



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE  
HIDALGO

---

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

DESCIFRANDO UN ALGORITMO PARA CONGELAR  
ESTADOS LIGADOS EN EL CONTINUO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

DOCTORA EN EL AREA DE FÍSICA

PRESENTA:

M.C. IZAMAR GUTIERREZ ALTAMIRANO



ASESOR:

DR. ALFREDO RAYA MONTAÑO

Morelia, Mich. Mayo 2023

# Índice general

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introducción</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Preliminares</b>   | <b>7</b>  |
| 2.1      | Mecánica Cuántica Supersimétrica (SUSY-QM) . . . . .                    | 7         |
| 2.1.1    | Transformación Puntual . . . . .  | 13        |
| 2.1.2    | Invariancia de norma y fase geométrica . . . . .                        | 15        |
| 2.1.3    | BIC Congelado . . . . .   | 17        |
| <b>3</b> | <b>Ejemplos</b>   | <b>24</b> |
| 3.1      | Agregando un solo BIC congelado para la partícula libre . . . . .       | 24        |
| 3.1.1    | Sistema con dos BICs congelados . . . . .                               | 29        |
| 3.2      | Potencial escalón dependiente del tiempo con un BIC congelado . . . . . | 35        |
| <b>4</b> | <b>Conclusiones</b>   | <b>47</b> |

# Índice de figuras

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 3.1 | Socio potencial SUSY confluyente $V_2(y)$ de la partícula libre (curva azul) y densidades de probabilidad $ \bar{\psi}_\epsilon(y) ^2$ (naranja) y $ \bar{\psi}(y) ^2$ (verde) para los parámetros $\omega = 1$ , $\epsilon = 1$ y $q^2 = 2$ . . . . . | 26 |
|-----|--|----|

3.2 Sistema con un solo BIC congelable. El potencial  $V_F(x, t)$  (a) y las densidades de probabilidad de  $\phi_{F\epsilon}(x, t)$  (b) y  $\phi_F(x, t)$  (c). Aquí  $\omega = 1$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $q^2 = 2$  y  $t_F = 0,2$ . . . . . 28

3.3 Socio potencial SUSY confluyente  $V_4(y)$  de la partícula libre (línea azul) y densidades de probabilidad  $|\tilde{\psi}_{\epsilon_1}(y)|^2$  (naranja),  $|\tilde{\psi}_{\epsilon_2}(y)|^2$  (rojo) y  $|\tilde{\psi}(y)|^2$  (verde). Los parámetros toman los valores  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 2$ ,  $k_1^2 = 1$ ,  $k_2^2 = 2$ ,  $q^2 = 3$ , y  $t_F = 0,2$ . . . . . 32

3.4 Sistema con dos BIC congelables. Potencial  $V_F(x, t)$  (a) y densidades de probabilidad de  $\phi_{F\epsilon_1}(x, t)$  (b),  $\phi_{F\epsilon_2}(x, t)$  (c), y  $\phi_F(x, t)$  (d) en diferentes momentos  $t \geq 0$ . Los parámetros toman los valores  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 2$ ,  $k_1^2 = 1$ ,  $k_2^2 = 2$ ,  $q^2 = 3$ , y  $t_F = 0,2$ . . . . . 33

3.5 Sistema con dos BIC's utilizando la simetría de inversión temporal. Potencial  $V_F(x, t)$  (a), y densidades de probabilidad de  $\phi_{F\epsilon_1}(x, t)$  (b),  $\phi_{F\epsilon_2}(x, t)$  (c) y  $\phi_F(x, t)$  (d). Los parámetros toman los valores  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 2$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2^2 = 2$ ,  $q^2 = 3$  y  $t_F = 0,2$ . . . . . 35

3.6  $|\bar{\psi}_\epsilon(y)|^2$  y una función envolvente de la forma  $A(y) = \frac{a}{b+y}$ , con  $a = 2k(\kappa^2 + k^2)^{-1/2}$ ,  $b = 2\omega k^2(\kappa^2 + k^2)^{-1}$ . La escala de la gráfica se fija con  $\hat{V} = 5$ ,  $k = 1$ ,  $\kappa = 2$  y  $C_\epsilon = 1$ , en las unidades apropiadas. . . . . 39

3.7 Se muestra el potencial  $\bar{V}(y)$ , junto con las densidades de probabilidad del estado perdido  $|\bar{\psi}_\epsilon(y)|^2$  y un estado de dispersión  $|\bar{\psi}(y)|^2$ . La escala del gráfico se fija con  $\hat{V} = 5$ ,  $k = 1$ ,  $\kappa = 2$ ,  $q = \sqrt{2}$  y  $\omega = 4$ . . . . . 40

3.8 Comportamiento del potencial  $V(x, t)$  (arriba), el BIC  $\phi_\epsilon(x, t)$  (centro) y el estado de dispersión  $\phi(x, t)$  (abajo) en los tiempos  $t = 0$ ,  $t = 0,1$  y  $t = 0,2$ . La escala de los gráficos está fijada por  $\hat{V} = 5$ ,  $k = 1$ ,  $\kappa = 2$ ,  $q = \sqrt{2}$  y  $\omega = 4$ . 42

3.9 Comportamiento del potencial  $V_F(x, t)$  (arriba), el BIC congelado  $\phi_{F\epsilon}(x, t)$  (centro) y el estado de dispersión  $\phi_F(x, t)$  (abajo) en los momentos  $t = 0, 8$ ,  $t = 1$  y  $t = 1, 8$ . El tiempo de congelación es  $t_i = 1$ . La escala del gráfico está fijada por  $\hat{V} = 5$ ,  $k = 1$ ,  $\kappa = 2$ ,  $q = \sqrt{2}$  y  $\omega = 4$ . . . . . 46

# Resumen

En esta tesis presentamos un algoritmo para congelar estados ligados en el continuo comenzando con la construcción de potenciales cuánticos para una ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Los potenciales generados poseen un estado tal que después de cierto umbral de tiempo  $t_F$ , cuando el potencial ya no cambia, el estado que evoluciona se vuelve un estado ligado en el continuo, cuya densidad de probabilidad se congela. Tras factorizar una fase geométrica, dicho estado satisface una ecuación de Schrödinger estacionaria con un potencial independiente del tiempo. Este procedimiento puede extenderse para considerar más de un estado ligado en el continuo.

**Palabras Clave:** Mecánica cuántica supersimétrica, estados ligados en el continuo, fase geométrica, ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, ecuación de Schrödinger estacionaria.

# Abstract

In this thesis we present an algorithm to freeze bound states in the continuum starting from the construction of time-dependent potentials for the Schrödinger equation via supersymmetric quantum mechanics. The generated potentials have a quantum state with the property that after a particular threshold time  $t_F$ , when the potential does no longer change, the evolving state becomes a bound state in the continuum, its probability distribution freezes. After the factorization of a geometric phase, the state satisfies a stationary Schrödinger equation with time-independent potential. The procedure can be extended to support more than one bound state in the continuum.

**Keywords:** Supersymmetric quantum mechanics, bound states in the continuum, geometric phase, time-dependent Schrödinger equation, stationary Schrödinger equation.

# Capítulo 1

## Introducción

En la naturaleza encontramos, típicamente, ondas que se propagan y ondas que permanecen confinadas. En el primer caso, tenemos por ejemplo a la luz, el sonido o partículas libres en mecánica cuántica. Por otro lado, en el segundo caso encontramos electrones unidos a átomos y moléculas, luz confinada en fibras ópticas, así como el confinamiento parcial del sonido en instrumentos musicales. En este caso, las frecuencias de oscilación permitidas se conocen como espectro de onda. Para determinar si una onda puede ser perfectamente confinada (es decir, si existe un “estado ligado”) o no en un sistema abierto, una regla simple es mirar su frecuencia: Si la frecuencia está fuera del rango espectral continuo (atravesado por las ondas que se propagan), puede existir un estado ligado ya que no hay una forma de que irradie. Por el contrario, un estado de una onda con frecuencia dentro del espectro continuo sólo puede ser una resonancia que filtra e irradia hasta el infinito. Sin embargo, un estado ligado en el continuo (BIC) es una excepción a esta regla convencional, ya que se encuentra dentro del continuo y coexiste con ondas extendidas, pero permanece perfectamente confinado sin radiación [1].

Los lugares más simples para encontrar BICs son en sistemas donde los acoplamientos de ciertas resonancias a los modos de radiación están prohibidos por simetría o separabilidad. Cuando un sistema exhibe una simetría de reflexión o una simetría rotacional, los

modos de diferentes clases de simetría se desacoplan por completo. Es común encontrar un estado ligado de una clase de simetría incrustado en el espectro continuo de modos de otra clase, y su acoplamiento está prohibido siempre que se conserve dicha simetría. También se puede aprovechar la separabilidad para construir BICs. Por ejemplo, consideremos un sistema bidimensional con hamiltoniano de la forma:

$$H = H_x(x) + H_y(y), \quad (1.1)$$

donde  $H_x$  actúa únicamente sobre la variable  $x$ , y  $H_y$  sobre la variable  $y$ . Se pueden resolver por separado los eigen-problemas unidimensionales,

$$\begin{aligned} H_x \psi_x^{(n)}(x) &= E_x^{(n)} \psi_x^{(n)}(x), \\ H_y \psi_y^{(m)}(y) &= E_y^{(m)} \psi_y^{(m)}(y). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Si  $\psi_x^{(n)}(x)$  y  $\psi_y^{(m)}(y)$  son estados ligados de un problema unidimensional, su producto  $\psi_x^{(n)}(x)\psi_y^{(m)}(y)$  está ligado en ambas dimensiones y permanecerá localizado incluso si su valor propio  $E_x^{(n)} + E_y^{(m)}$  se encuentra dentro del espectro continuo de los estados extendidos para el hamiltoniano bidimensional. El acoplamiento al estado extendido está prohibido por la separabilidad.

Cuando el número de canales de radiación es pequeño, se puede suprimir completamente la radiación de todos los canales ajustando los parámetros de un sistema. En términos generales, si la radiación se caracteriza por  $N$  grados de libertad, es necesario ajustar al menos  $N$  parámetros para lograr un BIC. Tal supresión puede interpretarse como un efecto de interferencia donde dos o más componentes radiantes se cancelan entre sí.

Los BICs de Fabry-Pérot se encuentran comúnmente en sistemas con dos resonancias idénticas acopladas a un solo canal de radiación. Existen en ondas de agua entre dos obstáculos [2,3] como se propuso por primera vez por M. McIver, estos a veces se denominan modos atrapados de chapoteo [4]. Dichos BICs también se han estudiado en cavidades

acústicas [5]. Una propiedad única de los BICs de Fabry-Pérot es que los dos resonadores interactúan fuertemente a través de la radiación, incluso cuando están muy separados. Estas interacciones de largo alcance se han estudiado en cavidades o qubits acoplados a través de una guía de ondas [6, 7] y para dos solitones con fugas acoplados a través del espacio libre de radiación [8]. Los BICs de Friedrich-Wintgen se han estudiado en modelos de capas continuas [9], colisiones de átomos fríos [10], aislantes topológicos bidimensionales con defectos [11] y para gráficos cuánticos [12], billar cuántico [13] o átomos de impurezas [14, 15] unidos a cables. En acústica, se han estudiado en cavidades multirresonantes [5, 16]. En óptica, se han estudiado en objetos dieléctricos multirresonantes en guías de ondas de microondas [17, 18], y el *láser de estado oscuro* descrito en la Ref. [19] es también un BIC de Friedrich-Wintgen si se ignora la radiación intrínseca de las cavidades de los microanillos.

También tenemos el caso de una sola resonancia que puede convertirse en un BIC cuando se sintonizan suficientes parámetros. Se puede pensar que la resonancia única en sí misma, surge de dos (o más) conjuntos de ondas, y la radiación de las ondas que la constituyen se puede ajustar para cancelarse entre sí.

En lugar de buscar la presencia de BIC en un sistema determinado, se puede dar la vuelta al problema: comenzar con un BIC deseado y determinar qué sistema puede soportar este estado ligado y el espectro continuo que lo contiene. Tal construcción inversa se puede lograr diseñando el potencial, la tasa de salto o la forma límite de la estructura. Los BICs se discutieron por primera vez en la mecánica cuántica en el trabajo seminal de von Neumann y Wigner [20], donde construyen un estado que es un modo cero localizado y normalizable de la forma

$$\psi(r) = \frac{\sin(r^3)}{r^2}, \quad (1.3)$$

en el potencial

$$V(r) = \frac{2}{r^2} + 9r^4, \quad (1.4)$$

que sólo admite soluciones de espectro continuo para valores propios de energía no nulos.

Estos autores consideraron ,además, una función de onda que incluía la modulación del perfil de partícula libre. Al analizar el comportamiento del modo cuando  $r \rightarrow \infty$  con una energía  $E \geq 0$  integrada en el continuo, construyen un potencial periódico a partir de la función de onda modulada

$$V(r) = E + \frac{\nabla^2 \psi(r)}{\psi(r)} \quad (1.5)$$

tal que  $V(r \rightarrow \infty) \sim -|V_0| < E$ . Al exigir la normalizabilidad del estado, el potencial así construido exhibe un comportamiento oscilatorio con la mitad del período de la función de onda, de tal forma que la localización requerida para la normalización del estado puede entenderse como el resultado de su reflexión sobre el *espejo de Bragg* generado por las crestas de la oscilación del potencial. La familia de potenciales de von Neumann-Wigner ha sido revisada continuamente durante casi un siglo (ver, por ejemplo, Refs. [21–23]). Se sabe que los potenciales de la forma

$$V(r) = \frac{a \sin(br)}{r} \quad (1.6)$$

admiten un BIC de energía  $E = b^2/4$  siempre que  $|a| > |b|$  [24]. Estos estados cuánticos se han estudiado bajo varios enfoques, incluida la ecuación de Gelfan-Levitan [25] o el enfoque de dispersión inversa [23, 26], las transformaciones de Darboux [27–29], supersimetría (SUSY) [30–32], entre otros.

Una construcción más relevante experimentalmente es diseñar la tasa de salto entre los vecinos cercanos en un modelo de amarre fuerte. Tal construcción puede llevarse a cabo a través de la transformación SUSY [33, 34] y ha sido realizada por Corrielli et al. en la Ref. [35] en una matriz de guías de ondas ópticas acopladas, donde la tasa de salto se ajusta por la distancia entre las guías de ondas vecinas.

Otro metodo es, en lugar de diseñar la ecuación de onda en sí, también se puede diseñar la forma del contorno para lograr BICs. M. McIver propuso por primera vez dicho método en el contexto de las ondas de agua [2].

