

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Facultad de Ingeniería Eléctrica



**RECONSTRUCCIÓN DEL ESPACIO DE FASE A PARTIR DE UNA
SERIE DE TIEMPO**

TESIS

Que para obtener el grado de
INGENIERO EN COMPUTACIÓN

Presenta
José Madrigal Cárdenas

Juan José Flores Romero
Doctor en Ciencias Computacionales

Director de Tesis

Junio 2015

Resumen

El modelado de un sistema dinámico recae en el concepto de espacio de fase que es la colección de todos los posibles estados del sistema, también conocido como atractor, se puede decir que el atractor es la evolución de las propiedades físicas del sistema. El estado del sistema en el tiempo t se compone de toda la información necesaria para determinar de forma única los futuros estados del sistema para tiempos mayores o iguales a t ; por ejemplo, en muchos casos, las posiciones y velocidades. Para un sistema que puede ser modelado matemáticamente, el espacio de fases se conoce a partir de las ecuaciones de movimiento.

Generalmente para los sistemas caóticos dinámicos experimentales o naturales, el espacio de fase o atractor y su modelo matemático son desconocidos. En el presente trabajo se usa el análisis de series de tiempo para poder reconstruir el atractor del sistema, utilizando la información mutua para obtener el tiempo de retardo y el método de vecinos cercanos falsos para calcular la dimensión del sistema, que serán usados para la reconstrucción del espacio de fase.

Abstract

The modeling of a dynamic system lies in the concept of phase space which is the collection of all possible states of the system, also known as attractor, it could say that the attractor is the evolution of the physical properties of the system. The state of the system at time t consists of all the information necessary to uniquely determine the future states of the system to greater than or equal at t ; For example, in many cases, the positions and velocities. For a system that can be modeled mathematically, the phase space is known from the equations of motion.

Usually for experimental or natural dynamic chaotic systems, or phase space attractor and its mathematical model are unknown. In this paper the analysis of time series to reconstruct the attractor of the system is used, using mutual information for the delay and the method of neighbors false to calculate the size of the system, which will be used for reconstruction phase space.

Contenido

Resumen	III
Abstract	V
Contenido	VII
Lista de Figuras	VIII
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	2
1.2. Descripción del problema	3
1.3. Objetivos	3
1.4. Justificación	4
2. Series de Tiempo	5
2.1. Series de tiempo sintéticas	6
2.1.1. Series de tiempo caóticas	6
2.2. Series de tiempo reales	11
3. Análisis de Series de Tiempo	16
3.1. Reconstrucción del espacio de fase	16
3.2. Información mutua	18
3.2.1. Información mutua para retrasos de tiempo en los datos	21
3.3. Vecinos cercanos falsos	22
3.3.1. Detección de vecinos cercanos falsos en series de tiempo	26
4. Resultados	29
4.1. Reconstrucción del espacio de fase para modelos caóticos	29
4.1.1. Reconstrucción del espacio de fase para el modelo de Hénon	30
4.1.2. Reconstrucción del espacio de fase para el modelo de Lorenz	34
4.1.3. Reconstrucción del espacio de fase para el modelo de Rössler	35
5. Conclusiones	40
Referencias	42

Lista de Figuras

2.1.	Representación esquemática de un circuito RL-Diodo	8
2.2.	Voltaje en la resistencia del circuito contra el tiempo	8
2.3.	Espacio de fase del comportamiento de un circuito RL-diodo, donde se gráfica el voltaje de salida y de entrada	9
2.4.	Representación esquemática del circuito de Chua	9
2.5.	Caída de tensión en el capacitor C1	10
2.6.	Diagrama de fase del comportamiento del Circuito de Chua	11
2.7.	Velocidad angular del péndulo 2	12
2.8.	Diagrama esquemático sobre el movimiento del péndulo doble	13
2.9.	Serie de tiempo para el valor de las acciones de la compañía General Electric Company. Desde el 1 de Enero de 2000 hasta la fecha	13
2.10.	Serie de tiempo para el valor de las acciones de la compañía Apple Desde el 1 de Enero de 2000 hasta la fecha	14
2.11.	Serie de tiempo para la velocidad del viento en intervalos de un día desde el 1 de Enero de 2013 hasta el 31 de diciembre del 2013 con coordenadas latitud 19.68701170406506 y longitud -101.20430546606633 (Facultad de Ingeniería Eléctrica - FIE)	15
3.1.	Puntos del modelo de Hénon en \mathbb{R}^1	24
3.2.	Puntos del modelo de Hénon en \mathbb{R}^2	24
3.3.	Puntos del modelo de Hénon en \mathbb{R}^3	25
4.1.	Información mutua contra el retraso en el tiempo para el modelo de Henón	31
4.2.	Fracción de Vecinos Cercanos Falsos contra la dimensión para el modelo de Henón	32
4.3.	Espacios de fase para el sistema de Henón	33
4.4.	Información mutua contra el retraso en el tiempo para el modelo de Lorenz	34
4.5.	Fracción vecinos cercanos falsos contra la dimensión para el modelo de Lorenz	35

4.6. Espacios de fase para el sistema de Lorenz	37
4.7. Información mutua contra el retraso en el tiempo para el modelo de Rössler	38
4.8. Fracción de vecinos cercanos falsos contra la dimensión para el modelo de Rössler	38
4.9. Espacios de fase para el sistema de Rössler	39

Capítulo 1

Introducción

Muchos fenómenos en nuestro ambiente son estudiados usando secuencias de mediciones, u observaciones, hechas en el transcurso del tiempo. Estas secuencias de observaciones, se llaman series de tiempo, con frecuencia comprenden una parte importante de la información disponible en un sistema. El análisis de series de tiempo es de gran importancia para la amplia gama de áreas de investigación, debido a la gran variedad de series de tiempo estudiadas en las ciencias como registros diarios de temperatura, electrocardiogramas, entre muchos otros.

Las series de tiempo observadas a menudo exhiben un comportamiento irregular y aparentemente impredecible. Los principales objetivos del modelado de las series de tiempo son para capturar las características esenciales de la irregularidad observada, y aumentar nuestra comprensión del proceso o la dinámica de una serie de tiempo. El modelado de los sistemas dinámicos recae en el concepto de espacio de fase, el cual incluye todos los estados instantáneos que el sistema puede tener.

Los sistemas dinámicos que son altamente sensibles a las condiciones iniciales, se les conoce como sistemas caóticos, sistemas no-lineales que generalmente son imposibles de predecir o controlar. Desafortunadamente los sistemas dinámicos del mundo real

son más complejos, con mucha frecuencia no podemos observar directamente estos espacio de fase, o conocer su modelo matemático. Para solucionar este problema existe el método de reconstrucción de espacio de fase, que se puede utilizar para detectar indirectamente atractores de sistemas dinámicos del mundo real utilizando datos de series de tiempo de una sola variable.

1.1. Antecedentes

Anteriores trabajos apoyaron para el desarrollo de esta tesis, trabajos relacionados como el de Fraser y Swinney [Fraser86], donde presentan el método de información mutua como método para encontrar un buen criterio de selección para el retardo de tiempo embebido en la reconstrucción de espacio de fase a partir de series de tiempo. Donde muestran además que este criterio es por mucho, superior a la función de auto correlación.

En 1981 Takens presenta su teorema [Takens81], a este método se le conoce como coordenadas de retardo. Proporciona las condiciones en las que un atractor puede ser reconstruido a partir de las observaciones realizadas con una función genérica. La reconstrucción conserva las propiedades del sistema dinámico que no varían bajo suaves cambios en las coordenadas, pero si preserva la forma geométrica de las estructuras en el espacio de fase.

En 1992 Kennel, Brown y Abarbanel examinan el problema de determinar la dimensión de embebido mínima de un sistema observando el comportamiento de los vecinos cercanos a través de cambios en la dimensión. Cuando el número de vecinos cercanos falsos se mantenga a cero, la dimensión de proyección es la dimensión adecuada para el sistema.

1.2. Descripción del problema

El espacio de fase es una construcción matemática que permite representar el conjunto de posiciones y momentos conjugados de un sistema. En términos más formales, el espacio de fase o espacio de estados es un espacio matemático abstracto en el que las coordenadas representan variables necesarias para especificar la fase (o estado) de un sistema dinámico. El espacio de fase incluye todos los estados instantáneos que el sistema puede tener.

Habiendo hecho énfasis en la importancia del estudio del espacio de fase, tenemos el problema: Lo que nosotros observamos en un experimento no es un espacio de fase, si no es una serie de tiempo que son mediciones del experimento en una secuencia de puntos de datos, normalmente medido en puntos sucesivos en el tiempo espaciados a intervalos de tiempo uniformes. Y lo más probable es que sea sólo una única medición escalar. Es claro que con una sola medición de una variable del sistema no podemos obtener suficiente información para conocer todo el sistema. Para eso debemos convertir la medición unidimensional en un vector de estados. Usando retardos en el tiempo, obtendremos información sobre las demás variables del sistema, para poder reconstruir el espacio de fase del sistema completo.

1.3. Objetivos

En esta tesis se plantean los siguientes objetivos:

- Obtener el retardo de tiempo embebido y la dimensión de embebido de varios sistemas para la reconstrucción del espacio de fase
- Implementar un algoritmo para el método de Información Mutua
- Implementar un algoritmo para el método de vecinos cercanos falsos

- Reconstruir el espacio de fase para varios ejemplos de sistemas dinámicos caóticos

1.4. Justificación

En el presente trabajo se busca contribuir en el proceso de reconstrucción de espacio de fase o espacio de estados. Aportando los algoritmos implementados en Mathematica usando los métodos más utilizados para la reconstrucción del espacio de fase. Además de mostrar la reconstrucción de los atractores para tres de los sistemas más conocidos, modelo de Hénon, modelo de Lorenz y modelo de Rössler.

Al proporcionar las herramientas para la obtención del retardo de tiempo embebido y la dimensión de tiempo embebido se puede usar cualquier serie de tiempo y obtener la reconstrucción completa del sistema original.

Capítulo 2

Series de Tiempo

El concepto de caos es uno de los temas de investigación más expandidos en las últimas décadas. En el sentido ordinario, el caos involucra desorden o confusión, pero en el sentido científico, un sistema caótico presenta una estructura detallada y compleja que muestra un cierto orden irregular. Existen muchos sistemas deterministas no lineales que presentan un comportamiento irregular cuando se dan las condiciones apropiadas. Para describir este tipo de comportamiento, Ian Stewart propone un nuevo significado al término caos [Stewart01], “comportamiento estocástico que ocurre en un sistema determinista”. Las preguntas básicas que condujeron al descubrimiento del caos se basan en el cambio y el tiempo. Por ejemplo, ¿cuál es el comportamiento cualitativo a largo plazo de un cambio en el sistema?

