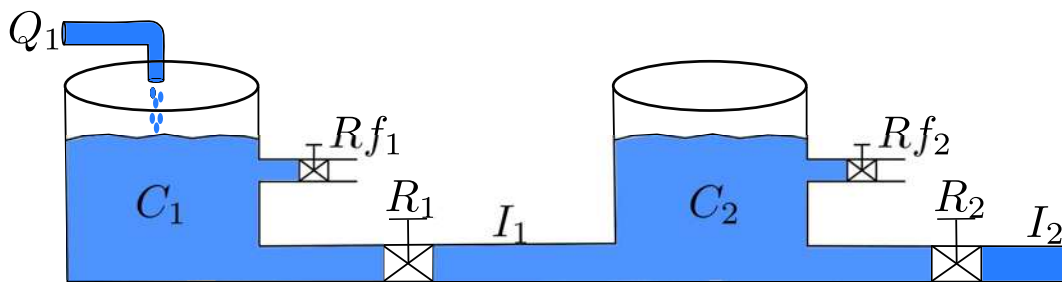


Figura 4.5: Sistema de nivel de líquido con dos tanques.

En la Figura 4.6 se tiene la representación del sistema de nivel de líquido en BGI.

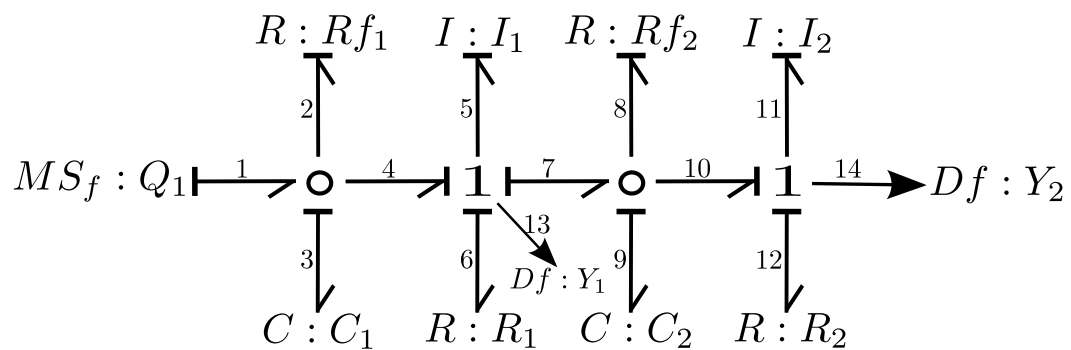


Figura 4.6: BGI del sistema de nivel de líquido.

A continuación se determinan los vectores clave del sistema a partir del BGI:

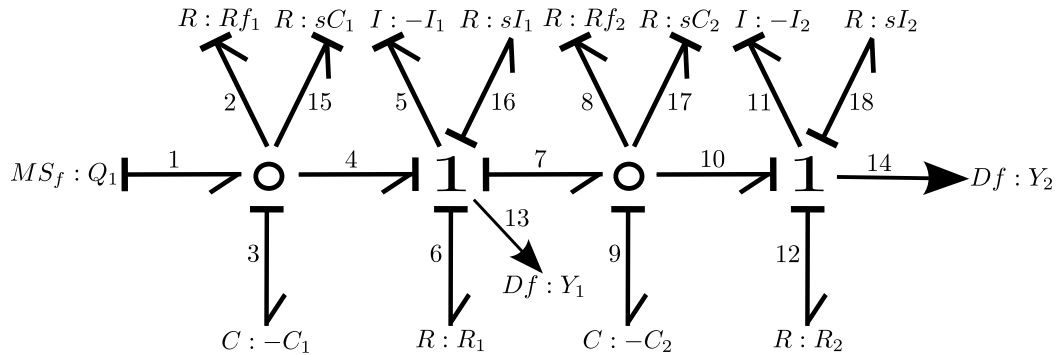
$$x = \begin{pmatrix} q_3 \\ p_5 \\ q_9 \\ p_{11} \end{pmatrix} \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} f_3 \\ e_5 \\ f_9 \\ e_{11} \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} e_3 \\ f_5 \\ e_9 \\ f_{11} \end{pmatrix} \quad D_{\text{in}} = \begin{pmatrix} e_2 \\ f_6 \\ e_8 \\ f_{12} \end{pmatrix} \quad D_{\text{out}} = \begin{pmatrix} f_2 \\ e_6 \\ f_8 \\ e_{12} \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} f_1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{14} \end{pmatrix}$$

y las relaciones constitutivas del sistema son las siguientes:

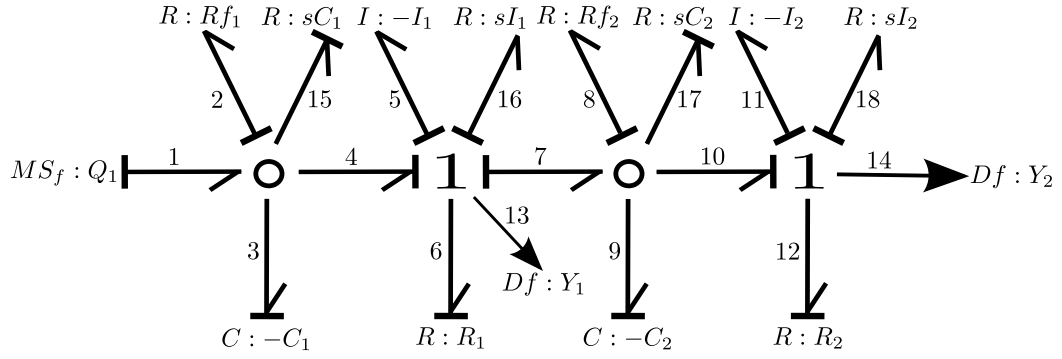
$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} \frac{1}{Rf_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Rf_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 \end{pmatrix}$$

En la Figura 4.7 se muestra el Bond Graph Transformado del sistema de nivel de líquido.



**Figura 4.7:** Bond Graph Transformado

En la Figura 4.8 se muestra el Bond Graph de Frecuencia en causalidad derivativa el cual se obtiene a partir del BGT.



**Figura 4.8:** Bond Graph con Causalidad Derivativa de BGT

A continuación se obtienen los vectores clave  $D_{ind}^s$  y  $D_{outd}^s$  a partir del Bond Graph de Frecuencia.

$$D_{ind}^s = \begin{pmatrix} f_2 \\ e_6 \\ f_8 \\ e_{12} \\ e_{15} \\ f_{16} \\ e_{17} \\ f_{18} \end{pmatrix} \quad D_{outd}^s = \begin{pmatrix} e_2 \\ f_6 \\ e_8 \\ f_{12} \\ f_{15} \\ e_{16} \\ f_{17} \\ e_{18} \end{pmatrix}$$

Igualmente se obtiene la relación constitutiva  $L_d^s$  del BGF.

$$L_d^s = \begin{pmatrix} Rf_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Rf_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sC_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sL_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sC_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sL_2 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

La Ecuación (4.6) representa la estructura de unión del sistema de nivel de líquido.

$$\begin{pmatrix}
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Sustituyendo la Ecuación (4.5) y la submatriz  $H_{22}$  de la Ecuación (4.6) en la Ecuación (3.15) y realizando operaciones se obtiene  $M_d$ :