Los BICs también se han estudiado en grafeno [36], algunos materiales topológicamente aislantes [37] y, desde el punto de vista formal, modelando la ecuación de Dirac en un espacio curvo [38]. Un denominador común en estos casos es el carácter estático del potencial efectivo en la ecuación de onda que gobierna el sistema subyacente. Actualmente los BICs se consideran como un fenómeno ondulatorio general.

Aunque la completitud del espectro continuo de un operador de onda podría sugerir que, en principio, cualquier función de onda cuadrado integrable localizada puede expresarse como una combinación de estos estados, en el caso de la ecuación de Schrödinger, se debe tener cuidado ya que en lo que se refiere a la realización de los BIC. Por ejemplo, en el caso de potenciales dependientes del tiempo, cuando la evolución temporal del potencial está congelado, no se garantiza que combinaciones de este tipo sean automáticamente soluciones a la ecuación de Schrödinger estacionaria, como demostraremos en este trabajo de Tesis basado en nuestro artículo [39]. La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo se puede resolver exactamente en un puñado de casos, como pozos potenciales con paredes móviles [40–42]. Se conocen varias aproximaciones para explorar las propiedades analíticas de las funciones de onda dependientes del tiempo y los valores propios de la energía (consulte, por ejemplo, Ref. [43] y sus referencias), incluida la aproximación adiabática [44] y la teoría de la perturbaciones [41]. Una estrategia poderosa para construir soluciones dependientes del tiempo para la ecuación de Schrödinger a partir de su versión estacionaria es a través de transformaciones puntuales [45–49]. Estas transformaciones, en combinación con la SUSY de primer orden independientes del tiempo, han permitido extender el número de ejemplos dependientes del tiempo resolubles, desde el pozo de potencial infinito con una pared móvil hasta el potencial trigonométrico Pöschl-Teller [42], transformando la ecuación de Schrödinger estacionaria a una ecuación dependiente del tiempo que en el pasado/futuro remoto se conecta con las soluciones de la partícula libre.

Esta tesis presenta un marco general para la construcción de potenciales dependientes del tiempo para la ecuación de Schrödinger empleando supersimetría de segundo orden en

combinación con transformaciones puntuales. Construimos un BIC para el caso dependiente del tiempo mediante la transformación puntual del problema estacionario, modificando el potencial y la función de onda. Luego, asumimos que después de un tiempo específico, toda la dependencia temporal del potencial se congela, de modo que el potencial vuelve a ser estacionario y exploramos el comportamiento del estado normalizable. Curiosamente, se ve que el BIC congelable no es una solución propia de la ecuación de Schrödinger estacionaria en el potencial congelado, sino que resuelve una ecuación que incluye un potencial vectorial que, sin embargo, no genera un campo magnético. Por lo tanto, mediante una transformación de norma apropiada, removemos el potencial vectorial y observamos el BIC que permanece congelado cuando el potencial deja de evolucionar en el tiempo. Ejemplificamos estas características a partir de la función de onda de una partícula libre en el semieje positivo real. Ampliamos aún más este sistema mediante la construcción de un segundo BIC. Por lo tanto, ilustramos el procedimiento para encontrar sistemas más complejos que admitan un número finito [50, 51] e infinito [23, 52, 53] de BICs. Con este fin, hemos organizado el resto del trabajo de la siguiente manera: En el siguiente Capítulo presentamos el marco teórico de la supersimetría de segundo orden como herramienta para generar BICs. El Capítulo 3 presenta algunos ejemplos de la construcción de BICs con este algoritmo confluyente y en el Capítulo 4 presentamos nuestras conclusiones y perspectivas para trabajo futuro.

# Capítulo 2

## Preliminares

Antes de pasar a la técnica general, presentemos las tres herramientas principales que necesitamos para generar potenciales dependientes del tiempo con estados ligados en el continuo congelables. Primero, la mecánica cuántica supersimétrica confluyente permite modificar el espectro de un hamiltoniano cuántico. Una transformación puntual proporciona dinámica al sistema. Finalmente, una transformación de norma facilita la interpretación de los resultados.

### 2.1. Mecánica Cuántica Supersimétrica (SUSY-QM)

La Mecánica Cuántica Supersimétrica o SUSY-QM es una técnica que nos permite encontrar soluciones a una ecuación de Schrödinger dado que conocemos una solución de otra ecuación de Schrödinger con diferente término potencial [54–59]. En su forma más simple, consideramos un hamiltoniano cuántico unidimensional  $H_0$  y un operador diferencial de primer orden  $L_1^\dagger$  que mapea las soluciones de la ecuación de valores propios

$$H_0\psi = E\psi, \tag{2.1}$$

en soluciones de

$$H_1 \hat{\psi} = E \hat{\psi}, \quad (2.2)$$

donde  $H_1$  es un hamiltoniano con un término potencial deformado. En esta Tesis, consideramos la supersimetría confluyente, que es una transformación SUSY de segundo orden que puede verse como dos iteraciones de transformaciones de primer orden [27, 60–71]. En aras de la claridad, repasemos las partes necesarias del formalismo requerido para este trabajo. Comenzamos considerando un hamiltoniano hermitiano  $H_0$  con un potencial independiente del tiempo  $V_0(y)$  que podría tener espectro discreto, continuo o ambos. Además, consideramos como conocidas algunas soluciones de la ecuación de valores propios:

$$H_0 \psi = E \psi, \quad \text{donde} \quad H_0 = -\frac{d^2}{dy^2} + V_0(y), \quad (2.3)$$

$y \in (y_\ell, y_r) \subset \mathbb{R}$  y  $E$  es el eigenvalor de energía del sistema. Luego, aplicamos dos pasos muy específicos de 1-SUSY para llegar a una transformación SUSY confluyente.

### Supersimetría de primer orden

Como primer paso, proponemos la relación de entrelazamiento

$$H_1 L_1^\dagger = L_1^\dagger H_0, \quad (2.4)$$

donde

$$H_1 = -\frac{d^2}{dy^2} + V_1(y), \quad L_1^\dagger = -\frac{d}{dy} + \frac{u'}{u}, \quad (2.5)$$

$u = u(y)$  es una función llamada semilla o *función de transformación*. Al sustituir (2.5) en la relación de entrelazamiento (2.4) encontramos que  $V_1$  y  $u$  deben cumplir

$$V_1(y) = V_0(y) - 2\frac{d^2}{dy^2} \ln u, \quad -u'' + V_0u = \epsilon u, \quad (2.6)$$

donde  $\epsilon$  es una constante de integración real llamada energía de factorización. Notemos que  $u$  satisface la ecuación inicial de Schrödinger para el parámetro de energía  $\epsilon$  pero no le imponemos las condiciones de contorno del problema físico inicial. De la expresión (2.6) vemos que para tener un potencial regular  $V_1$  la función de transformación  $u$  no debe anularse. Aplicando el operador  $L_1^\dagger$  sobre una solución  $\psi$  podemos obtener funciones propias  $\hat{\psi} \propto L_1^\dagger \psi$  del hamiltoniano  $H_1$ ; la ecuación de entrelazamiento (2.4) lo garantiza. En otras palabras, el operador  $L_1^\dagger$  mapea el espacio de soluciones de

$$H_0\psi = E\psi, \quad (2.7)$$

en el espacio de soluciones

$$H_1\hat{\psi} = E\hat{\psi}. \quad (2.8)$$

Existe un mapeo inverso y se puede encontrar a partir de la relación de entrelazamiento formalmente adjunta (2.4),

$$H_0L_1 = L_1H_1, \quad (2.9)$$

donde

$$L_1 = (L_1^\dagger)^\dagger = \frac{d}{dy} + \frac{u'}{u}. \quad (2.10)$$

Tengamos en cuenta que los operadores  $L_1$  y  $L_1^\dagger$  factorizan los hamiltonianos  $H_0$  y  $H_1$  como

$$\begin{aligned} L_1 L_1^\dagger &= H_0 - \epsilon \\ L_1^\dagger L_1 &= H_1 - \epsilon. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Tales factorizaciones son útiles para encontrar el estado escondido de  $H_1$ , esto es, el estado aniquilado por  $L_1$ , el cual satisface la ecuación

$$H_1 \hat{\psi}_\epsilon = \epsilon \hat{\psi}_\epsilon. \quad (2.12)$$

Resolviendo la ecuación diferencial de primer orden  $L_1 \hat{\psi}_\epsilon = 0$  encontramos que

$$\hat{\psi}_\epsilon(y) = \hat{c}_\epsilon \frac{1}{u(y)}, \quad (2.13)$$

donde  $\hat{c}_\epsilon$  es una constante de normalización cuando  $\hat{\psi}_\epsilon$  es normalizable, de lo contrario  $\hat{c}_\epsilon = 1$ . Ahora, cualquier otra solución de

$$H_1 \hat{\psi} = E \hat{\psi}, \quad (2.14)$$

además de  $\hat{\psi}_\epsilon$  se puede obtener como  $\hat{\psi} \propto L_1^\dagger \psi$ . Como sabemos que

$$L_1 L_1^\dagger = H_0 - \epsilon, \quad (2.15)$$

podemos calcular la constante de normalización. Asumiendo  $|\psi|^2 = 1$ , vemos que

$$\hat{\psi} = \frac{1}{\sqrt{E - \epsilon}} L_1^\dagger \psi. \quad (2.16)$$

Así, partiendo de una ecuación de Schrödinger

$$H_0\psi = E\psi, \quad (2.17)$$

con potencial  $V_0$ , y soluciones  $\psi$ , obtenemos una ecuación de Schrödinger

$$H_1\hat{\psi} = E\hat{\psi}, \quad (2.18)$$

con un potencial  $V_1$ , y soluciones  $\hat{\psi}_\epsilon$  y  $\hat{\psi}$ , ec. ( (2.6),(2.13)) y funciones propias 1-SUSY.

### Supersimetría confluyente de segundo orden

Podemos iterar el procedimiento y obtener un segundo hamiltoniano  $H_2$ . La selección de la función de transformación  $v$  y la energía de factorización  $\epsilon$  resolviendo correctamente

$$H_1v = \epsilon v, \quad (2.19)$$

fijará  $H_2$  y consecuentemente sus funciones propias. Existen muchas variaciones de la segunda iteración que conducen a diferentes sistemas. La más común es cuando  $\epsilon \neq \varepsilon$  se toman como constantes reales. Aquí consideramos el caso  $\epsilon = \varepsilon \in \mathbb{R}$ . Una vez que fijamos la constante de factorización, necesitamos seleccionar una función de transformación  $v$ . Una elección razonable es el estado escondido  $v = 1/u$ , pero esta elección da como resultado  $H_2 = H_0$ . Como queremos generar un hamiltoniano diferente al inicial,  $H_2 \neq H_0$ , necesitamos usar una solución general de  $H_1v = \epsilon v$ ; esto se puede hacer usando la fórmula de reducción de orden,

$$v = \frac{1}{u} \left( \omega + \int_{y_0}^y u^2(z) dz \right), \quad (2.20)$$

donde  $\omega$  es una constante real. El potencial asociado a la segunda iteración se escribe

$$\begin{aligned} V_2(y) &= V_1(y) - 2\frac{d^2}{dy^2} \ln v \\ &= V_0(y) - 2\frac{d^2}{dy^2} \ln \left( \omega + \int_{y_0}^y u^2 dz \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Los hamiltonianos  $H_0$  y  $H_2$  están entrelazados por el operador

$$\begin{aligned} L^\dagger &= L_2^\dagger L_1^\dagger \\ &= \left( -\frac{d}{dy} + \frac{v'}{v} \right) \left( -\frac{d}{dy} + \frac{u'}{u} \right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

ya que  $H_2 L^\dagger = L^\dagger H_0$ .

Las soluciones de la ecuación  $H_2 \bar{\psi} = E \bar{\psi}$  se pueden encontrar aplicando  $L^\dagger$  a las soluciones de  $H_0 \psi = E \psi$  como

$$\bar{\psi} = \frac{1}{E - \epsilon} L^\dagger \psi. \quad (2.23)$$

Además, el estado escondido asociado a la energía de factorización  $\epsilon$  es

$$\bar{\psi}_\epsilon = C_\epsilon \frac{1}{v} = C_\epsilon \frac{u}{\omega + \int_{y_0}^y u^2 dz}, \quad (2.24)$$

donde  $C_\epsilon$  es una constante de normalización, si  $\bar{\psi}_\epsilon$  es cuadrado integrable. En la transformación SUSY de primer orden, la función de transformación  $u$  debe carecer de nodos para producir un potencial regular  $V_1$ . En el caso confluyente, esta restricción cambia a que la función

$$\omega + \int_{y_0}^y u^2 dz, \quad (2.25)$$

no debe anularse. Podemos cumplir este requisito seleccionando  $u$  tal que

$$\lim_{y \rightarrow y_\ell} u(y) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{y \rightarrow y_r} u(y) = 0. \quad (2.26)$$

Entonces se puede garantizar que existen constantes  $\omega$  y  $y_0$  que mantienen  $V_2$  regular.