El cambio en el tiempo es uno de los temas fundamentales que conforman la base del caos. El clima, el índice promedio industrial Dow-Jones, los precios de los alimentos, las poblaciones de insectos, todos ellos son ejemplos de sistemas cambiantes en el tiempo. La forma más fácil de ver cómo algo cambia con el tiempo es hacer una gráfica. Estas gráficas son utilizadas para estudiar la relación que existe entre diversas variables que cambian con el tiempo y cómo influyen entre sí.

2.1. Series de tiempo sintéticas

Se empezará definiendo formalmente lo que es una serie de tiempo. Una serie de tiempo es una secuencia de puntos de datos, normalmente medido en puntos sucesivos en el tiempo espaciados a intervalos de tiempo uniformes. Uno de los usos más habituales de las series de tiempo es su análisis para predicción y pronóstico como se hace por ejemplo con los datos climáticos, las acciones de la bolsa o las series de datos demográficos. Las series de tiempo se usan para estudiar la relación entre diversas variables que cambian con el tiempo e influyen entre sí. Las series de tiempo sintéticas son datos obtenidos derivados de modelos matemáticos como ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en diferencias.

2.1.1. Series de tiempo caóticas

Muchos de los sistemas en el mundo natural son ahora conocidos por mostrar un comportamiento caótico, su complejidad era tan grande que inicialmente se consideraron aleatorios. Ahora sabemos que el caos es resultado de procesos deterministas y que pasa solo en sistemas no lineales, además que el movimiento o los patrones que forman, en su mayor parte se ven desorganizados y erráticos, aunque sostenidos. También sabemos que ocurre en sistemas de retroalimentación: sistemas en los que los acontecimientos pasados afectan los acontecimientos futuros. El caos puede ser consecuencia de sistemas relativamente simples. Con tiempo discreto, el caos puede tener lugar en un sistema que tiene solamente una variable. Con tiempo continuo, puede ocurrir en sistemas con tan sólo tres variables. Para condiciones dadas o parámetros de control, el caos es totalmente auto-generado. En otras palabras, los cambios en otras variables (i.e. variables externas) o parámetros no son necesarios. El comportamiento caótico en un sistema no es resultado de la inexactitud de los datos o errores de muestreo o medición. Cualquier valor particular de la serie de tiempo puede llevar al caos siempre y cuando el parámetro de control esté dentro de un rango apropiado.

La principal característica de los sistemas caóticos es que son altamente sensibles a las condiciones iniciales. Matemáticamente hablando, esto significa que dos trayectorias que inicialmente comienzan arbitrariamente cerca una de otra, divergen entre ellas exponencialmente rápido. Esta divergencia es la limitación fundamental para las predicciones a largo plazo de sistemas caóticos pero la predicción a corto plazo puede ser exitosa, debido al determinismo de sistemas caóticos. Otra característica del caos es que los rangos de las variables tienen límites finitos. Los límites restringen el atractor en cierta región finita del espacio de fase. Es importante saber que las condiciones iniciales se pierden irremediabilmente. Se puede decir que no podemos determinar la historia precisa de un sistema caótico. Por último un espacio de fase de un sistema caótico puede tener propiedades fractales. Un circuito RL-Diodo es un sistema no lineal donde podemos confirmar la existencia del caos. El circuito está formado por una fuente de alterna, una resistencia, un inductor y un diodo. El modelo del sistema esta descrito por las ecuaciones 2.1. Donde el índice k separa los casos no conduce y conduce, U es el voltaje de la fuente.

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= \frac{G_k}{C_k}(q - q_0) + i \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{LC_k}(q - q_0) - \frac{R}{L}i + \frac{E\cos(\omega t) - U}{L}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Para el sistema de ecuaciones diferenciales anterior graficando el voltaje de entrada y el de salida, el espacio de fase obtenido se muestra en la figura 2.3 donde se pueden ver los desdoblamientos de períodos y curvas características de sistemas caóticos.

El primer sistema dinámico físico real, capaz de generar comportamiento caótico en un laboratorio, fue inventado por Chua. El circuito de Chua es otro circuito electrónico de los más simples que satisface los criterios de comportamiento caótico. El circuito

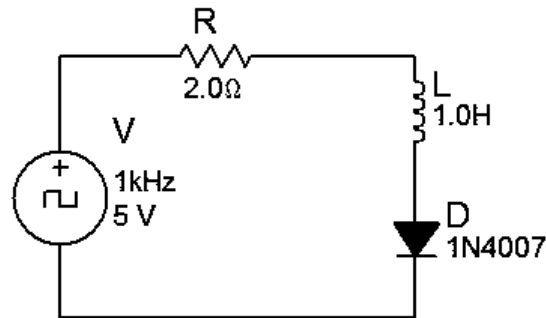


Figura 2.1: Representación esquemática de un circuito RL-Diodo

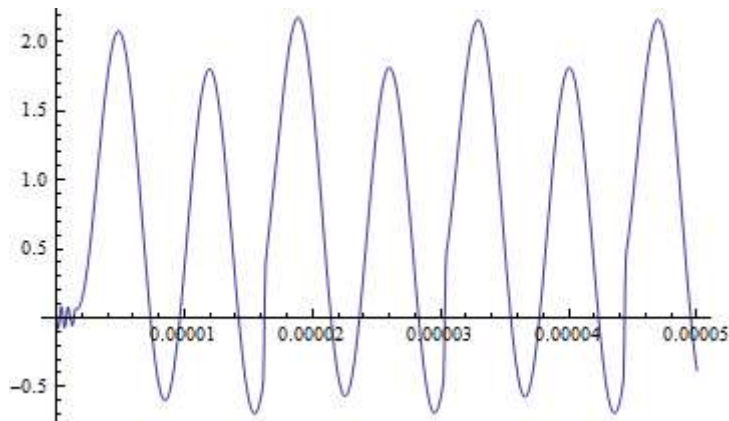


Figura 2.2: Voltaje en la resistencia del circuito contra el tiempo

de Chua puede ser modelado por un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales, su sistema está dado por las ecuaciones 2.2. Donde C_1 y C_2 son los capacitores en el circuito, L es el inductor, R es la resistencia y f es la función característica para una resistencia no-lineal.

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{RC_1}[v_2 - v_1 - f(v_1)] \\
 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{RC_2}(v_1 - v_2 + Ri_L) \\
 \frac{di_L}{dt} &= -\frac{1}{L}v_2
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

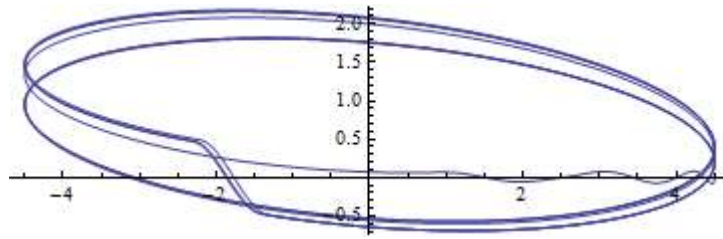


Figura 2.3: Espacio de fase del comportamiento de un circuito RL-diodo, donde se gráfica el voltaje de salida y de entrada

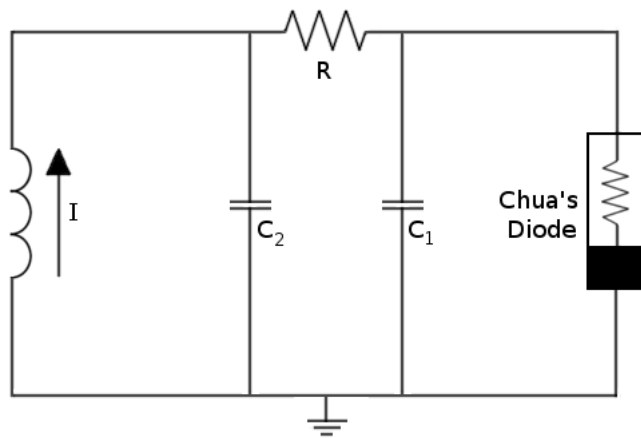


Figura 2.4: Representación esquemática del circuito de Chua

El espacio de fase para el circuito de Chua se puede ver en la figura 2.5, donde se grafica el voltaje de los dos capacitores y la corriente en el inductor.

Otro ejemplo de un sistema dinámico que muestra caos en su comportamiento es el doble péndulo que experimenta movimiento caótico y muestra una dependencia sensible a sus condiciones iniciales. El sistema está compuesto por dos péndulos, con el inferior colgando de la masa pendular del superior. En el péndulo doble, el efecto de la fricción alrededor del eje de rotación no se considera. Por lo tanto, la energía del sistema se conserva, y un sistema de este tipo se llama un sistema hamiltoniano o un sistema conservador. En sistemas disipativos, donde la energía del sistema no se conserva, por ejemplo, en el mapa de Hénon y sistema de Lorenz, existe un atractor caótico para los valores apropiados de los parámetros. Sin embargo, en el sistema

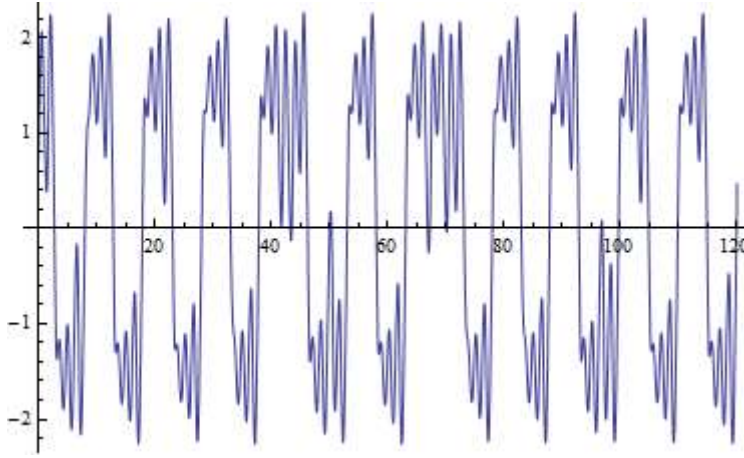


Figura 2.5: Caída de tensión en el capacitor C1

hamiltoniano tales como el péndulo doble, no hay atractores caóticos. Las ecuaciones 2.3 describen el movimiento del péndulo doble. Dónde ω_1 denota la velocidad angular de la barra de arriba y ω_2 la velocidad angular de la segunda barra, Θ_1 y Θ_2 son los ángulos de las barras de arriba y abajo respectivamente.

$$\begin{aligned}\Theta_1' &= \omega_1 \\ \Theta_2' &= \omega_2\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\omega_1' &= g(2m_1 + m_2)\sin(\Theta_1) - m_2g\sin(\Theta_1 - 2\Theta_2) - 2\sin(\Theta_1 - \Theta_2)m_2 \\ &\quad (\omega_2^2L_2 + \omega_1^2L_1\cos\Theta_1 - \Theta_2)) \frac{1}{L_1(2m_1 + m_2 - m_2\cos\Theta_1 - 2\Theta_2)} \\ \omega_2' &= 2\sin(\Theta_1 - 2\Theta_2)(\omega_1^2L_1(m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2)\cos\Theta_1 + \\ &\quad \omega_2^2L_2m_2\cos(\Theta_1 - \Theta_2)) \frac{1}{L_2(2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\Theta_1 - 2\Theta_2))}\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior podemos graficar la serie de tiempo obtenida para las velocidades angulares y los ángulos de las barras, la figura 2.7 muestra, la velocidad angular del péndulo dos respecto al tiempo.

