



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

**EFFECTO DE CAOS ACÚSTICO EN GUÍAS DE ONDAS DE CRISTAL
FONÓNICO**

TESIS

Para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA

PRESENTA:

ALEJANDRO BUCIO GUTIÉRREZ

ASESOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias en Óptica
HÉCTOR PÉREZ AGUILAR

CO-ASESOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias en Ingeniería Física
HUGO ENRIQUE ALVA MEDRANO

Morelia, Michoacán, Febrero de 2023

RESUMEN

En el presente trabajo se muestra un estudio teórico y numérico del fenómeno de caos acústico en guías de ondas de cristal fonónico (PnCW) de longitud infinita y finita. Ambos sistemas están compuestos por superficies planas paralelas con un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares de materiales acústicos. En los sistemas desarrollados se calcularon modos del sistema para obtener las intensidades del campo acústico de presiones. Para abordar ambos problemas, se hace uso de una técnica numérica conocida como el Método de la Ecuación Integral, que permite obtener un sistema de ecuaciones integrales acopladas que involucran como incógnitas el campo y su derivada normal evaluados en las superficies involucradas. Al discretizar el sistema, se obtiene un conjunto de ecuaciones algebraicas homogéneas para el sistema infinito, cuya solución determina la relación de dispersión y un sistema inhomogéneo de ecuaciones algebraicas para el sistema finito, donde, a partir de sus soluciones se puede obtener la respuesta acústica. Estos cálculos se realizaron bajo el protocolo de la programación en paralelo con MPI, implementando librerías de Intel MKL para reducir los tiempos de cálculo. Además, se calcularon algunas propiedades estadísticas de las intensidades obtenidas; en particular, la función de autocorrelación (ACF) y la longitud de correlación. Bajo ciertas circunstancias los sistemas muestran patrones de la intensidad del campo desordenados; además, se obtiene que a modos con frecuencias asociadas mayores le corresponden valores de la longitud de correlación menores. Este tipo de comportamiento está asociado con el fenómeno de caos y es bien sabido que sistemas clásicos con geometrías análogas, como los billares de Sinai, presentan este fenómeno. Con estos argumentos asociamos nuestros resultados al fenómeno de caos acústico en una PnCW.

Palabras clave: Campo acústico, Caos acústico, Función de autocorrelación, Guía de ondas de cristal fonónico, Método de la ecuación integral.

ABSTRACT

In the present work a theoretical and numerical study of chaos phenomena for phononic crystal waveguides (PnCW) of infinite and finite length is shown. Both systems are composed of parallel planar surfaces with a periodic arrangement of circular cylindrical inclusions of acoustic materials. System modes were calculated to obtain the acoustic field intensity of pressures. To approach both problems, we make use of a numerical technique known as the Integral Equation Method, which allows us to obtain a system of coupled integral equations involving as unknowns the field and its normal derivative evaluated on the surfaces involved. By discretizing the system, a set of homogeneous algebraic equations is obtained for the infinite system, whose solution determines the dispersion relation and an inhomogeneous system of algebraic equations is obtained for the finite system, where, from their solutions, the acoustic response can be obtained. These calculations were performed under the parallel programming protocol with MPI, implementing Intel MKL libraries to reduce computational times. In addition, some statistical properties of the obtained intensities were calculated; in particular, the autocorrelation function (ACF) and the correlation length. Under certain conditions the systems show disordered intensity patterns of the field; moreover, it is found that modes with higher associated frequencies correspond to lower values of the correlation length. This type of behavior is associated with the phenomena of chaos and it is well known that classical systems with analogous geometries, such as Sinai billiards, exhibit this phenomenon. With these arguments we associate our results to the phenomenon of acoustic chaos in PnCW.

Keywords: Acoustic field, Acoustic chaos, Autocorrelation function, Phononic waveguide, Integral equation method.

DEDICATORIA

A mi querida familia: mi padre Juan, mi madre Brenda, mis abuelos Magda, Yola y Enrique; y mi hermana Kenia, por ser mis cómplices con su gran apoyo, todo lo que hoy soy es gracias a ustedes. Mis maestros de vida.

A Herlinda Tututi, mi orgullo, fortaleza y amor.

“Avanza sin prisa y sin pausa, como las estrellas.”

Johann Wolfgang von Goethe.

Agradecimientos

El presente trabajo es resultado de un continuo esfuerzo individual y colectivo, que no hubiera sido posible sin la intervención de personas e instituciones que proporcionaron el apoyo para enriquecerlo y concluirlo gratamente.

Quiero brindar mi gratitud al Posgrado en Ciencias en Ingeniería Física (PCIF) de la Universidad Michoacana por haber aceptado el proyecto de investigación, así como el apoyo brindado durante mis estudios. También agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca que se me concedió.

Mis más sinceros agradecimientos a mis asesores y amigos los Doctores Héctor I. Pérez y Hugo E. Alva, quienes aportaron sus conocimientos y experiencias, lo cual permitió mejorar y concluir este trabajo, gracias a sus valiosas aportaciones e infinita paciencia. Mi respeto y admiración.

A todos los miembros del comité de tesis por su tiempo, consejos y críticas constructivas que ayudaron enormemente a realizar este trabajo.

A mi tíos, tías, primos y demás familiares cercanos quienes constantemente me han brindado su empatía, felicidad, apoyo y cariño hasta este punto de mi vida.

A mis amigos de ayer, hoy, mañana y siempre: Juan Rivera, Yashar, Raúl, Enrique, Grisel, Flor, Norma, Ángeles, Shessid, Leti, Carlo, Daniel, Juan Alvarado y todas aquellas personas que han formado parte de mi vida llenándola de hermosos recuerdos que valoro y atesoro. Mi eterno agradecimiento, amistad y cariño.

A todos mis compañeros del posgrado con quienes he entablado una bella amistad: Didier, Victor, Valeria, Casandra, Karla, Ali. Fue un gusto haber adquirido habilidades y experiencias a su lado.

Contenido

	Página
Resumen	i
Abstract	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	v
Lista de Figuras	vii
I. Introducción	1
I.1. Estructura de la Tesis	4
II. Cristales fonónicos	6
II.1. Cristales	6
II.1.1. Teorema de Bloch	10
II.2. Cristales acústicos y electromagnéticos	10
II.3. Bandas prohibidas	14
III. Caos clásico	25
III.1. Desarrollo histórico	25
III.2. Sistemas Dinámicos	28
III.2.1. Tipos de sistemas dinámicos	29
III.2.2. Linealidad y no Linealidad	32
III.2.3. Caos	34
III.3. Cuantificación del Caos	35
III.3.1. Exponentes de Lyapunov	35
III.3.2. Mapas de Poincaré	37
III.3.3. Función de Autocorrelación	39
III.4. Sistema de billares	40
III.4.1. Sistema de billares con paredes sinusoidales	41
III.4.2. Billar plano con inclusión circular	44
IV. El método de la ecuación integral	46
IV.1. Descripción del Método Integral	46
IV.2. Ecuación de Helmholtz	47
IV.3. Impedancia acústica	49
IV.4. Función de Green en la Ecuación de Helmholtz	54

Contenido (continuación)

	Página
IV.5. Forma Integral de la Ecuación de Helmholtz	55
IV.6. Discretización de Integrales	56
IV.7. PnCW Infinita	60
IV.8. PnCW Finita	64
IV.8.1. Campo incidente	67
IV.8.2. El campo esparcido	70
IV.9. Verificación de los métodos numéricos implementados	72
IV.9.1. Verificación del método numérico en el sistema infinito	72
IV.9.2. Verificación del método numérico en el sistema finito	74
V. Resultados	76
V.1. Función de autocorrelación en sistemas acústicos	76
V.2. PnCW infinita con inclusiones cilíndricas de superficies acústicas	77
V.2.1. Superficie Suave	82
V.2.2. Superficie Rígida	84
V.2.3. Superficies acústicas reales	86
V.3. PnCW finita con inclusiones cilíndricas de superficies acústicas	91
V.3.1. Superficie Suave	94
V.3.2. Superficie Rígida	96
VI. Conclusiones	98
A. Condiciones de frontera	102
B. Ecuaciones de medios continuos	106
B.1. Ecuación de continuidad	106
B.2. Ecuación de Fuerza no viscosa	108
B.3. Ecuación de Estado	110
C. Función de Green	114
REFERENCIAS	118

Lista de Figuras

Figura	Página	
1	(a) Estructura periódica bidimensional. (b) Estructura dividida por líneas paralelas igualmente espaciadas que definen el objeto (base) que se repite en el espacio. (c) Objeto representado por un punto imaginario en su centro y la estructura periódica bidimensional se transforma en la red cristalina correspondiente.	7
2	Las cinco redes de puntos bidimensionales: (a) oblicua, (b) triangular, (c) rectangular, (d) cuadrada, y (e) rombo (o rectangular centrado). . .	8
3	Las 14 redes de Bravais. Las redes se agrupan en filas según la forma de la celda unitaria convencional: triclinica, monoclinica, ortorrómbica, tetragonal, cúbica y hexagonal. Las seis formas distintas de las celdas unitarias convencionales definen los llamados seis sistemas cristalinos. Las redes también se agrupan en columnas según la ubicación de los puntos dentro de las celdas unitarias convencionales.	9
4	Cristales acústicos granulares en una (abajo), dos (izquierda) y tres (derecha) dimensiones compuestos por partículas metálicas confinadas por paredes de soporte o confinadas en una matriz (imagen de Deymier (2013)).	11
5	Propagación de ondas planas dentro de un material sólido cristalino bidimensional, donde se considera que las ondas se propagan horizontalmente con vectores de onda \mathbf{K} . (a) Distribución de los átomos (puntos negros) en el material cristalino ordenado. (b) Propagación de una onda plana transversal. Vector de desplazamiento $\mathbf{u}_T(\mathbf{r}, t)$, que mide el desplazamiento instantáneo de los átomos, es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. (c) Propagación de una onda plana elástica longitudinal, donde el vector desplazamiento $\mathbf{u}_L(\mathbf{r}, t)$ es paralelo a la dirección de propagación de la onda.	12

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
6	(a) Imagen de microscopio electrónico de barrido de la monocapa de microesferas de partículas de poliestireno de $1 \mu\text{m}$ de diámetro. (b) Esquema de la configuración experimental de la bomba-sonda para sondear las interacciones entre resonancias de contacto de partículas esféricas y SAWs en propagación. (c) Patrón de difracción producido por el haz láser de la sonda en reflexión. (d) Retícula recíproca y la primera zona de Brioullin del cristal microgranular. La línea roja muestra el rango del vector de onda utilizado en el experimento. Imagen tomada de Vega-Flick <i>et al.</i> (2017).	20
	22figure.2.7	
8	Escultura acústica de Eusebio Sempere.	23
9	(Simulación MATLAB R2019b) Atractor extraño del sistema de Lorenz.	28
10	(Simulación MATLAB R2019b) Conjunto fractal de Mandelbrot.	28
11	(Simulación MATLAB R2019b) (a) Diagrama de bifurcaciones del mapeo de poblaciones $x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$. (b) Exponentes de Lyapunov del mapeo de poblaciones.	37
12	Sección de Poincaré para trayectorias en un espacio fase m -dimensional.	38
13	Diagrama del sistema en (a). Mapas de Poincaré en (b), (c) y (d), obtenidos por Herrera-González <i>et al.</i> (2011) para distintos parámetros del sistema.	42
14	(a) Diagrama de la mesa de billar. Las gráficas de Husimi en (b), (c) y (d), son obtenidas por Luna-Acosta <i>et al.</i> (1996b) para diferentes parámetros del sistema.	43
15	Diagrama de movimiento de fonones en billar periódico con un obstáculo convexo tomado de Suppes and Acacia-de Barros (1996).	45
16	Diagrama de una guía de ondas infinita con inclusiones cilíndricas de materiales acústicos. Las líneas punteadas en rojo delimitan la región de la celda unitaria.	60
17	Diagrama de una guía de ondas finita con inclusiones cilíndricas de materiales acústicos.	64

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página	
18	Estructura de bandas para una PnCW formada por dos paredes planas y paralelas. Comparación del modelo analítico (círculos azules) con el numérico (puntos rojos).	74
19	(a) Estructura de bandas para una PnCW formada por dos paredes planas y paralelas con inclusiones cilíndricas perfectamente suaves. (b) Respuesta óptica de una PnCW finita al considerar un haz de ondas planas que incide de forma normal sobre la guía con superficies idealmente suaves.	75
20	Diagrama de una PnCW infinita formada por paredes planas y paralelas que envuelven un arreglo periódico con inclusiones circulares superficies acústicas.	78
21	(a) Función determinante para un modo del sistema de la parte inferior derecha. (b) Estructura de bandas correspondiente al sistema.	79
22	La primera columna son los campos con tres celdas unitarias desplazadas relativo al eje x , para un modo del sistema infinito. La segunda y tercera columna corresponden a las ACFs y estructura de bandas, respectivamente. La celda unitaria se muestra en la parte inferior derecha de las estructuras de bandas.	80
23	La primera columna son los campos con tres celdas unitarias desplazadas relativo al eje y , para un modo del sistema infinito. La segunda y tercera columna corresponden a las ACFs y estructura de bandas, respectivamente. La celda unitaria se muestra en la parte inferior derecha de las estructuras de bandas.	81
24	Intensidades del campo de presión de una guía de ondas infinita con materiales acústicos suaves calculadas para (a) $\omega = 410.83$ MHz, (c) $\omega = 6,696.51$ MHz y (e) $\omega = 231,716.96$ MHz. (b), (d) y (f) Funciones de autocorrelación calculadas a partir de (a), (c) y (e), respectivamente.	83
25	Intensidades del campo de presión de una guía de ondas infinita con materiales acústicos rígidos calculadas para (a) $\omega = 410$ MHz, (c) $\omega = 6,629.31$ MHz y (e) $\omega = 231,716.96$ MHz. En (b), (d) y (f) Funciones de autocorrelación calculadas a partir de (a), (c) y (e), respectivamente.	85
26	(a) y (f) Intensidades de campo para PnCW infinta sin inclusiones. (d) y (h) Con inclusiones de aire con placas planas de superficies (a) y (d) suaves y (f) y (h) rígidas, con sus respectivas ACFs.	87

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
27	Intensidades de campo para PnCW infinita con inclusiones de aluminio con placas planas de superficies rígidas con sus respectivas ACFs y longitudes de autocorrelación.	89
28	Intensidades de campo para PnCW infinta con inclusiones de hidrógeno con placas planas de superficies rígidas con sus respectivas ACFs y longitudes de autocorrelación.	90
29	Diagrama de guía de ondas finita con paredes planas e inclusiones cilíndricas de superficies acústicas.	91
30	Reflectancia obtenida para distintas frecuencias para el sistema de la parte inferior derecha, en las que las líneas rojas representan una interfaz aire-aire.	92
31	Intensidad del campo de presiones y valor de las ACFs para una PnCW con las inclusiones rígidas siendo recorridas sobre el eje y	93
32	Intensidades del campo de presión de una guía de ondas finita con materiales acústicos suaves calculadas para (a) $\omega = 492.34$ MHz y (c) $\omega = 33, 115.96$ MHz. (b) y (d) Funciones de autocorrelación respectivas.	95
33	Intensidades del campo de presión de una guía de ondas finita con materiales acústicos rígidos calculadas para (a) $\omega = 398.36$ MHz y (c) $\omega = 33, 113.14$ MHz. (b) y (d) Funciones de autocorrelación respectivas.	97
34	(a) Trayectoria C que va de un punto (1) a un punto (2) atravezando dos medios. (b) Superficie cilíndrica S que abarca ambos medios.	103
35	Flujo de masa por elemento de volumen.	107
36	Pequeño cubo de aire que parte de un medio gaseoso en el que la presión sonora aumenta en la dirección x . El tamaño de los puntos indica el aumento de la magnitud de p	109

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

A finales del siglo XIX físicos, biólogos, astrónomos y economistas descubrieron un modo de comprender la complejidad en la naturaleza. La nueva rama de la ciencia, llamada “caos”, ofrece un método para ver orden donde antes sólo se observaba azar e irregularidad, traspasando las disciplinas científicas tradicionales en donde, las leyes se expresaban de manera estrictamente determinista a diferencia de cualquier otra ciencia que no podía decir lo mismo. Impulsado por el surgimiento de la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica, que de igual manera, rompían con el pensamiento determinista clásico de la física. El caos, de origen Griego “*khaos*” que designa un abismo oscuro, desordenado y tenebroso, no tiene una definición formalmente aceptada por Físicos y Matemáticos, a pesar de surgir de una ardua actividad matemática, es un saber del mundo cotidiano: cómo se forman las nubes, por qué se eleva el humo o cuál es la razón de que el agua se arremoline en los ríos.

