



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

“SIMULACIÓN DE SISTEMAS MODELADOS EN BOND GRAPH BASADOS EN SU ESTRUCTURA DE UNIÓN”

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO EN COMPUTACIÓN**

PRESENTA:

MIGUEL ANGEL HERNÁNDEZ JUÁREZ

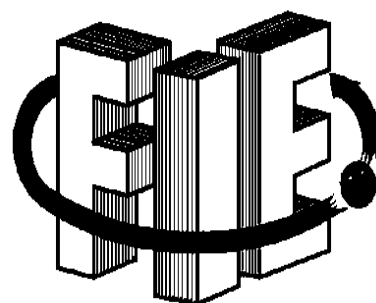
ASESOR DE TESIS:

DOCTOR EN INGENIERÍA

DR. GILBERTO GONZÁLEZ ÁVALOS

MORELIA, MICHOACÁN

JUNIO DE 2018



Agradecimientos

Agradezco a Dios por haberme permitido darles la satisfacción a mis Padres de verme terminar la Licenciatura.

A mis Padres por su apoyo incondicional y porque fueron parte fundamental para seguir adelante.

A mis Hermanos y Hermanas por la confianza que me dieron.

A mis Sobrinos por que fueron la fuerza que me impulsó continuar con mis estudios, demostrándoles que SÍ se puede.

A mis Cuñados por brindarme su mano amiga

A todos los profesores que fueron partícipes en mi formación académica durante mi estancia en la Facultad.

Mi más sincero agradecimiento a mi asesor de tesis el Dr. Gilberto González Avalos por haberme brindado su tiempo, por haberme compartido su conocimiento, por guiarme paso a paso en esta travesía, gracias por hacerme un espacio en su agenda para asesorarme en este trabajo de investigación el cual no se hubiera realizado sin su apoyo. Gracias de todo corazón Doctor Gilberto González Avalos por sus asesorías y recomendaciones, por la motivación y la facilidad con la que nos hace ver las cosas, gracias por la humildad y sencillez con la cual se dirige para con nosotros los alumnos. Gracias por todo Dios lo Bendiga Hoy y Siempre.

A los profesores de la mesa sinodal, por las correcciones y observaciones que me hicieron para el mejoramiento de este trabajo de investigación.

Dedicatoria

Dedico este trabajo primeramente a Dios porque fue quien me dio esta vida a través de mis Padres a los cuales los quiero con todo mi amor y con mucho orgullo también les dedico este trabajo de investigación; A mi Madre: Ma. Guadalupe Juárez Magaña, y a mi Padre: Manuel Angel Hernández Montero a ellos de todo corazón se los dedico por la confianza que me brindaron, porque siempre creyeron en Mí y porque su apoyo siempre fue incondicional, por inculcarme buenos valores y hacerme un hombre de bien, gracias por todo ese tiempo que invirtieron en mi persona y que se tradujo en enseñanzas de buenos principios para enfrentar y afrontar los retos que la vida me presenta. Dios me los guarde, me los bendiga y me los cuide por siempre.

También dedico este trabajo de investigación a mis hermanos y hermanas: Lupe, Yeni, Juan, Alex, Rule, Susi, Lalo, Belén y Alondrita (q.e.p.d.) los cuales siempre estuvieron en constante apoyo.

A las fuentes de inspiración que la vida me brindó, y que tuve el privilegio de ser su Guía, su Compañero, su Amigo, su Maestro, que en sus travesías por el kínder, Primaria, Secundaria, Preparatoria y Universidad siempre me brindaron su confianza abriéndome las puertas de su corazón, a ellos mis primeros Alumnos de Excelencia; Liz, Goku y Monse les dedico este logro.

Dedico este trabajo también a mis sobrinos: Yaz, Pollo, Valeria, Nito, Ega, Tete, Angelín, Pao y Benjamín a los cuales les digo que querer es poder, y que pueden volar muy alto.

Y también le dedico este trabajo a una niña hermosa que la quiero como si fuera mi hija a Karen Danaé Cortés Hernández la cual es una niña de grandes virtudes y excelente potencial de aprendizaje.

También dedico este trabajo de investigación a mis cuñados por su apoyo y por confiar en mi.

Dedico también este proyecto a mi asesor de tesis al Dr. Gilberto González Avalos por brindarme su tiempo y paciencia para que este proyecto culminara satisfactoriamente, mil gracias Doctor.

“Todo se puede lograr a base de Constancia, Esfuerzo y Sacrificio”

“En el camino hacia tus sueños aparecerán miedos que querrán distraerte, no pierdas el camino continúa avanzando.”

Resumen

En el presente trabajo, se desarrolla la Simulación de Sistemas Modelados en Bond Graph basados en su Estructura de Unión. Utilizando una herramienta llamada Bond Graph y haciendo las simulaciones de los modelos en el programa 20-sim.

Para el inicio de este análisis, primeramente se define Bond Graph, algunos de sus antecedentes, sus componentes básicos y los elementos que lo integran, así como sus diferentes tipos de causalidad (derivativa e integral), etc.

Después se explica sobre el Modelado en Espacio de Estados y la Estructura de Unión en Bond Graph, en este último se describe el procedimiento a seguir para dicho modelado.

Se le llama Estructura de unión aquella relación que existe entre los Bonds, los cuales se clasifican de la siguiente manera: Bonds Externos; Son aquellos que enlazan a los elementos o puertos como: MSe y MSf (indican los campos de fuente), L y C (son los elementos de almacenamiento) y R (son los elementos de disipación). Bonds Internos: Son aquellos que enlazan a: 0 y 1 (Son las Uniones-0 y las Uniones-1), TF y TG (son los Transformadores y Giradores) y D (son los elementos detectores)

Para el Análisis de Sistemas con la Estructura de Unión, primeramente se utiliza la Simulación de Sistemas Modelados en Bond Graph sin Lazos Algebraicos, (Se les llama "sin Lazos algebraicos" porque el elemento de la matriz $S_{22} = 0$), y posteriormente se utiliza la simulación de Sistemas Modelados en Bond Graph con Lazos Algebraicos (Se les llama con Lazos algebraicos" porque el elemento de la matriz $S_{22} \neq 0$), y se demuestra que aplicando los siguientes modelos:

- a) El Modelo Gráfico en Bond Graph,
- b) El Modelo Matemático Basado en Estructura de Unión
- c) El Modelo Matemático en Variables (Espacios) de Estado.

Podremos llegar a un mismo resultado, en donde las señales de salida de dichos modelos son iguales.

Las simulaciones se presentan desde un enfoque de análisis de circuitos eléctricos, con la finalidad de comprobar que tomando diferentes caminos, podemos llegar a un mismo resultado, y en base a ellos dictaminar si los modelos presentados son factibles de investigaciones futuras.

Palabras Clave

Bond	Elementos de Disipación
Bond Externo	Espacio de Estados
Bond Graph	Estructura de Unión
Bond Interno	Giradores
Campos de Fuente	Lazos Algebraicos
Causalidad	Modelo
Causalidad Derivativa	Modelado Gráfico
Causalidad Integral	Modelado Matemático
Detectores	Puertos
Elementos	Simulación
Elementos de Almacenamiento	Transformadores

Abstract

In the present investigation, the Simulation of Modeled Systems in Bond Graph is developed based on its Union Structure. Using a tool called Bond Graph and doing the simulations of the models in 20-sim program.

For the beginning of this analysis, Bond Graph is defined first, some of its antecedents, its basic components and the elements that integrate it, as well as its different types of causality (derivative and integral), etc.

Then we explain about the Modeling in Statespace and the Union Structure in Bond Graph, in the latter we describe the procedure to follow for such modeling.

It is called union structure that relationship that exists between Bonds, which are classified as follows: Bonds Externals; Are those that link to the elements or ports as: MSe and MSf (indicate the source fields), L and C (are the storage elements) and R (are the dissipation elements). Internal Bonds: Those that link to: 0 and 1 (They are the Unions-0 and the Unions-1), TF and TG (they are the Transformers and Turners) and D (they are the detector elements)

For the Analysis of Systems with the Union Structure, the Simulation of Systems Modeled in Bond Graph without Algebraic Loops is first used, (They are called "without algebraic Loops" because the element of the matrix $S_{22} = 0$), and later it is used the simulation of Modeled Systems in Bond Graph with Algebraic Loops (They are called "with algebraic loops" because the element of the matrix $S_{22} \neq 0$), and it is demonstrated that applying the following models:

- a) The Graphic Model in Bond Graph
- b) The Mathematical Model Based on Union Structure
- c) The Mathematical Model in State Variables (Spaces)

We can reach the same result, where the output signals of these models are same.

The simulations are presented from an analysis of electrical circuits approach, with the purpose of verifying that taking different paths, we can reach the same result, and based on them, we can decide if the presented models are feasible for future investigations.

Keywords

Bond	Dissipation elements
Bond externals	Statespace
Bond graph	Union structure
Internal bonds	Turners
Source fields	Lazos Algebraicos
Causality	Model
Causality derivative	Graphic Model
Causality integral	Mathematical Model
Detectors	Ports
Elements	Simulation
Storage elements	Transformers

Índice General

Agradecimientos.	II
Dedicatoria.	III
Resumen.	V
Abstract.	VII
Índice General.	IX
Lista de Figuras.	XII
Lista de Tablas.	XVIII
Lista de Símbolos y Abreviaturas.	XIX

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN	1
1.1. Importancia de la Simulación	1
1.2. Objetivo	3
1.3. Justificación	4
1.4. Metodología	4
1.5. Contenido de la Tesis	5

CAPÍTULO 2

MODELADO EN BOND GRAPH	7
2.1. Introducción	7
2.2. ¿Qué es un Bond Graph?	8

2.3. Componentes Básicos de un Bond Graph.	8
2.4. Puertos-1 Pasivos	11
2.5. Puertos-1 Activos o Fuentes	12
2.6. Los Elementos Ideales de Puerto-2	13
2.7. Los Elementos de Unión, Puertos-3	14
2.8. Causalidad para los Multipuertos Básicos	15
2.9. La Causalidad derivativa de un Bond Graph	20
2.10. Bond Activo	21

CAPÍTULO 3

MODELADO SISTEMÁTICO	23
3.1. Introducción	23
3.2. Modelado de sistemas basado en función de transferencia	23
3.2.1. Funcion de transferencia	24
3.2.2. Sistemas de Control Automáticos	26
3.2.3. Diagramas de bloques	26
3.3. Modelado en el espacio de estados.	37
3.4. Estructura de Unión en Bond Graph	42
3.4.1. Procedimiento para el Modelado de Sistemas	42
3.4.2. Estructuras de Union en Sistemas Multipuerto	44
3.4.3. Vectores Clave (Vectores Significativos)	45
3.4.4. Relaciones de campo y Ecuación de estado.	46

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE SISTEMAS CON LA ESTRUCTURA DE

UNIÓN.54

4.1. Introducción 54

4.2. Simulación de Sistemas Modelados en Bond Graph sin Lazos

Algebráicos.56

4.2.1. Primer Caso de Estudio57

4.2.2. Segundo Caso de Estudio 74

4.3. Simulación de Sistemas Modelados en Bond Graph con Lazos

Algebráicos 102

4.3.1. Primer Caso de Estudio104

4.3.2. Segundo Caso de Estudio 126

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.160

5.1. Conclusiones160

5.2. Recomendaciones 162

Bibliografía.164

Lista de Figuras

Figura 2.1 Bond con sus variables de potencia.	9
Figura 2.2 Tetrahedro de estado.	12
Figura 2.3 Puertos-1 activos.	12
Figura 2.4 Bond Graph de un Transformador y de un Girador.	13
Figura 2.5 Unión-0.	14
Figura 2.6 Unión-1.	14
Figura 2.7 Causalidad para un Bond.	15
Figura 2.8 Ejemplo de Union-0 sin causalidad.	16
Figura 2.9 Ejemplo de Union-0 con causalidad.	17
Figura 2.10 Elemento-C en causalidad integral.	18
Figura 2.11 Elemento-C en causalidad derivativa.	18
Figura 2.12 Ejemplo de un circuito eléctrico en causalidad derivativa.	20
Figura 2.13 Bond Graph en causalidad derivativa de la Figura 2.12.	20
Figura 2.14 Bond Activo.	21
Figura 2.15 Bond Graph con un Bond Activo.	21
Figura 3.1 Elementos de un diagrama de bloques.	27
Figura 3.2 Punto de Suma.	28
Figura 3.3 Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado.	30
Figura 3.4 Sistema en lazo cerrado.	30
Figura 3.5 (a) Sistema en cascada; (b) Sistema paralelo; (c) Sistema realimentado (lazo cerrado).	32

Figura 3.6 (a) Circuito RC; (b) Diagrama de bloques de la Ecuación 3.6;	
(c) Diagrama de bloques de la Ecuación 3.7; (d) Diagrama de	
bloques del circuito RC.	35
Figura 3.7 (a) Sistema con múltiples lazos; (b)-(e) reducciones sucesivas del	
diagrama de bloques mostrado en (a).	36
Figura 3.8 Diagrama de bloques del sistema de control lineal en tiempo	
continuo representado en el espacio de estados.	41
Figura 3.9 Simplificación de Bonds.	43
Figura 3.10 Ejemplo de un circuito eléctrico.	43
Figura 3.11 Procedimiento para obtener el Bond Graph de un circuito	
eléctrico.	44
Figura 3.12 Bond Graph del ejemplo de un sistema eléctrico.	44
Figura 3.13 Diagrama a bloques de la Estructura de unión de un Bond Graph. .	45
Figura 3.14 Circuito Eléctrico.	49
Figura 3.15 Pasos 1-4 para obtención del Bond Graph.	49
Figura 3.16 Bond Graph reducido.	49
Figura 3.17 Bond Graph obtenido con su respectiva causalidad.	50
Figura 4.1 Sistema Eléctrico.	58
Figura 4.2 Diagrama de Bonds.	58
Figura 4.3 Señales de Salida del Diagrama de Bonds.	59
Figura 4.4 Diagrama con Bonds enumerados.	60
Figura 4.5 Esquema del Modelo Matemático Basado en Estructura de Unión. .	63

Figura 4.6 Señales de Salida del Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión.	.64
Figura 4.7 Esquema del Modelo Matemático en Variables (espacios) de Estado.	.69
Figura 4.8 Señales de Salida del Modelo Matemático en Variables (espacios) de Estado.	.70
Figura 4.9 Primer señal de Salida de los Modelos a), b) y c).	.71
Figura 4.10 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).	.72
Figura 4.11 Segunda señal de Salida de los Modelos a), b) y c).	.72
Figura 4.12 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).	.73
Figura 4.13 Gráfica con las 6 Señales de Salida (por separado) de los Modelos a), b) y c)	.73
Figura 4.14 Gráfica con las 6 Señales de Salida (juntas) de los Modelos a), b) y c)	.74
Figura 4.15 Sistema Eléctrico.	.75
Figura 4.16 Diagrama de Bonds.	.76
Figura 4.17 Señales de Salida del Diagrama de Bonds.	.77
Figura 4.18 Diagrama con Bonds enumerados.	.78
Figura 4.19 Esquema del Modelo Matemático Basado en Estructura de Unión	.82
Figura 4.20 Señales de Salida del Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión	.84

Figura 4.21 Esquema del Modelo Matemático en Variables (espacios) de Estado.	91
Figura 4.22 Señales de Salida del Modelo Matemático en Variables (espacios) de Estado	95
Figura 4.23 Primera señal de Salida de los Modelos a), b) y c).	96
Figura 4.24 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).	96
Figura 4.25 Segunda señal de Salida de los Modelos a), b) y c).	97
Figura 4.26 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).	97
Figura 4.27 Tercera señal de Salida de los Modelos a), b) y c).	98
Figura 4.28 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).	98
Figura 4.29 Cuarta señal de Salida de los Modelos a), b) y c).	99
Figura 4.30 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).	99
Figura 4.31 Quinta señal de Salida de los Modelos a), b) y c).	100
Figura 4.32 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).	100
Figura 4.33 Gráfica con las 15 Señales de Salida (por separado) de los Modelos a), b) y c)	101
Figura 4.34 Gráfica con las 15 Señales de Salida (juntas) de los Modelos a), b) y c)	101
Figura 4.35 Sistema Eléctrico.	104
Figura 4.36 Diagrama de Bonds.	105
Figura 4.37 Señales de Salida del Diagrama de Bonds.	106
Figura 4.38 Diagrama con Bonds enumerados.	107

Figura 4.39 Esquema del Modelo Matemático Basado en Estructura de Unión...	110
Figura 4.40 Señales de Salida del Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión.	112
Figura 4.41 Esquema del Modelo Matemático en Variables (espacios) de Estado.	119
Figura 4.42 Señales de Salida del Modelo Matemático en Variables (espacios) de Estado	122
Figura 4.43 Primer señal de Salida de los Modelos a), b) y c).	123
Figura 4.44 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).	123
Figura 4.45 Segunda señal de Salida de los Modelos a), b) y c).	124
Figura 4.46 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).	124
Figura 4.47 Gráfica con las 6 Señales de Salida (por separado) de los Modelos a), b) y c)	125
Figura 4.48 Gráfica con las 6 Señales de Salida (juntas) de los Modelos a), b) y c)	125
Figura 4.49 Sistema Eléctrico.	128
Figura 4.50 Diagrama de Bonds.	129
Figura 4.51 Señales de Salida del Diagrama de Bonds.	130
Figura 4.52 Diagrama con Bonds enumerados.	131
Figura 4.53 Esquema del Modelo Matemático Basado en Estructura de Unión.	135

Figura 4.54 Señales de Salida del Modelo Matemático Basado en su	
Estructura de Unión.	138
Figura 4.55 Esquema del Modelo Matemático en Variables (espacios) de	
Estado	148
Figura 4.56 Señales de Salida del Modelo Matemático en Variables (espacios)	
de Estado	154
Figura 4.57 Primer señal de Salida de los Modelos a), b) y c).	155
Figura 4.58 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).	155
Figura 4.59 Segunda señal de Salida de los Modelos a), b) y c).	156
Figura 4.60 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).	156
Figura 4.61 Tercera señal de Salida de los Modelos a), b) y c).	157
Figura 4.62 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).	157
Figura 4.63 Cuarta señal de Salida de los Modelos a), b) y c).	158
Figura 4.64 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).	158
Figura 4.65 Gráfica con las 12 Señales de Salida (por separado) de los	
Modelos a), b) y c).	159
Figura 4.66 Gráfica con las 12 Señales de Salida (juntas) de los Modelos	
a), b) y c).	159

Lista de Tablas

Tabla 2.1 Variables Generalizadas de sistemas eléctricos y sistemas mecánicos traslacionales.	10
Tabla 2.2 Variables generalizadas de sistemas mecánicos rotacionales y de sistemas hidráulicos	11
Tabla 2.3 Elemento-R.	11
Tabla 2.4 Elemento-C.	11
Tabla 2.5 Elemento-I.	11
Tabla 2.6 Consideraciones causales para los multipuertos básicos.	16
Tabla 2.7 Formas causales para Puertos-1.	19

Lista de Símbolos y Abreviaturas

A	Amperes	MSf	Fuente de Flujo
C	Capacitancia	p	Momento
e	Esfuerzo	M	Mega
E	Energía	m	Mili
f	Flujo	P	Potencia
F	Faradios	q	Desplazamiento
G	Giga	R	Resistencia
GY	Girador	t	Tiempo
H	Henrios	TF	Transformador
I	Corriente	V	Voltaje
K	Kilo	Ω	Ohms
L	Inductancia	0	Union-Cero
MSe	Fuente de Esfuerzo	1	Unión-Uno

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Importancia de la Simulación

[7] Una aportación importante de los sistemas de cómputo a la ciencia y la tecnología es la velocidad con la que pueden realizar cálculos complicados. Esta característica permite que los sistemas computacionales sean utilizados para analizar el diseño y la operación de sistemas complejos.

Definición de Simulación

La simulación es la utilización de un modelo de sistemas, que trata de acercarse más a las características de la realidad, a fin de reproducir la esencia de las operaciones reales. Asimismo, es la representación de un proceso real, mediante el empleo de un modelo o sistema que reaccione de la manera similar a la que reaccionaría uno real, en un conjunto de condiciones dadas.

La definición más general que se usa, se refiere a una técnica cuantitativa que utiliza un modelo matemático computarizado para representar la toma real de decisiones bajo condiciones de incertidumbre, con objeto de evaluar alternativas de acciones con base en hechos e hipótesis.

Con base en lo que se mencionó anteriormente, se puede decir que la simulación, es una técnica que imita el funcionamiento de un sistema del mundo real, al crear un conjunto de hipótesis acerca del funcionamiento del sistema, expresándolo en relaciones matemáticas o lógicas.

Definió Robert E. Shannon, a la simulación como:

“Es el proceso de diseñar y desarrollar un modelo computarizado de un sistema o proceso y conducir experimentos con este modelo con el propósito de entender el comportamiento del sistema y evaluar varias estrategias con las cuáles se puede operar el sistema”.

Importancia de la Simulación

La simulación es de gran importancia, ya que una observación detallada del sistema que se está simulando puede conducir a un mejor entendimiento del sistema y por consiguiente a sugerir estrategias que mejoren la operación y eficiencia del sistema.

Así mismo, la simulación de sistemas complejos puede ayudar a entender mejor la operación del sistema, a detectar las variables más importantes que interactúan en el sistema y a entender mejor las interrelaciones entre estas variables.

Y por otra parte, podemos mencionar que, la técnica de simulación puede ser utilizada para experimentar con nuevas situaciones, sobre las cuales tiene poca o ninguna

información. A través de esta experimentación se puede anticipar mejor a posibles resultados no previstos.

Aplicaciones de la Simulación

Las áreas de aplicación de la simulación son muy amplias, numerosas y diversas, basta mencionar sólo algunas de ellas: Análisis del impacto ambiental causado por diversas fuentes. Análisis y diseño de sistemas de manufactura. Análisis de rendimiento y optimización de sistemas de comunicaciones. Análisis de grandes equipos de cómputo. Análisis de un departamento dentro de una fábrica. Adiestramiento de operadores, control de inventario y planificación logística. Análisis financiero de sistemas económicos. Evaluación de sistemas tácticos o de defensa militar, etc.

La simulación se utiliza en la etapa de diseño para auxiliar en el logro o mejoramiento de un proceso o diseño o bien a un sistema ya existente para explorar algunas modificaciones.

1.2. Objetivo

La presente investigación tiene como finalidad la simulación de sistemas modelados en Bond Graph basados en su estructura de Unión.

Utilizando la Simulación de Sistemas Modelados en Bond Graph sin Lazos Algebraicos y posteriormente utilizando la simulación de Sistemas Modelados en Bond Graph con Lazos Algebraicos, se demostrará que aplicando los siguientes modelos:

- a) El Modelo Gráfico en Bond Graph*
- b) El Modelo Matemático Basado en Estructura de Unión y*
- c) El Modelo Matemático en Variables (Espacios) de Estado.*

se llegará a la conclusión que las señales de salida de dichos modelos son iguales.

1.3. Justificación

En tiempos donde la calidad de la energía eléctrica es un requisito para realizar procesos complejos, es de vital importancia incursionar en nuevas alternativas para el análisis y modelado de circuitos eléctricos, y una de esas alternativas es usando la simulación de sistemas modelados en Bond Graph, herramienta que proporciona métodos para el modelado y alternativas para la simulación. Así mismo, resaltar que esta herramienta es una alternativa viable y confiable para su implementación en las diferentes ramas y disciplinas en estudio y/o investigación.

1.4. Metodología

Dado el caso de que este es un tema poco investigado y existe poca información se revisarán textos que traten temas sobre Modelado de Sistemas, Estructura unión, vectores clave, relaciones de campo, ecuaciones de estado, etc. Utilizando artículos técnicos referentes a Bond Graph basados en su estructura de unión, además de apoyarnos de especificaciones técnicas para su desarrollo en la simulación.

Trataremos en primera instancia la definición y el estudio de los elementos que componen a un Bond Graph, dando a conocer sus antecedentes, dejando fundamentado los alcances y aplicaciones del mismo. Posteriormente, incursionaremos en los puertos pasivos y activos, en la causalidad integral y derivativa de un Bond Graph. Para de ahí desprender el modelado sistemático de sistemas y el análisis de sistemas con la estructura de unión, este último es el punto central de esta tesis, además de realizar pruebas de simulación para diferentes circuitos eléctricos tomados arbitrariamente, llevando a cabo comparaciones para visualizar si los resultados coinciden con lo esperado.

1.5. Contenido de la Tesis

Este trabajo de tesis está organizado en cinco capítulos estos se describen brevemente:

El Capítulo 1 inicia con una breve descripción sobre la simulación, su importancia y sus aplicaciones en el mundo real.

El Capítulo 2 es dedicado a la descripción de Bond Graph, sus componentes básicos, tipos de causalidad y elementos que lo integran. Dando así una amplia y clara explicación sobre dicho tema. Además de describir el proceso de modelado en Bond Graph.

En el Capítulo 3 se obtiene el Modelo Matemático siguiendo el procedimiento planteado por Bond Graph descrito ampliamente en este mismo capítulo, para de aquí partir al capítulo 4 y en base al modelo obtenido en Bond Graph se realiza la simulación

de sistemas modelados con lazos algebraicos y sistemas modelados sin lazos algebraicos, utilizando para estos, el modelo gráfico en bond graph, el modelo matemático basado en su estructura de unión y el modelo matemático en variables (espacios) de estado.

Por último, en el capítulo 5 se agregan las conclusiones y comentarios finales de este trabajo, también una serie de recomendaciones que utilicen como líneas de investigación de futuros trabajos.

Capítulo 2

MODELADO EN BOND GRAPH

2.1. Introducción

El primer paso en el análisis de un sistema dinámico, es obtener su modelo. Los modelos pueden tomar muchas formas distintas, según el sistema particular de que se trate y las circunstancias. Los modelos son normalmente construídos para resolver un problema propuesto.

En particular el modelado en Bond Graph representa un enfoque unificado para el modelado y manipulación de sistemas mecánicos de ingeniería que permite obtener sus ecuaciones de estado y conocer sus propiedades de observabilidad, controlabilidad y dependencia lineal de sus elementos, basado en una representación gráfica y la generalización de los conceptos de variable de flujo y esfuerzo.

2.2. ¿Qué es un Bond Graph?

[3] La herramienta de Bond Graph definida por Henry M. Paynter (1961), formalizada por Dean C. Karnopp (1983), Ronald C. Rosenberg (1990), Jean U. Thoma (1991) y Breedveld (1984), está situada entre el sistema físico y los modelos matemáticos asociados. Debe ser señalado que esta técnica no tiene la pretensión de ser universal. Sin embargo, ha mostrado su eficiencia en gran número de aplicaciones, para el diseño de sistemas, simulación, y determinación de las leyes de control, y de esta manera puede ser ubicada entre los métodos necesarios para la construcción de modelos.

Un Bond Graph es una representación gráfica de un sistema dinámico donde una colección de componentes interactúan unos con otros a través de puertos de energía. Estos puertos colocados en el sistema describe como fluye la potencia a través del sistema.

Bond Graph es un enfoque general que permite construir modelos de sistemas eléctricos, magnéticos, mecánicos, hidráulicos, neumáticos y térmicos utilizando solamente un pequeño conjunto de elementos ideales. Técnicas estándares expresan los modelos en ecuaciones diferenciales o en esquemas de simulación por computadora.

A continuación se definen los elementos básicos que componen a un modelo representado en Bond Graph.

2.3. Componentes Básicos de un Bond Graph.

El componente fundamental de un Bond Graph es el bond de energía utilizado para acoplar los puertos de energía de los componentes del sistema.

El bond es representado por una semiflecha indicando en la dirección de ésta

como fluye la energía entre los puertos al cual está conectado, como se muestra en la figura.

2.1.

Para modelar un sistema, es necesario dividir un sistema en partes más pequeñas que puedan ser modeladas y estudiadas experimentalmente, y después ensamblarlas al modelo del sistema. Así, las partes principales de un sistema son llamadas *componentes* y básicamente, un subsistema es una parte de un sistema que es modelado como un sistema en sí mismo, donde un componente es modelado como una entidad.

Los lugares en los cuales los subsistemas pueden ser interconectados, son lugares en los cuales la energía puede fluir, tales lugares son llamados puertos. Los sistemas con un puerto sencillo es denotado *puerto-1*, un sistema con dos puertos es llamado *puerto-2*. Los sistemas multipuertos son denotados por *puertos-n*, donde n es el numero de puertos.

Las variables que describen la unión de dos multipuertos que son conectados son llamadas *variables de potencia* a causa de que el producto de las variables consideradas como funciones del tiempo es la potencia instantánea fluyendo entre los dos multipuertos.

Dado que existen interacciones de potencia cuando dos puertos son conectados, es útil clasificar la variedad de variables de potencia en un esquema universal y describir todos los tipos de multipuerto en un lenguaje común. Las variables de potencia son llamadas *esfuerzo* $e(t)$ y *flujo* $f(t)$. Estas variables son llamadas *variables de bond generalizadas* debido a que pueden ser utilizadas en todos los dominios de energía. En la figura 2.1 se muestra la representación de un bond con las variables de potencia asociadas.

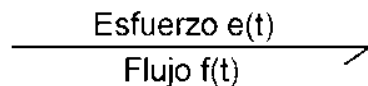


Figura 2.1 Bond con sus variables de potencia

Ejemplos de estos pares de variables son voltaje y corriente para un sistema eléctrico, y fuerza y velocidad para un sistema mecánico. La relación de ambas variables está dada por:

$$P(t) \triangleq e(t)f(t) \quad (2.1)$$

En sistemas que almacenan energía es necesario definir variables que representen el estado del sistema llamadas *variables de energía* denominadas *momento* $p(t)$ o *esfuerzo acumulado* $e_a(t)$ y *desplazamiento* $q(t)$ o *flujo acumulado* $f_a(t)$, están dadas por:

$$p(t) = e_a(t) \triangleq \int^t e(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

$$q(t) = f_a(t) \triangleq \int^t f(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

La Tabla 2.1 muestra las variables generalizadas para sistemas eléctricos y sistemas mecánicos traslacionales y la Tabla 2.2 para sistemas mecánicos rotacionales y de sistemas hidráulicos, utilizadas en el modelado mediante Bond Graph.

Tabla 2.1 Variables Generalizadas de sistemas eléctricos y sistemas mecánicos traslacionales.

Variabes	General	Eléctrico	Mecánico Traslacional
Esfuerzo	$e(t)$	$v(t)$ Voltaje	$F(t)$ Fuerza
Flujo	$f(t)$	$i(t)$ Corriente	$V(t)$ Velocidad
Momento	$p(t) = \int e(t) dt$	$\lambda(t)$ Enlace de Flujo	$P_R(t)$ Momento Rotacional
Desplazamiento	$q(t) = \int f(t) dt$	$q(t)$ Carga	$x(t)$ Distancia
Potencia	$P(t) = e(t) f(t)$	$v(t)i(t)$	$F(t)V(t)$
Energía	$E(p) = \int f(p) dp$ $E(q) = \int e(q) dq$	$\int i(\lambda) d\lambda$ $\int e dq$	$\int V(P_R) dP_R$ $\int F(x) dx$

Tabla 2.2 Variables generalizadas de sistemas mecanicos rotacionales y de sistemas hidráulicos.

Variables	Mecánico Rotacional	Hidráulico
Esfuerzo	$\tau(t)$ Par	$P_e(t)$ Presión
Flujo	$\omega(t)$ Velocidad Angular	$Q(t)$ Caudal
Momento	$H(t)$ Momento Angular	$P_p(t)$ Integral de Presion
Desplzamiento	$\theta(t)$ Angulo	$V(t)$ Volumen
Potencia	$\tau(t)\omega(t)$	$P_e(t)V(t)$
Energía	$\int \omega(H) dH$ $\int \tau(\theta) d\theta$	$\int Q(P_p) dP_p$ $\int P_e(V) dV$

2.4. Puertos-1 Pasivos

[3] Consideramos elementos ideales, los cuales representan disipación de potencia y dos formas de almacenamiento de energía, llamamos a éstos *elementos pasivos*. Se denominan *Puertos-1 Pasivos* a aquellos elementos que intercambian potencia en un puerto o elemento sencillo pasivo. Las Tablas 2.3, 2.4 y 2.5 muestran los elementos de disipación R , de almacenamiento de flujo C y de almacenamiento de esfuerzo I , para sistemas eléctricos, sistemas mecánicos y sistemas hidráulicos.

Tabla 2.3 Elemento- R .

Relación	Eléctrico	Mecánico	Hidráulico
Lineal	$v(t) = Ri(t)$	$F(t) = bV(t)$	$\Delta P_r(t) = RQ(t)$
No-Lineal	$v = \delta(i)$	$F = \delta(V)$	$\Delta P = \delta(Q)$

Tabla 2.4 Elemento- C .

Relación	Eléctrico	Mecánico	Hidráulico
Lineal	$v(t) = \frac{1}{C} \int i dt$	$F(t) = k \int V dt$	$P_r(t) = C \int \Delta Q dt$
No-Lineal	$v(t) = \delta(q)$	$F(t) = \delta(x)$	$P_r(t) = \delta(V)$

Tabla 2.5 Elemento- I .

Relación	Eléctrico	Mecánico	Hidráulico
Lineal	$i(t) = \frac{1}{L} \int v dt$	$V(t) = \frac{1}{M} \int F dt$	$Q(t) = I \int \Delta P_r dt$
No-Lineal	$i(t) = \delta(\lambda)$	$V(t) = \delta(P)$	$Q(t) = \delta(P_p)$

En la figura 2.2, se muestra el esquema mnemónico llamado *tetrahedro de estado*, en el cual se observa como se relacionan las variables generalizadas por tres *puertos-1 pasivos* R , C y I .

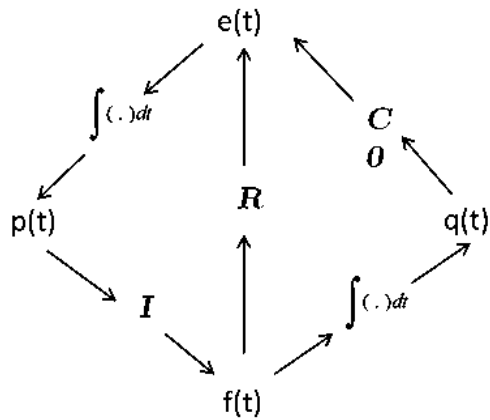


Figura 2.2 Tetrahedro de estado.

2.5. Puertos-1 Activos o Fuentes

Los elementos que introducen energía al sistema son llamados *fuentes*. Existen dos tipos de fuentes, *fente de esfuerzo* (voltaje, fuerza o presión) y *fente de flujo* (corriente, velocidad o caudal) denotadas MS_e y MS_f respectivamente, cuya representación se muestra en la figura 2.3, en donde una fuente es un elemento activo sencillo llamado *Puerto-1 Activo*.