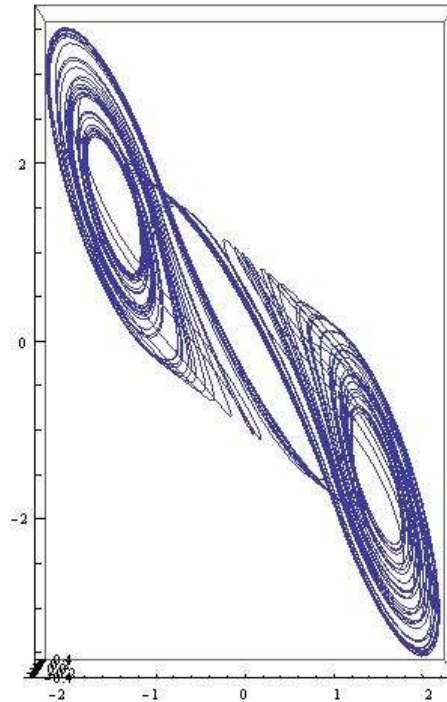


Figura 2.6: Diagrama de fase del comportamiento del Circuito de Chua

La figura 2.8 es una simulación del comportamiento del sistema de doble péndulo, ya que se obtuvieron los ángulos de las barras de los péndulos se puede simular el movimiento del sistema.

2.2. Series de tiempo reales

Se llama series de tiempo reales a un conjunto de mediciones de cierto fenómeno o experimento registrado secuencialmente en el tiempo. El análisis de series de tiempo desempeña un papel importante en el proceso requerido para el pronóstico de eventos futuros. Estos datos generalmente son usados para evaluar el comportamiento de las ventas de una empresa, o para evaluar el comportamiento de los índices de precio de un país o de un tipo de producto.

Las series de tiempo pueden ser aplicadas a muchas áreas de estudio y cada una de

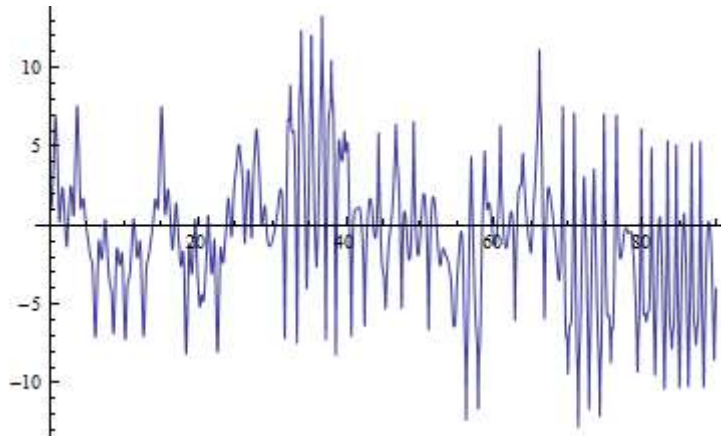


Figura 2.7: Velocidad angular del péndulo 2

estas tiene su clase de series de tiempo. Por ejemplo Series económicas, que describen precios de un artículo, tasas de desempleo, tasas de inflación, índice de precios, etc. También existen series físicas usadas para la meteorología, mediciones de temperaturas, velocidad de viento usada en la producción de energía eólica. En la geofísica para series sísmológicas. Series demográficas para describir el crecimiento de la población, tasas de natalidad y mortalidad, además de censos poblacionales y series de telecomunicación para el análisis de señales por mencionar algunos.

El software de cálculo simbólico mathematica nos permite tener acceso inmediato a datos computables, sobre datos estadísticos, dinámicos, técnicos y científicos. Esta herramienta nos es útil para formar series de tiempo reales. Por ejemplo la figura 2.9 muestra el valor de las acciones de la compañía General Electric Company. Desde el 1 de Enero de 2000 hasta la fecha. Al igual, la figura 2.10 muestra el valor de las acciones de la compañía Apple desde el 1 de Enero de 2000 hasta la fecha. Y la figura 2.11 muestra la velocidad del viento en intervalos de un día para las coordenadas latitud 19.68701170406506 y longitud 101.20430546606633 (Facultad de Ingeniería Eléctrica - FIE)

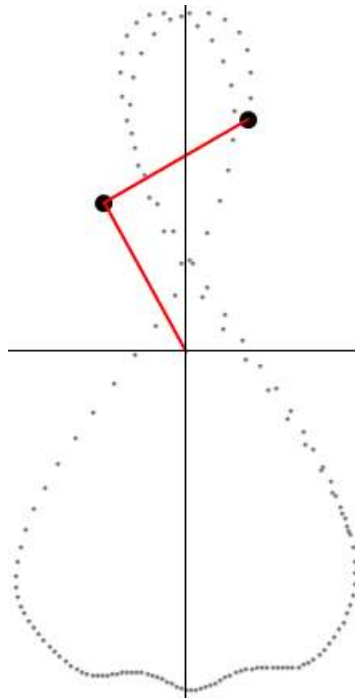


Figura 2.8: Diagrama esquemático sobre el movimiento del péndulo doble

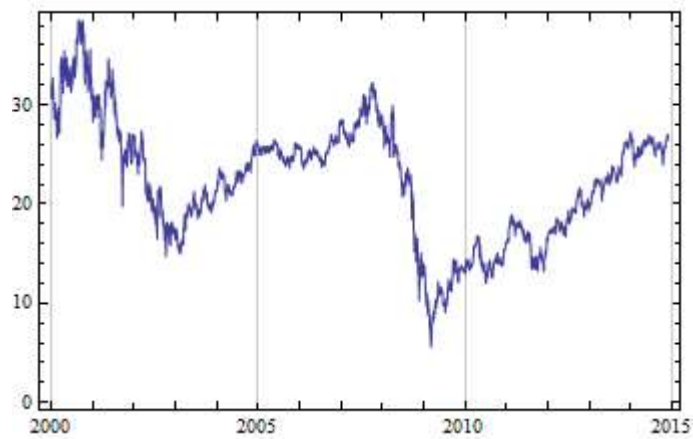


Figura 2.9: Serie de tiempo para el valor de las acciones de la compañía General Electric Company. Desde el 1 de Enero de 2000 hasta la fecha

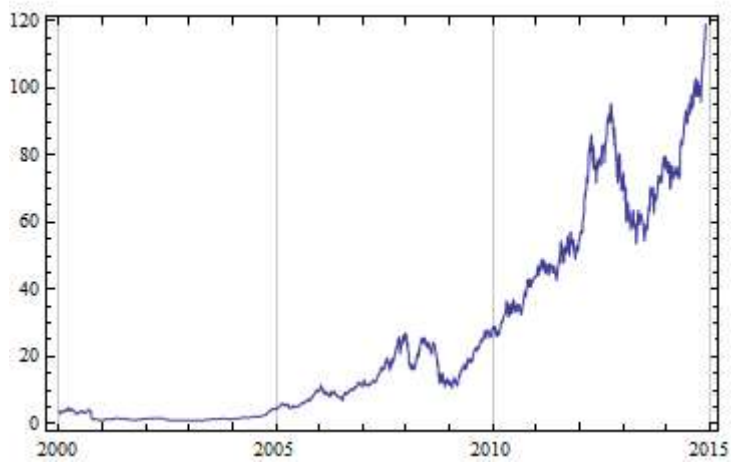


Figura 2.10: Serie de tiempo para el valor de las acciones de la compañía Apple Desde el 1 de Enero de 2000 hasta la fecha

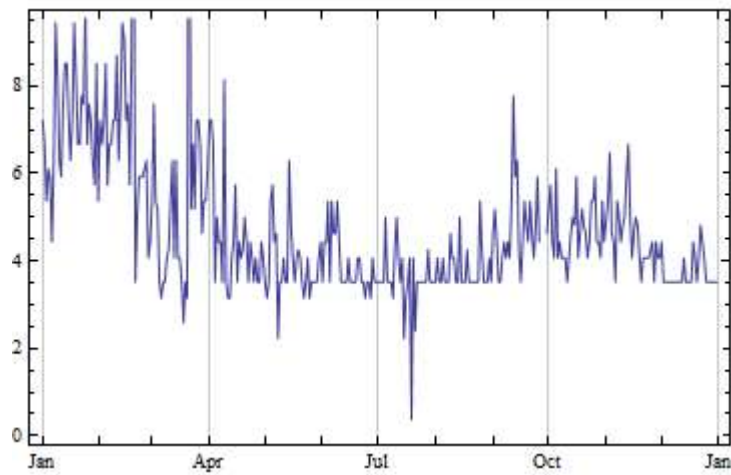


Figura 2.11: Serie de tiempo para la velocidad del viento en intervalos de un día desde el 1 de Enero de 2013 hasta el 31 de diciembre del 2013 con coordenadas latitud 19.68701170406506 y longitud -101.20430546606633 (Facultad de Ingeniería Eléctrica - FIE)

En este capítulo se definieron los conceptos de series de tiempo sintéticas, caóticas y series de tiempo reales, así como ejemplos de algunas de ellas, estos conceptos son necesarios para el desarrollo de análisis de series de tiempo que se usará para la reconstrucción del espacio de fase. Para el objetivo de esta tesis se utilizaron datos de series de tiempo sintéticas.

Capítulo 3

Análisis de Series de Tiempo

El análisis de datos caóticos surgió de la observación básica de que no todos los datos que parecen ser al azar son realmente aleatorios. De hecho, un comportamiento aleatorio puede ser que tenga su origen en un sistema determinista no lineal que conduce a datos caóticos. Una característica de un sistema caótico es su sensible dependencia a las condiciones iniciales. Si los datos son realmente caóticos, debemos rechazar las herramientas de series de tiempo habituales que se basan en la suposición de un modelo al azar. En su lugar, debemos analizar y predecir los datos con herramientas de teoría del caos.

