



**Universidad Michoacana de  
San Nicolás de Hidalgo**

---

---



**Facultad de Ingeniería  
Eléctrica**

**Control por Retroalimentación de Estados  
Estimados en un enfoque de Bond Graph**

**Tesis**

Presenta:

**Dorian González Hernández**

Para obtener el grado de:

**Ingeniero en Electrónica**

Asesor:

**Dr. Gilberto González Avalos**

**Morelia, Mich.**

**Agosto de 2023**

## Agradecimientos

A mi Madre, **María Elena**, quien ha estado conmigo toda mi vida y me ha dado todo para ser quien soy ahora, todo esto es gracias a ti Mamá.

A mis abuelos, **María y Víctor**, quienes me han apoyado toda mi vida y de los cuales he aprendido mucho.

Al amor de mi vida, **Dulce Belén**, quien siempre me está apoyando en todo sentido.

A mis mascotas, **Pili, Dolly, Eddie y Luki**, quienes están siempre conmigo, en cada etapa de mi vida.

A mi amigo, **Andrés**, quien me enseñó a programar mi primer Arduino y dio inicio a esta pasión que tengo por la electrónica.

A mi amigo, **Saúl Alberto**, quien estuvo conmigo en toda la carrera y me enseñó lo que es tener a un amigo de verdad en la universidad.

Al **Dr. Gilberto**, por compartir sus conocimientos y su tiempo conmigo, además de hacer posible un crecimiento académico y personal en mí.

A todos mis **compañeros**, quienes me acompañaron en clases y me hicieron superarme a mí mismo.

A todos mis **profesores**, quienes compartieron sus conocimientos conmigo y me brindaron la mejor formación académica posible.

## **Dedicatorias**

A mi Madre, **María Elena**, quien se merece todo por ser la mejor Mamá del mundo.

A mis abuelos, **María y Víctor**.

Al amor de mi vida, **Dulce Belén**.

A mis mascotas, **Pili, Dolly, Eddie y Luki**.

Todos ellos me acompañan todos los días en mis actividades, me apoyan, me motivan a ser mejor y a superarme a mí mismo, merecen todo mi esfuerzo y dedicación por todo lo que hacen y han hecho por mí, este trabajo es para ustedes.

## Resumen

El presente trabajo de investigación abarca la técnica de modelado de Bond Graph desde sus antecedentes hasta su metodología, esta técnica está basada en una representación gráfica de los sistemas, la cual nos permite obtener el modelo del sistema en espacio de estados, su función de transferencia y características específicas tales como la controlabilidad y la observabilidad. También, se analiza el concepto de estados estimados y su importancia en el diseño de controladores, eso nos lleva a otro concepto importante que también se muestra en el presente trabajo de investigación y es el de observador. A partir de dichos conceptos y características, se realiza un análisis al sistema y se muestra el procedimiento de diseño de un controlador por retroalimentación de estados en un enfoque de Bond Graph aplicado a dos casos de estudio. En cada caso de estudio se hace uso del software de simulación 20-SIM, para comprobar los resultados obtenidos y que se puedan visualizar gráficamente.

Palabras clave: Modelado de sistemas dinámicos, Reubicación de polos, Observador, Estabilidad y Diseño de controladores.

## **Abstract**

The present research work covers the Bond Graph modeling technique from its background to its methodology. This technique is based on a graphical representation of systems, which allows us to obtain the system model in state space, its transfer function, and specific characteristics such as controllability and observability. The concept of estimated states and their importance in controller design is also analyzed, leading to another important concept discussed in this research work, which is that of observer. Based on these concepts and characteristics, a system analysis is performed, and the procedure for designing a state feedback controller using a Bond Graph approach is presented through two case studies. In each case study, the simulation software 20-SIM is used to verify the results obtained and visualize them graphically.

# Índice

Agradecimientos .....	ii
Dedicatorias .....	iii
Resumen .....	iv
Abstract.....	v
Lista de Figuras.....	viii
Lista de Tablas .....	x
Capítulo 1 Introducción.....	1
1.1 Objetivo .....	2
1.2 Justificación.....	2
1.3 Metodología .....	2
1.4 Contenido de la Tesis.....	3
Capítulo 2 Antecedentes en el Modelado de Bond Graph .....	4
2.1 Introducción .....	4
2.2 Componentes Básicos .....	5
2.2.1 Puertos - 1 Pasivos .....	7
2.2.2 Puertos - 1 Activos o Fuentes.....	8
2.2.3 Elementos Ideales de Puerto - 2.....	9
2.2.4 Elementos de Unión, Puertos - 3.....	10
2.2.5 Causalidad para los Multipuertos Básicos .....	11
2.2.6 La Causalidad Derivativa en un Bond Graph .....	13
2.2.7 Bond Activo.....	15
2.3 Procedimiento para el Modelado de Sistemas .....	16
2.3.1 Ejemplo de un Sistema Eléctrico.....	17
2.4 Estructuras de Unión en Sistemas Multipuerto.....	21
2.4.1 Vectores Clave o Vectores Significativos .....	22
2.4.2 Relaciones de Campo y Ecuación de Estado .....	22
2.4.3 Procedimiento para la Obtención de la Estructura Unión en Bond Graph .....	25
2.4.4 Ejemplo de la Obtención de la Estructura Unión en Bond Graph.....	26
Capítulo 3 Retroalimentación de Estados y Observadores .....	29
3.1 Ecuación de Estado .....	29
3.2 Controlabilidad .....	31
3.3 Retroalimentación de Estado .....	32

3.4 Observabilidad .....	34
3.5 Observadores de Estado .....	36
3.6 Retroalimentación de Estado Estimado .....	39
<b>Capítulo 4 Retroalimentación de Estados y Observadores en Bond Graph.....</b>	<b>42</b>
4.1 Introducción .....	42
4.2 Retroalimentación de Estado .....	42
4.2.1 Controlabilidad Estructural.....	43
4.2.2 Control por Retroalimentación .....	45
4.3 Observadores de Estado .....	64
4.3.1 Observabilidad Estructural.....	65
4.3.2 Observadores .....	65
4.4 Retroalimentación de Estado Estimado .....	79
4.4.1 Caso de Estudio 1.....	79
4.4.2 Caso de Estudio 2.....	83
<b>Capítulo 5 Conclusiones y Recomendaciones.....</b>	<b>86</b>
5.1 Conclusiones Generales.....	86
5.2 Recomendaciones en Trabajos Futuros .....	86
<b>Bibliografía.....</b>	<b>87</b>

## Lista de Figuras

<b>Figura 2.1 Bond con sus variables de potencia.....</b>	<b>5</b>
<b>Figura 2.2 Puertos - 1 Pasivos en el tetraedro de estado.....</b>	<b>8</b>
<b>Figura 2.3 Fuente de esfuerzo y fuente de flujo.....</b>	<b>8</b>
<b>Figura 2.4 Transformador y Girador en Bond Graph.....</b>	<b>9</b>
<b>Figura 2.5 Unión - 0.....</b>	<b>10</b>
<b>Figura 2.6 Unión - 1.....</b>	<b>11</b>
<b>Figura 2.7 Causalidad en un Bond.....</b>	<b>12</b>
<b>Figura 2.8 Circuito eléctrico con causalidad derivativa.....</b>	<b>14</b>
<b>Figura 2.9 Bond Graph con causalidad derivativa.....</b>	<b>14</b>
<b>Figura 2.10 Bond activo.....</b>	<b>15</b>
<b>Figura 2.11 Bond Graph con un bond activo.....</b>	<b>15</b>
<b>Figura 2.12 Reglas de simplificación.....</b>	<b>17</b>
<b>Figura 2.13 Circuito eléctrico.....</b>	<b>17</b>
<b>Figura 2.14 Unión - 0 para cada nodo del circuito.....</b>	<b>18</b>
<b>Figura 2.15 Unión - 1 para cada elemento del circuito.....</b>	<b>18</b>
<b>Figura 2.16 Bonds entre uniones adyacentes.....</b>	<b>19</b>
<b>Figura 2.17 Eliminación del punto de referencia.....</b>	<b>19</b>
<b>Figura 2.18 Aplicación de las reglas de reducción.....</b>	<b>20</b>
<b>Figura 2.19 Bond Graph del ejemplo del sistema eléctrico.....</b>	<b>20</b>
<b>Figura 2.20 Diagrama de bloques de la estructura unión de un Bond Graph.....</b>	<b>21</b>
<b>Figura 2.21 BG de un sistema eléctrico.....</b>	<b>26</b>
<b>Figura 3.1 Retroalimentación de estado.....</b>	<b>32</b>
<b>Figura 3.2 Diagrama de bloques de un observador de estado completo.....</b>	<b>36</b>
<b>Figura 3.3 Diagrama de bloques de un sistema con retroalimentación de estado estimado....</b>	<b>39</b>
<b>Figura 4.1 Ejemplo del Sistema Eléctrico.....</b>	<b>45</b>
<b>Figura 4.2 Bond Graph del Sistema Eléctrico.....</b>	<b>45</b>
<b>Figura 4.3 Trayectorias Causales, fuente-elemento de almacenamiento.....</b>	<b>47</b>
<b>Figura 4.4 BGD del Sistema Eléctrico.....</b>	<b>47</b>
<b>Figura 4.5 Retroalimentación de variables de energía.....</b>	<b>48</b>
<b>Figura 4.6 Respuesta al escalón del sistema eléctrico.....</b>	<b>53</b>
<b>Figura 4.7 Comportamiento del estado del elemento C1.....</b>	<b>53</b>
<b>Figura 4.8 Comportamiento del estado del elemento L1.....</b>	<b>54</b>
<b>Figura 4.9 Motor de corriente directa.....</b>	<b>54</b>
<b>Figura 4.10 Bond Graph del motor de CD.....</b>	<b>55</b>
<b>Figura 4.11 Trayectorias causales en el modelo BG del motor de CD, fuente – elemento.....</b>	<b>57</b>
<b>Figura 4.12 BGD del sistema electromecánico.....</b>	<b>57</b>
<b>Figura 4.13 Retroalimentación de variables de energía en el Bond Graph del motor de CD..</b>	<b>58</b>
<b>Figura 4.14 Respuesta al escalón del sistema electromecánico.....</b>	<b>63</b>
<b>Figura 4.15 Comportamiento del estado del elemento La.....</b>	<b>63</b>
<b>Figura 4.16 Comportamiento del estado del elemento J.....</b>	<b>64</b>
<b>Figura 4.17 Trayectorias causales, elemento de almacenamiento - detector.....</b>	<b>66</b>
<b>Figura 4.18 Observador de estado del sistema eléctrico.....</b>	<b>67</b>
<b>Figura 4.19 Estructura unión del sistema eléctrico con observador.....</b>	<b>68</b>
<b>Figura 4.20 Comportamiento de los estados original - observado en el elemento C1.....</b>	<b>71</b>
<b>Figura 4.21 Comportamiento de los estados original - observado en el elemento L1.....</b>	<b>72</b>
<b>Figura 4.22 Trayectorias causales en el modelo BG del motor de CD, elemento - detector.....</b>	<b>73</b>

<b>Figura 4.23 Bond Graph del sistema electromecánico con observador.....</b>	<b>74</b>
<b>Figura 4.24 Estructura unión del sistema electromecánico con observador.....</b>	<b>75</b>
<b>Figura 4.25 Comportamiento de los estados original - observado en el elemento La.....</b>	<b>78</b>
<b>Figura 4.26 Comportamiento de los estados original - observado en el elemento J.....</b>	<b>78</b>
<b>Figura 4.27 Bond Graph del sistema eléctrico con observador y retroalimentación de esta- dos estimados.....</b>	<b>80</b>
<b>Figura 4.28 Respuesta de la salida y salida estimada en el sistema eléctrico.....</b>	<b>81</b>
<b>Figura 4.29 Respuesta del estado original y estado estimado del elemento C1 del sistema eléctrico.....</b>	<b>82</b>
<b>Figura 4.30 Respuesta del estado original y estado estimado del elemento L1 del sistema eléctrico.....</b>	<b>82</b>
<b>Figura 4.31 Bond Graph del sistema electromecánico con observador y retroalimentación de estados estimados.....</b>	<b>83</b>
<b>Figura 4.32 Respuesta de la salida y salida estimada en el sistema electromecánico.....</b>	<b>84</b>
<b>Figura 4.33 Respuesta del estado original y estado estimado del elemento La del sistema electromecánico.....</b>	<b>85</b>
<b>Figura 4.34 Respuesta del estado original y estado estimado del elemento J del sistema electromecánico.....</b>	<b>85</b>

## Lista de Tablas

<b>Tabla 2.1 Variables generalizadas de diferentes tipos de sistemas.....</b>	<b>7</b>
<b>Tabla 2.2 Restricciones causales para los multipuertos básicos.....</b>	<b>13</b>

# Capítulo 1

## Introducción

En el mundo de la ingeniería y la automatización, el control de sistemas dinámicos juega un papel esencial en la búsqueda de la optimización, la estabilidad y el rendimiento deseado de los procesos y sistemas. A lo largo de las décadas, diversas metodologías y enfoques han sido desarrollados para abordar el desafío de diseñar sistemas de control efectivos y eficientes. Uno de estos enfoques es el de Bond Graph en combinación con estrategias de control por retroalimentación de estados, en un enfoque de teoría de control clásica.

El modelado en Bond Graph proporcionan una representación gráfica de los sistemas físicos, permitiendo la descripción de interacciones entre diferentes componentes a través del flujo de potencia. Esta metodología resulta especialmente valiosa para sistemas multidisciplinarios y complejos, ya que permite una comprensión intuitiva de las interconexiones y dinámicas presentes en el sistema.

El control por retroalimentación de estados, es una técnica poderosa para influir en el comportamiento de sistemas dinámicos. Al considerar las variables de estado como la base para tomar decisiones de control, se puede lograr una mayor precisión y adaptabilidad en la respuesta del sistema a las perturbaciones y objetivos específicos. La combinación de este enfoque con el modelado de Bond Graph promete una solución integral y relativamente sencilla para el diseño de sistemas de control eficaces en términos de rendimiento y estabilidad.

Sin embargo, en muchos casos, estas variables de estado no están disponibles para medición directa y deben ser estimadas a partir de un observador.

En esta tesis, se explora en profundidad la aplicación de la metodología de Bond Graph en el diseño y análisis de sistemas de control por retroalimentación de estados estimados. Se muestran las ventajas de este enfoque y la comparación con el enfoque de teoría de control clásica.

## **1.1 Objetivo**

El objetivo del presente trabajo de investigación es diseñar un controlador mediante retroalimentación de estados estimados desde un enfoque de Bond Graph y mostrar su aplicación en diferentes sistemas dinámicos.

## **1.2 Justificación**

La complejidad del sistema nos hace más difícil el modelarlo y obtener sus parámetros para aplicar técnicas de control clásico. Por eso, el uso de Bond Graph nos permite modelar sistemas eléctricos, mecánicos, hidráulicos, térmicos y magnéticos mediante una representación gráfica, utilizando una colección de elementos ideales, reduciendo la dificultad para modelar y aplicar técnicas de control con una gran versatilidad.

Siempre es importante visualizar lo que estamos haciendo, nos facilita más el resolver un problema, por eso el enfoque de Bond Graph es eficiente, porque a partir de una representación gráfica podemos obtener información del sistema, en ocasiones sin realizar operaciones complejas.

Esta tesis realiza la comparación del enfoque de control clásico con el enfoque de Bond Graph para observar las ventajas y desventajas de ambos enfoques al diseñar un control por retroalimentación de estados estimados.

## **1.3 Metodología**

La metodología a seguir en el presente trabajo de investigación es aprender Bond Graph, ya que será la técnica que nos va a permitir modelar y conocer las características de los sistemas a partir de una representación gráfica y una estructura unión para poder aplicar técnicas de control, para ello también es necesario un conocimiento previo de la teoría de control clásico.

A partir de la representación gráfica del sistema y la estructura unión que nos entrega Bond Graph obtendremos también la representación en espacio de estados, la cual permite determinar características específicas como son la

observabilidad y la controlabilidad del sistema. Obteniendo las características anteriores, podremos diseñar nuestro observador de estados y nuestro controlador por retroalimentación de estados estimados.

Se aplicará la técnica de Bond Graph a dos casos de estudio para el diseño de un controlador por retroalimentación de estados estimados y mostrar la relación que hay en cada método con la teoría de control clásica. Finalmente, para comprobar ambos diseños en cada caso de estudio se hará uso del software 20-SIM, el cual permite simular los comportamientos de cada sistema y comprobar los resultados.

## **1.4 Contenido de la Tesis**

El presente trabajo de investigación está estructurado de la siguiente manera:

Capítulo 1, En este capítulo se presenta la introducción al presente trabajo de investigación, así como su objetivo, metodología, justificación y estructura.

Capítulo 2, en este capítulo se ven los antecedentes de Bond Graph para el modelado de sistemas dinámicos, desde la definición de Bond Graph hasta cada procedimiento de modelado y sus propiedades.

Capítulo 3, este capítulo muestra la definición de retroalimentación de estados y de observador desde un enfoque de control clásico.

Capítulo 4, contiene el análisis y procedimiento de diseño de un controlador por retroalimentación de estados estimados, para el cual también se ve el procedimiento de diseño de un observador, ambos se ven desde un enfoque de Bond Graph y se aplica a dos casos de estudio.

Por último, el capítulo 5 muestra las conclusiones obtenidas del presente trabajo de investigación y recomendaciones.

## Capítulo 2

### Antecedentes en el Modelado de Bond Graph

#### 2.1 Introducción

El uso del modelado y simulación nos brinda mucha información acerca de los sistemas, estas herramientas hoy en día nos ayudan a realizar un buen análisis sobre el sistema, nos ayudan también en el proceso de diseño y simular el comportamiento del sistema, todo eso sin la necesidad de invertir en un sistema físico y realizar pruebas en él que pueden ser riesgosas si no se hace un análisis previo.

En el análisis de un sistema, el primer paso es obtener su modelo, el cual puede tomar distintas formas dependiendo el sistema que se esté analizando. Los modelos son normalmente contruidos para resolver un problema propuesto. En particular, el modelado en Bond Graph representa un enfoque unificado para el modelado y manipulación de sistemas dinámicos de ingeniería que permite obtener sus ecuaciones de estado y conocer sus propiedades de observabilidad, controlabilidad y dependencia lineal de sus elementos, basado en una representación gráfica y la generalización de los conceptos de variable de flujo y esfuerzo [1].

La herramienta de Bond Graph fue definida por **Henry Paynter** en 1961, formalizada por **Karnopp** (1983), **Rosenberg** (1990), **Thomas** (1991) y **Breedveld** (1984), está situada entre el sistema físico y los modelos matemáticos asociados [1]. Esta herramienta es muy eficiente para la simulación y diseño de sistemas, además de que tiene una gran versatilidad.

Un Bond Graph es una representación gráfica de un sistema donde una colección de componentes interactúa unos con otros a través de puertos de energía. Estos componentes colocados en el sistema describen cómo fluye la potencia a través del sistema [1].

Como se mencionó anteriormente, Bond Graph cuenta con una gran versatilidad ya que permite modelar sistemas eléctricos, mecánicos,

magnéticos, hidráulicos, térmicos y neumáticos, haciendo uso solamente de los elementos ideales con los que cuenta esta técnica de modelado.

## 2.2 Componentes Básicos

Bond Graph está formado por diferentes componentes para la representación gráfica de los sistemas, utilizando únicamente los intercambios de energía que existen entre los elementos.

El componente fundamental es el *Bond* de energía utilizado para acoplar los puertos de energía de los componentes del sistema [1]. Es representado por una semiflecha que indica la dirección a donde fluye la energía entre los puertos donde está conectado.

En el modelado de sistemas en Bond Graph es necesario dividir el sistema y después ensamblarlo para que pueda ser modelado. Las partes principales de un sistema son llamadas *subsistemas* y las partes no reducibles son llamadas *componentes*, básicamente un subsistema es una parte de un sistema que es modelado como un sistema en sí mismo.

Los *puertos* son los lugares en donde los subsistemas se pueden interconectar ya que ahí la energía puede fluir. Cuando un sistema tiene un puerto sencillo es denotado como *puerto-1*, cuando se tienen dos puertos es llamado *puerto-2* y cuando los sistemas son multipuertos son llamados *puertos-n*, donde  $n$  es el número de puertos.

La conexión de dos multipuertos está descrita por variables llamadas *variables de potencia*, las cuales son las *variables generalizadas* en Bond Graph ya que pueden ser usadas en todos los dominios de energía. Estas variables son llamadas *esfuerzo*  $e(t)$  y *flujo*  $f(t)$ . En la Figura 2.1 se muestra la representación del bond con sus variables de potencia.

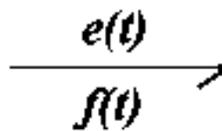


Figura 2.1 Bond con sus variables de potencia.

Relación de las variables de potencia:

$$p(t) \triangleq e(t)f(t) \quad (2.1)$$

En sistemas que almacenan energía es necesario definir variables que representen el estado del sistema llamadas *variables de energía* denominadas *momento*  $p(t)$  o *esfuerzo acumulado*  $e_a(t)$  y *desplazamiento*  $q(t)$  o *flujo acumulado*  $f_a(t)$ .

Están dadas por:

$$p(t) = e_a(t) \triangleq \int^t e(\tau)d\tau \quad (2.2)$$

$$q(t) = f_a(t) \triangleq \int^t f(\tau)d\tau \quad (2.3)$$

El uso de las variables generalizadas es lo que le da versatilidad a Bond Graph al momento de modelar sistemas, ya que podemos usarlas en diferentes tipos de sistemas como nos muestra la Tabla 2.1.