Esta labor matemática se vio más aceptada sino hasta mediados del siglo XX, cuando el físico Edward Norton Lorenz (1917-2008) con ayuda de una computadora de gran velocidad, una “Royal McBee”, resolvió un conjunto de ecuaciones no lineales deterministas las cuales modelaban el clima. Él observó al colocar condiciones iniciales ligeras-

mente distintas, las soluciones divergían en el tiempo una de otra, de modo que nunca se establecieron a un equilibrio o a un estado periódico, sino que siguieron oscilando de forma irregular, aperiódica y que al graficar el espacio de soluciones del conjunto de ecuaciones se formaba una especie de mariposa. Dicho fenómeno lo llamó atractor extraño con lo que se estableció la existencia de fenómenos caóticos. Exhibiendo una clara relación entre la sensibilidad de las condiciones iniciales y un comportamiento caótico; es decir, en sistemas dinámicos, con variables que evolucionan con el tiempo, la respuesta no es proporcional al estímulo. Este punto de vista fue compartido años antes por el físico James Clerk Maxwell (1831-1879) (Fernández-Sanjuán, 2016); así como el contemporáneo a Lorenz, el físico americano Richard Phillips Feynman (1918-1988), quien hace unas reflexiones similares en su conocido libro titulado Lecciones de Física (Feynman *et al.*, 1963). En él explica que el indeterminismo no pertenece exclusivamente a la mecánica cuántica, sino que es una propiedad básica de muchos sistemas físicos.

Como es natural, existen tantos sistemas dinámicos como variables que tienen una evolución temporal, lo que nos da idea de la naturaleza interdisciplinar y del alcance de la dinámica no lineal. Por lo que, una gran variedad de los sistemas son complejos. Este tipo de sistemas complejos existen en biología, en química, en física, en sociología, en economía, etc (Akter and Ahmed, 2019). Existen diferentes caminos que han llevado a la comprensión del caos tal y como lo entendemos hoy en día. De entre estos diferentes caminos cabe señalar:

1. La ecuación logística y la dinámica de las poblaciones.
2. Los osciladores no lineales.
3. El problema de los tres cuerpos y la mecánica celeste.

4. La turbulencia y la dinámica de los fluidos.
5. La irreversibilidad y la mecánica estadística.

Con avances teóricos en problemas desde la turbulencia del tiempo atmosférico a los complicados ritmos del corazón humano; así como el diseño de los copos de nieve a los torbellinos arenosos del desierto. Siendo las propiedades estadísticas las que vislumbran comportamientos desordenados en los sistemas donde se presenta el fenómeno de caos.

Por otro lado el estudio de sistemas en los que hay una propagación y esparcimiento de ondas es un tema de gran interés actual desde un punto de vista científico y aplicado (Torrent and Sánchez-Dehesa, 2009). Esto no es de sorprenderse puesto que la interacción de las ondas con la materia conlleva a comportamientos peculiares, cuyo estudio ha sido resultado en grandes avances de la comunicación, detección y medición (Shinohara, 2018). Este panorama presenta problemáticas actuales que se vuelven cada vez más difíciles de abordar, englobando con ello, una gran cantidad de fenómenos acústicos, electromagnéticos, ópticos, cuánticos, etc. Así, entre los sistemas que presentan el fenómeno de caos podemos destacar las guías de ondas de cristal fonónico (PnCWs¹) cuya contra parte electromagnética, presentan el fenómeno de caos (Pérez-Aguilar *et al.*, 2013a,b). Algunos de estos sistemas pueden ser comparados con sistemas clásicos de geometrías análogas que presentan el fenómeno de caos (Herrera-González *et al.*, 2011; Alonso *et al.*, 2003; Castaldi *et al.*, 2008; Berry, 1977). Claro esto no sólo es cuestión de un análisis teórico, también se han obtenido resultados experimentales sobre el comportamiento caótico; en particular, en fibras ópticas con sección transversal no circulares donde los rayos de luz exhiben una dinámica caótica (Mendoza-Suárez *et al.*, 2011). Esta dinámica en sistemas de guías de ondas, puede ser modelada a través de

¹Por sus siglas en inglés, *Phononic Crystal Waveguides*.

la intensidad del campo al interactuar en la guía, mostrando bajo ciertas condiciones, patrones irregulares.

Estos patrones irregulares se describen mejor mediante métodos de teoría de probabilidad y estadísticas. Para explicar estos patrones irregulares, en algunos trabajos se ha considerado que la geometría de las guías de onda infinitas tienen una analogía a sistemas clásicos conocidos como billares de Sinai. Esto permite estudiar sus propiedades de transporte cuánticas y clásicas (Pérez-Aguilar *et al.*, 2013a). Además, es bien sabido que una guía de ondas de cristal fonónico infinita tiene asociada una estructura de bandas (Mendoza-Suárez *et al.*, 2011), lo cual es de vital importancia en el estudio de propiedades estadísticas en este tipo de sistemas. Es importante recalcar que para frecuencias altas se tiene el límite de la acústica geométrica, de donde se obtiene una analogía con sistemas clásicos que presentan el fenómeno de caos (Pérez-Aguilar *et al.*, 2013a). Un entendimiento pleno del caos podría conllevar en aplicaciones de matemáticas, informática e ingeniería. Especialmente en aplicaciones de seguridad, por ejemplo, los mapeos caóticos muestran un excelente rendimiento en generadores de números pseudoaleatorios (PRNG²) (Zhou *et al.*, 2014), y cifrado de datos e imágenes (Bose and Pathak, 2006).

En la siguiente sección se menciona la estructura de la tesis.

I.1. Estructura de la Tesis

La tesis está estructurada de la siguiente manera:

- En el Capítulo II se hace una revisión de los conceptos básicos de cristalografía necesarios para un pleno entendimiento del problema. Además, se habla de las

²Por sus siglas en inglés, *Pseudo-Random Number Generators* .

distintas tecnologías e investigaciones desarrolladas de los cristales fonónicos.

- En el capítulo III se introducirán los conceptos básicos de la teoría del caos clásico necesarios para el desarrollo de esta tesis; así como su clasificación y cuantificación. Además se mostrarán resultados de trabajos de distintos autores con geometrías similares al problema que se aborda en este trabajo de investigación. Dichos resultados son para trayectorias de partículas en sistemas balísticos (generalmente llamados billares), que en el caso clásico presentan el fenómeno de caos.
- En el capítulo IV se introduce la teoría de la mecánica de los continuos, concluyendo con la obtención de la ecuación de onda para perturbaciones longitudinales en un medio continuo, que es solucionada mediante el método numérico de la ecuación integral. El cual, es un método que se basa en el uso el teorema de Green bidimensional para calcular las intensidades del campo acústico de presiones en sistemas finitos e infinitos.
- En el capítulo V se muestran los resultados obtenidos al analizar el comportamiento de la intensidad del campo de presiones para los sistemas infinito y finito considerados en este trabajo. Ambos sistemas están formados por placas plano-paralelas que envuelven un arreglo de inclusiones cilíndricas circulares de distintos materiales acústicos. Para observar cuantitativamente el desorden del sistema se utilizó la función de autocorrelación, así como la longitud de correlación.
- En el capítulo VI se dan las conclusiones de analizar los resultados obtenidos en los sistemas planteados.

Capítulo II

CRISTALES FONÓNICOS

El estudio de los materiales y su respuesta ante diversos estímulos (como en forma de ondas electromagnéticas y acústicas) ha revolucionado la tecnología y generado muchos aportes al conocimiento. En este capítulo presentamos una revisión de las definiciones básicas de materiales cristalinos, necesarias para caracterizar el problema de interés.

II.1. Cristales

Los átomos de la materia se ordenan en una disposición repetitiva de mínima energía. En otras palabras, un “cristal” es un material homogéneo formado en su interior por átomos, moléculas, partículas o iones (Callister, 2019; Kittel *et al.*, 1996), constituyendo lo que se denomina un arreglo cristalino. Éste está formado a su vez por una red cristalina con adición a una base atómica particular (ver Fig. 1). Cristales simples pueden describirse por la llamada **red de Bravais**, formada por el conjunto discreto e infinito de puntos asociados al cristal. Estas redes cristalinas son descritas por **vectores primitivos** denotados por \mathbf{a}_i ($i = 1, 2$ o 3), ya que cada punto sobre la red puede representarse por el vector de traslación $\mathbf{T} = \sum_i n_i \mathbf{a}_i$ con *parámetros de red* correspondientes a las magnitudes de los vectores de la red a_i y $n_i \in \mathbb{Z}$.

Dada la periodicidad que se hace presente, la información de solamente un periodo es suficiente para definir toda la estructura básica, la cual se le conoce como **celda unitaria**. Esta unidad primordial es una sección del cristal que puede ser trasladada usando todos los vectores de primitivos para llenar todo el espacio del cristal.

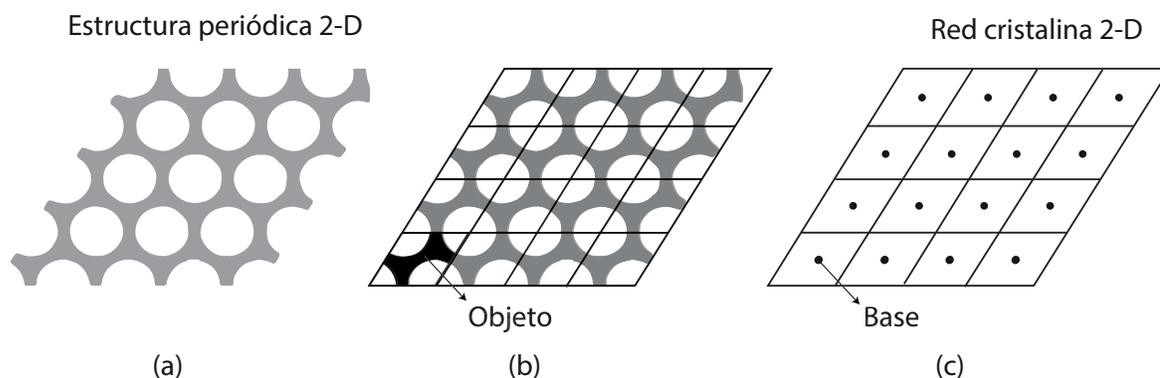


Figura 1. (a) Estructura periódica bidimensional. (b) Estructura dividida por líneas paralelas igualmente espaciadas que definen el objeto (base) que se repite en el espacio. (c) Objeto representado por un punto imaginario en su centro y la estructura periódica bidimensional se transforma en la red cristalina correspondiente.

El ordenamiento de la *base* en los cristales puede asumir muchas formas geométricas. Desde el punto de vista de la simetría, estas formas han sido matemáticamente catalogadas; habiendo un único sistema periódico de una dimensión, cinco de dos dimensiones (Fig. 2) y catorce de tres dimensiones (Fig. 3). Sin embargo, el concepto de sistema periódico es una abstracción matemática que implica la existencia de una estructura discreta en un medio infinito; lo que, en la naturaleza no se puede encontrar; no obstante, algunos ejemplos pueden llegar a simularlos aproximadamente. Es el caso de cristales truncados formados por muchos puntos, pero con fronteras en el dominio finito. Otro concepto a tener en cuenta es el de la fracción de llenado (filling fraction, f) que es el cociente entre la longitud, área o volumen ocupado por los objetos (base) y la longitud, área o volumen total de la celda unitaria, y que viene en términos de los parámetros de red, ya que estos definen la relación entre las propiedades geométricas y

físicas del cristal.