3.1. Reconstrucción del espacio de fase

Supóngase que ahora se tiene un sistema dinámico determinista. En general un sistema de este tipo tiene un estado z en un espacio multidimensional, que se le conoce como espacio de estados o espacio de fase. Un vector en este espacio describe completamente el estado actual del sistema. Sin embargo, sólo se tiene mediciones unidimensionales x_t del sistema a través de una función de medición $x_t = h(z_t)$. Ahora bien, naturalmente surge la pregunta ¿Cómo se obtendrá información sobre todo el estado original del sistema usando únicamente mediciones unidimensionales? Es

claro que una sola medición no es suficiente pero varias mediciones si lo son, como lo explica Takens [Takens81].

La idea consiste en tener datos en forma de serie de tiempo x_1, x_2, \dots, x_T . Se escoge un tiempo de retardo τ y un entero m para obtener la dimensión del sistema, a este método se le conoce como coordenadas de retardo. Se muestran en la ecuación 3.1.

$$x_t = (x_{t-(m-1)\tau}, x_{t-(m-2)\tau}, \dots, x_{t-2\tau}, x_{t-\tau}, x_t) \quad (3.1)$$

Donde $t = 1 + (m - 1)\tau, \dots, T$. Los resultados de Takens dicen que para un m lo suficientemente grande, el comportamiento de las variables del sistema original y las coordenadas de retardo difieren sólo por un pequeño cambio de coordenadas. Esto significa que el mapeo entre las variables originales y las coordenadas de retardo es una propiedad de la serie de tiempo, es un embebido del sistema. El entero m se denomina dimensión de embebido (embedding dimension). El mapeo de las variables originales para el retraso de coordenadas se llama retardo de tiempo embebido (embedding delay).

Ahora se puede decir que podemos recrear la dinámica de un sistema con un retardo de tiempo. Las coordenadas de retardo forman un objeto geométrico equivalente al geométrico generado por el sistema original, es decir que tiene las mismas propiedades topológicas que el del sistema original, tendrá la misma dimensión, la misma información mutua y lo más importante el mismo exponente de Lyapunov. Debido a esta equivalencia se puede decir que se puede reconstruir el espacio de fase del sistema original usando el retardo de tiempo embebido. En consecuencia, la determinación de un τ y un m también se llama reconstrucción del espacio de fase.

Por lo tanto, el retardo de tiempo embebido no nos proporciona el espacio de fase del sistema original. En su lugar, sólo obtenemos un espacio vectorial que es

geométricamente equivalente al espacio original. Esto es suficiente, ya que nos garantiza la equivalencia, por ejemplo, para ambos atractores la dimensión y el máximo exponente de Lyapunov son iguales, esto es importante, ya que el exponente de Lyapunov determina la cantidad de divergencia o convergencia de las trayectorias iniciales en un espacio de fase lo que ayuda a determinar si el sistema es caótico o no.

Desafortunadamente, el teorema de Takens no nos dice cómo elegir τ y m . Si tuviéramos una cantidad infinita de datos con infinita precisión, cualquier valor de τ funcionaría, en la práctica, sólo tenemos una cantidad limitada de datos y en ocasiones con ruido, por lo que se han desarrollado varios métodos prácticos para elegir un tiempo de retardo adecuado. Se puede demostrar que para elegir m es suficiente escoger el siguiente entero mayor que $2D_0$ donde D_0 es la dimensión real del sistema, sin embargo generalmente no se conoce, así que el valor de m se debe escoger de otra manera.

3.2. Información mutua

La información mutua mide la cantidad de información que una variable aleatoria contiene acerca de otra variable aleatoria, es decir, mide la dependencia mutua de dos variables. Se puede decir que es la reducción de la incertidumbre de una variable aleatoria debido al conocimiento de otra.

Para reconstruir el atractor de un determinado sistema se necesita obtener un retraso del sistema, este retraso se mapea a una sistema con una dimensión adecuada del sistema como se muestra a continuación en la ecuación 3.2.

$$P_t = (x_{t-(m-1)\tau}, x_{t-(m-2)\tau}, \dots, x_{t-2\tau}, x_{t-\tau}) \quad (3.2)$$

Donde x_t denota un dato de la serie de tiempo en el tiempo t y τ denota el embedding delay o el retraso y m es el embedding dimension o la dimensión del sistema. Para poder calcular el valor de τ dos estimaciones son importantes. Primero τ debe ser lo suficientemente grande como para que los valores de la medición de la serie de tiempo sea significativamente diferente de la información que ya conocemos, solo así será posible reunir información de las demás variables involucradas en el sistema. En segundo τ no debe de ser muy grande ya que el sistema pierde memoria del estado inicial, es decir que se pierde correlación entre un dato y otro. Usando el razonamiento anterior se usó para calcular el retardo de tiempo embebido (embedding delay) una técnica propuesta por Fraser y Swinney [Fraser86], conocida como información mutua. La idea es que para una buena opción de τ dado $x(t)$ provee nueva información con la medición de $x(t + \tau)$. Es decir, dada la medida de $X(t)$, cuantos bits promedio puedo predecir de $X(t + \tau)$. El objetivo es buscar la información mutua menor ya que el primer mínimo agrega a mayor cantidad de información conociendo $x(t)$ sin perder correlación entre $x(t + \tau)$.

La ecuación 3.2 para la cual está dada la reconstrucción del atractor, que nos dice que a partir de una sola medida escalar se obtiene todo el espacio de fase de un sistema. La clave para la compresión recae en el hecho de que todas las variables en un proceso no lineal están genéricamente conectadas, es decir, que influyen entre sí. Por lo tanto cada punto subsecuente dado por la medición x_t es el resultado de la combinación de las demás variables del sistema. Ahora bien, uno de los parámetros que deben de ser obtenidos es el de τ , y en realidad no existe una forma rigurosa para determinar su valor óptimo, incluso no son claras las propiedades que debe tener el valor óptimo, pero ya habíamos mencionado que dos criterios eran importantes que se cumplieran. El primero era que τ debía ser lo suficientemente grande para que la información sea significativamente diferente a la que ya conocíamos y además no debía ser muy grande ya que se puede perder la memoria del estado inicial, y esto es importante ya que los sistemas caóticos son impredecibles y por lo tanto pierden la

memoria del estado inicial a medida que avanza el tiempo. Así que si escogemos un valor muy pequeño para τ no habrá diferencia en los elementos del vector de coordenadas, tendríamos redundancia, por otro lado si se escoge un τ muy grande, las coordenadas perderán correlación y tendríamos m coordenadas irrelevantes. Esto es τ debe ser tal que los valores de x_i y $x_{i+\tau}$ son lo suficientemente independientes uno del otro para ser útiles como coordenadas en vector de retardo de tiempo, pero no tan independientes como para no tener ninguna relación entre sí. Se dice que si la señal tiene fuertes componentes periódicos, una buena primera aproximación para el tiempo de retraso sería igual a una cuarta parte del periodo [Kantz04].

Ahora, conociendo lo anterior se utilizó el algoritmo de información mutua que fue propuesto por Fraser y Swinney, para determinar el valor de τ . Ya mencionamos que el algoritmo de información mutua determina la cantidad de información que existe del estado $x_{t+\tau}$ asumiendo que se conoce x_t . Entonces la información mutua mide la dependencia general de dos variables. Para un valor de τ pequeño el valor de la información mutua para x_t y $x_{t+\tau}$ será grande por que x_t y $x_{t+\tau}$ tienen mucha información mutua por la diferencia tan pequeña, así que para grandes valores de la información mutua se acercará a cero ya que x_t y $x_{t+\tau}$ no tendrán nada que ver entre ellas. Generalmente la información mutua tiene varios mínimos y máximos locales. El primer mínimo que nos da la información mutua marca el retardo de tiempo τ donde $x_{t+\tau}$ agrega la mayor información sobre la ya conocida x_t entonces este valor será el utilizado como τ para la reconstrucción del espacio de fase o atractor.

Los datos para algunos sistemas caóticos su información mutua decrementará sin tener un punto mínimo claro, en estas situaciones podemos escoger un valor para τ al primer decremento sustancial donde el algoritmo de información mutua se detiene y empieza a decrementar lentamente. Sin embargo Kantz y Schreiber [Kantz04] dicen que para escoger el retardo en el tiempo se debe tener en cuenta el propósito

de nuestro análisis de datos. Por ejemplo, si nuestro propósito es la predicción, el retardo en el tiempo debe ser optimizado a prueba y error para producir una buena predicción. Y para predicciones más prolongadas retardos de tiempo más grandes son más óptimos.

A continuación se muestra la definición matemática sobre la información mutua. Primero debemos considerar dos variables aleatorias discretas X y Y . La información mutua, en particiones, entre el valor x de X y el valor de y de Y está definida por.

$$\log_2 \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_X(x)P_Y(y)} \quad (3.3)$$

Donde $P_{X,Y}$ es la función de densidad de probabilidad conjunta en (x,y) y $P_X(x)$ y $P_Y(y)$ son la función de densidad de probabilidad marginal de x y y respectivamente. Si X y Y son independientes, entonces $P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)P_Y(y)$ y la información mutua entre X y Y será cero, como esperábamos. La información mutua de $I_{X,Y}$ esta dada por la siguiente expresión.

$$I_{X,Y} = \sum_x \sum_y P_{X,Y}(x,y) \log_2 \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_X(x)P_Y(y)} \quad (3.4)$$

3.2.1. Información mutua para retrasos de tiempo en los datos

Al escoger un retardo de tiempo τ se calcula la información mutua de las variables x_t y $x_{t+\tau}$ para varios valores de τ , no tenemos disponible la distribución de estas variables así que el cálculo se basa en la frecuencia relativa o el histograma de sus datos.

EL algoritmo nos dice dada una serie de tiempo en la forma $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$, primero se debe encontrar el mínimo (x_{min}) y el máximo (x_{max}) de toda la secuencia, después se debe de particionar en j intervalos del mismo tamaño, donde j debe ser un entero lo suficientemente grande. Finalmente se calcula la siguiente expresión.

$$I_\tau = - \sum_{h=1}^j \sum_{k=1}^j P_{h,k}(\tau) \log_2 \frac{P_{h,k}(\tau)}{P_h P_k} \quad (3.5)$$

Donde P_h y P_k denotan la probabilidad de que la variable asuma el valor de la partición en la h -ésima y k -ésima posición (frecuencia relativa), que anteriormente ya habíamos mencionado y $P_{h,k}(\tau)$ denota la probabilidad conjunta de que x_t este en la partición h y $x_{t+\tau}$ este en la partición k . Se puede demostrar que $I(\tau)$ no es negativo. Finalmente podemos decir que la información mutua es la cantidad mutua actúa como una función de correlación no lineal [Abarbanel06]

3.3. Vecinos cercanos falsos

Inicialmente partimos del hecho que necesitábamos obtener los parámetros de τ retardo de tiempo embebido (embedding delay) y m es la dimensión de embebido (embedding dimension) para la reconstrucción del diagrama de fase o atractor del sistema. Bueno ahora consideraremos la forma de obtener m la dimensión de embebido.