### 2.1.1. Transformación Puntual

Podemos relacionar una ecuación de Schrödinger unidimensional e independiente del tiempo con una dependiente del tiempo usando una transformación puntual, véase, por ejemplo, [45, 46]. Además, la conexión entre una supersimetría dependiente del tiempo presentada en [54, 72] y la versión independiente del tiempo se realizó en [73]. La combinación de SUSY-QM y transformaciones puntuales se aprovechó aún más en [42, 74–77]. En particular, consideremos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo del socio potencial SUSY  $V_2(y)$ :

$$\frac{d^2}{dy^2} \bar{\psi}(y) + (E - V_2(y)) \bar{\psi}(y) = 0. \quad (2.27)$$

Ahora, consideremos las funciones arbitrarias  $A = A(t)$  y  $B = B(t)$  y definamos la variable  $y$  en términos de un parámetro temporal  $t$  y una nueva variable espacial  $x$  como:

$$y(x, t) = x \exp \left[ 4 \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right] + 2 \int_{t_0}^t B(\tau) \exp \left[ 4 \int_{\tau_0}^{\tau} A(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \right] d\tau. \quad (2.28)$$

Entonces, la función

$$\begin{aligned} \phi(x, t) = & \hat{\psi}(y(x, t)) \exp \left\{ -i \left[ A(t)x^2 + B(t)x + E \int_{t_0}^t \exp \left[ 8 \int_{\tau_0}^{\tau} A(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \right] d\tau \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{t_0}^t [2iA(\tau) + B^2(\tau)] d\tau \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

es solución de la ecuación

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,t) - V(x,t)\phi(x,t) = 0. \quad (2.30)$$

Esta es una ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo (ESDT) donde el potencial viene dado por

$$\begin{aligned} V(x,t) = & \exp\left[8\int_{t_0}^t A(\tau)d\tau\right] V_2(y(x,t)) + \left[\frac{d}{dt}A(t) - 4A^2(t)\right] x^2 \\ & + \left[\frac{d}{dt}B(t) - 4A(t)B(t)\right] x. \end{aligned} \quad (2.31)$$

En la última expresión, tenemos tres términos. El primero involucra el potencial  $V_2$  en términos de  $x$ ,  $t$  con un coeficiente dependiente del tiempo. Los dos últimos términos son monomios cuadráticos y lineales en la coordenada  $x$  con coeficientes dependientes del tiempo. Iguaemos estos dos últimos términos a cero con el objetivo de obtener un potencial  $V$  con una forma similar al potencial  $V_2$ . Este problema fue estudiado en [42]. Igualando tales coeficientes a cero, obtenemos un sistema de ecuaciones; cuya solución por integración directa es:

$$A(t) = -\frac{1}{4t + c_1}, \quad B(t) = \frac{c_2}{4t + c_1}, \quad (2.32)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes reales. Una vez conocidas estas dos funciones, se puede evaluar el cambio de variable definido en (2.28),

$$y(x,t) = \frac{2x - c_2}{2(4t + c_1)}. \quad (2.33)$$

Así, dada la ecuación estacionaria de Schrödinger

$$\bar{\psi}'' + (E - V_2(y))\bar{\psi} = 0, \quad (2.34)$$

donde

$$V_2 = V_2(y), \quad (2.35)$$

podemos encontrar una solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\partial_t\phi + \partial_{xx}\phi - V\phi = 0, \quad (2.36)$$

donde

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t + c_1}} \bar{\psi} \left( \frac{2x + c_2}{2(4t + c_1)} \right) \exp \left\{ \frac{i}{4t + c_1} \left[ x^2 - c_2x + \frac{E + c_2^2}{4} \right] \right\}, \quad (2.37)$$

y

$$V(x, t) = \frac{1}{(4t + c_1)^2} V_2 \left( \frac{2x + c_2}{2(4t + c_1)} \right). \quad (2.38)$$

Hay una singularidad que debemos evitar en  $t = -c_1/4$ , por lo que el dominio del tiempo no puede ser una línea real completa. El dominio de la coordenada  $x$  podría ser el mismo de la variable  $y$ , dependiendo del sistema físico.

### 2.1.2. Invariancia de norma y fase geométrica

La ecuación de Schrödinger para una partícula con carga  $q$  y masa  $m$  en un potencial electromagnético se escribe en términos del potencial escalar  $\varphi$  y vectorial  $\mathbf{A}$  en lugar de las variables de el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y campo magnético  $\mathbf{B}$  lo que permite escribir el hamiltoniano como

$$H = \frac{(\hat{\mathbf{p}} + q\mathbf{A})^2}{2m} + q\varphi. \quad (2.39)$$

La invariancia de norma de las ecuaciones de Maxwell implica que los campos eléctrico y magnético

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.40)$$

no cambian si las siguientes transformaciones se realizan simultáneamente,

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda, \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial\lambda}{\partial t}, \quad (2.41)$$

donde  $\lambda = \lambda(x, t)$  es una función escalar. La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\partial_t\psi = H\psi, \quad (2.42)$$

retiene esta característica si, además de las transformaciones en la eq. (2.41), la función de onda cambia de acuerdo con

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\lambda}\psi. \quad (2.43)$$

Esto permite seleccionar  $\lambda$  de tal forma que si en un determinado instante de tiempo  $t_F$  el potencial vectorial  $\mathbf{A} \neq 0$  pero antes teníamos  $\mathbf{A} = 0$ , uno todavía puede tener una ecuación de Schrödinger sin potencial vectorial ajustando el potencial escalar apropiadamente. En particular, seleccionando

$$\lambda(x, t) = g(x)\Theta(t - t_F), \quad (2.44)$$

podemos cambiar el potencial escalar de tal manera que la ecuación dependiente del tiempo que gobierna este estado nunca desarrolle un potencial vectorial.

Además, en la situación en la que la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\frac{\partial\psi'}{\partial t} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} + q\mathbf{A})^2}{2m}\psi' + q\varphi\psi' \quad (2.45)$$

implica un potencial vectorial  $\mathbf{A}$  tal que  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ , podemos factorizar directamente una *fase geométrica*

$$\psi' = e^{ig}\psi, \quad (2.46)$$

con

$$g = q \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}, \quad (2.47)$$

donde  $g$  no depende del camino de integración en la región donde se anula el rotacional de  $\mathbf{A}$ , de tal forma que la función  $\psi$  verifica

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\psi + q\varphi\psi, \quad (2.48)$$

es decir, una ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo sin potencial vectorial.

### 2.1.3. BIC Congelado

Nuestro objetivo es construir un potencial resoluble dependiente del tiempo. Este potencial cambia en el tiempo hasta un tiempo de congelamiento  $t_F$ , luego ya no varía:

$$V_F(x, t) = \begin{cases} V(x, t) & 0 \leq t < t_F, \\ V(x, t_F) & t \geq t_F. \end{cases} \quad (2.49)$$

Le pedimos a este potencial que tenga al menos un BIC cuando  $t \geq t_F$ ; estos estados se conocen como *estados ligados en el continuo congelables*.

Partimos de un potencial resoluble y estacionario  $V_0(y)$  con espectro continuo. Luego, el primer paso es construir su socio SUSY confluyente  $V_2(y)$  usando el algoritmo presentado anteriormente. La energía de factorización  $\epsilon$  debe estar en el espectro continuo de  $H_0$ . Como consecuencia, la solución semilla es una función no normalizable. Estudiemos primero el caso en que el dominio del potencial es toda la línea real. Para este caso  $V_0(y)$  debe ser un potencial acotado. Es más, le pedimos

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} V_0(y) = V_\ell, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} V_0(y) = V_r, \quad V_\ell \neq V_r. \quad (2.50)$$

Sin pérdida de generalidad, consideraremos  $V_\ell > V_r$ . Otros requisitos que imponemos a

$V_0(y)$  son

$$\int_{y_a}^{\infty} |V_0'|^2 dy < \infty, \quad \int_{y_a}^{\infty} |V_0''| dy < \infty, \quad \int_{-\infty}^{y_b} |V_0'|^2 dy < \infty, \quad \int_{-\infty}^{y_b} |V_0''| dy < \infty, \quad (2.51)$$

donde  $y_a, y_b$  son constantes con valor absoluto arbitrariamente grande.

Dado que el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación de Schrödinger es importante, revisemos algunos resultados generales que utilizaremos. Se sabe (ver, por ejemplo, el Teorema 4.6, p.84 en [78]), que las soluciones de la ecuación

$$-\psi'' + v_0\psi = k^2\psi, \quad (2.52)$$

para una función  $v_0(y)$  que satisface  $v_0 \rightarrow 0$  cuando  $y \rightarrow \infty$  y

$$\int_{y_a}^{\infty} |v_0'|^2 dy < \infty, \quad \int_{y_a}^{\infty} |v_0''| dy < \infty, \quad (2.53)$$

tienen la siguiente forma asintótica cuando  $y \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \psi^+(y) &= \exp\left(ik \int_{y_a}^y \sqrt{1 - \frac{v_0(z)}{k^2}} dz\right) (1 + o(1)), \\ \phi^+(y) &= \exp\left(-ik \int_{y_a}^y \sqrt{1 - \frac{v_0(z)}{k^2}} dz\right) (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Dado que la sustitución de  $y$  por  $-y$  no cambia ni la forma de las condiciones ni la ecuación (2.53), entonces la solución se comporta asintóticamente cuando  $y \rightarrow -\infty$  como

$$\begin{aligned} \psi^-(y) &= \exp\left(ik \int_y^{y_b} \sqrt{1 - \frac{v_0(z)}{k^2}} dz\right) (1 + o(1)), \\ \phi^-(y) &= \exp\left(-ik \int_y^{y_b} \sqrt{1 - \frac{v_0(z)}{k^2}} dz\right) (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (2.55)$$

La siguiente consideración es seleccionar una energía de factorización  $V_\ell > \epsilon > V_r$ . Para

aplicar los resultados (2.54) identificamos

$$v_0 = V_0 - V_r, \quad (2.56)$$

al analizar el comportamiento asintótico en  $y \rightarrow \infty$ , entonces

$$\begin{aligned} \psi^+(y) &\propto \exp\left(i\sqrt{\epsilon - V_r} y\right) (1 + o(1)), \\ \phi^+(y) &\propto \exp\left(-i\sqrt{\epsilon - V_r} y\right) (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (2.57)$$

es decir, solo tendremos soluciones oscilatorias. Debemos seleccionar una función semilla  $u$  como una superposición, tal que  $u$  sea una función real. Podemos escribir

$$u \propto \sin\left(\sqrt{V_\ell - \epsilon} y + \delta\right), \quad (2.58)$$

donde  $\delta$  es una fase. Al estudiar el comportamiento asintótico de  $u$  en  $y \rightarrow -\infty$ , podemos usar

$$v_0 = V_0 - V_\ell. \quad (2.59)$$

De (2.55), las soluciones de la ecuación de Schrödinger tienen la forma

$$\begin{aligned} \psi^-(y) &\propto \exp\left(\sqrt{V_\ell - \epsilon} y\right) (1 + o(1)), \\ \phi^-(y) &\propto \exp\left(-\sqrt{V_\ell - \epsilon} y\right) (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (2.60)$$

el posible comportamiento de  $u$  es una superposición de funciones exponenciales divergentes y convergentes. Debemos elegir solo la solución convergente,  $u \propto \psi^-(y)$ . Al elegir  $u$  con estos comportamientos cuando  $|y| \rightarrow \infty$ , garantizamos que hay rangos para los parámetros  $y_0$  y  $\omega$  en (2.21) donde  $V_2$  es un potencial regular.

Además, cuando  $y \rightarrow +\infty$  entonces

$$V_2 \sim V_0 + 2 \left\{ \frac{2k \sin(2(ky + \delta))}{\frac{\sin(2(ky+\delta))}{2k} + y + \omega_a} + \frac{[\cos(2(ky + \delta)) + 1]^2}{\left[\frac{\sin(2(ky+\delta))}{2k} + y + \omega_a\right]^2} \right\} \rightarrow V_r, \quad (2.61)$$

donde  $k^2 = \epsilon - V_r$ , y  $\omega_a$  es una constante. El estado escondido se comporta como

$$\bar{\psi}_\epsilon \sim \frac{\sin(ky + \delta)}{\frac{\sin(2(ky+\delta))}{2k} + y + \omega_1} \rightarrow 0. \quad (2.62)$$

Cuando  $y \rightarrow -\infty$ , el potencial y los estados ocultos se comportan como

$$V_2 \sim V_0 - \frac{16\kappa^3\omega_b e^{2\kappa y}}{(e^{2\kappa y} + 2\kappa\omega_b)^2} \rightarrow V_\ell, \quad \text{y} \quad \bar{\psi}_\epsilon \sim \frac{e^{\kappa y}}{\frac{e^{2\kappa y}}{2k} + \omega_b} \rightarrow 0, \quad (2.63)$$

donde

$$\kappa^2 = V_\ell - \epsilon. \quad (2.64)$$

Así, los potenciales  $V_0$  y  $V_2$  tienen el mismo límite cuando  $y \rightarrow \pm\infty$ . Además, estos resultados sugieren que la función  $\bar{\psi}_\epsilon$  es una solución cuadrada integrable de

$$H_2 \bar{\psi}_\epsilon = \epsilon \bar{\psi}_\epsilon, \quad (2.65)$$

con un valor propio incrustado en el espectro continuo, en otras palabras, podría ser un BIC. Tales situaciones han sido discutidas en [30].

Si partimos de un potencial  $V_0(y)$  definido en el semieje  $(0, \infty)$ , el potencial puede ser acotado o no acotado, pero aún necesitamos  $V_0(y) \rightarrow V_r$  cuando  $y \rightarrow \infty$ . Además,  $V_0(y)$  debe satisfacer las dos primeras condiciones en (2.51). Entonces, la elección correcta de la energía de factorización es  $\epsilon > V_r$ , como parte del espectro continuo. El comportamiento de  $u$  cuando  $y \rightarrow +\infty$  es oscilatorio, como se explica en (2.57). Una vez más, es necesario elegir una solución real. El comportamiento de  $u$  a la izquierda debe elegirse para que  $u$

no diverja. De hecho, se necesita

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(y) = 0, \quad (2.66)$$

para que el estado perdido  $\bar{\psi}_\epsilon$  podría satisfacer la condición de frontera  $\bar{\psi}_\epsilon(0) = 0$ .