Bond Graph cuenta con una colección de elementos que nos ayudan a modelar los sistemas mediante una representación gráfica, dichos elementos cuentan con una clasificación.

Tabla 2.1 Variables generalizadas de diferentes tipos de sistemas.

VARIABLES	Generalizadas (t)	Sistema Eléctrico (t)	Sistema Hidráulico (t)	Sistema Mecánico Rotacional (t)	Sistema Mecánico Traslacional (t)
Flujo	$f(t)$	Corriente $i(t)$	Caudal $Q(t)$	Velocidad angular $w(t)$	Velocidad $V(t)$
Esfuerzo	$e(t)$	Voltaje $v(t)$	Presión $P_e(t)$	Par $\tau(t)$	Fuerza $F(t)$
Momento	$p(t) = \int e(t)dt$	Enlace de flujo $\lambda(t)$	Integral de presión $P_p(t)$	Momento angular $H(t)$	Momento rotacional $P_R(t)$
Desplazamiento	$q(t) = \int f(t)dt$	Carga $q(t)$	Volumen $V(t)$	Ángulo $\theta(t)$	Distancia $x(t)$
Potencia	$P(t) = e(t)f(t)$	$v(t)i(t)$	$P_e(t)Q(t)$	$\tau(t)w(t)$	$F(t)V(t)$

### 2.2.1 Puertos - 1 Pasivos

Se consideran elementos ideales los elementos que representan disipación de potencia y dos formas de almacenamiento de energía.

En Bond Graph se denominan Puertos - 1 Pasivos a aquellos elementos que intercambian potencia en un puerto o elemento sencillo pasivo. Básicamente son tres los elementos que constituyen esta clasificación.

- Elemento de disipación R.
- Elemento de almacenamiento de flujo I.
- Elemento de almacenamiento de esfuerzo C.

La Figura 2.2 muestra la relación de las variables generalizadas por los elementos R, I, C.

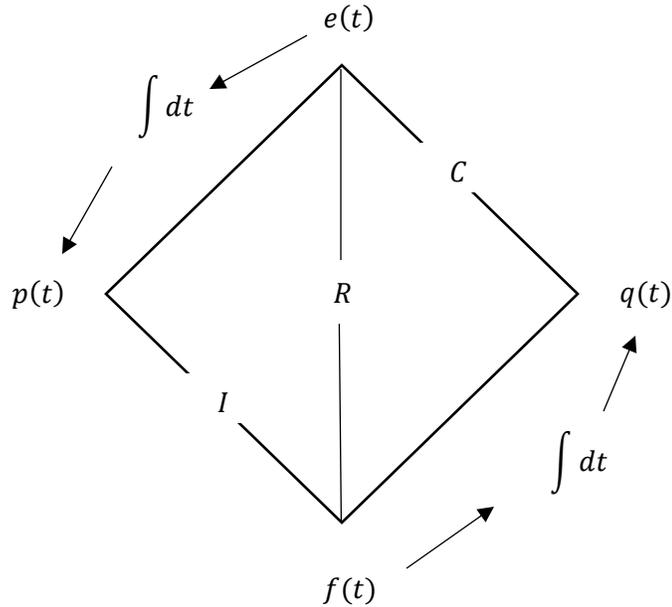


Figura 2.2 Puertos - 1 Pasivos en el tetraedro de estado.

### 2.2.2 Puertos - 1 Activos o Fuentes

Los elementos que introducen energía al sistema son llamados *fuentes*.

Existen dos tipos de fuentes.

- *Fuente de esfuerzo* (representa voltaje, presión o fuerza) denotada  $M_{Se}$ .
- *Fuente de flujo* (representa corriente, caudal o velocidad) denotada  $M_{Sf}$ .

Podemos observar la representación gráfica de ambas en la figura 2.3.



Figura 2.3 Fuente de esfuerzo y fuente de flujo.

### 2.2.3 Elementos Ideales de Puerto - 2

Se consideran dos elementos ideales de puerto - 2, los cuales son:

- *Transformador* (TF).
- *Girador* (GY).

Estos elementos son sistemas lineales que se caracterizan por cambiar la relación entre las variables de flujo y esfuerzo.

La Figura 2.4 muestra la representación del Transformador y del Girador en Bond Graph, respectivamente; donde  $n$  son los *módulos del transformador* y  $r$  son los *módulos del girador*.

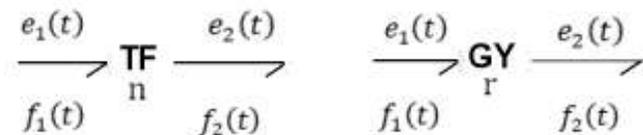


Figura 2.4 Transformador y Girador en Bond Graph.

Estos elementos están constituidos por dos puertos y una relación lineal entre las variables generalizadas.

Las relaciones entre variables generalizadas de Bond Graph para el *transformador* están dadas por:

$$e_1(t) = ne_2(t) \quad (2.4)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{n}f_2(t) \quad (2.5)$$

Para el *Girador* están dadas por:

$$e_1(t) = rf_2(t) \quad (2.6)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{r} e_2(t) \quad (2.7)$$

### 2.2.4 Elementos de Unión, Puertos - 3

Los Puertos - 3 o también llamados *uniones* dado que cumplen la función de interconectar tres o más puertos de energía. Estos Puertos - 3 manifiesta una de las ideas fundamentales del formalismo de Bond Graph, representan en forma de multipuerto los dos tipos de conexiones, en serie y en paralelo.

Para los Puertos - 3 vamos a considerar dos elementos los cuales se describen a continuación:

- *Unión de flujo, unión - 0 o unión de esfuerzo común.*

Esta unión representa la conexión en paralelo, como se muestra en la Figura 2.5.

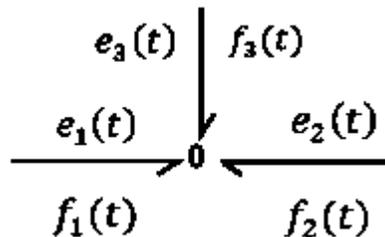


Figura 2.5 Unión - 0.

Las relaciones de interconexión que describen una Unión - 0 están dadas por:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \quad (2.8)$$

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0 \quad (2.9)$$

- *Unión de esfuerzo, unión - 1 o unión de flujo común.*

Esta unión representa la conexión en serie, como se muestra en la Figura 2.6.

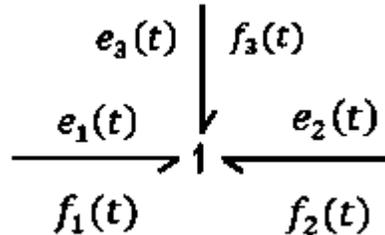


Figura 2.6 Unión - 1.

Las relaciones de interconexión que describen una Unión - 1 están dadas por:

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) \quad (2.10)$$

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \quad (2.11)$$

### 2.2.5 Causalidad para los Multipuertos Básicos

El concepto de causalidad está basado en las relaciones de causa y efecto, las cuales se representan en direcciones opuestas cuando se trata de esfuerzo y flujo. Las relaciones de causa y efecto organizan las leyes constitutivas de los elementos en conjuntos de ecuaciones diferenciales. Se utiliza una marca en un bond, esta marca es llamada *trazo causal* y nos indica como  $e(t)$  y  $f(t)$  simultáneamente son determinados causalmente en un bond. En la Figura 2.7 se muestra el trazo causal con color rojo en un bond y las direcciones que toman el esfuerzo y el flujo cuando la causalidad se asigna.

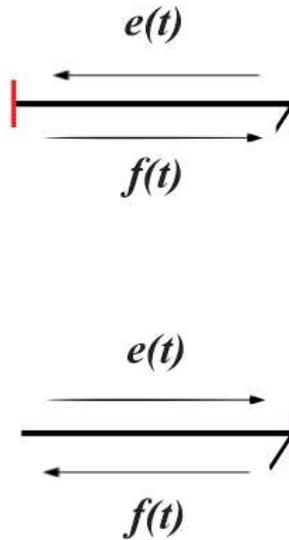


Figura 2.7 Causalidad en un Bond.

El trazo causal indica un sentido de entrada – salida para el esfuerzo  $e(t)$  y el flujo  $f(t)$  en cada puerto de los componentes. El esfuerzo entra en un bond en el mismo sentido del trazo causal.

Hay reglas que se deben cumplir al asignar causalidad a cada bond, se presentan en la Tabla 2.2.

Para obtener las ecuaciones diferenciales cumpliendo con las reglas de causalidad de la Tabla 2.2, debe seguirse el siguiente procedimiento en orden estricto.

Procedimiento para la asignación de la causalidad a un multipuerto:

1. Considerar cualquier fuente de esfuerzo o fuente de flujo y asignar su causalidad requerida e inmediatamente extender las implicaciones causales, usando las restricciones de las uniones 0 o 1, transformadores y giradores (ver Tabla 2.2).
2. Asignar causalidad integral a los elementos de almacenamiento respetando las restricciones de la Tabla 2.2.
3. Escoger cualquier elemento de disipación que no esté asignado y darle una causalidad arbitraria. Extender las implicaciones causales, usando las restricciones de las uniones 0 o 1, transformadores y giradores (Ver Tabla 2.2).

Tabla 2.2 Restricciones causales para los multipuertos básicos.

Causalidad Necesaria	$MS_e \text{--- }$	$MS_f \text{ ---}$
Causalidad Restrictiva	$\text{--- TF---}$ $\text{--- GY---}$	$\text{ ---TF---}$ $\text{ ---GY---}$
	$\text{--- 0---}$   $\text{ 0---}$	$\text{ 0---}$
	$\text{ 1---}$   $\text{--- 1---}$	$\text{--- 1---}$
Causalidad Integral	$\text{--- I}$	$\text{ ---C}$
Causalidad Derivativa	$\text{ ---I}$	$\text{--- C}$
Causalidad Arbitraria	$\text{--- R}$	$\text{ ---R}$

Se dice que un Bond Graph es *Causalmente Correcto* cuando no existe conflicto de causalidad entre los elementos y las uniones. En particular debe observarse que la causalidad derivativa de un elemento almacenador de energía proporciona propiedades importantes que se explican en la siguiente sección.

### 2.2.6 La Causalidad Derivativa en un Bond Graph

La causalidad derivativa se presenta cuando un sistema contiene elementos de almacenamiento de energía que no son dinámicamente independientes, en una asignación de causalidad integral predefinida. Esto se puede observar en el siguiente ejemplo de un sistema eléctrico, cuando se tienen dos capacitores en paralelo como se muestra en la Figura 2.8.

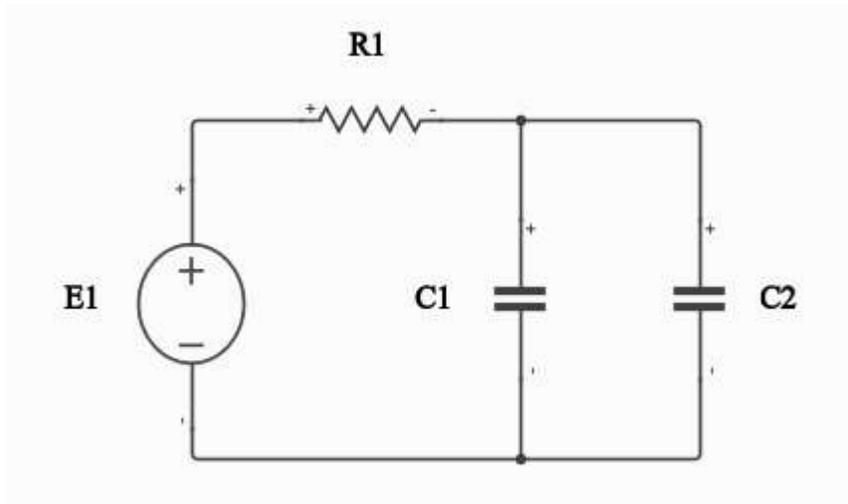


Figura 2.8 Circuito eléctrico con causalidad derivativa.

Hay dos posibles modelos en Bond Graph los cuales dependen de si a C1 se le asigna una causalidad integral entonces C2 tendrá una causalidad derivativa o viceversa, ambos modelos se ilustran en la Figura 2.9.

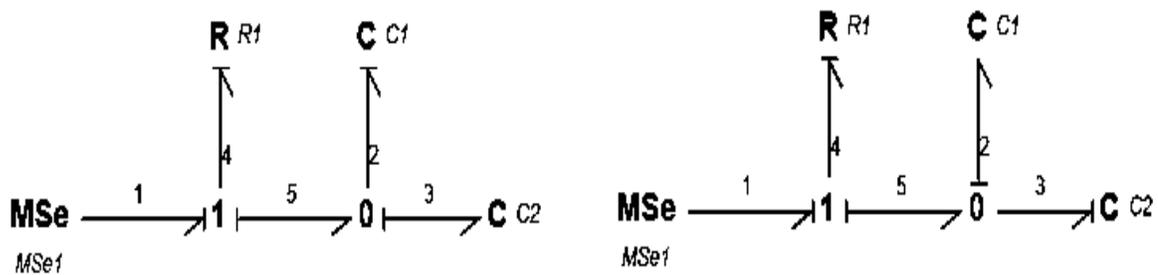


Figura 2.9 Bond Graph con causalidad derivativa.

El número de elementos que almacenan energía en causalidad integral es el número de ecuaciones diferenciales linealmente independientes y el número de elementos de almacenamiento en causalidad derivativa es el número de ecuaciones diferenciales linealmente dependientes.

## 2.2.7 Bond Activo

Un bond normal tiene dos señales, esfuerzo y flujo. A diferencia, un *bond activo* comunica una de las señales posibles en una sola dirección.

Se representa por una flecha completa, como se muestra en la Figura 2.10, indicando un flujo de señal de potencia cero.

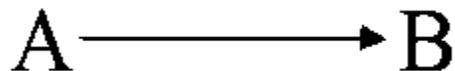


Figura 2.10 Bond activo.

Un bond activo se usa como una señal en un diagrama de bloques, la cual conecta un bloque a otro sin consumir energía como se ilustra a continuación en la Figura 2.11.

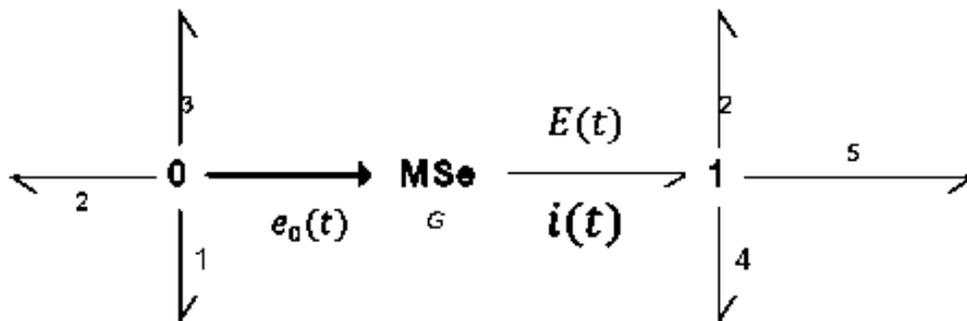


Figura 2.11 Bond Graph con un bond activo.

El bond activo que entra a  $MS_e$  indica que  $E(t)$  es modulada por  $e_0(t)$ , así,  $E(t) = Ge_0(t)$ , donde  $G$  es la ganancia de voltaje.

El bond activo viene de una unión  $-0$ , el voltaje  $e_0(t)$  es el mismo que el de  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$ . Además, el bond activo tiene potencia cero debido a que se

considera que la corriente correspondiente a  $e_0(t)$  es despreciable. La suma de las corrientes de la unión - 0 se debe únicamente a  $i_1$ ,  $i_2$  y  $i_3$ .

Ahora que los componentes básicos para el modelado de sistemas físicos fueron estudiados en esta sección, a continuación, se proporciona un procedimiento para modelar sistemas eléctricos, el cual se puede extender a otros tipos de sistemas físicos.

## 2.3 Procedimiento para el Modelado de Sistemas

A lo largo de este capítulo se ha mencionado que un sistema físico puede ser representado gráficamente con la técnica de modelado de Bond Graph, en esta sección se explica como representar sistemas eléctricos utilizando dicha técnica con un procedimiento de modelado simple y directo, los pasos a seguir son los siguientes:

1. Dibujar una unión - 0 para cada punto en el esquema donde las trayectorias paralelas coincidan.
2. Dibujar una unión - 1 para cada componente en una trayectoria serie y conectar el componente apropiado de Bond Graph por un bond en esa unión. La dirección de la semiflecha en cada bond indica la dirección asumida del flujo de potencia, es decir, a partir de fuentes y hacia elementos almacenadores y disipadores.
3. Dibujar bonds entre uniones adyacentes, nuevamente indicando la dirección de flujo de potencia.
4. Remover la unión - 0 que representa el punto de referencia y remover todos los bonds conectados a esa unión.
5. Simplificar de acuerdo a las reglas de la Figura 2.12.

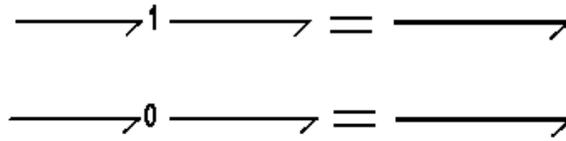


Figura 2.12 Reglas de simplificación.

- Finalmente se asigna la causalidad a cada elemento respetando las restricciones de causalidad de la Tabla 2.2.

Este procedimiento se aplica a continuación al modelado de un sistema eléctrico.

### 2.3.1 Ejemplo de un Sistema Eléctrico

Para el caso de los sistemas eléctricos se realizan las siguientes observaciones al procedimiento estudiado anteriormente.

- En el paso 1, para cada cambio de voltaje en el circuito le corresponde una unión - 0.
- En el paso 4, la referencia es el nodo de tierra, el cual tiene un voltaje de cero.

A continuación, se aplica el procedimiento anterior con un ejemplo que se ilustra en la Figura 2.13.

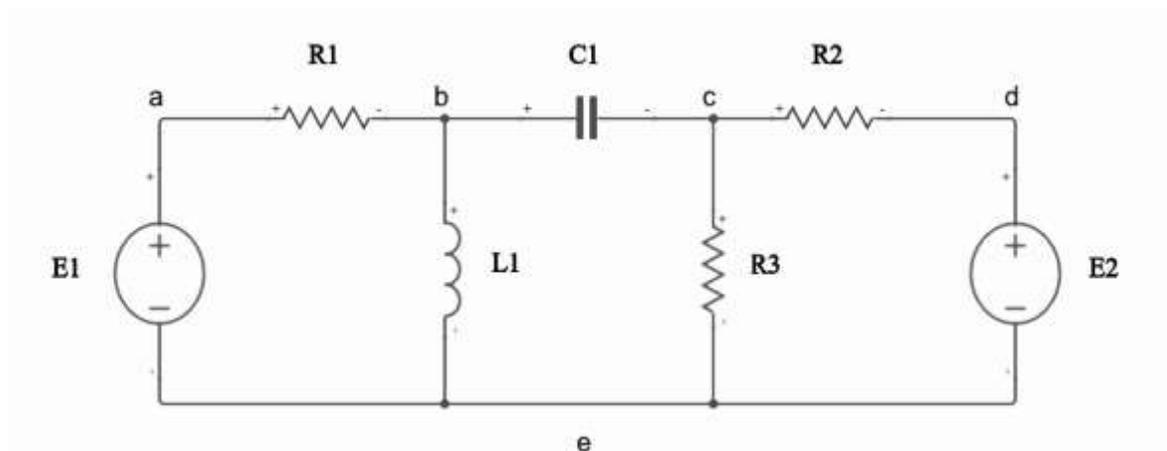


Figura 2.13 Circuito eléctrico.

El paso 1 del procedimiento se ilustra en la Figura 2.14.

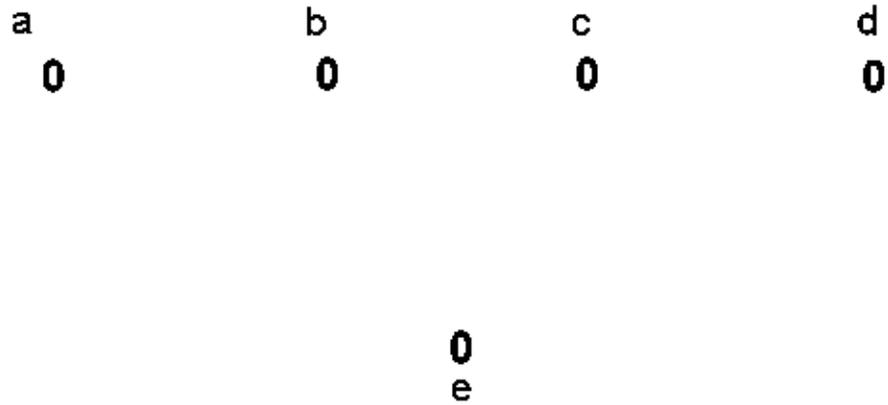


Figura 2.14 Unión - 0 para cada nodo del circuito.

El paso 2 se muestra en la Figura 2.15.