Sabemos que m no debe ser más grande que el siguiente entero de $2D_0$ donde D_0 es la dimensión del atractor [Sprott03]. Por ejemplo se puede demostrar que para el modelo de Hénon, la dimensión del atractor es cerca de 1.26, así que para este modelo la dimensión de embebido de 3 sería suficiente. Sin embargo la mayor parte del tiempo m solo necesita ser el siguiente entero después de D_0 . En este caso para el modelo de Hénon podemos escoger $m = 2$. Similarmente para el modelo de Lorenz la dimensión del atractor es cerca de 2.06, y una dimensión de embebido de 5 sería suficiente. En realidad podemos encontrar que $m = 3$ es más adecuado para el modelo de Lorenz.

Pero en la práctica esta forma de escoger m no nos ayudaría ya que necesitaríamos conocer el valor de D_0 y que regularmente no se conoce.

Un método practica y ampliamente utilizado para determinar la dimensión de embebido es el método de vecinos cercanos falsos. La idea es que cuando la dimensión de embebido sea demasiado pequeña, algunos puntos de los datos estarán cerca de otro ya que los datos se proyectan sobre un espacio de baja dimensión. En el método de vecinos cercanos falsos gradualmente incrementamos la dimensión de embebido m , y por cada valor de m , buscamos cualquier vecino cercano falso para cada punto de los datos. Cuando hemos incrementado m para un valor para el que por primera vez no tenemos vecinos cercanos falsos, hemos identificado la dimensión correcta del sistema, para esta dimensión la porción de vecinos cercanos falsos debe ser cero p muy pequeño como 0.01. (Si los datos están corrompidos con ruido la porción de vecinos cercanos falsos no caerá a cero en ninguna dimensión).

Para entender más el concepto ilustremos con un ejemplo gráfico el método de vecinos cercanos falsos. Para este ejemplo tomaremos puntos del mapa de Hénon, es un modelo simplificado de la sección de Poincaré del modelo de Lorenz, es un sistema dinámico que exhibe comportamiento caótico. Consideremos puntos en el intervalo de $(-0.1, -0.05)$. Los puntos que se tomaron fueron -0.0689981 , -0.064243 y -0.0848364 .

En la figura 3.1 se muestra datos con $m = 1$ es decir \mathbb{R}^1 , donde podemos ver que los puntos a , b y c parecen ser vecinos. Sin embargo en realidad solo b y c son vecinos verdaderos y a es un vecino falso de b y c .

Ahora en la figura 3.2 veamos estos tres puntos en la dimensión mayor $m = 2$ es decir \mathbb{R}^2 . Vemos que los tres puntos en realidad no son vecinos puesto que al incrementar la dimensión b y c . Pero podemos asegurar que b y c son realmente vecinos. Para averiguarlo proyectemos los puntos en una dimensión mayor.

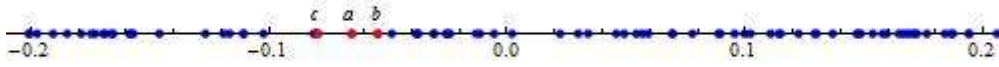


Figura 3.1: Puntos del modelo de Hénon en \mathbb{R}^1

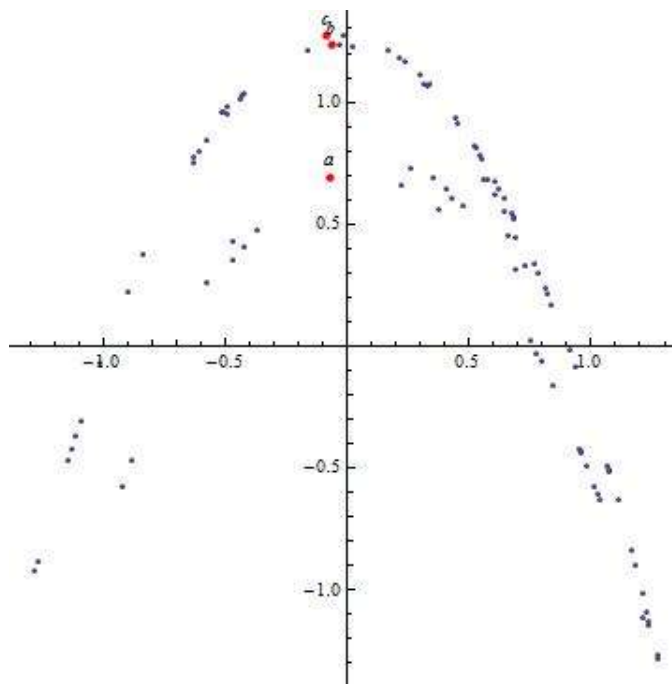


Figura 3.2: Puntos del modelo de Hénon en \mathbb{R}^2

Finalmente en la figura 3.3 veamos estos tres puntos en una dimensión mayor $m = 3$ es decir \mathbb{R}^3 . Podemos ver que estos puntos b y c esencialmente no han cambiado, en una dimensión mayor siguen siendo vecinos.

Según el método de vecinos cercanos falsos, la dimensión adecuada del sistema, debe tener en esencia una fracción de vecinos falsos igual a cero, para el ejemplo del modelo de Hénon en la dimensión $m = 1$, esto no sucede, ya que hemos mostrado un punto que tiene un falso vecino cercano, analizando todos los puntos para $m = 2$, podríamos encontrar que en el conjunto de datos no existen vecinos cercanos falsos.

Esto significa que la dimensión de embebido para el modelo de Hénon es suficiente con $m = 2$. Podríamos usar una dimensión de embebido mayor como por ejemplo $m = 3$, pero esto no introduce ninguna ventaja, por lo contrario, sólo introduce mas carga computacional.

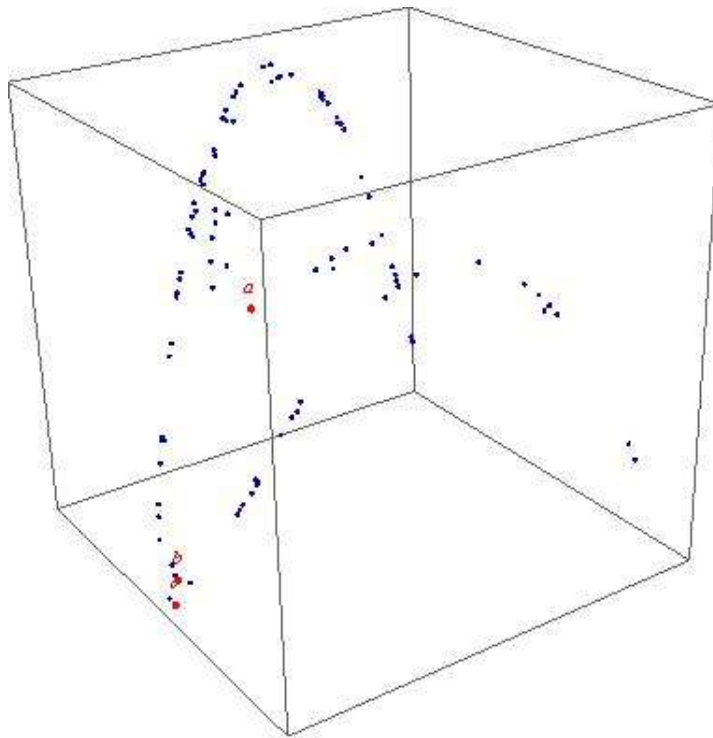


Figura 3.3: Puntos del modelo de Hénon en \mathbb{R}^3

3.3.1. Detección de vecinos cercanos falsos en series de tiempo

Una vez vista la idea general sobre vecinos cercanos falsos, debemos determinarlos de manera matemática en los datos. Asumiendo que el punto y es un vecino cercano de x en la dimensión m , esto es, que la distancia $\|x - y\|$ en \mathbb{R}^m es la mas pequeña entre todas las y . Ahora consideremos:

Si y es un vecino verdadero de x , la distancia serán mucho mayor en la dimensión \mathbb{R}^{m+1} .

Si y es un vecino falso de x , su distancia serán mucho mayor en la dimensión \mathbb{R}^{m+1} .

Un punto x en la dimensión m está dado por la ecuación 3.2 En la dimensión $m+1$, el punto tiene un componente adicional quedando como se muestra en la ecuación 3.6

$$P_t = (x_{t-(m-1)\tau}, x_{t-(m-2)\tau}, \dots, x_{t-2\tau}, x_{t-\tau}) \quad (3.6)$$

Obteniendo el cuadrado de la distancia Euclidiana entre x y y en la dimensión \mathbb{R}^m queda en la ecuación 3.7.

$$Rm^2 = \sum_{i=0}^{m-1} (x_{t-i\tau} - y_{t-i\tau})^2 \quad (3.7)$$

Ahora el cuadrado de la distancia Euclidiana entre x y y en \mathbb{R}^{m+1} . Ecuación 3.8

$$R_{m+1}^2 = \sum_{i=0}^{m-1} (x_{t-i\tau} - y_{t-i\tau})^2 + (x_{t+\tau} - y_{t+\tau})^2 = Rm^2 + (x_{t+\tau} - y_{t+\tau})^2 \quad (3.8)$$

Entonces vemos que la distancia se incrementa $(x_{t+\tau} - y_{t+\tau})^2$ conforme nos vemos de dimensión \mathbb{R}^m a \mathbb{R}^{m+1} . Ahora podemos inferir lo siguiente:

Si este incremento es pequeño a comparación con Rm^2 , entonces y es un vecino verdadero x .

Si este incremento es grande a comparación con Rm^2 , entonces y es un vecino cercano falso de x .

Para comparar el incremento con Rm^2 , simplemente calculamos el radio.

$$\sqrt{\frac{(x_{t+\tau} - y_{t+\tau})^2}{Rm^2}} = \frac{x_{t+\tau} - y_{t+\tau}}{Rm} \quad (3.9)$$

Si este radio es mayor que un valor de umbral T_1 , el punto y es declarado como vecino cercano falso de x . Abarbanel [Abarbanel96] nos dice que un umbral adecuado T_1 es de 15 o menos. Kennel y Abarbanel [Kennel02] sugieren un valor en el intervalo de 10 y 20. Small [Small05] sugiere un valor de umbral entre 10 y 30 además que el valor 15 es un buen punto de partida.