$$M_d = \begin{pmatrix}
 \frac{E_{11}}{\Delta} & -\frac{E_{12}}{\Delta} & \frac{E_{13}}{\Delta} & -\frac{E_{14}}{\Delta} & -\frac{E_{15}}{\Delta} & \frac{E_{16}}{\Delta} & -\frac{E_{17}}{\Delta} & \frac{E_{18}}{\Delta} \\
 \frac{E_{21}}{\Delta} & \frac{E_{22}}{\Delta} & -\frac{E_{23}}{\Delta} & \frac{E_{24}}{\Delta} & -\frac{E_{25}}{\Delta} & -\frac{E_{26}}{\Delta} & \frac{E_{27}}{\Delta} & -\frac{E_{28}}{\Delta} \\
 \frac{E_{31}}{\Delta} & \frac{E_{32}}{\Delta} & \frac{E_{33}}{\Delta} & -\frac{E_{34}}{\Delta} & -\frac{E_{35}}{\Delta} & -\frac{E_{36}}{\Delta} & -\frac{E_{37}}{\Delta} & \frac{E_{38}}{\Delta} \\
 \frac{E_{41}}{\Delta} & \frac{E_{42}}{\Delta} & \frac{E_{43}}{\Delta} & \frac{E_{44}}{\Delta} & -\frac{E_{45}}{\Delta} & -\frac{E_{46}}{\Delta} & -\frac{E_{47}}{\Delta} & -\frac{E_{48}}{\Delta} \\
 \frac{E_{51}}{\Delta} & -\frac{E_{52}}{\Delta} & \frac{E_{53}}{\Delta} & -\frac{E_{54}}{\Delta} & \frac{E_{55}}{\Delta} & \frac{E_{56}}{\Delta} & -\frac{E_{57}}{\Delta} & \frac{E_{58}}{\Delta} \\
 \frac{E_{61}}{\Delta} & \frac{E_{62}}{\Delta} & -\frac{E_{63}}{\Delta} & \frac{E_{64}}{\Delta} & -\frac{E_{65}}{\Delta} & \frac{E_{66}}{\Delta} & \frac{E_{67}}{\Delta} & -\frac{E_{68}}{\Delta} \\
 \frac{E_{71}}{\Delta} & \frac{E_{72}}{\Delta} & \frac{E_{73}}{\Delta} & -\frac{E_{74}}{\Delta} & -\frac{E_{75}}{\Delta} & -\frac{E_{76}}{\Delta} & \frac{E_{77}}{\Delta} & \frac{E_{78}}{\Delta} \\
 \frac{E_{81}}{\Delta} & \frac{E_{82}}{\Delta} & \frac{E_{83}}{\Delta} & \frac{E_{84}}{\Delta} & -\frac{E_{85}}{\Delta} & -\frac{E_{86}}{\Delta} & -\frac{E_{87}}{\Delta} & \frac{E_{88}}{\Delta}
 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= s^4 C_1 C_2 L_1 L_2 R_{f1} + s^3 (C_1 C_2 L_2 R_1 R_{f1} + C_1 C_2 L_1 R_2 R_{f1} + C_1 C_2 L_1 R_{f1} R_{f2} \\
 &\quad + C_1 C_2 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 L_1 L_2 R_{f1} R_{f2}) + s^2 (C_1 C_2 R_1 R_2 R_{f1} + C_1 C_2 R_1 R_{f1} R_{f2} \\
 &\quad + C_1 L_2 R_1 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 R_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 L_1 R_2 R_{f1} R_{f2}) + s C_1 R_1 R_2 R_{f1} R_{f2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{21} &= s^3 C_1 C_2 L_2 R_{f1} + s^2 (C_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 R_2 R_{f1}) \\
 &\quad + s C_1 R_2 R_{f1} R_{f2}
 \end{aligned}$$

$$E_{31} = s^3 C_1 C_2 L_2 R_{f1} R_{f2} + s^2 C_1 C_2 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{41} = s^2 C_1 C_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{51} = s^3 C_2 L_1 L_2 R_{f1} + s^2 (C_2 L_1 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_2 R_1 R_{f1} + C_2 L_1 R_2 R_{f1} + L_1 L_2 R_{f1} R_{f2}) + s (C_2 R_1 R_{f1} R_{f2} + C_2 R_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 R_1 R_2 R_{f1} + L_2 R_1 R_{f1} R_{f2} + L_1 R_2 R_{f1} R_{f2}) + R_1 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{61} = s^4 C_1 C_2 L_1 L_2 R_{f1} + s^3 (C_1 C_2 L_1 R_2 R_{f1} + C_1 C_2 L_1 R_{f1} R_{f2} + C_1 L_1 L_2 R_{f1} R_{f2}) + s^2 C_1 L_1 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{71} = s^2 C_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + s C_1 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{81} = s^3 C_1 C_2 L_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{12} = s^3 C_1 C_2 L_2 R_{f1} + s^2 (C_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 R_2 R_{f1}) + s C_1 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{22} = s^3 C_1 C_2 L_2 + s^2 (C_1 C_2 R_2 + C_2 L_2 R_{f1} + C_1 C_2 R_{f2} + C_1 L_2 R_{f2}) + s (C_2 R_2 R_{f1} + C_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 R_2 R_{f2} + L_2 R_{f1} R_{f2}) + R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{32} = s^3 C_1 C_2 L_2 R_{f2} + s^2 (C_2 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 R_2 R_{f2}) + s C_2 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{42} = s^2 C_1 C_2 R_{f2} + s C_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{52} = s^2 C_2 L_2 R_{f1} + s (C_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 R_2 R_{f1} + L_2 R_{f1} R_{f2}) + R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{62} = s^4 C_1 C_2 L_1 L_2 + s^3 (C_1 C_2 L_1 R_2 + C_2 L_1 L_2 R_{f1} + C_1 C_2 L_1 R_{f2} + C_1 L_1 L_2 R_{f2}) + s^2 (C_2 L_1 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_1 R_2 R_{f1} + C_1 L_1 R_2 R_{f2} + L_1 L_2 R_{f1} R_{f2}) + s L_1 R_2 R_{f1} R_{f2}$$