Figura 2.3 Puertos-1 activos.

2.6. Los Elementos Ideales de Puerto-2

Consideremos ahora dos elementos ideales Puerto-2, llamados *Transformador* (TF) y *Girador* (GY), que son sistemas lineales que cambian la relación entre las variables de flujo y esfuerzo. Caracterizándose por tener dos puertos, y una relación lineal entre esfuerzos y flujos.

Los Bonds que representan a un transformador TF y a un girador, GY se muestran en la figura 2.4, donde n y r son los *módulos* del transformador y del girador, respectivamente.

$$\frac{e_1(t)}{f_1(t)} \nearrow \underset{n}{TF} \quad \frac{e_2(t)}{f_2(t)} \nearrow \quad \frac{e_1(t)}{f_1(t)} \nearrow \underset{r}{GY} \quad \frac{e_2(t)}{f_2(t)} \nearrow$$

Figura 2.4 Bond Graph de un Transformador y de un Girador

Las relaciones de las variables de bond generalizadas para el transformador, *TF*, están dadas por:

$$e_1(t) = ne_2(t) \quad (2.4)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{n}f_2(t) \quad (2.5)$$

y para el girador, *GY*, son:

$$e_1(t) = rf_2(t) \quad (2.6)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{r}e_2(t) \quad (2.7)$$

Estos elementos juegan un papel muy importante para el modelado de la conversión de potencia de un dominio físico a otro.

2.7. Los Elementos de Unión, Puertos-3

Estos puertos-3 son llamados uniones dado que ellos sirven para interconectar tres o más puertos de energía dentro de un subsistema. Estos puertos-3 representan una de las ideas fundamentales del formalismo de Bond Graph, representan en forma de multipuerto los dos tipos de conexiones en serie y en paralelo.

Considerar la *unión de flujo*, *unión-0* o *unión de esfuerzo común* para la conexión en paralelo. En la siguiente figura se muestra la representación de esta unión.

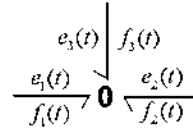


Figura 2.5 Unión-0

Las relaciones de interconexión que describan una unión de flujo están dadas por:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \quad (2.8)$$

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0 \quad (2.9)$$

Estas ecuaciones especifican que en una unión-0, los esfuerzos en todos los bonds por siempre iguales y la suma algebraica de los flujos es cero.

El otro elemento de puerto-3, es la *unión de esfuerzo*, *unión-1*, o de *flujo común* para la conexión en serie, su representación se muestra en la figura 2.6:

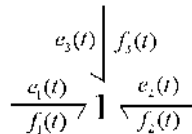


Figura 2.6 Unión-1.

Las relaciones de interconexión para este elemento son:

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) \quad (2.10)$$

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \quad (2.11)$$

Obsérvese a diferencia de la unión de flujo, la unión de esfuerzo tiene un flujo común en los bonds que inciden en la unión y la suma de las variables de esfuerzo en los bonds es cero.

Los puertos de conexión de esfuerzo y flujo pueden extenderse a puertos de 3 o mas puertos.

2.8. Causalidad para los Multipuertos Básicos

[3] Para organizar las leyes constitutivas de componentes en conjuntos de ecuaciones diferenciales necesitamos definir relaciones de causa y efecto. Las relaciones de causa-efecto para esfuerzos y flujos son representadas en direcciones opuestas. Una marca en un bond, llamado trazo causal, indica como $e(t)$ y $f(t)$ simultáneamente son determinados causalmente en un bond, Cuatro ejemplos de causalidad se muestran en la figura 2.7.

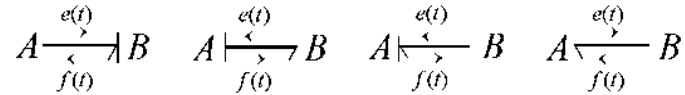


Figura 2.7 Causalidad para un Bond.

El trazo causal indica un sentido de entrada-salida para $e(t)$ y $f(t)$ en cada puerto de los dos componentes juntos. El esfuerzo entra en un bond en el mismo sentido del trazo causal.

Las reglas que se presentan en la Tabla 2.6 se deben cumplir.

Tabla 2.6 Consideraciones causales para los multipuertos básicos.

Causalidad Necesaria	$MS_e \longrightarrow$	$MS_f \longleftarrow$	
	$\longrightarrow \{TF \longrightarrow$ $\longrightarrow \{GY \longrightarrow$	$\longleftarrow TF \longleftarrow$ $\longleftarrow GY \longleftarrow$	
Causalidad Restrictiva	$\longrightarrow \{0 \longrightarrow$ $\longrightarrow \{1 \longrightarrow$	$\longrightarrow \{0 \longrightarrow$ $\longrightarrow \{1 \longrightarrow$	$\longrightarrow \{0 \longrightarrow$ $\longrightarrow \{1 \longrightarrow$
	$\longrightarrow \{0 \longrightarrow$ $\longrightarrow \{1 \longrightarrow$	$\longrightarrow \{0 \longrightarrow$ $\longrightarrow \{1 \longrightarrow$	$\longrightarrow \{0 \longrightarrow$ $\longrightarrow \{1 \longrightarrow$
Causalidad Integral	$\longrightarrow \{I$	$\longleftarrow C$	
Causalidad Derivativa	$\longrightarrow \{I$	$\longleftarrow C$	
Causalidad Arbitraria	$\longrightarrow \{R$	$\longleftarrow R$	

Consideremos dos ejemplos para explicar la importancia de la causalidad. Un modelo para la unión-0 sin causalidad se muestra en la figura 2.8.

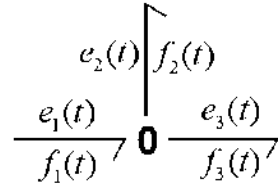


Figura 2.8 Ejemplo de Union-0 sin causalidad

De la figura 2.8, obtenemos:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \quad (2.12)$$

$$f_1(t) - f_2(t) - f_3(t) = 0 \quad (2.13)$$

Ahora, con el trazo causal, como se muestra en la figura 2.9, significa que $e_1(t)$, entra en la unión y $e_2(t)$ y $e_3(t)$ son salidas de la unión, efectos de $e_1(t)$, así $f_1(t)$ está en el sentido opuesto y va fuera de la unión, es una salida, y $f_2(t)$ y $f_3(t)$ son entradas a la unión.

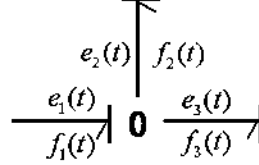


Figura 2.9 Ejemplo de Union-0 con causalidad

Esto se representa con las ecuaciones de interconexión:

$$e_2(t) = e_1(t) \quad (2.14)$$

$$e_3(t) = e_1(t) \quad (2.15)$$

$$f_1(t) = f_2(t) + f_3(t) \quad (2.16)$$

Es una forma bien adaptada para el cálculo numérico.

Considere ahora al *elemento-C*. La relación constitutiva es de $f(t)$ a $e(t)$ y almacena flujo, es decir, relaciona $e(t)$ a una variable de flujo acumulada $q(t) = \int f(t)dt$. Esto es, si $f(t)$ es la entrada a un elemento-C como se muestra en la figura 2.10, se integra primero para encontrar $q(t)$ y entonces $e(t)$ es una salida relacionada a $q(t)$, a esta causalidad en un elemento de almacenamiento se le llama *causalidad integral*, debido a que la integral de la entrada $f(t)$ se relaciona con la salida $e(t)$, esto es:

$$e(t) \triangleq \frac{1}{C} \int f(t)dt \quad (2.17)$$

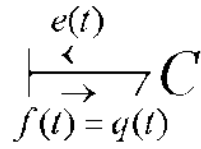


Figura 2.10 Elemento-C en causalidad integral

Inviertiendo la causalidad, mostrada en la figura 2.10, se obtiene la misma relación (2.17) pero escrita con derivadas:

$$f(t) \triangleq C \frac{de(t)}{dt} \quad (2.18)$$

A esta causalidad se le llama causalidad derivativa de un elemento de almacenamiento.

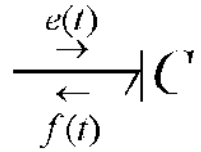


Figura 2.11 Elemento-C en causalidad derivativa

En la Tabla 2.7 se muestran los puertos-1 con la causalidad correspondiente a cada elemento considerado.

Tabla 2.7 Formas causales para Puertos-1

Elemento	Forma Causal	Reacion Causal
Fuente de esfuerzo	$MS_e \longrightarrow \diagup$	$e(t) = E(t)$
Fuente de Flujo	$MS_f \longleftarrow \diagup$	$f(t) = F(t)$
Resistencia	$\longleftarrow R$	$e(t) = \Phi_R[f(t)]$
	$\longrightarrow \diagup R$	$f(t) = \Phi_R^{-1}[e(t)]$
Capacitancia	$\longleftarrow C$	$e(t) = \Phi_C^{-1}[\int f(\tau)d\tau]$
	$\longrightarrow \diagup C'$	$f(t) = \frac{d}{dt}[\Phi_C e(t)]$
Inductancia	$\longleftarrow I$	$e(t) = \frac{d}{dt}[\Phi_I f(t)]$
	$\longrightarrow \diagup I$	$f(t) = \Phi_I^{-1}[\int e(\tau)d\tau]$

Para poder obtener las ecuaciones diferenciales cumpliendo con las reglas de causalidad de la tabla 2.6, el siguiente procedimiento debe ser seguido en orden estricto.

Procedimiento 2.1 Asignacion de Causalidad en un Multipuerto

1. Considerar cualquier MS_e o MS_f y asignar su causalidad requerida e inmediatamente extender las implicaciones causales, usando las restricciones de 0, 1, TF , y GY (ver Tabla 2.6)

2. Asignar causalidad integral a los elementos C e I respetando las restricciones de la Tabla 2.6.

3. Escoger cualquier R que no esté asignado y dar una causalidad arbitraria a R . Extender las implicaciones usando 0, 1, TF y GY . (ver Tabla 3.6).

Se dice que un Bond Graph es causalmente correcto, cuando no existe conflicto de causalidad entre los elementos y las uniones.

En particular debe observarse que la causalidad derivativa de un elemento almacenador de energía proporciona propiedades importantes que se explican en la siguiente sección.

2.9. La Causalidad derivativa de un Bond Graph

La causalidad derivativa se presenta cuando un sistema contiene elementos de almacenamiento de energía que no son dinámicamente independientes, en una asignación de causalidad integral predefinida. Esto se presenta por ejemplo, cuando en un sistema eléctrico, se encuentran dos capacitores en paralelo como se ilustra en la figura 2.12.

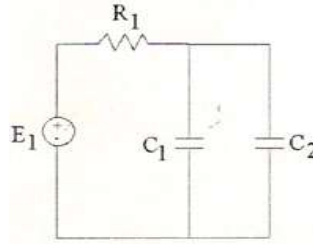


Figura 2.12 Ejemplo de un circuito eléctrico en causalidad derivativa.

Se tienen dos posibles esquemas de Bond Graph, dependiendo de C_1 se le asigna una causalidad integral, entonces C_2 tendrá una causalidad derivativa o viceversa, ambos esquemas se muestran en la figura 2.13.

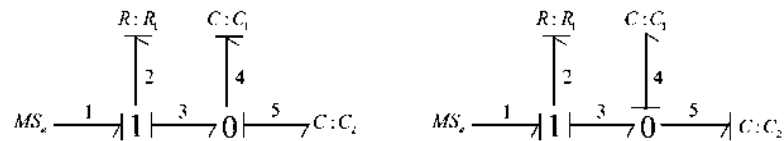


Figura 2.13 Bond Graph en causalidad derivativa de la Figura 2.12.

El número de elementos que almacenan energía en causalidad integral es el número de ecuaciones diferenciales linealmente independientes y el número de elementos almacenadores en causalidad derivativa es el número de ecuaciones diferenciales linealmente dependientes.

2.10. Bond Activo

[3] Un bond normal tiene dos señales, esfuerzo $e(t)$ y flujo $f(t)$. A diferencia, un *Bond Activo* comunica una de las dos señales posibles en una sola dirección.

Un bond activo se representa por una flecha completa, como se muestra en la figura 2.14, indicando un flujo de señal de potencia cero:

$$A \longrightarrow B$$

Figura 2.14 Bond Activo

Un bond activo se utiliza como una señal en un diagrama a bloques, la cual conecta un bloque a otro sin consumir energía como se ilustra en la figura 2.15.

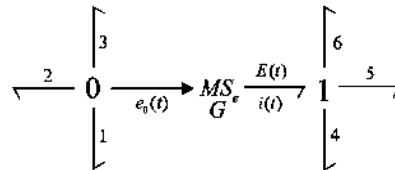


Figura 2.15 Bond Graph con un Bond Activo.

El bond activo que entra a MS_e indica que $E(t)$ es modulada por $e_0(t)$, así, $E(t) = Ge_0(t)$, donde G es la ganancia de voltaje.

El bond activo viene de una *union* $= 0$, el voltaje $e_0(t)$ es el mismo que e_1, e_2 y e_3 . Además el bond activo tiene potencia cero debido a que se considera que la corriente correspondiente a $e_0(t)$ es despreciable. La suma de corrientes en la *union* $= 0$, se debe únicamente a i_1, i_2 y i_3 .

Los componentes básicos para el modelado de sistemas físicos han sido estudiados en esta sección.

Capítulo 3

MODELADO SISTEMÁTICO

3.1. Introducción

En la teoría de control, a menudo se usan las funciones de transferencia para caracterizar las relaciones de entrada-salida de componentes o de sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo

3.2. Modelado de sistemas basado en función de transferencia

Se comenzará por definir la función de transferencia, para proseguir con el cálculo de la función de transferencia de un sistema de ecuaciones diferenciales. A continuación se analiza la función de respuesta-impulso.

3.2.1. Funcion de transferencia

[1] La función de transferencia de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.

Considérese el sistema lineal e invariante en el tiempo descrito mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \dots + a_{n-1} \overset{\bullet}{y} + a_n y = b_0 \overset{(m)}{x} + b_1 \overset{(m-1)}{x} + \dots + b_{m-1} \overset{\bullet}{x} + b_m x \quad (n \geq m) \quad (3.1)$$

donde y es la salida del sistema y x es la entrada. La función de transferencia de este sistema es el cociente de la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada cuando todas las condiciones iniciales son cero:

$$\begin{aligned} \text{Funcion de Tranferencia} &= G(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{salida}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]_{\text{condiciones iniciales cero}}} \\ &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 S^m + b_1 S^{m-1} + \dots + b_{m-1} S + b_m}{a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_{n-1} S + a_n} \end{aligned} \quad (3.2)$$

A partir del concepto de función de transferencia, es posible representar la dinámica de un sistema mediante ecuaciones algebraicas en S . Si la potencia más alta de S en el denominador de la función de transferencia es igual a n , el sistema se denomina *sistema de orden n -ésimo*.

Integral de convolución: Para un sistema lineal e invariante en el tiempo, la función de transferencia $G(s)$ es:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (3.3)$$

donde $X(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada e $Y(s)$ es la transformada de Laplace de la salida, y se supone que todas las condiciones iniciales involucradas son cero. De aquí se obtiene que la salida $Y(s)$ se escribe como el producto de $G(s)$ y $X(s)$, o bien

$$Y(s) = G(s)X(s) \quad (3.4)$$

Obsérvese que la multiplicación en el dominio complejo es equivalente a la convolución en el dominio del tiempo, por lo que la transformada inversa de Laplace de la Ecuación (3.4) se obtiene mediante la siguiente integral de convolución:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (3.5)$$

donde tanto $g(t)$ como $x(t)$ son 0 para $t < 0$.

Respuesta-impulso: Considérese la salida (respuesta) de un sistema para una entrada impulso unitario cuando las condiciones iniciales son cero. Como la transformada de Laplace de la función impulso unitario es la unidad, la transformada de Laplace de la salida del sistema es

$$Y(s) = G(s) \quad (3.6)$$

La transformada inversa de Laplace de la salida obtenida mediante la Ecuación 3.6 proporciona la respuesta-impulso del sistema. La transformada inversa de Laplace de $G(s)$, o bien

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t) \quad (3.7)$$

se denomina respuesta-impulso. Esta respuesta $g(t)$ también se denomina función de ponderación del sistema.

De este modo, la respuesta-impulso $g(t)$ es la respuesta de un sistema lineal a una entrada impulso unitario cuando las condiciones iniciales son cero. La transformada de Laplace de esta función proporciona la función de transferencia. Por tanto, la función de transferencia y la respuesta-impulso de un sistema lineal e invariante en el tiempo contienen la misma información sobre la dinámica del sistema. Por lo tanto, es posible obtener información completa sobre las características dinámicas del sistema si se excita el sistema con una entrada impulso y se mide la respuesta. (En la práctica, una entrada pulso con una duración muy corta comparada con las constantes de tiempo significativas del sistema se considera un impulso.)

3.2.2. Sistemas de Control Automáticos

[4] Un sistema de control puede tener varios componentes. Para mostrar las funciones de cada componente en la ingeniería de control, por lo general se usa una representación denominada *diagrama de bloques*. En esta sección, se explica qué es un diagrama de bloques. A continuación se presentan aspectos introductorios a los sistemas de control automático, que incluyen diversas acciones de control. Después se expone un método para obtener los diagramas de bloques de sistemas físicos y, por último, se analizan técnicas para simplificar tales diagramas.

3.2.3. Diagramas de bloques

[2] Un diagrama de bloques de un sistema es una representación gráfica de las funciones que lleva a cabo cada componente y el flujo de señales. Tales diagramas muestran las relaciones existentes entre los diversos componentes. A diferencia de una representación

matemática puramente abstracta, un diagrama de bloques tiene la ventaja de indicar de forma más realista el flujo de las señales del sistema real. En un diagrama de bloques todas las variables del sistema se enlazan unas con otras mediante bloques funcionales. El bloque funcional o simplemente bloque es un símbolo para representar la operación matemática que sobre la señal de entrada hace el bloque para producir la salida. Las funciones de transferencia de los componentes por lo general se introducen en los bloques correspondientes, que se conectan mediante flechas para indicar la dirección del flujo de señales. Obsérvese que la señal sólo puede pasar en la dirección de las flechas. Por tanto, un diagrama de bloques de un sistema de control muestra explícitamente una propiedad unilateral. La figura 3.1 muestra un elemento del diagrama de bloques. La punta de flecha que señala el bloque indica la entrada, y la punta de flecha que se aleja del bloque representa la salida. Tales flechas se conocen como señales.

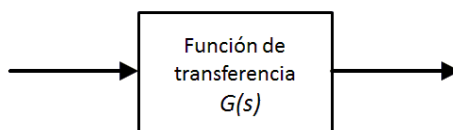


Figura 3.1 Elementos de un diagrama de bloques.

Obsérvese que las dimensiones de la señal de salida del bloque son las dimensiones de la señal de entrada multiplicadas por las dimensiones de la función de transferencia en el bloque. Las ventajas de la representación mediante diagramas de bloques de un sistema estriban en que es fácil formar el diagrama de bloques general de todo el sistema con sólo conectar los bloques de los componentes de acuerdo con el flujo de señales y en que es posible evaluar la contribución de cada componente al desempeño general del sistema. En general, la operación funcional del sistema se aprecia con más facilidad si se examina

el diagrama de bloques que si se revisa el sistema físico mismo. Un diagrama de bloques contiene información relacionada con el comportamiento dinámico, pero no incluye información de la construcción física del sistema. En consecuencia, muchos sistemas diferentes y no relacionados pueden representarse mediante el mismo diagrama de bloques. Debe señalarse que, en un diagrama de bloques, la principal fuente de energía no se muestra explícitamente y que el diagrama de bloques de un sistema determinado no es único. Es posible dibujar varios diagramas de bloques diferentes para un sistema, dependiendo del punto de vista del análisis.

a) Punto de suma

Remitiéndose a la figura 3.2, un círculo con una cruz es el símbolo que indica una operación de suma. El signo más o el signo menos en cada punta de flecha indica si la señal debe sumarse o restarse. Es importante que las cantidades que se sumen o resten tengan las mismas dimensiones y las mismas unidades.

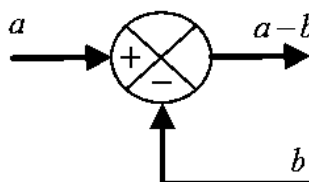


Figura 3.2 Punto de Suma

b) Punto de ramificación

Un punto de ramificación es aquel a partir del cual la señal de un bloque va de modo concurrente a otros bloques o puntos de suma.

c) Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado

La figura 3.3 muestra un ejemplo de un diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado. La salida $C(s)$ se realimenta al punto de suma, donde se compara con la entrada de referencia $R(s)$. La naturaleza en lazo cerrado del sistema se indica con claridad en la figura. La salida del bloque, $C(s)$ en este caso, se obtiene multiplicando la función de transferencia $G(s)$ por la entrada al bloque, $E(s)$. Cualquier sistema de control lineal puede representarse mediante un diagrama de bloques formado por puntos de suma, bloques y puntos de ramificación. Cuando la salida se realimenta al punto de suma para compararse con la entrada, es necesario convertir la forma de la señal de salida en la de la señal de entrada. Por ejemplo, en un sistema de control de temperatura, por lo general la señal de salida es la temperatura controlada. La señal de salida, que tiene la dimensión de la temperatura, debe convertirse a una fuerza, posición o voltaje antes de que pueda compararse con la señal de entrada. Esta conversión se consigue mediante el elemento de realimentación, cuya función de transferencia es $H(s)$, como se aprecia en la figura 3.4. La función del elemento de realimentación es modificar la salida antes de compararse con la entrada. (En la mayor parte de los casos, el elemento de realimentación es un sensor que mide la salida de la planta. La salida del sensor se compara con la entrada y se genera la señal de error.) En este ejemplo, la señal de realimentación que retorna al punto de suma para compararse con la entrada es $B(s) = H(s)C(s)$.

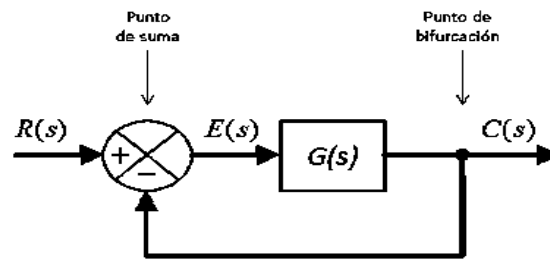


Figura 3.3 Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado.

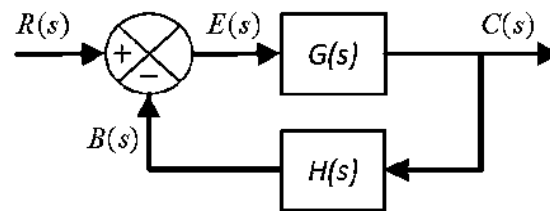


Figura 3.4 Sistema en lazo cerrado.

d) Función de transferencia en lazo abierto y función de transferencia de la trayectoria directa

Remitiéndose a la figura 3.4, el cociente de la señal de realimentación $B(s)$ entre la señal de error $E(s)$ se denomina función de transferencia en lazo abierto. Es decir, Modelado en variables de estado a partir de un Bond Graph

$$\text{Función de Transferencia en lazo abierto} = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

El cociente entre la salida $C(s)$ y la señal de error $E(s)$ se denomina *función de transferencia de la trayectoria directa*, por lo que,

$$\text{Función de Transferencia de la trayectoria directa} = \frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

Si la función de transferencia de la trayectoria de realimentación $H(s)$ es la unidad, la función de transferencia en lazo abierto y la función de transferencia de la trayectoria

directa son iguales.

$$\begin{aligned}C(s) &= G(s)E(s) \\E(s) &= R(s) - B(s) \\&= R(s) - H(s)C(s)\end{aligned}$$

Si se elimina $E(s)$ de estas ecuaciones, se obtiene

$$C(s) = G(s)R(s) - H(s)C(s)$$

o bien,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.8)$$

La función de transferencia que relaciona $C(s)$ con $R(s)$ se denomina *función de transferencia en lazo cerrado*. Esta función de transferencia relaciona la dinámica del sistema en lazo cerrado con la dinámica de los elementos de las trayectorias directa y de realimentación.

A partir de la Ecuación (3.8), $C(s)$ se obtiene mediante

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

Por tanto, la salida del sistema en lazo cerrado depende claramente tanto de la función de transferencia en lazo cerrado como de la naturaleza de la entrada.

e) Obtención de funciones de transferencia en cascada, en paralelo y realimentadas (en lazo cerrado) utilizando MATLAB

En el análisis de sistemas de control, frecuentemente se necesita calcular funciones de transferencia en cascada, funciones de transferencia conectadas en paralelo y funciones

de transferencia realimentadas (en lazo cerrado). MATLAB tiene funciones adecuadas para obtener las funciones de transferencia en cascada, paralelo y realimentada (lazo cerrado).

Supóngase que hay dos componentes $G_1(s)$ y $G_2(s)$ conectadas de diferentes formas como se muestra en la figura 3.5 (a), (b) y (c), donde

$$G_1(s) = \frac{num1}{den1}, \quad G_2(s) = \frac{num2}{den2}$$

Como ejemplo, se considera el caso en el que

$$G_1(s) = \frac{10}{s^2+2s+10} = \frac{num1}{den1}, \quad G_2(s) = \frac{5}{s+5} = \frac{num2}{den2}$$

El Programa 3.1 en MATLAB calcula $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{num}{den}$ para cada situación de $G_1(s)$ y $G_2(s)$. Obsérvese que la instrucción

$$\mathcal{L}printsys(num,den)$$

muestra el $\frac{num}{den}$ [esto es, la función $\frac{C(s)}{R(s)}$] del sistema considerado.

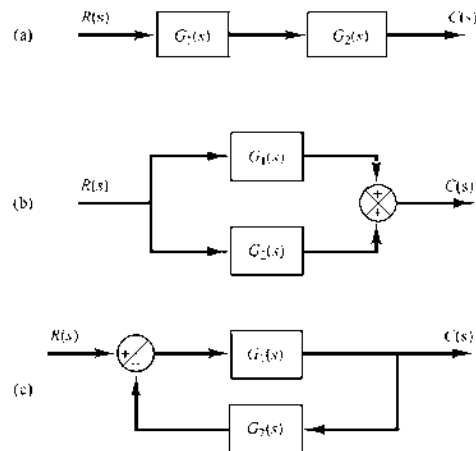


Figura 3.5 (a) Sistema en cascada; (b) Sistema paralelo; (c) Sistema realimentado (lazo cerrado).

```

num1 = [10];
den1 = [1 2 10];
num2 = [0 5];
den2 = [1 5];
[num, den] = series(num1, den1, num2, den2);
printsys(num, den)
num/den =
          50
-----
s^3 + 7s^2 + 20s + 50

[num, den] = parallel(num1, den1, num2, den2);
printsys(num, den)
num/den =
      5s^2 + 20s + 100
-----
s^3 + 7s^2 + 20s + 50

[num, den] = feedback(num1, den1, num2, den2);
printsys(num, den)
num/den =
      10s + 50
-----
s^3 + 7s^2 + 20s + 100

```

MATLAB Programa 3.1

f) Procedimientos para dibujar un diagrama de bloques

Para dibujar el diagrama de bloques de un sistema, primero se escriben las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de cada componente. A continuación se toma las transformadas de Laplace de estas ecuaciones, suponiendo que las condiciones iniciales son cero, y se representa individualmente en forma de bloques cada ecuación transformada por el método de Laplace. Por último, se integran los elementos en un diagrama de bloques completo. Como ejemplo, considérese el circuito RC de la figura 3.6(a). Las ecuaciones para el circuito son:

$$i = \frac{e_1 - e_0}{R} \quad (3.9)$$

$$e_0 = \frac{\int i \, dt}{C} \quad (3.10)$$

Las transformadas de Laplace de las Ecuaciones (3.9) y (3.10), con condiciones iniciales iguales a cero, resultan:

$$I(s) = \frac{E_1(s) - E_0(s)}{R} \quad (3.11)$$

$$E_0(s) = \frac{I(s)}{Cs} \quad (3.12)$$

La Ecuación (3.11) representa una operación de suma, y el diagrama correspondiente aparece en la figura 3.6(b). La Ecuación (3.12) representa el bloque de la figura 3.6(c). Si se integran estos dos elementos se obtiene el diagrama de bloques general para el sistema, tal como aparece en la figura 3.6(d).

g) Reducción de un diagrama de bloques

Es importante señalar que los bloques pueden conectarse en serie, sólo si la entrada de un bloque no se ve afectada por el bloque siguiente. Si hay efectos de carga entre los componentes, es necesario combinarlos en un bloque único. Cualquier número de bloques en cascada que representen componentes sin carga puede sustituirse con un sólo bloque, cuya función de transferencia sea simplemente el producto de las funciones de transferencia individuales.

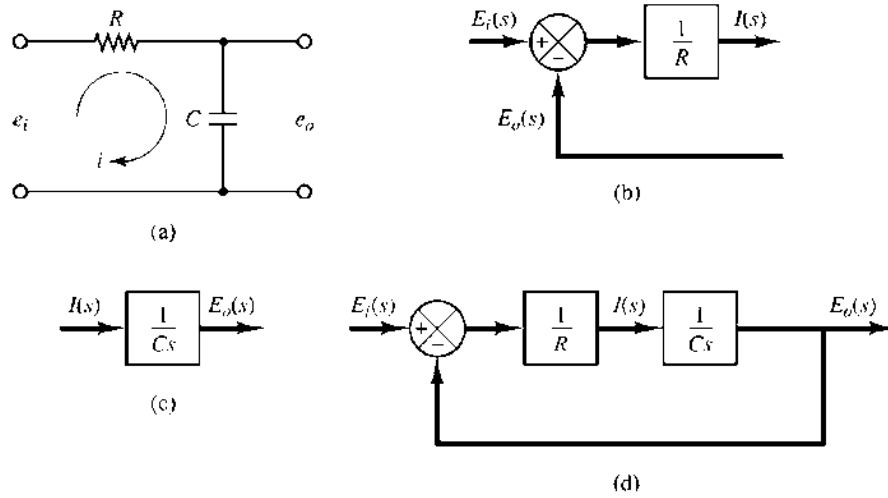


Figura 3.6 (a) Circuito RC ; (b) Diagrama de bloques de la Ecuación 3.6; (c) Diagrama de bloques de la Ecuación 3.7; (d) Diagrama de bloques del circuito RC .

Un diagrama de bloques complicado que contenga muchos lazos de realimentación se simplifica mediante un reordenamiento paso a paso. La simplificación de un diagrama de bloques mediante reordenamientos y sustituciones reduce de manera considerable la labor necesaria para el análisis matemático subsecuente. Sin embargo, debe señalarse que, conforme se simplifica el diagrama de bloques, las funciones de transferencia de los bloques nuevos se vuelven más complejas, debido a que se generan polos y ceros nuevos.

[2] **EJEMPLO 3.1** Considere el sistema que aparece en la figura 3.7(a). Simplifíquese este diagrama. Si se mueve el punto suma del lazo de realimentación negativa que contiene H_2 hacia afuera del lazo de realimentación positiva que contiene H_1 , se obtiene la figura 3.7(b). Si se elimina el lazo de realimentación positiva se obtiene la figura 3.7(c). La eliminación del lazo que contiene $\frac{H_2}{G_1}$ origina la figura 3.7(d). Por último, si se elimina el lazo de realimentación se obtiene la figura 3.7(e).

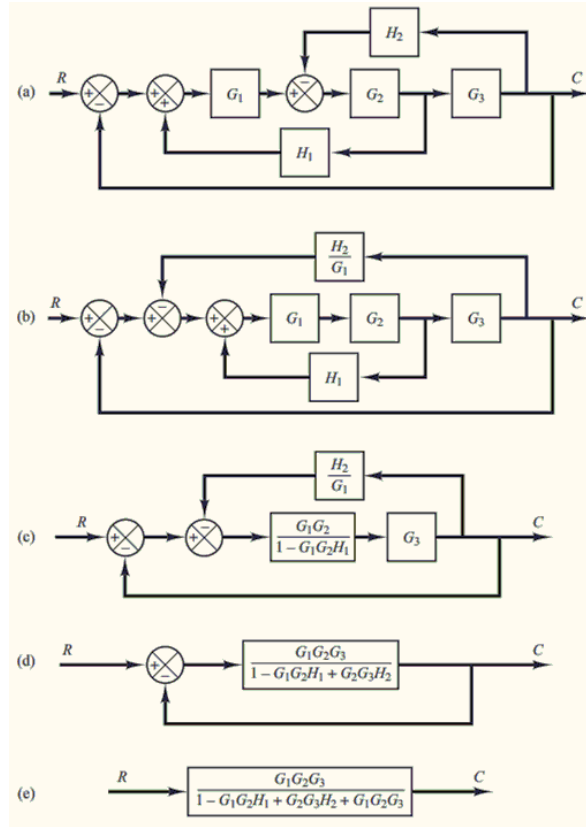


Figura 3.7 (a) Sistema con múltiples lazos; (b)-(e) reducciones sucesivas del diagrama de bloques mostrado en (a).

Observe que el numerador de la función de transferencia en lazo cerrado $\frac{C(s)}{R(s)}$ es el producto de la función de transferencia en el camino directo. El denominador de $\frac{C(s)}{R(s)}$ es igual a:

$$\begin{aligned}
 1 + \sum (\text{producto de las funciones de transferencia alrededor de cada lazo}) \\
 &= 1 + (-G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3) \\
 &= 1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3
 \end{aligned}$$

(El lazo de realimentación positiva da lugar a un termino negativo en el denominador.)

3.3. Modelado en el espacio de estados.

[2] En esta sección se presenta un material introductorio sobre el análisis de sistemas de control en el espacio de estados.

Teoría de control moderna. La tendencia moderna en los sistemas de ingeniería es hacia una mayor complejidad, debido sobre todo a que se requieren tareas más complejas y buena precisión. Los sistemas complejos pueden tener múltiples entradas y múltiples salidas y pueden ser variantes en el tiempo. Debido a la necesidad de cumplir requisitos cada vez más exigentes en el comportamiento de los sistemas de control, el aumento en la complejidad del sistema y el fácil acceso a las computadoras a gran escala, la teoría moderna de control, que es una nueva aproximación al análisis y diseño de los sistemas de control complejo, se ha desarrollado desde 1960. Esta nueva aproximación se basa en el concepto de estado. El concepto de estado por sí mismo no es nuevo, puesto que ha existido durante bastante tiempo en el campo de la dinámica clásica y en otros campos.