El criterio que se ilustra en la ecuación 3.10. Tal vez pueda no trabajar de manera apropiada. En realidad, algunas veces un punto y no es un verdadero vecino cercano del punto x pero el criterio anterior nos da un valor pequeño que erróneamente clasificaríamos como un verdadero vecino cercano. Esto pasa para pequeños conjuntos de datos que tienen una dimensión de embebido mayor. En tales datos algunos vecinos cercanos ya sean verdaderos o falsos no estarán muy cerca de sus vecinos, y cuando nosotros nos movemos a una dimensión mayor, el incremento en la distancia no es muy grande. Debido a esto se puede clasificar de manera errónea a un punto como verdadero vecino cercano.

$$\frac{x_{t+\tau} - y_{t+\tau}}{Rm} > T_1 \quad (3.10)$$

Para estas situaciones Kennel [Kennel92] sugiere usar el siguiente criterio, ilustrado en la ecuación 3.11. Donde σ es la desviación estándar de los datos. Un umbral adecuado para este criterio es 2. Podemos considerar un vecino cercano falso si alguno de los dos criterios se cumple.

$$\frac{x_{t+\tau} - y_{t+\tau}}{\sigma} > T_2 \quad (3.11)$$

En este capítulo se explicó, cómo se obtiene la información de todo el estado original del sistema utilizando solamente mediciones unidimensionales. Se describió el teorema de Takens que nos permite reconstruir el espacio de fase a partir de una serie de tiempo, además también se describen la información mutua, utilizada para obtener un retardo del sistema y el método de vecinos cercanos falsos para obtener la dimensión del sistema, que son los parámetros que se ocupan para la reconstrucción del espacio de fase.

Capítulo 4

Resultados

Un sistema puede ser descrito por un vector de números reales, llamado estado, que tiene como objetivo proporcionar una descripción completa del sistema en algún punto en el tiempo. El conjunto de todos los posibles estados del sistema es el espacio de fase o diagrama de fase. Este espacio especifica la evolución en el tiempo que define un sistema dinámico. El espacio de fase nos permite observar la evolución de las propiedades físicas de un sistema.

4.1. Reconstrucción del espacio de fase para modelos caóticos

Un conjunto ordenado de valores de estado a través del tiempo se llama trayectoria. Dependiendo del sistema, diferentes trayectorias pueden evolucionar a un subconjunto común de espacio de fase llamado un atractor. La presencia y el comportamiento de atractores dan intuición acerca del sistema dinámico.

La ventaja de la reconstrucción del espacio de fase es que solo se requiere la medición de una variable, aunque el sistema dinámico puede implicar varias o muchas

variables. La medición de muchas variables generalmente es difícil o imposible. En estos casos un espacio de fase a lo más estará incompleto. Otra ventaja es que los diagramas del espacio de fase pueden ayudar a distinguir datos altamente deterministas o caóticos a partir de datos ligeramente deterministas o que se creen aleatorios.

Existen casos para los cuales, la reconstrucción del atractor no nos servirá. Uno es el caso evidente de datos aleatorios, en los que no existe atractor alguno. En segundo, el sistema puede tener un atractor de alta dimensión que no muestra ninguna estructura definible en tres o menos dimensiones (recordando que cualquier gráfico en el espacio de fase sólo puede tener un máximo de tres ejes ortogonales). En tercer lugar, el ruido puede ocultar cualquier intento de reconstrucción. Y finalmente los datos pueden no ser estacionarios. En todos estos casos, no hay ninguna superficie de baja dimensión para modelar o reconstruir [Gershenfeld94].

4.1.1. Reconstrucción del espacio de fase para el modelo de Hénon

El mapa de Hénon es un sistema dinámico que presenta comportamiento caótico, está basado en las ecuaciones 4.1. Tiene las mismas propiedades básicas que el atractor de Lorenz. Aunque el mapa de Hénon no representa ningún sistema físico, es usado para el estudio del comportamiento caótico.

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= y_t + 1 - ax_t^2 \\y_{t+1} &= bx_t^2\end{aligned}\tag{4.1}$$

La reconstrucción del atractor del modelo de Hénon, está dada por la ecuación 3.1. Para la reconstrucción usaremos solo valores de una sola variable por ejemplo x . Es necesario calcular los parámetros de retardo de tiempo embebido y la dimensión

de embebido.

El retardo de tiempo se calcula usando la información mutua, para esto se programo en mathematica el algoritmo mencionado. La salida del programa se muestra en la figura 4.1. El programa recibe como parámetros el retraso máximo 20 para este ejemplo y el ancho de la partición en este caso de 0.1.

La regla que teníamos previamente definida para escoger el τ decía que escogeríamos el retardo de tiempo embebido donde se presenta el primer mínimo, para los datos de Henón, no tenemos un primer mínimo, en esta situación podemos escoger el valor para τ como el primer decremento sustancial donde la información mutua se detiene y después comienza a decrementar. Esto pasa en $\tau = 1$.

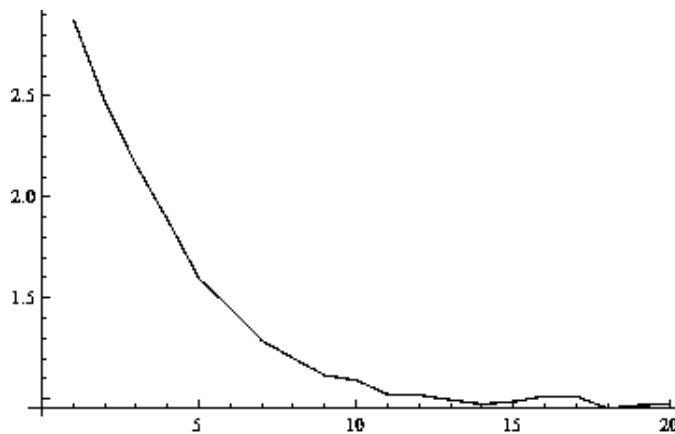


Figura 4.1: Información mutua contra el retraso en el tiempo para el modelo de Henón

En seguida es necesario calcular la dimensión de embebido, igualmente se programo el algoritmo de vecinos cercanos falsos en mathematica para vecinos cercanos falsos. El programa recibe los datos de Henón, el retardo de tiempo de 1, la máxima dimensión, para este caso se escogió 5 y el umbral de 10. La salida del programa se muestra en la figura 4.2. Donde podemos ver que la fracción de vecinos cercanos falsos cae a cero cuando $m = 2$ esto quiere decir que 2 es la dimensión adecuada para el

sistema.

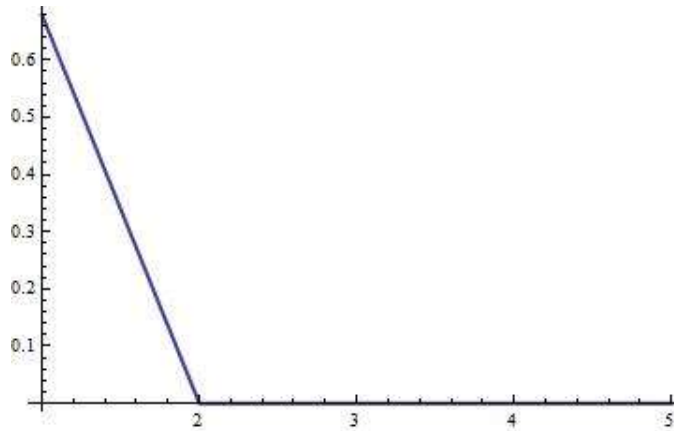


Figura 4.2: Fracción de Vecinos Cercanos Falsos contra la dimensión para el modelo de Henón

Ya que tenemos $\tau = 1$ y $m = 2$, somos capaces de reconstruir el atractor, sabemos que los puntos del atractor están dados por la ecuación 3.1 y ahora ya conocemos los valores de τ y m . Recordemos que el atractor reconstruido tendrá las mismas propiedades topológicas que el original. Por lo tanto sus propiedades son invariantes por la reconstrucción. En la figura 4.3b podemos ver el atractor original del sistema, y en la figura 4.3a podemos ver el atractor reconstruido a partir de la ecuación 3.1. Con una rotación de 90° el atractor reconstruido es muy similar al original.

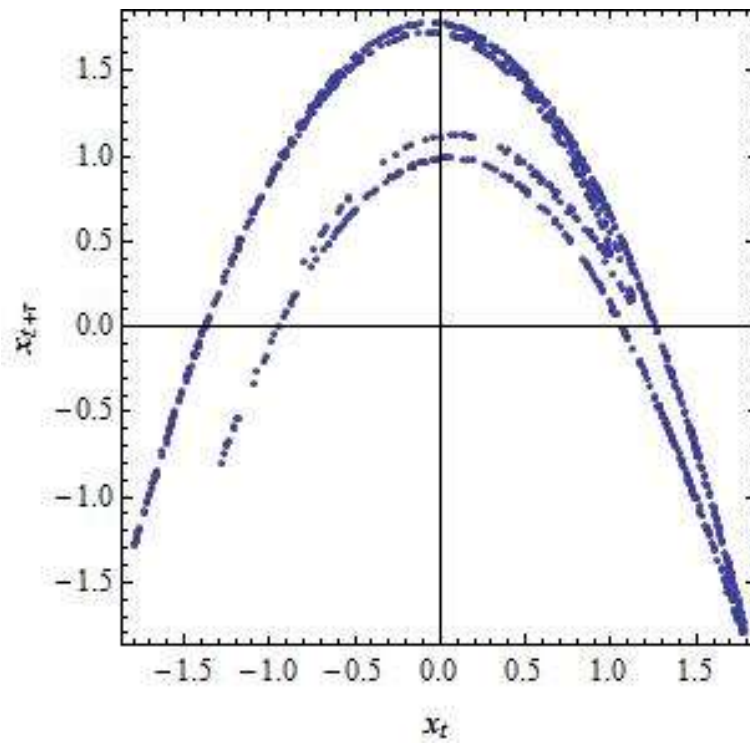
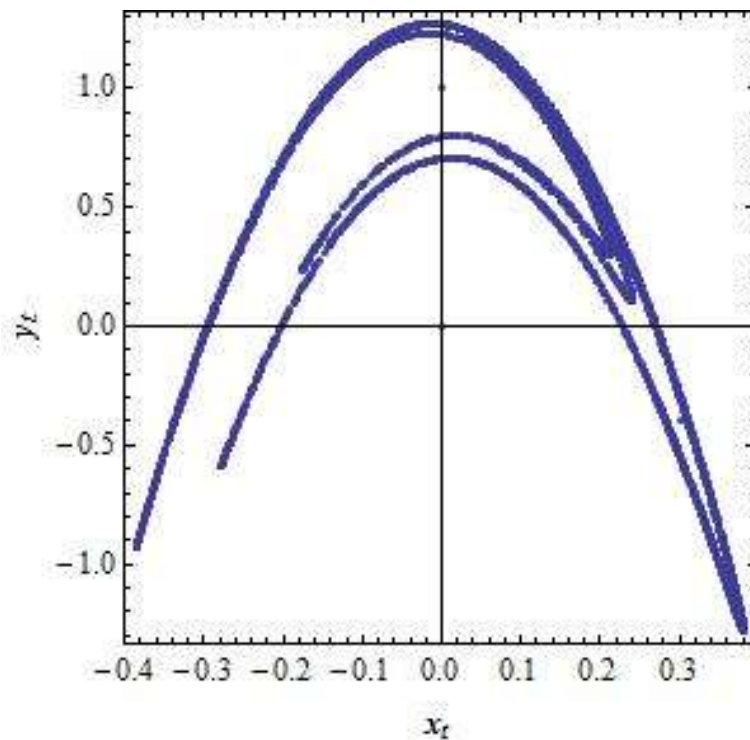
(a) *Atractor del sistema Reconstruido*(b) *Atractor del sistema original*