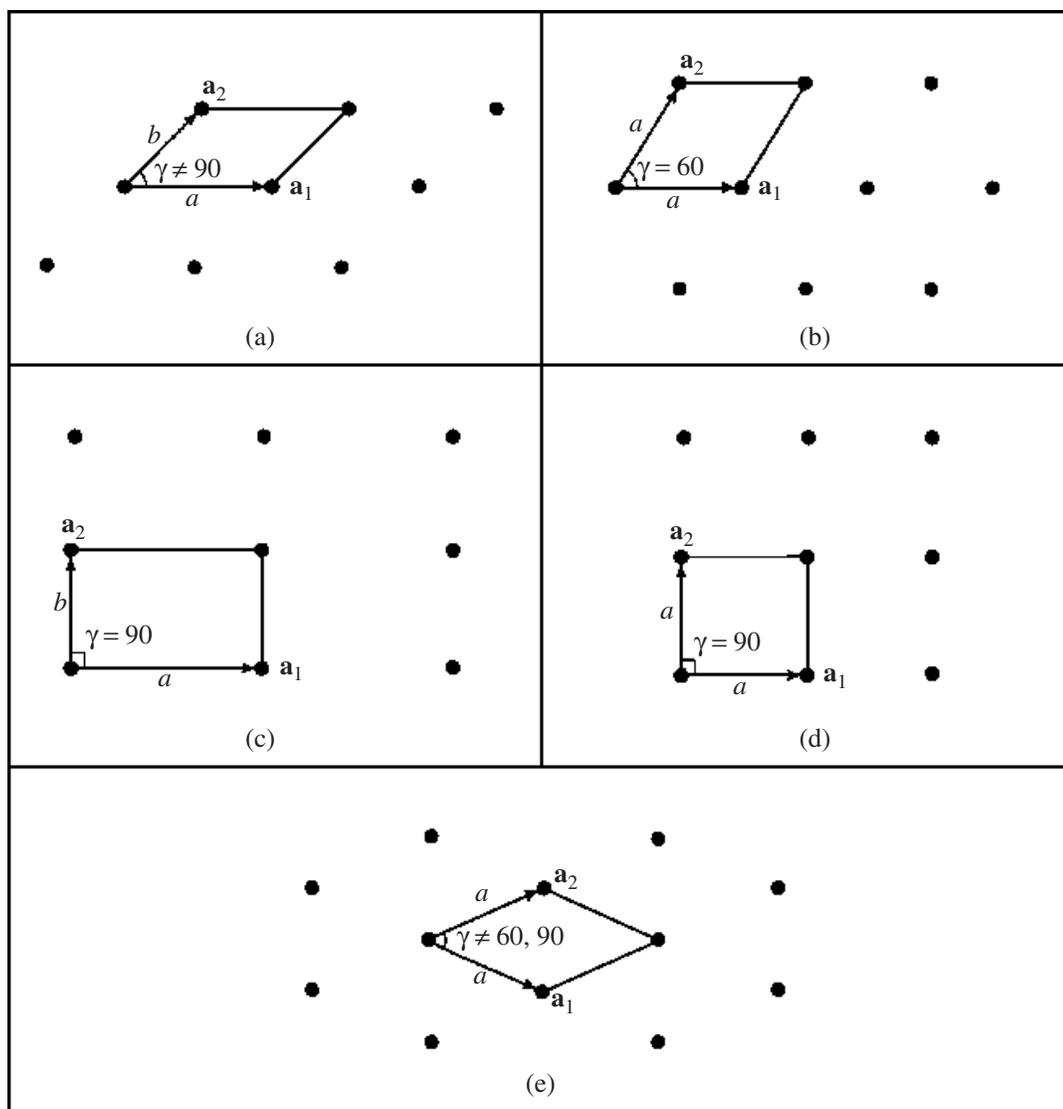


Figura 2. Las cinco redes de puntos bidimensionales: (a) oblicua, (b) triangular, (c) rectangular, (d) cuadrada, y (e) rombo (o rectangular centrado).

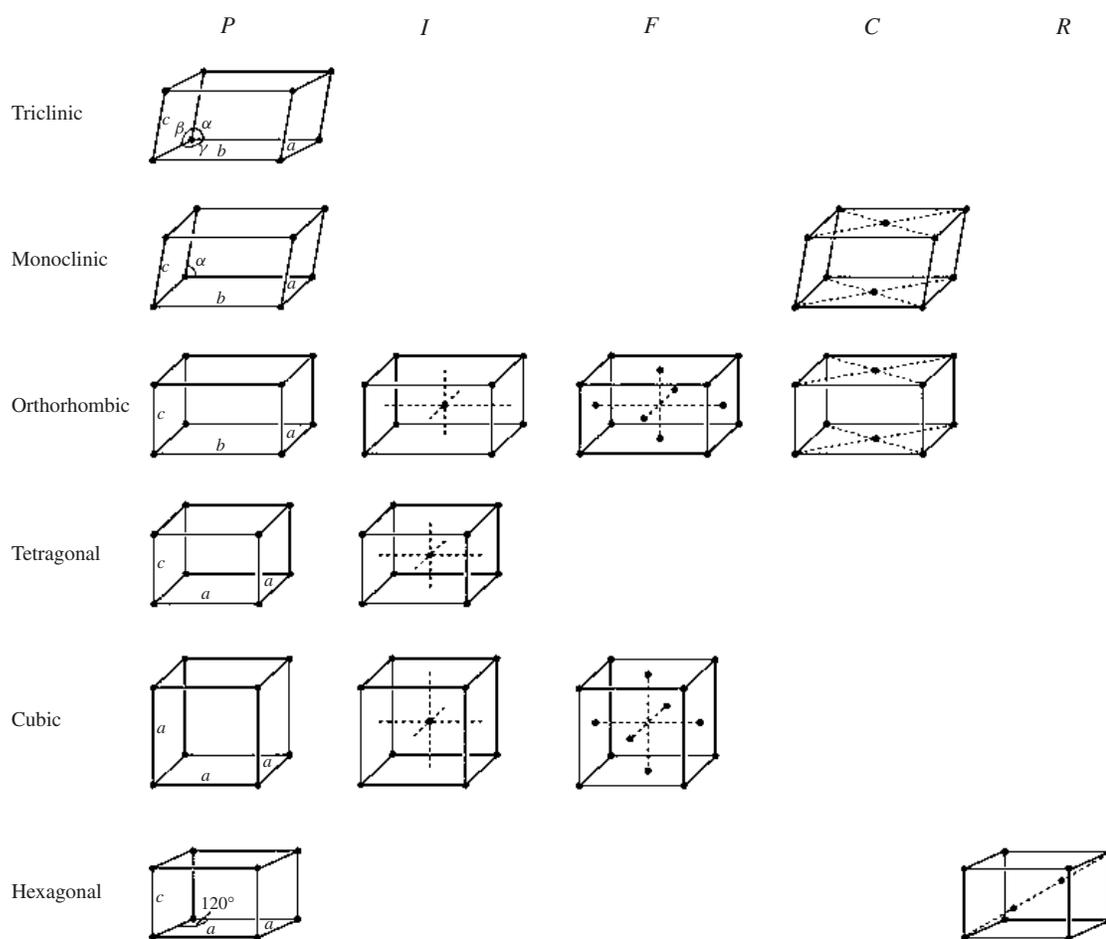


Figura 3. Las 14 redes de Bravais. Las redes se agrupan en filas según la forma de la celda unitaria convencional: triclínica, monoclinica, ortorrómbica, tetragonal, cúbica y hexagonal. Las seis formas distintas de las celdas unitarias convencionales definen los llamados seis sistemas cristalinos. Las redes también se agrupan en columnas según la ubicación de los puntos dentro de las celdas unitarias convencionales.

II.1.1. Teorema de Bloch

La dinámica de un material periódico, por ejemplo a escala atómica, cristales fonónicos (o fotónicos), metamateriales acústicos (o electromagnéticos); se explica aplicando el teorema de Bloch (Bloch, 1929) en una única celda unitaria representativa del medio periódico. Este teorema establece que el campo de ondas en un medio periódico es también periódico, excepto que su periodicidad viene determinada por la relación de dispersión entre frecuencia y vector de onda. La forma de la respuesta de desplazamiento en un material fonónico no disipativo según el teorema de Bloch viene dada por

$$\Psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\Psi}_{\mathbf{K}}(\mathbf{r})e^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (1)$$

donde Ψ es el campo periódico (en nuestro caso el campo acústico de presión), $\tilde{\Psi}$ es la función de Bloch del campo, \mathbf{r} es el vector de posición, \mathbf{K} es el vector de onda de Bloch, ω y t denotan la frecuencia temporal real y el tiempo, respectivamente.

II.2. Cristales acústicos y electromagnéticos

Dependiendo de las propiedades que tenga el material cristalino se pueden implementar en distintas áreas, tal es el caso de los cristales fonónicos (PnCs¹), los cuales, comparten cualidades con los cristales fotónicos (PCs²); ya que son estructuras periódicas hechas de diferentes materiales diseñadas para controlar la propagación de las ondas mecánicas o electromagnéticas, en el caso de los PnCs o PCs, respectivamente (Deymier, 2013). La idea de una estructura periódica de un material o PnC que pueden ser de una, dos o tres dimensiones, particularmente es de gran importancia en el área de la acústica. La Fig. 4 muestra distintos PnCs.

¹Por sus siglas en inglés, Phononic Crystal.

²Por sus siglas en inglés, Photonic Crystal.

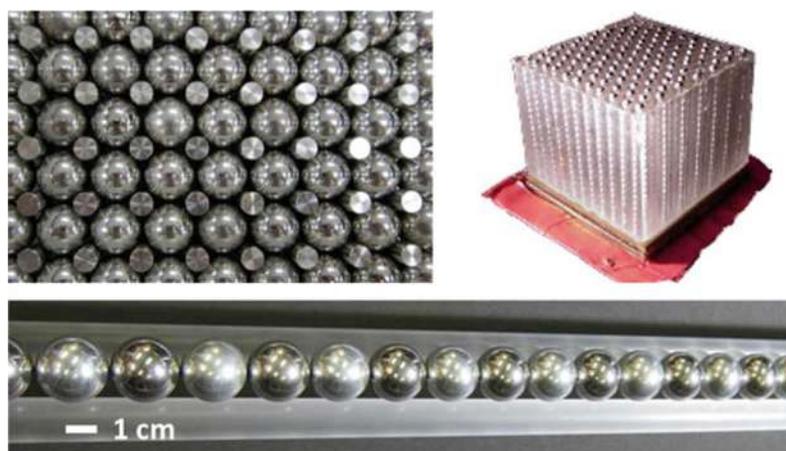


Figura 4. Cristales acústicos granulares en una (abajo), dos (izquierda) y tres (derecha) dimensiones compuestos por partículas metálicas confinadas por paredes de soporte o confinadas en una matriz (imagen de Deymier (2013)).

Una característica importante de las ondas mecánicas es el hecho de que existen diferentes mecanismos de propagación y, en consecuencia, existen diferentes tipos de ondas mecánicas. Los mecanismos de propagación dependen del tipo de material (es decir, sólido o fluido) dentro del cual se propagan las ondas. En consecuencia, las ondas mecánicas que se propagan en materiales sólidos se suelen denominar *ondas elásticas*, mientras que las que se propagan en fluidos (es decir, gases o líquidos) se denominan *ondas acústicas*. A su vez, éstas pueden ser *ondas transversales* (la amplitud de la onda es perpendicular al movimiento de esa onda como en la Fig. 5(b)) u *ondas longitudinales* (la amplitud y el movimiento de la onda son colineales como en la Fig. 5(c)). Como veremos en la deducción de la ecuación de onda (Capítulo IV), en los fluidos, a diferencia de los materiales sólidos, las ondas mecánicas transversales no pueden propagarse a través de ellos; ya que, las moléculas del material en el que viajan las ondas no pueden transmitir la vibración en una dirección transversal a la dirección de propagación. Podemos utilizar la Fig. 5(c) para mostrar cómo una onda longitudinal puede entenderse como una onda de presión. Nótese que el número de átomos por

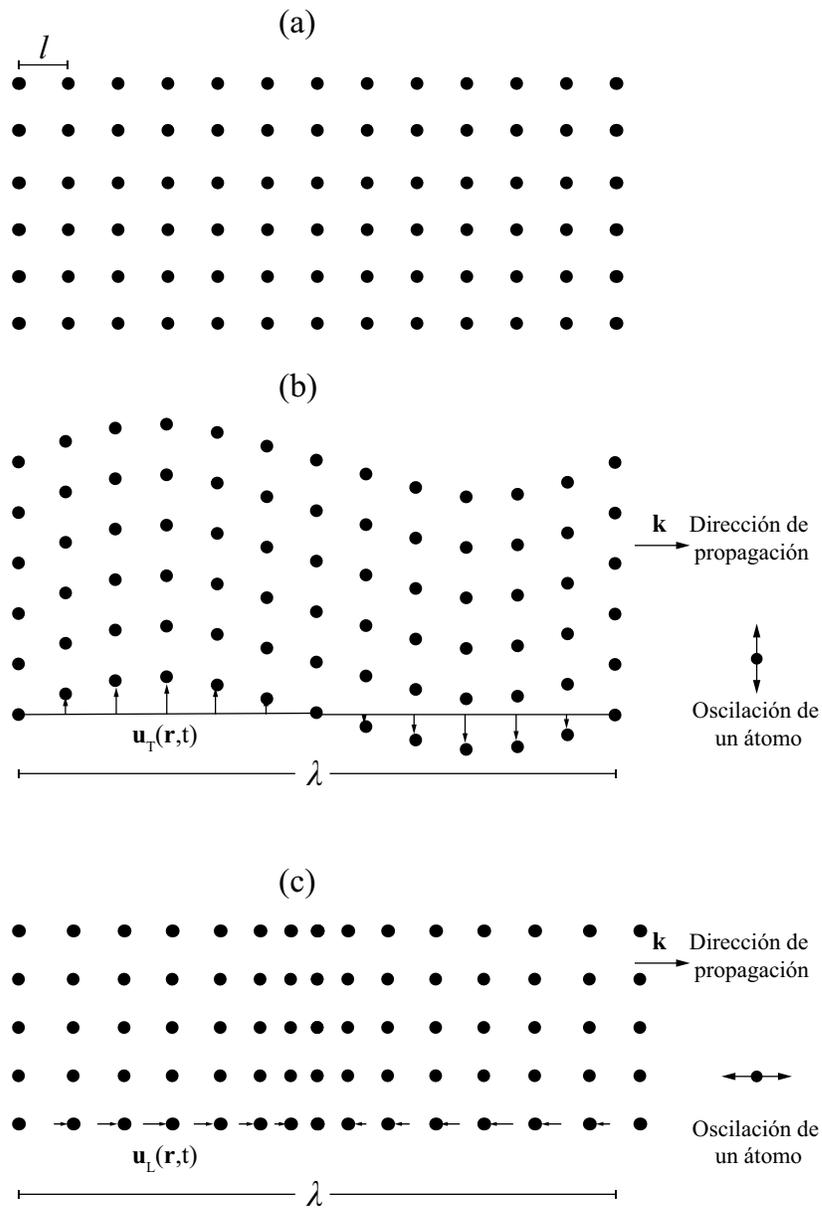


Figura 5. Propagación de ondas planas dentro de un material sólido cristalino bidimensional, donde se considera que las ondas se propagan horizontalmente con vectores de onda \mathbf{K} . (a) Distribución de los átomos (puntos negros) en el material cristalino ordenado. (b) Propagación de una onda plana transversal. Vector de desplazamiento $\mathbf{u}_T(\mathbf{r}, t)$, que mide el desplazamiento instantáneo de los átomos, es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. (c) Propagación de una onda plana elástica longitudinal, donde el vector de desplazamiento $\mathbf{u}_L(\mathbf{r}, t)$ es paralelo a la dirección de propagación de la onda.

unidad de superficie en el centro de la figura es mayor que en ambos lados. Esto significa que la onda que se propaga genera regiones donde la presión es máxima y otras donde

la presión es mínima. Estas regiones periódicas de presión máxima y mínima avanzan a medida que la onda longitudinal se propaga horizontalmente en el material creando una “onda de presión”.

Aunque los cristales fonónicos y fotónicos tienen muchas características comunes, también tienen diferencias significativas porque las ondas mecánicas (a diferencia de las ondas electromagnéticas) como hemos mencionado, se propagan de forma diferente en materiales sólidos y fluidos. Sin embargo, la propiedad más fundamental que comparten los cristales fonónicos con los fotónicos y electrónicos, es la existencia de las *estructuras de bandas*. Una estructura de bandas es el conjunto de una serie de bandas de frecuencias permitidas y prohibidas (a veces llamadas bandas de paso y bandas de parada, respectivamente) que representan las frecuencias de la radiación de la onda que se excluyen (bandas de parada) o se dejan pasar (bandas de paso) a través de la masa del cristal (Khelif *et al.*, 2006; McGurn, 2020). En el área de la acústica, permite controlar y manipular la propagación de ondas acústicas y elásticas, por lo que se pueden usar para diseñar materiales funcionales, por ejemplo, filtros de transmisión acústica.