Teoría de control moderna frente a teoría de control convencional. La tendencia de control moderna contrasta con la teoría de control convencional en que su formulación es aplicable a sistemas de múltiples-entradas, múltiples-salidas, que pueden ser lineales o no lineales, invariantes en el tiempo o variables en el tiempo, mientras que la teoría convencional sólo es aplicable a sistemas de una entrada-una salida invariantes en el tiempo. Además, la teoría de control moderna es esencialmente una aproximación en el dominio temporal, mientras que la teoría de control convencional es una aproximación en el dominio de la frecuencia compleja. Antes de continuar, se debe definir estado, variables de estado, vector de estado y espacio de estados.

Estado. El estado de un sistema dinámico es el conjunto de variables más pequeño (llamadas *variables de estado*), de forma que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier $t \geq t_0$.

Obsérvese que el concepto de estado no está limitado a sistemas físicos. Es aplicable a sistemas biológicos, sistemas económicos, sistemas sociales y otros.

Variables de estado. Las variables de un sistema dinámico son las variables que constituyen el menor conjunto de variables que determinan el estado del sistema dinámico. Si al menos se necesitan n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ para describir completamente el comportamiento de un sistema dinámico (de forma que una vez que la entrada para $t \geq t_0$ está dada y el estado inicial en $t = t_0$ está especificado, el estado futuro del sistema está determinado completamente), entonces tales n variables son un conjunto de variables de estado.

Obsérvese que las variables de estado no necesitan ser físicamente medibles o cantidades observables. Se pueden seleccionar como variables de estado variables que no representan cantidades físicas y aquellas que no son medibles ni observables. Tal libertad en la elección de las variables de estado es una ventaja de los métodos en el espacio de estados. Sin embargo, prácticamente es conveniente seleccionar para las variables de estado cantidades físicamente medibles, si esto es posible, porque las leyes de control óptimo requerirán realimentar todas las variables de estado con una ponderación adecuada.

Vector de estado. Si se necesitan n variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, entonces esas n variables de estado se pueden considerar como las n componentes de un vector $\mathbf{x}$. Este vector se denomina *vector de es-*

tado. Un vector de estado es, por lo tanto, un vector que determina unívocamente el estado del sistema $\mathbf{x}(t)$ en cualquier instante del tiempo $t \geq t_0$, una vez que se conoce el estado en $t = t_0$ y se especifica la entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$.

Espacio de estados. El espacio n -dimensional cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1 , eje $x_2, \dots$, eje x_n , donde $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las variables de estado, se denomina espacio de estados. Cualquier estado se puede representar como un punto en el espacio de estados.

Ecuaciones en el espacio de estados. En el análisis en el espacio de estados se centra la atención en los tres tipos de variables que aparecen en el modelado de los sistemas dinámicos; las variables de entrada, las variables de salida y las variables de estado. La representación en el espacio de estados de un sistema dado no es única, salvo que el número de variables de estado es el mismo para cualquiera que sea la representación en variables de estado de un mismo sistema.

El sistema dinámico debe contener elementos que recuerden los valores de la entrada para $t \geq t_1$. Puesto que los integradores en un sistema de control en tiempo continuo sirven como dispositivo de memoria, las salidas de tales integradores se pueden considerar como las variables que describen el estado interno del sistema dinámico. Así las salidas de los integradores sirven como variables de estado. El número de variables de estado para definir completamente la dinámica del sistema es igual al número de integradores que aparezcan en el mismo.

Sea un sistema de múltiples entradas-múltiples salidas con n integradores. Supóngase también que hay r entradas $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ y m salidas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$. Se

definen las n salidas de los integradores como variables de estado: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$.

Entonces el sistema se puede describir mediante:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)\end{aligned}\tag{3.13}$$

Las salidas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ del sistema se obtienen mediante:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)\end{aligned}\tag{3.14}$$

Si se define:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

las Ecuaciones (3.13) y (3.14) se convierten en:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\tag{3.15}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\tag{3.16}$$

donde la Ecuación (3.15) es la ecuación de estado y la Ecuación (3.16) es la ecuación de la salida. Si las funciones vectoriales $\mathbf{f}$ y/o $\mathbf{g}$ involucran explícitamente el tiempo t , el sistema se denomina sistema variante con el tiempo.

Si se linealizan las Ecuaciones (3.15) y (3.16) alrededor del estado de operación, se tienen las siguientes ecuaciones de estado y de salida linealizadas:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (3.18)$$

donde $\mathbf{A}(t)$ se denomina matriz de estado, $\mathbf{B}(t)$ matriz de entrada, $\mathbf{C}(t)$ matriz de salida y $\mathbf{D}(t)$ matriz de transmisión directa. En la figura 3.8. aparece un diagrama de bloques que representa las Ecuaciones (3.17) y (3.18).

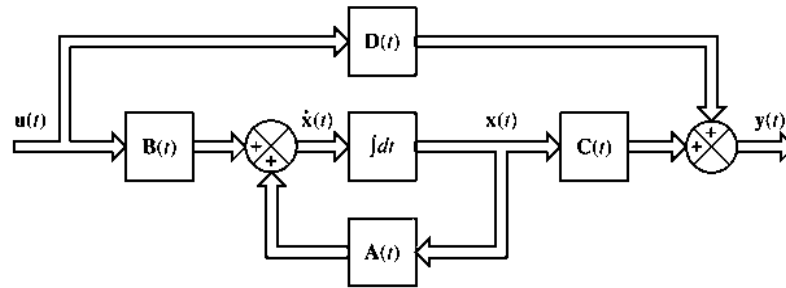


Figura 3.8 Diagrama de bloques del sistema de control lineal en tiempo continuo representado en el espacio de estados.

Si las funciones vectoriales $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ no involucran el tiempo t explícitamente, el sistema se denomina sistema invariante con el tiempo. En este caso, las Ecuaciones (3.17) y (3.18) se simplifican a:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.19)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (3.20)$$

La Ecuación (3.19) es la ecuación de estado del sistema lineal e invariante con el tiempo y la Ecuación (3.20) es la ecuación de salida para el mismo sistema.

3.4. Estructura de Unión en Bond Graph

3.4.1. Procedimiento para el Modelado de Sistemas

[3] Para la representación de un sistema físico en Bond Graph se sigue un procedimiento general para cualquier sistema que se esté modelando (eléctrico, mecánico e hidráulico) procedimiento que resulta directo y simple, la secuencia de pasos se enumera a continuación:

- 1.- Dibujar una *unión* -0 para cada punto en el esquema donde las trayectorias paralelas coincidan.
- 2.- Dibujar una *unión* -1 para cada componente en una trayectoria serie y conectar el componente apropiado de Bond Graph por un bond en esa unión. La dirección de la semiflecha en cada bond indica la dirección asumida del flujo de potencia, es decir, a partir de fuentes y hacia elementos almacenadores y elementos disipadores.
- 3.- Dibujar bonds entre uniones adyacentes, nuevamente indicando la dirección de flujo de potencia.
- 4.- Remover *unión* -0 que representa el punto de referencia y remover todos los bonds conectados a ésta unión.
- 5.- Para simplificar la gráfica se toman en cuenta las siguientes propiedades de

reducción, mostrados en la figura 3.9.

$$\begin{array}{c} \text{---} \nearrow 1 \text{---} \nearrow = \text{---} \nearrow \\ \text{---} \nearrow 0 \text{---} \nearrow = \text{---} \nearrow \end{array}$$

Figura 3.9 Simplificación de Bonds.

Recomendaciones para implementar el procedimiento para obtener el Bond Graph anteriormente descrito aplicado a circuitos eléctricos, se enuncian a continuación:

- a) En el paso 1, a cada voltaje distinto en el circuito le corresponde una *unión* -0 .
- b) En el paso 4, el punto de referencia es el nodo de tierra, el cual tiene un voltaje de cero.

Para ilustrar el procedimiento se incorpora un ejemplo de un circuito eléctrico mostrado en la figura 3.10.

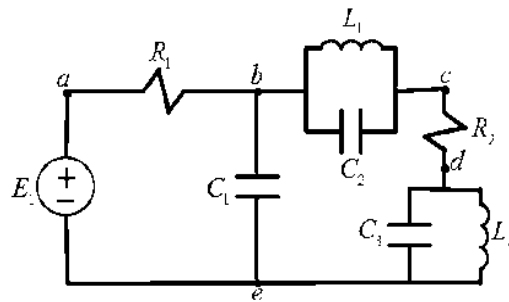


Figura 3.10 Ejemplo de un circuito eléctrico.

Se muestran los pasos 1,2,3 y 4 del procedimiento descrito anteriormente y se ilustra en la figura 3.11.

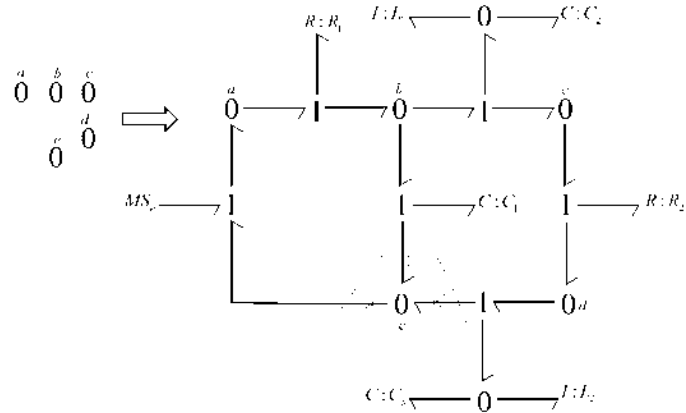


Figura 3.11 Procedimiento para obtener el Bond Graph de un circuito eléctrico.

Una vez eliminado el nodo de referencia y reduciendo el circuito (paso #5) se le asigna causalidad y se obtiene el Bond Graph que se observa en la figura 3.12

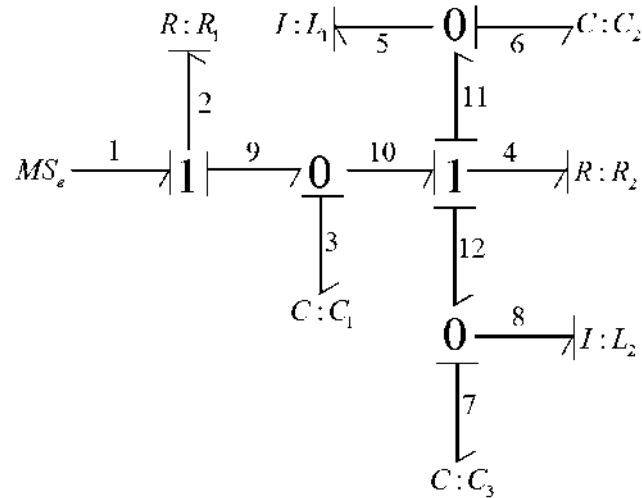


Figura 3.12 Bond Graph del ejemplo de un sistema eléctrico.

3.4.2. Estructuras de Union en Sistemas Multipuerto

Suponer algunos tipos de sistemas grandes como campos interconectados, nos brinda una estructura dinámica en consecuencia la generación, manipulación y reducción de muchas ecuaciones es hecha sistemáticamente para una culminación exitosa.

3.4.3. Vectores Clave (Vectores Significativos)

En Bond Graph en forma convencional, todos los bonds pueden ser clasificados en *bonds externos*, que enlazan a los elementos o puertos R, C, MS_e , y MS_f , y en *bonds internos* que ligan a $0, 1, TF$, y GY . Así, como los bonds internos pueden ser clasificados de acuerdo a su forma de exposición de energía. La figura 3.13 ilustra el diagrama de bloques de la estructura de unión de un Bond Graph.

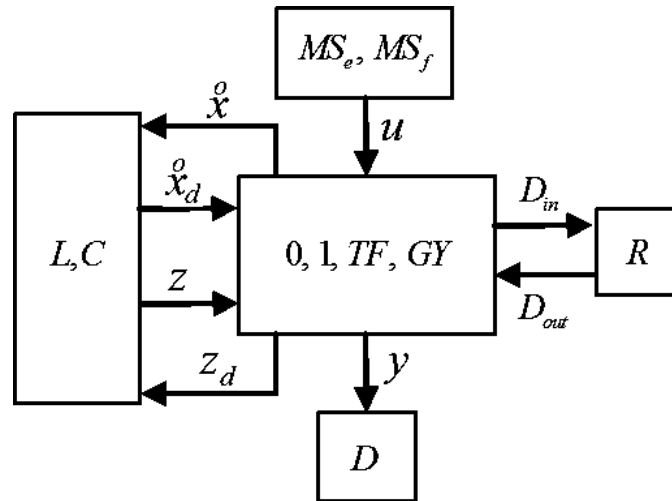


Figura 3.13 Diagrama a bloques de la Estructura de unión de un Bond Graph.

Las variables de la figura 3.13 indican que (MS_e, MS_f) , (L, C) y (R) indican los campos de fuente, almacenamiento y disipación respectivamente, (D) el detector y $(0, 1, TF, GY)$ la estructura de unión con transformadores (TF) , y giradores (GY) , *uniones* – 0 y *uniones* – 1.

Los vectores que constituyen al sistema llamados (*vectores clave*), están expresados en la figura 3.12, donde $u(t)$ contiene las variables de potencia o los esfuerzos y flujos establecidos por los elementos de las fuentes en la Estructura de Unión. Los estados $x(t)$ y $x_d(t)$ están compuestos por variables de energía, momento generalizado $p(t)$ en elementos

I y desplazamiento generalizado $q(t)$ en elementos capacitivos (c) en causalidad integral y derivativa respectivamente; $z(t)$ y $z_d(t)$ están conformadas por variables de co-energía en causalidad integral y derivativa, $D_{in}(t)$ y $D_{out}(t)$ son una mezcla de esfuerzos y flujos que muestran los intercambios energéticos entre el campo de disipación y la estructura de unión.

3.4.4. Relaciones de campo y Ecuación de estado.

[7] Las relaciones de campo no lineales de la figura 3.12 de almacenamiento y disipación son:

$$z(t) = \Phi F(x) \quad (3.21)$$

$$z_d(t) = \Phi F_d(x_d) \quad (3.22)$$

$$D_{out}(t) = \Phi L(D_{in}) \quad (3.23)$$

Dónde:

$F(x)$ Indica una función que relaciona cada z_i con x_i para $i = 1, \dots, n$.

$F_d(x_d)$ Indica una función que relaciona cada z_{di} con cada x_{di} para $i = 1, \dots, m$.

$L(D_{in})$ Indica una función que relaciona cada D_{outi} con cada D_{ini} para $i = 1, \dots, r$.

El comportamiento de un elemento en específico está descrito por una ley física la cual es llamada como S relación constitutiva. Si las relaciones son lineales se obtiene:

$$z(t) = F_x(t) \quad (3.24)$$

$$z_d(t) = F_d x_d(t) \quad (3.25)$$

$$D_{out}(t) = L D_{in}(t) \quad (3.26)$$

Donde L, F y F_d son matrices reales de dimensiones $(r \times r, n \times n, m \times m)$ respectivamente.

Las relaciones de la estructura de unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$z_d = -s_{14}^T z(t) \quad (3.28)$$

Dónde la estructura de una unión está formada por:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos de S toman valores dentro del conjunto $\{0, \pm 1, \pm n, \pm r\}$ dónde n y r son los módulos de transformador y girador. La matriz S está particionada de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave. Las submatrices S_{ij} tienen las siguientes propiedades:

- a) S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas asimétricas.
- b) S_{12} es la matriz transpuesta negativa de S_{21} y viceversa.

Las propiedades anteriores están basadas en el principio de conservación de la energía.

Un sistema LTI MIMO (Sistema invariante en el tiempo con multiples entradas y

múltiples salidas), está expresado por variables de estado como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.29)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3.30)$$

Relacionando las ecuaciones (3.27) y (3.28) con (3.29) y (3.30) respectivamente, se obtienen las siguientes relaciones:

$$A = E^{-1}(S_{11} + S_{12} * M * S_{21})F \quad (3.31)$$

$$B = E^{-1}(S_{13} + S_{12} * M * S_{23}) \quad (3.32)$$

$$C = (S_{31} + S_{32} * M * S_{21})F \quad (3.33)$$

$$D = (S_{33} + S_{32} * M * S_{23}) \quad (3.34)$$

Resultando:

$$E = I + S_{14} * F_d^{-1} * S_{14}^T * F \quad (3.35)$$

$$M = [I + L * S_{22}]^{-1} L \quad (3.36)$$

Las expresiones (3.28) a (3.35) permiten la obtención directa del modelo de un sistema físico en variables de estado, utilizando la representación de Bond Graph.

A continuación se presentan dos ejemplos (sistema eléctrico) para una mayor comprensión sobre el análisis de sistemas con la estructura de unión en Bond Graph.

EJEMPLO 1.

En la figura 3.14 se presenta un Circuito eléctrico del cual se obtendrá su equivalente en Bond Graph

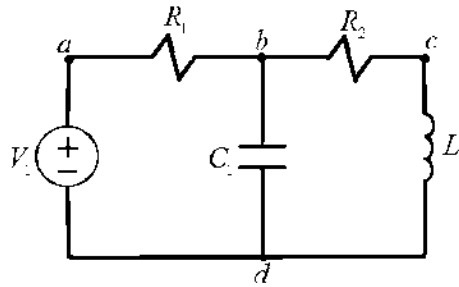


Figura 3.14 Circuito Eléctrico.

Obteniendo el Bond Graph del circuito presentado en la figura 3.14 y aplicando los pasos descritos en la unidad (3.4.1) se genera la figura 3.15.

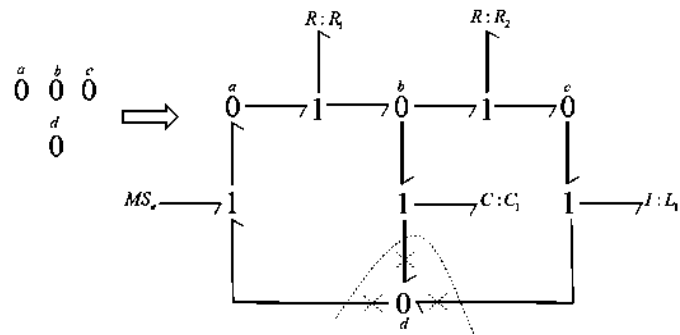


Figura 3.15 Pasos 1-4 para obtención del Bond Graph.

Reduciendo la figura 3.15 se obtiene la figura 3.16 que se muestra a continuación:

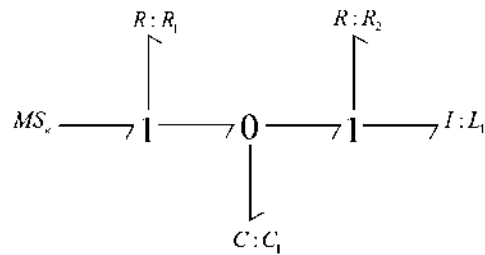


Figura 3.16 Bond Graph reducido.

Agregándole causalidad a la figura 3.16 resulta la ilustración mostrada en la figura 3.17 de la cual se obtienen los *Vectores Clave* y las *Relaciones Constitutivas*.

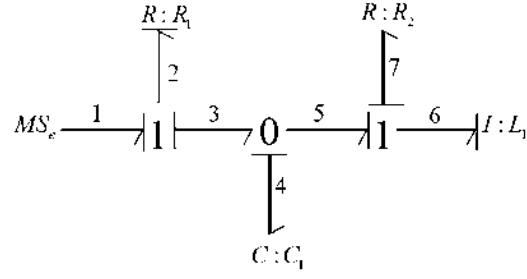


Figura 3.17 Bond Graph obtenido con su respectiva causalidad.

De la figura 3.17 se obtienen las siguientes relaciones:

$$u = e_1; \quad x = \begin{bmatrix} q_4 \\ p_6 \end{bmatrix}; \quad \overset{o}{x} = \begin{bmatrix} f_4 \\ e_6 \end{bmatrix}; \quad z = \begin{bmatrix} e_4 \\ f_6 \end{bmatrix}$$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_7 \end{bmatrix}; \quad D_{out} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_7 \end{bmatrix}$$

Vectores clave y relaciones constitutivas resultantes:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_7 \end{bmatrix} \stackrel{D_{out} = L D_{in}}{=} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ f_6 \end{bmatrix} \stackrel{Z = FX}{=} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_6 \end{bmatrix}$$

Con las relaciones anteriores se constituye la estructura unión que forman la siguiente matriz para desprender la formulación de las ecuaciones de estado.

$$\begin{bmatrix} \overset{o}{x} \\ D_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Sustituyendo valores en la ecuación (3.29) se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4 \\ e_6 \\ e_2 \\ f_7 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ f_6 \\ f_2 \\ e_7 \end{bmatrix} \\ [e_1] \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

La formación de la matriz (3.30) se desprende de las relaciones:

$$f_4 = f_2 - f_6$$

$$e_6 = e_4 - e_7$$

$$e_2 = e_1 = e_4$$

$$f_7 = f_6$$

La ecuación de estado a encontrar es:

$$\overset{o}{\dot{x}} = Ax + Bu \quad (3.39)$$

Dónde:

$$A = [S_{11} + S_{12}MS_{21}] [F]$$

$$B = [S_{13} + S_{12}MS_{23}]$$

$$M = L(I - S_{22}L)$$

En dónde A y B son las variables a encontrar, además de que M = (Matriz de resistencia) y F = (Matriz de elementos de almacenamiento de energía).

Sustituyendo A y B en la ecuación (3.48) se obtiene:

$$\overset{o}{x} = [S_{11} + S_{12}MS_{21}]Fx + [S_{13} + S_{12}MS_{23}]u \quad (3.40)$$

Partiendo de la siguiente ecuación:

$$M = L(I - S_{22}L)$$

Sabemos que:

$$S_{22} = 0$$

por ende:

$$M = L$$

Entonces, tenemos:

$$S_{12}M = S_{12}L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$$

$$S_{12}L = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix}$$

$$S_{12}MS_{21} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix}$$

$$S_{11} + S_{12}MS_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & -1 \\ 1 & -R_2 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo valores en la siguiente ecuación

$$A = [S_{11} + S_{12}MS_{21}] [F]$$

se obtienen los valores de la variable A :

$$A = \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & -1 \\ 1 & -R_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{L_1} R_2 \end{bmatrix}$$

por ende:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{bmatrix}$$

De forma similiar, para encontrar los valores de la variable B , se usa la siguiente ecuación:

$$B = [S_{13} + S_{12}MS_{23}]$$

Se sabe que $S_{13} = 0$ y se sustituyen los valores correspondientes:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

por ende:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reemplazando los valores encontrados de A y B en la ecuación (3.48) se obtiene

la *Ecuación en Variables de Estado*, la cual nos da el siguiente resultado:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{bmatrix} * x + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} * u \quad (3.41)$$

Capítulo 4

ANÁLISIS DE SISTEMAS CON LA ESTRUCTURA DE UNIÓN

4.1. Introducción

Los estudiantes de ingeniería adquieren una comprensión básica de los principios científicos, que con su audacia los combinan con el conocimiento empírico asociado a una gran creatividad para alcanzar soluciones matemáticas muy aceptables, aun así un elemento de gran relevancia es la simulación, es el medio por el cual las ecuaciones matemáticas se convierten en gráficos que ayudan al estudiante a tener mas fundamentos apegados a la realidad que prueben o desmientan su investigación.

En la actualidad, el modelado y la simulación es una actividad indispensable a la que nos enfrentamos con el análisis y diseño de sistemas multidisciplinarios de cierta complejidad. El objetivo es ayudar o dar el soporte necesario al proceso de análisis matemático

y diagnóstico del sistema en estudio. El software debe complementar el análisis realizado por el investigador para que éste pueda modelar y simular de tal forma que los análisis que realice sean eficientes, que se encuentren en un escenario real, para que en lo inmediato posible se puedan recrear modelos reales que sean probados bajo características reales de operación.

Un software adecuado hace posible establecer una valoración final antes de que los sistemas sean construidos, y puedan aliviar la necesidad de experimentos caros y dar soporte a todas las etapas de un proyecto desde el diseño conceptual, pasando por el montaje hasta llegar a su funcionamiento.

El simulador 20-Sim ofrece una alternativa de alta calidad para el modelado y la simulación de sistemas físicos, eléctricos, mecánicos, químicos, etc.

20-Sim es un programa de modelado y simulación que funciona en la plataforma de Windows. Con 20-Sim, usted podrá simular el comportamiento de sistemas dinámicos, como sistemas eléctricos, mecánicos, hidráulicos y cualquier combinación de éstos, 20-Sim soporta completamente el modelado gráfico, de manera que se pueden diseñar y analizar sistemas dinámicos de manera muy intuitiva, sin tener que comprometer la potencia del equipo. 20-Sim también funciona con el uso de componentes, lo cual le permite modelar sistemas como si fuesen bosquejos de problemas de ingeniería. Al escoger los componentes que necesita de librería, los podrá concatenar para reconstruir su diagrama de ingeniería, sin tener que escribir una sola línea de matemáticas.

4.2. Simulación de Sistemas Modelados en Bond Graph sin Lazos Algebraicos

[5] Para poder realizar este tipo de simulación sin lazos algebraicos, es necesario que el elemento de la matriz S_{22} sea igual a cero, esto es, $S_{22} = 0$.

Demostrando que $S_{22} = 0$:

Partiendo de la siguiente Matriz:

$$\begin{bmatrix} \overset{o}{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix}$$

Sacando ecuación de entrada D_{in} de la matriz anterior, sabiendo que $Z = FX$ y

$D_{out} = LD_{in}$, queda:

$$D_{in} = S_{21}Z + S_{22}D_{out} + S_{23}u$$

$$D_{in} = S_{21}Z + S_{22}LD_{in} + S_{23}u$$

Despejamos el término $S_{22}LD_{in}$, queda:

$$(I - S_{22}L)D_{in} = S_{21}Z + S_{23}u$$

$$D_{in} = (I - S_{22}L)^{-1} (S_{21}Z + S_{23}u)$$

Si $S_{22} = 0$, la matriz queda:

$$\begin{bmatrix} \overset{o}{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & 0 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix}$$

Y por ende, sus ecuaciones correspondientes son:

$$\overset{o}{x} = S_{11}Z + S_{12}D_{out} + S_{13}u$$

$$D_{in} = S_{21}Z + S_{23}u$$

$$y = S_{31}Z + S_{32}D_{out} + S_{33}u$$

$$Z = FX$$

$$D_{out} = LD_{in}$$

Teniendo en cuenta que $S_{22} = 0$, de los siguientes casos de estudio, encontrar las señales de salida aplicando los siguientes Modelos:

- a) **El Modelo Gráfico en Bond Graph**
- b) **El Modelo Matemático Basado en Estructura de Unión y**
- c) **El Modelo Matemático en Variables (Espacios) de Estado.**

Y demostrar que las señales de salida de los tres modelos sean iguales.

4.2.1. Primer Caso de Estudio

Para comprender un sistema eléctrico se debe analizar por secciones que sean fáciles de visualizar y ubicar en forma física en el sistema eléctrico, razón por lo cual ésta consideración inicia con un caso básico en donde interviene una fuente de voltaje, dos componentes resistivos (Resistencias), dos componentes de almacenamiento de energía (Capacitor e Inductor) y la línea de transporte, dicha descripción se simboliza en la figura 4.1 la cual representa su circuito equivalente.

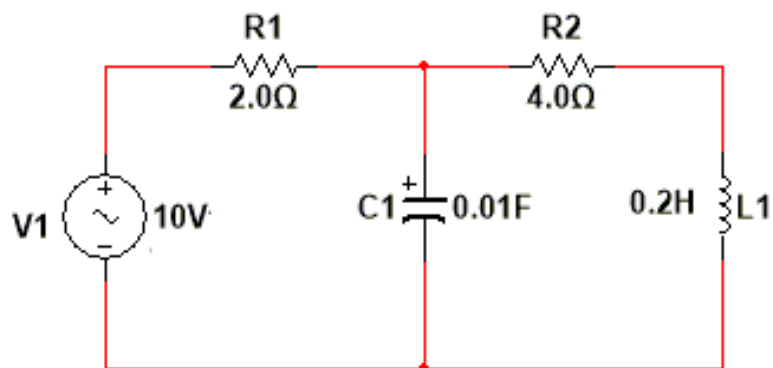


Figura 4.1 Sistema Eléctrico.

a) Modelo Gráfico en Bond Graph

Para dar inicio con la simulación es necesario obtener su modelo en Bond Graph, ya que el Bond Graph es el conjunto de elementos que se ingresan al simulador de 20-Sim para recoger su funcionamiento en una serie de gráficas, la figura 4.2 representa el Bond Graph del circuito ilustrado por la figura 4.1.

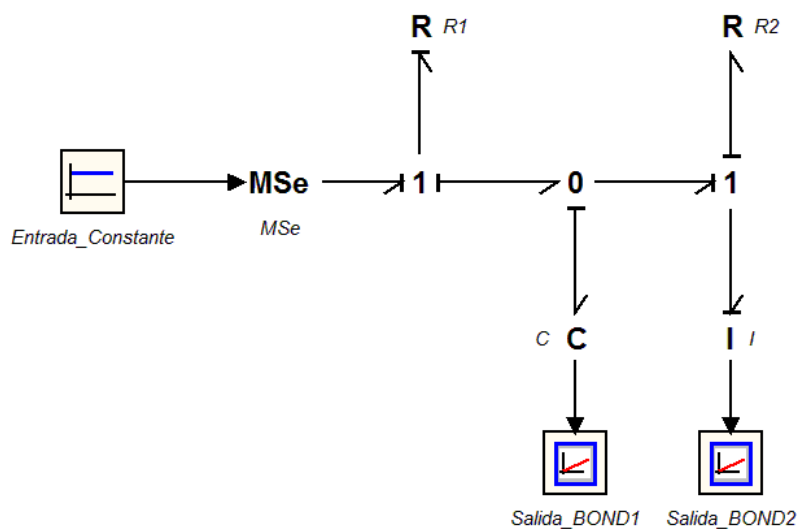


Figura 4.2 Diagrama de Bonds.

Donde:

Entrada Constante = Señal de entrada.

Salida Bond1 y Salida Bond2 = Son las señales de salida.

Los parámetros de los elementos que están involucrados en el circuito son los siguientes:

$$V = 10 \text{ volts}$$

$$R_1 = 2,0 \text{ ohms}$$

$$R_2 = 4,0 \text{ ohms}$$

$$C_1 = 0,01 \text{ faradios}$$

$$L_1 = 0,2 \text{ henrios}$$

(Los valores fueron tomados arbitrariamente).

SIMULACIÓN DEL DIAGRAMA DE BOND GRAPH.

A continuación, se presenta la simulación del Diagrama de Bond Graph, y el resultado que se obtiene al ingresar el diagrama al simulador de 20-Sim son las señales de salida, las cuales son presentadas en la figura 4.3.

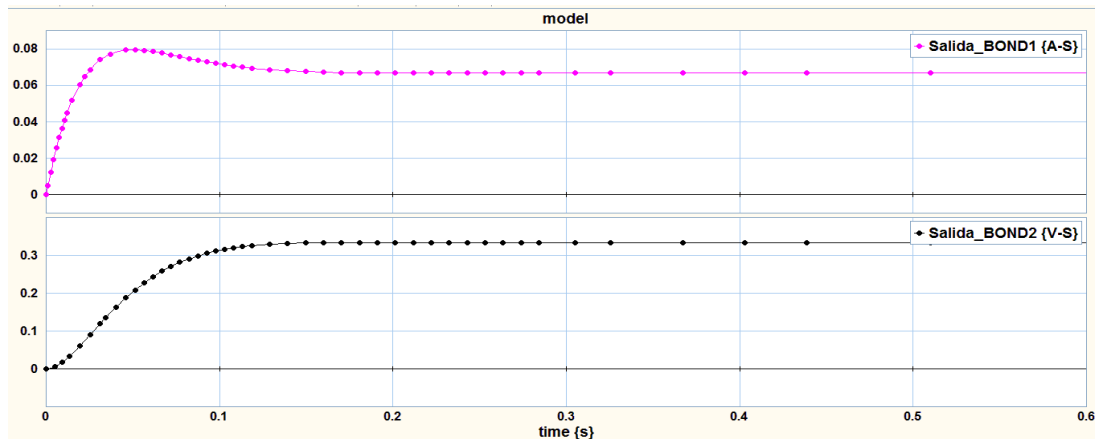


Figura 4.3 Señales de Salida del Diagrama de Bonds.

b) Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión

Para obtener el Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión del Diagrama de Bonds, se deben enumerar los Bonds como lo muestra la figura 4.4.

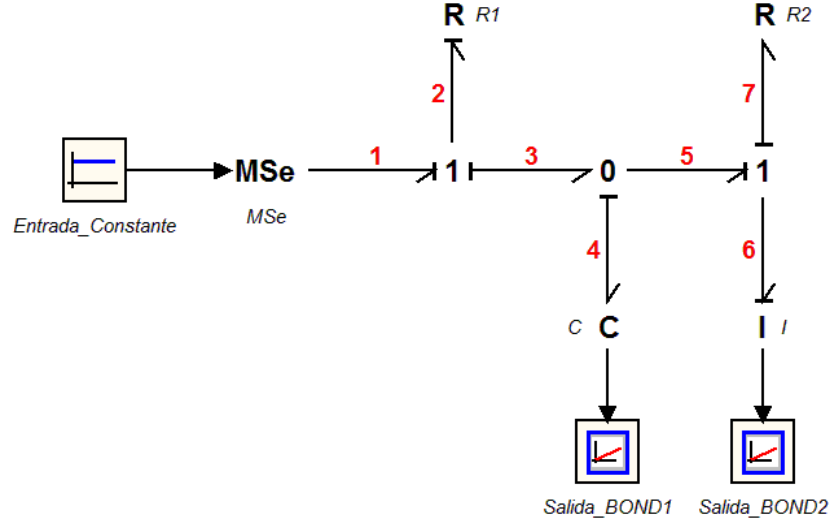


Figura 4.4 Diagrama con Bonds enumerados.