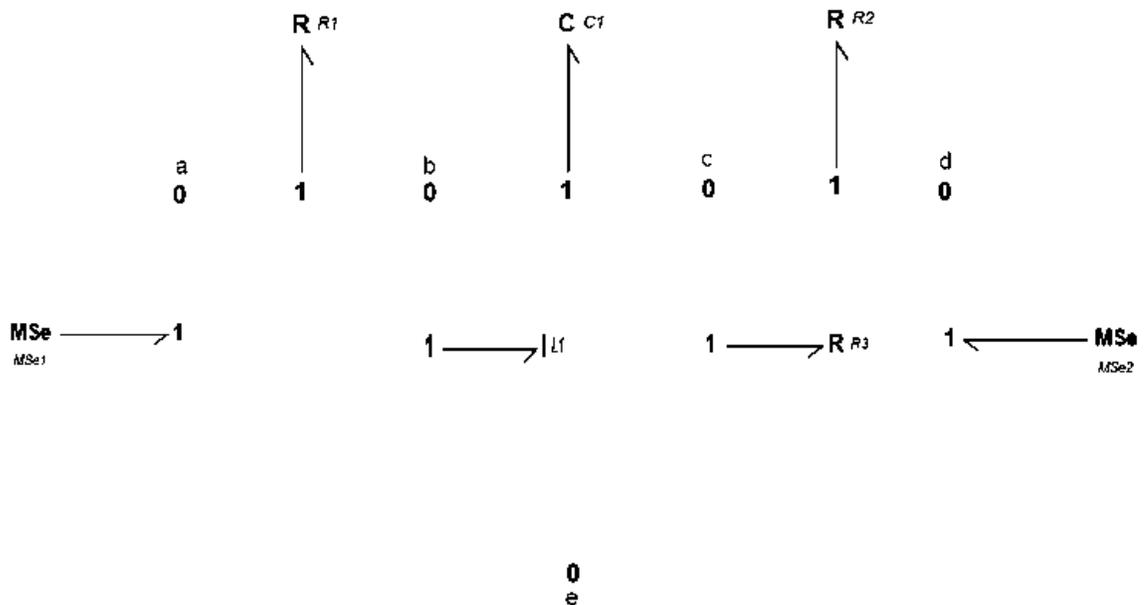


Figura 2.15 Unión - 1 para cada elemento del circuito.



Después se aplica el paso 5, el cual se ilustra en la Figura 2.18.

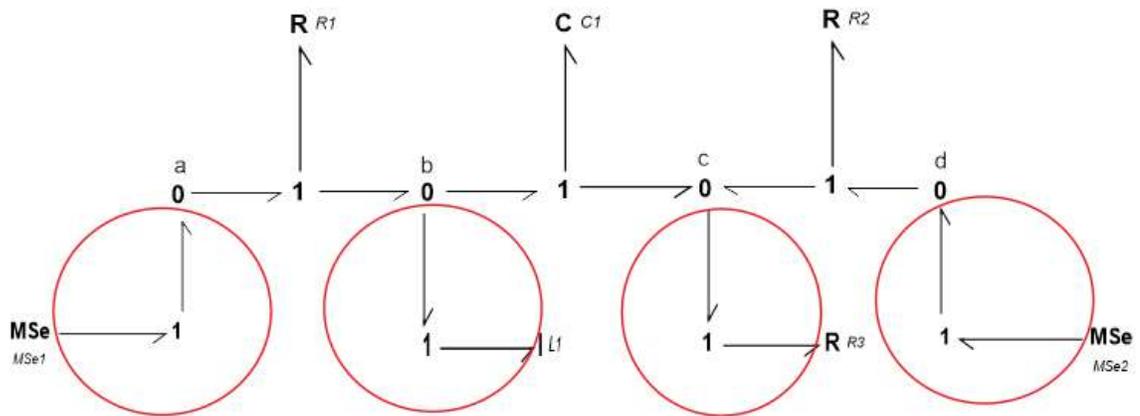


Figura 2.18 Aplicación de las reglas de reducción.

Finalmente, después de aplicar las reglas de reducción se aplica el paso 6 y se enumera cada bond para obtener el Bond Graph final del circuito eléctrico.

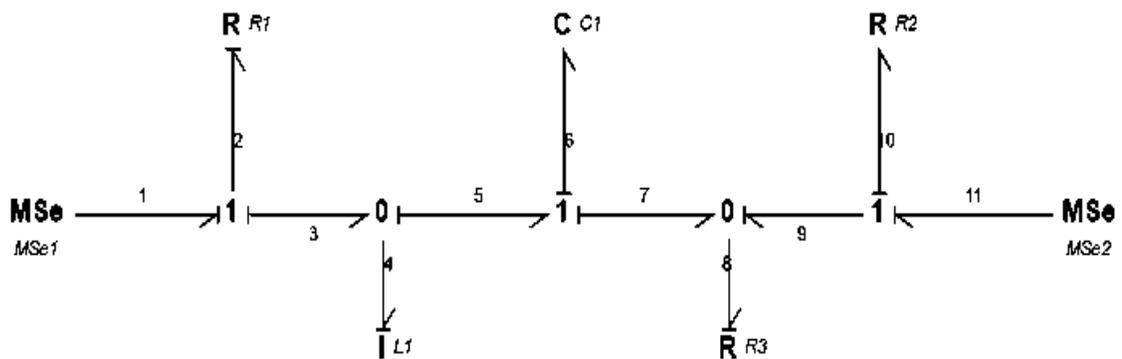


Figura 2.19 Bond Graph del ejemplo del sistema eléctrico.

## 2.4 Estructuras de Unión en Sistemas Multipuerto

Considerar algunos tipos de sistemas grandes como campos interconectados, nos da una estructura dinámica y entonces la generación, manipulación y reducción de muchas ecuaciones es hecha sistemáticamente para una implementación exitosa.

La *Estructura unión* es una representación análoga a una representación en espacio de estados tradicional en donde se visualiza la dinámica del sistema, la diferencia radica en que se utilizan variables de energía y no los estados en sí, aunque se sabe la relación entre estas variables de energía y sus estados correspondientes, por lo que a partir de esta representación podemos obtener una representación de estados tradicional [2].

En la Figura 2.20 se puede apreciar un diagrama de bloques de la estructura unión de un Bond Graph, en el cual se pueden ver los elementos que conforman cualquier sistema dinámico.

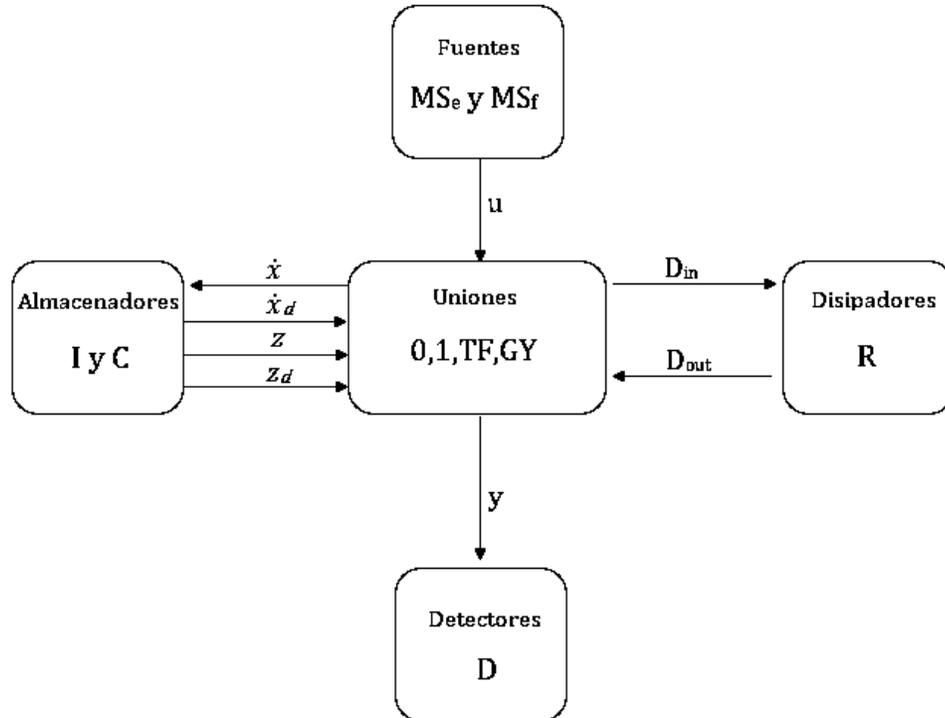


Figura 2.20 Diagrama de bloques de la estructura unión de un Bond Graph.

Para obtener la estructura unión de un sistema, es necesario tener conocimiento sobre los *Vectores Clave* o *Vectores Significativos* y las *Relaciones de Campo*.

### 2.4.1 Vectores Clave o Vectores Significativos

Los *Vectores clave* están representados en la Figura 2.20 por las flechas, donde  $u(t)$  contiene las variables de potencia o los esfuerzos y flujos impuestos por los elementos de las fuentes en la Estructura Unión. Los estados  $x(t)$  y  $x_d(t)$  están compuestos por las variables de energía, momento generalizado  $p(t)$  en elementos I y desplazamiento generalizado  $q(t)$  en elementos C en causalidad integral y derivativa respectivamente.  $z(t)$  y  $z_d(t)$  son variables de co-energía en causalidad integral y derivativa, respectivamente  $D_{in}(t)$  y  $D_{out}(t)$  son una mezcla de esfuerzos y flujos que muestran los intercambios energéticos entre los elementos de disipación y la Estructura Unión.

### 2.4.2 Relaciones de Campo y Ecuación de Estado

Las relaciones de campo no lineales entre los elementos de almacenamiento y de disipación son:

$$z(t) = \Phi F(x) \quad (2.12)$$

$$z_d(t) = \Phi F_d(x_d) \quad (2.13)$$

$$D_{out}(t) = \Phi L(D_{in}) \quad (2.14)$$

Donde:

$\Phi F$  es una función que relaciona cada  $z_i$  con  $x_i$  para  $i = 1, \dots, n$ .

$\Phi F_d$  denota una función que relaciona cada  $z_{di}$  con  $x_{di}$  para  $i = 1, \dots, m$ .

$\Phi L$  representa una función que relaciona cada  $D_{outi}$  con  $D_{ini}$  para  $i = 1, \dots, r$ .

Donde  $n$  es el número de elementos de almacenamiento en causalidad integral,  $m$  es el número de elementos en causalidad derivativa y  $r$  es el número de elementos disipadores.

El comportamiento de un elemento específico está descrito por una ley física la cual es llamada como su *Relación Constitutiva*. Si las Relaciones Constitutivas son lineales tenemos:

$$z(t) = Fx(t) \quad (2.15)$$

$$z_d(t) = F_d x_d(t) \quad (2.16)$$

$$D_{out}(t) = LD_{in}(t) \quad (2.17)$$

Donde:

$L$ ,  $F$  y  $F_d$  son matrices reales de dimensión  $r \times r$ ,  $n \times n$  y  $m \times m$ , respectivamente.

Las relaciones de la Estructura Unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$z_d(t) = -S_{14}^T z(t) \quad (2.19)$$

Donde la Estructura Unión está formada por:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Los elementos de la matriz  $S$  toman valores dentro del conjunto  $\{0, \pm 1, \pm n, \pm r\}$  donde  $n$  y  $r$  son los módulos del transformador y girador, respectivamente. La matriz  $S$  está particionada de acuerdo a la dimensión de los vectores clave. Las submatrices  $S_{ij}$  tienen las siguientes propiedades:

- Propiedad 1.  $S_{11}$  y  $S_{22}$  son matrices cuadradas antisimétricas.
- Propiedad 2.  $S_{12}$  es la matriz transpuesta negativa de  $S_{21}$  y viceversa.

Las dos propiedades anteriores están basadas en el principio de la conservación de la energía.

Un sistema LTI MIMO está representado en espacio de estados por:

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) \quad (2.21)$$

$$y(t) = C_p x(t) + D_p u(t)$$

Podemos obtener dicha representación en espacio de estados a partir de las relaciones de la Estructura Unión. Relacionando (2.18) y (2.19) con (2.21) obtenemos:

$$A_p = E^{-1}(S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (2.22)$$

$$B_p = E^{-1}(S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (2.23)$$

$$C_p = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (2.24)$$

$$D_p = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (2.25)$$

Siendo:

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T F \quad (2.26)$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (2.27)$$

Las ecuaciones (2.26) y (2.27) son las que nos permiten la obtención directa del modelo de un sistema físico en espacio de estados, utilizando la representación de Bond Graph.

### 2.4.3 Procedimiento para la Obtención de la Estructura Unión en Bond Graph

A continuación, se brinda el procedimiento a seguir para la obtención de la Estructura Unión de un Bond Graph, que posteriormente se aplicará a un ejemplo.

1. Se enumeran los Bonds (por lo regular el Bond Graph ya tiene sus bonds enumerados, pero si no es el caso se aplica este paso).
2. Se crean los vectores clave, tomando en cuenta que:

En cada elemento  $C_n$  le corresponde a  $x_n \rightarrow q_n, \dot{x}_n \rightarrow f_n, z_n \rightarrow e_n$

En cada elemento  $I_n$  le corresponde a  $x_n \rightarrow p, \dot{x}_n \rightarrow e_n, z_n \rightarrow f_n$

Donde:

- $p$  es el momento generalizado.
- $q$  se denota como el desplazamiento generalizado.
- $f$  y  $e$  son los flujos y esfuerzos respectivamente.
- $n$  es el número asignado a cada bond que en este caso se usa como subíndice.

3. Para establecer las relaciones constitutivas se considera:

$$z = Fx \Rightarrow F = \text{diag}\left(\frac{1}{M_1}, \dots, \frac{1}{M_n}\right)$$

Donde:

$M_n$  Son los elementos almacenadores de energía en causalidad integral.

$$D_{out} = LD_{in} \Rightarrow L = \text{diag}(N_1, \dots, N_n, \dots, \frac{1}{\widetilde{N}_1}, \dots, \frac{1}{\widetilde{N}_n})$$

Donde:

$N_n$  y  $\widetilde{N}_n$  son los elementos resistivos y de conductancia respectivamente.

- La matriz  $S$  se obtiene aplicando las reglas de interconexión que describen los dos tipos de uniones de Bond Graph, tanto unión de flujo común como unión de esfuerzo común (unión - 1 y unión - 0 respectivamente) para así completar la Estructura Unión del sistema.

#### 2.4.4 Ejemplo de la Obtención de la Estructura Unión en Bond Graph

Al Bond Graph mostrado en la Figura 2.21, se le aplicará el procedimiento estudiado anteriormente para obtener su Estructura Unión y a partir de esta, obtener su representación en espacio de estados.

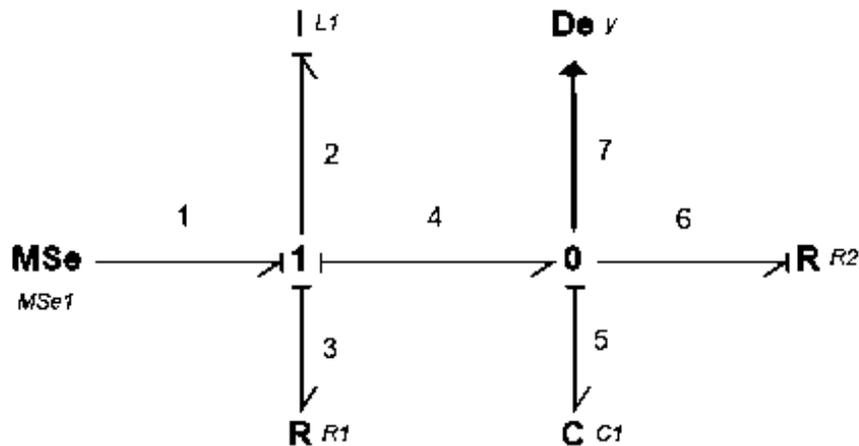


Figura 2.21 BG de un sistema eléctrico.

En este caso, el paso 1 se omite ya que el Bond Graph del sistema eléctrico ya tiene sus bonds enumerados.

Paso 2, se crean los vectores clave haciendo uso de la numeración de los bonds indicada en la Figura 2.21.

$$x = \begin{bmatrix} p_2 \\ q_5 \end{bmatrix}, \dot{x} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_5 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_5 \end{bmatrix}, D_{in} = \begin{bmatrix} f_3 \\ e_6 \end{bmatrix}, D_{out} = \begin{bmatrix} e_3 \\ f_6 \end{bmatrix}, u = e_1, y = e_7$$

Paso 3, se realizan las relaciones constitutivas de los elementos de disipación y los elementos de almacenamiento de energía, volviendo a usar la numeración de los bonds ilustrada en la Figura 2.21.

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$$

Paso 4, Obtenemos la matriz S aplicando las reglas de interconexión de cada unión y sustituimos los vectores clave y la matriz S en (2.18) para obtener la Estructura Unión completa.

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_5 \\ f_3 \\ e_6 \\ e_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ e_5 \\ e_3 \\ f_6 \\ e_1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, S_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, S_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } S_{14} = 0$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, S_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } S_{24} = 0$$

$$S_{31} = [0 \ 1], S_{32} = [0 \ 0], S_{33} = 0 \text{ y } S_{34} = 0$$

Sustituimos en las ecuaciones (2.26) y (2.7) para obtener:

$$M = L = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \text{ y } E = I$$

Finalmente, sustituimos en las ecuaciones (2.22), (2.23), (2.24) y (2.25) para la obtención de la representación en espacio de estados.

$$A_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} \end{bmatrix}, D_p = 0$$

## Capítulo 3

### Retroalimentación de Estados y Observadores

#### 3.1 Ecuación de Estado

Para describir el comportamiento de la dinámica de un sistema, es necesario escribir las relaciones que existen entre las variables de estado, las variables de entrada y las variables de salida [3].

Estas relaciones toman la forma de las ecuaciones diferenciales, un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden forma las ecuaciones de estado de un sistema [3].

Por ejemplo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.1)$$

La salida del sistema está dada por:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3.2)$$

Donde  $x(t)$  o también llamado el vector de estado es:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

También, tenemos que  $u(t)$  o también llamado el vector de entrada es:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Así mismo, para esta representación se tiene que:

$A_{n \times n}$  es la matriz del sistema.

$B_{n \times m}$  es la matriz de entrada y vector de salida de dimensión  $p$ .

$C_{p \times n}$  es la matriz de salida.

$D_{p \times n}$  es la matriz que representa un acoplamiento directo entre la entrada y la salida.

$u(t)$  es el vector de entrada de dimensión  $m$ .

$x(t)$  es el vector de estados de dimensión  $n$ .

Para el caso de sistemas SISO (simple entrada simple salida) se tiene que  $m = 1$  y  $p = 1$ .

Cabe mencionar que la representación en variables de estado no es única, algunas representaciones pueden ser más útiles que otras para un propósito particular.

## 3.2 Controlabilidad

Se dice que un sistema es controlable en el tiempo  $t_0$  sí se puede llevar cualquier estado inicial  $x(t_0)$  a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito [4]. Para determinar si un sistema es controlable, se deben cumplir los requisitos mostrados a continuación.

El sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$  es controlable si y solo si:

$$\text{rango } C = \text{rango}[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n$$

Donde:

$n$  es la dimensión u orden del sistema.

El rango de  $C$  es igual al número de filas o columnas linealmente independientes.

Entonces, también se debe cumplir que:

$$\det C = \det[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \neq 0$$

La matriz  $C$  se denomina como matriz de controlabilidad y está dada por:

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (3.5)$$

El término controlable significa que todas las variables de estado son controlables, es decir, existe una ley de control que permite que un sistema modelado en variables de estado pueda ser controlado [3].

### 3.3 Retroalimentación de Estado

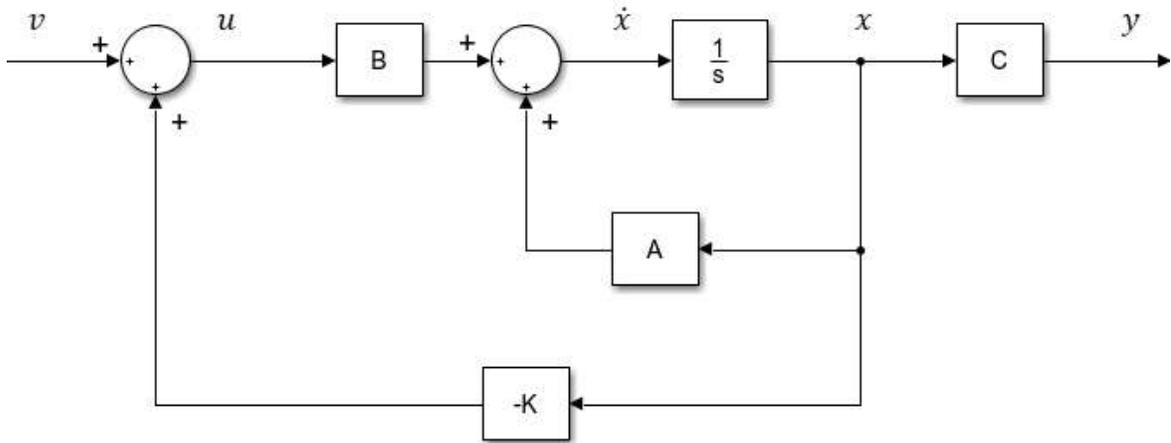


Figura 3.1 Retroalimentación de estado.

El método de control por retroalimentación de estado nos permite introducir parámetros adicionales al sistema, mediante la reubicación de sus polos en lazo cerrado para modificar la dinámica del sistema.

Considerando el sistema mostrado en la Figura 3.1, que en este caso está modelado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.6)$$

$$y = Cx \quad (3.7)$$

Tenemos que la ley de control es:

$$u = -Kx + v \quad (3.8)$$

Donde K es el vector de ganancias del controlador

$$K = [K_1 \quad K_2 \quad \dots \quad K_n]$$

Se supone que tenemos disponibles los estados.

El objetivo del diseño de la ley de control es calcular las ganancias  $K$ , por lo cual se utiliza la técnica de asignación de polos, es decir, modificar la dinámica del sistema.