Este fenómeno dinámico inherente puede utilizarse en una amplia gama de tecnologías a diferentes escalas de longitud. Entre las aplicaciones de los PnCs se encuentran:

- La minimización de vibraciones (Hussein *et al.*, 2007).
- La colimación del sonido (Christensen *et al.*, 2007).
- Detección de frecuencias (El-Kady *et al.*, 2008; Mohammadi *et al.*, 2009).
- Encubrimiento acústico (Torrent and Sánchez-Dehesa, 2008).
- Rectificación acústica (Li *et al.*, 2011).

- Acoplamiento de ondas opto-mecánicas en dispositivos fotónicos (Eichenfield *et al.*, 2009).
- Reducción de la conductividad térmica en semiconductores (Cleland *et al.*, 2001).
- El guiado de ondas elásticas/acústicas (Khelif *et al.*, 2004).

Sin embargo, el concepto de PnC es demasiado reciente, cuyos orígenes se remontan a finales del siglo XX, con la publicación de los trabajos de Sigalas y Economou en la Universidad de Heraklion, en Creta la principal isla de Grecia, y por Kushwaha, Halevi, Dobrzynski y Djafari-Rouhani en la Universidad de Lille en Francia Hussein *et al.* (2014). Por consiguiente, la comunidad científica ha incursionado en la tarea de desarrollar nuevos enfoques basados en esta perspectiva particular, en un intento por consolidar con éxito aplicaciones de la rama de la fonónica.

II.3. Bandas prohibidas

Para todas las frecuencias contenidas en una banda prohibida (bandgap) completa, un PnC se comporta como un escudo acústico, reflejando todas las ondas incidentes. Por ende, es perfectamente posible concebir barreras insonorizadas en diversos sistemas. Las periodicidades involucradas deben ser del orden del sistema. Esto representa un reto en el diseño para poder reducir las dimensiones y mantener el rango de frecuencias del bandgap lo suficientemente bajo. Es así que, para comprender cómo se produce la formación de las bandgaps en las estructuras periódicas artificiales, consideraremos en primer lugar una situación similar a la de la formación de la estructura de bandas electrónica. En ciertos materiales, se encuentran brechas de banda distintivas que indican que los electrones en energías prohibidas particulares no pueden propagarse a través del material (Glusker and Trueblood, 2010). Esto se puede notar en el esparcimiento

de ondas que interaccionan con objetos compuestos de materiales cristalinos que tienen ciertas propiedades físicas que engloban una gran cantidad de fenómenos en electromagnetismo, óptica, acústica, mecánica cuántica, etc. El mecanismo de formación de cristales es bien conocido en la física del estado sólido, y se ha utilizado durante mucho tiempo para explicar las estructuras de banda electrónicas (Kittel *et al.*, 1996). Las propiedades únicas que surgen de la interacción de una onda y una estructura periódica son evidentes sólo cuando la longitud de onda es comparable a la separación de la red. En la mayoría de los cristales de la naturaleza, la separación de la red es del orden de nanómetros correspondiente a la longitud de onda de un electrón en estado de conducción (Ziman, 1962). Científicos como Brillouin y Floquet estudiaron la teoría de bandas, siendo Brillouin de los primeros físicos en estudiar la teoría de bandas de conducción de electrones en sólidos en más de una dimensión. Mientras que, Floquet descubrió que las soluciones de una ecuación de onda lineal con un potencial periódico pueden expresarse como funciones de onda con la misma periodicidad. Es decir, las ondas de una cierta frecuencia pueden propagarse a través de medios periódicos como en los medios homogéneos, mientras que la propagación de ondas a otras frecuencias está fuertemente suprimida. Las ondas que se propagan pueden describirse mediante una función envolvente de la misma periodicidad que el medio multiplicada por una onda plana. Las frecuencias en las que la propagación de ondas se conocen como bandas y los rangos en los que la propagación de ondas está prohibida se denominan huecos de banda. Por tanto, una onda de Bloch es la función de onda de una partícula situada en un potencial periódico. El cual consiste en el producto de una onda plana y una función periódica Ψ , que tiene la misma periodicidad que el potencial como muestra la Ec. (1) (Phani *et al.*, 2006).

La descripción de las ondas de Bloch se aplica generalmente para explicar fenómenos

en un medio periódico. Por ejemplo, un medio óptico periódico describe PCs, o un medio acústico periódico describe PnCs. Los PCs se caracterizan por celdas primitivas de un tamaño comparable a la longitud de onda del fotón. La dispersión resonante puede producirse en función de la frecuencia y del vector de onda. Para determinadas geometrías existe un rango de frecuencias denominado gap para para el que está prohibida la existencia de luz en el interior del cristal. Para las ondas electromagnéticas en PCs, el punto de partida son las ecuaciones de Maxwell y las relaciones constitutivas.

Una situación similar ocurre en los PnCs, cuando el vector de onda de la onda incidente apunta a los límites de una zona de Brillouin. La cual es conocida como “dispersión de Bragg” y permite la reflexión de las ondas en determinados ángulos. Para las ondas acústicas en un PnC la interacción entre las ondas incidentes y las ondas reflejadas aumenta la división de la relación de dispersión, lo que es consecuencia de un efecto de interferencia. La interacción de ondas con los mismos vectores de onda que se propagan en direcciones opuestas forma ondas estacionarias. Las ondas estacionarias tienen velocidades de grupo decrecientes, lo que implica la existencia de una tangente horizontal a la curva de dispersión en el límite de la zona de Brillouin (es decir, una banda prohibida).

Las longitudes de onda de las ondas mecánicas que no pueden propagarse dentro del cristal fonónico (regidas por las bandgaps) son del orden de la periodicidad espacial de la estructura. Por ejemplo, los cristales fonónicos con periodicidades del orden de metros a centímetros prohibirán la propagación de ondas mecánicas con frecuencias en el rango de $20 - 20 \times 10^3$ Hz, mientras que aquellos con periodicidades del orden de micras prohibirán la propagación de ondas mecánicas hipersónicas con frecuencias en el rango de $10^9 - 10^{12}$ Hz (Maldovan and Thomas, 2009).

El éxito de la gestión del espectro electromagnético queda demostrado por la amplia

gama de frecuencias controladas en los dispositivos electromagnéticos, que se extiende a lo largo de 14 órdenes de magnitud, desde la exploración por tomografía por emisión de positrones (PET) a una frecuencia $\nu < 10^{20}$ Hz (Chen *et al.*, 2021) hasta las radios de amplitud modulada (AM) a $\nu < 10^6$ Hz (Kimionis *et al.*, 2021). Pero además de los electrones y los fotones, el fonón es otra partícula de gran interés, responsable de la transmisión del sonido y el calor. Dadas las numerosas aplicaciones del notable éxito en el manejo de electrones y fotones, sería valioso lograr un grado similar de control sobre la partícula responsable del sonido y el calor (Tabla I y Tabla II).

Tabla I. Espectro electromagnético. La tabla fue tomada de Maldovan and Thomas (2009) y rangos aparecen en Hess *et al.* (2002). El diagrama ilustrativo es tomado de Resnick *et al.* (2013).

	Longitud de onda [m]	Frecuencia [Hz]
Ondas de radio	$> 1 \times 10^{-1}$	$< 3 \times 10^9$
Ondas de Microondas	1×10^{-3} a 1×10^{-1}	3×10^9 a 3×10^{11}
Luz Infrarroja	7×10^{-7} a 1×10^{-3}	3×10^{11} a 4×10^{14}
Luz Visible	4×10^{-7} a 7×10^{-7}	4×10^{14} a 7.5×10^{14}
Luz Ultravioleta	1×10^{-8} a 4×10^{-7}	7.5×10^{14} a 3×10^{16}
Rayos X	1×10^{-11} a 1×10^{-8}	3×10^{16} a 3×10^{19}
Rayos γ	$< 1 \times 10^{-11}$	$> 3 \times 10^{19}$

El diagrama ilustra el espectro electromagnético con dos ejes: Frecuencia (Hz) en el eje superior y Longitud de onda (m) en el eje inferior. El eje de frecuencia va de 10^0 a 10^{24} Hz, y el eje de longitud de onda va de 10^9 m a 10^{-15} m. Se marcan puntos clave como 1 THz, 1 GHz, 1 MHz, 1 kHz, 1 Hz, 1 fm, 1 pm, 1 nm, $1 \mu\text{m}$, 1 mm, 1 m, y 1 km. Las regiones del espectro están etiquetadas como Rayos gamma, Rayos X, Ultravioleta, Visible, Infrarrojo, Microondas, Banda de aficionados (que incluye TV FM y AM), y Ondas largas de radio.

A menudo se dice que la gama de frecuencias audibles para los humanos es de 20

!ph[]
 Tabla II. Espectro Acústico. Los valores de los rangos fueron adaptados de Vasileiadis *et al.* (2021). El diagrama ilustrativo es tomado de Maldovan (2013).

	Longitud de onda [orden]	Frecuencia [Hz]
Infrasonido	[km]	< 20
Sonido	[m]	20 a 20×10^3
Ultrasonido	[mm]	20×10^3 a 1×10^9
Hipersonido	[μm]	1×10^9 a 1×10^{12}
Calor	[nm]	$> 1 \times 10^{12}$

Frequency (Hz) 1 10¹ 10² 10³ 10⁴ 10⁵ 10⁶ 10⁷ 10⁸ 10⁹ 10¹⁰ 10¹¹ 10¹² 10¹³ 10¹⁴

1 Hz 1 kHz 1 MHz 1 GHz 1 THz

Infrasound Sound Ultrasound Hypersound Heat

Music Sonar Ultrasound imaging Thermal devices

Sonic diodes Acoustic cloaking Phononic crystals Optomechanics Thermal diodes Thermoelectrics Thermal cloaking Thermocrystals

Hz a 20 kHz, pero pocos individuos responden a señales en el límite superior. Las frecuencias inferiores a 20 Hz pertenecen al infrasonido y se perciben principalmente como un golpeteo en el pecho, mientras que las superiores a 20 kHz son ultrasónicas (Ginsberg, 2018a,b). La frecuencia de 1 GHz es el límite convencional entre ultrasonidos e hipersonidos (Vasileiadis *et al.*, 2021) así las frecuencias superiores a 1 THz (a temperatura ambiente) pertenecen al rango del calor, en donde los fonones tienen el papel de portadores de calor en las estructuras moduladas periódicamente.

El rango de los PnCs abarca todo el espectro acústico (Tabla II), siendo los PnCs macroscópicos destinados a la manipulación de ondas por debajo de GHz (infrasonido, sonido y ultrasonido). Mientras que los PnC de tamaño submicrométrico operan a frecuencias de GHz (hipersonidos).

En el extremo de los infrasonidos (las frecuencias más bajas) se encuentran las ondas

sísmicas de superficie, con longitudes de onda de kilómetros. Otras ondas sísmicas, como las ondas de masa de oído, también se encuentran en el régimen de los infrasonidos. Tras el descubrimiento de las ondas acústicas superficiales (SAWs³), durante muchos años sólo se estudiaron las ondas sísmicas. En el otro extremo, la región del hipersonido, es descrita en forma de vibraciones de red cuantificadas o fonones de superficie, que se extienden típicamente a 10^{13} Hz.

Las SAWs pueden ser generadas por IDTs⁴ llegando a tener longitudes de onda hasta 105 veces menores que las ondas electromagnéticas a frecuencias comparables. Por lo que han encontrado aplicación en diminutos dispositivos de procesamiento de señales, como líneas de retardo, resonadores, convolvers⁵ y filtros de alta frecuencia utilizados actualmente en los teléfonos móviles (Hess *et al.*, 2002). Por otra parte, los láseres también pueden generar SAWs, y han abierto la puerta a estudios sistemáticos de las propiedades elásticas lineales y no lineales de películas delgadas y materiales granulados, que no se limitan a los materiales piezoeléctricos (Bennis *et al.*, 2006). La dispersión que producen algunos tipos de materiales permite determinar sus propiedades elásticas mediante la excitación termo-elástica producida por láser. La fuerte excitación láser basada en mecanismos de evaporación ablativa o explosiva da acceso a ondas fuertemente no lineales, comportamiento de onda solitaria y formación de choques. Ejemplo de esto son los experimentos con bomba-sonda láser (o también conocida como técnica de rejilla transitoria) sobre sistemas de cristales granulares micrométricos (ver Fig. 6), que revelaron el papel fundamental de la unión entre partículas del mismo tipo y entre partículas y sustrato debido a la adhesión en la formación de bandas acústicas para las SAWs. En particular, incluso los cristales granulares 2D desordenados podrían

³Por sus siglas en inglés, *Surface Acoustic Waves*.

⁴Por sus siglas en inglés, *Inter-Digital Transducers*.

⁵Dispositivos que realizan procesamiento de una señal.

atenuar eficazmente las SAWs cerca de su frecuencia de resonancia, sirviendo como un metamaterial perfecto para la atenuación y el filtrado de ondas (Vasileiadis *et al.*, 2021). Este tipo de técnicas puede aportar nuevos conocimientos sobre la fractura impulsiva y el fallo de los materiales.

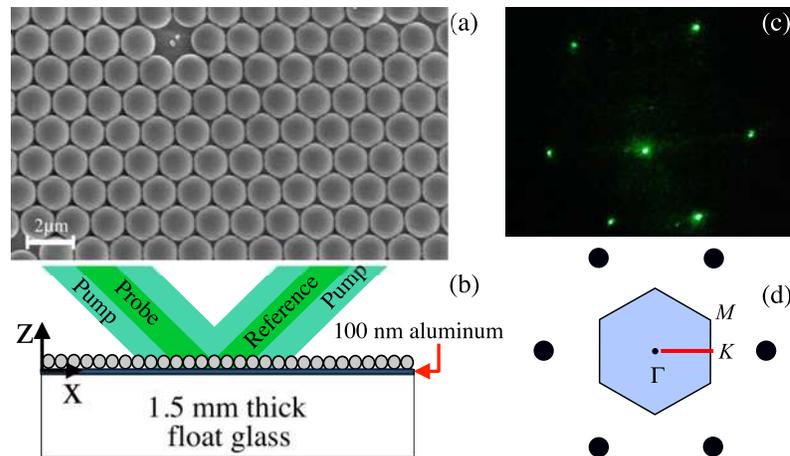


Figura 6. (a) Imagen de microscopio electrónico de barrido de la monocapa de microesferas de partículas de poliestireno de $1 \mu\text{m}$ de diámetro. (b) Esquema de la configuración experimental de la bomba-sonda para sondear las interacciones entre resonancias de contacto de partículas esféricas y SAWs en propagación. (c) Patrón de difracción producido por el haz láser de la sonda en reflexión. (d) Retícula recíproca y la primera zona de Brioullin del cristal microgranular. La línea roja muestra el rango del vector de onda utilizado en el experimento. Imagen tomada de Vega-Flick *et al.* (2017).