Ahora, proseguimos a sacar los Vectores Clave de la figura 4.4, como se muestra a continuación:

$$u = e_1, \quad x = \begin{bmatrix} q_4 \\ p_6 \end{bmatrix}, \quad \overset{o}{x} = \begin{bmatrix} f_4 \\ e_6 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} e_4 \\ f_6 \end{bmatrix}$$

$$Din = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_7 \end{bmatrix}, \quad Dout = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_7 \end{bmatrix},$$

$$L = diag\left\{\frac{1}{R_1}, R_2\right\}, \quad \text{por ende} \quad L = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$$

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{C_1}, \frac{1}{L_1} \right\} \quad \text{por ende} \quad F = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix}$$

Sacando las Relaciones Constitutivas:

Para $\overset{o}{x}$

$$f_4 = -f_6 + f_2$$

$$e_6 = e_4 - e_7$$

Para Din

$$e_2 = -e_4 - e_1$$

$$f_7 = f_6$$

Para $Dout = LDin$

$$f_2 = \frac{1}{R_1} e_2$$

$$e_7 = R_2 f_7$$

$$e_1 = 1$$

Para $Z = FX$

$$e_4 = \frac{1}{C_1} q_4$$

$$f_6 = \frac{1}{L_1} p_6$$

Para x (*salida*)

$$q_4 = \text{int}(f_4, 0)$$

$$p_6 = \text{int}(e_6, 0)$$

Llenando la Matriz (Estructura de Unión) con las Relaciones Constitutivas, queda:

$$\begin{bmatrix} \overset{o}{x} \\ Din \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} z \\ Dout \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_6 \\ e_2 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e_4 \\ f_6 \\ f_2 \\ e_7 \\ e_1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SIMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO BASADO EN SU ESTRUCTURA DE UNIÓN.

A continuación, en la figura 4.5 se presenta el esquema del Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión y el resultado que se obtiene al ingresar dicho modelo al simulador de 20-Sim son las señales de salida, las cuales son presentadas en la figura 4.6.

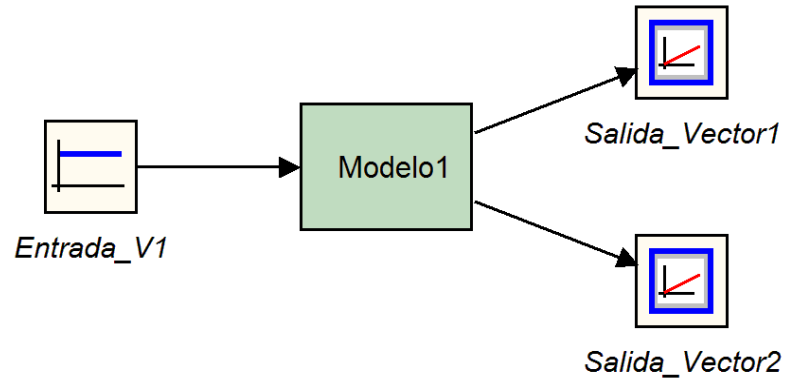


Figura 4.5 Esquema del Modelo Matemático Basado en Estructura de Unión

Donde:

Entrada _ V1 = Señal de entrada.

Salida_ Vector1 y Salida_ Vector1 = Son las señales de salida.

Modelo 1: Contiene el siguiente código:

CÓDIGO: "MODELO 1"PROGRAMADO EN 20-SIM

parameters

real R1= 2.0, R2= 4.0, C1= 0.01, L1= 0.2;

variables

real f4,e6,e4,f6,e2,f7,f2,e7,q4,p6,e1;

equations

f4=-f6+f2;

e6=e4-e7;

```

e2=-e4+e1;

f7=f6;

e4=(1/C1)*q4;

f6=(1/L1)*p6;

f2=(1/R1)*e2;

e7=R2*f7;

q4=int(f4,0);

p6=int(e6,0);

e1=V1;

o_1=q4;

o_2=p6;

```

Con el código anteriormente descrito, se obtiene la simulación de la figura 4.5. la cual muestra las dos señales de salida y dichas señales se pueden observar en la figura 4.6.

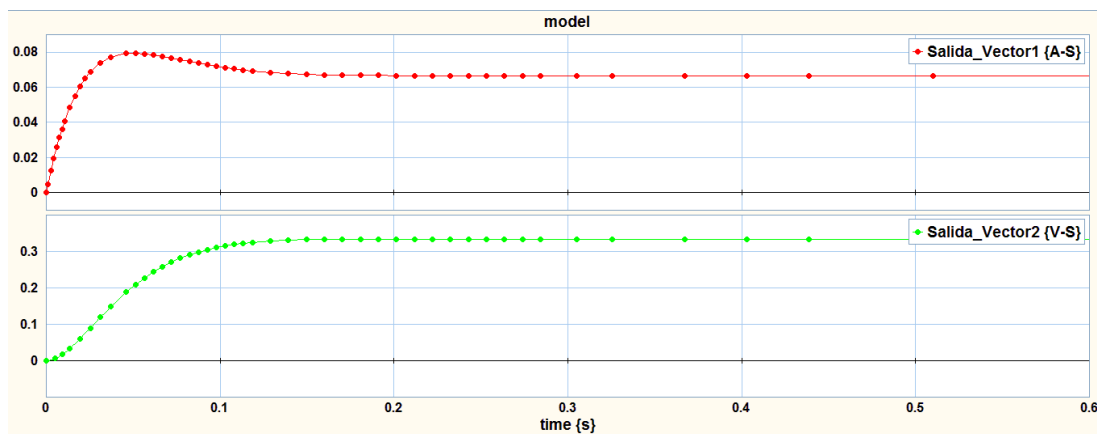


Figura 4.6 Señales de Salida del Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión.

c) Modelo Matemático en Variables (espacio) de Estado

Para sacar el Modelo Matemático en Variables de Estado del sistema, se requiere usar la siguiente ecuación, llamada Ecuación en Variables de Estado:

$$\dot{\overset{o}{X}} = Ax + Bu$$

Y para poder llegar a dicha ecuación, se deben usar las siguientes ecuaciones:

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1}$$

$$A = [S_{11} + S_{12}MS_{21}] * [F]$$

$$B = [S_{13} + S_{12}MS_{23}]$$

Ahora, partiendo de:

$$\begin{bmatrix} \dot{\overset{o}{x}} \\ Din \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} z \\ Dout \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_6 \\ e_2 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e_4 \\ f_6 \\ f_2 \\ e_7 \\ e_1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, se tiene la siguiente matriz:

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sacando transpuesta de S_{12}^t , queda:

$$S_{12}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ transpose: } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ahora aplicamos $-S_{12}^t$, nos queda:

$$-S_{12}^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por último eliminamos transpuesta y signo negativo de $-S_{12}^t$, lo cual nos queda

S_{21} :

$$S_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proseguimos entonces a calcular la ecuación:

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1}$$

Sabemos que el elemento de la matriz $S_{22} = 0$, por ende $M = L$

Entonces decimos que:

$$[S_{12}] * [L] \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix}$$

$$[S_{12}L] * [S_{21}]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix}$$

$$[S_{11}] + [S_{12}MS_{21}]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & -1 \\ 1 & -R_2 \end{bmatrix}$$

Ahora, Calculamos la Matriz A, con la siguiente ecuación:

$$A = [S_{11} + S_{12}MS_{21}] * [F]$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & -1 \\ 1 & -R_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{L_1} R_2 \end{bmatrix}$$

por ende:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{L_1} R_2 \end{bmatrix}$$

Calculando la Matriz B:

$$[S_{12}M] * [S_{23}]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, usando la siguiente ecuación (Matriz B), queda:

$$B = [S_{13} + S_{12}MS_{23}]$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

por ende

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para finalizar, se utiliza la ecuación de variables de estado, como sigue:

$$\overset{o}{\dot{X}} = Ax + Bu$$

Sustituimos valores y nos queda el resultado final del Modelo Matemático en Variables de estado:

$$\overset{o}{\dot{X}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{L_1} R_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

SIMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO EN VARIABLES (ESPACIOS) DE ESTADO.

A continuación, en la figura 4.7 se presenta el esquema del Modelo Matemático en Variables (Espacios) de Estado, y el resultado que se obtiene al ingresar dicho modelo al simulador de 20-Sim son las señales de salida, las cuales son presentadas en la figura 4.8.

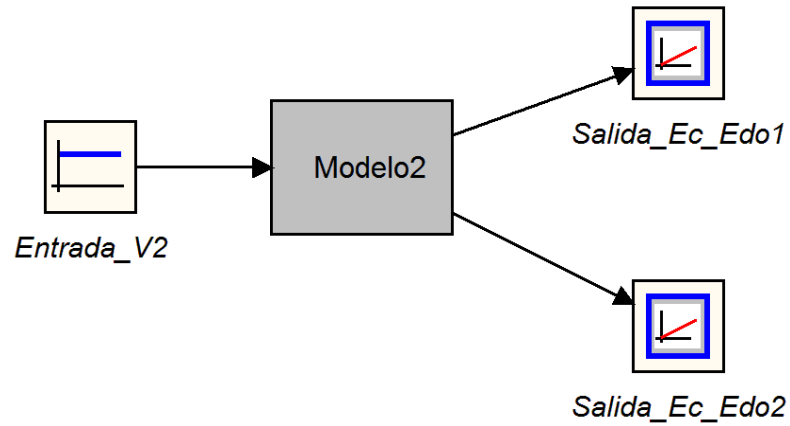


Figura 4.7 Esquema del Modelo Matemático en Variables (espacios) de Estado.

Donde:

Entrada _ V2 = Señal de entrada.

Salida_Ec_Edo1 y Salida_Ec_Edo2 = Son las señales de salida.

Modelo 2: Contiene el siguiente código:

CÓDIGO: "MODELO 2"PROGRAMADO EN 20-SIM

parameters

real R1= 2.0, R2= 4.0, C1= 0.01, L1= 0.2;

variables

real A11,A12,A21,A22,B1,B2;

real dx1,dx2,x1,x2,u;

equations

*dx1=A11*x1+A12*x2+B1*u;*

$$dx2=A21*x1+A22*x2+B2*u;$$

$$A11=-1/(R1*C1);$$

$$A12=-1/L1;$$

$$A21=1/C1;$$

$$A22=-R2/L1;$$

$$u=V1;$$

$$B1=1/R1;$$

$$B2=0;$$

$$x1=int(dx1,0);$$

$$x2=int(dx2,0);$$

$$o_1=x1;$$

$$o_2=x2;$$

Con el código anteriormente descrito, se obtiene la simulación de la figura 4.7. la cual muestra las dos señales de salida y dichas señales se pueden observar en la figura 4.8.

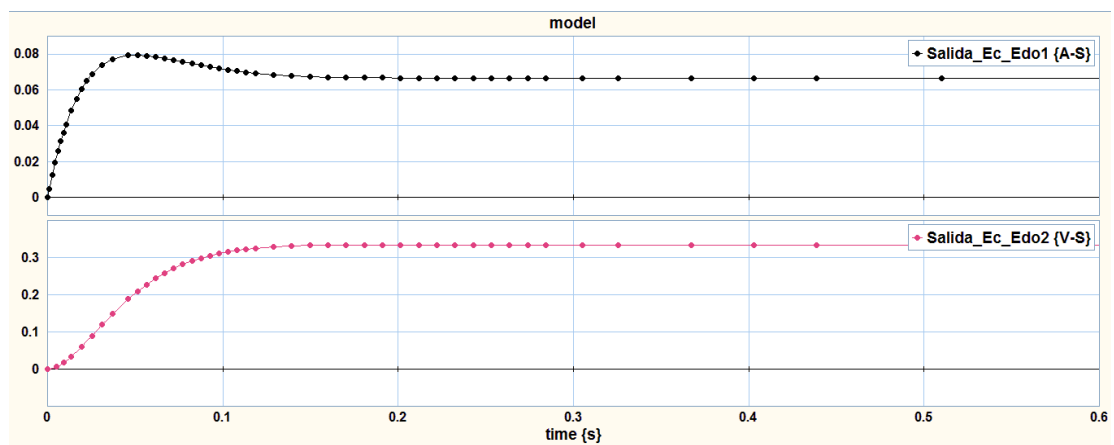


Figura 4.8 Señales de Salida del Modelo Matemático en Variables (espacios) de Estado.

A continuación se presentarán las gráficas donde se mostrarán las señales de salida de los tres modelos anteriormente simulados, los cuales son los siguientes:

- a) El Modelo Gráfico en Bond Graph
- b) El Modelo Matemático Basado en Estructura de Unión
- c) El Modelo Matemático en Variables (Espacios) de Estado.

De los modelos anteriormente descritos, se puede concluir que las señales de salida son iguales, tal como lo muestran las siguientes figuras.

La figura 4.9 muestra la Gráfica de la Primera señal de salida de los modelos a), b) y c) (por separado), y por consiguiente se puede observar que las tres señales son iguales:

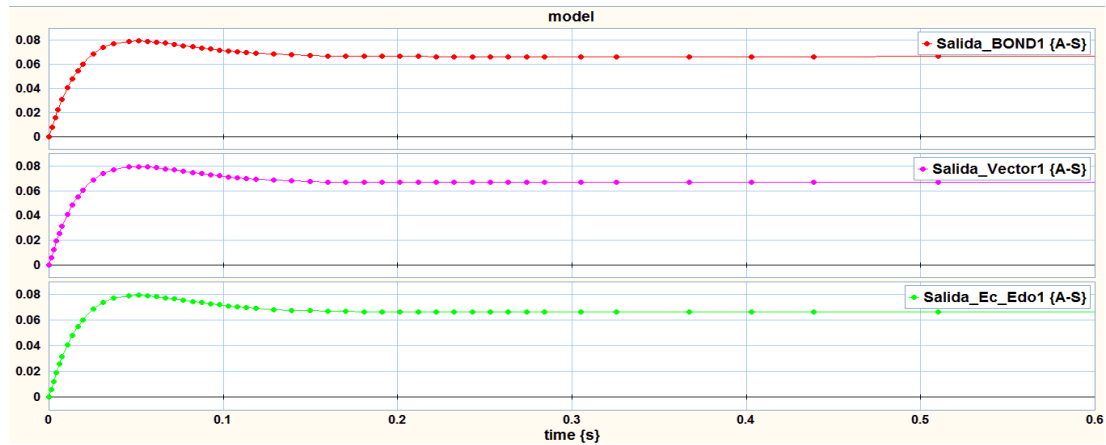


Figura 4.9 Primer señal de Salida de los Modelos a), b) y c).

En la figura 4.10 se puede observar que al juntar los Modelos a), b) y c) se comprueba que efectivamente da como resultado una sola señal, la cual se muestra a continuación:

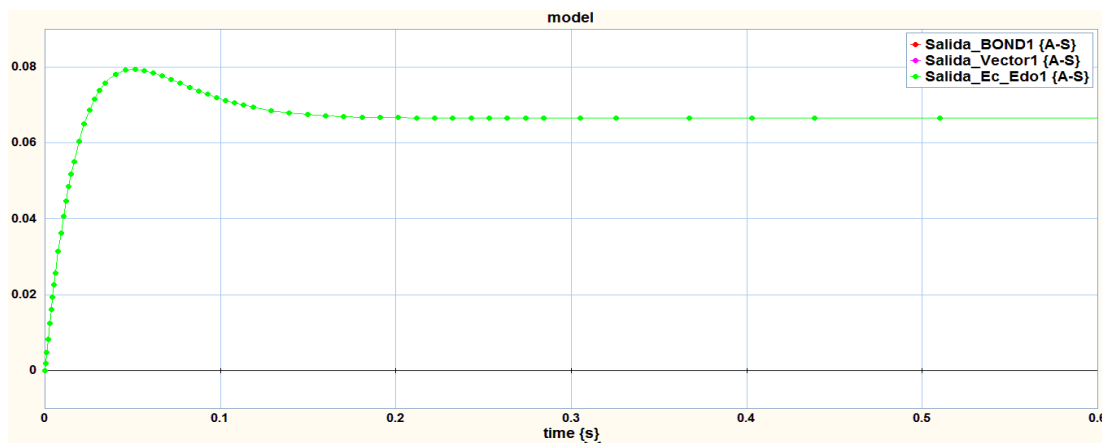


Figura 4.10 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).

La figura 4.11 muestra la Gráfica de la Segunda señal de salida de los modelos a), b) y c) (por separado), y por lo cual se observa que las tres señales también son iguales:

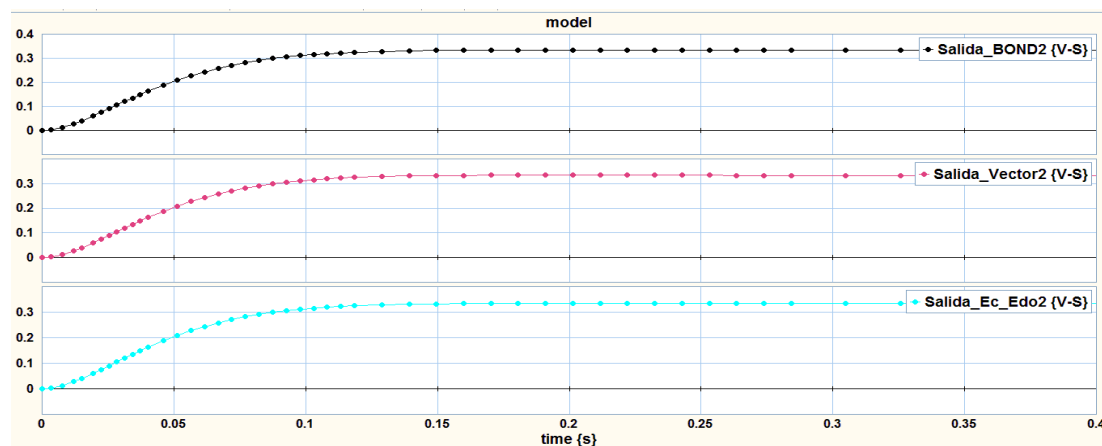


Figura 4.11 Segunda señal de Salida de los Modelos a), b) y c).

En la figura 4.12 se observa que al juntar los Modelos a), b) y c) se demuestra que efectivamente da como resultado una sola señal, la cual se muestra a continuación:

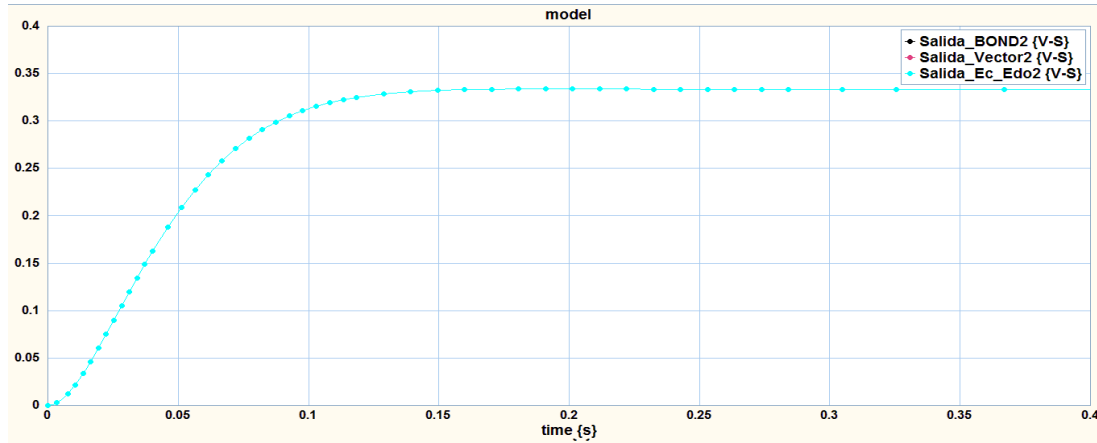


Figura 4.12 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).

Para finalizar, En la figura 4.13 se presenta la Gráfica con las 6 señales de salida (por separado) y en la figura 4.14 se presenta la Gráfica con las 6 señales de salida (juntas) de los Modelos a), b) y c), las cuales se denotan a continuación:

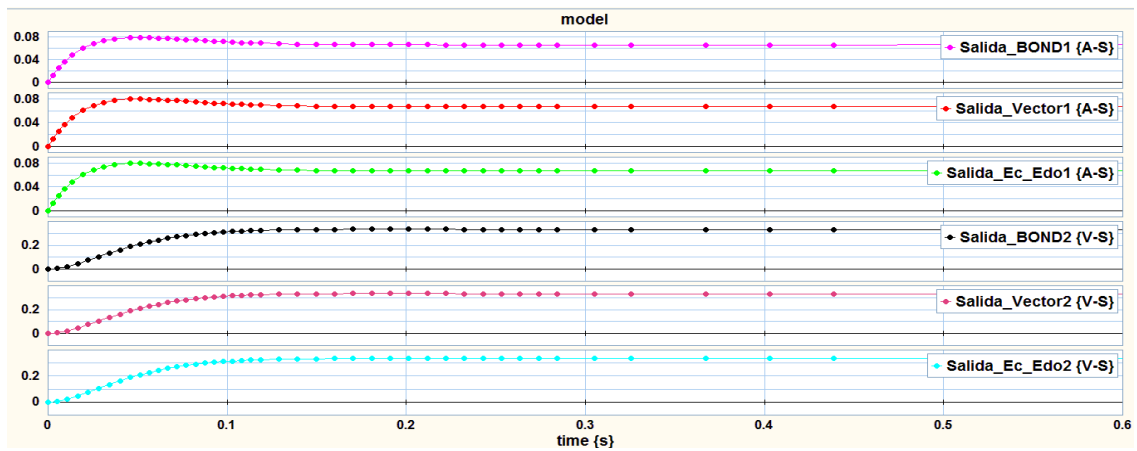


Figura 4.13 Gráfica con las 6 Señales de Salida (por separado) de los Modelos a), b) y c).

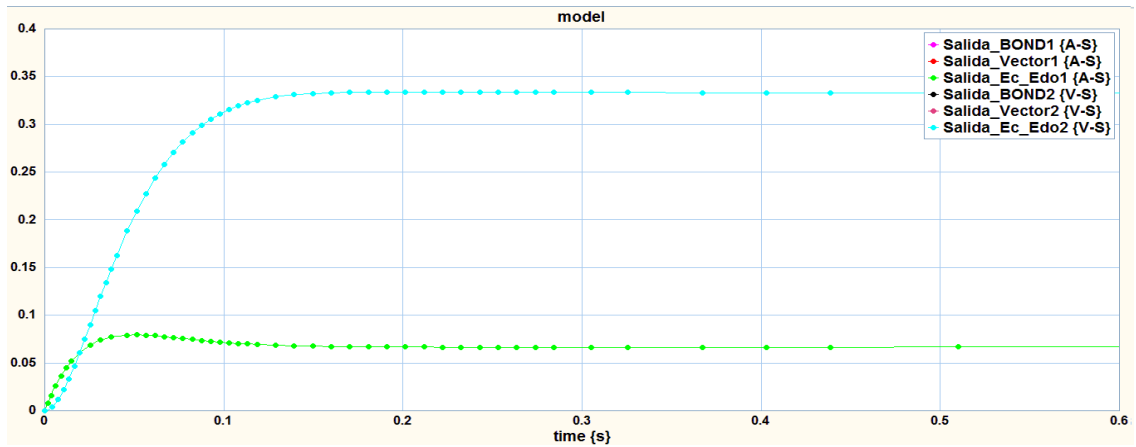


Figura 4.14 Gráfica con las 6 Señales de Salida (juntas) de los Modelos a), b) y c).

En éste Primer Caso de Estudio, se demostró que en las Gráficas (*tanto en la Primer señal de Salida como en la Segunda señal de salida*) los resultados fueron óptimos, ya que se compararon las salidas de los Modelos *a)*, *b)* y *c)* arrojando como resultado semejanza en las salidas de señal.

4.2.2. Segundo Caso de Estudio

Para el segundo caso de estudio, ahora se tiene un circuito eléctrico en donde interviene una fuente de voltaje, dos componentes resistivos (Resistencias), cinco componentes de almacenamiento de energía; tres Capacitivos y dos Inductivos. Y la línea de transporte, dicha descripción se simboliza en la figura 4.15, la cual representa su circuito equivalente.

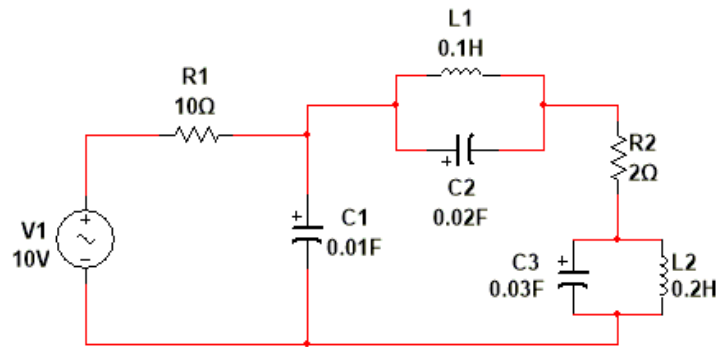


Figura 4.15 Sistema Eléctrico.

a) Modelo Gráfico en Bond Graph

Para dar inicio con la simulación es necesario obtener su modelo en Bond Graph, ya que el Bond Graph es el conjunto de elementos que se ingresan al simulador de 20-Sim para recoger su funcionamiento en una serie de gráficas, la figura 4.16 representa el Bond Graph del circuito eléctrico ilustrado por la figura 4.15.

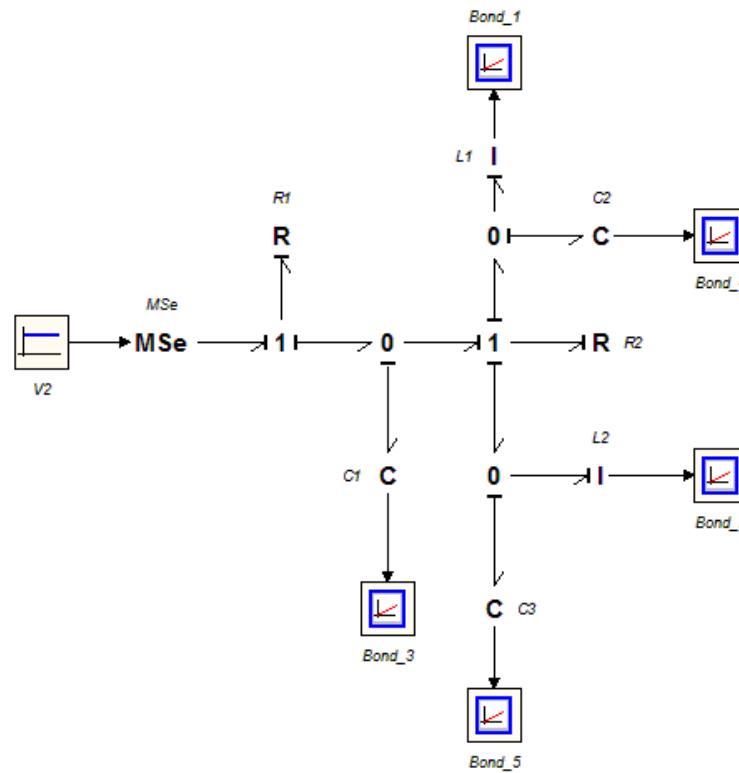


Figura 4.16 Diagrama de Bonds.

Donde:

V_2 = Señal de entrada.

$Bond1$, $Bond2$, $Bond3$, $Bond4$ y $Bond5$ = Son las señales de salida.

Los parámetros de los elementos que están involucrados en el circuito son los siguientes:

$$V_1 = 10 \text{ volts}$$

$$R_1 = 10 \text{ ohms} \quad y \quad R_2 = 2 \text{ ohms}$$

$$C_1 = 0,01 \text{ faradios}, \quad C_2 = 0,02 \text{ faradios} \quad y \quad C_3 = 0,03 \text{ faradios}$$

$$L_1 = 0,1 \text{ henrios} \quad y \quad L_2 = 0,2 \text{ henrios}.$$

(Los valores fueron tomados arbitrariamente).

SIMULACIÓN DEL DIAGRAMA DE BOND GRAPH.

A continuación, se presenta la simulación del Diagrama de Bond Graph, y el resultado que se obtiene al ingresar el diagrama al simulador de 20-Sim son las cinco señales de salida, las cuales son presentadas en la figura 4.17.

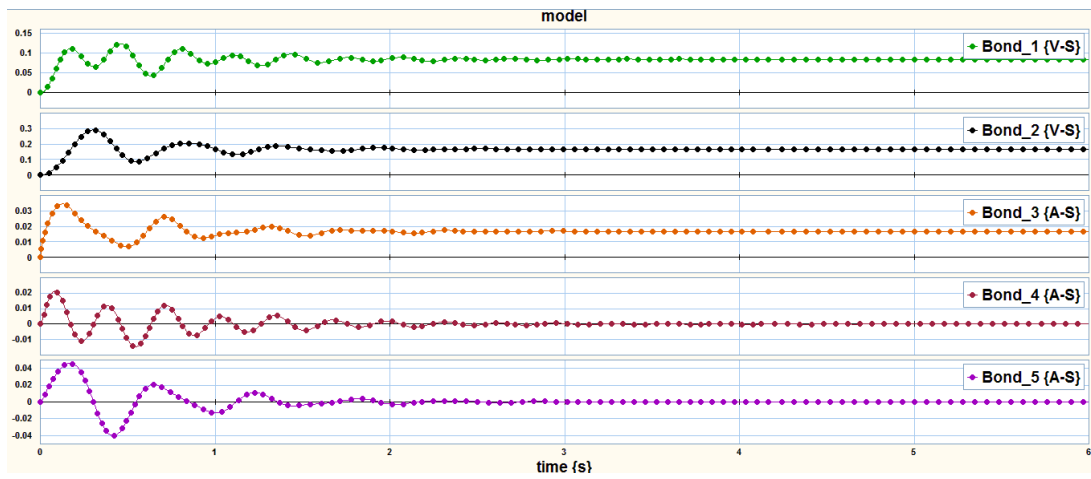


Figura 4.17 Señales de Salida del Diagrama de Bonds.

b) Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión

Para obtener el Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión del Diagrama de Bonds, se deben enumerar los Bonds como lo muestra la figura 4.18.

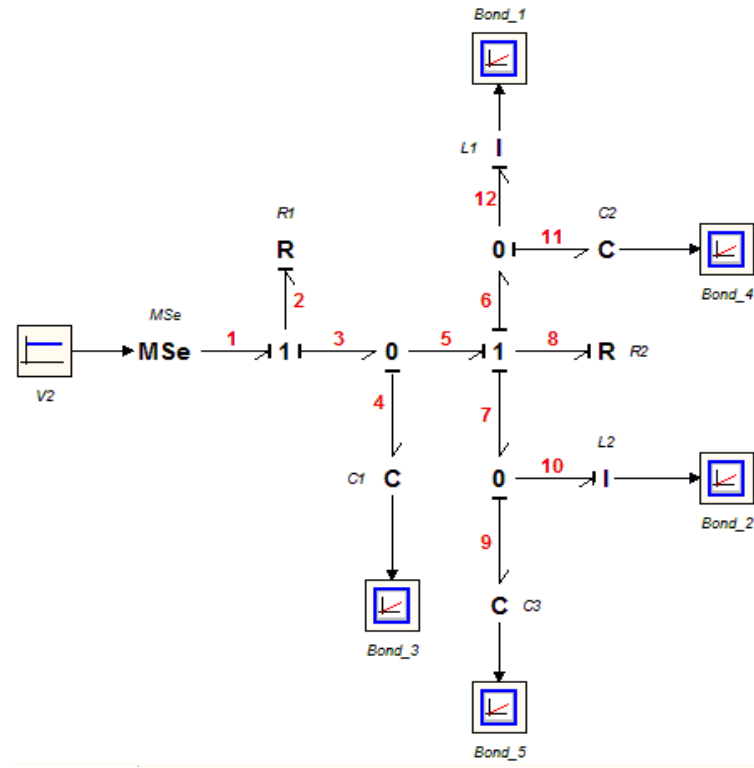


Figura 4.18 Diagrama con Bonds enumerados.

Ahora, proseguimos a sacar los Vectores Clave de la figura 4.4, como se muestra a continuación:

$$u = e_1, \quad x = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{10} \\ q_4 \\ q_{11} \\ q_9 \end{bmatrix}, \quad \overset{o}{x} = \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{10} \\ f_4 \\ f_{11} \\ f_9 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{10} \\ e_4 \\ e_{11} \\ e_9 \end{bmatrix}$$

$$Din = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_8 \end{bmatrix}, \quad Dout = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_8 \end{bmatrix},$$

$$L = \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2} \right\}, \quad \text{por ende} \quad L = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2}, \frac{1}{C_1}, \frac{1}{C_2}, \frac{1}{C_3} \right\} \quad \text{por ende} \quad F = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix}$$

Sacando las Relaciones Constitutivas:

Para $\overset{o}{x}$

$$e_{12} = e_{11}$$

$$e_{10} = e_9$$

$$f_4 = f_2 - f_8$$

$$f_{11} = f_8 - f_{12}$$

$$f_9 = f_8 - f$$

Para Din

$$e_2 = e_1 - e_4$$

$$e_8 = e_4 - e_{11} - e_9$$

Para $Dout = LDin$

$$f_2 = \frac{1}{R_1} e_2$$

$$e_7 = \frac{1}{R_2} e_8$$

Para $Z = FX$

$$f_{12} = \frac{1}{L_1} p_{12}$$

$$f_{10} = \frac{1}{L_2} p_{10}$$

$$e_4 = \frac{1}{C_1} q_4$$

$$e_{11} = \frac{1}{C_2} q_{11}$$

$$e_9 = \frac{1}{C_3} q_9$$

Para x (*salidas*)

$$p_{12} = \text{int}(e_{12}, 0)$$

$$p_{10} = \text{int}(e_{10}, 0)$$

$$q_4 = \text{int}(f_4, 0)$$

$$q_{11} = \text{int}(f_{11}, 0)$$

$$q_9 = \text{int}(f_9, 0)$$

Llenando la Matriz (Estructura de Unión) con las Relaciones Constitutivas, queda:

$$\begin{bmatrix} \overset{o}{x} \\ Din \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} z \\ Dout \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_9 \\ e_{11} \\ f_4 \\ f_{10} \\ f_{12} \\ e_2 \\ e_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f_9 \\ f_{11} \\ e_4 \\ e_{10} \\ e_{12} \\ f_2 \\ f_8 \\ e_1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SIMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO BASADO EN SU ESTRUCTURA DE UNIÓN.

A continuacion, en la figura 4.19 se presenta el esquema del Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión y el resultado que se obtiene al ingresar dicho modelo al

simulador de 20-Sim son las cinco señales de salida, las cuales son presentadas en la figura 4.20.