Figura 4.3: Espacios de fase para el sistema de Henón

4.1.2. Reconstrucción del espacio de fase para el modelo de Lorenz

El atractor de Lorenz, es un sistema dinámico no lineal que surge de un sistema simplificado de ecuaciones. Fue encontrado por E. Lorenz en el año 1963, el objetivo que Lorenz tenía era el de, mediante un sistema poder predecir el clima. Los resultados que obtuvo fueron óptimos para éstos fines, sin embargo, su estudio aportó mucha información a la matemática. Ya que fue el primer sistema tridimensional autónomo en el cual se encontró un atractor caótico, conocido como “La mariposa de Lorenz”. El sistema de Lorenz está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \tag{4.2}$$

Utilizando el mismo procedimiento, calculamos la información mutua para los datos del modelo de Lorenz, la función recibe los parámetros 100 de máximo retardo en el tiempo y 10 de ancho de partición. El primer mínimo lo encontramos en $\tau = 20$.

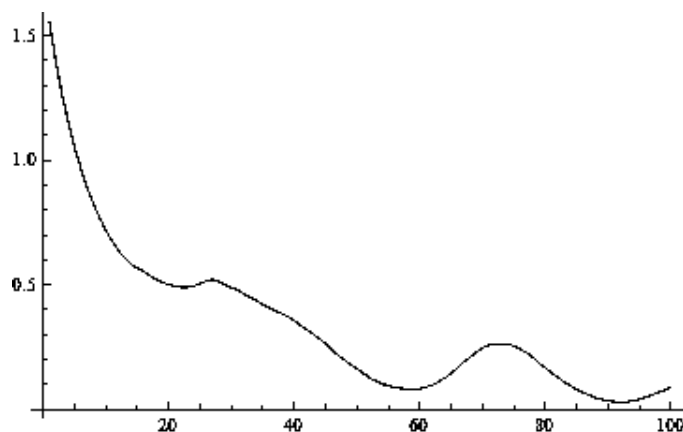


Figura 4.4: Información mutua contra el retraso en el tiempo para el modelo de Lorenz

A continuación se calculó la fracción de vecinos cercanos falsos. Utilizando el algoritmo que se programó, el resultado se muestra en la figura 4.5. El sistema cae cerca a cero en $m = 2$ pero es completamente cero en $m = 3$. Los valores correspondientes al primer mínimo y la dimensión obtenidos por la fracción de vecinos falsos cercanos coinciden a la reconstrucción de la figura 4.6a, la figura 4.6b es el atractor del sistema original.

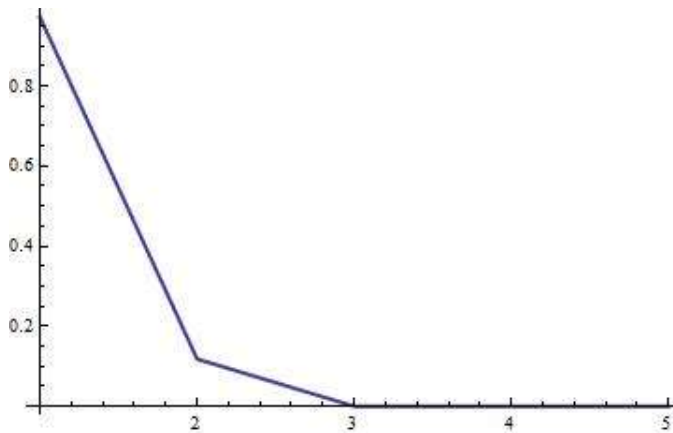


Figura 4.5: Fracción vecinos cercanos falsos contra la dimensión para el modelo de Lorenz

4.1.3. Reconstrucción del espacio de fase para el modelo de Rössler

El modelo de Rössler, es un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Estas ecuaciones definen un sistema dinámico de tiempo continuo que presenta la dinámica caótica asociada con las propiedades fractales de un atractor. El atractor de Rössler fue diseñado como una simplificación del atractor de Lorenz. La definición del sistema está dada por las ecuaciones 4.3.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c)\end{aligned}\tag{4.3}$$

Para la reconstrucción del atractor de Rössler se usó sólo datos de una variable del sistema, a los cuales a través de análisis de series de tiempo obtendremos su retardo de tiempo embebido y su dimensión de embebido. Ya se menciono que se utilizará el método de información mutua para obtener el retardo de tiempo embebido y el método de vecinos cercanos falsos para calcular la dimensión de embebido del sistema. La figura 4.7 muestra la información mutua para los datos del sistema de Rössler, el primer mínimo se encontró en $\tau = 14$.

La figura 4.8 muestra la fracción de vecinos cercanos falsos para el modelo de Rössler, donde se puede observar que para $m = 3$ la fracción de vecinos cercanos falsos es cero, que es el indicador para la dimensión adecuada del sistema. Entonces para éste sistema la dimensión es 3. Los valores correspondientes al primer mínimo y la dimensión obtenido por la fracción de vecinos falsos cercanos condicen a la reconstrucción de la figura 4.9a, la figura 4.9b es el atractor del sistema original.

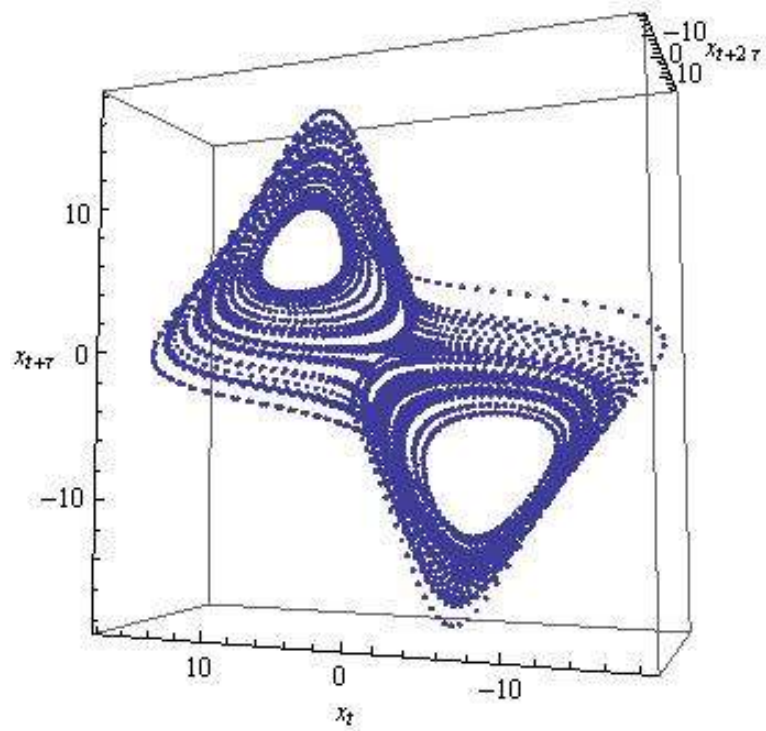
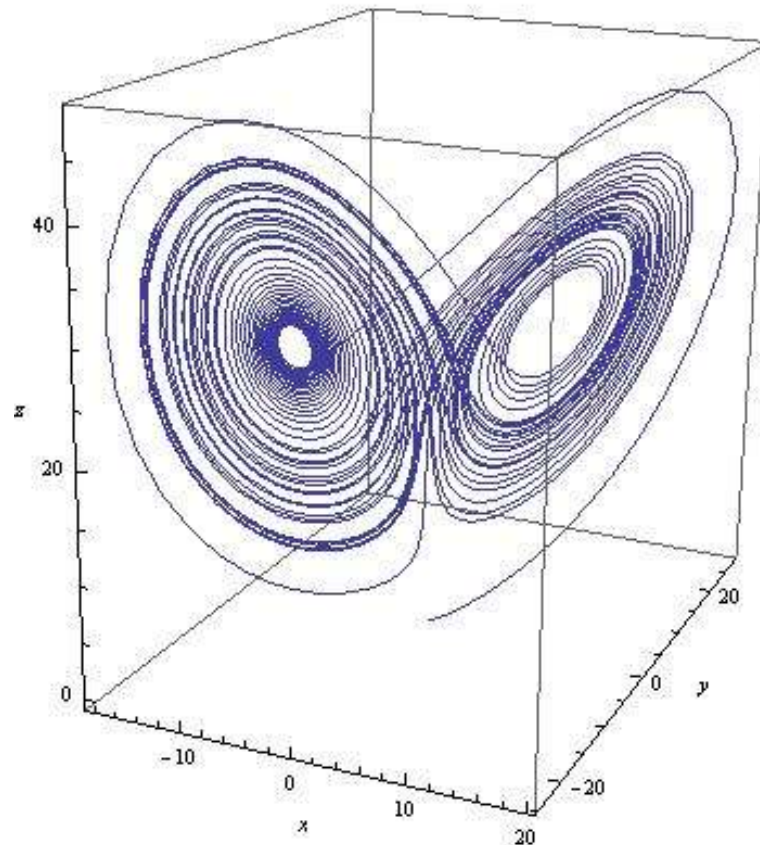
(a) *Atractor del sistema Reconstruido*(b) *Atractor del sistema original*