$$E_{72} = s^2 C_1 L_2 R_{f2} + s (C_1 R_2 R_{f2} + L_2 R_{f1} R_{f2}) + R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{82} = s^3 C_1 C_2 L_2 R_{f2} + s^2 C_2 L_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{13} = s^3 C_1 C_2 L_2 R_{f1} R_{f2} + s^2 C_1 C_2 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{23} = s^3 C_1 C_2 L_2 R_{f2} + s^2 (C_2 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 R_2 R_{f2}) + s C_2 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{33} = s^4 C_1 C_2 L_1 L_2 R_{f2} + s^3 (C_1 C_2 L_2 R_1 R_{f2} + C_1 C_2 L_1 R_2 R_{f2} + C_1 C_2 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_1 L_2 R_{f1} R_{f2}) + s^2 (C_2 L_2 R_1 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 R_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 R_1 R_2 R_{f2} + C_2 L_1 R_2 R_{f1} R_{f2}) + s C_2 R_1 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{43} = s^3 C_1 C_2 L_1 R_{f2} + s^2 (C_2 L_1 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 R_1 R_{f2}) + s C_2 R_1 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{53} = s^2 C_2 L_2 R_{f1} R_{f2} + s C_2 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{63} = s^4 C_1 C_2 L_1 L_2 R_{f2} + s^3 (C_2 L_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 L_1 R_2 R_{f2}) + s^3 C_2 L_1 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{73} = s^3 C_1 L_1 L_2 R_{f2} + s^2 (C_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 L_2 R_1 R_{f2} + C_1 L_1 R_2 R_{f2} + L_1 L_2 R_{f1} R_{f2}) + s (C_1 R_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 R_1 R_2 R_{f2} + L_2 R_1 R_{f1} R_{f2} + L_1 R_2 R_{f1} R_{f2}) + R_1 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{83} = s^4 C_1 C_2 L_1 L_2 R_{f2} + s^3 (C_1 C_2 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 L_2 R_1 R_{f2}) + s^2 C_2 L_2 R_1 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{14} = s^2 C_1 C_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{24} = s^2 C_1 C_2 R_{f2} + s C_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{34} = s^3 C_1 C_2 L_1 R_{f2} + s^2 (C_2 L_1 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 R_1 R_{f2}) + s C_2 R_1 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{44} = s^3 C_1 C_2 L_1 + s^2 (C_2 L_1 R_{f1} + C_1 C_2 R_{f1} + C_1 L_1 R_{f2} + C_1 C_2 R_{f2} + C_1 C_2 R_1) + s (C_1 R_{f1} R_{f2} + C_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 R_1 R_{f1} + C_1 R_1 R_{f2} + L_1 R_{f1} R_{f2}) + R_1 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{54} = s C_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{64} = s^3 C_1 C_2 L_1 R_{f2} + s^2 C_2 L_1 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{74} = s^2 C_1 L_1 R_{f2} + s (C_1 R_{f1} R_{f2} + C_1 R_1 R_{f2} + L_1 R_{f1} R_{f2}) + R_1 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{84} = s^4 C_1 C_2 L_1 L_2 + s^3 (C_1 C_2 L_2 R_{f1} + C_2 L_1 L_2 R_{f1} + C_1 C_2 L_2 R_{f2} + C_1 L_1 L_2 R_{f2} + C_1 C_2 L_2 R_1) + s^2 (C_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_2 R_1 R_{f1} + C_1 L_2 R_1 R_{f2} + L_1 L_2 R_{f1} R_{f2}) + s L_2 R_1 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{15} = s^3 C_2 L_1 L_2 R_{f1} + s^2 (C_2 L_1 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_2 R_1 R_{f1} + C_2 L_1 R_2 R_{f1} + L_1 L_2 R_{f1} R_{f2}) + s (C_2 R_1 R_{f1} R_{f2} + C_2 R_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 R_1 R_2 R_{f1} + L_2 R_1 R_{f1} R_{f2} + L_1 R_2 R_{f1} R_{f2}) + R_1 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{25} = s^2 C_2 L_2 R_{f1} + s (C_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 R_2 R_{f1} + L_2 R_{f1} R_{f2}) + R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{35} = s^2 C_2 L_2 R_{f1} R_{f2} + s C_2 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{45} = s C_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{55} = s^3 C_2 L_1 L_2 + s^2 ( C_2 L_2 R_{f1} + C_2 L_1 R_{f2} + C_2 L_2 R_{f2} + C_2 L_2 R_1 + C_2 L_1 R_2 + L_1 L_2 R_{f2} ) + s ( C_2 R_2 R_{f1} + C_2 R_2 R_{f2} + C_2 R_1 R_{f2} + C_2 R_1 R_2 + L_2 R_1 R_{f2} + C_2 R_{f1} R_{f2} + L_2 R_{f1} R_{f2} + L_1 R_2 R_{f2} ) + R_2 R_{f1} R_{f2} + R_1 R_2 R_{f2}$$