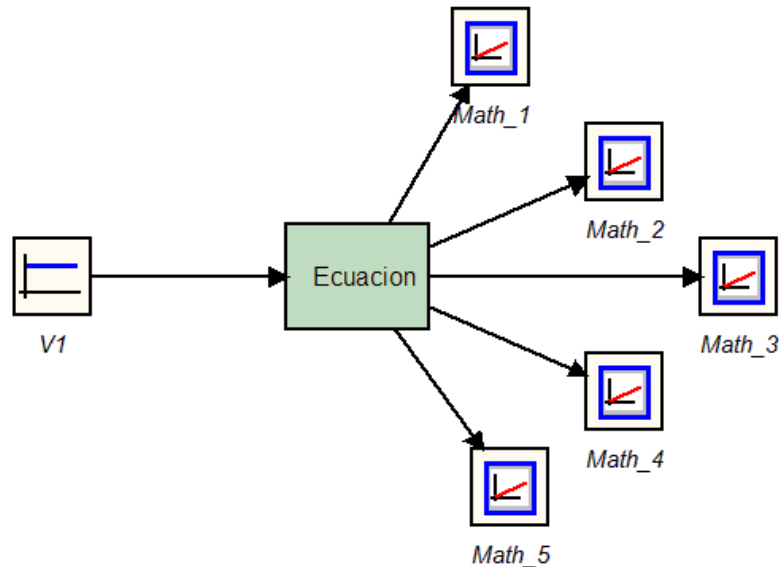


Figura 4.19 Esquema del Modelo Matemático Basado en Estructura de Unión

Donde:

Entrada _ V1 = Señal de entrada.

Math 1, Math 2, Math 3, Math 4 y Math 5 = Son las señales de salida.

El recuadro de nombre "**Ecuación**" contiene el siguiente código:

CÓDIGO: 'Ecuación' PROGRAMADO EN 20-SIM

parameters

real R1= 10.0, R2= 2.0, C1= 0.01, C2=0.02, C3= 0.03, L1= 0.1, L2=0.2;

variables

real e1,p12,p10,q4,q11,q9,e12,e10,f4,f11,f9,f12,f10,e4,e11,e9,e2,e8,f2,f8;

equations

$$e12=e11;$$

$$e10=e9;$$

$$f4=f2-f8;$$

$$f11=f8-f12;$$

$$f9=f8-f10;$$

$$e2=e1-e4;$$

$$e8=e4-e11-e9;$$

$$f12=(1/L1)*p12;$$

$$f10=(1/L2)*p10;$$

$$e4=(1/C1)*q4;$$

$$e11=(1/C2)*q11;$$

$$e9=(1/C3)*q9;$$

$$f2=(1/R1)*e2;$$

$$f8=(1/R2)*e8;$$

$$p12=\text{int}(e12,0);$$

$$p10=\text{int}(e10,0);$$

$$q4=\text{int}(f4,0);$$

$$q11=\text{int}(f11,0);$$

$$q9=\text{int}(f9,0);$$

$$e1=V1;$$

//Salidas

o_1=p12;

o_2=p10;

o_3=q4;

o_4=q11;

o_5=q9;

Con el código anteriormente descrito, se obtiene la simulación de la figura 4.19. la cual muestra las cinco señales de salida dichas señales se pueden observar en la figura 4.20.

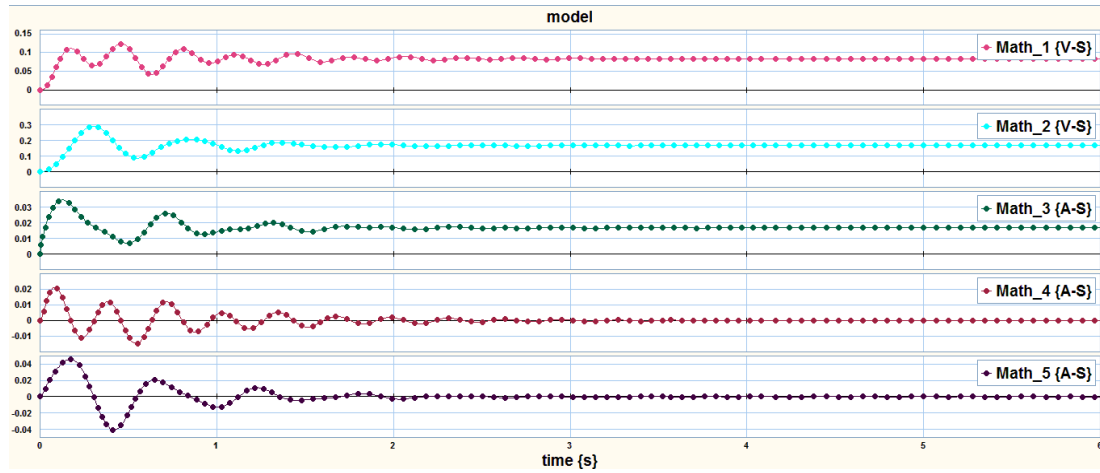


Figura 4.20 Señales de Salida del Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión.

c) Modelo Matemático en Variables (espacio) de Estado

Para sacar el Modelo Matemático en Variables de Estado del sistema, se requiere usar la siguiente ecuación, llamada Ecuación en Variables de Estado:

$$\dot{X} = Ax + Bu$$

Y para poder llegar a dicha ecuación, se deben usar las siguientes ecuaciones:

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1}$$

$$A = [S_{11} + S_{12}MS_{21}] * [F]$$

$$B = [S_{13} + S_{12}MS_{23}]$$

Ahora, partiendo de:

$$\begin{bmatrix} \overset{o}{x} \\ Din \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} z \\ Dout \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_9 \\ e_{11} \\ f_4 \\ f_{10} \\ f_{12} \\ e_2 \\ e_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f_9 \\ f_{11} \\ e_4 \\ e_{10} \\ e_{12} \\ f_2 \\ f_8 \\ e_1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, se tiene la siguiente matriz:

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sacando transpuesta de S_{12}^t , queda:

$$S_{12}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ transpose: } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ahora aplicamos $-S_{12}^t$, nos queda:

$$-S_{12}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por último eliminamos transpuesta y signo negativo de $-S_{12}^t$, lo cual nos queda

S_{21} :

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Proseguimos entonces a calcular la ecuación:

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1}$$

Sabemos que el elemento de la matriz $S_{22} = 0$, por ende $M = L$

Entonces decimos que:

$$[S_{12}] * [L]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & \frac{1}{R_2} \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

$$[S_{12}M] * [S_{21}]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & \frac{1}{R_2} \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

$$[S_{11}] + [S_{12}MS_{21}]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

Ahora, Calculamos la Matriz A, con la siguiente ecuación:

$$A = [S_{11} + S_{12}MS_{21}] * [F]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{C_2 R_2} & \frac{1}{C_3 R_2} \\ -\frac{1}{L_1} & 0 & \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_3 R_2} \\ 0 & -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_3 R_2} \end{bmatrix}$$

por ende:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{C_2 R_2} & \frac{1}{C_3 R_2} \\ -\frac{1}{L_1} & 0 & \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_3 R_2} \\ 0 & -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_3 R_2} \end{bmatrix}$$

Calculando la Matriz B:

$$[S_{12}M] * [S_{23}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & \frac{1}{R_2} \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, usando la siguiente ecuación (Matriz B), queda:

$$B = [S_{13} + S_{12}M S_{23}]$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por ende, la matriz B queda:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para finalizar, se utiliza la ecuación de variables de estado, como sigue:

$$\overset{o}{\dot{X}} = Ax + Bu$$

Sustituimos los valores de la Matriz A y los valores de la Matriz B, para así, tener resultado final del Modelo Matemático en Variables de estado:

$$\overset{o}{\dot{X}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{L_1} R_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\overset{o}{\dot{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{C_2 R_2} & \frac{1}{C_3 R_2} \\ -\frac{1}{L_1} & 0 & \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_3 R_2} \\ 0 & -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_3 R_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

SIMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO EN VARIABLES (ESPACIOS) DE ESTADO.

A continuación, en la figura 4.21 se presenta el esquema del Modelo Matemático en Variables (Espacios) de Estado, y el resultado que se obtiene al ingresar dicho modelo al simulador de 20-Sim son las señales de salida, las cuales son presentadas en la figura 4.22

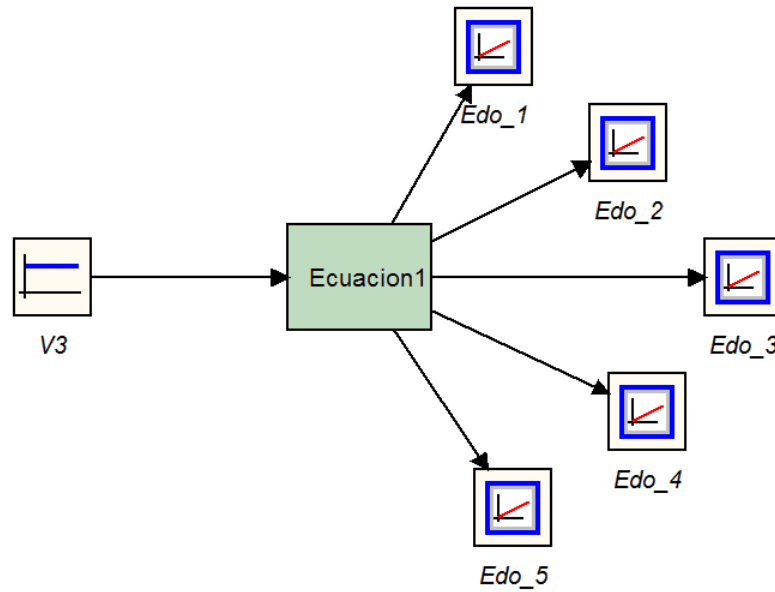


Figura 4.21 Esquema del Modelo Matemático en Variables (espacios) de Estado.

Donde:

Entrada _ V3 = Señal de entrada.

Edo_1, Edo_2, Edo_3, Edo_4 y Edo_5 = Son las señales de salida.

Ecuación 1: Contiene el siguiente código:

CÓDIGO: 'Ecuación' PROGRAMADO EN 20-SIM

parameters

```
real R1= 10.0, R2= 2.0, C1= 0.01, C2=0.02, C3= 0.03, L1= 0.1, L2=0.2;
```

variables

```
real A11,A12,A13,A14,A15;
```

```
real A21,A22,A23,A24,A25;
```

```
real A31,A32,A33,A34,A35;
```

```
real A41,A42,A43,A44,A45;
```

```
real A51,A52,A53,A54,A55;
```

```
real B1,B2,B3,B4,B5;
```

```
real dx1,dx2,dx3,dx4,dx5;
```

```
real x1,x2,x3,x4,x5;
```

```
real u;
```

equations

```
dx1=A11*x1+A12*x2+A13*x3+A14*x4+A15*x5+B1*u;
```

```
dx2=A21*x1+A22*x2+A23*x3+A24*x4+A25*x5+B2*u;
```

```
dx3=A31*x1+A32*x2+A33*x3+A34*x4+A35*x5+B3*u;
```

```
dx4=A41*x1+A42*x2+A43*x3+A44*x4+A45*x5+B4*u;
```

```
dx5=A51*x1+A52*x2+A53*x3+A54*x4+A55*x5+B5*u;
```

```
A11=0;
```

```
A12=0;
```

```
A13=0;
```

$$A_{14}=1/C_2;$$

$$A_{15}=0;$$

$$A_{21}=0;$$

$$A_{22}=0;$$

$$A_{23}=0;$$

$$A_{24}=0;$$

$$A_{25}=1/C_3;$$

$$A_{31}=0;$$

$$A_{32}=0;$$

$$A_{33}=-((R_2+R_1)/(R_1*R_2*C_1));$$

$$A_{34}=1/(C_2*R_2);$$

$$A_{35}=1/(C_3*R_2);$$

$$A_{41}=-1/L_1;$$

$$A_{42}=0;$$

$$A_{43}=1/(C_1*R_2);$$

$$A_{44}=-1/(C_2*R_2);$$

$$A_{45}=-1/(C_3*R_2);$$

$$A_{51}=0;$$

$$A_{52}=-1/L_2;$$

$$A_{53}=1/(C_1*R_2);$$

$$A_{54}=-1/(C_2*R_2);$$

$$A_{55}=-1/(C_3*R_2);$$

```

u=V1;

B1=0;

B2=0;

B3=1/R1;

B4=0;

B5=0;

x1=int(dx1,0);

x2=int(dx2,0);

x3=int(dx3,0);

x4=int(dx4,0);

x5=int(dx5,0);

// salidas

o_1=x1;

o_2=x2;

o_3=x3;

o_4=x4;

o_5=x5;

```

Con el código anteriormente descrito, se obtiene la simulación de la figura 4.21. la cual muestra las dos señales de salida y dichas señales se pueden observar en la figura 4.22.

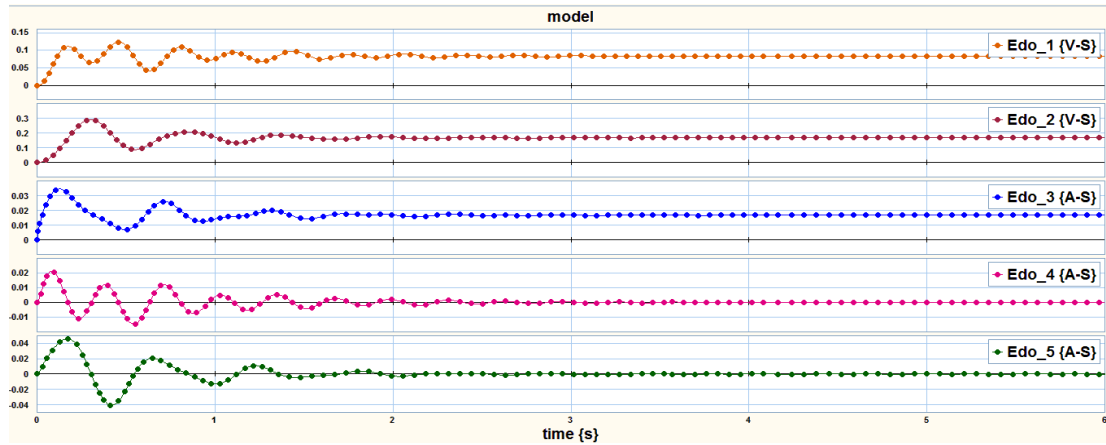


Figura 4.22 Señales de Salida del Modelo Matemático en Variables (espacios) de Estado.

A continuación se presentarán las gráficas donde se mostrarán las señales de salida de los tres modelos anteriormente simulados, los cuales son los siguientes:

- El Modelo Gráfico en Bond Graph
- El Modelo Matemático Basado en Estructura de Unión
- El Modelo Matemático en Variables (Espacios) de Estado.

De los modelos anteriormente descritos, se puede concluir que las señales de salida son iguales, tal como lo muestran las siguientes figuras.

La figura 4.23 muestra la Gráfica de la Primera señal de salida de los modelos a), b) y c) (por separado), y por consiguiente se puede observar que las tres señales son iguales:}

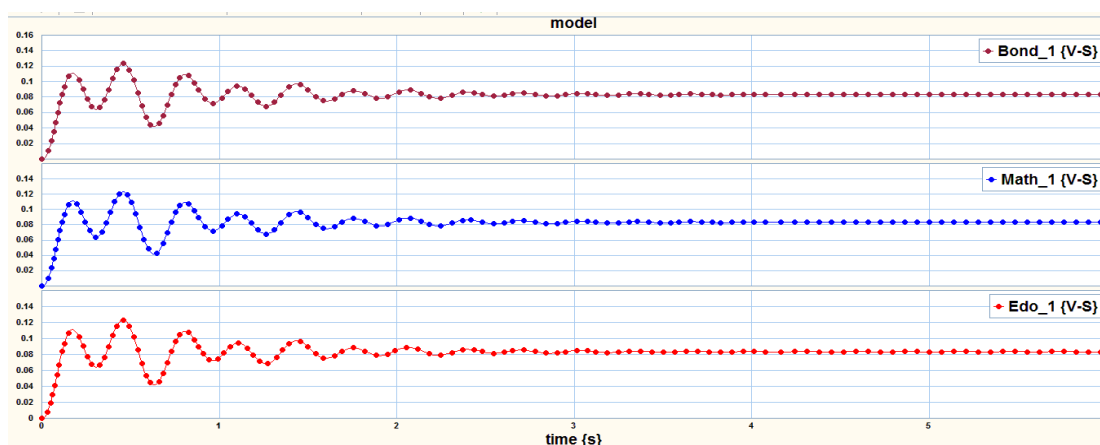


Figura 4.23 Primera señal de Salida de los Modelos a), b) y c).

En la figura 4.24 se puede observar que al juntar los Modelos a), b) y c) se comprueba que efectivamente da como resultado una sola señal (no hay desfase), la cual se muestra a continuación:

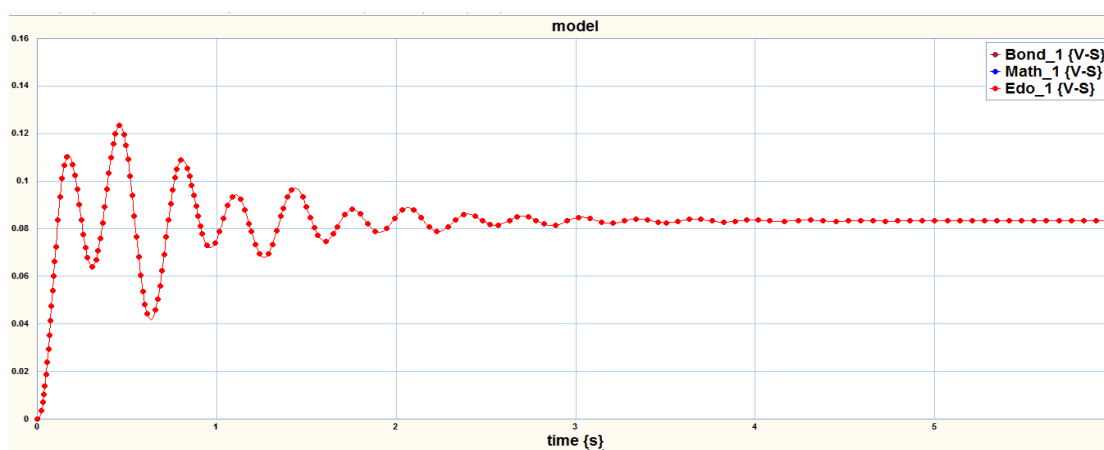


Figura 4.24 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).

La figura 4.25 muestra la Gráfica de la Segunda señal de salida de los modelos a), b) y c) de forma separada, y se denota que las tres señales son iguales:

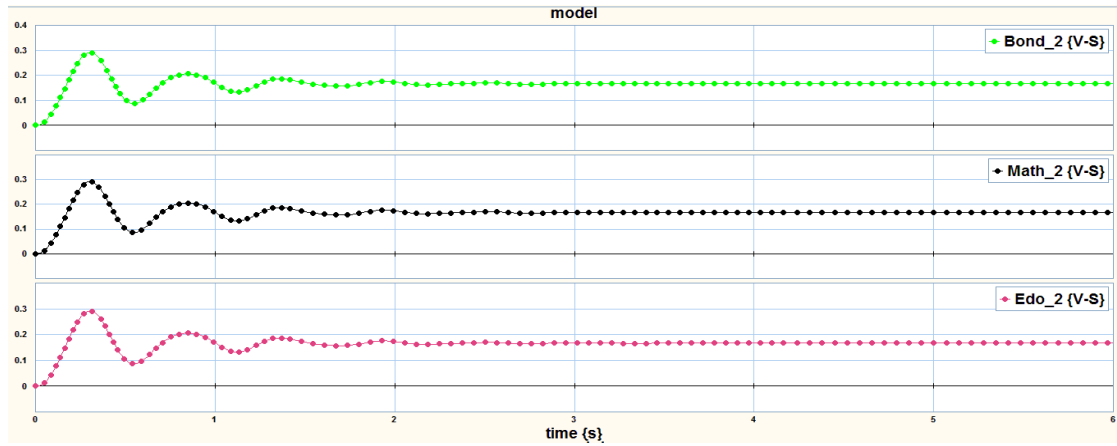


Figura 4.25 Segunda señal de Salida de los Modelos a), b) y c).

En la figura 4.26 se puede observar que al juntar los Modelos a), b) y c) se comprueba que efectivamente da como resultado una sola señal (no hay desfase), la cual se muestra a continuación:

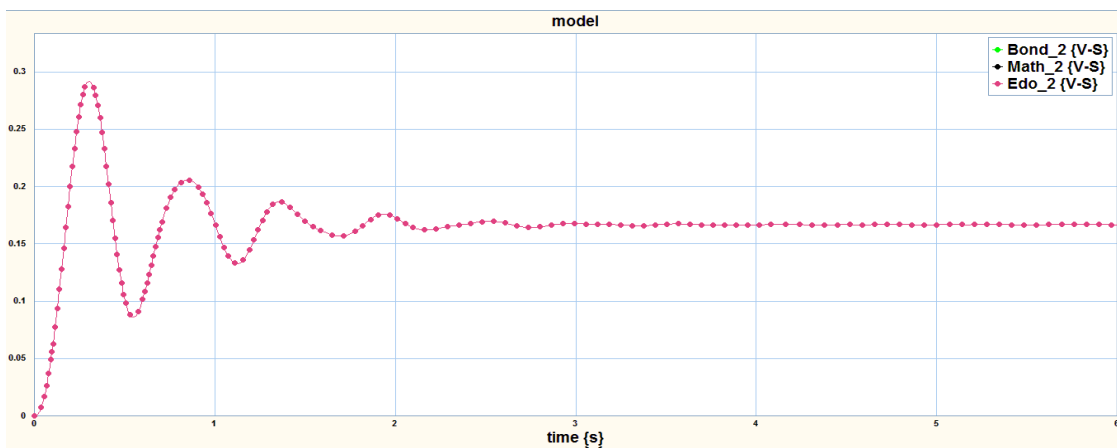


Figura 4.26 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).

La figura 4.27 muestra la Gráfica de la Tercera señal de salida de los modelos a), b) y c) de forma separada, y se puede observar que las tres señales son iguales:

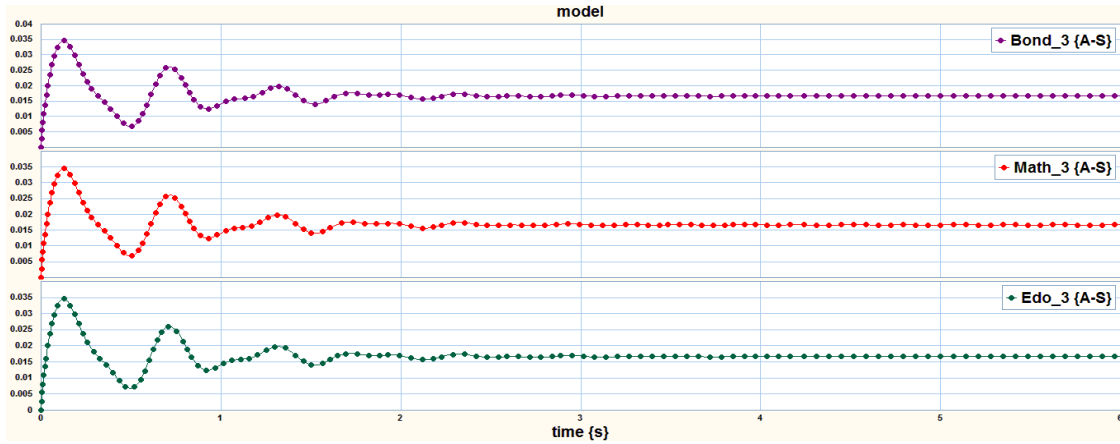


Figura 4.27 Tercera señal de Salida de los Modelos a), b) y c).

En la figura 4.28 se puede observar que al juntar los Modelos a), b) y c) se comprueba que da como resultado una sola señal (no existe desfase), la cual se muestra a continuación:

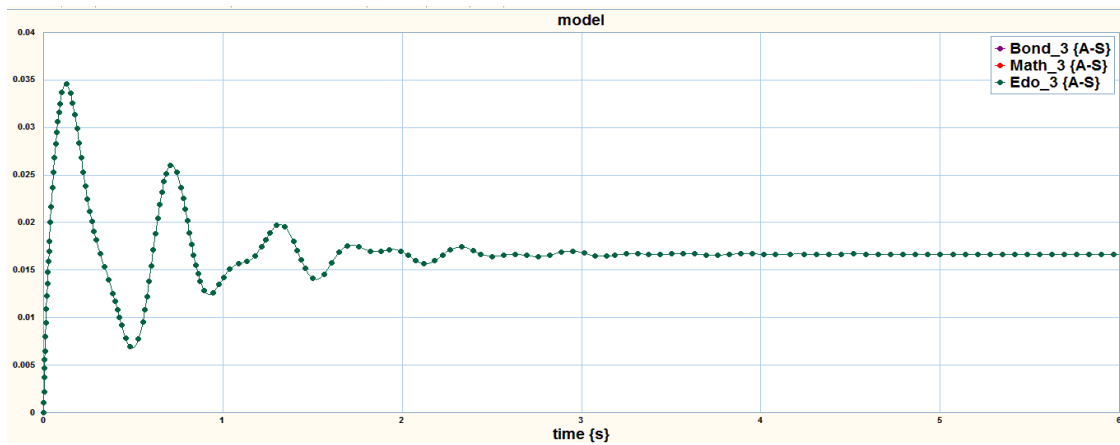


Figura 4.28 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).

La figura 4.29 muestra la Gráfica de la Cuarta señal de salida de los modelos a), b) y c) de forma separada, y se puede observar que las tres señales son iguales:

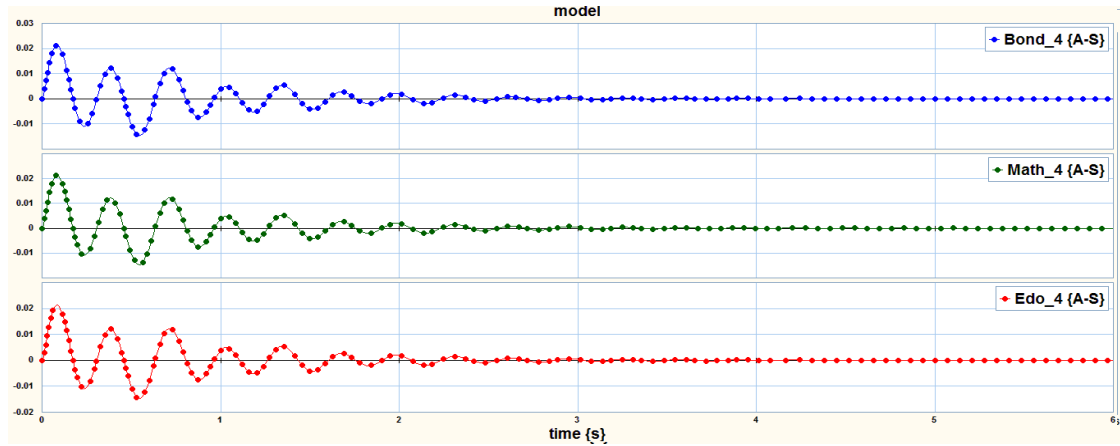


Figura 4.29 Cuarta señal de Salida de los Modelos a), b) y c).

En la figura 4.30 se puede observar que al juntar los Modelos a), b) y c) se comprueba que da como resultado una sola señal (no existe desfase), la cual se muestra a continuación:

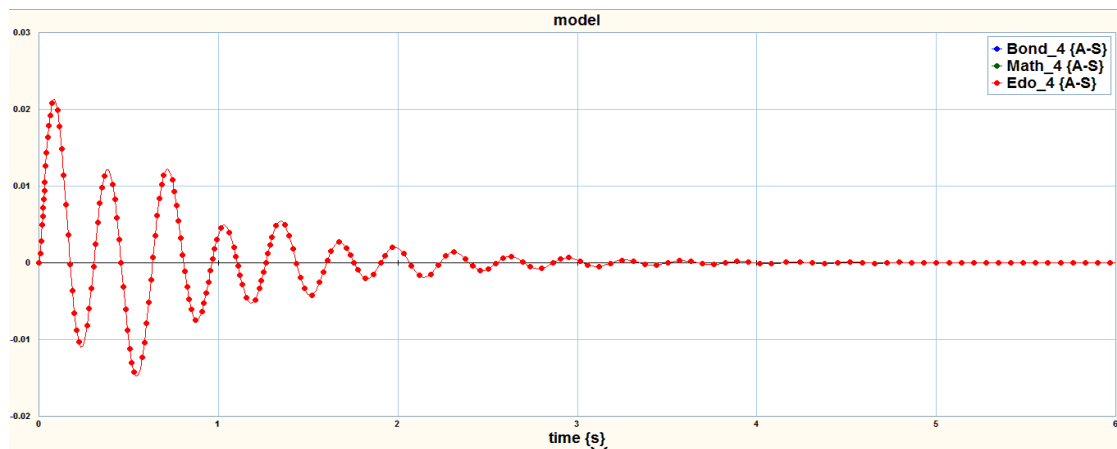


Figura 4.30 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).

La figura 4.31 muestra la Gráfica de la Quinta señal de salida de los modelos a), b) y c) de forma separada, y se puede observar que las tres señales son iguales:

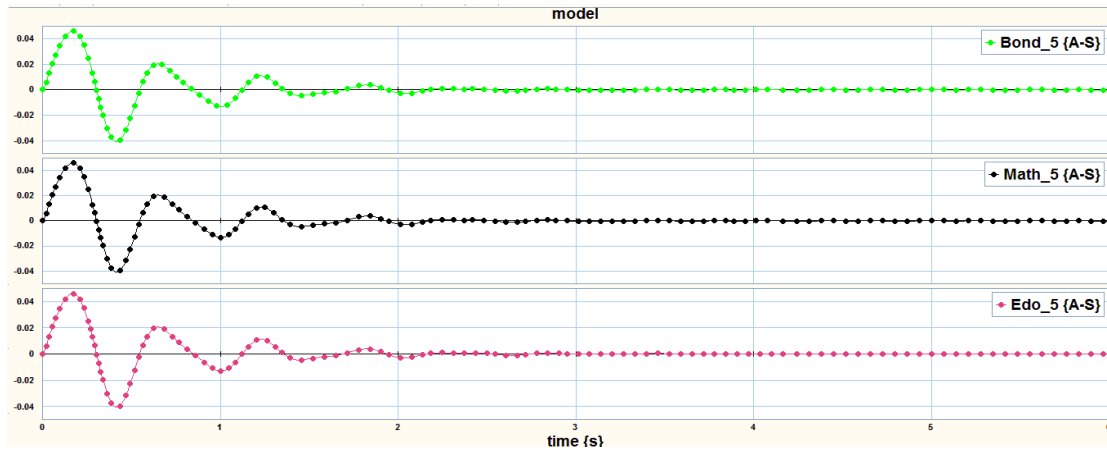


Figura 4.31 Quinta señal de Salida de los Modelos a), b) y c).

En la figura 4.32 se puede observar que al juntar los Modelos a), b) y c) se comprueba que da como resultado una sola señal (no existe desfase), la cual se muestra a continuación:

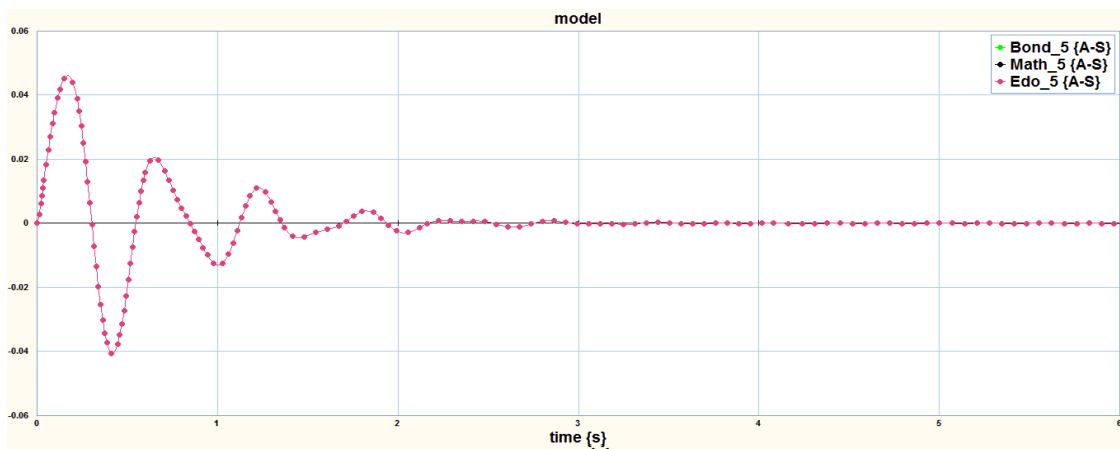


Figura 4.32 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).

Para finalizar, en la figura 4.33 se presenta la Gráfica con las 15 señales de salida (por separado) y en la figura 4.34 se presenta la Gráfica con las 15 señales de salida (juntas) de los Modelos a), b) y c), las cuales se denotan a continuación:

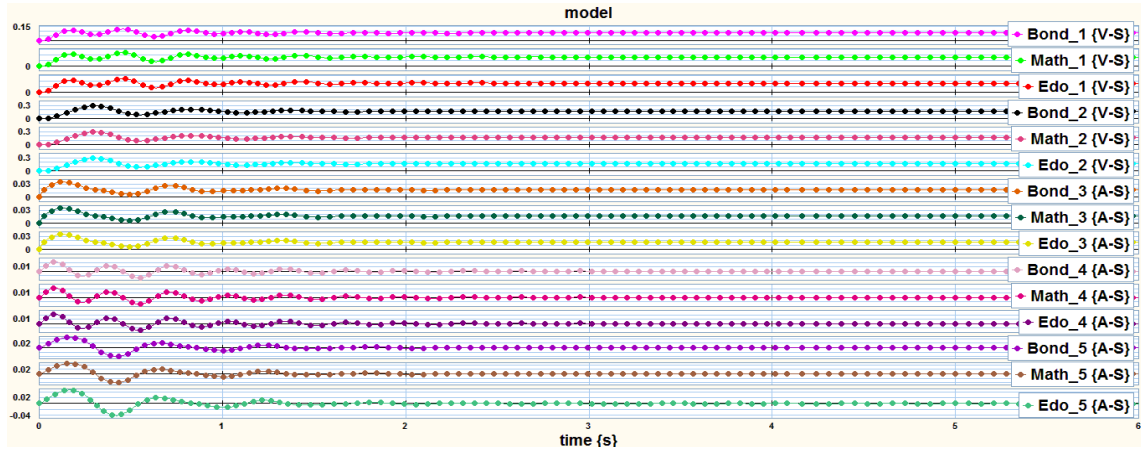


Figura 4.33 Gráfica con las 15 Señales de Salida (por separado) de los Modelos a), b) y c).