Guías de onda de cristal fonónico

Como anteriormente se mencionaba, una de las principales características de los PnCs, es el guiado de ondas, por lo que no es de sorprender que las Guías de Onda de Cristal Fonónico (PnCWs⁶) sean de gran interés científico para desarrollar nuevas aplicaciones tecnológicas, comúnmente usadas como medio para controlar la dispersión de ondas (Hussein *et al.*, 2014). Puesto que, igual que las piedras de un río pueden utilizarse

⁶Por sus siglas en inglés, Phononic Crystal Waveguides.

para canalizar el flujo de agua, los cristales fonónicos para frecuencias de las bandas prohibidas pueden utilizarse para canalizar el flujo acústico. Algunos ejemplos son:

- a) Diodos sónicos. Se ha fabricado un PnC unidimensional de 1 mm de espesor, que se comporta como un diodo para ultrasonidos (megahercios) (Yeh *et al.*, 2013).
- b) Capas de camuflaje (o “invisibilidad”) acústicas. Existen, tanto diseños bidimensionales para ultrasonidos, como tridimensionales para frecuencias audibles (aunque sólo para objetos de tamaño milimétrico) (Miyashita, 2005; Casadei and Bertoldi, 2014).
- c) Dispositivos optoacústicos. En el desarrollo de prototipos, se acoplan fonones y fotones. De ahí que, una cavidad óptica también puede ser considerada acústica, siendo que un modo óptico localizado de forma espacial se puede acoplar a uno acústico, también localizado. Usando un material con una estructura periódica con un espaciado de 150 nm, permite localizar fotones de 500 THz y fonones de 20 GHz (Maldovan, 2013).
- d) Rompeolas. Hu y Chan (Hu and Chan, 2005), de la Technology University de Hong-Kong, propusieron en 2005 usar estas estructuras para focalizar las olas hacia una planta con el fin de convertir la energía mecánica en energía eléctrica. Cuando las olas golpean un obstáculo, son parcialmente dispersadas en todas direcciones. Las interferencias que resultan de la dispersión múltiple en una red periódica de obstáculos podrían, por lo tanto, dar lugar a una reducción importante de la amplitud de las olas que alcanzan la orilla.

Junto con el desarrollo de tecnologías micro y nanoscópica, se pueden fabricar PnCs más pequeños utilizando procesos similares a los de la microelectrónica con la técnica de

Micrografía electrónica de barrido (SEM⁷), como se muestra en las Figs. 7(b) y (c). Para periodicidades de unas pocas micras o menos, aparecen bandgaps en las frecuencias en los pocos cientos de MHz hasta un rango de pocos GHz (exactamente dentro del campo de las comunicaciones inalámbricas). Por ende, las mayores expectativas de PnCs son referidas a su capacidad para guiar ondas acústicas altamente eficientes (sin pérdidas), mediante la remoción de dispersores a lo largo de la dirección de propagación.

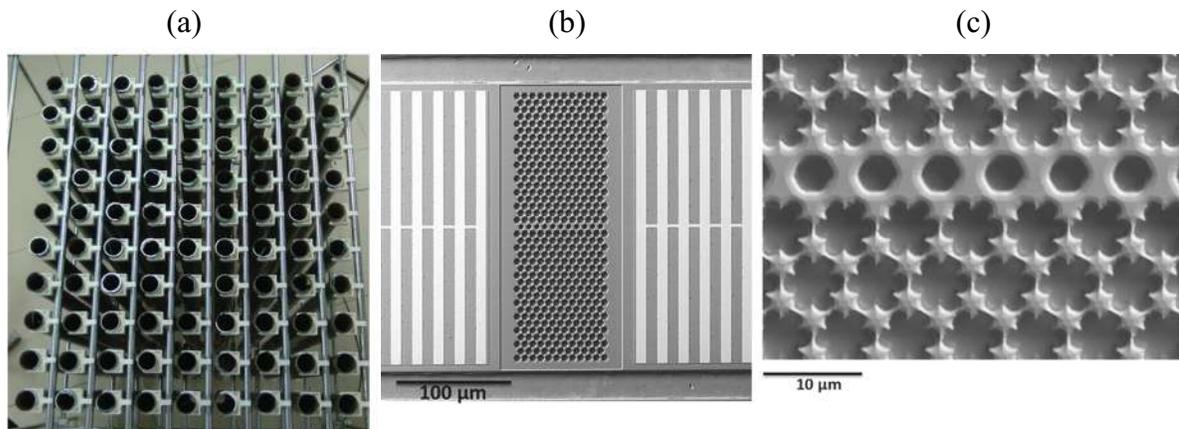


Figura 7. (a) Guía de ondas de cristal fonónico de tubos de Al (Jiang *et al.*, 2017). (b) SEM de una microguía de onda de SiC y (c) imagen SEM de los PnCs que componen parte de (b). (b) y (c) tomadas de Ghasemi Baboly *et al.* (2018).

Existe diversidad de trabajos publicados en torno a este tema, cuyo estudio se enfoca en sistemas de cristales fonónicos bidimensionales (2DPnC⁸). Los cuales están referidos a un plano trasversal sobre un arreglo periódico de cilindros (la Fig. 7 (a) es ejemplo de este tipo de sistemas finitos), cuya longitud se considera infinita (Khelif *et al.*, 2006; Pennec *et al.*, 2010; Hu and Chan, 2005). Un ejemplo conceptual de un cristal fonónico con estas características es representado por la escultura de Eusebio Sempere (1923-1985) localizada en un parque de la capital española, Madrid (ver Fig. 8).

⁷Por sus siglas en inglés, Scanning Electron Micrograph.

⁸Por sus siglas en inglés, Two-Dimensional Phononic Crystal.



Figura 8. Escultura acústica de Eusebio Sempere.

Siguiendo este punto de vista, las guías de ondas acústicas construidas en cristales artificiales es un tema que está vigente hoy en día, no sólo teórica sino también experimentalmente. Sobretudo en lo concerniente a estructuras bidimensionales, no sólo porque se construyen de forma relativamente más sencilla que los cristales fonónicos tridimensionales (3DPnC⁹), sino porque tienen propiedades útiles en la práctica (Miyashita, 2005). De ahí que, se tiene el potencial de impactar una variedad de escenarios, tales como la robótica, infraestructuras civiles y sistemas de defensa, entre otros (Casadei and Bertoldi, 2014).

Hoy en día, un factor de interés radica en que los modelos matemáticos de procesos reales requieren de modo innegable el uso de la computadora, dado que las soluciones analíticas son escasas o poco prácticas de obtener, en los casos de mayor interés. En dichas circunstancias, la solución numérica del modelo propuesto resulta imprescindible.

Dentro del marco teórico existente, varios métodos de cálculo teórico-numérico pudieran aplicarse para obtener la estructura de bandas, incluyéndose entre ellos:

- a) Método de expansión de ondas planas (PWE¹⁰), el cual es válido para estructuras

⁹Por sus siglas en inglés, Three-Dimensional Phononic Crystal.

¹⁰Por sus siglas en inglés, Plane-Wave Expansion.

periódicas de tamaño infinito (Miyashita, 2005).

- b) Método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD¹¹), aplicable a estructuras arbitrarias de tamaño finito (Miyashita, 2005).
- c) Método de la matriz de transferencia (TMM¹²) (Campa and Camporeale, 2010).
- d) Método integral (Pérez-Aguilar *et al.*, 2013a).

Todos estos métodos tienen ventajas y desventajas muy particulares en función de la geometría del sistema que se pretende analizar, ofreciéndose diversas opciones en herramientas de ingeniería, diseño, análisis y simulación de cualquier problema físico. Ante la incertidumbre ya existente sobre qué modelo deberá elegirse finalmente; además la respuesta indicada dependerá desde luego de la información específica que se desea obtener y por ende, predecir las consecuencias derivadas del arquetipo establecido. En este trabajo de investigación se ha utilizado el último listado debido a la experiencia con este.

¹¹Por sus siglas en inglés, Finite-Diference Time-Domain.

¹²Por sus siglas en inglés, Transfer Matrix Method.

Capítulo III

CAOS CLÁSICO

La palabra caos y el adjetivo caótico se usan para describir un sistema que aparentemente tiene un comportamiento aleatorio. Un claro ejemplo de esto es el llamado “efecto mariposa”, que es tal vez la analogía más divulgada para dar a entender que en sistemas dinámicos las pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden conducir a resultados inesperados. Esto involucra una de las preguntas fundamentales en la física, ¿Cuán precisas son nuestras teorías al predecir el comportamiento de un sistema a largo plazo? Así, no es de sorprender que el comportamiento caótico en sistemas físicos sea en la actualidad tema de sumo interés científico. En este capítulo se explican términos básicos presentes al hablar de sistemas dinámicos y de la teoría del caos, así como el desarrollo histórico de esta teoría. Además, se enuncian algunas formas para cuantificar el fenómeno del caos en los sistemas dinámicos.

III.1. Desarrollo histórico

Las leyes de movimiento y de gravitación universal de I. Newton (1642-1727) combinadas con las leyes de J. Kepler (1571-1630) resolvían problemas como el de las órbitas de la Tierra alrededor del Sol como un sistema de dos cuerpos. Newton resuelve el

problema al reducir el movimiento de los dos cuerpos al movimiento de cada uno de ellos alrededor del llamado centro de masas, que es un punto al que se le asocia la masa total del sistema. Sin embargo, se da cuenta de que no era posible solucionar de forma analítica el sistema para tres cuerpos, resultando imposible tratar con un problema similar para nueve cuerpos.

Uno de los mayores progresos de esta teoría fue la solución de problemas matemáticos como el anterior mencionado, siendo el matemático francés H. Poincaré (1854-1912) el primero en vislumbrar la posibilidad de caos. En el sentido de que un sistema determinista exhibe un comportamiento aperiódico que depende sensiblemente de las condiciones iniciales, lo que hace imposible la predicción a largo plazo. Esto cambió el principal enfoque filosófico determinista de la ciencia que se tenía hasta antes del siglo XIX. Precisamente Poincaré publicó su magna obra “Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste” en tres volúmenes donde aparecen numerosos conceptos nuevos que han dado lugar al desarrollo de la teoría de sistemas dinámicos, como acostumbraban a llamarla los matemáticos o dinámica no lineal; término más usado por los físicos (Fernández-Sanjuán, 2016). Poincaré es así, considerado como uno de los padres de la teoría del caos, ya que muchas ideas fundamentales de la teoría están contenidas en este libro. Muchos otros matemáticos y físicos contribuyeron al desarrollo de estas ideas, entre ellos podemos destacar a Alexander M. Lyapunov (1857-1918), de quien hemos heredado conceptos tales como el de estabilidad de los sistemas dinámicos y también los útiles exponentes de Lyapunov, que nos sirven para caracterizar cuando un sistema dinámico dado es o no caótico (estos conceptos se describen más adelante). Siendo también mérito de mención Edward Lorenz (1917–2008), quien desarrolló un modelo

de tres ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual está dado por

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \quad (2a)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y, \quad (2b)$$

y

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z, \quad (2c)$$

donde σ es el número de Prandtl, ρ el número de Rayleigh y β es un parámetro que por lo regular vale $8/3$ (Strogatz, 2001). Con estas ecuaciones se describe el movimiento de un fluido bajo la acción de un gradiente térmico en un sistema simplista. Lorenz descubrió que las soluciones a las Ecs. (2), nunca establecen un equilibrio, sino al contrario oscilan de una manera aperiódica irregular y cambiando ligeramente las condiciones iniciales en sus simulaciones, los comportamientos resultantes pronto llegaron a ser totalmente diferentes (llamado efecto mariposa). La implicación fue que las soluciones resultaron impredecibles y en caso de tener diminutos errores en la medición inicial del estado de la atmósfera, los errores crecen rápidamente, llevando eventualmente a predicciones erróneas. Tales experimentos condujeron a Lorenz en 1963 al descubrimiento del movimiento caótico al que denominó como “atractor extraño” como se observa en la Fig. 9 (Strogatz, 2001).

Aunque el caos se apoderó de la atención durante muchos años, también hubo otros grandes avances en la dinámica en los años 70. Mandelbrot (1924-2010) codificó y popularizó fractales como el conjunto que lleva su mismo nombre, uno de ellos se muestra en la Fig. 10. Mandelbrot mostró cómo podrían ser aplicados en una variedad de temas como por ejemplo, el análisis de sistemas biológicos oscilantes como el ritmo del corazón al palpar (Strogatz, 2001).

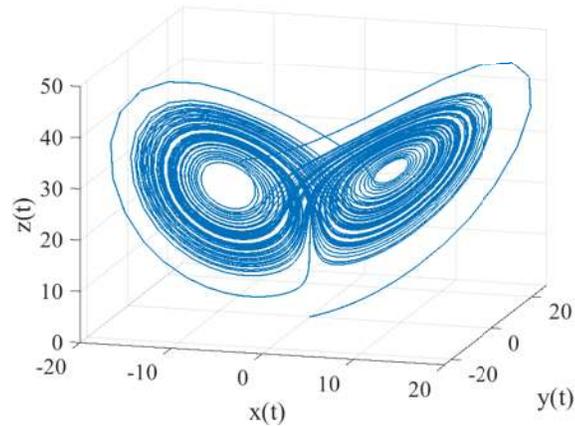


Figura 9. (Simulación MATLAB R2019b) Atractor extraño del sistema de Lorenz.

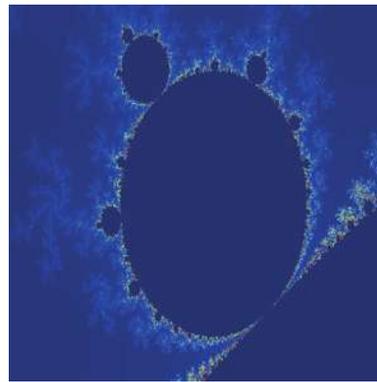


Figura 10. (Simulación MATLAB R2019b) Conjunto fractal de Mandelbrot.

III.2. Sistemas Dinámicos

La dinámica es la ciencia que estudia la variación en el tiempo de diferentes magnitudes, es decir su movimiento. Básicamente existen tres tipos de movimientos: los estacionarios y de equilibrio; los periódicos y cuasi periódicos; y los caóticos, siendo este último en los que la predicción del movimiento en un tiempo lo suficientemente grande es casi imposible (Sprott, 2010). En general, para saber cuál de estos tres comportamientos tiene un sistema se necesita conocer las ecuaciones de evolución en el tiempo del sistema, los valores de los parámetros que describen el sistema y las condiciones iniciales. Los sistemas dinámicos tienen diferente comportamiento después de un lapso de tiempo.