La dinámica del sistema está establecida por el polinomio característico:

$$\det(sI - A) = a(s) = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} \dots + a_n \quad (3.9)$$

Sustituyendo (3.8) en (3.6) se tiene:

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx + v) \quad (3.10)$$

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bv \quad (3.11)$$

$$\dot{x} = \tilde{A}x + Bv \quad (3.12)$$

Donde  $\tilde{A} = A - BK$  es la matriz del sistema retroalimentado.

Ahora la dinámica del sistema está dada por el polinomio característico en lazo cerrado:

$$\det(sI - \tilde{A}) = \beta(s) = s^n + \beta_1s^{n-1} + \beta_2s^{n-2} \dots + \beta_n \quad (3.13)$$

Donde los coeficientes  $\beta$  están en función de  $K$  y constantes conocidas.

Recordando que el objetivo es modificar la dinámica del sistema, se propone un polinomio característico:

$$\alpha(s) = s^n + \alpha_1s^{n-1} + \alpha_2s^{n-2} \dots + \alpha_n \quad (3.14)$$

En el cual se encuentran los polos deseados.

Una vez obtenido el polinomio característico dado por la retroalimentación de estado y tener el polinomio característico propuesto, estos se igualan y se obtiene un sistema de ecuaciones lineal mediante el cual se pueden obtener los elementos K del vector de ganancias del controlador.

Igualando (3.13) con (3.14) se obtiene:

$$\alpha(s) = \det(sI - \tilde{A}) = \det(sI - A + BK) \quad (3.15)$$

Este método se puede aplicar si y solo si el sistema es controlable.

### 3.4 Observabilidad

Un sistema se dice que es completamente observable si el estado puede determinarse del conocimiento de la entrada  $u(t)$  y la salida  $y(t)$  sobre un intervalo de tiempo finito. En otras palabras, es la capacidad de deducir las variables de estado a partir del conocimiento de la entrada  $u(t)$  y la salida  $y(t)$  [3].

A continuación, se muestran los requisitos para determinar si un sistema es completamente observable.

Sea el sistema descrito por:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Este será observable si y solo si:

$$\text{rango } O = \text{rango} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

Así mismo,

$$\det O = \det \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \neq 0$$

A la matriz  $O$  se le llama matriz de observabilidad y está definida por:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

### 3.5 Observadores de Estado

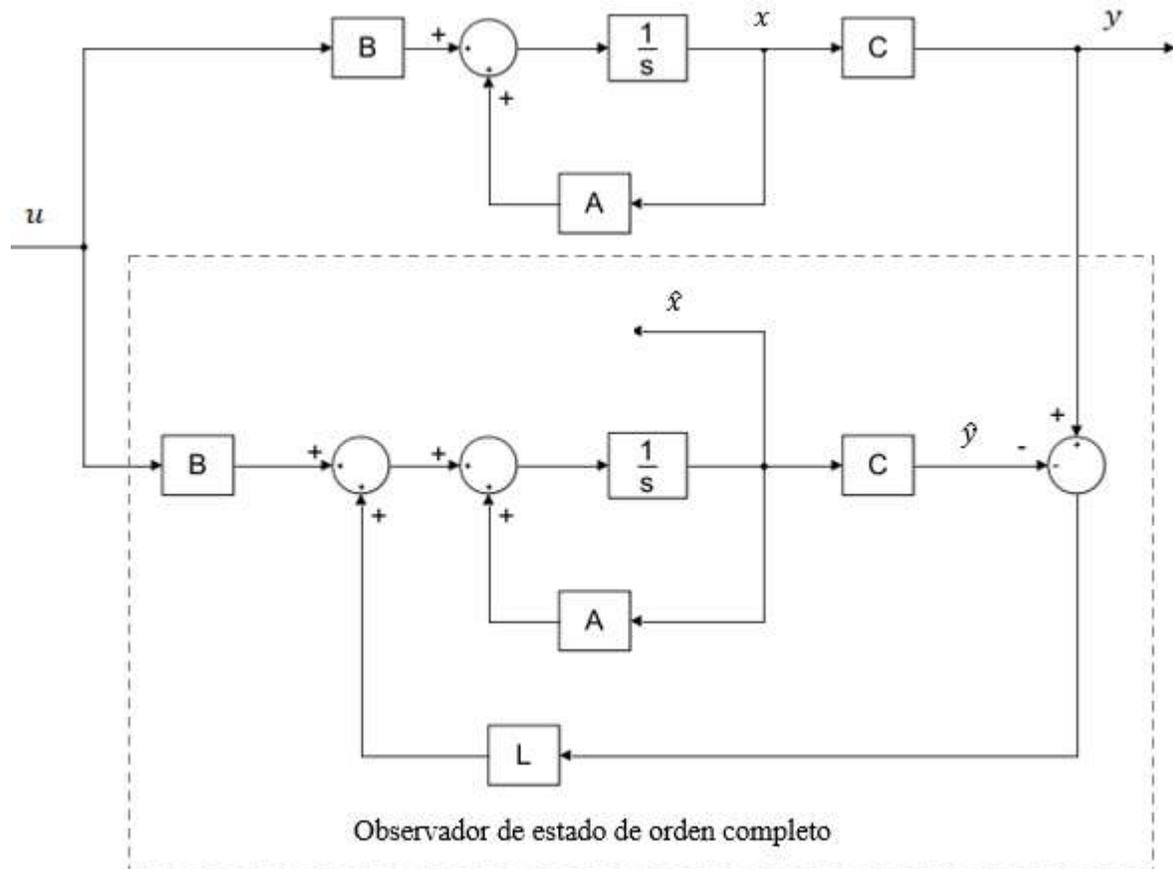


Figura 3.2 Diagrama de bloques de un observador de estado completo.

En la práctica, la dificultad que se encuentra con el control mediante la retroalimentación de estados es que algunas de las variables de estado no son accesibles para una medición directa, por lo que se hace necesario estimar las variables de estado no medibles para construir las señales de control.

Los estados estimados son útiles para resolver el problema de acceder a variables de estado no medibles a partir de ellos, que si lo son en el tiempo mínimo posible. Para estimar las variables de estado del sistema es necesario un observador, el cual se puede diseñar tanto en lazo abierto o en lazo cerrado dependiendo de la aplicación que se necesite. Un observador de estado estima las variables de estado basándose en las mediciones de las variables de salida y de entrada [5]. La condición de observabilidad juega un papel muy importante

ya que los observadores de estado pueden diseñarse si y solo si el sistema satisface esta condición.

A continuación, se describe la metodología para el diseño de un observador de orden completo.

Sea el sistema descrito por (3.6) y (3.7):

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Se tiene el observador de estado de orden completo mostrado en la Figura 3.2 de la forma:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \quad (3.17)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} \quad (3.18)$$

Donde:

$\hat{x}$  es el estado estimado.

$\hat{y}$  es la salida estimada.

L es el vector de ganancias del observador.

Así mismo se tiene que:

$$y - \hat{y} = Cx - C\hat{x} \quad (3.19)$$

$$y - \hat{y} = C\tilde{x} \quad (3.20)$$

Donde:

$\tilde{x} = x - \hat{x}$ , es el error del estado.

La dinámica del error está descrita por:

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \quad (3.21)$$

Sustituyendo (3.6) y (3.19) en (3.21) se tiene:

$$\dot{\tilde{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - L(y - \hat{y}) \quad (3.22)$$

$$\dot{\tilde{x}} = Ax - A\hat{x} - L(Cx - C\hat{x}) \quad (3.23)$$

$$\dot{\tilde{x}} = A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x}) \quad (3.24)$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)(x - \hat{x}) \quad (3.25)$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} \quad (3.26)$$

Para calcular el vector de ganancias del observador, se debe proponer un polinomio característico con polos deseados, en este caso:

$$\omega(s) = s^n + \omega_1 s^{n-1} + \omega_2 s^{n-2} \dots + \omega_n \quad (3.27)$$

Gracias a la ecuación (3.26), ahora la dinámica del sistema está dada por el polinomio característico:

$$\det [sI - (A - LC)] = \delta(s) = s^n + \delta_1 s^{n-1} + \delta_n s^{n-2} \dots + \delta_n \quad (3.28)$$

Al igualar (3.27) con (3.28) se obtiene un sistema de ecuaciones lineal con el cual se pueden calcular los elementos del vector de ganancias del observador L.

Mostrando el procedimiento anterior se obtiene:

$$\omega(s) = \det [sI - (A - LC)] = \det (sI - A + LC) \quad (3.29)$$

### 3.6 Retroalimentación de Estado Estimado

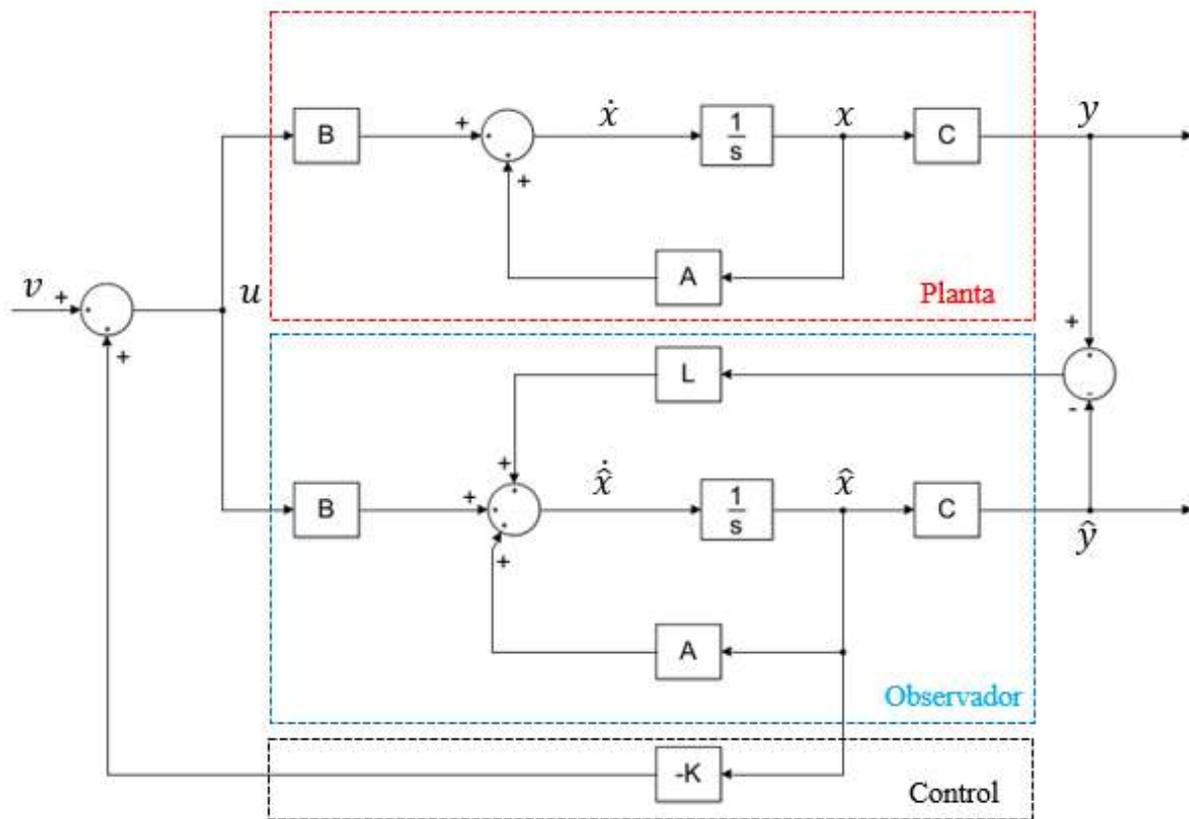


Figura 3.3 Diagrama de bloques de un sistema con retroalimentación de estado estimado.

Podemos observar en la Figura 3.3 el diagrama de bloques de un control por retroalimentación de estados estimados con un observador de orden completo, el cual se vio en la sección anterior.

Analizando, la retroalimentación de estado está dada por:

$$u = -K\hat{x} + v \quad (3.30)$$

Así, el sistema de ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento del sistema y del observador de estado son:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Sustituyendo (3.19) y (3.30) en el sistema de ecuaciones (3.31) tenemos:

$$\dot{x} = Ax + B(-K\hat{x} + v) \quad (3.32)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B(-K\hat{x} + v) + L(Cx - C\hat{x})$$

$$\dot{x} = Ax - BK\hat{x} + Bv \quad (3.33)$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - BK + LC)\hat{x} + LCx + Bv$$

En forma matricial, se tiene el sistema aumentado o compuesto:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v \quad (3.34)$$

El cual se puede describir mediante:

$$\dot{\bar{x}} = \overline{A}_{KL}\bar{x} + \overline{B}v \quad (3.35)$$

Donde:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{KL} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix}$$

El diseño de este sistema observador – controlador se puede realizar usando el principio de separación; es decir, calcular por separado las ganancias L y K.

## Capítulo 4

# Retroalimentación de Estados y Observadores en Bond Graph

### 4.1 Introducción

La retroalimentación de estado y los observadores desempeñan un papel fundamental en el análisis y diseño de sistemas de control para sistemas dinámicos. Estas herramientas son muy útiles ya que, permiten ajustar el comportamiento de la dinámica del sistema, en el caso de los observadores, estimar las variables de estado en caso de no estar disponibles para una medición directa.

El presente trabajo de investigación busca diseñar un controlador por retroalimentación de estados estimados desde un enfoque de Bond Graph y aplicarlo a dos casos de estudio, aprovechando las ventajas que ofrece esta técnica de modelado. Bond Graph es una técnica de modelado gráfica por lo que podemos detectar y analizar fácilmente propiedades como la controlabilidad y observabilidad, estas propiedades se deben conocer para saber si es posible o no aplicar un controlador y un observador al sistema.

### 4.2 Retroalimentación de Estado

En el enfoque de Bond Graph, la retroalimentación de estado se realiza de manera indirecta ya que lo que se retroalimenta es  $z$  y no el estado, pero, ambos tienen una relación descrita por la ecuación (2.15), donde se sabe que  $F$  depende de los elementos de almacenamiento, así mismo es necesario el uso de transformadores y giradores para el acoplamiento de señales para una retroalimentación adecuada, en estos elementos se pueden añadir las ganancias del controlador.

Para aplicar la retroalimentación de estado es necesario representar nuestro sistema en espacio de estado, Bond Graph también ofrece obtener dicha

representación directamente mediante las ecuaciones (2.22), (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) y (2.27). Al igual que en el enfoque de teoría de control clásica, es necesario conocer la controlabilidad del sistema, ya que si el sistema no es controlable no se podrá aplicar un controlador. Bond Graph nos permite analizar la controlabilidad del sistema de una manera gráfica y directa como se ve a continuación.

#### 4.2.1 Controlabilidad Estructural

En Bond Graph, la controlabilidad es llamada *controlabilidad estructural* debido a que, a diferencia del enfoque de teoría de control clásica, esta propiedad no depende de los valores numéricos del sistema, sino de su estructura.

Las siguientes definiciones describen los requisitos que debe cumplir el sistema para que sea estructuralmente controlable y estructuralmente observable lo cual se verá más a detalle en secciones posteriores en este capítulo.

*Definición 1* [2]. El orden  $n$  de un modelo es igual al número de elementos de almacenamiento en causalidad integral cuando una causalidad integral predefinida es asignada al modelo de Bond Graph.

*Definición 2* [2]. El rango estructural  $q$  de la matriz  $A$  de espacio de estado deducida a partir del Bond Graph es igual al número de elementos de almacenamiento en causalidad derivativa cuando una causalidad derivativa predefinida es asignada al modelo de Bond Graph.

*Definición 3* [2]. El número  $k = n - q$  de modos nulos estructuralmente es igual al número de elementos de almacenamiento que permanecen en causalidad integral cuando una causalidad derivativa predefinida es asignada al modelo de Bond Graph, si  $k \neq 0$  es porque alguno de los elementos de almacenamiento no acepta(n) una asignación de causalidad derivativa sin crear conflicto de causalidad en las uniones y significa que la matriz  $A$  es singular,

por lo tanto, no es de rango pleno, por consiguiente el sistema no es controlable de manera completa.

*Definición 4* [2]. El sistema  $[A_p B_p]$  es estructuralmente controlable si y solo si se cumple:

- Existe al menos una trayectoria causal enlazando cada elemento de almacenamiento en causalidad integral con una fuente de control en el Bond Graph en causalidad integral predefinida.
- El rango estructural de  $[A_p B_p]$  es igual al orden  $n$ , si no es satisfecha directamente, una duplicación de algunas fuentes tiene que hacerse para transformar las causalidades integrales remanentes.
- Que exista el BGD.

Una *trayectoria causal* es una secuencia alternante de bonds y nodos que nos indica que todos los nodos en la secuencia tienen una completa y correcta causalidad, es simple si a través de la misma sigue solamente una misma variable y es mezclada si un cambio de variable es requerido a través de la secuencia causal, si el cambio se debe a un elemento puerto - 2, la trayectoria causal es llamada mezclada directa. El seguimiento que se hace al establecer una trayectoria causal está regido por el trazo causal, si se hace desde una fuente hacia un elemento o desde un detector hacia un elemento, se debe seguir la variable que indica el trazo causal desde donde se inicia y hacer el cambio de variable si se regresa por un mismo bond.

En este trabajo solo se requiere el uso de las trayectorias causales de una misma variable o mezcladas, esto se ve mejor en la sección de Control por Retroalimentación y en Observadores, en la determinación de la controlabilidad estructural y la observabilidad estructural gráficamente.

## 4.2.2 Control por Retroalimentación

En esta sección se aplicará la técnica de control por retroalimentación de estado en un enfoque de Bond Graph a dos ejemplos.

a) Sistema eléctrico.

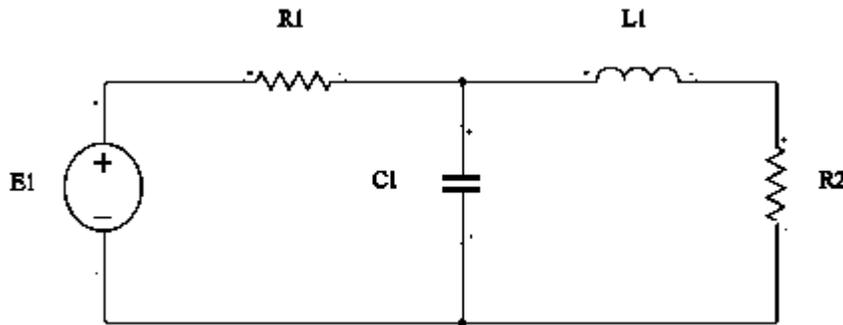


Figura 4.1 Ejemplo del Sistema Eléctrico.

Utilizando el procedimiento para modelado de sistemas en Bond Graph, obtenemos la representación gráfica del sistema.

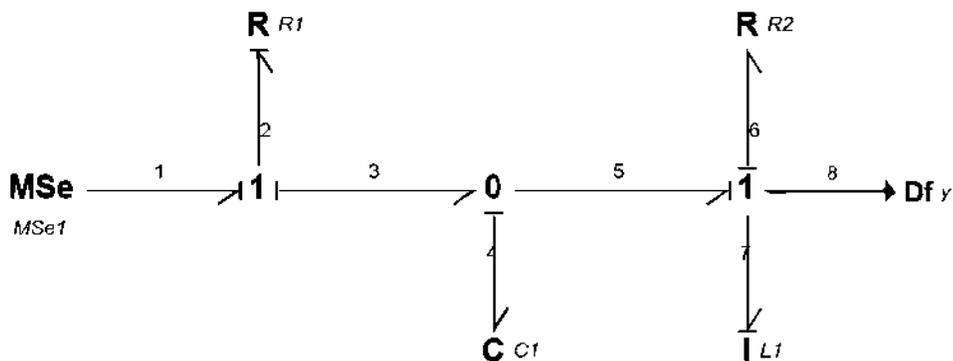


Figura 4.2 Bond Graph del Sistema Eléctrico.

El sistema debe estar representado en espacio de estado, para obtener dicha representación utilizaremos el procedimiento que ofrece Bond Graph mediante la estructura unión.

Vectores clave:

$$x = \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \end{bmatrix}, \dot{x} = \begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \end{bmatrix}, D_{in} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \end{bmatrix}, D_{out} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \end{bmatrix}, u = e_1, y = f_7 \quad (4.1)$$

Relaciones constitutivas:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Se calcula la Estructura Unión a partir de (2.18).

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \\ e_2 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \\ f_2 \\ e_6 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Se puede observar que se cumplen las dos propiedades de la matriz  $\mathcal{S}$ , con esto podemos aplicar el último paso que es obtener directamente la representación en espacio de estado a partir de las ecuaciones (2.22), (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) y (2.27).

$$A_p = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}, C_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix}, D_p = 0 \quad (4.4)$$

Para aplicar la técnica de control por retroalimentación, nuestro sistema debe ser controlable o hablando en términos de Bond Graph, debe ser estructuralmente controlable. Se puede observar en la Figura 4.3 que existen las trayectorias causales fuente-elemento de almacenamiento en el sistema y en la Figura 4.4 se ilustra el BGD del sistema, es decir el Bond Graph con causalidad derivativa predefinida existe, por lo tanto, el sistema es estructuralmente controlable.