Ahora, podemos asociar a  $V_2(y)$  un potencial dependiente del tiempo  $V(x, t)$  a través de la transformación puntual. En la ecuación (2.37) podemos ver cómo se transforma cualquier solución de  $H_2\bar{\psi} = E\bar{\psi}$ . Recordemos que las soluciones  $\bar{\psi}$  se obtienen a partir de soluciones de  $H_0\psi = E\psi$  como en (2.23),  $\psi$  podría ser un estado límite o de dispersión. También hay un BIC  $\bar{\psi}_\epsilon$  introducido por la transformación SUSY confluyente que también se transforma como en (2.37), se llama  $\phi_\epsilon(x, t)$ . Esta función resuelve la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\partial_t\phi_\epsilon + \partial_{xx}\phi_\epsilon - V\phi_\epsilon = 0, \quad (2.67)$$

y será cuadrado integrable,  $\phi(x, t)$  está garantizado si la preimagen  $\bar{\psi}(y)$  es también una función de cuadrado integrable,

$$\begin{aligned} \|\phi\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{4t + c_1} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \bar{\psi} \left( \frac{2x + c_2}{2(4t + c_1)} \right) \right|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{\psi}(y)|^2 dy \\ &= \|\bar{\psi}\|^2, \end{aligned} \quad (2.68)$$

donde usamos el cambio de variable (2.33). Ni  $\phi(x, t)$  o  $\phi_\epsilon(x, t)$  son estados estacionarios, evolucionan en el tiempo y no son funciones propias del operador

$$-\partial_{xx} + V. \quad (2.69)$$

Nuestro siguiente paso es seleccionar un tiempo de congelación  $t_F$ . En cualquier momento  $t \geq t_F$ , las funciones  $\phi(x, t_F)$  y  $\phi_\epsilon(x, t_F)$  satisfacen la ecuación de valores propios:

$$\left[ \left( -i \frac{\partial}{\partial x} + A_x(x) \right)^2 + V(x, t_F) \right] \phi(x, t_F) = \frac{E}{(4t_F + c_1)^2} \phi(x, t_F), \quad (2.70)$$

donde

$$A_x(x) = -\partial_x g(x) = -(2x - c_2)/(4t_F + c_1), \quad (2.71)$$

siendo

$$g(x) = \frac{1}{4t_F + c_1} \left( x^2 - c_2 x + \frac{E + c_2^2}{4} \right) \quad (2.72)$$

la fase que acompaña a las funciones de onda (2.37). La ecuación (2.70) es la ecuación de Schrödinger de una partícula cargada en un campo magnético con potencial vectorial  $\mathbf{A} = (A_x, 0, 0)$ , pero un campo magnético nulo ya que  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$ . Aquí usamos la transformación de norma presentada anteriormente, que permite introducir un vector potencial  $\mathbf{A}(x, t) = (A_x(x, t), 0, 0)$  donde  $A_x(x, t) = -\Theta(t - t_F) \partial_x g(x)$ , entonces la función a trozos

$$\phi_F(x, t) = \begin{cases} \phi(x, t) & 0 \leq t < t_F, \\ \bar{\psi} \left( \frac{2x+c_2}{2(4t_F+c_1)} \right) \exp \left( -\frac{iE}{(4t_F+c_1)^2} t \right) & t \geq t_F. \end{cases} \quad (2.73)$$

será la solución de

$$i\partial_t \phi_F(x, t) = [-\partial_{xx} + V_F(x, t)] \phi_F(x, t) = H \phi_F(x, t).$$

En particular, la función

$$\phi_{F\epsilon}(x, t) = \begin{cases} \phi_\epsilon(x, t) & 0 \leq t < t_F, \\ \bar{\psi}_\epsilon \left( \frac{2x+c_2}{2(4t_F+c_1)} \right) \exp \left( -\frac{i\epsilon}{(4t_F+c_1)^2} t \right) & t \geq t_F, \end{cases} \quad (2.74)$$

es un paquete de ondas dependiente del tiempo antes del tiempo de congelación, pero después de  $t_F$ , se convertirá en un estado ligado en el continuo que satisface la ecuación de valores propios

$$H\phi_{F\epsilon} = \epsilon\phi_{F\epsilon}, \quad (2.75)$$

donde

$$\epsilon = \frac{\epsilon}{(4t_F + c_1)^2}. \quad (2.76)$$

En el siguiente Capítulo mostraremos algunos ejemplos para exponer de mejor manera las aplicaciones de la teoría.

# Capítulo 3

## Ejemplos

En este Capítulo, construimos dos potenciales con estados ligados congelables en el continuo. En el primer ejemplo, partimos de la partícula libre definida en el semieje  $y > 0$  y generamos un potencial dependiente del tiempo con un solo BIC congelable. Para un segundo ejemplo, mostramos que podemos iterar el algoritmo para construir un potencial con dos BIC congelables. Además, usando la simetría de inversión temporal, construimos potenciales con más BICs congelables.

### 3.1. Agregando un solo BIC congelado para la partícula libre

Comenzamos nuestra discusión considerando el potencial

$$V_0(y) = 0, \tag{3.1}$$

para la partícula libre, definido en el semieje  $y \in (0, \infty)$  como en [39]. Elegimos una energía de factorización

$$\epsilon = k^2 > 0 \tag{3.2}$$

y

$$u(y) = \sin(ky). \quad (3.3)$$

Usando la transformación supersimétrica confluyente, el potencial  $V_0$  se transforma como en (2.21). Explícitamente,

$$V_2(y) = \frac{16k^2 [1 - k(2\omega + y) \sin(2ky) - \cos(2ky)]}{[\sin(2ky) - 2k(2\omega + y)]^2}. \quad (3.4)$$

Para tener un potencial regular usamos  $y_0 = 0$  y  $\omega > 0$ . El estado escondido (2.24) asociado a la energía de factorización  $\epsilon$  es

$$\bar{\psi}_\epsilon(y) = C_\epsilon \frac{4k \sin(ky)}{2k(2\omega + y) - \sin(2ky)}, \quad (3.5)$$

que es de cuadrado integrable. Para verificar esta afirmación, centrémonos en la cola oscilante de la función. Podemos ver que el cuadrado del estado escondido está acotado por arriba por una función de cuadrado integrable de  $y = \pi/4k$  para  $y \rightarrow \infty$ , como:

$$\begin{aligned} \|\bar{\psi}_\epsilon\|^2 &= |C_\epsilon|^2 \left( \int_0^{\frac{\pi}{4k}} |\bar{\psi}_\epsilon(y)|^2 dy + \int_{\frac{\pi}{4k}}^\infty |\bar{\psi}_\epsilon(y)|^2 dy \right) \\ &= |C_\epsilon|^2 \left( \frac{\pi - 2}{\omega(8k\omega + \pi - 2)} + \int_{\frac{\pi}{4k}}^\infty \left| \frac{4k \sin(ky)}{2k(2\omega + y) - \sin(2ky)} \right|^2 dy \right) \\ &\leq |C_\epsilon|^2 \left( \frac{\pi - 2}{\omega(8k\omega + \pi - 2)} + \int_{\frac{\pi}{4k}}^\infty \left| \frac{4k}{2k(2\omega + y) - 1} \right|^2 dy \right) \\ &= |C_\epsilon|^2 \left( \frac{1}{\omega} + \frac{8k}{8k\omega + \pi - 2} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para una energía  $E_q = q^2 \neq \epsilon$ , la función de onda  $\bar{\psi}(y)$ , ver (2.23), es

$$\bar{\psi}(y) = \frac{4k \sin^2(ky) [k \cot(ky) \sin(qy) - q \cos(qy)]}{(q^2 - k^2) [2k(2\omega + y) - \sin(2ky)]} - \sin(qy). \quad (3.7)$$

En la Fig. 3.1 el potencial  $V_2(y)$ , junto con las densidades de probabilidad del estado escondido  $\bar{\psi}_\epsilon(y)$  y un estado de dispersión  $\bar{\psi}(y)$  son mostrados, para  $\omega = 1$ . Observamos que la función de onda del BIC tiene una función envolvente que tiende a cero cuando  $y \rightarrow \infty$ , mientras que el estado  $\bar{\psi}(y)$  no está localizado.

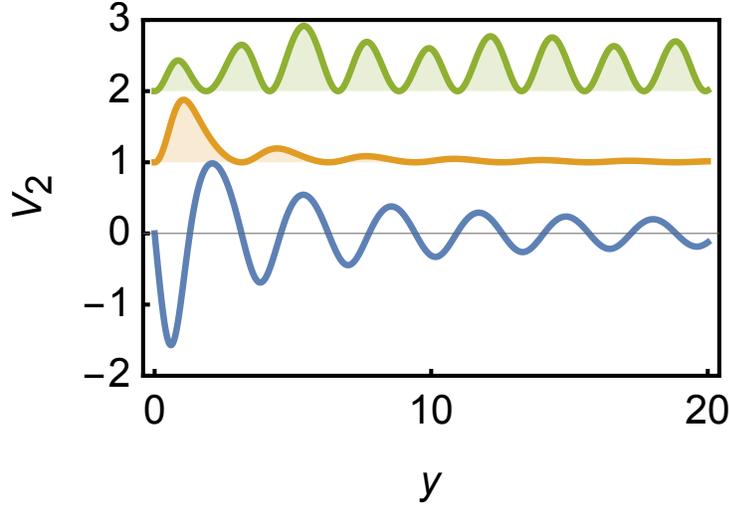


Figura 3.1: Socio potencial SUSY confluyente  $V_2(y)$  de la partícula libre (curva azul) y densidades de probabilidad  $|\bar{\psi}_\epsilon(y)|^2$  (naranja) y  $|\bar{\psi}(y)|^2$  (verde) para los parámetros  $\omega = 1$ ,  $\epsilon = 1$  y  $q^2 = 2$ .

Ahora, usamos la transformación puntual presentada en (2.33–2.38), donde establecemos  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$  y  $t \in [0, \infty)$ . Esta selección hace  $x = y$  para  $t = 0$ . Entonces

$$y = \frac{x}{4t + 1} \quad (3.8)$$

y  $V_2$  se transforma como:

$$V(x, t) = \frac{16k^2 \left[ 1 - k \left( 2\omega + \frac{x}{4t+1} \right) \sin \left( \frac{2kx}{4t+1} \right) - \cos \left( \frac{2kx}{4t+1} \right) \right]}{\left[ (4t+1) \sin \left( \frac{2kx}{4t+1} \right) - 2k(2\omega + 8\omega t + x) \right]^2}. \quad (3.9)$$

Análogamente, para el BIC dependiente del tiempo, la función de onda asociada para la

energía  $\epsilon$  es explícitamente

$$\phi_\epsilon(x, t) = \frac{4ik\sqrt{4t+1} \exp\left[\frac{i(4x^2+k^2)}{16t+4}\right] \sin\left(\frac{kx}{4t+1}\right)}{(4t+1) \sin\left(\frac{2kx}{4t+1}\right) - 2k(2\omega + 8\omega t + x)}. \quad (3.10)$$

El estado está localizado y el primer máximo en la densidad de probabilidad se amplía y disminuye en altura a medida que aumenta el tiempo. Para estados con energía  $E = q^2 \neq \epsilon$ , la correspondiente función de onda dependiente del tiempo tiene la forma explícita

$$\phi(x, t) = \frac{\exp\left[\frac{i(4x^2+q^2)}{16t+4}\right]}{i\sqrt{4t+1}} \left[ \chi_q(x, t) - \sin\left(\frac{qx}{4t+1}\right) \right], \quad (3.11)$$

donde

$$\chi_q(x, t) = \frac{4k \sin^2\left(\frac{kx}{4t+1}\right) \left[ k \cot\left(\frac{kx}{4t+1}\right) \sin\left(\frac{qx}{4t+1}\right) - q \cos\left(\frac{qx}{4t+1}\right) \right]}{(q^2 - k^2) \left[ 4k\omega + \frac{2kx}{4t+1} - \sin\left(\frac{2kx}{4t+1}\right) \right]}.$$

Este estado no está localizado en ningún momento.

Finalmente, consideramos una partícula cargada en el potencial:

$$V_F(x, t) = \begin{cases} V(x, t) & 0 \leq t < t_F, \\ V(x, t_F) & t \geq t_F. \end{cases} \quad (3.12)$$

donde  $V(x, t)$  viene dado por (3.9), y  $t_F$  es el tiempo de congelación. La forma del potencial en  $t = 0$  es oscilatoria en todo el dominio  $x \in [0, \infty)$ , la amplitud de tales oscilaciones disminuye a  $1/x$ . Este potencial es de hecho una familia parametrizada por  $\omega > 0$ . Cuanto menor sea el valor de  $\omega$ , más profundo será el primer mínimo del potencial. Las soluciones de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\partial_t\phi_F + \partial_{xx}\phi_F + V_F\phi_F = 0, \quad (3.13)$$

se pueden construir como (3.7), (3.10) y (3.11); estos estados no son normalizables. Además,

el estado  $\phi_{F\epsilon}$  termina como un BIC. Se construye como en (3.64) donde  $\bar{\psi}_\epsilon$  se da en (3.38) y  $\phi_\epsilon$  en (3.10). Es cuadrado integrable para todos los tiempos  $t \geq 0$  debido a las relaciones (3.49) y (3.40). Cuando  $t \geq t_F$ , el estado  $\phi_{F\epsilon}$  se convierte en el único estado límite estacionario del hamiltoniano

$$H_F = -\partial_{xx} + V_F, \quad (3.14)$$

con energía

$$\epsilon_F = \frac{\epsilon}{(4t + 1)^2}. \quad (3.15)$$

Dado que  $\epsilon_F > V(x, t_F)$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , entonces  $\phi_{F\epsilon}$  es un estado ligado en el continuo congelado. En la Fig. 3.2a, mostramos el potencial  $V_F(x, t)$ . Su forma cambia en el tiempo y su perfil espacial oscila como se esperaba, tendiendo a cero cuando  $x \rightarrow \infty$ . La Fig. 3.2b muestra la densidad de probabilidad del BIC congelable agregado,  $|\phi_{F\epsilon}(x, t)|^2$ . Se puede ver como varía en el tiempo hasta  $t_F = 0, 2$ , cuando se vuelve estacionario. El comportamiento de  $|\phi_F(x, t)|^2$ , para  $E = 2$  en diferentes momentos se muestra en la Fig. 3.2c.

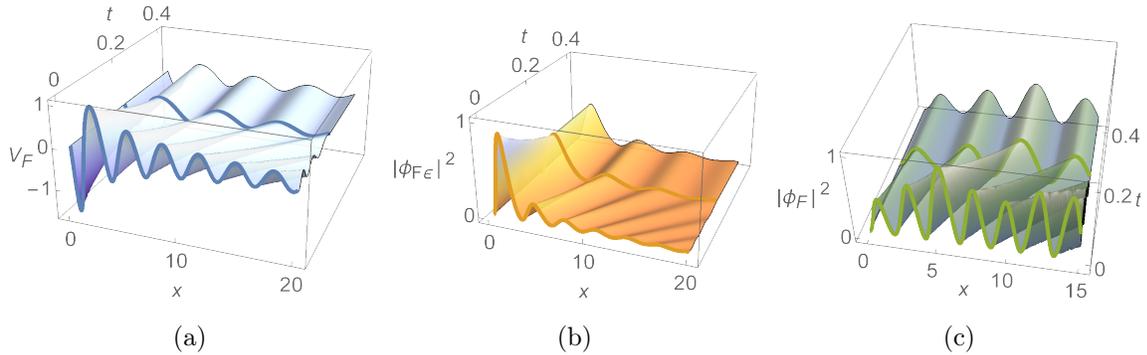


Figura 3.2: Sistema con un solo BIC congelable. El potencial  $V_F(x, t)$  (a) y las densidades de probabilidad de  $\phi_{F\epsilon}(x, t)$  (b) y  $\phi_F(x, t)$  (c). Aquí  $\omega = 1$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $q^2 = 2$  y  $t_F = 0,2$ .