Estos se clasifican en tres tipos:

1. Estables, ocurre cuando dos soluciones que tienen condiciones iniciales muy cercanas siguen siendo casi igual de cercanas a lo largo de un tiempo. Así, un sistema estable después de un transcurso de tiempo suficientemente largo tiende a un punto, u órbita, según su dirección (atractor o sumidero).
2. Inestables, cuando dos soluciones con condiciones iniciales que difieren por muy poco acaban divergiendo. Así un sistema inestable no va hacia algún punto.
3. Caóticos, se presenta cuando un sistema es tanto estable como inestable; es decir dos soluciones que inicialmente están a una distancia finita se mantienen así después de un lapso de tiempo y se aproximan a un atractor. Mientras que algunas otras soluciones que son vecinas inicialmente divergen de manera exponencial con el tiempo, aunque suelen ser cualitativamente similares y a pesar que no tienden a un atractor, el sistema permanece en una zona de su espacio de estados.

III.2.1. Tipos de sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos con alguno de los tres tipos de movimientos previamente mencionados suelen clasificarse en discretos y continuos en función de si el tiempo se mide de modo discreto o continuo:

- **Sistemas dinámicos continuos.** Descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) y parciales (EDPs). Un sistema dinámico continuo es descrito por

EDOs que, de manera general, están dadas por:

$$\frac{d^N u_1}{dx^N} = f_1 \left(x; u_i, \frac{du_i}{dx}, \dots, \frac{d^{N-1}u_i}{dx^{N-1}} \right), \quad (3a)$$

...

$$\frac{d^N u_{M-1}}{dx^N} = f_{M-1} \left(x; u_i, \frac{du_i}{dx}, \dots, \frac{d^{N-1}u_i}{dx^{N-1}} \right), \quad (3b)$$

y

$$\frac{d^N u_M}{dx^N} = f_M \left(x; u_i, \frac{du_i}{dx}, \dots, \frac{d^{N-1}u_i}{dx^{N-1}} \right), \quad (3c)$$

donde $u_i = u_i(x)$, con $i \in \{1, 2, \dots, M\}$, es la i -ésima componente del **vector solución** $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_M) = \mathbf{u}(t)$. El cual hace variar la dinámica del sistema en el tiempo, N es el orden de las M ecuaciones y $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_M)$ se puede interpretar como un **vector de campo**. Además una EDO de orden N se puede descomponer en N EDOs de orden 1, por lo que, con un abuso de notación reescribiremos las Ecs. (3) como un sistema de $M \times N$ ecuaciones de primer orden para la variable independiente $x = t$:

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t; u_i),$$

...

$$(4a)$$

$$\frac{du_{(M \times N)-1}}{dt} = f_{(M \times N)-1}(t; u_i) \quad (4b)$$

y

$$\frac{du_{M \times N}}{dt} = f_{(M \times N)}(t; u_i). \quad (4c)$$

Por otro lado, el sistema dinámico continuo descrito por EDPs de manera general está dado por

$$\frac{\partial^N u_1}{\partial x_1^N} = f_1 \left(x_1, \dots, x_n; u_i, \frac{\partial^{l+m+\dots+p} u_i}{\partial x_1^l \partial x_2^m \dots \partial x_n^p} \right), \quad (5a)$$

...

$$\frac{\partial^N u_{M-1}}{\partial x_1^N} = f_{M-1} \left(x_1, \dots, x_n; u_i, \frac{\partial^{l+m+\dots+p} u_i}{\partial x_1^l \partial x_2^m \dots \partial x_n^p} \right) \quad (5b)$$

y

$$\frac{\partial^N u_M}{\partial x_1^N} = f_{M-1} \left(x_1, \dots, x_n; u_i, \frac{\partial^{l+m+\dots+p} u_i}{\partial x_1^l \partial x_2^m \dots \partial x_n^p} \right), \quad (5c)$$

donde $u_i = u_i(x_1 = t, x_2, \dots, x_n)$, son funciones de las n variables independientes, siendo $i \in \{1, 2, \dots, M\}$, u_i es la i -ésima componente del vector solución $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_M) = \mathbf{u}(x_1 = t, x_2, \dots, x_n)$, tal que las derivadas parciales de orden l, m, \dots, p deben satisfacer cada una ser menor a N y su suma $l + m + \dots + p = N$. El orden de las M ecuaciones es N si la derivada parcial de mayor orden es ésta y $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_M)$ se puede interpretar como un vector de campo con n variables independientes. Además en las Ecs. (5) debe considerarse que las derivadas parciales representan todas las combinaciones posibles incluyendo las derivadas parciales cruzadas.

- **Sistemas dinámicos discretos.** Este tipo de sistemas están descritos por los denominados mapas iterados con la ecuación general dada por

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

donde el índice k señala una iteración que está ligada al modo discreto de medir el tiempo. La Ec. (6) puede interpretarse de la siguiente forma: si el sistema adopta en un instante k un estado descrito a través de un cierto elemento x_k , entonces en el instante $k + 1$ el estado del sistema será x_{k+1} .

Además se dice que un sistema dinámico es **autónomo** si las ecuaciones que describen al sistema, como en las Ecs. (4) ó (5), no dependen en forma explícita del tiempo, en caso contrario será un sistema dinámico **no autónomo**. En el sistema autónomo no se tiene influencia externa que estimule el comportamiento del sistema, mientras que los sistemas no autónomos son afectados por factores externos. Otro concepto a tener en cuenta cuando se habla de sistemas dinámicos es el de **espacio**

fase (o espacio de estados), cuya dimensión es determinada por el número de variables necesarias para identificar el estado dinámico del sistema. El estado momentáneo del sistema corresponde a un **vector de estado** que no es más que un punto **P** de dicho espacio; es decir cada punto del espacio fase es una condición inicial diferente, mientras que una secuencia de dichos estados define una **trayectoria** $\tau(t)$ en el espacio de las fases. Si tomamos un conjunto de trayectorias las cuales inicialmente son cercanas entre ellas y permanecen cercanas después de un lapso de tiempo largo incluso si éstas se perturban, entonces el conjunto de éstas es llamado un **atractor**. Estas son formas geométricas, en el espacio de las fases, que caracterizan el comportamiento a largo plazo de un sistema. Además también se tienen los **puntos fijos** (también llamados punto de equilibrio, puntos críticos o puntos singulares), que representan soluciones de equilibrio. Es decir, los puntos de estabilidad donde caen las trayectorias después de un lapso de tiempo (nótese que la idea es que las trayectorias son atraídas a puntos de equilibrio).

Algebraicamente esto sería igualar a cero las derivadas temporales de las Ecs. (4) ó (5), dependiendo si el sistema dinámico es descrito por EDOs o EDPs. Finalmente se tienen también los **ciclos límite**, que son trayectorias cerradas y aisladas del espacio fase que representan un comportamiento cíclico o periódico del sistema dinámico. Decimos que estas trayectorias son aisladas en el sentido que atraen o repelen a trayectorias cercanas a ésta.

III.2.2. Linealidad y no Linealidad

La **linealidad** en un sistema lleva implícito asumir propiedades tales como: *proporcionalidad*; es decir, pequeñas causas provocan pequeños efectos; *aditividad*: el todo es igual a la suma de las partes; *replicación*: la misma acción en las mismas condiciones producen el mismo resultado y relaciones claras entre causa y efecto (basta conocer un

poco acerca del comportamiento de un sistema para conocerlo por completo). Usamos el término “no lineal” para contraponerlo lógicamente al término “lineal”, ya que la aproximación lineal es la que tradicionalmente se ha usado en la ciencia debido a su sencillez matemática dada de manera general por el principio de superposición: en un sistema lineal el efecto de la actuación conjunta de dos causas distintas consiste sólo en la superposición de los efectos que cada una de las causas hubiera generado por sí misma. Es decir si $\mathbf{u}_1(t)$ y $\mathbf{u}_2(t)$ son soluciones linealmente independientes en el sistema dinámico, esto es que $\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 = 0$, se cumple sólo para $\alpha = 0 = \beta$ en cualquier tiempo t , entonces también es solución la combinación lineal $\mathbf{u}_3 = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$, donde a y b son números reales.

La **no linealidad** no conduce a soluciones múltiples; es decir, que \mathbf{u} sea solución de un sistema no lineal no implica que un múltiplo de \mathbf{u} lo sea. Cuando existen relaciones de no linealidad en el sistema, puede darse un comportamiento caótico (no todos los sistemas dinámicos no lineales son caóticos) que presenta las siguientes propiedades:

- No hay proporcionalidad: pequeñas causas pueden provocar grandes efectos.
- No hay aditividad: el todo es mayor que la suma de las partes.
- Dependencia sensible a las condiciones iniciales: lo que puede llevar a que nunca se pueda reproducir de modo exacto el mismo experimento.
- La no linealidad puede generar inestabilidades, discontinuidades e imprevisibilidad, lo que hace necesario la flexibilidad, la adaptabilidad, el cambio dinámico, la innovación y la capacidad de reacción.

III.2.3. Caos

En base a conceptos ya previamente mencionados se tiene una noción de lo que se refiere al decir que un sistema dinámico tiene un comportamiento caótico. Aunque no existe una definición matemática universalmente aceptada de caos, se puede dar una grata definición de lo que implica que un sistema sea caótico. Como ya se ha mencionado antes, la no linealidad de las ecuaciones puede conducir a un comportamiento caótico en el sistema, ya que todo sistema con comportamiento caótico es descrito por ecuaciones no lineales. Sin embargo, no necesariamente se tendrá que un sistema descrito por ecuaciones no lineales sea caótico. Para que podamos decir que esto último ocurre se debe cumplir los siguientes requisitos (Hilborn, 2004):

1. Movimiento oscilante. Las trayectorias no tienden a un punto fijo, órbita periódica o cuasiperiódica cuando el tiempo $t \rightarrow \infty$, debido a la oscilación. Aunque también se tienen casos en que las trayectorias van a puntos fijos como en los ciclos límite.
2. Determinismo. El sistema no depende del azar ya que el comportamiento que presenta no cambia, si se repite varias veces con las mismas condiciones iniciales y el azar tampoco está involucrado en tiempos posteriores. El comportamiento irregular surge de la no linealidad y además puede ser modelado por una serie de ecuaciones diferenciales o algoritmos bien definidos, que se pueden resolver matemáticamente e incluso algunas veces no resultan ser muy complicados.
3. Sensibilidad a las condiciones iniciales. Las trayectorias que en un inicio son bastante cercanas en un lapso de tiempo mayor se separan exponencialmente. Es decir, condiciones iniciales muy similares acaban dando lugar a comportamientos totalmente diferentes después de un tiempo suficientemente largo.

III.3. Cuantificación del Caos

En la naturaleza, los sistemas de ecuaciones lineales idealizados son poco comunes. Esto se debe a que el comportamiento de las soluciones suelen ser impredecibles, complejas y no cumplen el principio de superposición; es decir, son no lineales y muchas veces son caóticos. Sin embargo, distinguir si el sistema tiene comportamiento caótico o hay “ruido” ocasionado por factores externos en el sistema no es tarea fácil. Para ello se debe hacer una identificación cuantitativa calculando parámetros que determinen si el sistema presenta caos. Los sistemas caóticos regularmente no tienen una solución exacta y en estos casos se recurre a métodos numéricos con lo que se puede hacer una aproximación, sin perder las soluciones propias del sistema. A continuación algunos de los parámetros más conocidos se describen brevemente.

III.3.1. Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Liapunov son un indicador básico del caos, ya que miden la tasa de separación exponencial de las trayectorias inicialmente próximas en el espacio de fases; donde el caos se caracteriza por al menos un exponente positivo. Esto es debido a la “dependencia sensible de las condiciones iniciales”, lo que limita la previsibilidad de la evolución temporal del sistema físico. Tómese por ejemplo el caso del espacio fase de una dimensión y el sistema dado por

$$f(x) = \frac{dx}{dt}. \quad (7)$$

Sean $x_0(t)$ y $x(t)$ un par de trayectorias que surgen de un par de puntos iniciales cercanos del espacio fase x_0 y x , respectivamente. Entonces la distancia $s(t) = x(t) - x_0(t)$ crece o se contrae exponencialmente en el tiempo. Además, expandiendo hasta el primer orden de su serie de Taylor la función $f(x)$ en la Ec. (7), se tiene que el cambio en la

distancia con la evolución del tiempo está dado por

$$\dot{s}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0). \quad (8)$$

Como esperamos que s cambie exponencialmente en el tiempo, introducimos el exponente λ de Lyapunov como la cantidad que satisface

$$s(t) = s(t=0)e^{\lambda t}. \quad (9)$$

Al comparar las Ecs. (8) y (9) es sencillo notar que el exponente de Lyapunov está dado por la expresión

$$\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0}. \quad (10)$$

Similarmente se puede hallar que para un sistema discreto del caso unidimensional, el exponente de Lyapunov está dado por (Strogatz, 2001)

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \right| \right\}, \quad (11)$$

donde n es el número de iteraciones. En ambos casos ya sea un sistema dinámico continuo o discreto, el exponente de Lyapunov es negativo para un atractor de punto fijo, cero para un ciclo límite o un atractor toroidal y positivo para un atractor extraño. Como ejemplo de lo anterior tenemos el mapeo poblacional, véase la Fig. 11 (Strogatz, 2001; Hilborn, 2004).

La forma de calcular los exponentes de Lyapunov en las Ecs. (10) y (11) nos permite conocer el mayor de los diferentes exponentes de un sistema, ya que hay tantos exponentes de Lyapunov como la dimensión del sistema. Si la dimensión es mayor a uno se puede entender que los exponentes de Lyapunov como la tasa de expansión o contracción de trayectorias para cada una de las direcciones en el espacio fase. Es decir, cada exponente mide el grado de divergencia del atractor en una dirección diferente. De igual manera es posible obtener los exponentes de Liapunov a partir de una serie

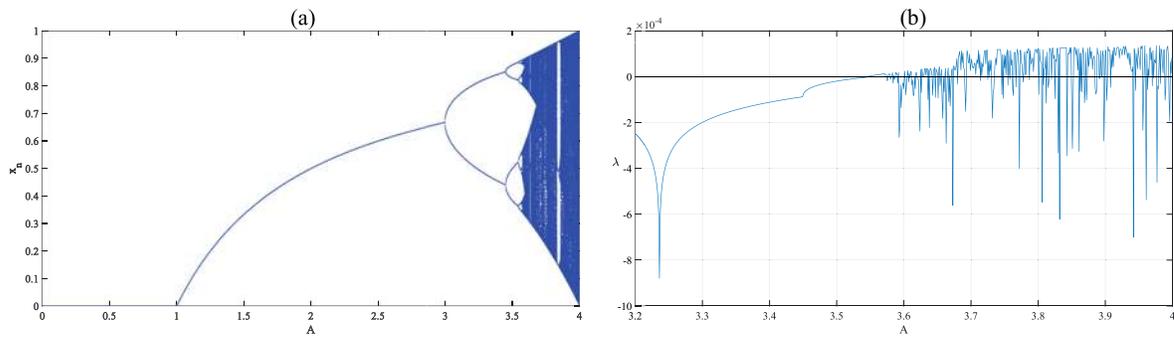


Figura 11. (Simulación MATLAB R2019b) (a) Diagrama de bifurcaciones del mapeo de poblaciones $x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$. (b) Exponentes de Lyapunov del mapeo de poblaciones.

temporal. El problema de este tipo de algoritmos que aproximan la matriz Jacobiana local es la aparición de exponentes espurios. Sin embargo, se han determinado los exponentes de Liapunov a partir de una serie temporal de turbulencia acústica, descubriendo que un atractor caótico de baja dimensión con un exponente mayor positivo rige los movimientos en el espacio de fases en la región de ruido de banda ancha (Holzfuss and Lauterborn, 1989).