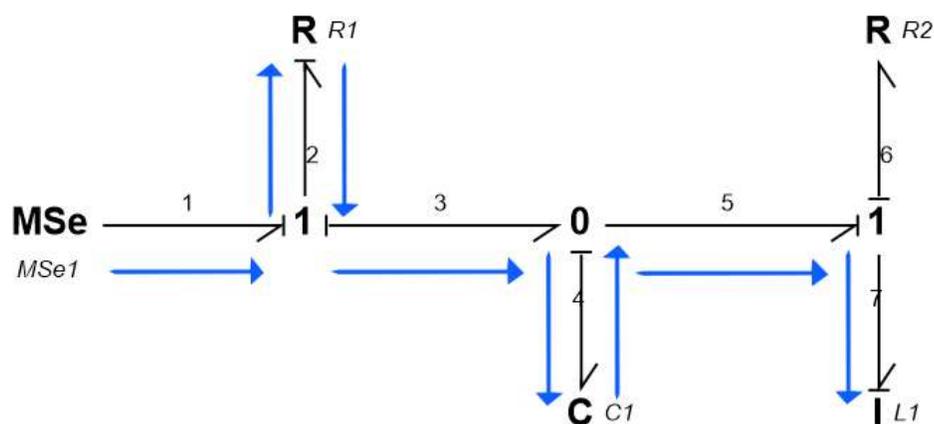


Figura 4.3 Trayectorias Causales, fuente-elemento de almacenamiento.

Para  $C_1$  (1 - 2 - 2 - 3 - 4)

Para  $L_1$  (1 - 2 - 2 - 3 - 4 - 4 - 5 - 7)

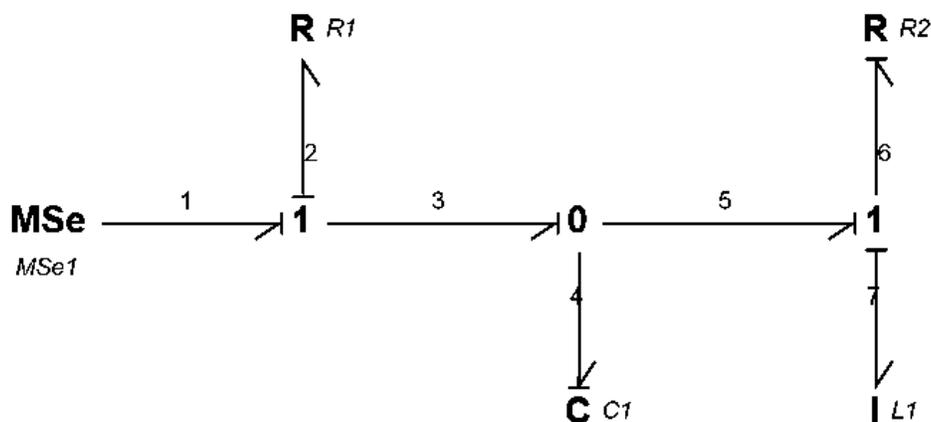


Figura 4.4 BGD del Sistema Eléctrico.

Ya que se sabe que el sistema es estructuralmente controlable, se procede con la retroalimentación de las variables de energía mediante bonds activos y el uso de transformadores y giradores para un acoplamiento de señales adecuado. Esta retroalimentación se muestra a continuación en la Figura 4.5.

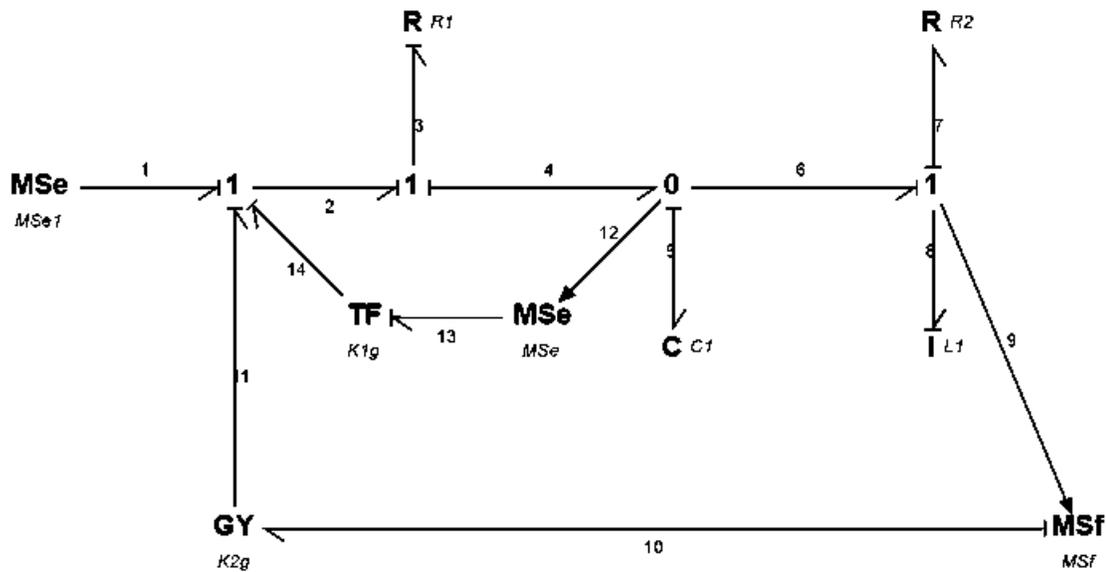


Figura 4.5 Retroalimentación de variables de energía.

El Bond Graph del sistema eléctrico con retroalimentación de variables de energía tiene vectores clave diferentes por la numeración de los bonds pero las mismas relaciones constitutivas que en lazo abierto, es decir (4.2), pero, la estructura de la matriz S en la estructura unión es diferente a la del lazo abierto debido a las ganancias del transformador y girador. Los vectores clave y la estructura unión están descritos por:

$$x = \begin{bmatrix} q_5 \\ p_8 \end{bmatrix}, \dot{x} = \begin{bmatrix} f_5 \\ e_8 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} e_5 \\ f_8 \end{bmatrix}, D_{in} = \begin{bmatrix} e_3 \\ f_7 \end{bmatrix}, D_{out} = \begin{bmatrix} f_3 \\ e_7 \end{bmatrix}, u = e_1, y = f_7 \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} f_5 \\ e_8 \\ e_3 \\ f_7 \\ f_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ K_{1g} - 1 & K_{2g} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ f_8 \\ f_3 \\ e_7 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Para comprobar las propiedades de la matriz  $S$  se asigna un valor de cero a cada ganancia, en este caso ambas propiedades se cumplen.

Al calcular la representación en espacio de estado del sistema retroalimentado se tiene que:

$$A_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} (K_{1g} - 1) & \frac{1}{L_1} \left( \frac{R_2}{L_1} - 1 \right) \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix}, \quad D_c = 0$$

Para el cálculo de las ganancias se aplica la técnica tradicional de ubicación de polos con un ligero cambio. Primero debemos ubicar los polos del sistema en lazo abierto que están dados por el polinomio característico:

$$\det(sI - A_p) = s^2 + \left( \frac{R_2}{L_1} + \frac{1}{R_1 C_1} \right) s + \frac{R_2}{R_1 C_1 L_1} + \frac{1}{C_1 L_1} \quad (4.8)$$

Los valores de la planta son:

Sistema eléctrico:

$$R_1 = 10\Omega$$

$$R_2 = 5\Omega$$

$$C_1 = 0.01F$$

$$L_1 = 0.2H$$

$$E_1 = 10v$$

Evaluando el polinomio (4.8) se tiene:

$$s^2 + 35s + 750 = 0 \quad (4.9)$$

Calculando las raíces del polinomio (4.9) se encuentran los polos del sistema en lazo abierto, los cuales son:

$$P_1 = -17.5 + j21$$

$$P_2 = -17.5 - j21$$

Estos polos nos indican que la dinámica de la salida del sistema en lazo abierto es del caso subamortiguado. Esta dinámica se modifica en el polinomio de lazo cerrado descrito por:

$$\det(sI - A_p + B_pK) = s^2 + \left(\frac{R_2}{L_1} + \frac{1}{R_1C_1} + \frac{K_1}{R_1}\right)s + \frac{R_2}{R_1C_1L_1} + \frac{1}{C_1L_1} + \frac{R_2K_1}{R_1L_1} + \frac{K_2}{R_1C_1} \quad (4.10)$$

Evaluando el polinomio (4.10) se tiene:

$$s^2 + (35 + 0.1K_1)s + 750 + 2.5K_1 + 10K_2 \quad (4.11)$$

Asignando los polos deseados para obtener una respuesta en el sistema del caso sobreamortiguado.

Polos deseados:

$$P_{d1} = -12$$

$$P_{d2} = -10$$

Con estos polos deseados se tiene el polinomio:

$$\alpha(s) = s^2 + 22s + 120 \quad (4.12)$$

Igualando (4.11) con (4.12) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 35 + 0.1K_1 &= 22 \\ 750 + 2.5K_1 + 10K_2 &= 120 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones descrito por (4.13) se obtienen las ganancias:

$$K_1 = -130$$

$$K_2 = -30.5$$

Estas ganancias no se pueden sustituir directamente en la retroalimentación debido a que la técnica tradicional si hace la retroalimentación de estado, mientras que, Bond Graph retroalimenta z, entonces, las ganancias obtenidas tienen una relación con las ganancias gráficas de Bond Graph dada por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
K_1 &= K_{1g} F_1 \\
K_2 &= K_{2g} F_2
\end{aligned}
\tag{4.14}$$

Del sistema de ecuaciones (4.14) se despejan las ganancias gráficas y se tiene:

$$\begin{aligned}
K_{1g} &= F_1^{-1} K_1 \\
K_{2g} &= F_2^{-1} K_2
\end{aligned}
\tag{4.15}$$

Evaluando el sistema de ecuaciones (4.15) se obtienen las ganancias gráficas del Bond Graph retroalimentado.

$$\begin{aligned}
K_{1g} &= -1.3 \\
K_{2g} &= -6.1
\end{aligned}$$

Haciendo uso del software 20-SIM, podemos visualizar en la Figura 4.6 la comparación de la respuesta al escalón del sistema en lazo abierto y en lazo cerrado ya con las ganancias integradas en el transformador y girador que realizan la retroalimentación de las variables de energía. Así mismo, en las Figuras 4.7 y 4.8 se ilustra el comportamiento del estado del elemento C1 y del elemento L1 respectivamente, comparando en cada gráfica su comportamiento en lazo abierto y lazo cerrado.

Cabe resaltar la ventaja que nos ofrece un enfoque más gráfico respecto a la controlabilidad estructural, se puede saber con un procedimiento sencillo si nuestro sistema es controlable o no y, además, observar la relación que hay entre las variables y la entrada del sistema. La retroalimentación de estados en el enfoque de Bond Graph es similar al enfoque de teoría de control clásica, se aplica el mismo procedimiento en la obtención de las ganancias para el controlador, sin embargo, difiere en el tratado y medición de las variables, ya

que, se deben hacer ajustes por la relación que tienen los estados y las variables de energía.

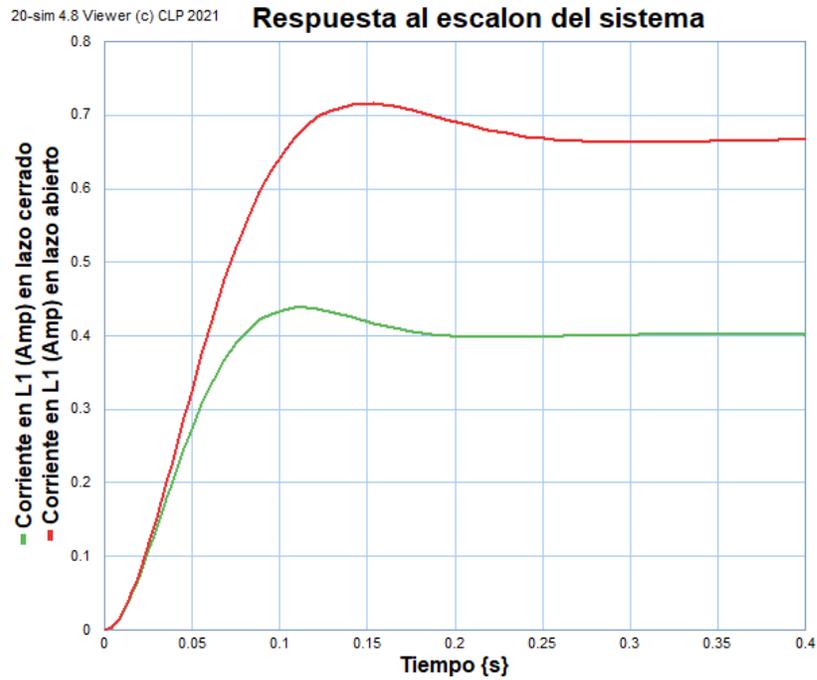


Figura 4.6 Respuesta al escalón del sistema eléctrico.

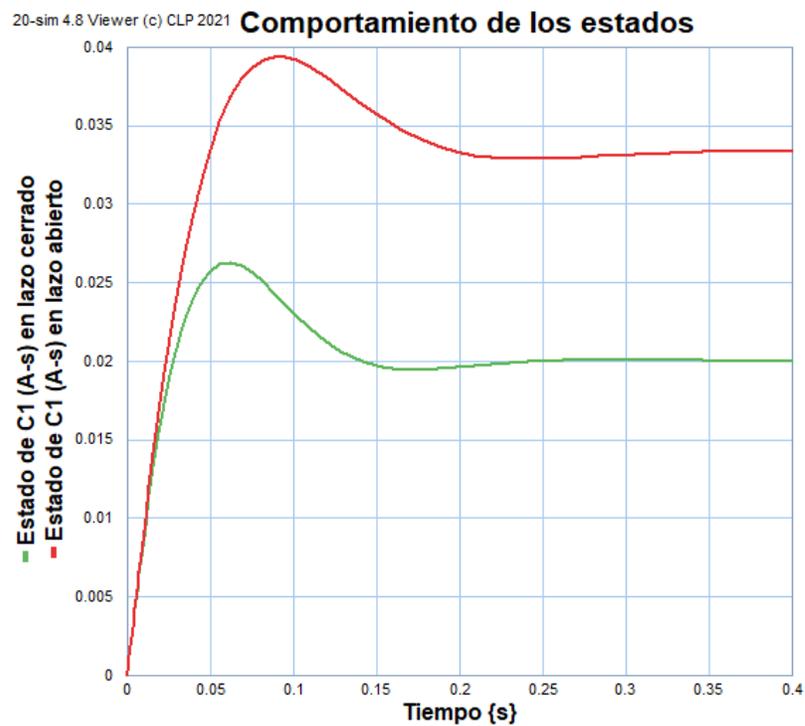


Figura 4.7 Comportamiento del estado del elemento C1.

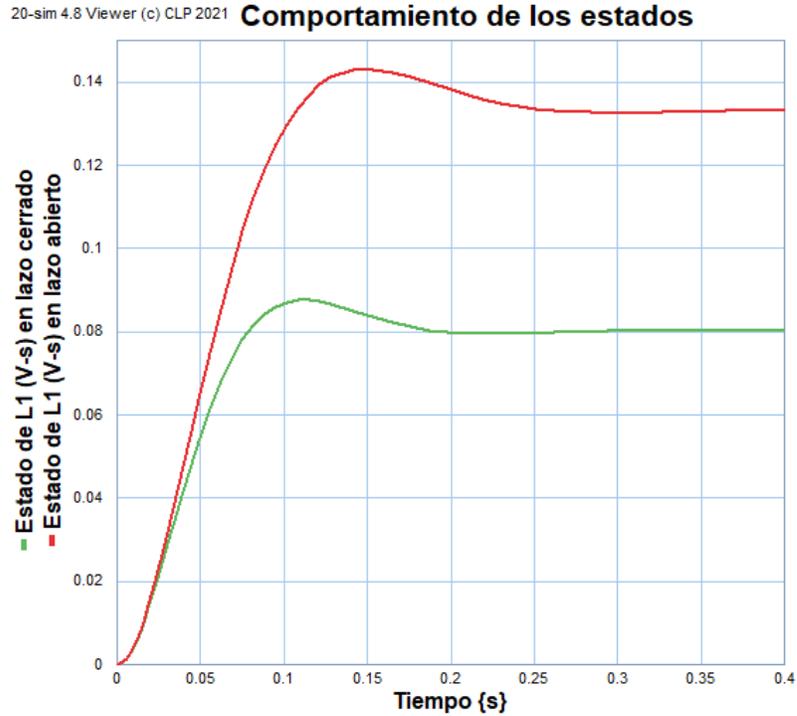


Figura 4.8 Comportamiento del estado del elemento L1.

b) Sistema electromecánico.

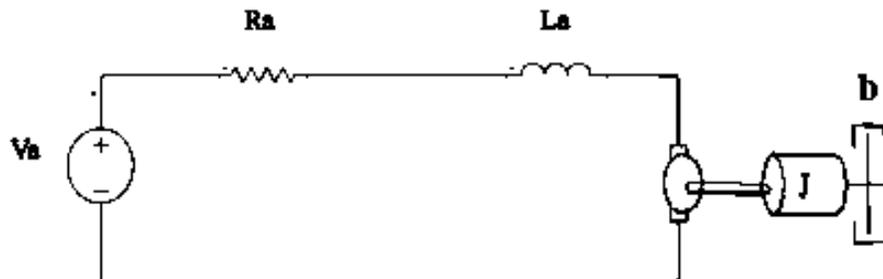


Figura 4.9 Motor de corriente directa.

Como segundo ejemplo tenemos el sistema electromecánico ilustrado en la Figura 4.9, el motor de CD, en el cual se puede observar que solo existen dos elementos de almacenamiento los cuales son  $L_a$  (inductancia de la armadura) y  $J$  (momento de inercia en el eje del motor). El Bond Graph de este sistema se muestra a continuación en la Figura 4.10.

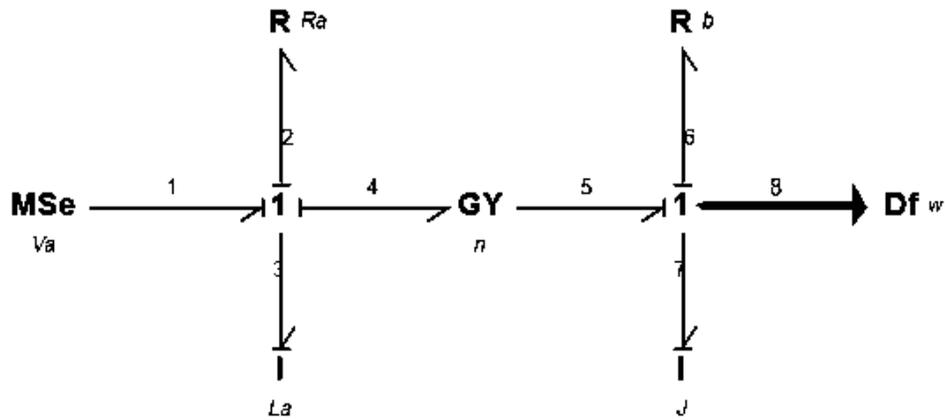


Figura 4.10 Bond Graph del motor de CD.

Mediante el modelo en Bond Graph del motor de CD, se obtienen sus vectores clave y sus relaciones constitutivas.

Vectores clave:

$$x = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_7 \end{bmatrix}, \dot{x} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \end{bmatrix}, D_{in} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix}, D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \end{bmatrix}, u = e_1, y = f_8 \quad (4.16)$$

Relaciones constitutivas:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Se calcula la Estructura Unión a partir de (2.18).

$$\begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -n & -1 & 0 & 1 \\ n & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \\ e_2 \\ e_6 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

La matriz  $S$  de la estructura unión descrita por (4.18) cumple con sus dos propiedades y además se puede observar la aparición de un valor  $n$ , el cual se refiere al módulo del girador del Bond Graph. Para obtener la representación en espacio de estados del sistema electromecánico directamente, se calcula a partir de las ecuaciones (2.22), (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) y (2.27).

$$A_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{n}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}, \quad D_p = 0 \quad (4.19)$$

Recordando que, para poder aplicar la técnica de control por retroalimentación de estado, el sistema debe ser estructuralmente controlable, en la Figura 4.11 se pueden apreciar las trayectorias causales de la fuente hacia los elementos de almacenamiento en causalidad integral predefinida que existen en el modelo BG del motor de CD, además, en la Figura 4.12 se ilustra el BGD del sistema, por lo tanto, este sistema electromecánico es estructuralmente controlable.

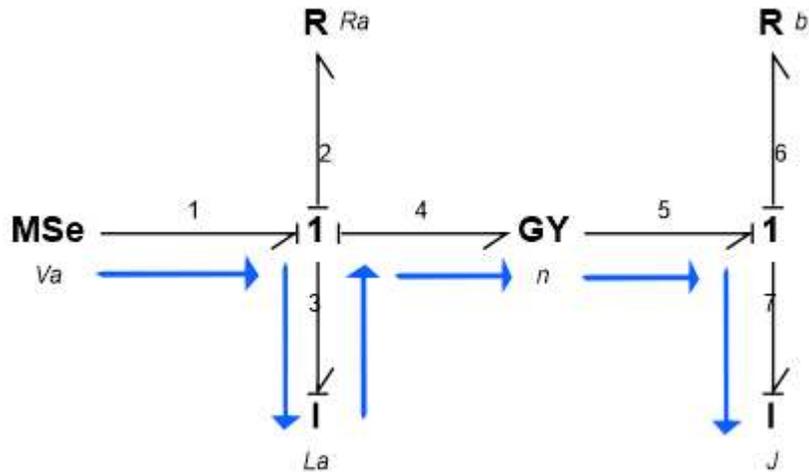


Figura 4.11 Trayectorias causales en el modelo BG del motor de CD, fuente – elemento.