$$E_{65} = s^3 C_2 L_1 L_2 R_{f1} + s^2 ( C_2 L_1 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_1 R_2 R_{f1} + L_1 L_2 R_{f1} R_{f2} ) + s L_1 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{75} = s L_2 R_{f1} R_{f2} + R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{85} = s^2 C_2 L_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{16} = s^4 C_1 C_2 L_1 L_2 R_{f1} + s^3 ( C_1 C_2 L_1 R_{f1} R_{f2} + C_1 L_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 L_1 R_2 R_{f1} )$$

$$E_{26} = s^4 C_1 C_2 L_1 L_2 + s^3 ( C_2 L_1 L_2 R_{f1} + C_1 C_2 L_1 R_{f2} + C_1 L_1 L_2 R_{f2} + C_1 C_2 L_1 R_2 ) + s^2 ( C_2 L_1 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_1 R_2 R_{f1} + C_1 L_1 R_2 R_{f2} + L_1 L_2 R_{f1} R_{f2} ) + s L_1 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{36} = s^4 C_1 C_2 L_1 L_2 R_{f2} + s^3 ( C_2 L_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 L_1 R_2 R_{f2} ) + s^2 C_2 L_1 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{46} = s^3 C_1 C_2 L_1 R_{f2} + s^2 C_2 L_1 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{56} = s^3 C_2 L_1 L_2 R_{f1} + s^2 (C_2 L_1 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_1 R_2 R_{f1} + L_1 L_2 R_{f1} R_{f2}) + s L_1 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$\begin{aligned} E_{66} = & s^4 (C_1 C_2 L_1 L_2 R_{f1} + C_1 C_2 L_1 L_2 R_{f2} + C_1 C_2 L_1 L_2 R_1) + s^3 (C_1 C_2 L_1 R_1 R_2 \\ & + C_2 L_1 L_2 R_1 R_{f1} + C_1 C_2 L_1 R_2 R_{f1} + C_1 C_2 L_1 R_1 R_{f2} + C_1 L_1 L_2 R_1 R_{f2} \\ & + C_1 C_2 L_1 R_{f1} R_{f2} + C_1 L_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 L_1 R_2 R_{f2}) \\ & s^2 (C_2 L_1 R_1 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_1 R_1 R_2 R_{f1} + C_1 L_1 R_1 R_2 R_{f2} + L_1 L_2 R_1 R_{f1} R_{f2} \\ & + C_1 L_1 R_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_1 R_2 R_{f1} R_{f2}) + s L_1 R_1 R_2 R_{f1} R_{f2} \end{aligned}$$