III.3.2. Mapas de Poincaré

Poincaré inventó una técnica matemática muy útil que permite reducir el problema de obtener información sobre la naturaleza de las soluciones de sistemas dinámicos a uno más simple con menos dimensiones. Se trata de cortar el atractor m -dimensional de un sistema descrito por las Ecs. (4) con una “superficie” $(m - 1)$ -dimensional. Esta geometría simplificada, sin embargo, contiene la información “esencial” sobre la periodicidad, la cuasiperiodicidad, bifurcaciones y caos de la dinámica del sistema. La Fig. 12 muestra la superficie $(m - 1)$ -dimensional denotada por S . Se requiere que S sea transversal al flujo; es decir, todas las trayectorias que comienzan en S fluyen a través de ella, no paralelas a ella.

El determinismo de las soluciones de las ecuaciones diferenciales que describen la

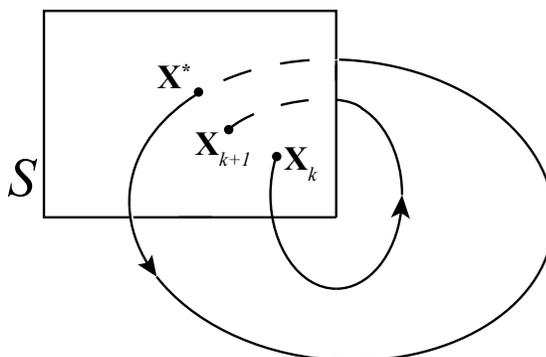


Figura 12. Sección de Poincaré para trayectorias en un espacio fase m -dimensional.

dinámica del sistema implican la existencia de una función que relacione un punto de intersección \mathbf{x}_i de trayectoria con el siguiente punto de intersección \mathbf{x}_{i+1} . La representación de estos puntos constituye lo que se ha denominado como **mapa de Poincaré**. El mapa de Poincaré P es un mapeo de S a sí mismo, el cual se obtiene siguiendo trayectorias de una intersección con S con la siguiente. En general, el mapa de Poincaré es descrito por

$$\mathbf{x}_{i+1} = P(\mathbf{x}_i). \quad (12)$$

La función P no depende sólo de las ecuaciones originales que describen el sistema, sino también de la elección de la sección de Poincaré. Una forma directa de evaluar el resultado de una sección de Poincaré es evaluando el aspecto de ésta, que si es complejo es indicativo de que puede ser caos. Suponiendo que \mathbf{x}^* es un punto fijo de la Ec. (12), esto es, se cumple que $\mathbf{x}^* = P(\mathbf{x}^*)$. Entonces, una trayectoria que empieza en \mathbf{x}^* vuelve a \mathbf{x}^* después de algún tiempo t , y por lo tanto es una órbita cerrada para el sistema original. Además, al observar el comportamiento de P cerca de este punto fijo, podemos determinar la estabilidad de la órbita cerrada. Así, el mapa de Poincaré convierte los problemas de las órbitas cerradas en problemas de los puntos fijos de un mapeo, aunque no siempre es posible encontrar una fórmula para P .

III.3.3. Función de Autocorrelación

La **correlación** se denota por C_m , donde m es un valor proporcional al tiempo de predicción o estudio del comportamiento de una función. La función de correlación analiza la posible relación de los valores de una función o una serie temporal respecto de los anteriores de esa misma serie, con m intervalos de tiempo antes. Cuando se pretende usar la función en el análisis del comportamiento de un sistema del que se conocen series temporales de datos se procede a representar C_m para valores de $m = 1, 2, \dots, n$, siendo:

$$C_m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-m} (x_j - \bar{x})(x_{j+m} - \bar{x}), \quad (13)$$

donde, n es el número de datos que se manejan, \bar{x} es el promedio de los datos y x_j es el dato j -ésimo. Estudios como los de Sugihara and May (1990), sugieren que una función de correlación que decrece de prisa con los intervalos de tiempo m indica caos, mientras que una que no lo hace o lo hace y vuelve a aumentar, indica regularidad. La **función de autocorrelación** o ACF¹ se deriva de la Ec. (13) y responde a la pregunta de qué similitud hay entre el comportamiento de una serie de tiempo en cierto momento y su comportamiento en cualquier momento posterior. Ésta se calcula mediante

$$A_m(t) = \frac{C_m}{C_0}, \quad (14)$$

siendo C_m y C_0 la correlación descrita por la Ec. (13) y el coeficiente de correlación es la **desviación estándar** σ de la función de autocorrelación y refleja el nivel de caos de una serie temporal; ya que es una medida que se usa para cuantificar la dispersión de un conjunto de datos numéricos. Así mientras la desviación estándar sea más cercana a cero, los datos se encuentran menos dispersos. Es decir, la mayor parte de los datos de una muestra tienden a estar agrupados cerca de su media; mientras que un coeficiente de autocorrelación alto indica que los datos se extienden sobre un rango de valores más

¹Por sus siglas en inglés, *Autocorrelation Function*.

amplio (Doya *et al.*, 2002; Montenegro-García, 1989). Esta técnica será utilizada en el capítulo de resultados para nuestro sistema de estudio.

III.4. Sistema de billares

En la física clásica un gas en un recipiente cerrado puede considerarse como muchísimas moléculas que se mueven y chocan entre sí. Si no hay intercambio de energía con el exterior esta situación puede modelarse como un sistema conservativo. Sin embargo, el diagrama de fases, que incluye las posiciones y velocidades de todas las moléculas, dista mucho de ser simple. Este sistema, así como muchos otros ejemplos interesantes de sistemas dinámicos de problemas dentro de la mecánica clásica, cuántica, estadística, acústica y óptica (especialmente aquellos en que la interacción entre partículas involucra colisiones elásticas) pueden ser reducidos a sistemas de billares. El hablar de sistemas de billares significará hablar de partículas puntuales moviéndose sobre alguna región (la “mesa de billar”) que puede o no contener obstáculos convexos suaves y sufriendo colisiones elásticas contra ellos. Centramos nuestra atención en los billares periódicos, los cuales tienen la característica de que, las partículas al colisionar con el límite de la mesa desaparecen para reaparecer en el lado opuesto. Además, algunas clases de billares presentan un destacable comportamiento caótico. Con esto en consideración, realza la importancia del estudio de sistemas de billares en el que los fotones son las partículas en interacción. Describir trayectorias de las partículas requiere un análisis matemático más profundo, como el que puede ser consultado en el trabajo de Fraczek and Ulcigrai (2014).

El obtener resultados de comportamientos caóticos en estos sistemas es subjetivamente sencillo. Sistemas de billares con geometrías similares a la que se abordarán en este trabajo ya han sido estudiadas por diversos autores, quienes utilizan las propiedades

estadísticas del sistema para concluir efectivamente la presencia del fenómeno de caos. Las propiedades estadísticas de una clase particular de billares fueron estudiadas por Sinai, quien es uno de los precursores más destacados en esta área de estudio (Sinai, 1970).

III.4.1. Sistema de billares con paredes sinusoidales

En el trabajo de Herrera-González *et al.* (2011) se consideró una PCW² formada por paredes onduladas periódicas como el diagrama de la Fig. 13(a). Este trabajo toma las distintas trayectorias para partículas puntuales, de donde los autores obtienen mapas de Poincaré. En la misma Fig. 13 se tienen mapas de Poincaré obtenidos por Herrera-González *et al.* (2011) para los parámetros $A = 0.001$, que es la amplitud de las paredes y diferencias de fase (b) $\Delta\phi = \frac{1}{2}$ y (c) $\Delta\phi = \frac{1}{3}$. Además en las Figs. 13(b) y 13(c) se tiene que el periodo $l = 1$ y la separación entre las paredes es $2B = 0.1$. Mientras que en la Figs. 13(d) se tiene que $A = 0.008$, $\Delta\phi = \frac{1}{3}$, $l = 1$ y $2B = 2.5$ (en u.a.). Los autores concluyen que bajo ciertos parámetros de las amplitudes y fase de las paredes sinusoidales, el sistema presenta un comportamiento caótico, ya que en el caso de la guía estrecha, desaparecen las trayectorias elípticas. Un análisis similar es tratado en Luna-Acosta *et al.* (1996a) que obtiene mapas de Poincaré similares.

En ambos trabajos previamente mencionados se considera un sistema clásico. Sin embargo, un sistema cuántico análogo es considerado por Luna-Acosta *et al.* (1996b), en el que una de las paredes es plana y cuyo análisis es semejante a lo que se pretende realizar en este trabajo. Las gráficas de Husimi³ de Luna-Acosta *et al.* (1996b) muestran patrones desordenados con el aumento de la energía al considerar el vector de Bloch

²Por sus siglas en inglés, *Photonic Cristal Waveguide*.

³Una distribución de cuasiprobabilidad usada para representar la distribución del espacio de fase de un estado cuántico.

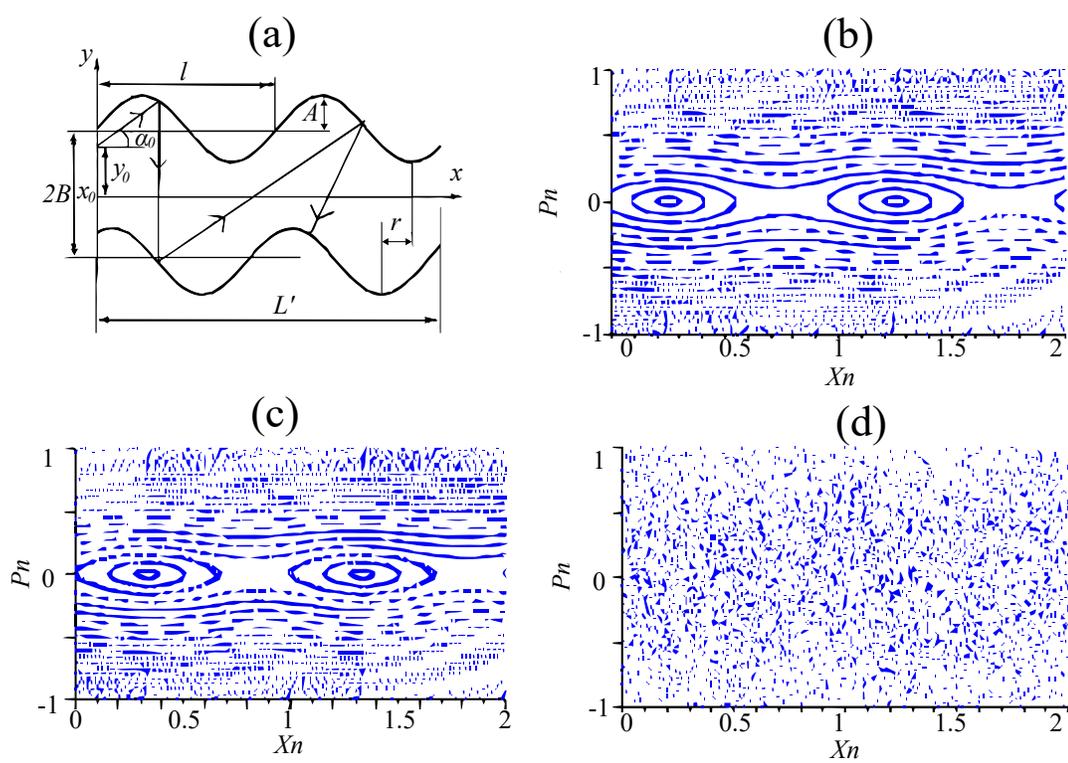


Figura 13. Diagrama del sistema en (a). Mapas de Poincaré en (b), (c) y (d), obtenidos por Herrera-González *et al.* (2011) para distintos parámetros del sistema.

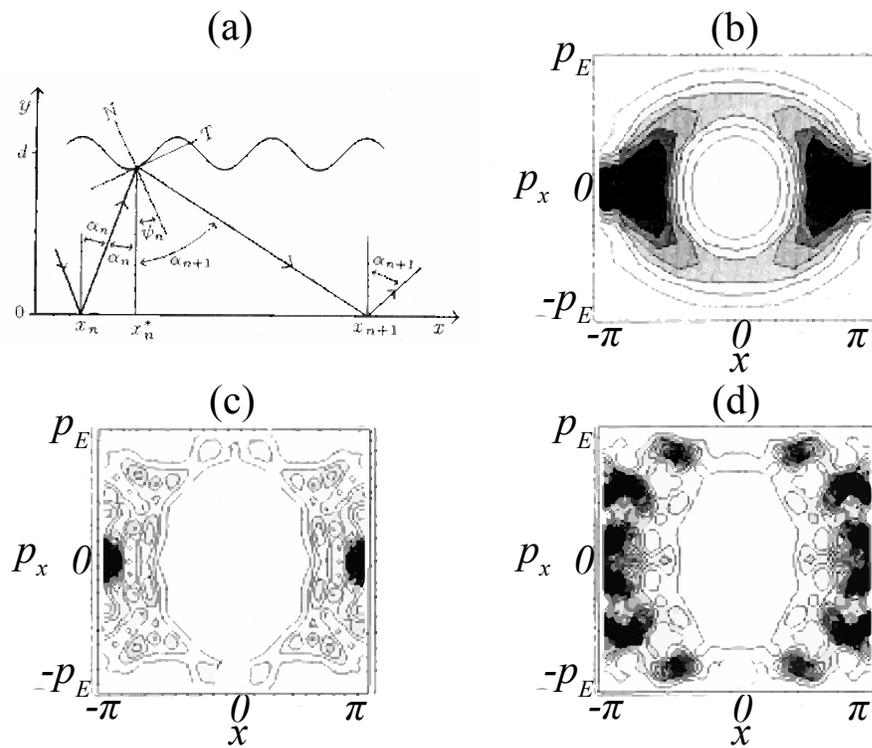


Figura 14. (a) Diagrama de la mesa de billar. Las gráficas de Husimi en (b), (c) y (d), son obtenidas por Luna-Acosta *et al.* (1996b) para diferentes parámetros del sistema.