Para  $L_a$  (1 – 3)

Para  $J$  (1 – 3 – 3 – 4 – 5 – 7)

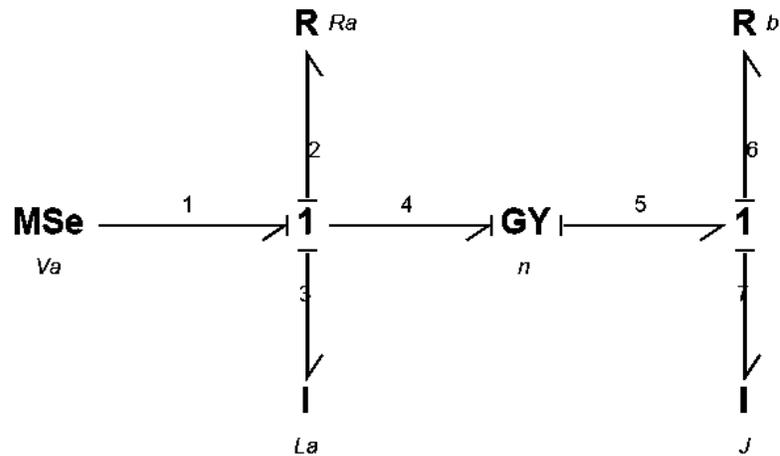


Figura 4.12 BGD del sistema electromecánico.

Ahora que se sabe que el sistema es estructuralmente controlable, se aplica la retroalimentación de variables de energía al Bond Graph del motor de CD, la cual se muestra a continuación en la Figura 4.13.



Al aplicar valores de cero a las ganancias, se comprueba que la matriz  $S$  cumple sus propiedades.

Por lo tanto, al calcular la representación en espacio de estado del sistema retroalimentado, se tiene que:

$$A_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a}(K_{1g} - R_a) & \frac{1}{J}(K_{2g} - n) \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_c = 0$$

Para ubicar los polos del motor de CD en lazo abierto, se debe encontrar las raíces del polinomio característico del sistema en lazo abierto dado por:

$$\det(sI - A_p) = s^2 + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{b}{J}\right)s + \frac{R_a b}{J L_a} + \frac{n^2}{J L_a} \quad (4.23)$$

Los valores de la planta son:

Sistema electromecánico:

$$R_a = 0.1 \, \Omega$$

$$L_a = 0.01 \, H$$

$$b = 1.5 \, N\text{-}m\text{-}s$$

$$J = 3.2 \, N\text{-}m\text{-}s^2$$

$$n = 0.1$$

$$V_a = 10 \, v$$

Evaluando el polinomio (4.23) se tiene que:

$$s^2 + 10.4688s + 5 = 0 \quad (4.24)$$

Calculando las raíces del polinomio (4.24) se encuentran los polos del sistema en lazo abierto, los cuales son:

$$P_1 = -0.5016$$

$$P_2 = -9.9671$$

En este caso ambos polos del sistema en lazo abierto son reales con parte negativa, su dinámica entra en el caso sobreamortiguado. La técnica de retroalimentación de estado nos permite modificar la dinámica del sistema, ahora con el siguiente polinomio característico del sistema en lazo cerrado.

$$\det(sI - A_p + B_p K) = s^2 + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{b}{J} + K_1\right)s + \frac{bK_1}{J} + \frac{nK_2}{L_a} + \frac{R_a b}{JL_a} + \frac{n^2}{JL_a} \quad (4.25)$$

Evaluando el polinomio (4.25) se tiene:

$$s^2 + (10.4688 + K_1)s + 5 + 0.4688K_1 + 10K_2 \quad (4.26)$$

Utilizando la técnica de ubicación de polos tradicional para el cálculo de las ganancias se proponen los siguientes polos:

Polos deseados:

$$P_{d1} = -2.5$$

$$P_{d2} = -1.5$$

Con estos polos deseados se tiene el polinomio:

$$\alpha(s) = s^2 + 4s + 3.75 \quad (4.27)$$

Igualando (4.26) con (4.27) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 10.4688 + K_1 &= 4 \\ 5 + 0.4688K_1 + 10K_2 &= 3.75 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones descrito por (4.28) se obtienen las ganancias:

$$K_1 = -6.4688$$

$$K_2 = 0.1783$$

Aplicando el ajuste para obtener las ganancias gráficas para el Bond Graph con retroalimentación se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} K_1 &= K_{1g} F_1 \\ K_2 &= K_{2g} F_2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Del sistema de ecuaciones (4.29) se despejan las ganancias gráficas y se tiene:

$$\begin{aligned}K_{1g} &= F_1^{-1}K_1 \\K_{2g} &= F_2^{-1}K_2\end{aligned}\tag{4.30}$$

Evaluando el sistema de ecuaciones (4.30) se obtienen las ganancias gráficas del Bond Graph retroalimentado.

$$\begin{aligned}K_{1g} &= -0.0647 \\K_{2g} &= 0.5704\end{aligned}$$

Utilizando el software 20-SIM, la Figura 4.14 nos muestra la comparación de la respuesta al escalón del sistema en lazo abierto y en lazo cerrado ya con las ganancias integradas en los giradores que realizan la retroalimentación de las variables de energía. Así mismo, en las Figuras 4.15 y 4.16 se ilustra el comportamiento del estado del elemento La y del elemento J respectivamente, volviendo a comparar en cada gráfica su comportamiento en lazo abierto y lazo cerrado.

En este ejemplo, a pesar de tratarse de un sistema electromecánico, gracias a la teoría de Bond Graph fue muy sencillo modelarlo para poder aplicar la técnica de retroalimentación de estado, es una ventaja significativa y muy versátil el poder usar la colección de elementos con los que cuenta Bond Graph y modelar este tipo de sistemas con gran facilidad.

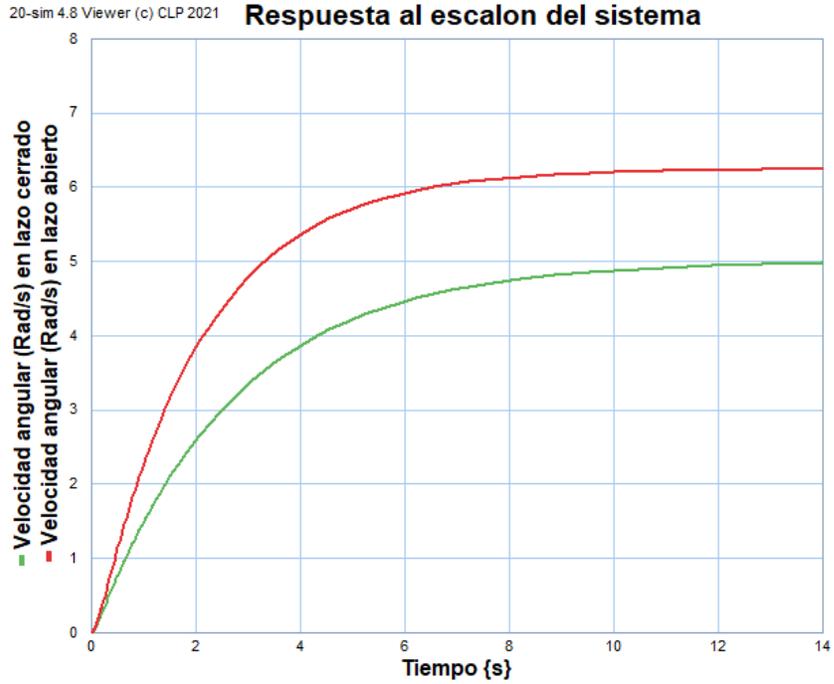


Figura 4.14 Respuesta al escalón del sistema electromecánico.

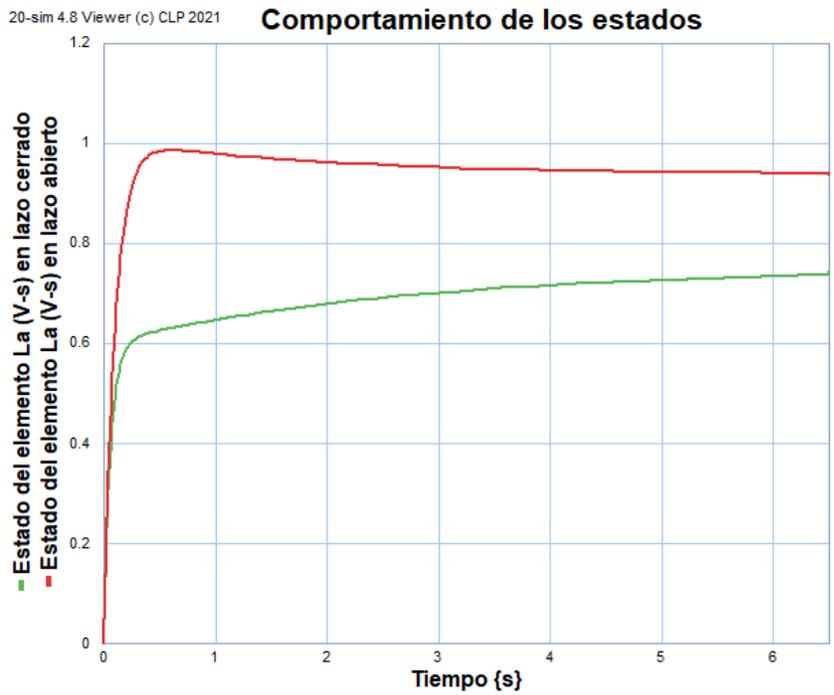


Figura 4.15 Comportamiento del estado del elemento La.

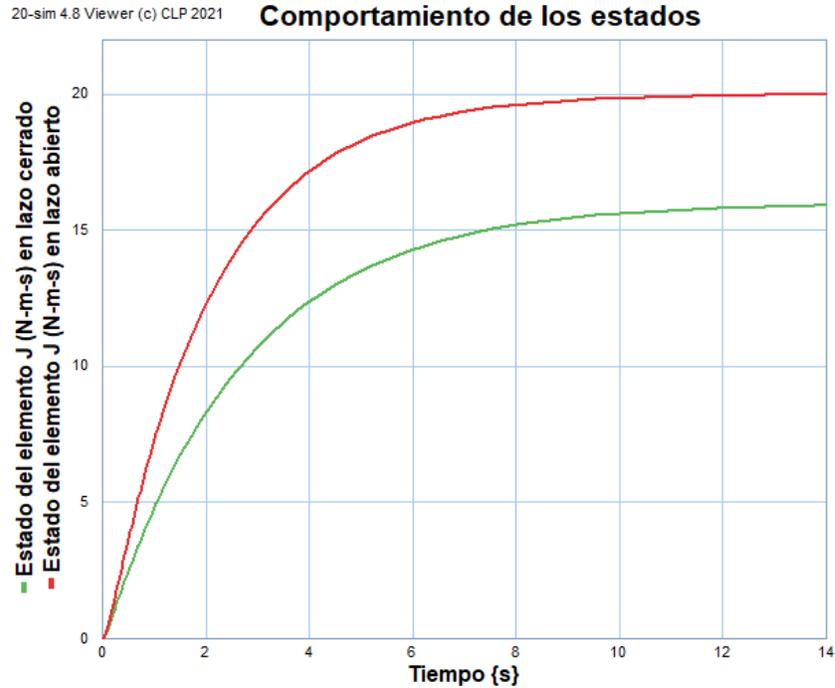


Figura 4.16 Comportamiento del estado del elemento J.

### 4.3 Observadores de Estado

En el contexto de Bond Graph, un observador u observador de estado nos permite estimar las variables de estado del sistema en caso de que no estén disponibles para su medición directa. El observador prácticamente es una copia del sistema, su estructura y diseño pueden variar dependiendo del sistema específico y las variables que se deseen estimar.

Para poder estimar las variables del sistema, es necesario conocer la observabilidad del sistema al igual que en el enfoque de teoría de control clásica, sin embargo, en Bond Graph esta propiedad es llamada observabilidad estructural, el sistema debe ser estructuralmente observable para proceder con el diseño del observador, el cual también tiene muchas similitudes con el enfoque de teoría de control clásica.

### 4.3.1 Observabilidad Estructural

Hablando en términos de Bond Graph, la observabilidad es llamada observabilidad estructural ya que, al igual que la controlabilidad estructural, esta propiedad también depende de la estructura del sistema y no de sus valores numéricos.

Es necesario agregar una definición adicional a las definiciones mencionadas en [2] para describir los requisitos específicos que debe cumplir el sistema para que sea estructuralmente observable.

*Definición 5.* El sistema  $[A_p \ C_p]$  es estructuralmente observable si y solo si se cumple:

- Existe al menos una trayectoria causal enlazando cada elemento de almacenamiento en causalidad integral con un detector en el Bond Graph en causalidad integral predefinida.
- El rango estructural de  $[A_p \ C_p]$  es igual al orden  $n$ , si no es satisfecha directamente, una duplicación de algunas fuentes tiene que hacerse para transformar las causalidades integrales remanentes.
- Que exista el BGD.

### 4.3.2 Observadores

En esta sección se mostrará el diseño de un observador de estado en un enfoque de Bond Graph al sistema eléctrico ilustrado en la Figura 4.1 y al sistema electromecánico mostrado en la Figura 4.9.

a) Sistema eléctrico.

En este ejemplo ya se cuenta con información importante del sistema como lo es su Bond Graph mostrado en la Figura 4.2, su representación en espacio de estado (4.4) y su BGD ilustrado en la Figura 4.4. Para el diseño del observador debemos analizar si el sistema es estructuralmente observable, como se mencionó anteriormente, existe el BGD, así que solo restaría analizar si existen trayectorias causales enlazando los elementos de almacenamiento en causalidad integral con los detectores.

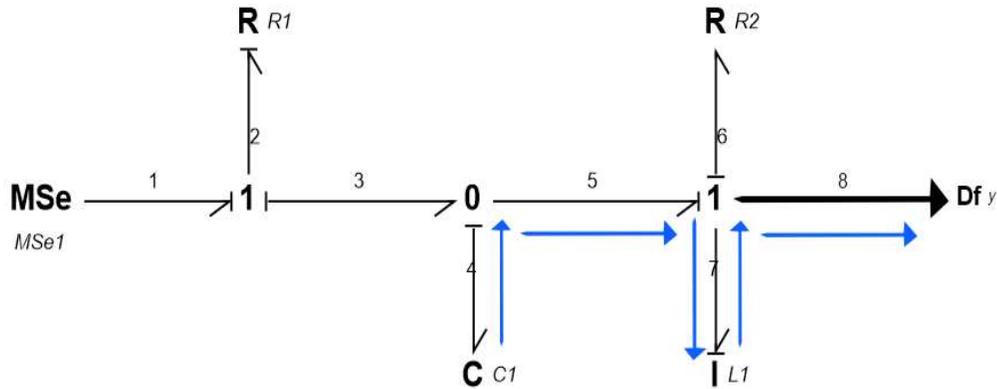


Figura 4.17 Trayectorias causales, elemento de almacenamiento - detector.

Para  $C_1$  (4 – 5 – 7 – 7 – 8)

Para  $L_1$  (7 – 7 – 8)

En la Figura 4.17 se muestra que las trayectorias causales entre los elementos de almacenamiento y el detector de flujo existen, por lo tanto, el sistema es estructuralmente observable.

Ya que se sabe que el sistema es estructuralmente observable, se procede a implementar el Bond Graph del observador a la planta, que básicamente es una copia del sistema eléctrico. En la figura 4.18 se puede apreciar el Bond Graph del sistema eléctrico con su observador de estado, en el cual el vector de ganancias del observador será cambiado a la letra H para evitar confusiones con el elemento de almacenamiento L1. La dinámica del observador está descrita por (3.17) y (3.19) y los vectores clave de la planta y del observador son los siguientes:

$$x = \begin{bmatrix} q_5 \\ p_8 \end{bmatrix}, \dot{x} = \begin{bmatrix} f_5 \\ e_8 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} e_5 \\ f_8 \end{bmatrix}, D_{in} = \begin{bmatrix} e_3 \\ f_7 \end{bmatrix}, D_{out} = \begin{bmatrix} f_3 \\ e_7 \end{bmatrix}, u = e_1, y = f_8 \quad (4.31)$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} q_{15} \\ p_{17} \end{bmatrix}, \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} f_{15} \\ e_{17} \end{bmatrix}, \hat{z} = \begin{bmatrix} e_{15} \\ f_{17} \end{bmatrix}, \widehat{D}_{in} = \begin{bmatrix} e_{13} \\ f_{18} \end{bmatrix}, \widehat{D}_{out} = \begin{bmatrix} f_{13} \\ e_{18} \end{bmatrix}, \hat{y} = f_{17} \quad (4.32)$$

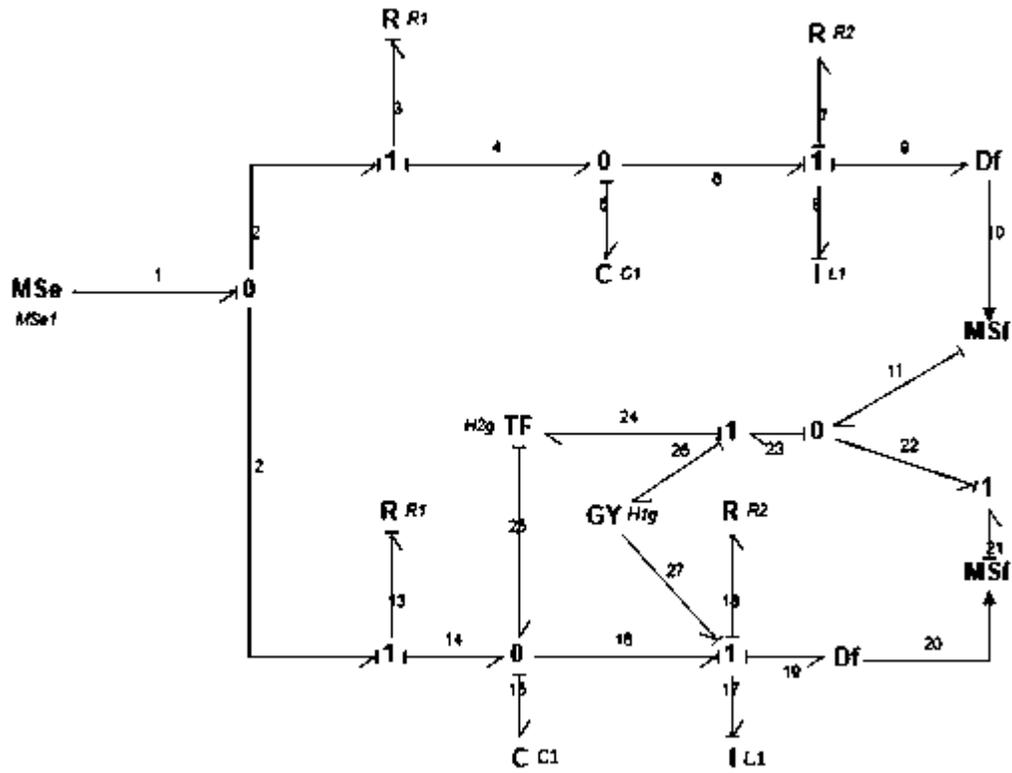


Figura 4.18 Observador de estado del sistema eléctrico.

Las relaciones constitutivas están dadas por:

$$F = \hat{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix}, L = \hat{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

La estructura unión del Bond Graph completo está ilustrada en la Figura 4.19.

$$\begin{bmatrix} f_5 \\ e_8 \\ f_{15} \\ e_{17} \\ e_3 \\ f_7 \\ e_{13} \\ f_{18} \\ f_8 \\ f_{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{2g} & 0 & -1 - H_{1g} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & H_{1g} & 1 & -H_{1g} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ f_8 \\ e_{15} \\ f_{17} \\ f_3 \\ e_7 \\ f_{13} \\ e_{18} \\ e_1 \end{bmatrix}$$

Figura 4.19 Estructura unión del sistema eléctrico con observador.

La representación en espacio de estado del sistema eléctrico con observador está descrita por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H_{2g}}{L_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{L_1} - \frac{H_{2g}}{L_1} \\ 0 & \frac{H_{1g}}{L_1} & \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} - \frac{H_{1g}}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.34)$$

En (4.34) se observa que la representación en espacio de estado de la planta sigue siendo la misma dada por (4.4), pero, la representación en espacio de estado del observador está siendo afectada por el vector de ganancias  $H$  y el error de estado, dicho sistema está descrito por:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & \frac{H_{2g}}{L_1} & 0 & -\frac{H_{2g}}{L_1} \\ 0 & \frac{H_{1g}}{L_1} & 0 & -\frac{H_{1g}}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Donde el término:

$$HC(x - \hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{H_2g}{L_1} & 0 & -\frac{H_2g}{L_1} \\ 0 & \frac{H_1g}{L_1} & 0 & -\frac{H_1g}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Es el que nos permitirá lograr que la dinámica de la planta sea igual a la del observador. Para el cálculo de las ganancias del observador se utilizará la técnica de ubicación de polos del enfoque tradicional con los ajustes necesarios en Bond Graph para obtener las ganancias gráficas correctamente.