### 3.1.1. Sistema con dos BICs congelados

Podemos iterar la transformación SUSY confluyente para agregar más de un BIC. Con cada iteración, la longitud de las expresiones del potencial socio SUSY y las soluciones de la correspondiente ecuación de Schrödinger podrían aumentar drásticamente. Para ilustrar el procedimiento, tomamos el sistema estacionario encontrado en el ejemplo anterior con el término potencial  $V_2(y)$  como en (3.4), el único BIC  $\bar{\psi}_\epsilon(y)$  con energía  $\epsilon = k^2$  como en (3.38), y estados de dispersión  $\bar{\psi}(y)$  con energía  $E_q = q^2 \neq k^2$  dados por (3.44). Para simplificar la notación, hagamos los siguientes reemplazos  $\epsilon \rightarrow \epsilon_1$ ,  $k \rightarrow k_1$  y  $\omega \rightarrow \omega_1$ . A continuación, encontramos un socio SUSY confluyente de  $V_2$ . Como queremos agregar un segundo BIC, debemos seleccionar una segunda energía de factorización  $\epsilon_2 = k_2^2 \neq \epsilon_1$ . La solución semilla de esta transformación será el estado de dispersión asociado a  $\epsilon_2$ :

$$u_2(y) = \frac{L_2^+ L_1^+ \bar{\psi}(y)}{k_2^2 - k_1^2} = \frac{4k_1 \sin^2(k_1 y) [k_1 \cot(k_1 y) \sin(k_2 y) - k_2 \cos(k_2 y)]}{(k_2^2 - k_1^2) [2k_1(2\omega_1 + y) - \sin(2k_1 y)]} - \sin(k_2 y). \quad (3.16)$$

De (2.21), podemos ver que el socio SUSY del potencial  $V_2$  se convierte en

$$V_4(y) = V_2(y) - 2 \frac{d^2}{dy^2} \left( \omega_2 + \int_0^y u_2^2 dz \right). \quad (3.17)$$

La integral en la expresión anterior se puede calcular analíticamente, lamentablemente la expresión explícita de  $V_4(y)$  es demasiado larga para mostrarla en esta Tesis. Este potencial depende de los parámetros  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , diferentes valores de estos parámetros dan diferentes potenciales, en otras palabras  $V_4$  es una familia biparamétrica de socios SUSY de potenciales de la partícula libre.

El primer BIC corresponde al estado escondido (2.24) que tiene la forma:

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{\epsilon_2}(y) &= \frac{u_2}{\omega_2 + \int_0^y u_2^2 dz} \\ &= \frac{1}{\omega_2 + \int_0^y u_2^2 dz} \frac{L_2^\dagger L_1^\dagger \bar{\psi}(y)}{(k_2^2 - k_1^2)},\end{aligned}\quad (3.18)$$

y satisface la ecuación de eigenvalores

$$H_4 \tilde{\psi}_{\epsilon_2} = \epsilon_2 \tilde{\psi}_{\epsilon_2}, \quad (3.19)$$

donde

$$H_4 = -\frac{d^2}{dy^2} + V_4. \quad (3.20)$$

Para construir el segundo BIC y los estados de dispersión, necesitamos los operadores de entrelazamiento de esta transformación. De forma análoga a las ecuaciones (2.5) y (2.22), los operadores son

$$L_3^\dagger = -\frac{d}{dy} + \frac{u_2'}{u_2}, \quad L_4^\dagger = -\frac{d}{dy} + \frac{v_2'}{v_2}, \quad (3.21)$$

donde

$$v_2 = \frac{1}{u_2} \left( \omega_2 + \int_0^y u_2^2 dz \right). \quad (3.22)$$

Podemos obtener el segundo BIC aplicando el operador de composición  $L_4^\dagger L_3^\dagger$  sobre el estado escondido  $\bar{\psi}_\epsilon(y)$ , ver (3.38):

$$\tilde{\psi}_{\epsilon_1}(y) = \frac{1}{(k_1^2 - k_2^2)} L_4^\dagger L_3^\dagger \bar{\psi}_\epsilon(y), \quad (3.23)$$

que satisface

$$H_4 \tilde{\psi}_{\epsilon_1} = \epsilon_1 \tilde{\psi}_{\epsilon_1}. \quad (3.24)$$

Finalmente, los estados de dispersión con energía  $E \neq \epsilon_i$ ,  $i = 1, 2$  son:

$$\tilde{\psi}(y) = \frac{1}{(E - k_2^2)(E - k_1^2)} L_4^\dagger L_3^\dagger L_2^\dagger L_1^\dagger \bar{\psi}(y), \quad (3.25)$$

satisfaciendo la ecuación de Schrödinger

$$H_4 \tilde{\psi} = E \tilde{\psi}. \quad (3.26)$$

Lamentablemente, las expresiones explícitas del BICs  $\tilde{\psi}_{\epsilon_1}$ ,  $\tilde{\psi}_{\epsilon_2}$  y los estados de dispersión  $\tilde{\psi}$  del hamiltoniano  $H_4(y)$  son demasiado largas escribirlas en esta Tesis. En la Fig. 3.3 mostramos la gráfica del potencial  $V_4$  (curva azul), los BICs agregados  $\tilde{\psi}_{\epsilon_1}$  (curva naranja),  $\tilde{\psi}_{\epsilon_2}$  (curva roja), y un estado de dispersión  $\tilde{\psi}$  (curva verde). Los parámetros que usamos son  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 2$ , las energías de factorización  $k_1^2 = 1$ ,  $k_2^2 = 2$ , y la energía del estado de dispersión es  $q^2 = 3$ . Para mostrar que  $\tilde{\psi}_{\epsilon_i}$ ,  $i = 1, 2$  son funciones de cuadrado integrables, encontramos una envolvente de cuadrado integrable de la forma

$$\left| \frac{a_i}{b_i + y} \right| \geq |\tilde{\psi}_{\epsilon_i}(y)|. \quad (3.27)$$

Usando métodos numéricos, se encuentra que  $a_1 = 2,71104$ ,  $b_1 = 6,79476$ ,  $a_2 = 2,47686$ , y  $b_2 = 8,38096$  dan un ajuste apropiado.

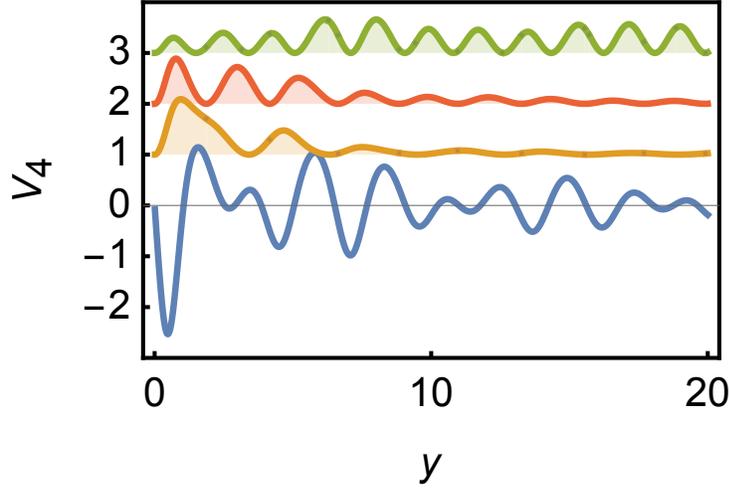


Figura 3.3: Socio potencial SUSY confluyente  $V_4(y)$  de la partícula libre (línea azul) y densidades de probabilidad  $|\tilde{\psi}_{e_1}(y)|^2$  (naranja),  $|\tilde{\psi}_{e_2}(y)|^2$  (rojo) y  $|\tilde{\psi}(y)|^2$  (verde). Los parámetros toman los valores  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 2$ ,  $k_1^2 = 1$ ,  $k_2^2 = 2$ ,  $q^2 = 3$ , y  $t_F = 0,2$ .

Como en el ejemplo previo, usamos la transformación puntual presentada en el Capítulo anterior para obtener un potencial dependiente del tiempo de (3.17) y sus funciones de onda de las expresiones (3.18, 3.23, 3.25). Recordemos que usamos  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$ , luego  $t \in [0, \infty)$ . El siguiente paso es elegir un tiempo de congelación  $t_F$  y enseguida construimos el potencial temporal (2.49). Consideramos nuevamente un potencial vectorial  $\mathbf{A} = (A_x, 0, 0)$ , donde

$$A_x(x, t) = -\Theta(t - t_F) \frac{2x}{4t_F + 1}. \quad (3.28)$$

Las soluciones de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo asociada a  $V_F$  se construyen como en (3.63), para estados de dispersión, o (3.64), para BICs. Las energías de los BICs congelados después de  $t_F$  son

$$\epsilon_{Fi} = \frac{\epsilon_i}{4t_F + 1}, \quad i = 1, 2. \quad (3.29)$$

Usando un tiempo de congelación  $t_F = 0,2$ , representamos  $V_F$  en la Fig. 3.4a, las densidades

de probabilidad de los BICs congelados  $\phi_{F\epsilon_1}$  en la Fig. 3.4b,  $\phi_{F\epsilon_2}$  en la Fig. 3.4c, y un estado de dispersión  $\phi_F$  en la Fig. 3.4d.

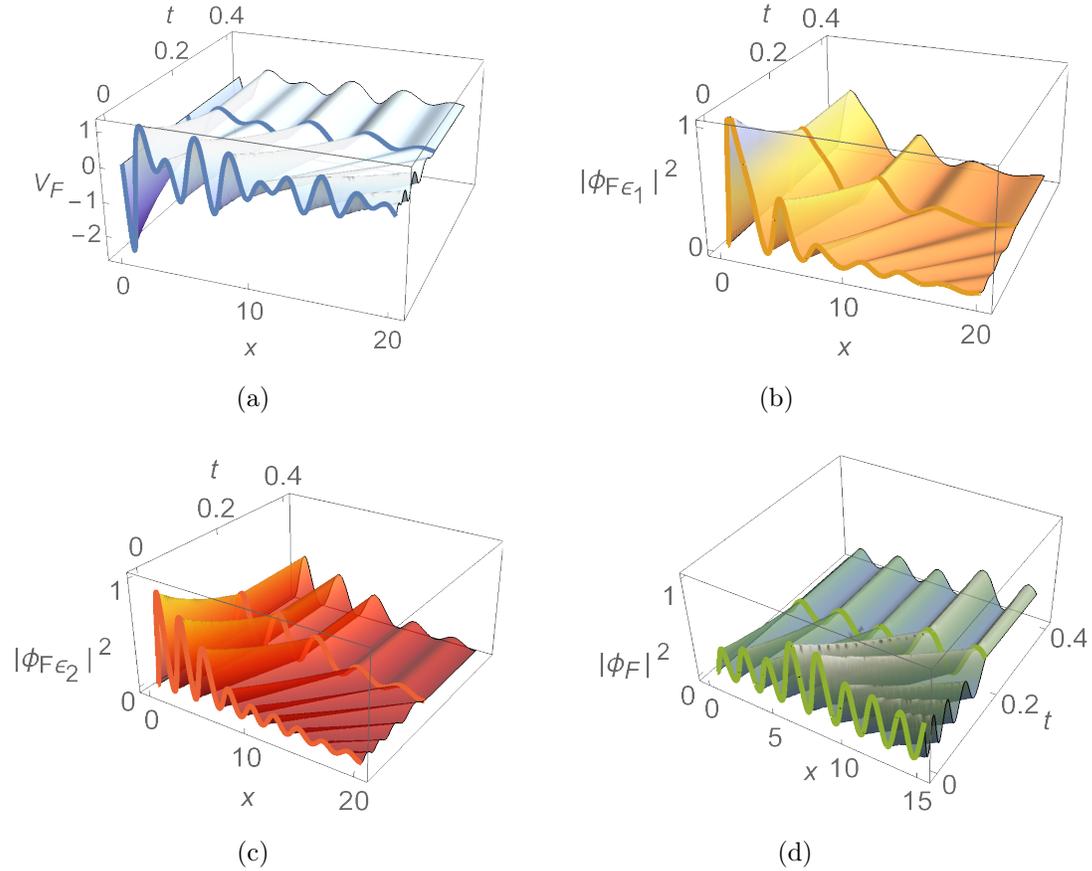


Figura 3.4: Sistema con dos BIC congelables. Potencial  $V_F(x, t)$  (a) y densidades de probabilidad de  $\phi_{F\epsilon_1}(x, t)$  (b),  $\phi_{F\epsilon_2}(x, t)$  (c), y  $\phi_F(x, t)$  (d) en diferentes momentos  $t \geq 0$ . Los parámetros toman los valores  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 2$ ,  $k_1^2 = 1$ ,  $k_2^2 = 2$ ,  $q^2 = 3$ , y  $t_F = 0,2$ .

### Simetría de inversión temporal

Dado que nuestro sistema es hermitiano, existe una simetría de inversión temporal. Tomando el complejo conjugado de la ecuación de Schrödinger y reemplazando  $t \rightarrow -t$  podemos ver que  $\phi_F^*(x, -t)$  resuelve la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

para el potencial  $V_F(x, -t)$ . La ventaja de usar esta transformación es que en  $t = 0$  la amplitud de las oscilaciones son menores que en  $t = t_F$ , de hecho, si se elige correctamente el parámetro  $c_1$  (recordemos que en este ejemplo usamos  $c_1 = 1$ ), la forma del potencial  $V_F(x, 0)$  se asemeja al potencial de partícula libre y el potencial congelado presentará oscilaciones con mayores amplitudes. En la Fig. 3.5 aplicamos la transformación de inversión temporal sobre el ejemplo que fue considerado para crear la Fig. 3.4. Se puede ver que el potencial  $V_F$  en la Fig. 3.5a tiene una forma plana en  $t = 0$  y luego las oscilaciones se vuelven más visibles y más estrechas a medida que aumenta  $t$ , lo mismo es cierto para el BIC congelable  $\phi_{F\epsilon_1}$  en la Fig. 3.5b,  $\phi_{F\epsilon_2}$  en la Fig. 3.5c, y el estado de dispersión  $\phi_F$  en la Fig. 3.5d después de la transformación.