Figura 4.6: Espacios de fase para el sistema de Lorenz

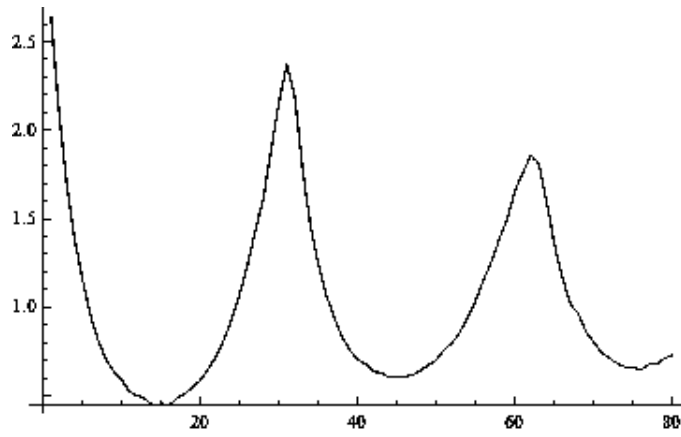


Figura 4.7: Información mutua contra el retraso en el tiempo para el modelo de Rössler

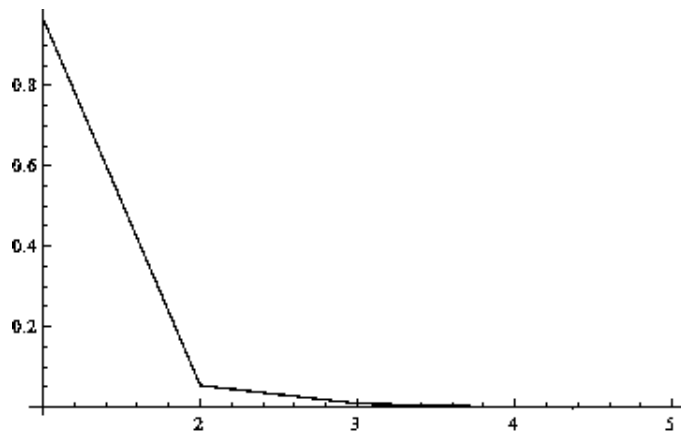


Figura 4.8: Fracción de vecinos cercanos falsos contra la dimensión para el modelo de Rössler

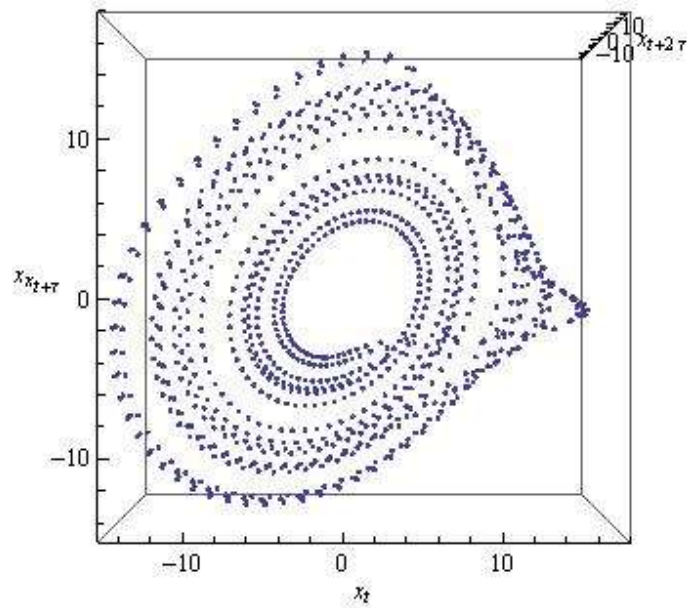
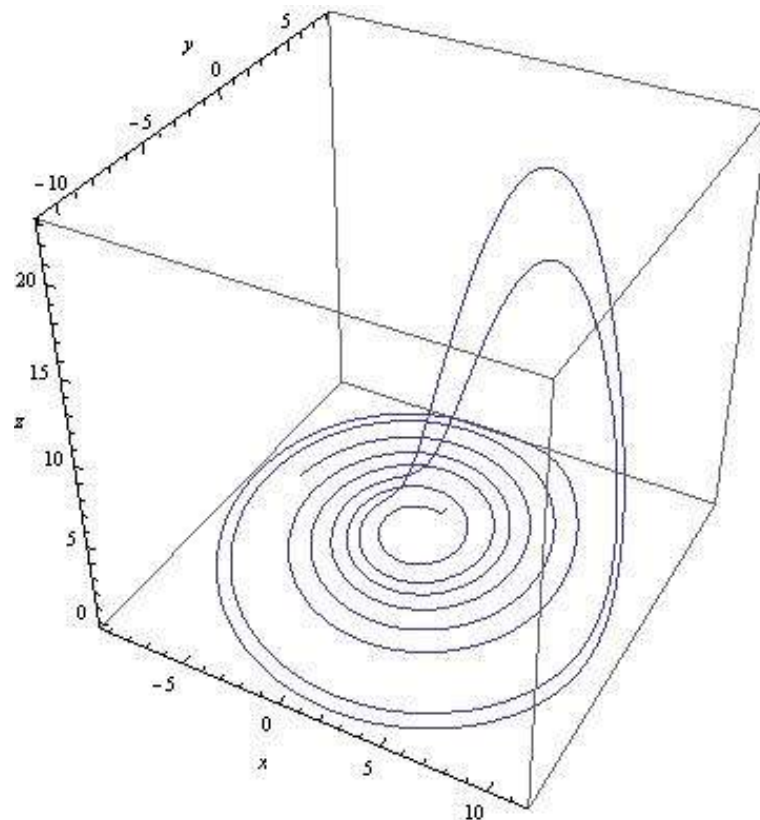
(a) *Atractor del sistema Reconstruido*(b) *Atractor del sistema original*

Figura 4.9: Espacios de fase para el sistema de Rössler

Capítulo 5

Conclusiones

Se había mencionado que el modelado de los sistemas dinámicos, recae en el concepto de espacio de fase, éste es muy importante ya que es la colección de todos los posibles estados de la evolución de un sistema dinámico. Desafortunadamente para los sistemas dinámicos que presentan comportamiento caótico ya sea en la naturaleza o de manera experimental con frecuencia se desconoce su modelo matemático y el espacio de fase.

La reconstrucción del espacio de fase, nos permite obtener la información sobre todo el estado original del sistema usando únicamente mediciones unidimensionales. Se mencionó que la idea consiste en tener datos en forma de serie de tiempo x_1, x_2, \dots, x_T . Se escoge un tiempo de retardo embebido τ y un entero m para obtener la dimensión de embebido del sistema, a este método se le conoce como coordenadas de retardo. Basándonos en los resultados obtenidos para los tres sistemas utilizados en este trabajo, podemos ver que los espacios de fase reconstruidos presentan atractores bien definidos, lo que nos dice que los métodos programados se hicieron de manera apropiada y los parámetros que nos arroja el programa son adecuados.

Podemos ver para el modelo de Hénon que el atractor reconstruido que se muestra en la figura 3.6a es muy similar al atractor del sistema original figura 3.6b, la única diferencia es la escala, pero esto es debido a que sólo se uso una variable pa-

ra reconstruir el espacio de fase, por tanto esta acotada a los valores de esa misma variable. La razón principal por la reconstrucción del espacio de fase a partir de una serie de tiempo es por que, la evolución de las variables están influenciadas unas con otras. Sus valores están contenidos de alguna forma en la historia de las variables que interactúan con otras variables. En otras palabras, una variable puede ser tan fuertemente relacionada con otra u otras variables e incluso ella misma, por que lleva información sobre las demás. Como en el ejemplo en las ecuaciones de Hénon. La variable x_{t+1} depende directamente de y_t así como de x_t . Es decir, el valor de y_t está representado dentro de x_{t+1} . En consecuencia, la serie de tiempo sólo para los valores de x contienen información sobre las variables de x y y .

Según Abarbanel [Abarbanel96], la clave para la comprensión radica en el hecho de que todas las variables en un proceso no lineal están genéricamente conectadas, es decir, que influyen entre sí, Por lo tanto, cada punto de x_t en una medición, es el resultado de una combinación de influencias de todas las demás variables del sistema.

Para el modelo de Lorenz el que se obtuvo fue de $\tau = 20$ y la fracción no vecinos cercanos falsos se hace cero en la dimensión $m = 3$, lo que nos indica la dimensión de embebido del sistema es 3 y el retardo de tiempo embebido es 20. Es importante mencionar que otros atractores también se pueden formar para el modelo de Lorenz, usando diferentes retardos de tiempo, pero el atractor que se forma en la reconstrucción del espacio de fase con los valores de estos parámetros tiene una estructura bien definida y es el atractor que mejor se forma en el sentido de que ocupa una gran región en el espacio de fase.

La reconstrucción del modelo de Rössler también nos muestra un atractor bastante similar al del atractor original, lo que nos indica que los parámetros de τ y m son adecuados para el modelo. Lo más importante de la reconstrucción. En particular, tienen aproximadamente los mismos valores que nos indican el caos, como el exponente de Lyapunov, dimensión de correlación, entropía deKolmogorov-Sinai y la misma información mutua.

Referencias

- [Abarbanel96] Abarbanel, H. D. I. Analysis of observed chaotic data. 1996.
- [Abarbanel06] Abarbanel, H. D. I. y Parlitz, U. *Handbook of Time Series Analysis: Recent Theoretical*. WILEY-VCH, 2006.
- [Fraser86] Fraser, A. M. y Swinney, H. L. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. 1986.
- [Gershenfeld94] Gershenfeld, N. A. y Weigend, A. S. The future of time series: learning and understanding. 1994.
- [Kantz04] Kantz, H. y Schreiber, T. *Nonlinear Time Series Analysis*. CAMBRIDGE university press, 2004.
- [Kennel92] Kennel, M. B. y Abarbanel, H. D. I. Determining embedding dimension for phase space reconstruction using a geometrical construction. 1992.
- [Kennel02] Kennel, M. B. y Abarbanel, H. D. I. False neighbors and false strands: A reliable minimum embedding dimension algorithm. 2002.
- [Small05] Small, M. *Applied Nonlinear Time Series Analysis: Applications in Physics. Physiology and Finance*. World Scientific, 2005.
- [Sprott03] Sprott, J. C. *Chaos and Time-Series Analysis*. OXFORD university press, 2003.

- [Stewart01] Stewart, I. *¿Juega Dios a los Dados?* PLANETA, 2001.
- [Takens81] Takens, F. Detecting strange attractor in turbulence. 1981.