La dinámica del observador está dada por el polinomio característico:

$$\det(sI - A_p + HC_p) = s^2 + \left( \frac{R_2}{L_1} + \frac{1}{R_1C_1} + \frac{H_2}{R_1} \right) s + \frac{R_2}{R_1C_1L_1} + \frac{1}{C_1L_1} + \frac{H_1}{C_1L_1} + \frac{H_2}{R_1C_1L_1} \quad (4.37)$$

Evaluando el polinomio (4.37) con los valores del sistema eléctrico se tiene:

$$\det(sI - A_p + HC_p) = s^2 + (35 + 5H_2)s + 750 + 500H_1 + 50H_2 \quad (4.38)$$

Polos deseados para el observador:

$$P_{do1} = -8$$

$$P_{do2} = -6$$

El polinomio con polos deseados está dado por:

$$\omega(s) = s^2 + 14s + 48 \quad (4.39)$$

Ahora, igualando el polinomio (4.38) con (4.39) se obtiene el sistema de ecuaciones descrito por:

$$\begin{aligned} 35 + 5H_2 &= 14 \\ 750 + 500H_1 + 50H_2 &= 48 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Resolviendo el sistema dado por (4.40) se obtienen las siguientes ganancias:

$$H_1 = -0.984$$

$$H_2 = -4.2$$

Como se vio en la sección de control por retroalimentación, estas ganancias obtenidas no pueden ser sustituidas en el Bond Graph del observador directamente, se debe hacer el mismo ajuste dado por (4.15) pero en este caso se tiene que:

$$\begin{aligned} H_{1g} &= F_1^{-1}H_1 \\ H_{2g} &= F_2^{-1}H_2 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Entonces, las ganancias gráficas del observador son:

$$H_{1g} = -0.1968$$

$$H_{2g} = -0.042$$

Sustituyendo las ganancias gráficas en el Bond Graph del observador y los mismos valores del sistema eléctrico que en el caso de la retroalimentación de estado, haciendo uso del software 20-SIM podemos observar el comportamiento del estado original y el estado observado del elemento C1 y el comportamiento del estado original y el estado observado del elemento L1 en las Figuras 4.20 y 4.21 respectivamente.

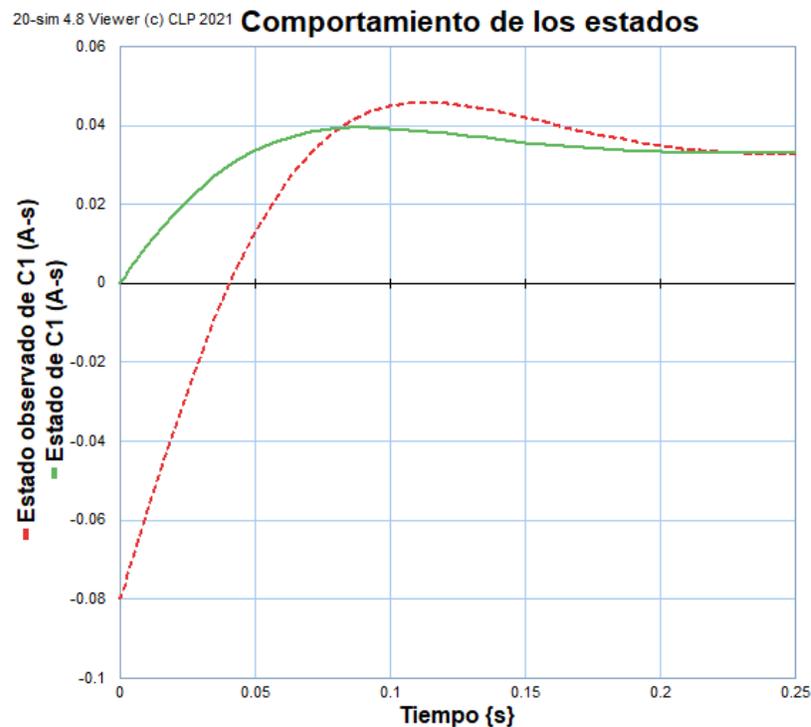


Figura 4.20 Comportamiento de los estados original - observado en el elemento C1.

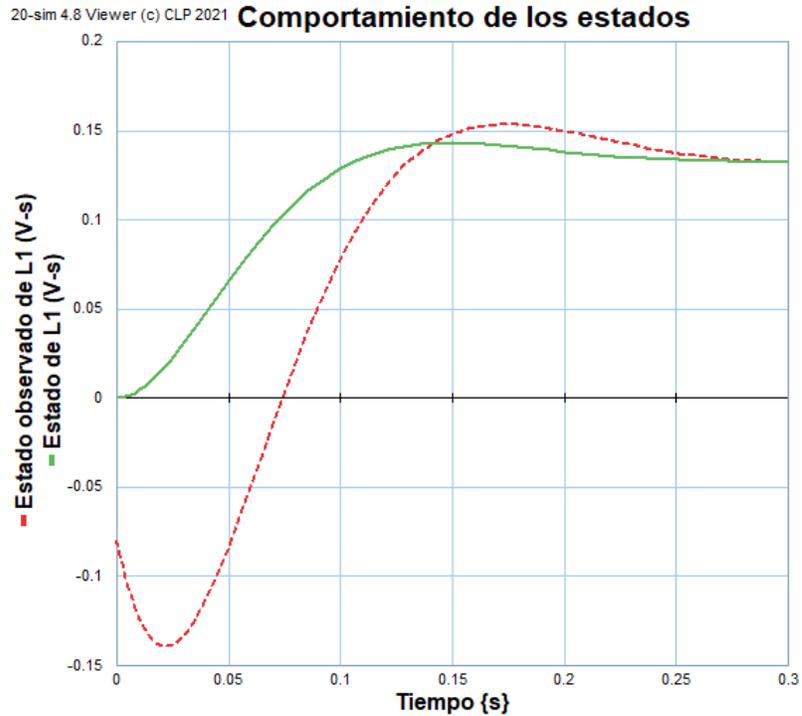


Figura 4.21 Comportamiento de los estados original - observado en el elemento L1.

En ambas figuras se aprecia que el funcionamiento del observador es correcto, estima las variables de estado después de un cierto tiempo de que el sistema inicia su funcionamiento, cabe destacar que en la simulación las condiciones iniciales de los estados observados fueron modificadas para probar el funcionamiento del observador.

b) Sistema electromecánico.

En el caso del sistema electromecánico, también se cuenta con su Bond Graph el cual se ilustra en la Figura 4.10, su representación en espacio de estado (4.19) y su BGD mostrado en la Figura 4.12, el cual es parte de los requisitos que se deben cumplir para que el sistema además de ser estructuralmente controlable, también pueda ser estructuralmente observable y se pueda diseñar su observador. En la Figura 4.22 se comprueba que, si existen trayectorias causales enlazando los elementos de almacenamiento en causalidad integral con los detectores, por lo tanto, este sistema es estructuralmente observable.

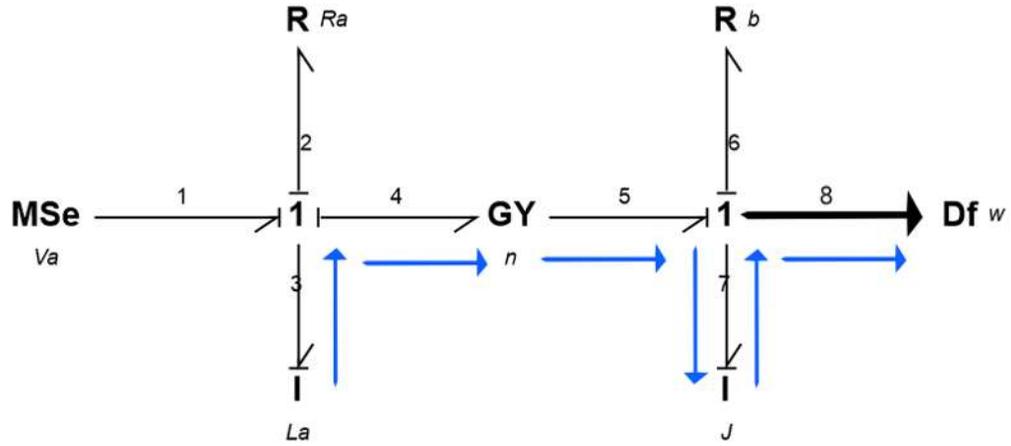


Figura 4.22 Trayectorias causales en el modelo BG del motor de CD, elemento - detector.

Para  $L_a$  (3 - 4 - 5 - 7 - 7 - 8)

Para  $J$  (7 - 7 - 8)

Ya que se sabe que el sistema es estructuralmente observable, se procede a diseñar su observador, el cual como se vio en el ejemplo del sistema eléctrico, es tal cual una copia del sistema. En la Figura 4.23 se puede apreciar el Bond Graph del sistema electromecánico con su observador de estado.

Los vectores clave de la planta y del observador están dados por:

$$x = \begin{bmatrix} p_4 \\ p_8 \end{bmatrix}, \dot{x} = \begin{bmatrix} e_4 \\ e_8 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} f_5 \\ f_8 \end{bmatrix}, D_{in} = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \end{bmatrix}, D_{out} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \end{bmatrix}, u = e_1, y = f_9 \quad (4.42)$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{16} \end{bmatrix}, \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{16} \end{bmatrix}, \hat{z} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{16} \end{bmatrix}, \widehat{D}_{in} = \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{15} \end{bmatrix}, \widehat{D}_{out} = \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{15} \end{bmatrix}, \hat{y} = f_{17} \quad (4.43)$$

Las relaciones constitutivas están dadas por:

$$F = \hat{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}, L = \hat{L} = \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

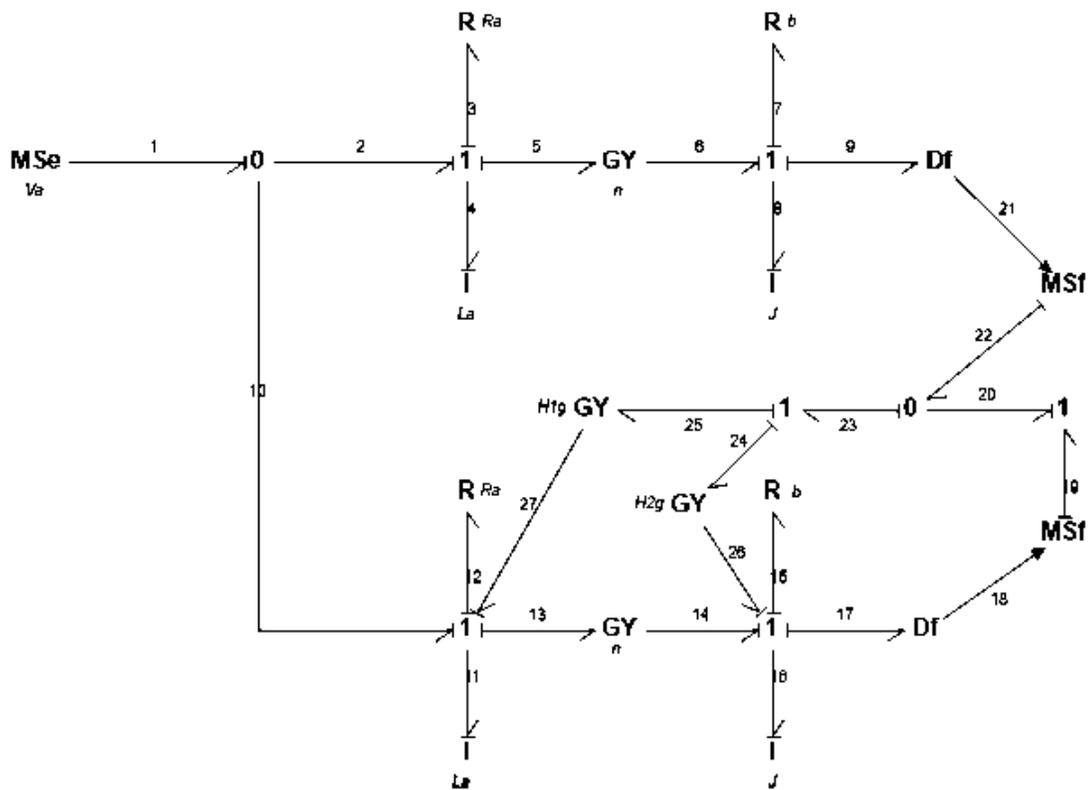


Figura 4.23 Bond Graph del sistema electromecánico con observador.

La estructura unión del Bond Graph completo está ilustrada a continuación en la Figura 4.24.

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ e_8 \\ e_{11} \\ e_{16} \\ f_3 \\ f_7 \\ f_{12} \\ f_{15} \\ f_9 \\ f_{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -n & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ n & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{1g} & 0 & -H_{1g} - 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & H_{2g} & n & -H_{2g} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4 \\ f_8 \\ f_{11} \\ f_{16} \\ e_3 \\ e_7 \\ e_{12} \\ e_{15} \\ e_1 \end{bmatrix}$$

Figura 4.24 Estructura unión del sistema electromecánico con observador.

La representación en espacio de estado del sistema electromecánico con observador está descrita por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{n}{J} & 0 & 0 \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{b}{J} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H_{1g}}{J} & -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{H_{1g}}{J} - \frac{n}{J} \\ 0 & \frac{H_{2g}}{J} & \frac{n}{L_a} & -\frac{H_{2g}}{J} - \frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.45)$$

En (4.45) se puede observar la representación en espacio de estado de la planta, que sigue siendo la misma dada por (4.19), pero, la representación en espacio de estado del observador está siendo afectada por el término agregado con el vector de ganancias  $H$  y el error de estado, dicho sistema está descrito por:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{n}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & \frac{H_{1g}}{J} & 0 & -\frac{H_{1g}}{J} \\ 0 & \frac{H_{2g}}{J} & 0 & -\frac{H_{2g}}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Para el cálculo de las ganancias del observador se aplica la técnica de ubicación de polos del enfoque tradicional con los ajustes necesarios en Bond Graph para obtener las ganancias gráficas correctamente.

La dinámica del observador está dada por el polinomio característico:

$$\det(sI - A_p + HC_p) = s^2 + \left(\frac{b}{J} + \frac{H_2}{J} + \frac{R_a}{L_a}\right)s + \frac{bR_a}{JL_a} + \frac{R_aH_2}{JL_a} + \frac{n^2}{JL_a} + \frac{nH_1}{JL_a} \quad (4.47)$$

Evaluando el polinomio (4.47) con los valores del sistema electromecánico se tiene:

$$\det(sI - A_p + HC_p) = s^2 + (10.4688 + 0.3125H_2)s + 5 + 3.125H_1 + 3.125H_2 \quad (4.48)$$

Polos deseados para el observador:

$$P_{do1} = -5$$

$$P_{do2} = -6$$

El polinomio con polos deseados para el observador está dado por:

$$\omega(s) = s^2 + 11s + 30 \quad (4.49)$$

Igualando el polinomio (4.48) con (4.49) se obtiene el sistema de ecuaciones descrito por:

$$\begin{aligned} 10.4688 + 0.3125H_2 &= 11 \\ 5 + 3.125H_1 + 3.125H_2 &= 30 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Resolviendo el sistema dado por (4.50) se obtienen las siguientes ganancias:

$$H_1 = 6.3002$$

$$H_2 = 1.6998$$

Aplicando el ajuste dado por (4.15) a las ganancias del observador se tiene que:

$$\begin{aligned} H_{1g} &= F_1^{-1}H_1 \\ H_{2g} &= F_2^{-1}H_2 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Entonces, las ganancias gráficas del observador son:

$$H_{1g} = 0.063$$

$$H_{2g} = 5.4395$$

Al sustituir los valores de la planta anteriormente dados en la retroalimentación de estado y las ganancias gráficas obtenidas, con el uso del software 20-SIM se puede ver en las figuras 4.25 y 4.26, el comportamiento de los estados tanto el original como el observado en los elementos La y J respectivamente.

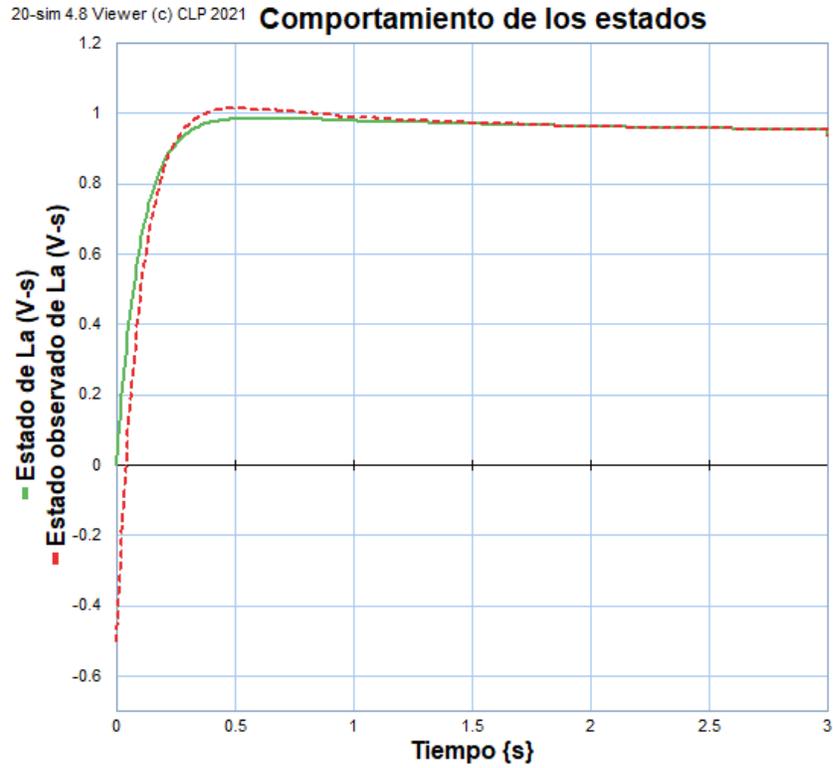


Figura 4.25 Comportamiento de los estados original - observado en el elemento La.

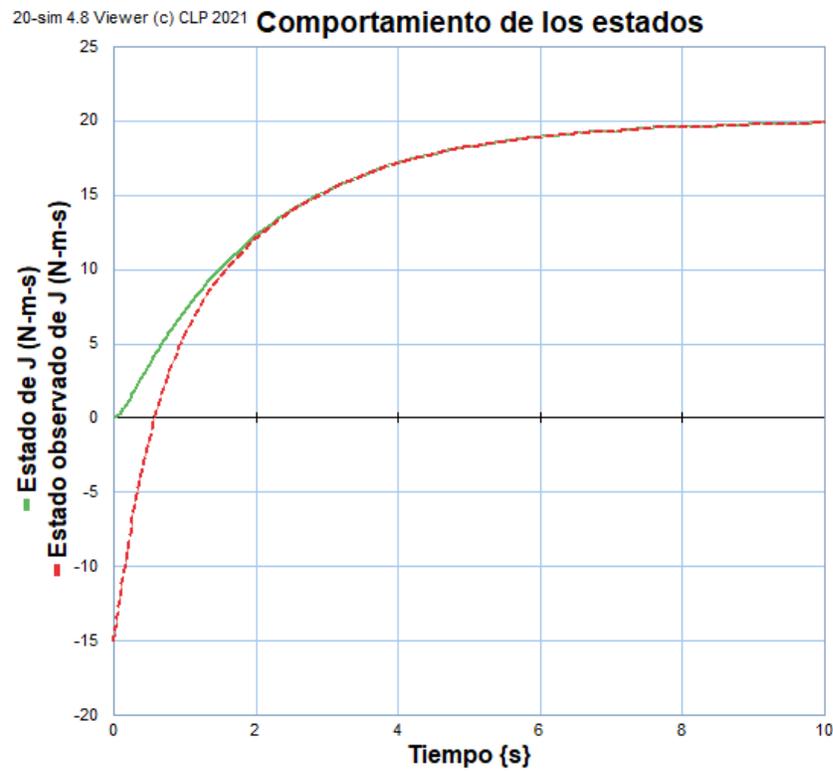


Figura 4.26 Comportamiento de los estados original - observado en el elemento J.

En este caso también se modificaron las condiciones iniciales de los estados observados para probar el funcionamiento del observador, el cual estima correctamente los estados de la planta después de un cierto tiempo de que el sistema inicia su funcionamiento.

## **4.4 Retroalimentación de Estado Estimado**

Después de analizar el control por retroalimentación de estado y el observador de estado en un enfoque de Bond Graph, ahora se analizará la técnica del control por retroalimentación, pero, retroalimentando los estados observados o estimados del sistema mediante el observador de estado y mostrar el funcionamiento de esta técnica y las ventajas que ofrece desde un enfoque de Bond Graph aplicándola a dos casos de estudio que se verán a continuación.

### **4.4.1 Caso de Estudio 1**

Como primer caso de estudio tenemos el sistema eléctrico mostrado en la Figura 4.1 con los mismos valores de cada elemento del circuito, al cual anteriormente se aplicó la técnica de control por retroalimentación de estado desde un enfoque de Bond Graph ilustrada en la Figura 4.5. Así mismo, también se diseñó un observador de estado, el cual se puede visualizar en la Figura 4.18.

Con todo lo anterior desarrollado, la retroalimentación de estado estimado desde el enfoque de Bond Graph se puede realizar por el principio de separación, es decir, calculando las ganancias del controlador y después las del observador o viceversa, en este caso, ya se cuentan con ambos vectores de ganancias, por lo tanto, se introducen las ganancias correspondientes al controlador de estados estimados y al observador del sistema eléctrico.