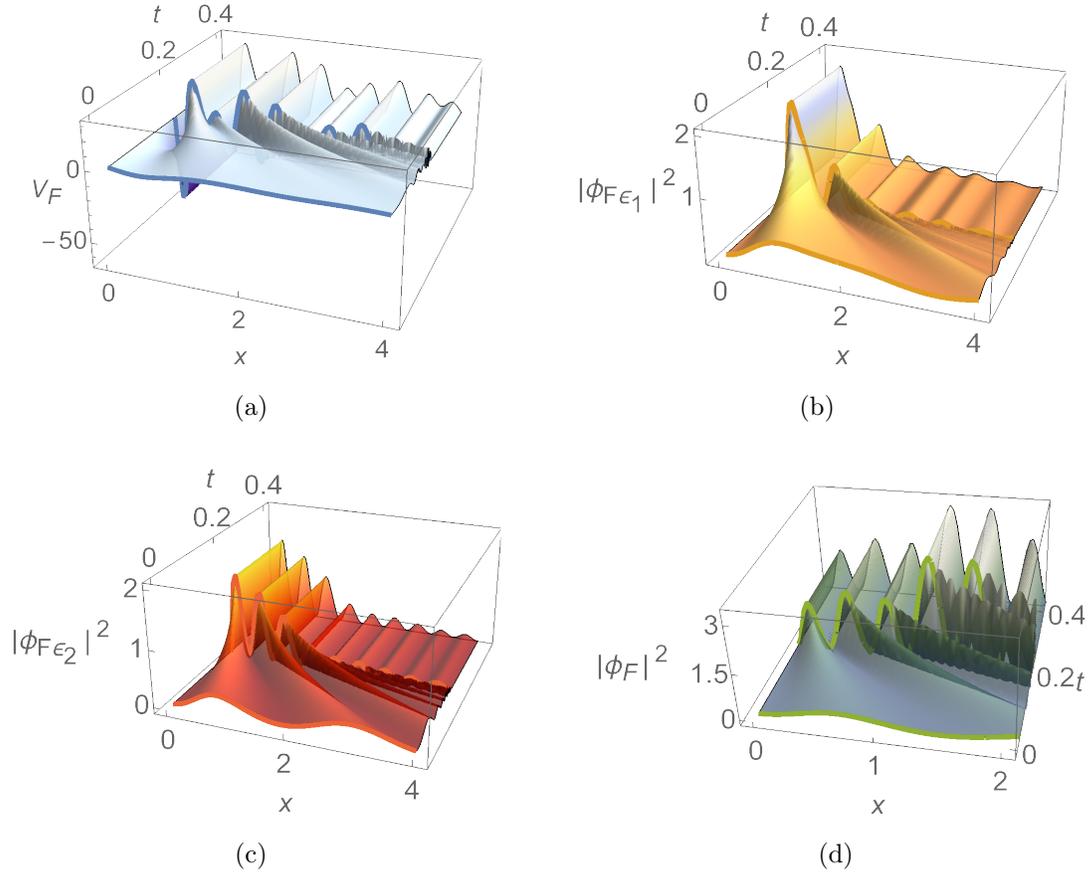


Figura 3.5: Sistema con dos BIC's utilizando la simetría de inversión temporal. Potencial  $V_F(x, t)$  (a), y densidades de probabilidad de  $\phi_{F\epsilon_1}(x, t)$  (b),  $\phi_{F\epsilon_2}(x, t)$  (c) y  $\phi_F(x, t)$  (d). Los parámetros toman los valores  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 2$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2^2 = 2$ ,  $q^2 = 3$  y  $t_F = 0,2$ .

### 3.2. Potencial escalón dependiente del tiempo con un BIC congelado

En esta Sección, partimos del conocido potencial escalón como un sistema independiente del tiempo. Entonces, usando la supersimetría confluyente, añadimos un solo BIC. Además, con la transformación puntual previamente introducida, transformamos el siste-

ma estacionario en un sistema dependiente del tiempo con un potencial explícitamente dependiente del tiempo. Esto lo hacemos de acuerdo a nuestra Ref. [79].

Comenzamos nuestra discusión considerando el potencial

$$V_0(y) = \begin{cases} \hat{V} & y \leq 0, \\ 0 & y > 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

definido a lo largo del eje  $y \in (-\infty, \infty)$  donde  $\hat{V}$  es una constante positiva. Las soluciones del sistema son conocidas en la literatura (ver [80,81]). Nos restringimos al caso  $0 < E_q < \hat{V}$ , las soluciones son:

$$\psi(y) = \begin{cases} \exp(\rho y) & y \leq 0, \\ \cos(qy) + \frac{\kappa}{k} \sin(qy) & y > 0, \end{cases} \quad (3.31)$$

con la energía

$$E_q = q^2 \quad (3.32)$$

y

$$\rho = \sqrt{\hat{V} - E_q}. \quad (3.33)$$

Así, para ejecutar la transformación supersimétrica confluyente, elegimos una energía de factorización tal que  $0 < \epsilon < \hat{V}$ . La solución semilla  $u(y)$  tiene la forma:

$$u(y) = \begin{cases} \exp(\kappa y) & y \leq 0, \\ \cos(ky) + \frac{\kappa}{k} \sin(ky) & y > 0, \end{cases} \quad (3.34)$$

con

$$k^2 = \epsilon \quad (3.35)$$

y

$$\kappa^2 = \hat{V} - \epsilon. \quad (3.36)$$

Notemos que  $u(y) \rightarrow 0$  cuando  $y \rightarrow -\infty$ . Entonces, de (2.21) obtenemos explícitamente el socio supersimétrico de  $\bar{V}$ :

$$\bar{V}(y) = \begin{cases} \hat{V} - \frac{16 \exp(2\kappa y) \kappa^3 \omega}{(\exp(2\kappa y) + 2\kappa \omega)^2} & y \leq 0 \\ 32k^2 \left( k \cos(ky) + \kappa \sin(ky) \frac{\tilde{v}(y)}{\hat{v}(y)} \right) & y > 0, \end{cases} \quad (3.37)$$

donde las funciones  $\tilde{v}(y)$  y  $\hat{v}(y)$  son

$$\begin{aligned} \tilde{v}(y) &= [(k^2 + \kappa^2)(k^2 x + \kappa) + 2k^4 \omega] \sin(ky) - k [(k^2 + \kappa^2)(\kappa y + 1) + 2k^2 \kappa \omega], \\ \hat{v}(y) &= [2ky(k^2 + \kappa^2) + 4k^3 \omega - 2k\kappa \cos(2ky) + (k^2 - \kappa^2) \sin(2ky)]^2. \end{aligned}$$

Podemos calcular directamente de (2.21) el estado escondido asociado a la energía de factorización  $\epsilon$ :

$$\bar{\psi}_\epsilon(y) = C_\epsilon \begin{cases} \frac{2\kappa \exp(\kappa y)}{2\kappa \omega + \exp(2\kappa y)} & y \leq 0, \\ \frac{4k^3 (\cos(ky) + \frac{\kappa}{k} \sin(ky))}{\hat{\psi}_\epsilon(y)} & y > 0, \end{cases} \quad (3.38)$$

donde

$$\hat{\psi}_\epsilon(y) = (k^2 - \kappa^2) \sin(2ky) - 2\kappa k \cos(2ky) + 4\omega k^3 + 2ky (\kappa^2 + k^2).$$

Para demostrar que  $\bar{\psi}_\epsilon$  es una función de cuadrado integrable, podemos de la siguiente manera:

Primero, separamos la integral

$$\|\bar{\psi}_\epsilon\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{\psi}_\epsilon|^2 dy = \int_{-\infty}^0 |\bar{\psi}_\epsilon|^2 dy + \int_0^{\infty} |\bar{\psi}_\epsilon|^2 dy. \quad (3.39)$$

La primera integral puede ser calculada anaíticamente:

$$\int_{-\infty}^0 |\bar{\psi}_\epsilon|^2 dy = |C_\epsilon|^2 \sqrt{\frac{2}{\kappa\omega}} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2\kappa\omega}} \right).$$

Para la segunda integral, podemos mostrar que es envuelta por una función de cuadrado integrable:

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^\infty |\bar{\psi}_\epsilon|^2 dy}{|C_\epsilon|^2} &= \int_0^\infty \left| \frac{4k^3(\cos(ky) + \frac{\kappa}{k} \sin(ky))}{\hat{\psi}_\epsilon(y)} \right|^2 dy \\ &\leq \int_0^\infty \left| \frac{4k^2\sqrt{k^2 + \kappa^2}}{4\omega k^3 + 2ky(\kappa^2 + k^2)} \right|^2 dy \\ &= \int_0^\infty \left| \frac{a}{b+y} \right|^2 dy = \frac{a^2}{b}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde

$$a = \frac{2k}{\sqrt{\kappa^2 + k^2}}, \quad b = \frac{2\omega k^2}{\kappa^2 + k^2}. \quad (3.41)$$

La Fig. 3.6 muestra un ajuste (realizado previamente) del módulo al cuadrado de la ec. (3.38) for  $y > 0$ .

Para una energía

$$E = q^2 \neq \epsilon, \quad (3.42)$$

la función de onda es solución a

$$\bar{H}\bar{\psi} = E\bar{\psi}, \quad (3.43)$$

que es construida usando (2.23), y (3.31). Se tiene

$$\bar{\psi}(y) = \begin{cases} \left[ \frac{(\kappa - \rho) \exp(\rho y)}{q^2 - k^2} \right] \bar{\psi}_-(y) & y \leq 0, \\ \frac{\bar{\psi}_+(y) - q^2 \cos(qy) - q\rho \sin(qy)}{q^2 - k^2} & y > 0, \end{cases} \quad (3.44)$$

con las expresiones

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_-(y) &= \frac{2\kappa\omega_0(\kappa + \rho) + (\rho - \kappa) \exp(2\kappa y)}{2\kappa\omega + \exp(2\kappa y)}, \\ \bar{\psi}_+(y) &= \frac{k^2(\rho \sin(qy) + q \cos(qy))}{q} + \frac{4k(\kappa \sin(ky) + k \cos(ky))}{\hat{\psi}_\epsilon(y)} \\ &\quad \times \left[ \frac{k}{q} \left( \kappa \cos(ky) - k \sin(ky) \right) \left( \rho \sin(qy) + q \cos(qy) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \kappa \sin(ky) + k \cos(ky) \right) \left( q \sin(qy) - \rho \cos(qy) \right) \right].\end{aligned}$$

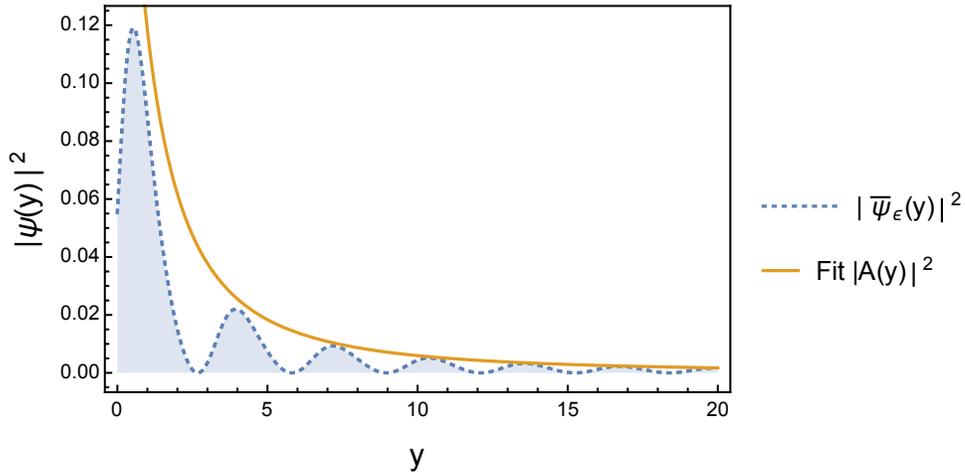


Figura 3.6:  $|\bar{\psi}_\epsilon(y)|^2$  y una función envolvente de la forma  $A(y) = \frac{a}{b+y}$ , con  $a = 2k(\kappa^2 + k^2)^{-1/2}$ ,  $b = 2\omega k^2(\kappa^2 + k^2)^{-1}$ . La escala de la gráfica se fija con  $\hat{V} = 5$ ,  $k = 1$ ,  $\kappa = 2$  y  $C_\epsilon = 1$ , en las unidades apropiadas.

En la Fig. 3.7 se muestran las densidades de probabilidad del estado escondido  $|\bar{\psi}_\epsilon(y)|^2$  y del estado de dispersión  $|\bar{\psi}(y)|^2$  a lo largo del potencial  $\bar{V}(y)$ . Observamos que la función de onda del BIC tiene una función envolvente que tiende a cero cuando  $|y| \rightarrow \infty$ , mientras el estado  $\bar{\psi}(y)$  no está localizado.

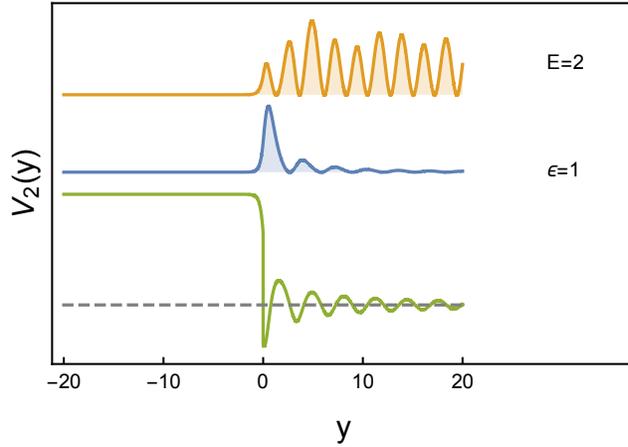


Figura 3.7: Se muestra el potencial  $\bar{V}(y)$ , junto con las densidades de probabilidad del estado perdido  $|\bar{\psi}_\epsilon(y)|^2$  y un estado de dispersión  $|\bar{\psi}(y)|^2$ . La escala del gráfico se fija con  $\hat{V} = 5$ ,  $k = 1$ ,  $\kappa = 2$ ,  $q = \sqrt{2}$  y  $\omega = 4$ .

El siguiente paso es construir un potencial dependiente del tiempo para (3.37) usando la transformación puntual presentada en (2.33,2.38). Notemos que  $x = y$  a  $t = 0$ . Entonces  $\bar{V}$  se transforma en un potencial a trozos:

$$V(x, t) = \frac{1}{(4t + 1)^2} \left\{ \hat{V} - \frac{16\kappa^3\omega \exp(\frac{2\kappa x}{4t+1})}{[2\kappa\omega + \exp(\frac{2\kappa x}{4t+1})]^2} \right\} \quad (3.45)$$

si  $x \leq 0$ , de lo contrario

$$V(x, t) = \frac{32k^2}{(4t + 1)^2} \left[ k \cos\left(\frac{kx}{4t + 1}\right) + \kappa \sin\left(\frac{kx}{4t + 1}\right) \frac{\tilde{v}(y(x, t))}{\hat{v}(y(x, t))} \right]. \quad (3.46)$$

En la Fig. 3.8 (arriba) mostramos el potencial  $V(x, t)$  a  $t = 0$ ,  $t = 0,1$  y  $t = 0,2$ . Su forma cambia en el tiempo y su perfil espacial oscila como se esperaba, anulándose cuando  $x \rightarrow \infty$ . Análogamente para el BIC dependiente del tiempo. La función de onda asociada a la energía  $\epsilon$  es explícitamente

$$\phi_\epsilon(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left\{\frac{i(x^2 + \frac{k^2}{4})}{4t+1}\right\} \bar{\psi}_\epsilon\left(\frac{x}{4t+1}\right). \quad (3.47)$$

Esta función es solución a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\partial_t\phi_\epsilon + \partial_{xx}\phi_\epsilon - V\phi_\epsilon = 0, \quad (3.48)$$

y es una función de cuadrado integrable debido a que  $\bar{\psi}_\epsilon(y)$  también lo es:

$$\begin{aligned} \|\phi_\epsilon\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_\epsilon(x, t)|^2 dx \\ &= \frac{1}{4t+1} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \bar{\psi}_\epsilon\left(\frac{x}{4t+1}\right) \right|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{\psi}_\epsilon(y)|^2 dy = \|\bar{\psi}_\epsilon\|^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde usamos el cambio de variable (2.33). La densidad de probabilidad de *phi\_epsilon* se muestra en la Fig. 3.8 (centro) a distintos tiempos. Este estado está localizado y el primer pico en la probabilidad de densidad aumenta y disminuye la altura (oscilaciones) a medida que aumenta el tiempo.