$$E_{76} = s^3 C_1 L_1 L_2 R_{f2} + s^2 (C_1 L_1 R_2 R_{f2} + L_1 L_2 R_{f1} R_{f2}) + s L_1 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{86} = s^4 C_1 C_2 L_1 L_2 R_{f2} + s^3 C_2 L_1 L_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{17} = s^2 C_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + s C_1 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{27} = s^2 C_1 L_2 R_{f2} + s (C_1 R_2 R_{f2} + L_2 R_{f1} R_{f2}) + R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$\begin{aligned} E_{37} = & s^3 C_1 L_1 L_2 R_{f2} + s^2 (C_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 L_2 R_1 R_{f2} + C_1 L_1 R_2 R_{f2} + L_1 L_2 R_{f1} R_{f2}) \\ & + s (C_1 R_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 R_1 R_2 R_{f2} + L_2 R_1 R_{f1} R_{f2} + L_1 R_2 R_{f1} R_{f2}) + R_1 R_2 R_{f1} R_{f2} \end{aligned}$$

$$E_{47} = s^2 C_1 L_1 R_{f2} + s (C_1 R_{f1} R_{f2} + C_1 R_1 R_{f2} + L_1 R_{f1} R_{f2}) + R_1 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{57} = s L_2 R_{f1} R_{f2} + R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{67} = s^3 C_1 L_1 L_2 R_{f2} + s^2 (C_1 L_1 R_2 R_{f2} + L_1 L_2 R_{f1} R_{f2}) + s L_1 R_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$\begin{aligned}
 E_{77} = & s^3 C_1 L_1 L_2 + s^2 ( C_1 L_2 R_{f1} + C_1 L_1 R_{f2} + C_1 L_2 R_{f2} + C_1 L_2 R_1 + C_1 L_1 R_2 \\
 & + L_1 L_2 R_{f1} ) + s ( C_1 R_2 R_{f1} + C_1 R_1 R_{f2} + C_1 R_1 R_2 + L_1 R_2 R_{f1} + L_2 R_1 R_{f1} \\
 & + C_1 R_{f1} R_{f2} + C_1 R_2 R_{f2} + L_1 R_{f1} R_{f2} + L_2 R_{f1} R_{f2} ) + R_1 R_2 R_{f1} \\
 & + R_1 R_{f1} R_{f2} + R_2 R_{f1} R_{f2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{87} = & s^3 C_1 L_1 L_2 R_{f2} + s^2 ( C_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 L_2 R_1 R_{f2} + L_1 L_2 R_{f1} R_{f2} ) \\
 & + s L_2 R_1 R_{f1} R_{f2}
 \end{aligned}$$

$$E_{18} = s^3 C_1 C_2 L_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{28} = s^3 C_1 C_2 L_2 R_{f2} + s^2 C_2 L_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$\begin{aligned}
 E_{38} = & s^4 C_1 C_2 L_1 L_2 R_{f2} + s^3 ( C_1 C_2 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 L_2 R_1 R_{f2} ) \\
 & + s^2 C_2 L_2 R_1 R_{f1} R_{f2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{48} = & s^4 C_1 C_2 L_1 L_2 + s^3 ( C_1 C_2 L_2 R_{f1} + C_2 L_1 L_2 R_{f1} + C_1 C_2 L_2 R_{f2} + C_1 C_2 L_2 R_1 \\
 & + C_1 L_1 L_2 R_{f2} ) + s^2 ( C_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_2 R_1 R_{f1} + C_1 L_2 R_1 R_{f2} \\
 & + L_1 L_2 R_{f1} R_{f2} ) + s L_2 R_1 R_{f1} R_{f2}
 \end{aligned}$$

$$E_{58} = s^2 C_2 L_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$E_{68} = s^4 C_1 C_2 L_1 L_2 R_{f2} + s^3 C_2 L_1 L_2 R_{f1} R_{f2}$$