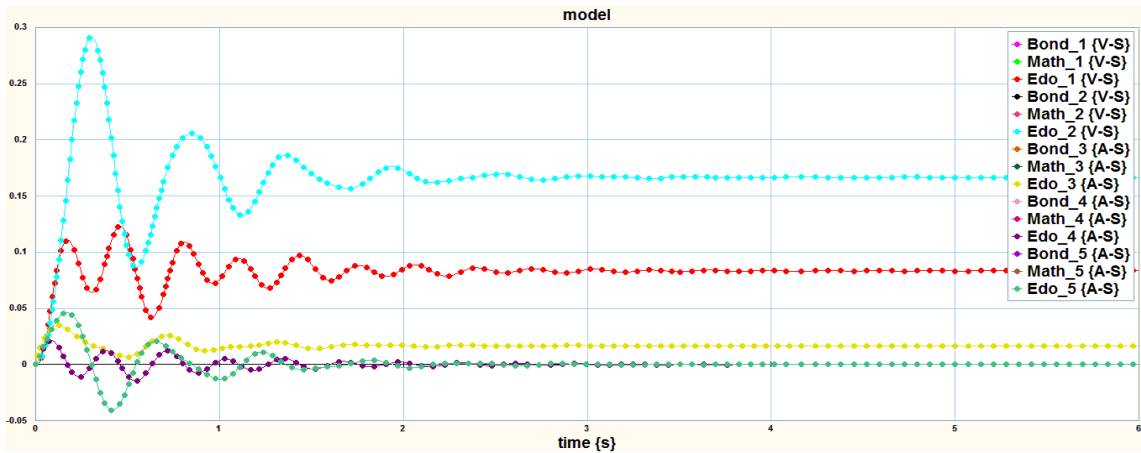


Figura 4.34 Gráfica con las 15 Señales de Salida (juntas) de los Modelos a), b) y c).

En éste Segundo Caso de Estudio, se demostró que en las Gráficas (*de la Primer señal de Salida hasta la Quinta señal de salida*) los resultados fueron óptimos, ya que se compararon las salidas de los Modelos a), b) y c) arrojando como resultado semejanza en las salidas de señal.

4.3. Simulación de Sistemas Modelados en Bond Graph con Lazos Algebraicos

Ahora se estudiará el caso donde el tipo de simulación será con lazos algebraicos, para ello requerimos (y es necesario por facilidad) que el elemento de la matriz S_{22} sea igual a cero, esto es, $S_{22} = 0$, ya que una de las características principales de este Modelado es que existen Lazos Algebraicos, por ende el elemento de la matriz $S_{22} \neq 0$ y para dicho argumento, se presenta la forma en que podemos obtener que $S_{22} = 0$, y así proseguir a desarrollar el método aplicado anteriormente en el Primer Caso de Estudio, en donde no existían lazos algebraicos. El desarrollo se presenta a continuación.

Para poder demostrar que $S_{22} = 0$, partiremos de la siguiente Matriz:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix}$$

Sacando ecuación de entrada D_{in} de la matriz anterior, sabiendo que $Z = FX$ y

$D_{out} = LD_{in}$, queda:

$$D_{in} = S_{21}Z + S_{22}D_{out} + S_{23}u$$

$$D_{in} = S_{21}Z + S_{22}LD_{in} + S_{23}u$$

$$D_{in} - S_{22}LD_{in} = S_{21}Z + S_{23}u$$

Factorizamos D_{in} , queda:

$$(I - S_{22}L)D_{in} = S_{21}Z + S_{23}u$$

$$D_{in} = (I - S_{22}L)^{-1} (S_{21}Z + S_{23}u)$$

entonces deducimos que:

$$S'_{21} = (I - S_{22}L)^{-1} * S_{21}$$

$$S'_{23} = (I - S_{22}L)^{-1} * S_{23}$$

Donde los elementos S_{21} y S_{23} les llamaremos S'_{21} y S'_{23} respectivamente, y los cuales se utilizarán mas adelante

Ahora, tenemos que si $S_{22} = 0$, la matriz queda:

$$\begin{bmatrix} \overset{o}{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S'_{21} & 0 & S'_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix}$$

Y por ende, sus ecuaciones correspondientes son:

$$\overset{o}{x} = S_{11}Z + S_{12}D_{out} + S_{13}u$$

$$D_{in} = S'_{21}Z + S'_{23}u$$

$$y = S_{31}Z + S_{32}D_{out} + S_{33}u$$

$$S'_{21} = (I - S_{22}L)^{-1} * S_{21}$$

$$S'_{23} = (I - S_{22}L)^{-1} * S_{23}$$

$$Z = FX$$

$$D_{out} = LD_{in}$$

Teniendo en cuenta que $S_{22} = 0$, de los siguientes Dos Casos de Estudio, encontrar las señales de salida aplicando los siguientes Modelos:

- a) El Modelo Gráfico en Bond Graph
- b) El Modelo Matemático Basado en Estructura de Unión y
- c) El Modelo Matemático en Variables (Espacios) de Estado.

Y demostrar que las señales de salida de los tres modelos sean iguales.

4.3.1. Primer Caso de Estudio

En este primer caso de estudio, se tiene un Sistema Eléctrico el cual se debe analizar por secciones (tal como lo hicimos anteriormente) que sean fáciles de visualizar y ubicar en forma física en el sistema eléctrico, razón por lo cual ésta consideración inicia con un caso en donde intervienen una fuente de voltaje, tres componentes resistivos (Resistencias), dos componentes de almacenamiento de energía (un Capacitor y un Inductor) y la línea de transporte, dicha descripción se simboliza en la figura 4.35 la cual representa su circuito eléctrico equivalente.

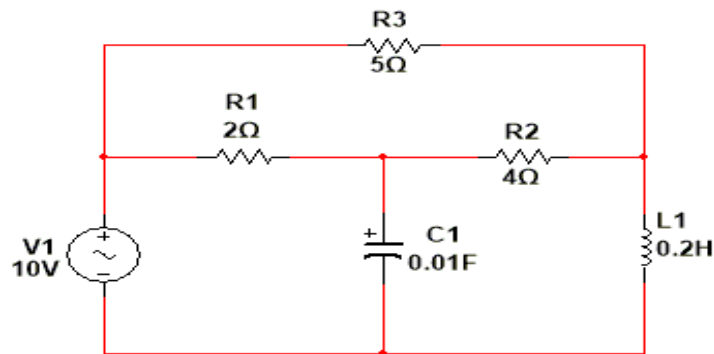


Figura 4.35 Sistema Eléctrico.

a) Modelo Gráfico en Bond Graph

Para dar inicio con la simulación es necesario obtener su modelo en Bond Graph, ya que el Bond Graph es el conjunto de elementos que se ingresan al simulador de 20-Sim para recoger su funcionamiento en una serie de gráficas, la figura 4.36 representa el Bond Graph del circuito ilustrado por la figura 4.35.

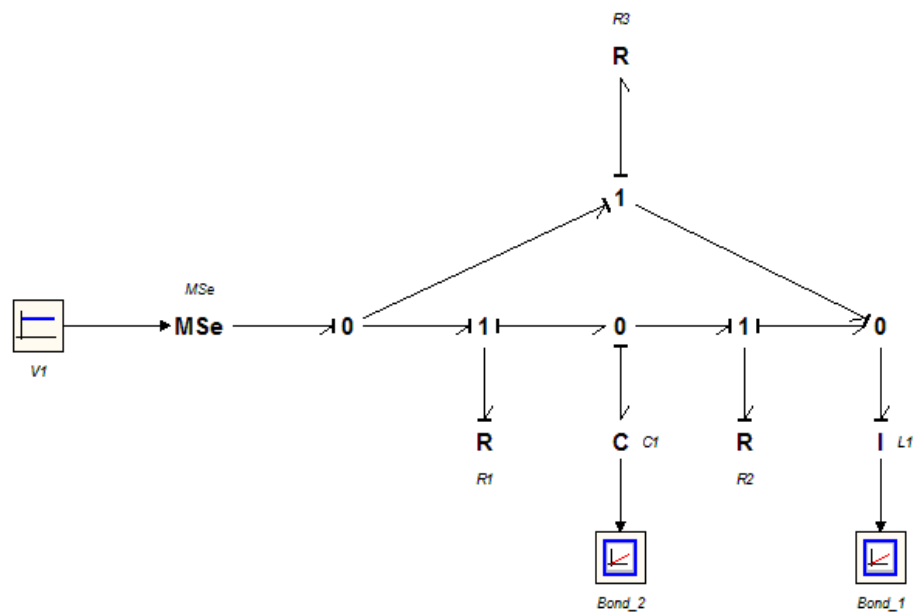


Figura 4.36 Diagrama de Bonds.

Donde:

V_1 = Señal de entrada. $Bond_1$ y $Bond_2$ = Son las señales de salida.

Los parametros de los elementos que están involucrados en el circuito son los siguientes:

$$V_1 = 10 \text{ volts} \quad R_1 = 2,0 \text{ ohms} \quad R_2 = 4,0 \text{ ohms} \quad R_3 = 5,0 \text{ ohms}$$

$$C_1 = 0,01 \text{ faradios} \quad L_1 = 0,2 \text{ henrios}$$

(Los valores fueron tomados arbitrariamente).

SIMULACIÓN DEL DIAGRAMA DE BOND GRAPH.

A continuación, se presenta la simulación del Diagrama de Bond Graph, y el resultado que se obtiene al ingresar el diagrama al simulador de 20-Sim son las señales de salida, las cuales son presentadas en la figura 4.37.

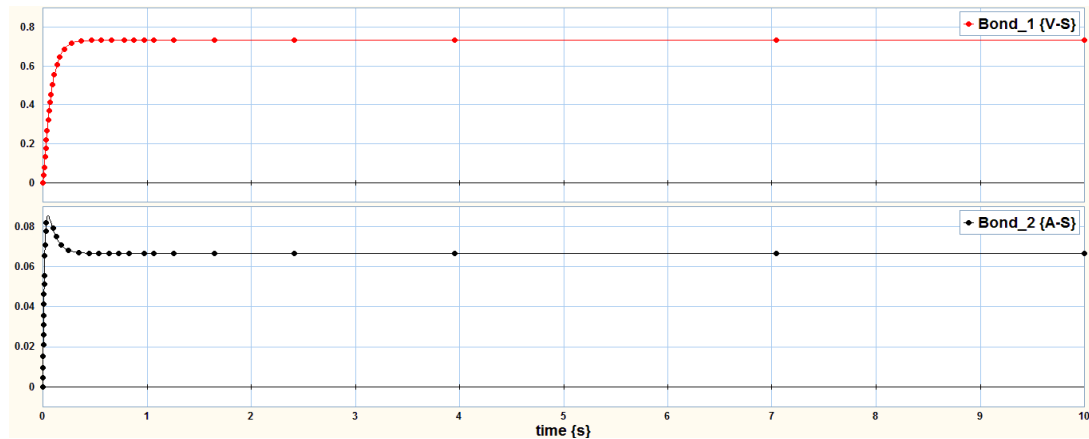


Figura 4.37 Señales de Salida del Diagrama de Bonds.

b) Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión

Para obtener el Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión del Diagrama de Bonds, se utiliza el siguiente diagrama de Bonds, como lo muestra la figura 4.38

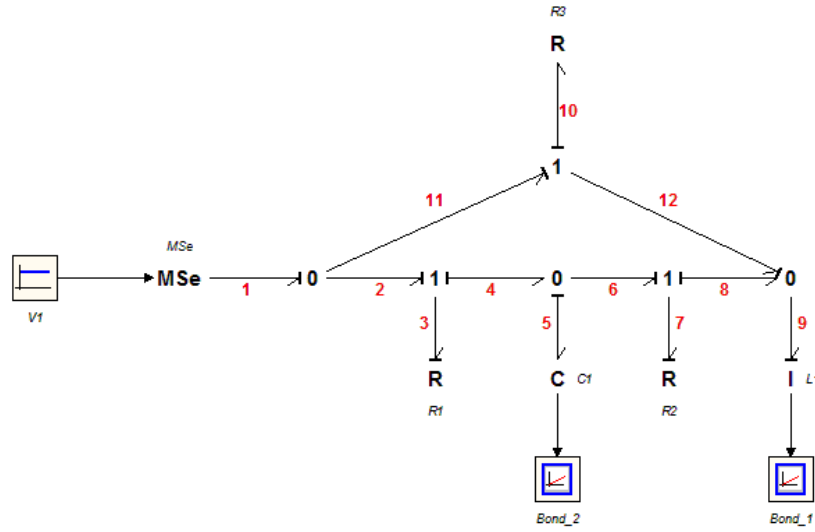


Figura 4.38 Diagrama con Bonds enumerados.

Ahora, proseguimos a sacar los Vectores Clave de la figura 4.38, como se muestra

a continuacion:

$$u = e_1, \quad x = \begin{bmatrix} p_9 \\ q_5 \end{bmatrix}, \quad \overset{o}{x} = \begin{bmatrix} e_9 \\ f_5 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} f_9 \\ e_5 \end{bmatrix}$$

$$Din = \begin{bmatrix} e_3 \\ f_7 \\ e_{10} \end{bmatrix}, \quad Dout = \begin{bmatrix} f_3 \\ e_7 \\ f_{10} \end{bmatrix},$$

$$L = diag \left\{ \frac{1}{R_1}, R_2, \frac{1}{R_3} \right\}, \quad \text{por ende} \quad L = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}$$

$$F = diag \left\{ \frac{1}{L_1}, \frac{1}{C_1} \right\} \quad \text{por ende} \quad F = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} \end{bmatrix}$$

Sacando las Relaciones Constitutivas:

Para $\overset{o}{x}$

$$e_9 = e_5 - e_7$$

$$f_5 = f_3 + f_{10} - f_9$$

Para Din

$$e_3 = e_1 - e_5$$

$$f_7 = -f_{10} + f_9$$

$$e_{10} = e_1 - e_5 + e_7$$

Para $Dout = LDin$

$$f_3 = \frac{1}{R_1} e_3$$

$$e_7 = R_2 f_7$$

$$f_{10} = \frac{1}{R_3} e_{10}$$

$$e_1 = 1$$

Para $Z = FX$

$$f_9 = \frac{1}{L_1} p_9$$

$$e_5 = \frac{1}{C_1} q_5$$

Para x (*salida*)

$$p_9 = int(e_9, 0)$$

$$q_5 = int(f_5, 0)$$

Llenando la Matriz (Estructura de Unión) con las Relaciones Constitutivas, queda:

$$\begin{bmatrix} \overset{o}{x} \\ Din \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} z \\ Dout \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_9 \\ f_5 \\ e_3 \\ f_7 \\ e_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f_9 \\ e_5 \\ f_3 \\ e_7 \\ f_{10} \\ e_1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

SIMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO BASADO EN SU ESTRUCTURA DE UNIÓN.

A continuación, en la figura 4.39 se presenta el esquema del Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión y el resultado que se obtiene al ingresar dicho modelo al simulador de 20-Sim son las señales de salida, las cuales son presentadas en la figura 4.38.

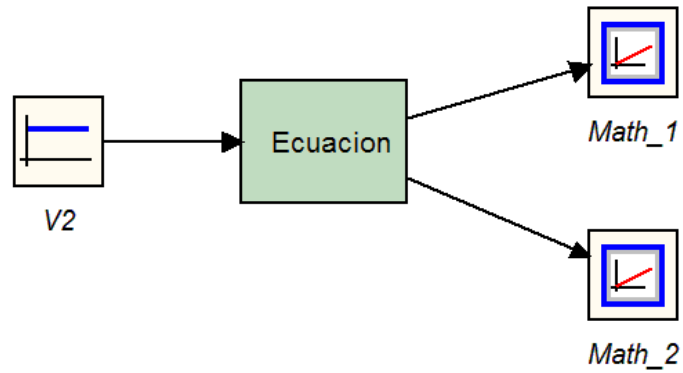


Figura 4.39 Esquema del Modelo Matemático Basado en Estructura de Unión

Donde:

V_2 = Señal de entrada.

$Math_1$ y $Math_2$ = Son las señales de salida.

El recuadro de nombre 'Ecuación' contiene el siguiente código:

CÓDIGO: 'Ecuación' PROGRAMADO EN 20-SIM

parameters

real R1= 2.0,R2= 4.0,R3=5.0,C1= 0.01,L1= 0.2;

variables

real q5,p9,f5,e9,e5,f9,e3,f7,e10,f3,e7,f10,e1;

real a,b,c;

equations

a=1/(R2+R3);

b=R3/(R2+R3);

c=(R2*R3)/(R2+R3);

```

f5=-f9+f3+f10;

e9=e5-e7;

e3=-e5+e1;

f7=(a*e5)+(b*f9)-(a*e1);

e10=(-b*e5)+(c*f9)+(b*e1);

e5=(1/C1)*q5;

f9=(1/L1)*p9;

f3=(1/R1)*e3;

e7=R2*f7;

f10=(1/R3)*e10;

q5=int(f5,0);

p9=int(e9,0);

e1=V1;

//Salidas

o_1=q5;

o_2=p9;

```

Con el código anteriormente descrito, se obtiene la simulación de la figura 4.40. la cual muestra las dos señales de salida y dichas señales se pueden observar en la figura 4.39.

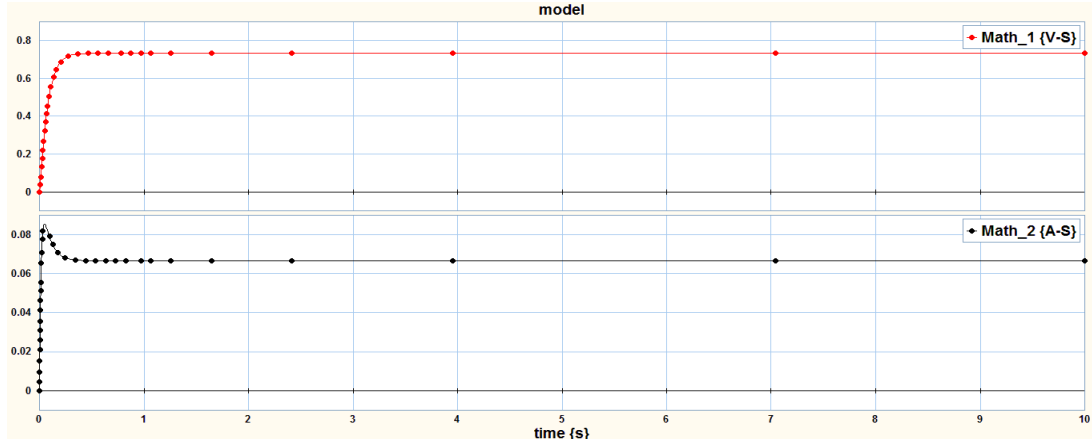


Figura 4.40 Señales de Salida del Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión.

c) Modelo Matemático en Variables (espacio) de Estado

Para sacar el Modelo Matemático en Variables de Estado del sistema, se requiere usar la siguiente ecuación, llamada Ecuación en Variables de Estado:

$$\dot{X} = Ax + Bu$$

Y para poder llegar a dicha ecuación, se deben usar las siguientes ecuaciones:

$$S'_{21} = (I - S_{22}L)^{-1} * [S_{21}]$$

$$S'_{23} = (I - S_{22}L)^{-1} * [S_{23}]$$

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1}$$

$$A = [S_{11} + S_{12}MS_{21}] * [F]$$

$$B = [S_{13} + S_{12}MS_{23}]$$

Ahora, partiendo de:

$$\begin{bmatrix} \overset{o}{x} \\ Din \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} z \\ Dout \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_9 \\ f_5 \\ e_3 \\ f_7 \\ e_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f_9 \\ e_5 \\ f_3 \\ e_7 \\ f_{10} \\ e_1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, se tiene la siguiente matriz:

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sacando transpuesta de S_{12}^t , queda:

$$S_{12}^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ transpose: } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ahora aplicamos $-S_{12}^t$, nos queda:

$$-S_{12}^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Por último eliminamos transpuesta y signo negativo de $-S_{12}^t$, lo cual nos queda

S_{21} :

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Proseguimos entonces a calcular la ecuación:

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1}$$

Sabemos que el elemento de la matriz $S_{22} \neq 0$, por lo que debemos calcular por

separado los elementos de la ecuación $M = L(I - S_{22}L)^{-1}$, por ende decimos que:

$$[S_{22}] * [L] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_3} \\ 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[I] - [S_{22}L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_3} \\ 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{R_3} \\ 0 & -R_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[I - S_{22}L]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{R_3} \\ 0 & -R_2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ inverse: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_3}{R_2+R_3} & -\frac{1}{R_2+R_3} \\ 0 & R_2 \frac{R_3}{R_2+R_3} & \frac{R_3}{R_2+R_3} \end{bmatrix}$$

de la matriz anterior, sustituyendo (denominador) $R_2 + R_3$ por Δ , queda:

$$\Delta = R_2 + R_3$$

$$[I - S_{22}L]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_3}{\Delta} & -\frac{1}{\Delta} \\ 0 & R_2 \frac{R_3}{\Delta} & \frac{R_3}{\Delta} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo variables a, b, c, d en Matriz anterior, queda:

$$a = \frac{R_3}{\Delta}, b = R_2 \frac{R_3}{\Delta}, c = \frac{1}{\Delta}, d = \frac{R_3}{\Delta}$$

$$[I - S_{22}L]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -c \\ 0 & b & d \end{bmatrix}$$

Ahora proseguimos a calcular las matrices : $[S'_{21}]$ y $[S'_{23}]$

para: $S'_{21} = [I - S_{22}L]^{-1} * [S_{21}]$

$$S'_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -c \\ 0 & b & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ a & c \\ b & -d \end{bmatrix}$$

para: $S'_{23} = [I - S_{22}L]^{-1} * [S_{23}]$

$$S'_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -c \\ 0 & b & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -c \\ d \end{bmatrix}$$

Ahora, como ya se tienen todos los elementos de la ecuación $M = L[I - S_{22}L]$.

Decimos que: $S_{22} = 0$ por lo tanto $M = L$, y por ende la matriz nos queda de la siguiente forma:

entonces:

$[S_{12}] * [M]$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -R_2 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}$$

$$[S_{12}M] * [S_{21}]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -R_2 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ a & c \\ b & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -aR_2 & -cR_2 \\ \frac{b}{R_3} & -\frac{1}{R_1} - \frac{d}{R_3} \end{bmatrix}$$

$$[S_{11}] + [S_{12}MS_{21}]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -aR_2 & -cR_2 \\ \frac{b}{R_3} & -\frac{1}{R_1} - \frac{d}{R_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -aR_2 & 1 - cR_2 \\ \frac{b}{R_3} - 1 & -\frac{1}{R_1} - \frac{d}{R_3} \end{bmatrix}$$

Ahora, Calculamos la Matriz A, con la siguiente ecuación:

$$A = [S_{11} + S_{12}MS_{21}] * [F]$$

$$A = \begin{bmatrix} -aR_2 & 1 - cR_2 \\ \frac{b}{R_3} - 1 & -\frac{1}{R_1} - \frac{d}{R_3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{L_1}R_2 & -\frac{1}{C_1}(cR_2 - 1) \\ \frac{1}{L_1}\left(\frac{b}{R_3} - 1\right) & -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{d}{R_3}\right) \end{bmatrix}$$

por ende:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{a}{L_1}R_2 & -\frac{1}{C_1}(cR_2 - 1) \\ \frac{1}{L_1}\left(\frac{b}{R_3} - 1\right) & -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{d}{R_3}\right) \end{bmatrix}$$

sustituyendo las siguientes variables en la Matriz A:

$$C = \frac{a}{L_1}$$

$$D = \frac{1}{L_1}$$

$$E = \frac{b}{R_3} - 1$$

$$F = \frac{1}{C_1}$$

$$G = cR_2 - 1$$

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{d}{R_3}$$

queda:

$$A = \begin{bmatrix} -CR_2 & -FG \\ DE & -FH \end{bmatrix}$$

Calculando la Matriz B:

$$[S_{12}M] * [S_{23}]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -R_2 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ -c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cR_2 \\ \frac{1}{R_1} + \frac{d}{R_3} \end{bmatrix}$$

Ahora, usando la siguiente ecuación (Matriz B), queda:

$$B = [S_{13} + S_{12}MS_{23}]$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cR_2 \\ \frac{1}{R_1} + \frac{d}{R_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cR_2 \\ \frac{1}{R_1} + \frac{d}{R_3} \end{bmatrix}$$

por ende, la Matriz B, queda:

$$B = \begin{bmatrix} cR_2 \\ \frac{1}{R_1} + \frac{d}{R_3} \end{bmatrix}$$

Para finalizar, se utiliza la ecuación de variables de estado, como sigue:

$$\overset{o}{\dot{X}} = Ax + Bu$$

Sustituimos valores y nos queda el resultado final del Modelo Matemático en Variables de estado:

$$\overset{o}{\dot{X}} = \begin{bmatrix} -CR_2 & -FG \\ DE & -FH \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} cR_2 \\ \frac{1}{R_1} + \frac{d}{R_3} \end{bmatrix} u$$

SIMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO EN VARIABLES (ESPACIOS) DE ESTADO.

A continuación, en la figura 4.41 se presenta el esquema del Modelo Matemático en Variables (Espacios) de Estado, y el resultado que se obtiene al ingresar dicho modelo al simulador de 20-Sim son las señales de salida, las cuales son presentadas en la figura 4.42.

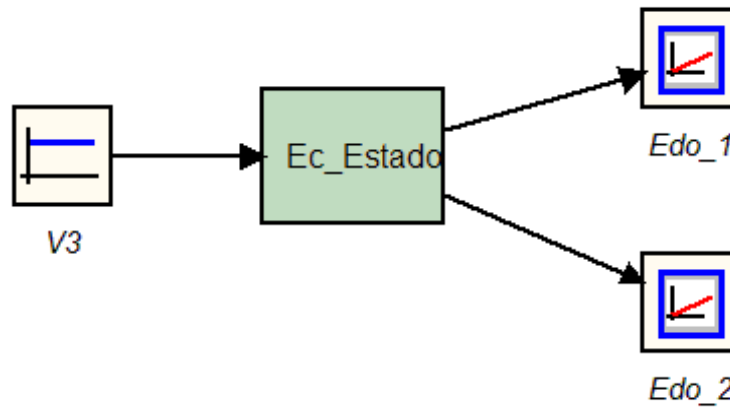


Figura 4.41 Esquema del Modelo Matemático en Variables (espacios) de Estado.

Donde:

$V3$ = Señal de entrada.

Edo_1 y Edo_2 = Son las señales de salida.

Ec_Estado: Contiene el siguiente código:

CÓDIGO: 'Ec_Estado' PROGRAMADO EN 20-SIM

parameters

```
real R1= 2.0, R2= 4.0, R3=5.0, C1= 0.01, L1=0.2;
```

variables

```
real A11,A12;
```

```
real A21,A22;
```

```
real D,a,b,c,d;
```

```
real C,D1,E,F,G,H;
```

```
real B1,B2;
```

```
real dx1,dx2;
```

```
real x1,x2;
```

```
real u;
```

equations

```
D=R2+R3;
```

```
a=R3/D;
```

```
b=R2*(R3/D);
```

```
c=1/D;
```

```
d=R3/D;
```

```
dx1=A11*x1+A12*x2+B1*u;
```

```
dx2=A21*x1+A22*x2+B2*u;
```

```
C=a/L1;
```

```
D1=1/L1;
```

$$E=(b/R3)^{-1};$$

$$F=1/C1;$$

$$G=(c*R2)^{-1};$$

$$H=(1/R1)+(d/R3);$$

$$A11=-C*R2;$$

$$A12=-F*G;$$

$$A21=D1*E;$$

$$A22=-F*H;$$

$$u=V1;$$

$$B1=c*R2;$$

$$B2=(1/R1)+(d/R3);$$

$$x1=\text{int}(dx1,0);$$

$$x2=\text{int}(dx2,0);$$

//Salidas

$$o_1=x1;$$

$$o_2=x2;$$

Con el código anteriormente descrito, se obtiene la simulación de la figura 4.41. la cual muestra las dos señales de salida y dichas señales se pueden observar en la figura 4.42

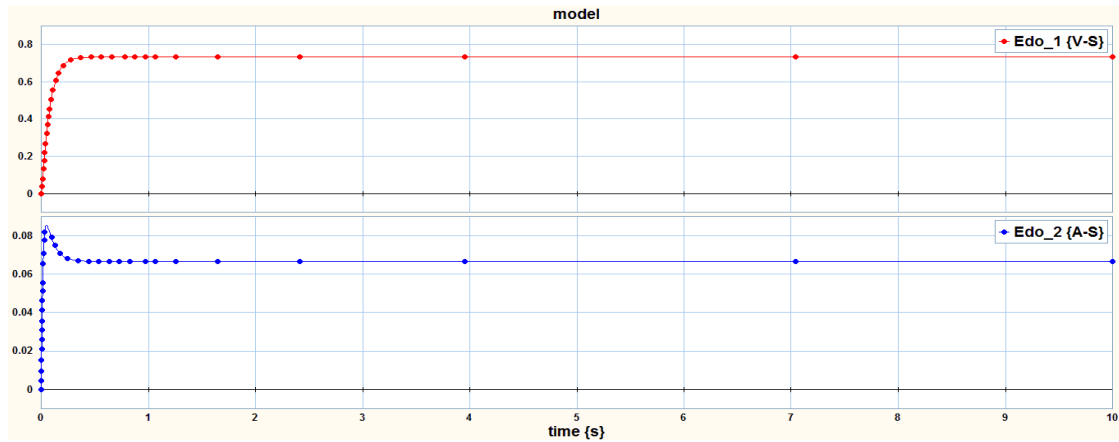


Figura 4.42 Señales de Salida del Modelo Matemático en Variables (espacios) de Estado.

A continuación se presentarán las gráficas donde se mostrarán las señales de salida de los tres modelos anteriormente simulados, los cuales son los siguientes:

- a) El Modelo Gráfico en Bond Graph
- b) El Modelo Matemático Basado en Estructura de Unión
- c) El Modelo Matemático en Variables (Espacios) de Estado.

De los modelos anteriormente descritos, se puede concluir que las señales de salida son iguales, tal como lo muestran las siguientes figuras.

La figura 4.43 muestra la Gráfica de la Primera señal de salida de los modelos a), b) y c) (por separado), y por consiguiente se puede observar que las tres señales son iguales:

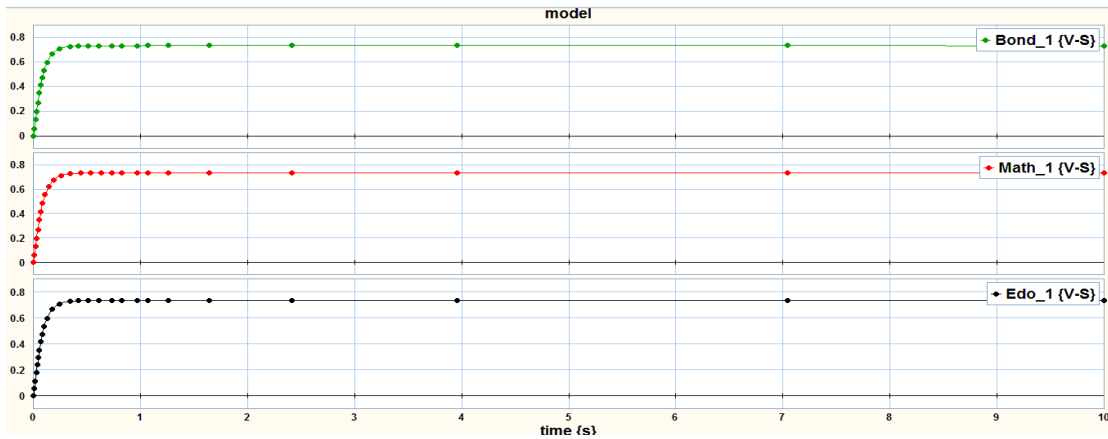


Figura 4.43 Primer señal de Salida de los Modelos a), b) y c).

En la figura 4.44 se puede observar que al juntar los Modelos a), b) y c) se comprueba que efectivamente da como resultado una sola señal, la cual se muestra a continuación:

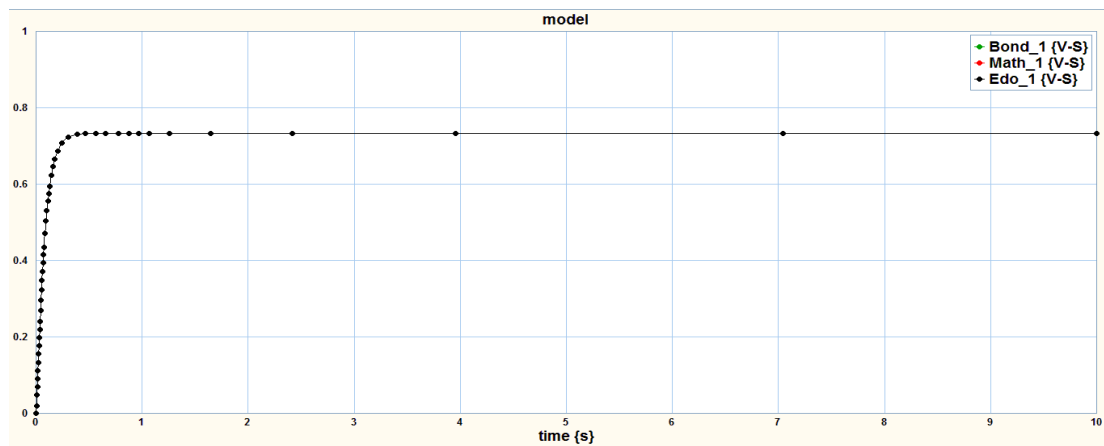


Figura 4.44 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).

La figura 4.45 muestra la Gráfica de la Segunda señal de salida de los modelos a), b) y c) (por separado), y por lo cual se observa que las tres señales también son iguales:

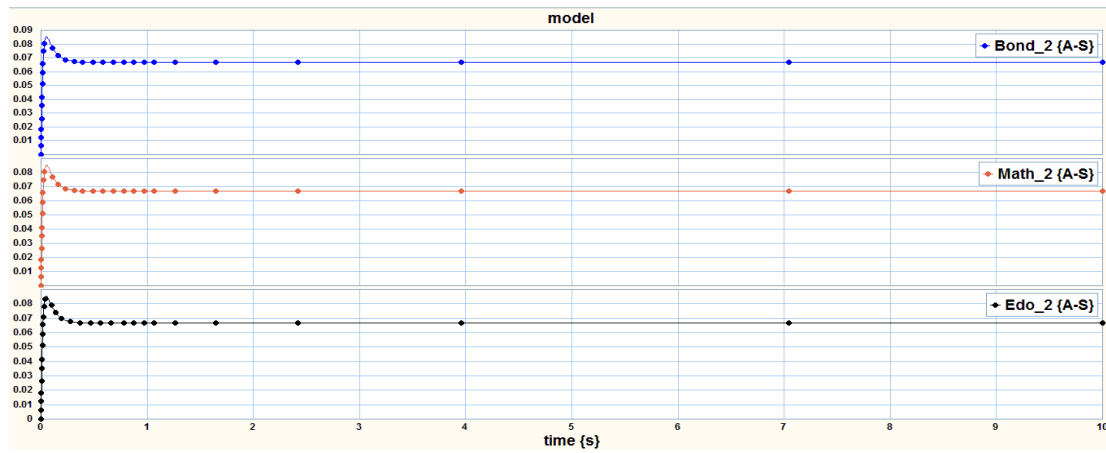


Figura 4.45 Segunda señal de Salida de los Modelos a), b) y c).