Para estados con energía  $E_q = q^2 \neq \epsilon$ , la correspondiente función de onda dependiente del tiempo tiene la forma explícita

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left\{\frac{i(x^2 + \frac{q^2}{4})}{4t+1}\right\} \bar{\psi}\left(\frac{x}{4t+1}\right), \quad (3.50)$$

El comportamiento de la densidad de probabilidad  $|\phi(x, t)|^2$ , para  $E = 2$  a diferentes tiempos se muestra en la Fig. 3.8 (abajo). Este estado no se puede localizar a ningún tiempo.

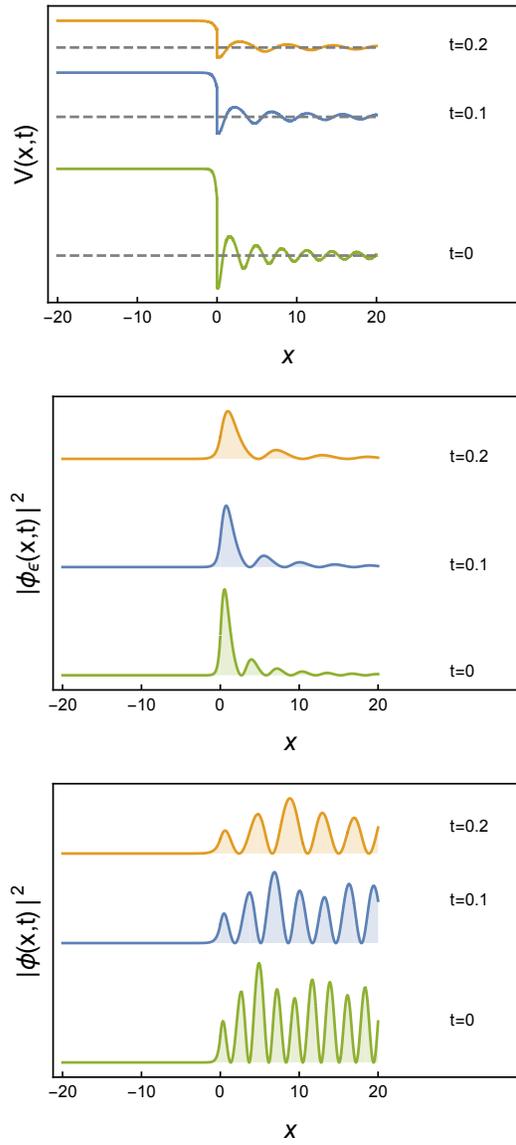


Figura 3.8: Comportamiento del potencial  $V(x, t)$  (arriba), el BIC  $\phi_\epsilon(x, t)$  (centro) y el estado de dispersión  $\phi(x, t)$  (abajo) en los tiempos  $t = 0$ ,  $t = 0,1$  y  $t = 0,2$ . La escala de los gráficos está fijada por  $\hat{V} = 5$ ,  $k = 1$ ,  $\kappa = 2$ ,  $q = \sqrt{2}$  y  $\omega = 4$ .

Finalmente, elegimos el tiempo de congelación  $t_i$ . Entonces, podemos considerar una

partícula cargada en un potencial:

$$V_F(x, t) = \begin{cases} V(x, t) & 0 \leq t < t_i, \\ V(x, t_i) & t \geq t_i. \end{cases} \quad (3.51)$$

donde  $V(x, t)$  está dada en (3.45,3.46). Notemos que cuando  $t \in [0, t_i)$  el potencial está cambiando en el tiempo, y cuando  $t \geq t_i$  el potencial está congelado. Este potencial es de hecho familiar, parametrizado por  $\omega > 0$ . Recordemos que  $\omega$  fue introducido por la transformacion SUSY confluyente.

$\phi(x, t)$  y  $\phi_\epsilon(x, t)$  no son estados estacionarios, sino que evolucionan en el tiempo, y tampoco son eigenfunciones del operador

$$-\partial_{xx} + V. \quad (3.52)$$

A cualquier tiempo  $t \geq t_i$ , las funciones  $\phi(x, t_i)$  y  $\phi_\epsilon(x, t_i)$  satisfacen la ecuación

$$\left[ \left( -\frac{\partial}{\partial x} + iA_x(x) \right)^2 + V(x, t_i) \right] \phi(x, t_i) = \frac{E}{(4t_i + 1)^2} \phi(x, t_i), \quad t \geq t_i, \quad (3.53)$$

donde

$$A_x(x) = -\partial_x \theta(x), \quad (3.54)$$

y

$$\theta(x) = \frac{i}{4t_i + 1} \left( x^2 + \frac{E}{4} \right). \quad (3.55)$$

La ecuación (3.53) es la ecuación de Schrödinger para una partícula cargada bajo la influencia de un potencial vectorial  $\mathbf{A} = (A_x, 0, 0)$  que no genera campo magnético  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$ . Debemos recalcar que la ecuación de Schrödinger para una partícula cargada de carga  $q$  inmersa en un campo electromagnético externo es mejor escribirla en términos de los po-

tenciales escalar  $\varphi$  y vectorial  $\mathbf{A}$  a través del Hamiltoniano

$$H = (\hat{\mathbf{p}} + q\mathbf{A})^2 + q\varphi. \quad (3.56)$$

Este potencial electromagnético nos permite definir un campo magnético y uno eléctrico como

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.57)$$

definición que no cambia si las siguientes transformaciones se realizan simultáneamente,

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda, \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial\lambda}{\partial t}, \quad (3.58)$$

donde  $\lambda = \lambda(x, t)$  es una función escalar. Este es un enunciado de la invariancia de norma de las ecuaciones de Maxwell. En mecánica cuántica, la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \quad (3.59)$$

conserva esta característica si además de las transformaciones en Ec. (3.58) en el Hamiltoniano (3.56), la función de onda cambia según la transformación de fase local

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\lambda}\psi. \quad (3.60)$$

En nuestro ejemplo, esta libertad nos permite seleccionar  $\lambda$  de tal manera que si en determinado instante de tiempo  $t_i$  el potencial vectorial  $\mathbf{A} \neq 0$  pero antes teníamos  $\mathbf{A} = 0$ , todavía se puede tener una ecuación de Schrödinger sin potencial vectorial ajustando adecuadamente el potencial escalar. En particular, seleccionando

$$\lambda(x, t) = \ell(x)\Theta(t - t_i), \quad (3.61)$$

podemos cambiar el potencial escalar de modo que la ecuación dependiente del tiempo que gobierna este estado nunca desarrolle un potencial vectorial para empezar.

Luego, eligiendo un potencial vectorial  $\mathbf{A}(x, t) = (A_x(x, t), 0, 0)$  donde

$$A_x(x, t) = -\Theta(t - t_i)\partial_x\theta(x), \quad (3.62)$$

observamos que la función a trozos

$$\phi_F(x, t) = \begin{cases} \phi(x, t) & 0 \leq t < t_i, \\ \bar{\psi}\left(\frac{x}{4t_i+1}\right) & t \geq t_i. \end{cases} \quad (3.63)$$

se convierte en una solución de

$$i\partial_t\phi_F(x, t) = [-\partial_{xx} + V_F(x, t)]\phi_F(x, t) = H\phi_F(x, t).$$

En particular, la función

$$\phi_{F\epsilon}(x, t) = \begin{cases} \phi_\epsilon(x, t) & 0 \leq t < t_i, \\ \bar{\psi}_\epsilon\left(\frac{x}{4t_i+1}\right) & t \geq t_i, \end{cases} \quad (3.64)$$

antes de congelar el tiempo  $t_i$  es solo un paquete de ondas dependiente del tiempo, pero para  $t > t_i$  se convierte en un estado ligado en el continuo congelado que satisface la ecuación de eigenvalores

$$H\phi_{F\epsilon} = \varepsilon\phi_{F\epsilon}, \quad (3.65)$$

donde

$$\varepsilon = \frac{\epsilon}{(4t_i + 1)^2}. \quad (3.66)$$

En la Fig. 3.9 graficamos el potencial  $V_F$  (arriba), el BIC congelado  $\phi_{F\epsilon}$  (centro) y el estado de dispersión  $\phi_F$  (abajo) a  $t = 0,8$ ,  $t = 1$  y  $t = 1,8$ , el tiempo congelado es  $t_i = 1$ . Notemos

que después de  $t = 1$  ni el potencial ni las funciones de onda evolucionan.

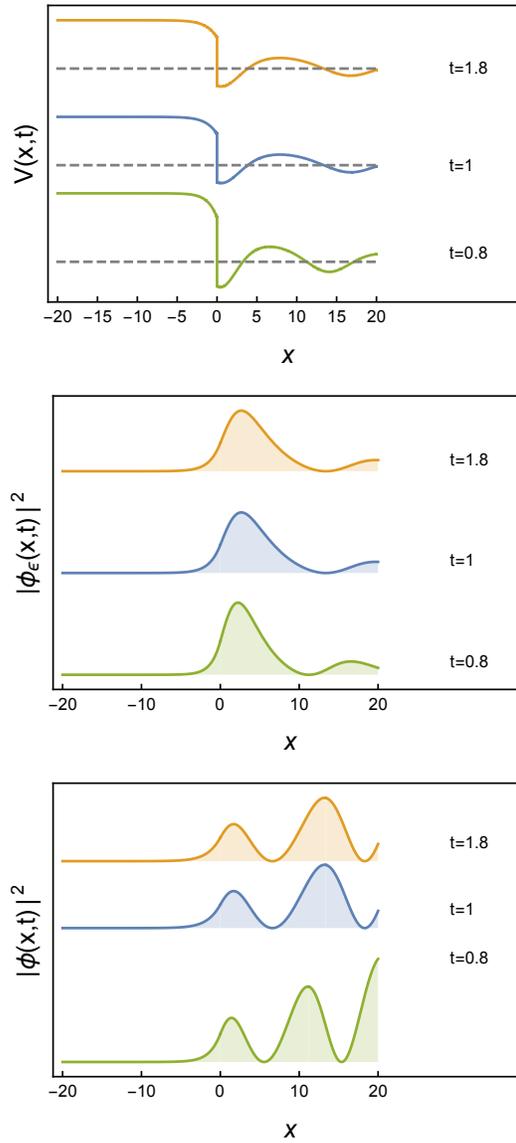


Figura 3.9: Comportamiento del potencial  $V_F(x, t)$  (arriba), el BIC congelado  $\phi_{F\epsilon}(x, t)$  (centro) y el estado de dispersión  $\phi_F(x, t)$  (abajo) en los momentos  $t = 0,8$ ,  $t = 1$  y  $t = 1,8$ . El tiempo de congelación es  $t_i = 1$ . La escala del gráfico está fijada por  $\hat{V} = 5$ ,  $k = 1$ ,  $\kappa = 2$ ,  $q = \sqrt{2}$  y  $\omega = 4$ .

# Capítulo 4

## Conclusiones

En esta tesis, hemos hecho uso de transformaciones supersimétricas confluentes para generar BICs en un sistema mecánico cuántico que cumple con las condiciones para hacerlo. Partiendo de un sistema estacionario sin BICs, hemos generado potenciales estacionarios que soportan un estado localizado de cuadrado integrable, el BIC, en cierta energía de factorización incrustada en el espectro del continuo. Para cualquier otro valor de energía en el continuo, el estado correspondiente se extiende y corresponde a un estado de dispersión. A través de una transformación puntual, hemos construido el potencial y los estados con evolución temporal explícita. Sin embargo, notamos que las arrugas en el potencial cuando  $x \rightarrow \infty$  todavía localizan un BIC en cada momento fijo.

A continuación, permitimos que continúe la evolución temporal del sistema y, en un momento dado, congelamos el potencial de modo que ya no evolucione, sino que permanezca estacionario. Luego, estudiamos el comportamiento del BIC con este potencial estático después del tiempo de congelación. Notamos que este estado no es una solución de la ecuación estacionaria de Schrödinger, sino que desarrolla una fase geométrica en términos de un potencial vectorial que no genera campo magnético alguno. Esta observación nos permite deshacernos de la fase geométrica mediante una transformación de norma y así observar que el estado resultante se convierte en un estado propio del hamiltoniano

congelado correspondiente a un BIC.

Además, mostramos que el procedimiento presentado se puede iterar para agregar BICs adicionales a diferentes energías de factorización. Las expresiones pueden ser largas y engorrosas, aunque directas de obtener. Al sistema estacionario de múltiples BIC se le puede dar una evolución temporal a través de transformaciones puntuales hasta un nuevo tiempo de congelación en el que se requiere que el potencial permanezca estacionario. Al desahcernos de la fase geométrica desarrollada por los estados durante la evolución del tiempo mediante una transformación de norma, todavía encontramos que los BIC permanecen localizados por su reflejo en el espejo de Bragg del potencial.

Mostramos el uso de la técnica en tres ejemplos. Primero agregamos un solo BIC congelable al potencial de una partícula libre definida en el semieje  $x > 0$ . Obtuvimos expresiones explícitas del potencial dependiente del tiempo, los estados de dispersión y el BIC congelable. Luego, insertamos un segundo BIC congelable a diferente energía a través de una iteración de la transformación supersimétrica confluyente. Verificamos que la familia de potenciales dependientes del tiempo con BIC congelables puede aumentar usando una simetría de inversión temporal [39]. En [79] exploramos más ejemplos relacionados con potenciales escalón.

Una extensión natural de estas ideas es considerar un sistema relativista a partir de una ecuación de Dirac. Aunque los BIC cuánticos aún esperan una verdadera observación, la nueva clase de materiales modernos podría ofrecer la oportunidad de explorar estos estados. Todas estas ideas están bajo consideración.