$$\begin{aligned}
 E_{78} = & s^3 C_1 L_1 L_2 R_{f2} + s^2 ( C_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 L_2 R_1 R_{f2} + L_1 L_2 R_{f1} R_{f2} ) \\
 & + s L_2 R_1 R_{f1} R_{f2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{88} = & s^4 (C_1 C_2 L_1 L_2 R_{f2} + C_1 C_2 L_1 L_2 R_2) + s^3 (C_1 C_2 L_2 R_1 R_2 + C_1 C_2 L_2 R_2 R_{f1} \\
 & + C_2 L_1 L_2 R_2 R_{f1} + C_1 C_2 L_2 R_1 R_{f2} + C_1 C_2 L_2 R_2 R_{f2} + C_1 L_1 L_2 R_2 R_{f2} \\
 & + C_1 C_2 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_1 L_2 R_{f1} R_{f2}) + s^2 (C_2 L_2 R_1 R_2 R_{f1} + C_1 L_2 R_1 R_2 R_{f2} \\
 & + C_2 L_2 R_1 R_{f1} R_{f2} + C_1 L_2 R_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_2 R_2 R_{f1} R_{f2} + L_1 L_2 R_2 R_{f1} R_{f2}) \\
 & + s L_2 R_1 R_2 R_{f1} R_{f2}
 \end{aligned}$$

y :

$$\begin{aligned}
 \Delta = & s^4 C_1 C_2 L_1 L_2 + s^3 (C_1 C_2 L_2 R_1 + C_1 C_2 L_1 R_2 + C_1 C_2 L_2 R_{f1} + C_2 L_1 L_2 R_{f1} \\
 & + C_1 C_2 L_1 R_{f2} + C_1 C_2 L_2 R_{f2} + C_1 L_1 L_2 R_{f2}) + s^2 (C_1 C_2 R_1 R_2 + C_2 L_2 R_1 R_{f1} \\
 & + C_1 C_2 R_2 R_{f1} + C_2 L_1 R_2 R_{f1} + C_1 C_2 R_1 R_{f2} + C_1 L_2 R_1 R_{f2} + C_1 C_2 R_2 R_{f2} \\
 & + C_1 L_1 R_2 R_{f2} + C_1 C_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_1 R_{f1} R_{f2} + C_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_2 R_{f1} R_{f2} \\
 & + L_1 L_2 R_{f1} R_{f2}) + s (C_2 R_1 R_2 R_{f1} + C_1 R_1 R_2 R_{f2} + C_2 R_1 R_{f1} R_{f2} + L_2 R_1 R_{f1} R_{f2} \\
 & + C_1 R_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 R_2 R_{f1} R_{f2} + L_1 R_2 R_{f1} R_{f2}) + R_1 R_2 R_{f1} R_{f2}
 \end{aligned}$$

Sustituimos el valor de la Ecuación (4.7) y las submatrices correspondientes de la Ecuación (4.6) en la Ecuación (3.19) para obtener las salidas del sistema en el dominio de Laplace representadas por la Ecuación (3.32).

La Ecuación (4.8) representa las dos funciones de transferencia que describen el comportamiento del sistema de nivel de líquido en el dominio de la frecuencia.

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{pmatrix} u(s) \quad (4.8)$$

Donde:

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{u(s)} = \frac{s^3 C_1 C_2 L_2 R_{f1} + s^2 (C_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 R_2 R_{f1}) + s C_1 R_2 R_{f1} R_{f2}}{\Lambda}$$

$$G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{u(s)} = \frac{s^2 C_1 C_2 R_{f1} R_{f2}}{\Lambda}$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda = & s^4 C_1 C_2 L_1 L_2 + s^3 (C_1 C_2 L_2 R_{f1} + C_1 C_2 L_2 R_1 + C_1 C_2 L_1 R_2 + C_2 L_1 L_2 R_{f1} \\
 & + C_1 C_2 L_1 R_{f2} + C_1 C_2 L_2 R_{f2} + C_1 L_1 L_2 R_{f2}) + s^2 (C_2 L_2 R_1 R_{f1} + C_1 C_2 R_1 R_2 \\
 & + C_2 L_1 R_2 R_{f1} + C_1 C_2 R_2 R_{f1} + C_1 L_2 R_1 R_{f2} + C_1 C_2 R_1 R_{f2} + C_1 C_2 R_2 R_{f2} \\
 & + C_2 L_1 R_{f1} R_{f2} + C_1 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 L_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 C_2 R_{f1} R_{f2} + C_1 L_1 R_2 R_{f2} \\
 & + L_1 L_2 R_{f1} R_{f2}) + s (C_2 R_1 R_{f1} R_{f2} + C_2 R_1 R_2 R_{f1} + C_1 R_1 R_2 R_{f2} + L_2 R_1 R_{f1} R_{f2} \\
 & + C_1 R_2 R_{f1} R_{f2} + C_2 R_2 R_{f1} R_{f2} + L_1 R_2 R_{f1} R_{f2}) + R_1 R_2 R_{f1} R_{f2}
 \end{aligned}$$