En la figura 4.46 se observa que al juntar los Modelos a), b) y c) se demuestra que efectivamente da como resultado una sola señal, la cual se muestra a continuacion:

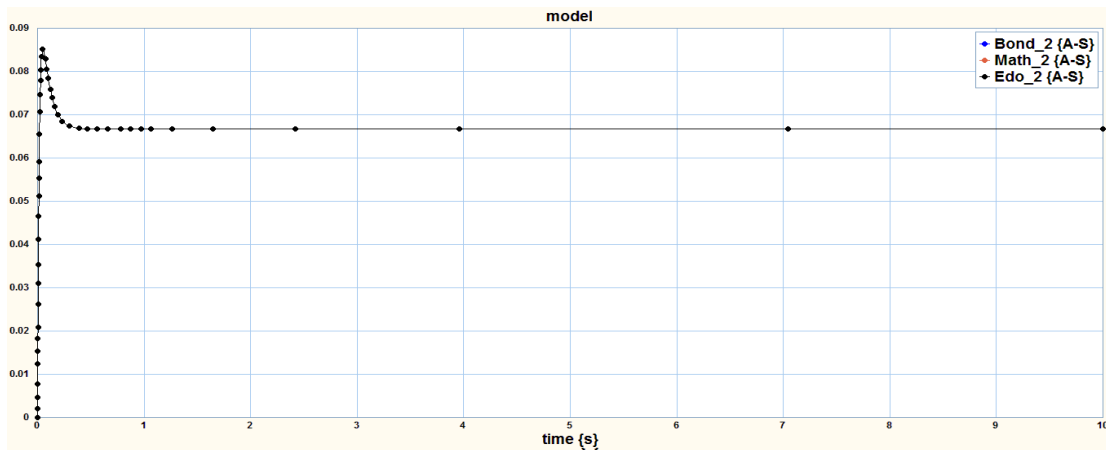


Figura 4.46 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).

Para finalizar, En la figura 4.47 se presenta la Gráfica con las 6 señales de salida (por separado) y en la figura 4.48 se presenta la Gráfica con las 6 señales de salida (juntas) de los Modelos a), b) y c), las cuales se denotan a continuacion:

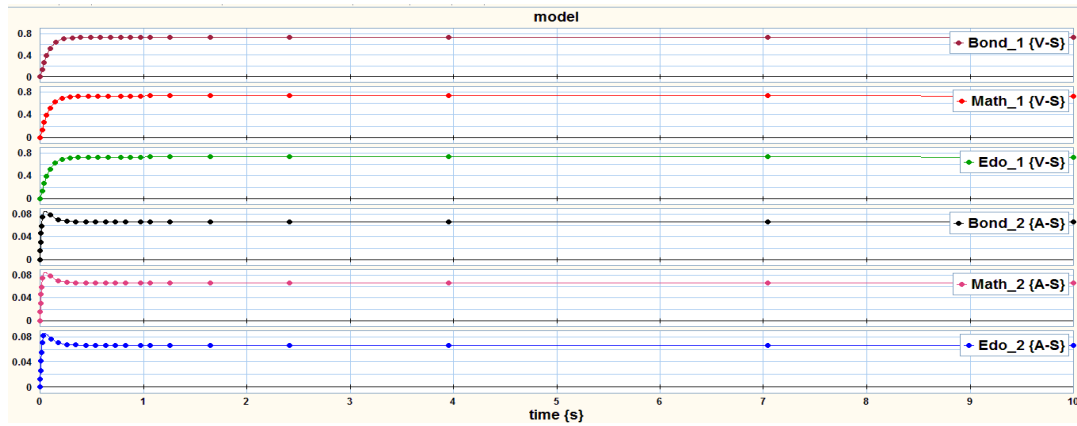


Figura 4.47 Gráfica con las 6 Señales de Salida (por separado) de los Modelos a), b) y c).

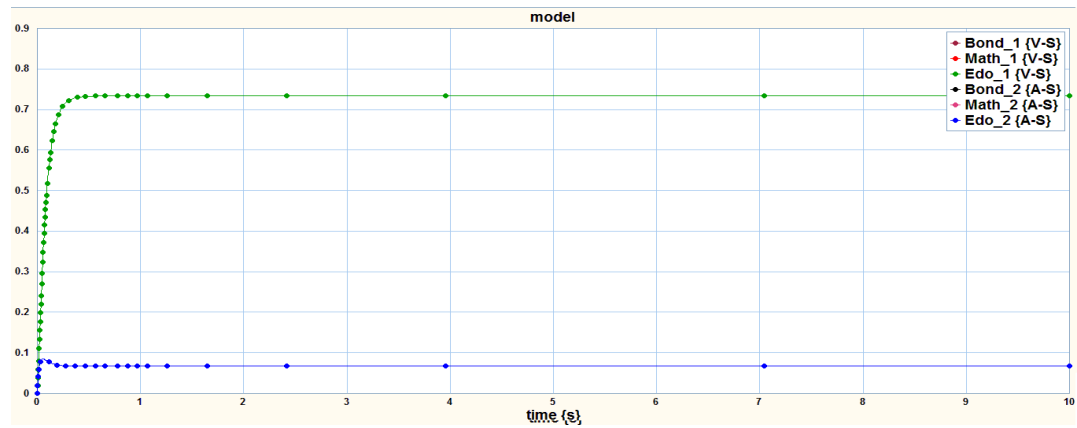


Figura 4.48 Gráfica con las 6 Señales de Salida (juntas) de los Modelos a), b) y c).

En este tipo de Modelado con Lazos algebraicos, se puede observar que en éste Primer Caso de Estudio, se demostró que en las Gráficas (*tanto en la Primer señal de Salida como en la Segunda señal de salida*) los resultados fueron óptimos, ya que se compararon las salidas de los Modelos a), b) y c) arrojando como resultado semejanza en las salidas de señal.

4.3.2. Segundo Caso de Estudio

En este Segundo Caso de Estudio, ahora tendremos un Sistema Eléctrico el cual se debe analizar (así como lo hicimos en el Primer Caso de Estudio) por secciones que sean fáciles de visualizar y ubicar en forma física en el sistema eléctrico, y para esto, consideremos un caso en donde intervienen dos fuente de voltaje, cinco componentes resistivos (Resistencias), cuatro componentes de almacenamiento de energía (tres Capacitores y un Inductor) y la linea de transporte, dicha descripción se simboliza en la figura 4.49 la cual representa su circuito eléctrico equivalente.

Recordemos que se está estudiando el caso en donde el tipo de Simulación de sistemas modelados contienen lazos algebraicos, para ello requerimos (y es necesario por facilidad) que el elemento de la matriz S_{22} sea igual a cero, esto es, $S_{22} = 0$, ya que, recalquemos que una de las características principales de este Modelado es que existen Lazos Algebraicos, por ende el elemento de la matriz $S_{22} \neq 0$ y para dicho argumento, aplicaremos el mismo procedimiento que se uso en el primer caso de estudio anteriormente desarrollado. El cual presenta la forma en que podemos obtener que $S_{22} = 0$, y asi proseguir a desallorar el método aplicado en donde no existian lazos algebraicos. El desarrollo se presenta a continuación.

Para poder demostrar que $S_{22} = 0$, partiremos de la siguiente Matriz:

$$\begin{bmatrix} \circ \\ x \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix}$$

Sacando ecuación de entrada D_{in} de la matriz anterior, sabiendo que $Z = FX$ y

$D_{out} = LD_{in}$, queda:

$$D_{in} = S_{21}Z + S_{22}D_{out} + S_{23}u$$

$$D_{in} = S_{21}Z + S_{22}LD_{in} + S_{23}u$$

$$D_{in} - S_{22}LD_{in} = S_{21}Z + S_{23}u$$

Factorizamos D_{in} , queda:

$$(I - S_{22}L)D_{in} = S_{21}Z + S_{23}u$$

$$D_{in} = (I - S_{22}L)^{-1} (S_{21}Z + S_{23}u)$$

entonces deducimos que:

$$S'_{21} = (I - S_{22}L)^{-1} * S_{21}$$

$$S'_{23} = (I - S_{22}L)^{-1} * S_{23}$$

Donde los elementos S_{21} y S_{23} les llamaremos S'_{21} y S'_{23} respectivamente, y los cuales se utilizarán mas adelante

Ahora, tenemos que si $S_{22} = 0$, la matriz queda:

$$\begin{bmatrix} \overset{o}{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S'_{21} & 0 & S'_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix}$$

Y por ende, sus ecuaciones correspondientes son:

$$\overset{o}{x} = S_{11}Z + S_{12}D_{out} + S_{13}u$$

$$D_{in} = S'_{21}Z + S'_{23}u$$

$$y = S_{31}Z + S_{32}D_{out} + S_{33}u$$

$$S'_{21} = (I - S_{22}L)^{-1} * S_{21}$$

$$S'_{23} = (I - S_{22}L)^{-1} * S_{23}$$

$$Z = FX$$

$$D_{out} = LD_{in}$$

Teniendo en cuenta que $S_{22} = 0$, encontrar las señales de salida aplicando los siguientes Modelos:

- a) El Modelo Gráfico en Bond Graph
- b) El Modelo Matemático Basado en Estructura de Unión y
- c) El Modelo Matemático en Variables (Espacios) de Estado.

Y demostrar que las señales de salida de los tres modelos sean iguales.

Iniciemos pues, a desarrollar este Segundo Caso de Estudio, presentando el siguiente Sistema Eléctrico, el cual podemos observar en la figura 4.39.

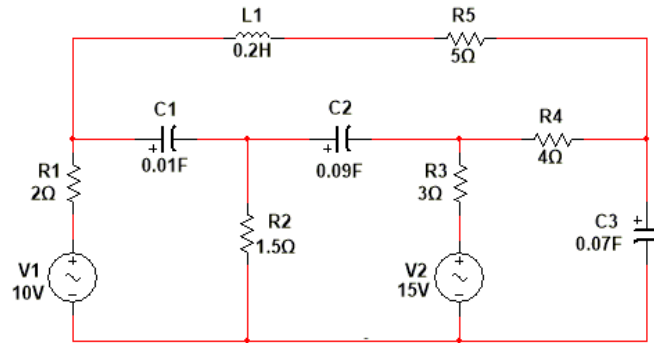


Figura 4.49 Sistema Eléctrico.

a) Modelo Gráfico en Bond Graph

Para dar inicio con la simulación es necesario obtener su modelo en Bond Graph, ya que el Bond Graph es el conjunto de elementos que se ingresan al simulador de 20-Sim para recoger su funcionamiento en una serie de gráficas, la figura 4.50 representa el Bond Graph del circuito ilustrado por la figura 4.49.

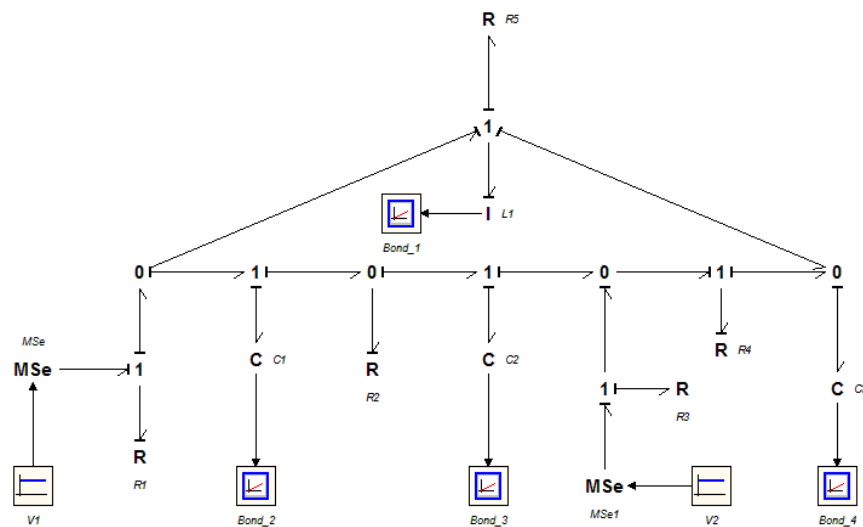


Figura 4.50 Diagrama de Bonds.

Donde:

V_1 y V_2 = Son las señales de entrada.

$Bond_1$, $Bond_2$, $Bond_3$ y $Bond_4$ = Son las señales de salida.

Los parámetros de los elementos que están involucrados en el circuito son los siguientes:

$V_1 = 10 \text{ volts}$, $V_2 = 15 \text{ volts}$, $R_1 = 2,0 \text{ ohms}$, $R_2 = 1,5 \text{ ohms}$, $R_3 = 3,0 \text{ ohms}$, $C_1 = 0,01 \text{ faradios}$, $C_2 = 0,09 \text{ faradios}$, $C_3 = 0,07 \text{ faradios}$, $L_1 = 0,2 \text{ henrios}$. (Los valores fueron tomados arbitrariamente).

SIMULACIÓN DEL DIAGRAMA DE BOND GRAPH.

A continuación, se presenta la simulación del Diagrama de Bond Graph, y el resultado que se obtiene al ingresar el diagrama al simulador de 20-Sim son las señales de salida, las cuales son presentadas en la figura 4.51

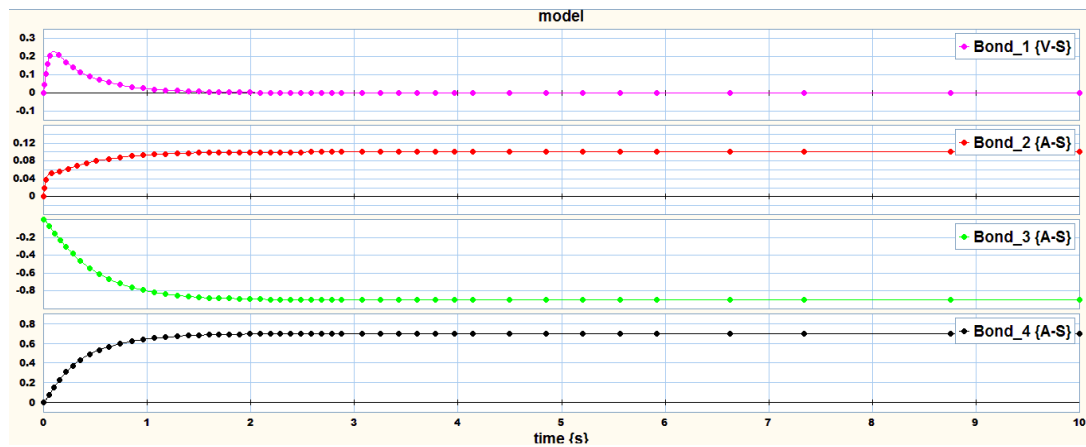


Figura 4.51 Señales de Salida del Diagrama de Bonds.

b) Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión

Para obtener el Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión del Diagrama de Bonds, se utiliza el siguiente diagrama de Bonds, como lo muestra la figura 4.52

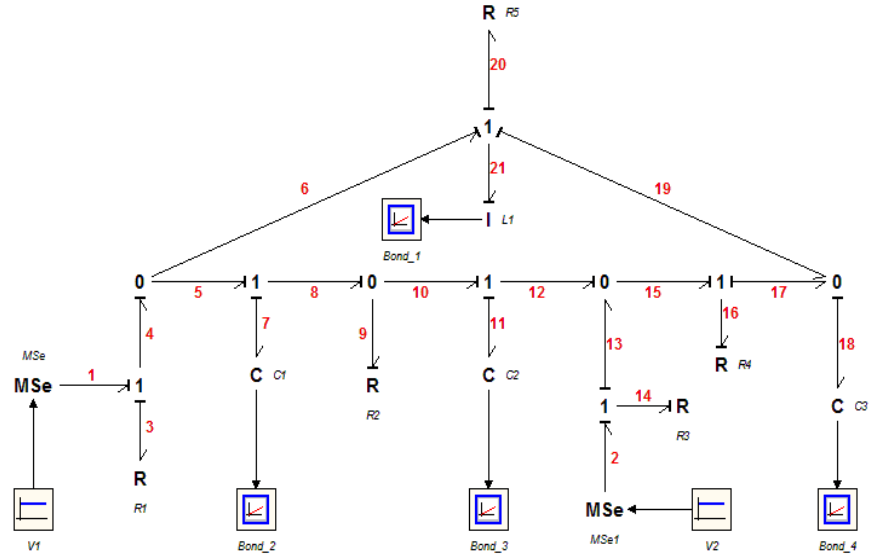


Figura 4.52 Diagrama con Bonds enumerados.

Ahora, proseguimos a sacar los Vectores Clave de la figura 4.52, como se muestra

a continuación:

$$u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} p_{21} \\ q_7 \\ q_{11} \\ q_{18} \end{bmatrix}, \quad \overset{o}{x} = \begin{bmatrix} e_{21} \\ f_7 \\ f_{11} \\ f_{18} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} f_{21} \\ e_7 \\ e_{11} \\ e_{18} \end{bmatrix}$$

$$Din = \begin{bmatrix} f_3 \\ e_9 \\ e_{14} \\ e_{16} \\ f_{20} \end{bmatrix}, \quad Dout = \begin{bmatrix} e_3 \\ f_9 \\ f_{14} \\ f_{16} \\ e_{20} \end{bmatrix},$$

$$L = \text{diag} \left\{ R_1, \frac{1}{R_2}, \frac{1}{R_3}, \frac{1}{R_4}, R_5 \right\}, \quad \text{por ende} \quad L = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix}$$

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_1}, \frac{1}{C_1}, \frac{1}{C_2}, \frac{1}{C_3} \right\} \quad \text{por ende} \quad F = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix}$$

Sacando las Relaciones Constitutivas:

Para $\overset{o}{x}$

$$e_{21} = e_1 - e_3 - e_{18} - e_{20}$$

$$f_7 = f_9 - f_{14} + f_{16}$$

$$f_{11} = -f_{14} + f_{16}$$

$$f_{18} = f_{16} + f_{21}$$

Para Din

$$f_3 = f_9 - f_{14} + f_{16} + f_{21}$$

$$e_9 = e_1 - e_3 - e_7$$

$$e_{14} = e_2 - e_1 + e_3 + e_7 + e_{11}$$

$$e_{16} = e_1 - e_3 - e_7 - e_{11} - e_{18}$$

$$f_{20} = f_{21}$$

Para $Dout = LDin$

$$e_3 = R_1 f_3$$

$$f_9 = \frac{1}{R_2} e_9$$

$$f_{14} = \frac{1}{R_3} e_{14}$$

$$f_{16} = \frac{1}{R_4} e_{16}$$

$$e_{20} = R_5 f_{20}$$

Entradas

$$e_1 = v_1$$

$$e_1 = v_2$$

Para $Z = FX$

$$f_{21} = \frac{1}{L_1} p_{21}$$

$$e_7 = \frac{1}{C_1} q_7$$

$$e_{11} = \frac{1}{C_2} q_{11}$$

$$e_{18} = \frac{1}{C_3} q_{18}$$

Para x (*salida*)

$$p_{21} = \text{int}(e_{21}, 0)$$

$$q_7 = \text{int}(f_7, 0)$$

$$q_{11} = \text{int}(f_{11}, 0)$$

$$q_{18} = \text{int}(f_{18}, 0)$$

Llenando la Matriz (Estructura de Unión) con las Relaciones Constitutivas, queda:

$$\begin{bmatrix} \overset{o}{x} \\ Din \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} z \\ Dout \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_{21} \\ f_7 \\ f_{11} \\ f_{18} \\ f_3 \\ e_9 \\ e_{14} \\ e_{16} \\ f_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f_{21} \\ e_7 \\ e_{11} \\ e_{18} \\ e_3 \\ f_9 \\ f_{14} \\ f_{16} \\ e_{20} \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; S_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SIMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO BASADO EN SU ESTRUCTURA DE UNIÓN.

A continuación, en la figura 4.39 se presenta el esquema del Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión y el resultado que se obtiene al ingresar dicho modelo al simulador de 20-Sim son las señales de salida, las cuales son presentadas en la figura 4.53.

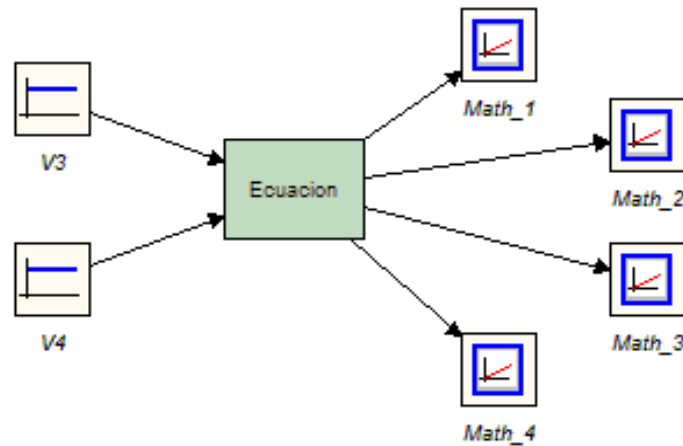


Figura 4.53 Esquema del Modelo Matemático Basado en Estructura de Unión

Donde:

$V3$ Y $V4$ = Son las señales de entrada.

$Math_1$, $Math_2$, $Math_3$ y $Math_4$ = Son las señales de salida.

El recuadro de nombre 'Ecuación' contiene el siguiente código:

CÓDIGO: 'Ecuación' PROGRAMADO EN 20-SIM

parameters

```
real R1= 2.0, R2= 1.5, R3=3.0, R4=4.0, R5=5.0;
```

```
real C1= 0.01, C2= 0.09, C3= 0.07;
```

```
real L1= 0.2;
```

variables

```
real e1,e2;
```

```
real p21,q7,q11,q18;
```

```
real e21,f7,f11,f18;
```

```
real f21,e7,e11,e18;
```

```
real f3,e9,e14,e16,f20;
```

```
real e3,f9,f14,f16,e20;
```

equations

```
// X PUNTO
```

```
e21=e1-e3-e18-e20;
```

```
f7=f9-f14+f16;
```

```
f11=-f14+f16;
```

```
f18=f16+f21;
```

```
//Din
```

```
f3=f9-f14+f16+f21;
```

```
e9=e1-e3-e7;
```

```
e14=e2-e1+e3+e7+e11;
```

```
e16=e1-e3-e7-e11-e18;
```

```
f20=f21;
```

```
//Z=FX
```

```
f21=(1/L1)*p21;
```

```
e7=(1/C1)*q7;
```

```
e11=(1/C2)*q11;
```

```
e18=(1/C3)*q18;
```

```
//Dout=Din
```

```
e3=R1*f3;
```

```
f9=(1/R2)*e9;
```

```
f14=(1/R3)*e14;
```

```
f16=(1/R4)*e16;
```

```
e20=R5*f20;
```

```
// X
```

```
p21=int(e21,0);
```

```
q7=int(f7,0);
```

```
q11=int(f11,0);
```

```
q18=int(f18,0);
```

```
// ENTRADA
```

```
e1=V1;
```

```
e2=V2;
```

```
// SALIDAS
```

o_1=p21;

o_2=q7;

o_3=q11;

o_4=q18;

Con el código anteriormente descrito, se obtiene la simulación de la figura 4.53. la cual muestra las dos señales de salida y dichas señales se pueden observar en la figura 4.54.

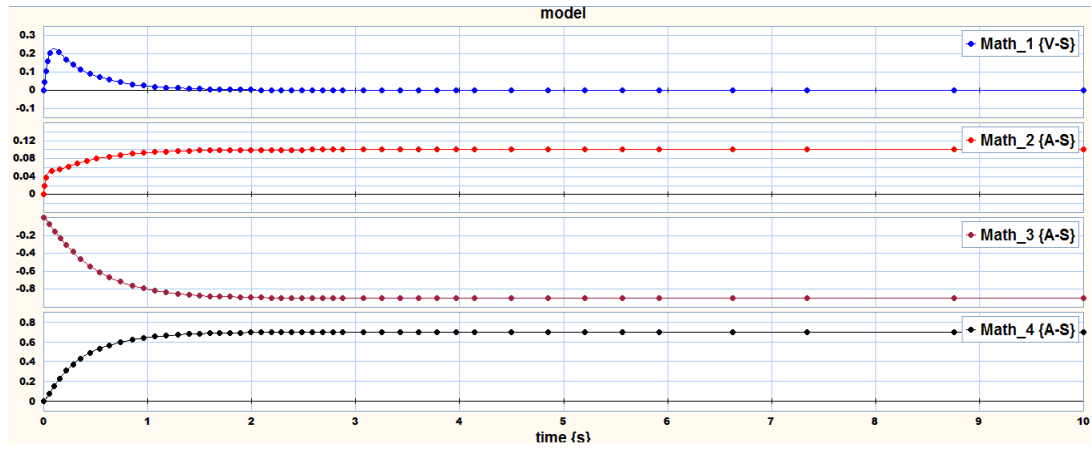


Figura 4.54 Señales de Salida del Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión.

c) Modelo Matemático en Variables (espacio) de Estado

Para sacar el Modelo Matemático en Variables de Estado del sistema, se requiere usar la siguiente ecuación, llamada Ecuación en Variables de Estado:

$$\dot{X} = Ax + Bu$$

Y para poder llegar a dicha ecuación, se deben usar las siguientes ecuaciones:

$$S'_{21} = (I - S_{22}L)^{-1} * [S_{21}]$$

$$S'_{23} = (I - S_{22}L)^{-1} * [S_{23}]$$

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1}$$

$$A = [S_{11} + S_{12}MS_{21}] * [F]$$

$$B = [S_{13} + S_{12}MS_{23}]$$

Ahora, partiendo de:

$$\begin{bmatrix} \overset{o}{x} \\ Din \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} z \\ Dout \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_{21} \\ f_7 \\ f_{11} \\ f_{18} \\ f_3 \\ e_9 \\ e_{14} \\ e_{16} \\ f_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f_{21} \\ e_7 \\ e_{11} \\ e_{18} \\ e_3 \\ f_9 \\ f_{14} \\ f_{16} \\ e_{20} \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, S_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, se tiene la siguiente matriz:

$$[S_{12}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sacando transpuesta de S_{12}^t , queda:

$$[S_{12}]^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ transpose: } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ahora aplicamos $-S_{12}^t$, nos queda:

$$-[S_{12}]^t = - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por último eliminamos transpuesta y signo negativo de $-S_{12}^t$, lo cual nos queda

S_{21} :

$$[S_{21}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, proseguimos entonces a calcular la ecuación:

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1}$$

Sabemos que el elemento de la matriz $S_{22} \neq 0$, por lo que debemos calcular por

separado los elementos de la ecuación $M = L(I - S_{22}L)^{-1}$, por ende decimos que:

$$[S_{22}] * [L] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_4} & 0 \\ -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[I] - [S_{22}L] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_4} & 0 \\ -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_4} & 0 \\ R_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -R_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora sacamos la Inversa de $[I - S_{22}L]^{-1}$

$$[I - S_{22}L]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_4} & 0 \\ R_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -R_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo cual da como resultado:

$$[I - S_{22}L]^{-1} = \begin{bmatrix} ab & R_3b & -R_2b & R_2k & 0 \\ -cb & \frac{d}{\Delta} & gb & -gk & 0 \\ cb & fb & \frac{h}{\Delta} & gk & 0 \\ -cb & -fb & gb & \frac{m}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\Delta = R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4$$

$$a=R_2R_3$$

$$b=\frac{R_4}{\Delta}$$

$$c=R_1R_2R_3$$

$$d=R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_2R_3R_4$$

$$f=R_1R_3$$

$$g=R_1R_2$$

$$h=R_1R_2R_3 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4$$

$$k=\frac{R_3}{\Delta}$$

$$m=R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4$$

Ahora, vamos a Calcular las matrices de : $[S'_{21}]$ y $[S'_{23}]$

$$S'_{21} = [I - S_{22}L]^{-1} [S_{21}]$$

$$\begin{bmatrix} ab & R_3b & -R_2b & R_2k & 0 \\ -cb & \frac{d}{\Delta} & gb & -gk & 0 \\ cb & fb & \frac{h}{\Delta} & gk & 0 \\ -cb & -fb & gb & \frac{m}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$S'_{21} = \begin{bmatrix} ab & -bR_2 - bR_3 - kR_2 & -bR_2 - kR_2 & -kR_2 \\ -bc & bg - \frac{d}{\Delta} + gk & bg + gk & gk \\ bc & \frac{h}{\Delta} - bf - gk & \frac{h}{\Delta} - gk & -gk \\ -bc & bf - \frac{m}{\Delta} + bg & bg - \frac{m}{\Delta} & -\frac{m}{\Delta} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S'_{23} = [I - S_{22}L]^{-1} [S_{23}]$$

$$\begin{bmatrix} ab & R_3b & -R_2b & R_2k & 0 \\ -cb & \frac{d}{\Delta} & gb & -gk & 0 \\ cb & fb & \frac{h}{\Delta} & gk & 0 \\ -cb & -fb & gb & \frac{m}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bR_2 + bR_3 + kR_2 & -bR_2 \\ \frac{d}{\Delta} - bg - gk & bg \\ bf - \frac{h}{\Delta} + gk & \frac{h}{\Delta} \\ \frac{m}{\Delta} - bf - bg & bg \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, como ya se tienen todos los elementos de la ecuación $M = L[I - S_{22}L]$.

Decimos que: $S_{22} = 0$ por lo tanto $M = L$, entonces aplicando el método anteriormente estudiado para calcular las matrices:

$$[S_{12}] * [M]$$

$$[S_{12}M] * [S_{21}]$$

$$[S_{11}] + [S_{12}MS_{21}]$$

Así pues, llegamos a la Matriz A, la cual como resultado dá:

$$A = [S_{11} + S_{12}MS_{21}] * [F]$$

$$A = \begin{bmatrix} -CE & JK & VW & rs \\ -C(F + G + H) & T(LM + NP + QR) & -Y(NZ - Ln + Qp) & r(t - v + w) \\ -C(G + H) & T(NP + QR) & -Y(NZ + Qp) & -r(v - w) \\ -C(H - 1) & SP & -qZ & -y \end{bmatrix}$$

Donde:

$$C = \frac{1}{L_1} \quad E = R_5 + abR_1 \quad F = b\frac{c}{R_2} \quad G = b\frac{c}{R_3} \quad H = b\frac{c}{R_4}$$

$$J = \frac{1}{C_1}R_1 \quad K = bR_2 + bR_3 + kR_2 \quad L = \frac{1}{R_2} \quad M = bg - \frac{d}{\Delta} + gk$$

$$N = \frac{1}{R_4} \quad P = bf - \frac{m}{\Delta} + bg \quad Q = \frac{1}{R_3} \quad R = bf - \frac{h}{\Delta} + gk \quad S = \frac{1}{C_1R_4}$$

$$T = \frac{1}{C_1} \quad V = \frac{1}{C_2}R_1 \quad W = bR_2 + kR_2 \quad Y = \frac{1}{C_2} \quad Z = \frac{m}{\Delta} - bg$$

$$n = bg + gk \quad p = \frac{h}{\Delta} - gk \quad q = \frac{1}{C_2R_4} \quad r = \frac{1}{C_3} \quad s = kR_1R_2 - 1$$

$$t = g\frac{k}{R_2} \quad v = \frac{m}{\Delta R_4} \quad w = g\frac{k}{R_3} \quad y = \frac{m}{\Delta C_3R_4}$$

Ahora, prosigamos a calcular la Matriz B, como sigue:

$$[S_{12}M] * [S_{23}]$$

$$\begin{bmatrix} -R_1 & 0 & 0 & 0 & -R_5 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} bR_2 + bR_3 + kR_2 & -bR_2 \\ \frac{d}{\Delta} - bg - gk & bg \\ bf - \frac{h}{\Delta} + gk & \frac{h}{\Delta} \\ \frac{m}{\Delta} - bf - bg & bg \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$[S_{12}M] * [S_{23}] =$$

$$\begin{bmatrix} -R_1(bR_2 + bR_3 + kR_2) & bR_1R_2 \\ -\frac{1}{R_2}(bg - \frac{d}{\Delta} + gk) - \frac{1}{R_4}(bf - \frac{m}{\Delta} + bg) - \frac{1}{R_3}(bf - \frac{h}{\Delta} + gk) & b\frac{g}{R_2} - \frac{h}{\Delta R_3} + b\frac{g}{R_4} \\ -\frac{1}{R_4}(bf - \frac{m}{\Delta} + bg) - \frac{1}{R_3}(bf - \frac{h}{\Delta} + gk) & b\frac{g}{R_4} - \frac{h}{\Delta R_3} \\ -\frac{1}{R_4}(bf - \frac{m}{\Delta} + bg) & b\frac{g}{R_4} \end{bmatrix}$$

sustituyendo las siguientes variables en Matriz anterior:

$$\begin{aligned} b1 &= bR_2 + bR_3 + kR_2 & b2 &= \frac{1}{R_2}, & b3 &= bg - \frac{d}{\Delta} + gk, & b4 &= \frac{1}{R_4}, \\ b5 &= bf - \frac{m}{\Delta} + bg, & b6 &= \frac{1}{R_3}, & b7 &= bf - \frac{h}{\Delta} + gk, & b8 &= bR_1R_2 \\ b9 &= b\frac{g}{R_2}, & b10 &= \frac{h}{\Delta R_3}, & b11 &= b\frac{g}{R_4} \end{aligned}$$

queda:

$$[S_{12}M] * [S_{23}] = \begin{bmatrix} -R_1b_1 & b_8 \\ -b_2b_3 - b_4b_5 - b_6b_7 & b_9 - b_{10} + b_{11} \\ -b_4b_5 - b_6b_7 & b_{11} - b_{10} \\ -b_4b_5 & b_{11} \end{bmatrix}$$

Ahora, usando la siguiente ecuación (Matriz B), queda:

$$B = [S_{13+}S_{12}MS_{23}]$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_1b_1 & b_8 \\ -b_2b_3 - b_4b_5 - b_6b_7 & b_9 - b_{10} + b_{11} \\ -b_4b_5 - b_6b_7 & b_{11} - b_{10} \\ -b_4b_5 & b_{11} \end{bmatrix} &= \\ = \begin{bmatrix} 1 - R_1b_1 & b_8 \\ -b_2b_3 - b_4b_5 - b_6b_7 & b_9 - b_{10} + b_{11} \\ -b_4b_5 - b_6b_7 & b_{11} - b_{10} \\ -b_4b_5 & b_{11} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por ende, la Matriz B queda reducida a:

$$B = \begin{bmatrix} 1 - R_1 b_1 & b_8 \\ -b_2 b_3 - b_4 b_5 - b_6 b_7 & b_9 - b_{10} + b_{11} \\ -b_4 b_5 - b_6 b_7 & b_{11} - b_{10} \\ -b_4 b_5 & b_{11} \end{bmatrix}$$

Para finalizar, se utiliza la ecuación de variables de estado, como sigue:

$$\overset{o}{\dot{X}} = Ax + Bu$$

Sustituimos valores y nos queda el resultado final del Modelo Matemático en Variables de estado:

$$\overset{o}{\dot{X}} = \begin{bmatrix} -CE & JK & VW & rs \\ -C(F + G + H) & T(LM + NP + QR) & -Y(NZ - Ln + Qp) & r(t - v + w) \\ -C(G + H) & T(NP + QR) & -Y(NZ + Qp) & -r(v - w) \\ -C(H - 1) & SP & -qZ & -y \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 - R_1 b_1 & b_8 \\ -b_2 b_3 - b_4 b_5 - b_6 b_7 & b_9 - b_{10} + b_{11} \\ -b_4 b_5 - b_6 b_7 & b_{11} - b_{10} \\ -b_4 b_5 & b_{11} \end{bmatrix} u$$

SIMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO EN VARIABLES (ESPACIOS) DE ESTADO.