# Bibliografía

- [1] C. Hsu, B. Zhen, A. Stone, J. D. Joannopoulos, and M. Soljacic. “Bound states in the continuum” *Nat. Rev. Mater.*, **1**(9):1–13, (2016).
- [2] McIver, M. “An example of non-uniqueness in the two-dimensional linear water wave problem”. *J. Fluid Mech.*, **315**, 257–266 (1996).
- [3] Porter, R. “Trapping of water waves by pairs of submerged cylinders”. *Proc. R. Soc. A* **458**, 607–624 (2002).
- [4] Linton, C. M. & McIver, P. “Embedded trapped modes in water waves and acoustics”. *Wave Motion* **45**, 16 (2007).
- [5] Hein, S., Koch, W. & Nannen, L. “Trapped modes and Fano resonances in two-dimensional acoustical duct-cavity systems”. *J. Fluid Mech.* **692**, 257–287 (2012).
- [6] Sato, Y. et al. “Strong coupling between distant photonic nanocavities and its dynamic control”. *Nature Photon.* **6**, 56–61 (2012)
- [7] van Loo, A. F. et al. “Photon-Mediated Interactions Between Distant Artificial Atoms”. *Science* **342**, 1494–1496 (2013).
- [8] Peleg, O., Plotnik, Y., Moiseyev, N., Cohen, O. & Segev, M. “Self-trapped leaky waves and their interactions”. *Phys. Rev. A* **80**, 041801 (2009).

- [9] Volya, A. Zelevinsky, V. “Sablikov Non-Hermitian effective Hamiltonian and continuum shell model”. *Phys. Rev. C* **67**, 054322 (2003).
- [10] Deb, B. Agarwal, G. S. “Creation and manipulation of bound states in the continuum with lasers: Applications to cold atoms and molecules”. *Phys. Rev. A* **90**, 063417 (2014).
- [11] Sablikov, V. A. & Sukhanov, A. A. “Helical bound states in the continuum of the edge states in two dimensional topological insulators”. *Phys. Lett. A* **379**, 1775–1779 (2015).
- [12] Texier, C. “Scattering theory on graphs: II. The Friedel sum rule”. *J. Phys. A* **35**, 3389 (2002).
- [13] Sadreev, A. F., Bulgakov, E. N. Rotter, I. “Bound states in the continuum in open quantum billiards with a variable shape”. *Phys. Rev. B* **73**, 235342 (2006).
- [14] Sadreev, A. F. & Babushkina, T. V. “Two-electron bound states in a continuum in quantum dots”. *JETP Lett.* **88**, 312–317 (2008).
- [15] Boretz, Y., Ordonez, G., Tanaka, S. & Petrosky, T. “Optically tunable bound states in the continuum”. *Phys. Rev. A* **90**, 023853 (2014).
- [16] Lyapina, A. A., Maksimov, D. N., Pilipchuk, A. S. & Sadreev, A. F. “Bound states in the continuum in open acoustic resonators”. *J. Fluid Mech.* **780**, 370–387 (2015).
- [17] Lepetit, T., Akmansoy, E., Ganne, J.-P. Lourtioz, J.-M. “Resonance continuum coupling in high-permittivity dielectric metamaterials”. *Phys. Rev. B* **82**, 195307 (2010).
- [18] Lepetit, T. & Kanté, B. “Controlling multipolar radiation with symmetries for electromagnetic bound states in the continuum”. *Phys. Rev. B* **90**, 241103 (2014).

- [19] Gentry, C. M. & Popović, M. A. “Dark state lasers”. *Opt. Lett.* **39**, 4136–4139 (2014).
- [20] J. von Neuman and E. Wigner, “Über merkwürdige diskrete Eigenwerte. Über das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen”. *Physikalische Zeitschrift*, **30**:467–470, (1929).
- [21] B. Simon, “On positive eigenvalues of one-body Schrödinger operators” *Commun. Pure Appl. Math.*, **22**:531–538, (1969).
- [22] F. H. Stillinger and D. R. Herrick, “Bound states in the continuum” *Phys. Rev. A*, **11**:446–454, (1975).
- [23] B. Gazdy, “On the bound states in the continuum” *Phys. Lett. A*, **61**(2):89–90, (1977).
- [24] M. Klaus, “Asymptotic behavior of Jost functions near resonance points for Wigner–von Neumann type potentials” *J. Math. Phys.*, **32**:163, (1991).
- [25] I. M. Gel’fand and B. M. Levitan, “On the determination of a differential equation from its spectral function” *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **15**(4):309–360, (1951).
- [26] T. A. Weber and D. L. Pursey, “Continuum bound states” *Phys. Rev. A*, **50**:4478–4487, (1994).
- [27] A. A. Stahlhofen, “Completely transparent potentials for the Schrödinger equation” *Phys. Rev. A*, **51**:934–943, (1995).
- [28] D. Lohr, E. Hernandez, A. Jauregui, and A. Mondragon, “Bound states in the continuum and time evolution of the generalized eigenfunctions” *Rev. Mex. Fis.*, **64**:464–471, (2018).
- [29] L. López-Mejía and N. Fernández-García, “Truncated radial oscillators with a bound state in the continuum via Darboux transformations” *J. Phys. Conf. Ser.*, **1540**:012029, (2020).

- [30] J. Pappademos, U. Sukhatme, and A. Pagnamenta, “Bound states in the continuum from supersymmetric quantum mechanics” *Phys. Rev. A*, **48**:3525–3531, (1993).
- [31] A. Demić, V. Milanović, and J. Radovanović, “Bound states in the continuum generated by supersymmetric quantum mechanics and phase rigidity of the corresponding wavefunctions” *Phys. Lett. A*, **379**(42):2707–2714, (2015).
- [32] N. Fernández-García, E. Hernández, A. Jáuregui, and A. Mondragón, “Exceptional points of a Hamiltonian of von Neumann–Wigner type” *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**(17):175302, (2013).
- [33] Longhi, S. & Della Valle, G. “Optical lattices with exceptional points in the continuum”. *Physical Review A* **89**, 052132 (2014).
- [34] Longhi, S. “Non-Hermitian tight-binding network engineering”. *Phys. Rev. A* **93**, 022102 (2016).
- [35] G. Corrielli, G. Della Valle, A. Crespi, R. Osellame, and S. Longhi. “Observation of surface states with algebraic localization”. *Phys. Rev. Lett.* **111** 220403, (2013). 20
- [36] J. W. González, M. Pacheco, L. Rosales, and P. A. Orellana, “Bound states in the continuum in graphene quantum dot structures” *EPL*, **91**(6):66001, (2010).
- [37] V. A. Sablikov and A. A. Sukhanov, “Helical bound states in the continuum of the edge states in two dimensional topological insulators” *Phys. Lett. A*, **379**:1775–1779, (2015).
- [38] P. Gosh and P. Roy, “Dirac equation in  $(1 + 1)$  dimensional curved space-time: Bound states and bound states in continuum”. *Phys. Scr.*, **96**(2):025303, (2021).
- [39] I. Gutiérrez-Altamirano, A. Contreras-Astorga, A. Raya, “Freezable bound states in the continuum for time-dependent quantum potentials” *Ann. Phys.* **441**, 168882 (2022).

- [40] D. L. Hill and J. A. Wheeler, “Nuclear constitution and the interpretation of fission phenomena” *Phys. Rev.*, **89**:1102–1145, (1953).
- [41] S. W. Doescher and M. H. Rice, “Infinite square-well potential with a moving wall” *Am. J. Phys.*, **37**:1246, (1969).
- [42] A. Contreras-Astorga and V. Hussin. “Infinite square-well, trigonometric Pöschl-Teller and other potential wells with a moving barrier” In *Integrability, Supersymmetry and Coherent States*, pages 285–299. Springer International Publishing, Cham, (2019).
- [43] K. Cooney, “The infinite potential well with moving walls” arXiv:1703.05282 [quant-ph].
- [44] M. V. Berry, “Quantal phase factors accompanying adiabatic changes” *Proc. R. Soc. Lond. A*, **392**:45–57, (1984).
- [45] J. R. Ray, “Exact solutions to the time-dependent Schrödinger equation” *Phys. Rev. A*, **26**:729–733, (1982).
- [46] G. W. Bluman, “On mapping linear partial differential equations to constant coefficient equations” *SIAM J. Appl. Math.*, **43**:1259–1273, (1983).
- [47] K. Zelaya and O. Rosas-Ortiz, “Exactly solvable time-dependent oscillator-like potentials generated by Darboux transformations” *J. Phys. Conf. Ser.*, **839**(1), (2017).
- [48] K. Zelaya and O. Rosas-Ortiz, “Quantum nonstationary oscillators: Invariants, dynamical algebras and coherent states via point transformations” *Phys. Scr.*, **95**(6):064004, (2020).
- [49] S. Cruz y Cruz, R. Razo, O. Rosas-Ortiz, and K. Zelaya, “Coherent states for exactly solvable time-dependent oscillators generated by Darboux transformations” *Phys. Scr.*, **95**(4):044009, (2020).

- [50] B. Simon, “Some Schrödinger operators with dense point spectrum” *Proc. Am. Math. Soc.*, **125**(1):203–208, (1997).
- [51] S. N. Naboko, “Dense point spectra of Schrödinger and Dirac operators” *Theoret. and Math. Phys.*, **68**:646–653, (1986).
- [52] N. Meyer-Vernet. “Strange bound states in the Schrödinger wave equation: When usual tunneling does not occur” *Am. J. Phys.*, **50**:354, (1982).
- [53] V. N. Pivovarchik, A. A. Suzko, and Zakhariev B. N, “New exactly solved models with bound states above the scattering threshold” *Phys. Scr.*, **34**(2):101–105, (1986).
- [54] V. B. Matveev and M. A. Salle, “Darboux Transformations and Solitons”. Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer Berlin Heidelberg, (1992).
- [55] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, “Supersymmetry and quantum mechanics” *Phys. Rep.*, **251**(5):267 – 385, (1995).
- [56] D. J. Fernández C. and N. Fernández-García, “Higher-order supersymmetric quantum mechanics” *AIP Conf. Proc.*, **744**:236–273, (2004).
- [57] A. A. Andrianov and F. Cannata, “Nonlinear supersymmetry for spectral design in quantum mechanics” *J. Phys. A*, **37**(43):10297, (2004).
- [58] A. Gangopadhyaya, J. V. Mallow, and C. Rasinariu, “Supersymmetric Quantum Mechanics: An Introduction” (Second Edition). World Scientific Publishing Company, (2017).
- [59] G. Junker, “Supersymmetric Methods in Quantum, Statistical and Solid State Physics” IOP Expanding Physics. Institute of Physics Publishing, (2019).
- [60] D. Baye, “Phase-equivalent potentials for arbitrary modifications of the bound spectrum” *Phys. Rev. A*, **48**(3):2040–2047, (1993).

- [61] J. M. Sparenberg and D. Baye, “Supersymmetric transformations of real potentials on the line” *J. Phys. A: Math. Gen.*, **28**(17):5079, (1995).
- [62] L. J. Boya, H. Rosu, A. J. Segui-Santonja, and F. J. Vila, “Strictly isospectral supersymmetry and Schrodinger general zero modes” *Nuovo Cim. B*, **113**:409–414, (1998).
- [63] B. Mielnik, L. M. Nieto, and O. Rosas-Ortiz, “The finite difference algorithm for higher order supersymmetry” *Phys. Lett. A*, **269**(2-3):70–78, (2000).
- [64] H. Rosu. “Multiple parameter structure of Mielnik’s isospectrality in unbroken SUSYQM” *Int. J. Theor. Phys.*, **39**(1):105–114, (2000).
- [65] D. J. Fernández C. and E. Salinas-Hernández, “The confluent algorithm in second-order supersymmetric quantum mechanics” *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**(10):2537, (2003).
- [66] D. J. Fernández C. and E. Salinas-Hernández, “Wronskian formula for confluent second-order supersymmetric quantum mechanics”. *Phys. Lett. A*, **338**(1):13–18, (2005).
- [67] D. J. Fernández C. and E. Salinas-Hernández, “Hyperconfluent third-order supersymmetric quantum mechanics” *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**(36):365302, (2011).
- [68] D. Bermudez, D. J. Fernández C., and N. Fernández-García, “Wronskian differential formula for confluent supersymmetric quantum mechanics”. *Phys. Lett. A*, **376**(5):692–696, (2012).
- [69] A. Schulze-Halberg, “Wronskian representation for confluent supersymmetric transformation chains of arbitrary order” *Eur. Phys. J. Plus*, **128**(6):1–17, (2013).
- [70] A. Contreras-Astorga and A. Schulze-Halberg, “The generalized zero-mode supersymmetry scheme and the confluent algorithm” *Ann. Phys.*, **354**:353–364, (2015).

- [71] A. Contreras-Astorga and A. Schulze-Halberg, “Recursive representation of Wronskians in confluent supersymmetric quantum mechanics” *J. Phys. A: Math. Theor.*, **50**(10), (2017).
- [72] V. G. Bagrov, B. F. Samsonov, and L. A. Shekoyan, “Darboux transformation for the nonsteady Schrödinger equation” *Russ. Phys. J.*, **38**(7):706–712, (1995).
- [73] F. Finkel, A. González-López, N. Kamran, and M. A. Rodríguez, “On form-preserving transformations for the time-dependent Schrödinger equation” *J. Math. Phys.*, **40**(7):3268–3274, (1999).
- [74] T. K. Jana and P. Roy, “A class of exactly solvable Schrödinger equation with moving boundary condition” *Phys. Lett. A*, **372**(14):2368–2373, (2008).
- [75] A. A. Suzko and A. Schulze-Halberg, “Darboux transformations and supersymmetry for the generalized Schrödinger equations in (1+1) dimensions”. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 42(29):295203, (2009).
- [76] A. Schulze-Halberg, E. Pozdeeva, and A. A. Suzko, “Explicit Darboux transformations of arbitrary order for generalized time-dependent Schrödinger equations” *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**(11):115211, (2009).
- [77] A. Schulze-Halberg and B. Roy, “Time dependent potentials associated with exceptional orthogonal polynomials” *J. Math. Phys.*, **55**(12):123506, (2014).
- [78] F. A. Berezin and M. A. Shubin, “The Schrodinger Equation” Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1991).
- [79] I. Gutiérrez-Altamirano, A. Contreras-Astorga, and A. Raya, “Time-dependent step-like potential with a freezable bound state in the continuum” *Acta Polytechnica*, **62**(1):56–62, (2022)

- [80] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë. “Quantum mechanics”; 1st ed. Wiley, New York, NY, (1977). Trans. of : *Mécanique quantique*. Paris : Hermann, (1970)
- [81] R. Shankar. “Principles of quantum mechanics”. Plenum, New York, NY, (1980).