## 5 Conclusiones y Recomendaciones

Durante este trabajo de tesis se dio a conocer la herramienta de Bond Graph, que es una alternativa de modelado para determinar las ecuaciones de estado de un sistema y se demostró que una vez que se tiene el conocimiento básico de las reglas, conceptos y elementos se puede modelar cualquier sistema físico que sea pequeño de manera sencilla, tal como se hizo con los ejemplos de circuitos eléctricos y una vez que se alcanza un mayor conocimiento de la herramienta de Bond Graph es posible comenzar a modelar sistemas de diferente dominio de energía más complejos que en comparación con algún método tradicional de modelado serían casi imposibles de modelar.

Se demostró la eficiencia, la simplicidad y la rapidez para determinar la función de transferencia de un sistema mediante el planteamiento de un nuevo procedimiento, el cual consiste en introducir un nuevo elemento de disipación de energía en cada unión donde existe un elemento de almacenamiento de energía y posteriormente aplicar causalidad derivativa al Bond Graph del sistema. Con este nuevo procedimiento se tiene la certeza de que obtener la función de transferencia de cualquier sistema que se desee analizar ahorrará tiempo y esfuerzo computacional principalmente en la solución del término  $(sI - A)^{-1}$ .

Este tema se deja abierto para futuras aplicaciones del nuevo método de obtención de la función de transferencia en otros sistemas de diferente dominio de energía como pueden ser hidráulicos, químicos y biológicos.

Se deja a consideración del lector la comprobación de las funciones de transferencia de los dos casos de estudio por algún otro método tradicional, pero siempre teniendo presente que le llevará un tiempo considerable obtenerlas además de que será más complicado y laborioso por lo que se puede caer en errores de cálculos y por ende falsos resultados.

También, se deja a consideración del lector la obtención del diagrama de Bode o de Nyquist de las funciones de transferencia de los dos casos de estudio para estudiar el comportamiento de los sistemas y en caso de ser necesario implementar algún control clásico como el  $P$ ,  $PI$ , y  $PID$  para mejorar la respuesta ante una señal de entrada en el sistema.

Se debe tener presente que al realizar el modelado y la obtención de la función de transferencia se deben seguir los procedimientos planteados así como tener mucho cuidado de respetar las restricciones causales de los elementos de Bond Graph, sólo así se podrán tener resultados confiables.

# Bibliografía

- [1] Raquel Sarahi Rodriguez Angulo. Diseño de controladores en bond graph para sistemas lti. Master's thesis, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Agosto 2010.
- [2] Dr. Gilberto Gonzalez Avalos. *Notas para estudiantes de la especialidad en control de la maestría en ingeniería en eléctrica del curso modelado de sistemas en el dominio físico*, Septiembre 2007.
- [3] Dr. Gilberto Gonzalez Avalos. Direct determination of a bond graph in the frequency domain with linearly dependent state variables. *IEEE*, 2013.
- [4] Dr. Gilberto González Avalos. A procedure to determine a bond graph in the frequency domain. *Proceeding of the LASTED International Conference*, February 2013.
- [5] Mayra Yadira Herrera Contreras. *Determinación de realizaciones en espacio de estado y funciones de transferencia de sistemas modelados en Bond Graph*. Febrero 2011.
- [6] Richard C. Dorf. *Sistemas de control moderno*. Decima edition, 2005.
- [7] David Hernandez Moreno. *Modelado y simulacion de transformadores electricos en el dominio físico*. Marzo 2011.
- [8] Katsuhiko Ogata. *Dinamica de sistemas*. 1987.
- [9] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Tom Robbins, tercera edition, 1998.
- [10] Octavio Barriga Torres. Modelado y control de una central hidroeléctrica sujeta a vibraciones en la turbina en el dominio físico. Master's thesis, Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo, Agosto 2008.
- [11] Joel Abraham Gonzalez Vieyra. *Analisis de controlabilidad y observabilidad en sistemas modelados en Bond Graph*. Marzo 2011.