A continuación, en la figura 4.55 se presenta el esquema del Modelo Matemático en Variables (Espacios) de Estado, y el resultado que se obtiene al ingresar dicho modelo al simulador de 20-Sim son las señales de salida, las cuales son presentadas en la figura 4.56

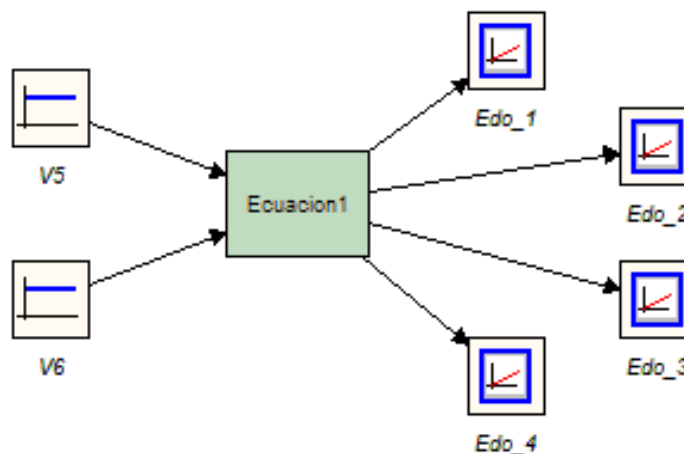


Figura 4.55 Esquema del Modelo Matemático en Variables (espacios) de Estado.

Donde:

V5 y V6 = Son las señales de entrada.

Edo_1, Edo_2, Edo_3 y Edo_4 = Son las señales de salida.

El recuadro de nombre **Ecuación 1**: Contiene el siguiente código:

CÓDIGO: .^Ecuación"PROGRAMADO EN 20-SIM

parameters

real R1= 2.0, R2= 1.5, R3=3.0, R4=4.0, R5=5.0;

real C1= 0.01, C2= 0.09, C3= 0.07, L1= 0.2;

variables

//VARIABLES DE LA MATRIZ A

real A11,A12,A13,A14;

real A21,A22,A23,A24;

real A31,A32,A33,A34;

real A41,A42,A43,A44;

//VARIABLES DE LA MATRIZ B

real B11,B12;

real B21,B22;

real B31,B32;

real B41,B42;

real dx1,dx2,dx3,dx4;

real B1,B2,B3,B4;

real x1,x2,x3,x4,u1,u2;

real D,a,b,c,d,f,g,h,k,m;

real C,E,F,G,H,J,K,L,M,N,P,Q,R,S,T,V,W,Y,Z,n,p,q,r,s,t,v,w,y;

real b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7,b8,b9,b10,b11;

equations

// VARIABLES DE DELTA

$D=(R1*R2*R3)+(R1*R2*R4)+(R1*R3*R4)+(R2*R3*R4);$

$a=R2*R3;$

$b=(R4/D);$

$$c=R1*R2*R3;$$

$$d=(R1*R2*R3)+(R1*R2*R4)+(R2*R3*R4);$$

$$f=R1*R3;$$

$$g=R1*R2;$$

$$h=(R1*R2*R3)+(R1*R3*R4)+(R2*R3*R4);$$

$$k=(R3/D);$$

$$m=(R1*R2*R4)+(R1*R3*R4)+(R2*R3*R4);$$

//VARIABLES DE LA MATRIZ A

$$C=1/L1;$$

$$E=R5+(a*b*R1);$$

$$F=b*(c/R2);$$

$$G=b*(c/R3);$$

$$H=b*(c/R4);$$

$$J=(1/C1)*R1;$$

$$K=(b*R2)+(b*R3)+(k*R2);$$

$$L=1/R2;$$

$$M=(b*g)-(d/D)+(g*k);$$

$$N=1/R4;$$

$$P=(b*f)-(m/D)+(b*g);$$

$$Q=1/R3;$$

$$R=(b*f)-(h/D)+(g*k);$$

$$S=(1/(C1*R4));$$

$$T=1/C1;$$

$$V=(1/C2)*R1;$$

$$W=(b*R2)+(k*R2);$$

$$Y=1/C2;$$

$$Z=(m/D)-(b*g);$$

$$n=(b*g)+(g*k);$$

$$p=(h/D)-(g*k);$$

$$q=(1/(C2*R4));$$

$$r=1/C3;$$

$$s=(k*R1*R2)-1;$$

$$t=g*(k/R2);$$

$$v=(m/(D*R4));$$

$$w=g*(k/R3);$$

$$y=(m/(D*C3*R4));$$

//VARIABLES DE LA MATRIZ B

$$b1=(b*R2)+(b*R3)+(k*R2);$$

$$b2=(1/R2);$$

$$b3=(b*g)-(d/D)+(g*k);$$

$$b4=1/R4;$$

$$b5=(b*f)-(m/D)+(b*g);$$

$$b6=1/R3;$$

$$b7=(b*f)-(h/D)+(g*k);$$

$$b8=b*R1*R2;$$

$$b9=b*(g/R2);$$

$$b10=(h/(D*R3));$$

$$b11=b*(g/R4);$$

$$dx1=A11*x1+A12*x2+A13*x3+A14*x4+B1;$$

$$dx2=A21*x1+A22*x2+A23*x3+A24*x4+B2;$$

$$dx3=A31*x1+A32*x2+A33*x3+A34*x4+B3;$$

$$dx4=A41*x1+A42*x2+A43*x3+A44*x4+B4;$$

// VARIABLE .^"

$$A11=-(C*E);$$

$$A12=J*K;$$

$$A13=V*W;$$

$$A14=r*s;$$

$$A21=-C*(F+G+H);$$

$$A22=T*((L*M)+(N*P)+(Q*R));$$

$$A23=-Y*((N*Z)-(L*n)+(Q*p));$$

$$A24=r*(t-v+w);$$

$$A31=-C*(G+H);$$

$$A32=T*((N*P)+(Q*R));$$

$$A33=-Y*((N*Z)+(Q*p));$$

$$A34=-r*(v-w);$$

$$A41=-C*(H-1);$$

```

A42=S*P;

A43=-q*Z;

A44=-y;

// VARIABLE "B"

B11=1-(R1*b1);

B12=b8;

B21=-(b2*b3)-(b4*b5)-(b6*b7);

B22=b9-b10+b11;

B31=-(b4*b5)-(b6*b7);

B32=b11-b10;

B41=-b4*b5;

B42=b11;

u1=V1;

u2=V2;

B1=(B11*u1)+(B12*u2);

B2=(B21*u1)+(B22*u2);

B3=(B31*u1)+(B32*u2);

B4=(B41*u1)+(B42*u2);

// entradas

x1=int(dx1,0);

x2=int(dx2,0);

x3=int(dx3,0);

```

```

x4=int(dx4,0);

// salidas

o_1=x1;

o_2=x2;

o_3=x3;

o_4=x4;

```

Con el código anteriormente descrito, se obtiene la simulación de la figura 4.55. la cual muestra las dos señales de salida y dichas señales se pueden observar en la figura 4.56

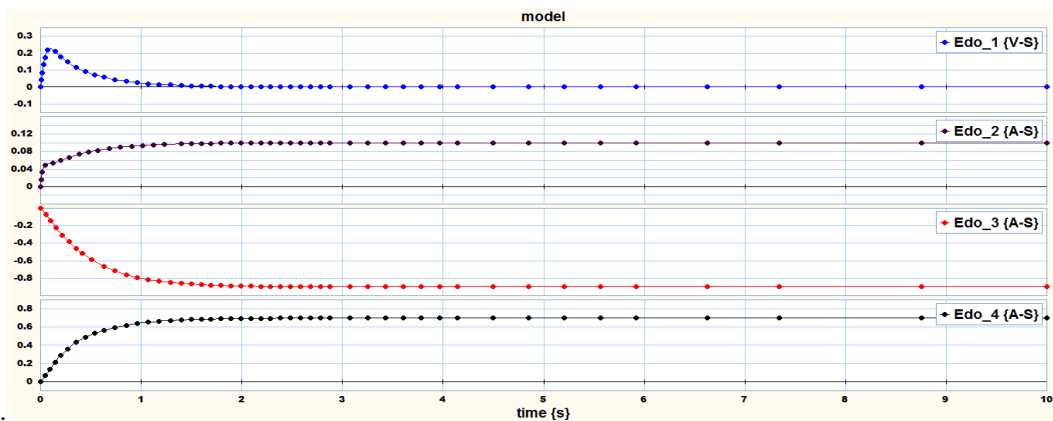


Figura 4.56 Señales de Salida del Modelo Matemático en Variables (espacios) de Estado.

A continuación se presentarán las gráficas donde se mostrarán las señales de salida de los tres modelos anteriormente simulados, los cuales son los siguientes:

- El Modelo Gráfico en Bond Graph
- El Modelo Matemático Basado en Estructura de Unión
- El Modelo Matemático en Variables (Espacios) de Estado.

De los modelos anteriormente descritos, se puede concluir que las señales de salida son iguales, tal como lo muestran las siguientes figuras.

La figura 4.57 muestra la Gráfica de la Primera señal de salida de los modelos a), b) y c) (por separado), y por consiguiente se puede observar que las tres señales son iguales:

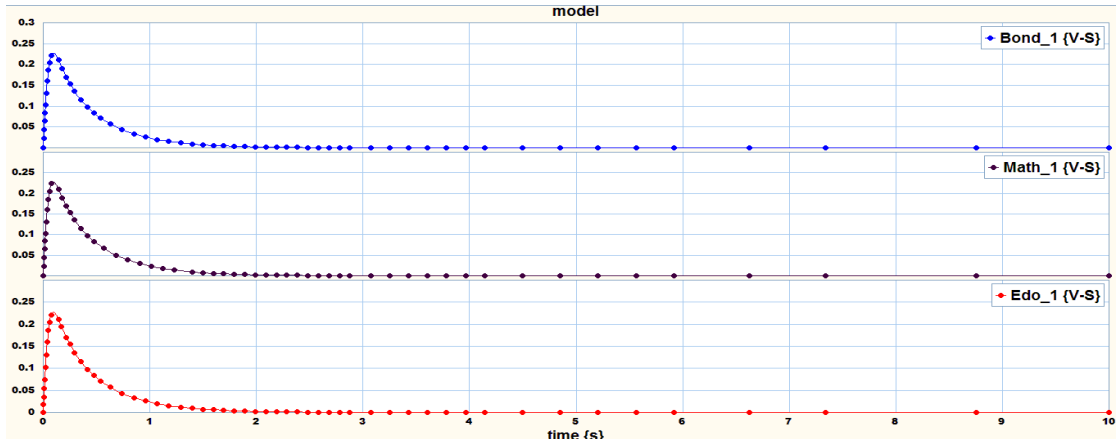


Figura 4.57 Primer señal de Salida de los Modelos a), b) y c).

En la figura 4.58 se puede observar que al juntar los Modelos a), b) y c) se comprueba que efectivamente da como resultado una sola señal, la cual se muestra a continuación:

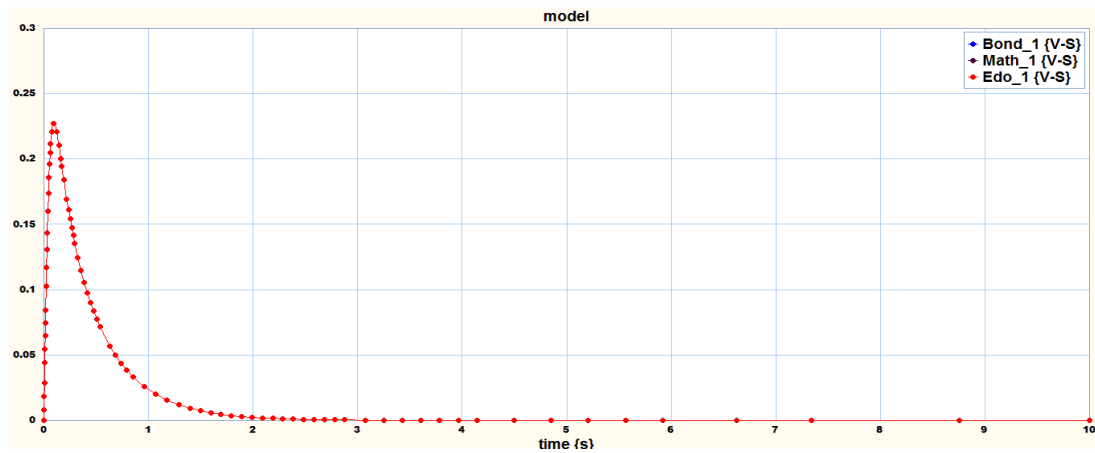


Figura 4.58 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).

La figura 4.59 muestra la Gráfica de la Segunda señal de salida de los modelos a), b) y c) (por separado), y por lo cual se observa que las tres señales también son iguales:

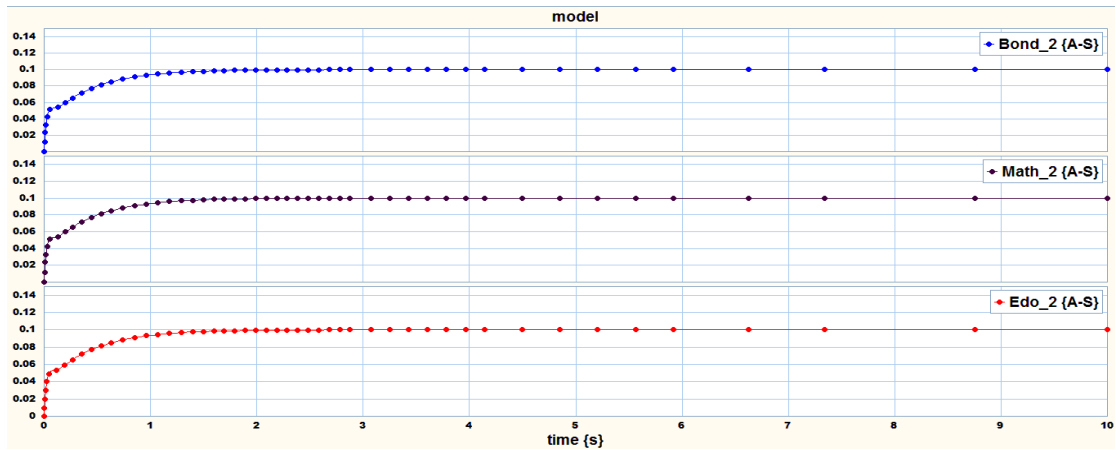


Figura 4.59 Segunda señal de Salida de los Modelos a), b) y c).

En la figura 4.60 se observa que al juntar los Modelos a), b) y c) se demuestra que efectivamente da como resultado una sola señal, la cual se muestra a continuación:

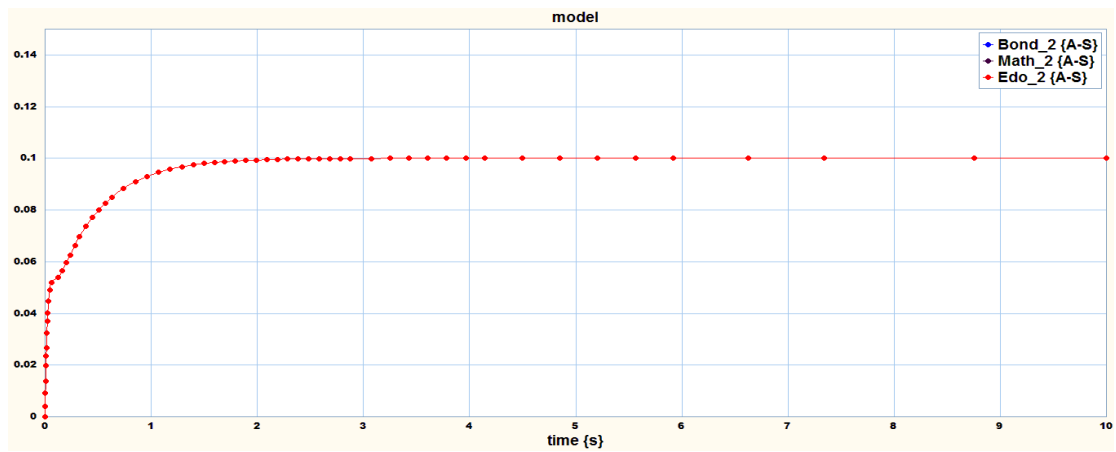


Figura 4.60 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).

La figura 4.61 muestra la Gráfica de la Tercera señal de salida de los modelos a), b) y c) (por separado), y por lo cual se observa que las tres señales también son iguales:

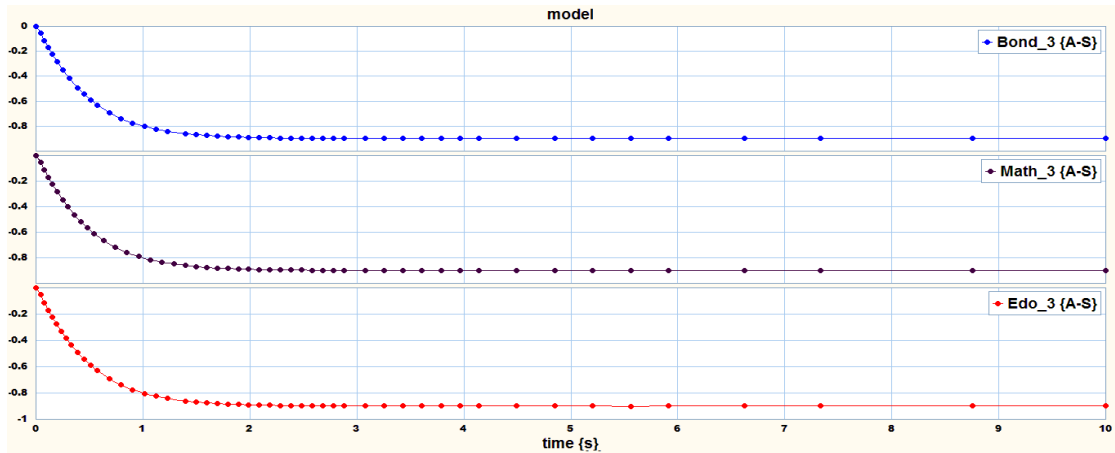


Figura 4.61 Tercera señal de Salida de los Modelos a), b) y c).

En la figura 4.62 se observa que al juntar los Modelos a), b) y c) se demuestra que efectivamente da como resultado una sola señal, la cual se muestra a continuación:

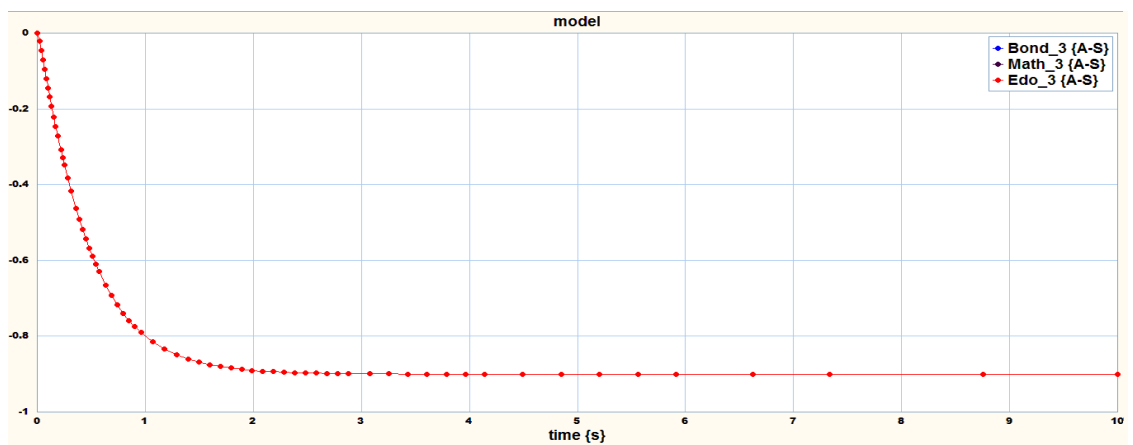


Figura 4.62 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).

La figura 4.63 muestra la Gráfica de la Cuarta señal de salida de los modelos a), b) y c) (por separado), y por lo cual se observa que las tres señales también son iguales:

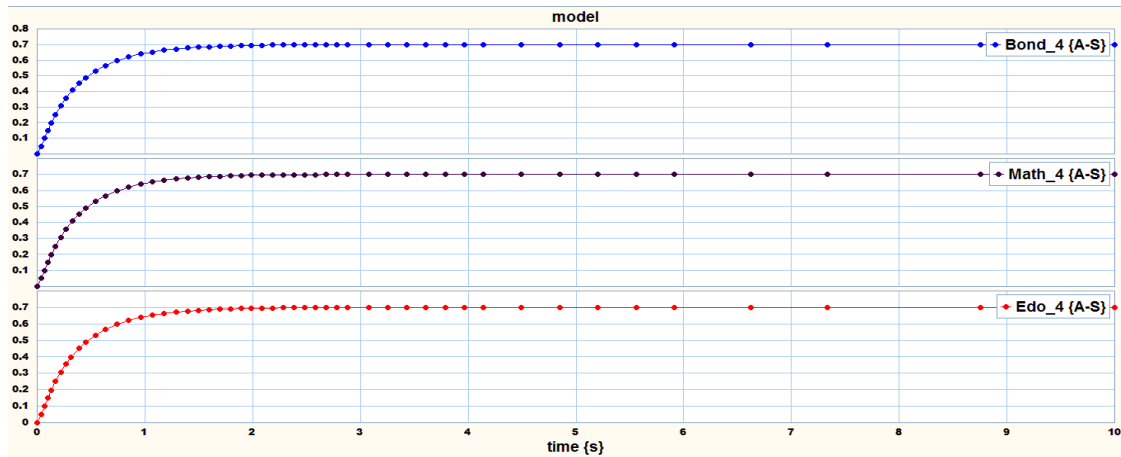


Figura 4.63 Cuarta señal de Salida de los Modelos a), b) y c).

En la figura 4.64 se observa que al juntar los Modelos a), b) y c) se demuestra que efectivamente da como resultado una sola señal, la cual se muestra a continuación:

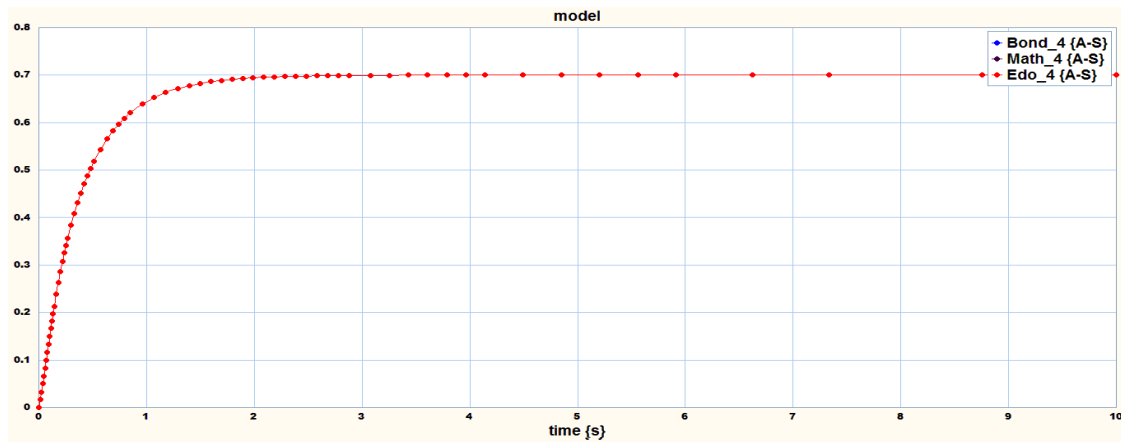


Figura 4.64 Señales de Salida juntas de los Modelos a), b) y c).

Para finalizar, En la figura 4.65 se presenta la Gráfica con las 12 señales de salida (por separado) y en la figura 4.66 se presenta la Gráfica con las 12 señales de salida (juntas) de los Modelos a), b) y c), las cuales se denotan a continuacion:

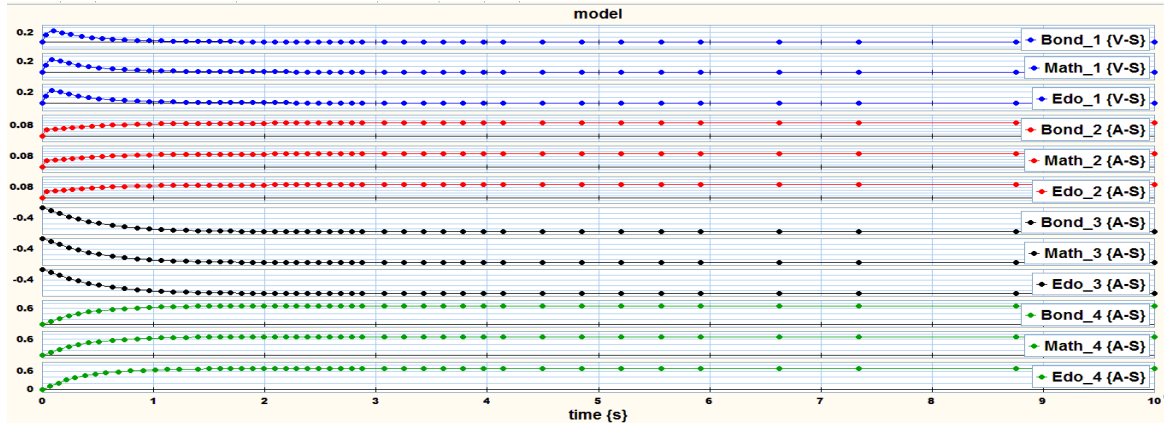


Figura 4.65 Gráfica con las 12 Señales de Salida (por separado) de los Modelos a), b) y c).

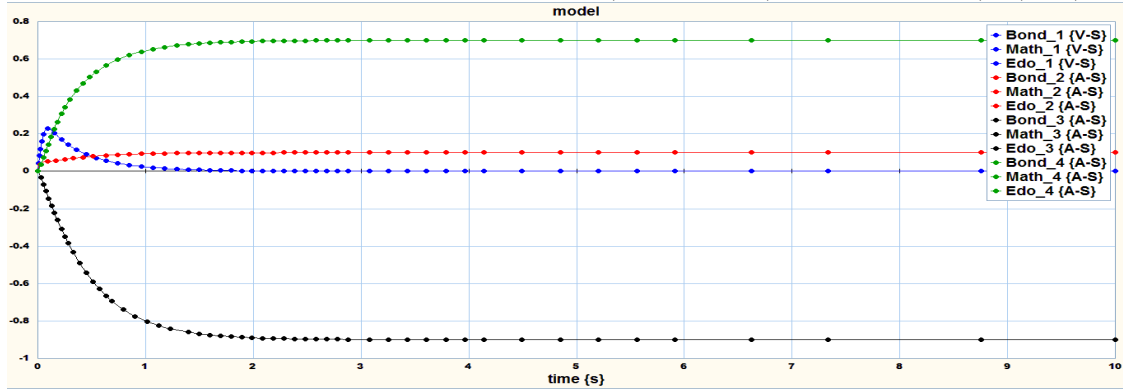


Figura 4.66 Gráfica con las 12 Señales de Salida (juntas) de los Modelos a), b) y c).

En este tipo de Modelado con Lazos algebraicos, se puede observar que en éste Segundo Caso de Estudio, también se demuestra que en las Gráficas (*desde la Primer señal de Salida hasta la Cuarta señal de salida*) los resultados fueron óptimos, ya que se compararon las salidas de los Modelos a), b) y c) arrojando como resultado semejanza en las salidas de señal.

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

En la presente tesis se observó que tan importante es la simulación en los sistemas modelados con la técnica de Bond Graph, la cual se basó en su Estructura de Unión.

Se utilizó el método de Bond Graph para el análisis y modelado de sistemas (eléctricos), y que através de éste método se logró obtener:

- >El Diagrama de Bonds
- >El Modelo de Vectores Clave y Relaciones Constitutivas
- >El Modelo Matemático del Sistema basado en su Ecuación de Estado.

En la Simulación de Sistemas Modelados en Bond Graph SIN Lazos Algebraicos

(donde el elemento de la matriz $S_{22} = 0$) se pudo comprobar (en los dos casos de estudio para este tipo de simulación) que aplicando los modelos:

- a)* El Modelo Gráfico en Bond Graph
- b)* El Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión y
- c)* El Modelo Matemático en Variables de Estado.

Se obtuvieron resultados exitosos, ya que las señales de salida en cada uno de los modelos anteriormente descritos fueron los esperados, a lo que concluimos que el objetivo se cumplió satisfactoriamente.

Así mismo, en la Simulación de Sistemas Modelados en Bond Graph con Lazos Algebraicos (donde el elemento de la matriz $S_{22} \neq 0$) en el cuál también se tuvieron dos casos de estudio para este tipo de simulación, se pudo observar y comprobar de la misma manera que en la simulación donde no existían lazos algebraicos, que aplicando los modelos *a)*, *b)* y *c)* se obtuvieron resultados óptimos, al demostrar satisfactoriamente que las señales de salida de cada modelo fueron los deseados, a lo cuál decimos que el objetivo una vez más se cumplió favorablemente.

Con el análisis realizado queda de manifiesto que el modelado con este método (Bond Graph) se facilita en trabajo, tiempo y esfuerzo en la obtención de los modelos *a)*, *b)* y *c)* de cualquier sistema que se desee analizar por medio de ésta metodología.

El modelado con Bond Graph asiste al lector para ubicar de forma gráfica las partes del sistema que estén involucradas en la investigación, esto por poseer la característica de ser un método gráfico, logrando una clara descripción del funcionamiento del sistema, sin

la necesidad que el lector conozca el modelo matemático o características de operación del sistema en estudio.

Un punto central en este trabajo de investigación fue presentar los modelos matemáticos obtenidos a través de ecuaciones de estado (sacados de los diferentes circuitos eléctricos que se estudiarán) los cuales fueron obtenidos satisfactoriamente; La obtención de las ecuaciones de estado por medio de Bond Graph se facilita en gran medida, comparandola con la aplicación de las leyes que rigen a los circuitos eléctricos.

Cabe mencionar, que las simulaciones mostradas dependen en gran medida de la precisión de los parámetros involucrados en la simulación, debido a que cada elemento que forma parte de un sistema eléctrico tiene sus propias características de funcionamiento, por ende las soluciones (señales de salida) pueden ser múltiples.

5.2. Recomendaciones

La metodología proporcionada por Bond Graph facilita en gran medida el análisis de sistemas físicos, pero se debe sujetar a las reglas y lineamientos determinados por Bond Graph, para la obtención del modelo matemático y físico, esto se traduce en que el investigador debe de seguir al pie de la letra el procedimiento, además la técnica debe estar en contexto ya que existen variaciones en las instrucciones para los distintos sistemas que se pueden presentar (mecánicos, hidráulicos, térmicos, eléctricos, económicos, biológicos, etc.)

El modelado en Bond Graph basado en su Estructura de unión que se analiza en este trabajo de tesis, es una de las técnicas de modelado que más se utiliza para la *obtención*

de modelos que representan un sistema (eléctrico, en éste caso), como por ejemplo:

- a) El Modelo Gráfico en Bond Graph
- b) El Modelo Matemático Basado en su Estructura de Unión y
- c) El Modelo Matemático en Variables de Estado.

Razón por la cual, este trabajo puede ser el punto de partida para el estudio más detallado de ésta técnica, dentro de recomendaciones para trabajos futuros se tienen las siguientes:

1) Realizar un estudio que presente un Modelado en Bond Graph que involucre lazos algebraicos y al mismo tiempo que no involucre lazos algebraicos (combinación de ambos).

2) Considerar en todo momento al analizar el modelado en Bond Graph si el elemento de la matriz $S_{22} = 0$ o si $S_{22} \neq 0$

3) Trabajar en los parámetros reales que están involucrados en un sistema (circuito eléctrico) real.

4) Analizar y modelar sistemas que permitan através de éste método lograr obtener:

-> El Diagrama de Bonds

-> El Modelo de Vectores Clave y Relaciones Constitutivas

-> El Modelo Matemático del Sistema basado en su Ecuación de Estado.

Bibliografía

- [1] . Hayt, Jr, William H., Kemmerly, Jack E., Durbin, Steven M., Análisis de Circuitos en Ingeniería, México DF, Mc Graw Hill, 2007.

- [2]. Katsuhiko Ogata, Ingeniería de Control Moderna, Madrid (España), Pearson Educación, S.A, 2010.

- [3] .Salvador Hernández, Modelado y Simulación de un apartarrayo en Bond Graph (Tesis). Diciembre 2013.

- [4] . Simulaciones. Página Principal. 01 de Mayo de 2018.

<https://simulacionis.es.tl/-DEFINICI%D3N-E-IMPORTANCIA-SIMULACI%D3N-EN-INGENIER%CDA-.htm>

- [5] . Simulación de Sistemas. Página Principal. 05 de Mayo de 2018.

<https://villalana.wordpress.com/1-1-definicion-e-importancia-de-la-simulacion-en-la-ingenieria/>

- [6] . Simulación, la Importancia en la Ingeniería. Página Principal. 17 de Mayo de 2018.

<http://simu-iti.blogspot.mx/2011/02/definiciones-e-importancia-de-la.html>

- [7] .Definiciones, Simulación y su importancia en la Ingeniería. Página Principal 20 de Mayo de 2018.

<http://naps.com.mx/blog/definiciones-e-importancia-de-la-simulacion-en-la-ingenieria/>