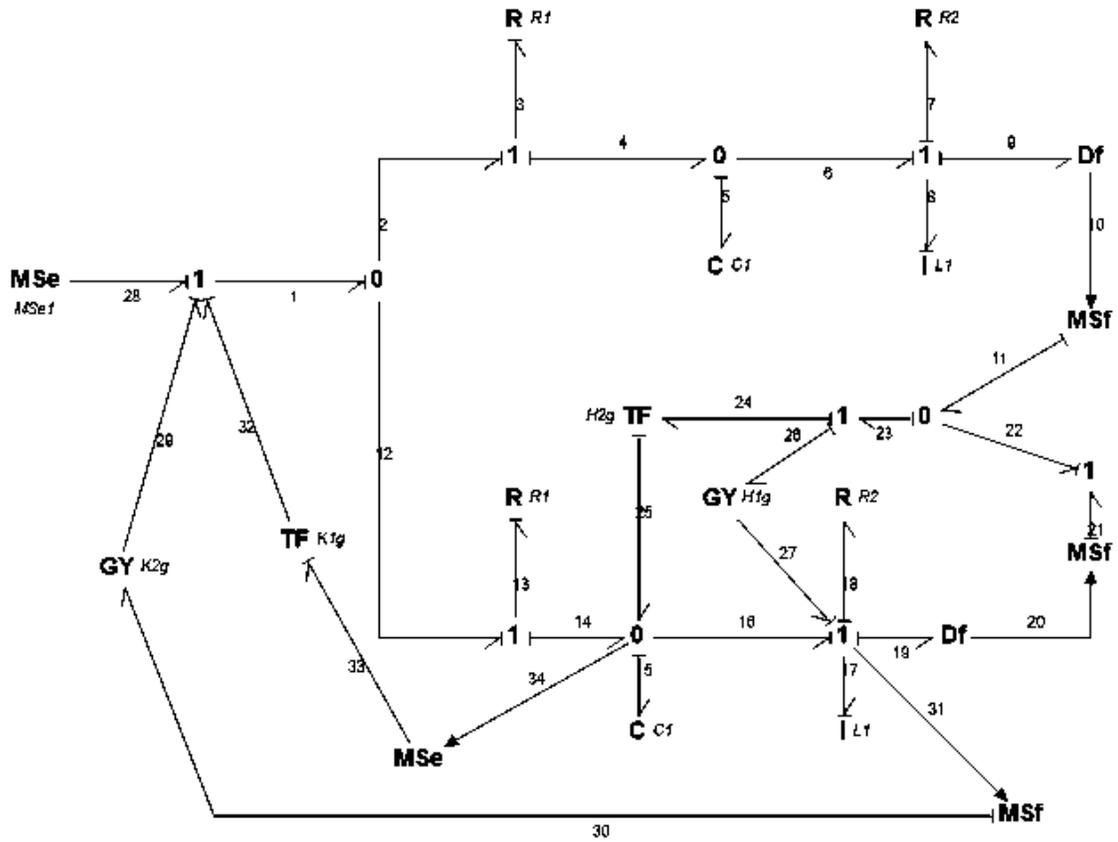


Figura 4.27 Bond Graph del sistema eléctrico con observador y retroalimentación de estados estimados.

En la Figura 4.27 se muestra gráficamente la retroalimentación de estado a los estados estimados por el observador.

Usando el software 20-SIM, en la Figura 4.28 podemos apreciar el comportamiento de la salida del sistema y la salida estimada por el observador con las condiciones iniciales de este distintas a cero.

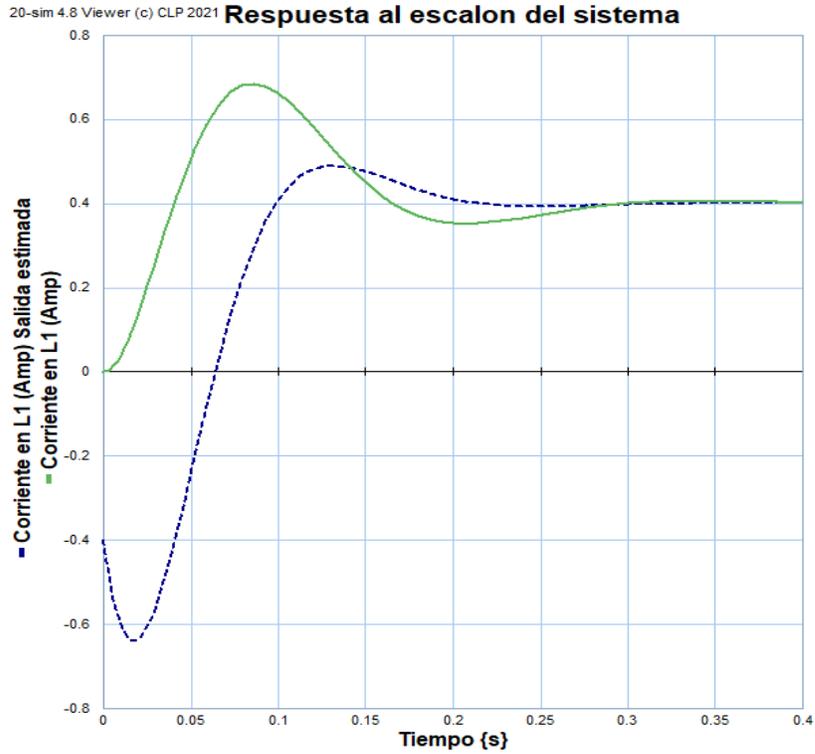


Figura 4.28 Respuesta de la salida y salida estimada en el sistema eléctrico.

La importancia de que las condiciones iniciales sean diferentes de cero radica en que no se tienen las condiciones iniciales del sistema original, entonces es necesario tenerlo en cuenta siempre en el diseño del observador. En las figuras 4.29 y 4.30 se ilustra el comportamiento del estado original y el estado estimado del elemento de almacenamiento C1 y el comportamiento del estado original y el estado estimado del elemento de almacenamiento L1 respectivamente.

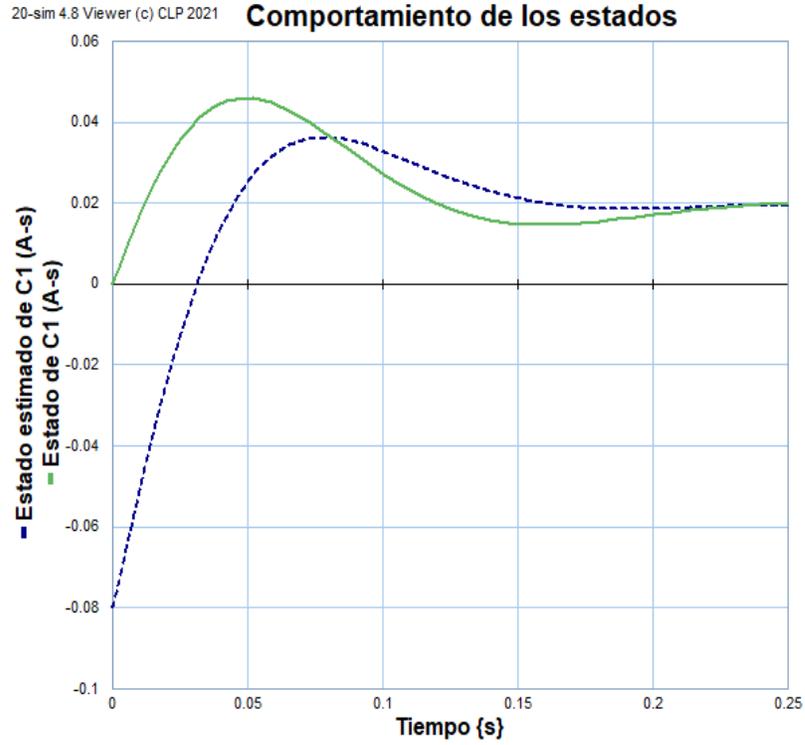


Figura 4.29 Respuesta del estado original y estado estimado del elemento C1 del sistema eléctrico.

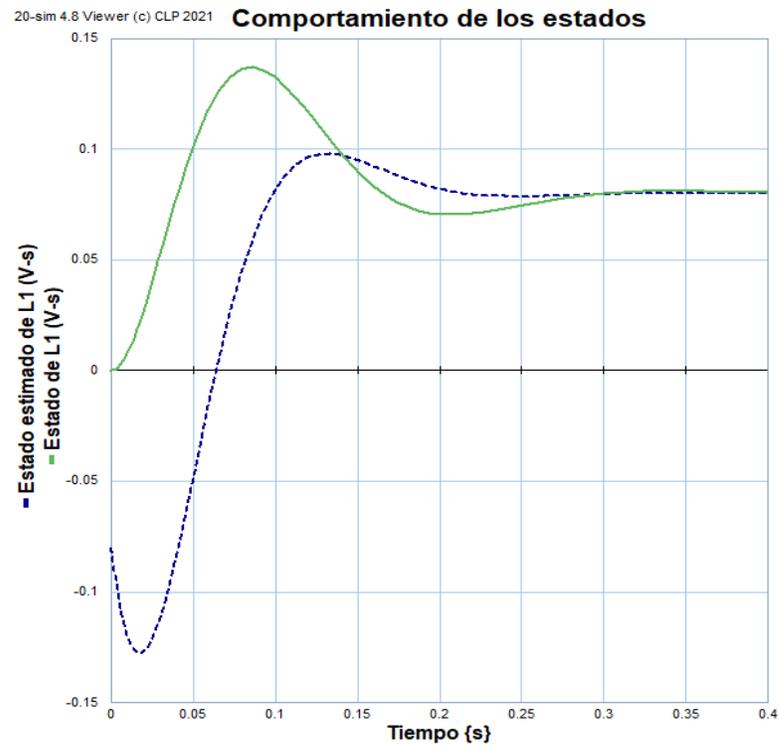


Figura 4.30 Respuesta del estado original y estado estimado del elemento L1 del sistema.

## 4.4.2 Caso de Estudio 2

Como segundo caso de estudio tenemos el sistema electromecánico mostrado en la Figura 4.9, al cual en secciones anteriores se le aplicó la técnica de control por retroalimentación de estado y el diseño de un observador, mostrados en la Figura 4.13 y la Figura 4.23 respectivamente. Tomando los valores de la planta anteriormente dados y las ganancias tanto del controlador como del observador anteriormente calculadas, se sustituyen en el Bond Graph mostrado en la Figura 4.31, el cual nos muestra la planta con su observador de estado y en dicho observador se realiza la retroalimentación, aplicando la técnica de control por retroalimentación de estado estimado.

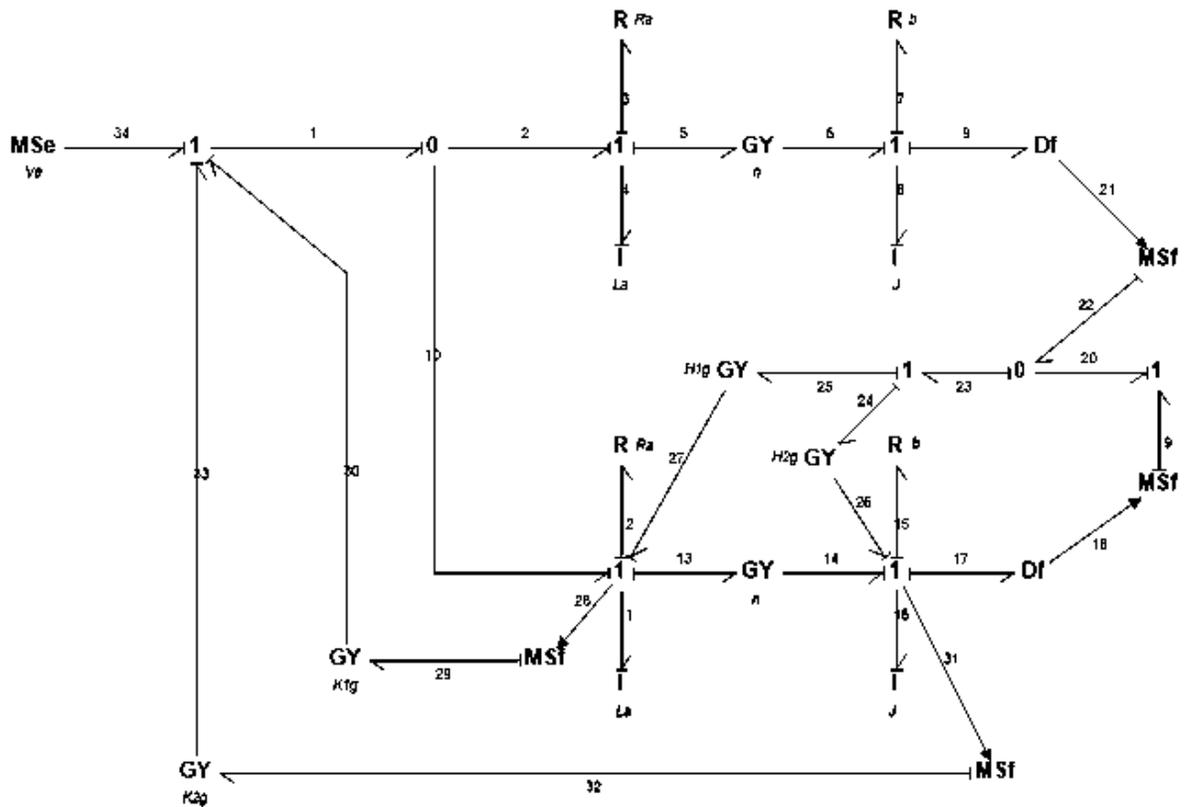


Figura 4.31 Bond Graph del sistema electromecánico con observador y retroalimentación de estados estimados.

Haciendo uso del software 20-SIM, en la Figura 4.32 se puede ver el comportamiento de la salida del sistema y la salida estimada por el observador con las condiciones iniciales de los estados observados distintas de cero.

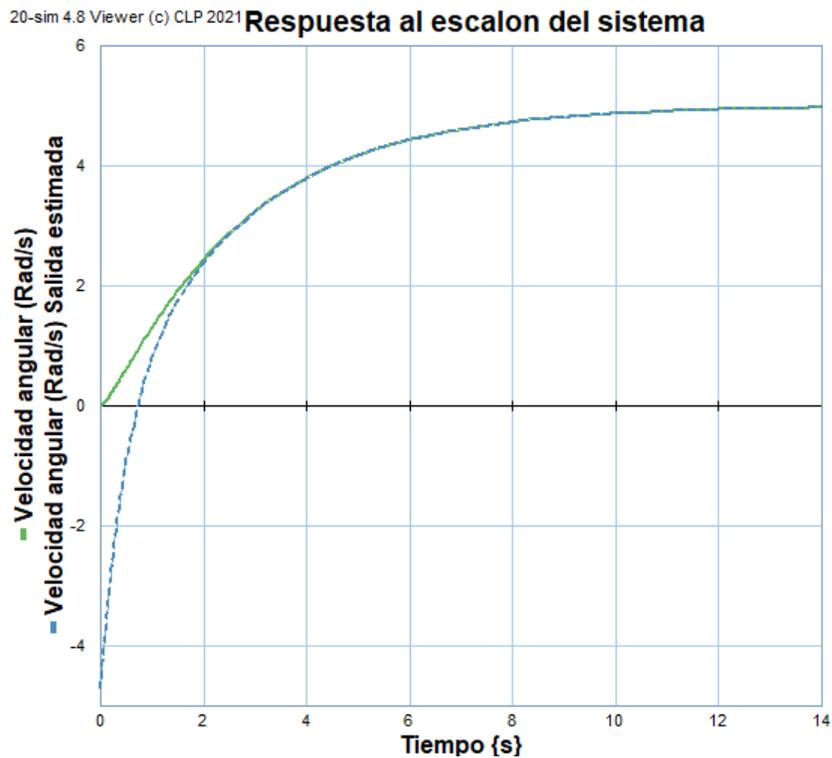


Figura 4.32 Respuesta de la salida y salida estimada en el sistema electromecánico.

A continuación, en las figuras 4.33 y 4.34 se ilustra el comportamiento del estado original y del estado observado en el elemento La y el elemento J respectivamente.

Tanto en la salida del sistema como en el comportamiento de los estados se tiene una buena estimación mediante el observador, además de estabilizar la respuesta de dichos parámetros mediante la retroalimentación de estado estimado.

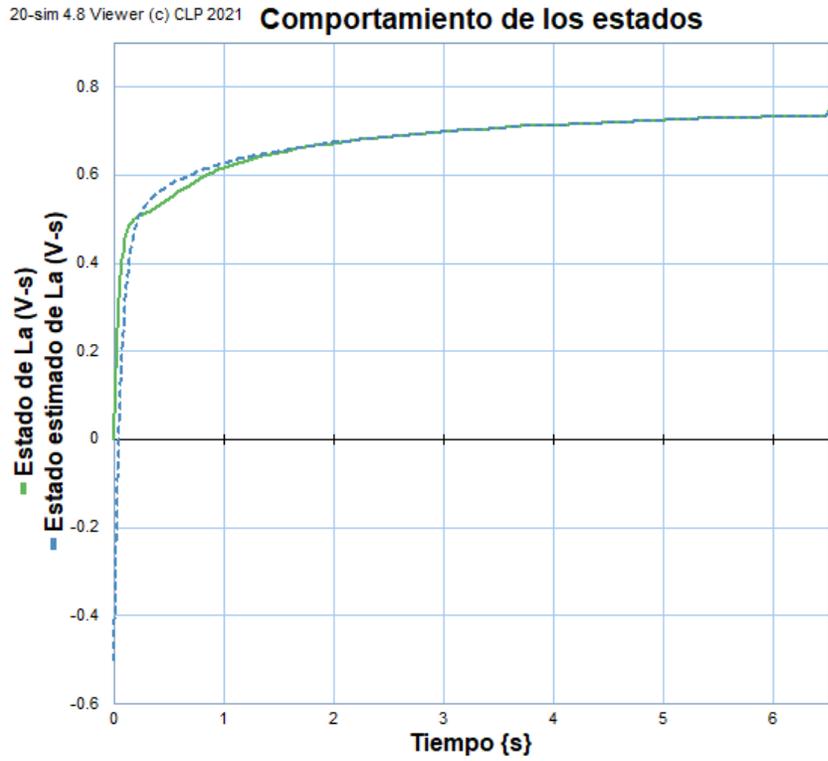


Figura 4.33 Respuesta del estado original y estado estimado del elemento La del sistema electromecánico.

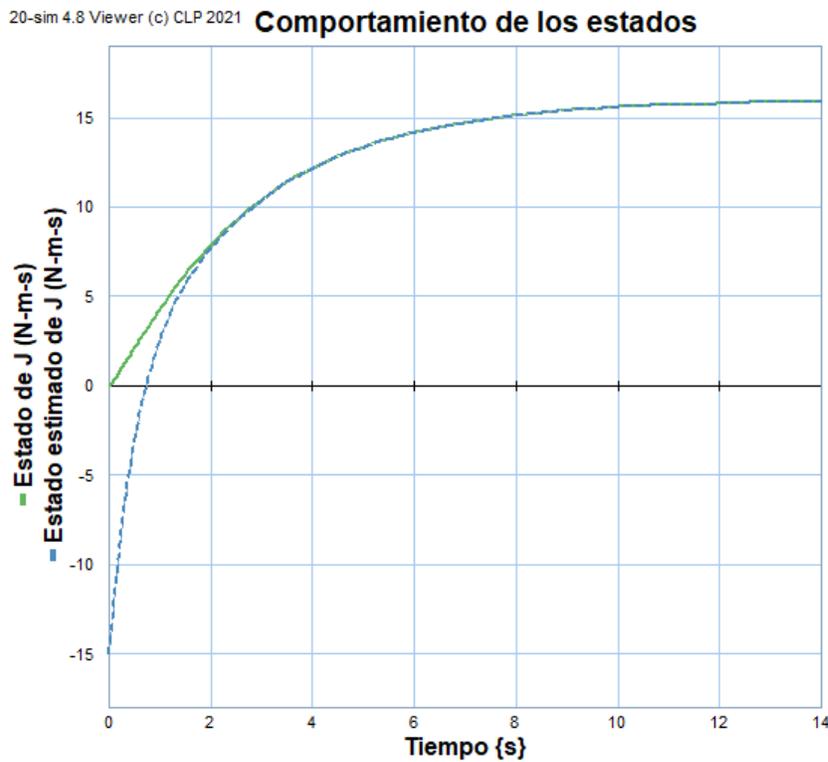


Figura 4.34 Respuesta del estado original y estado estimado del elemento J del sistema electromecánico.

## Capítulo 5

### Conclusiones y Recomendaciones

#### 5.1 Conclusiones Generales

- Se estudió y se aplicó la técnica de modelado de Bond Graph, mostrando su versatilidad y sus ventajas al modelar sistemas complejos, obtener su representación en espacio de estado y al aplicar técnicas de control y diseño de observadores.
- La comparación mostrada del enfoque de teoría de control clásica y el enfoque de Bond Graph va muy de la mano, Bond Graph presenta ventajas en el modelado y análisis de sistemas complejos, pero en el diseño de controladores y observadores va muy de la mano con la teoría de control clásica a excepción de ciertos ajustes.
- Se logró realizar el control por retroalimentación de estados estimados a los dos casos de estudio mostrados desde un enfoque de Bond Graph, este enfoque hace ver muy sencillo tanto el análisis como el diseño, gracias al procedimiento que lleva todo el capítulo cuatro.
- El objetivo del presente trabajo de investigación queda logrado.

#### 5.2 Recomendaciones en Trabajos Futuros

En el caso del control por retroalimentación de estado, pensar en una implementación para comprobar la teoría y la robustez del controlador propuesto, con eso se puede profundizar y especializar más el análisis y su diseño para cumplir las condiciones que se desean añadir a la planta, incluso ante posibles perturbaciones.

## **Bibliografía**

- [1] Gilberto González Avalos, “Modelado de Sistemas en el Dominio Físico”, Notas de curso, 2008.
- [2] Raquel Sarahí Rodríguez Angulo, “Diseño de Controladores en Bond Graph para Sistemas LTI”, Tesis de maestría, Facultad de Ingeniería Eléctrica – UMSNH, División de Estudios de Posgrado, 2010.
- [3] Isidro I. Lázaro Castillo, “Ingeniería de Sistemas de Control Continuo”, Segunda edición, Edición digital, 2019.
- [4] Katsuhiko Ogata, “Ingeniería de Control Moderna”, Tercera edición, Prentice Hall, 1998.
- [5] Katsuhiko Ogata, “Ingeniería de Control Moderna”, Cuarta edición, Prentice Hall, 2003.