$K = 0$. En la Fig. 14(a) (obtenida del mismo artículo) se muestra el diagrama de la mesa de billar. En la misma Fig. 14 se muestran las gráficas de Husimi para los parámetros $d = \frac{2\pi}{10}$, $a = \frac{2\pi}{30}$ y nivel de energía 5 para (b) y $d = \frac{2\pi}{10}$, $a = \frac{2\pi}{25}$ en (c) y (d) para niveles de energía 1001 y 1005, respectivamente (en u.a.). El sistema presenta patrones desordenados en el espacio de fases similarmente de su análogo sistema clásico.

III.4.2. Billar plano con inclusión circular

En la óptica geométrica es bien sabido que cuando se coloca una fuente luminosa delante de un espejo plano, la iluminación total es idéntica a la que se obtendría retirando el espejo y colocando una segunda fuente de luz en un lugar simétrico al original con respecto al plano del espejo. Aunque esta solución es una aproximación de las ecuaciones gobernantes, el resultado es bastante bueno. Al igual que en muchos fenómenos ópticos, en la acústica se da solución a la ecuación de Helmholtz. Esto ha llevado a los científicos de la rama de la acústica a adoptar los principios de la óptica geométrica, siendo así la **acústica geométrica** una potente herramienta que consiste en representar el campo sonoro mediante rayos sonoros directos, reflejados y refractados. Asumimos que, análogo al caso de rayos de luz (Suppes and Acacia-de Barros, 1996) los fonones:

1. Son tratados como partículas que interaccionan sin pérdida de energía.
2. Son emitidos por fuentes que oscilan armónicamente.
3. Tienen trayectorias bien definidas; es decir, los consideramos como “rayos sonoros”.

En otras palabras, consideramos fonones como las partículas que transportan la energía del calor debida a una vibración incidiendo sobre alguna interfaz. Descartamos el concepto de elasticidad para choques elásticos, por una reflexión que tiene lugar sin pérdidas de energía y se asume que la interfaz es perfectamente suave o rígida.

Considerando lo mencionado hasta ahora, el sistema clásico análogo al presentado en este proyecto de tesis consta de un sistema de billar periódico con un obstáculo circular en medio, como se muestra en la Fig. 15.

En este sentido las trayectorias de los fonones pueden moverse de manera similar a bolas de billar en una mesa de billar con características similares a las planteadas en

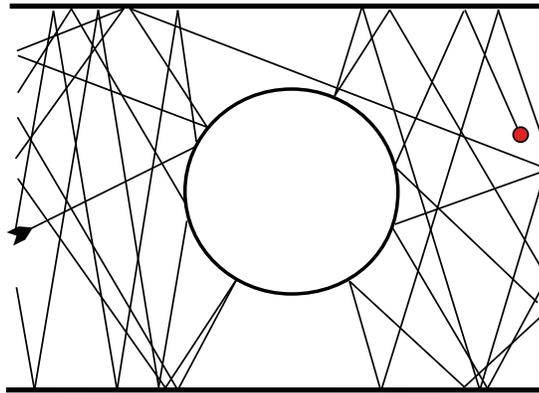


Figura 15. Diagrama de movimiento de fonones en billar periódico con un obstáculo convexo tomado de Suppes and Acacia-de Barros (1996).

el sistema de la Fig. 15. Puesto que este tipo de sistemas es tema de interés, nuestro trabajo de tesis toma este arreglo del sistema para estudio en un problema acústico que será desarrollado en los siguientes capítulos; quedando libre para un trabajo futuro, el estudio del fenómeno del caos clásico en el sistema de billares con la misma geometría.

Capítulo IV

EL MÉTODO DE LA ECUACIÓN INTEGRAL

En este capítulo se describe la técnica numérica usada para modelar la interacción del campo de presiones acústico con un sistema de cuerpos bidimensionales que forman una guía de onda con obstáculos cilíndricos y puede considerarse de longitud infinita y finita. La técnica es conocida como el Método de la Ecuación Integral. Se presenta un planteamiento teórico de este método aplicado a los sistemas en cuestión, en los cuales es necesario calcular las estructuras de bandas correspondientes para el sistema infinito y obtener la respuesta acústica para el sistema finito.

IV.1. Descripción del Método Integral

Aplicaremos el método numérico de la ecuación integral para calcular las estructuras de bandas correspondiente a una PnCW infinita con inclusiones cilíndricas circulares de materiales acústicos y para una PnCW finita análoga mediante el cálculo de la reflectancia. Consideraremos que la guía de ondas está compuesta por placas plano paralelas de superficies acústicas con un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares, también de superficies acústicas. El método parte del segundo teorema integral

de Green en la ecuación de Helmholtz permitiendo obtener un sistema de ecuaciones integrales acopladas que involucran, como incógnitas el campo y su derivada normal evaluados en las superficies involucradas. Posteriormente se procede a la discretización del sistema de las ecuaciones integrales, que resulta en un conjunto de ecuaciones lineales bajo condiciones de frontera (ver Apéndice A) que pueden ser mejor representadas en una sola ecuación matricial homogénea $MX = 0$ en el sistema infinito, e inhomogénea $MX = A$ para el sistema finito, cuya solución determina las funciones fuente, con las que se puede calcular las estructuras de bandas o la respuesta acústica según sea el caso. Es importante mencionar que, sólo se toma en cuenta un número finito de puntos de muestreo a lo largo de los contornos que definen la superficie del sistema bajo estudio, lo que permite ahorrar recursos computacionales. Una vez calculadas las funciones fuente nos permiten modelar la estructura de bandas en sistemas perfectamente periódicos; además de la propagación de ondas de presión acústica a través de los mismos sistemas, calculando la reflectancia. Enseguida daremos la descripción del método correspondiente a la PnCW infinita y finita.

IV.2. Ecuación de Helmholtz

Al hablar de guías de onda de cristal fonónico nos estamos refiriendo a un sistema nanoscópico de estructura periódica, el cual interactúa con un campo de presiones. Es por esto que, las guías de ondas de cristal fonónico tienen una estrecha relación entre la ciencia de estado sólido y acústica; ya que las estructuras cristalinas forman parte de la física de estado sólido y se encuentran compuestas de dos o más fluidos (o sólido y fluido) que al interactuar con un campo de presiones exhibe bandas prohibidas acústicas; es decir, una estructura de bandas. Las ecuaciones de la acústica se obtienen de la linealización de las ecuaciones de la mecánica de medios continuos, que para el

caso general de un fluido ideal no viscoso estas son (Filippi *et al.*, 1998)

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (15)$$

$$-\nabla p(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad (16)$$

$$p = Bs, \quad (17)$$

la ecuación de continuidad, la ecuación de fuerza no viscosa y la ecuación de estado, respectivamente, obtenidas del Apéndice B. Como la acústica estudia la generación y evolución espacio-temporal de pequeñas perturbaciones mecánicas (vibraciones) en un fluido (ondas sonoras) o en un sólido (ondas elásticas), es natural describir el comportamiento del campo acústico de presiones en la guía de ondas a través de la ecuación de Helmholtz. Para ello, aplicando la divergencia a la Ec. (16), se obtiene

$$-\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad (18)$$

siendo ∇^2 el operador Laplaciano tridimensional. Por otro lado, si consideramos la derivada temporal de la Ec. (15) y utilizamos que $\partial(\nabla \cdot \mathbf{u})/\partial t = \nabla \cdot (\partial \mathbf{u}/\partial t)$, llegamos a que

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0. \quad (19)$$

Ahora combinando las Ecs. (18) y (19) obtenemos

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (20)$$

Es el momento de utilizar la Ec. (17), que para ello sustituycamos s en términos de p ; es decir, $s = p/B$ en la Ec. (20). De este modo se obtiene la ecuación de onda acústica

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (21)$$

siendo c_m la velocidad longitudinal de la onda en el medio acústico dada por

$$c_m = \sqrt{\frac{\beta_0}{\rho_0} \gamma}, \quad (22)$$

ya que el módulo volumétrico adiabático tiene la relación $B = \beta_0 \gamma$, siendo ρ_0 la densidad de equilibrio constante. Además ésta es una propiedad característica del fluido y depende de las condiciones de equilibrio. La Ec. (21) también es denominada como la ecuación de onda sonora homogénea de presiones. Para una onda de presión acústica lineal en una celda unitaria $p(\mathbf{r}, t)$, podemos considerar el caso armónico con el tiempo con frecuencia ω ; es decir, $p(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, se cumple que

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}) + k^2 p(\mathbf{r}) = 0, \quad (23)$$

donde $k^2 = (\omega/c_m)^2$ es la magnitud del vector de onda.

IV.3. Impedancia acústica

Antes de entrar de lleno al método de integral numérico implementado, cabe mencionar la impedancia acústica característica de un material, un concepto clave para el estudio de las PnCWs.

Dadas las ecuaciones de onda equivalentes para la presión acústica (Ec. (21)) y la velocidad de las partículas:

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(\mathbf{r}, t), \quad (24)$$

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad (25)$$

se tiene que sus soluciones respectivas son ondas armónicas planas dadas de la forma

$$p(\mathbf{r}, t) = [Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + Be^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] e^{-i\omega t}, \quad (26)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{C}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{D}(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] e^{-i\omega t}, \quad (27)$$

donde A , B , $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ tienen la información de la polarización de la onda viajera.

Del Apéndice B se tiene la ecuación

$$-\nabla p = \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad (28)$$

y con esto se tiene que

$$-\nabla p(\mathbf{r}, t) = -[i\mathbf{k}Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - i\mathbf{k}Be^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] e^{-i\omega t}, \quad (29)$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = -i\omega\rho_0 [\mathbf{C}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{D}(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] e^{-i\omega t}, \quad (30)$$

por lo que, al igualar estas expresiones se tiene que

$$\left(\frac{\mathbf{k}}{\omega\rho_0} p^+(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}^+(\mathbf{r}, t) \right) = \left(\frac{\mathbf{k}}{\omega\rho_0} p^-(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}^-(\mathbf{r}, t) \right), \quad (31)$$

siendo

$$\mathbf{u}^+(\mathbf{r}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{-i\omega t}, \quad (32)$$

$$\mathbf{u}^-(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{-i\omega t}, \quad (33)$$

$$p^+(\mathbf{r}, t) = Ae^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{-i\omega t}, \quad (34)$$

$$p^-(\mathbf{r}, t) = Be^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{-i\omega t}. \quad (35)$$

La igualdad en la Ec. (31) ocurre cuando ambos términos se anulan, ya que no pueden ser iguales entre sí. Es decir para la misma dirección del vector de propagación,

$$c \frac{\mathbf{k}}{\omega\rho_0} p^\pm(\mathbf{r}, t) = \pm \mathbf{u}^\pm(\mathbf{r}, t), \quad (36)$$

cuyas magnitudes satisfacen

$$\pm \frac{p}{u} = \frac{\omega\rho_0}{k}, \quad (37)$$

que simplificando con la relación de dispersión $k^2 = (\omega/c_m)^2$, nos queda que

$$Z_m = \pm c_m \rho_0, \quad (38)$$

donde $Z_m \equiv p/u$ como la impedancia acústica específica del medio y los signos \pm denotan si la onda “va” o “viene”, respectivamente (Ginsberg, 2018a,b; Filippi *et al.*, 1998; Beranek and Mellow, 2012; Park and Lee, 2019; Blackstock, 2001). En un sentido

físico, la impedancia acústica es la resistencia que opone un medio a las ondas sonoras que se propagan sobre éste y por lo tanto es equivalente a la impedancia eléctrica. Es decir una forma de disipación de energía de las ondas que se desplazan en un medio. La impedancia acústica específica es la relación compleja entre la presión acústica efectiva en un punto de un medio acústico o dispositivo mecánico y la velocidad efectiva de las partículas en ese punto. Su unidad es el Rayleigh o rayl = $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^3$ (MKS) en honor de John William Strutt, tercer barón de Rayleigh, también conocido como lord Rayleigh (1842-1919). Por tanto, la impedancia acústica característica del medio para una onda plana (Beranek and Mellow, 2012) como se ha visto, está dada por

$$Z_m = \rho c_m = \rho \sqrt{\frac{B}{\rho}}. \quad (39)$$

Los parámetros constitutivos que determinan las características de propagación de las ondas acústicas en un material son la densidad del medio ρ (en equilibrio $\rho = \rho_0$) y su módulo volumétrico adiabático B . Además la velocidad de la onda acústica en el medio c_m y el índice de refracción acústico del medio respecto al aire n_m están dados por (Park and Lee, 2019)

$$c_m = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\rho_r B_{\text{aire}}}{B_r \rho_{\text{aire}}}}, \quad (40)$$

y

$$n_m \equiv \frac{c_{\text{aire}}}{c_m} = \sqrt{\rho_r \frac{1}{B_r}}, \quad (41)$$

donde $B_r = B/B_{\text{aire}}$ y $\rho_r = \rho/\rho_{\text{aire}}$ son el módulo volumétrico adiabático relativo y la densidad de masa relativa del medio, respectivamente. Con respecto del aire, los valores de los parámetros son: $B_{\text{aire}} = 1.42 \times 10^5$ Pa y $\rho_{\text{aire}} = 1.22$ kg/m³ (Blackstock, 2001). Así, podemos relacionar el número de onda

$$k = \frac{\omega}{c_m}, \quad (42)$$

con la impedancia acústica característica del medio como

$$k = \frac{\rho_r}{Z_r} \frac{\omega}{c_{\text{aire}}}, \quad (43)$$

siendo ρ_r y Z_r la densidad relativa y la impedancia acústica característica relativa del material respecto al aire, respectivamente. Obteniendo así la relación de dispersión para medios acústicos reales con parámetros constitutivos lineales. De la Ref. Blackstock (2001) se tienen valores de densidad, constantes elásticas, velocidad del sonido, impedancia característica y el módulo volumétrico adiabático (ver Tabla. III) para distintos medios. Existen tres valores de la impedancia específica para los que el coeficiente de reflexión adquiere un valor especial en el caso de dos superficies infinitas (Ginsberg, 2018a). Supongamos que la resistencia al movimiento es normal, de modo que la pared apenas se mueve para cualquier presión. En el caso particular de una onda viajera con incidencia normal en una interfaz se tiene que los coeficientes de reflexión y transmisión de la presión son (Blackstock, 2001)

$$R = \frac{1 - \frac{Z_{\text{aire}}}{Z_m}}{1 + \frac{Z_{\text{aire}}}{Z_m}} = \frac{p^-}{p^+}, \quad (44)$$

y

$$T = \frac{2}{1 + \frac{Z_{\text{aire}}}{Z_m}} = \frac{p^t}{p^+}, \quad (45)$$

donde Z_{aire} , p^+ , p^- y p^{tr} son la impedancia característica del aire y las amplitudes de presión de las ondas incidente, reflejada y transmitida, respectivamente. Se tienen los siguientes tres casos (Filippi *et al.*, 1998; Ginsberg, 2018a; Kinsler *et al.*, 2000):

1. En el límite $Z_{\text{aire}}/Z_m \rightarrow 0$, o bien, $Z_m \rightarrow \infty$ se tiene que la reflectancia $R \rightarrow 1$; es decir, la onda se refleja sin reducción de la amplitud y sin cambio de fase. La onda transmitida tiene una amplitud de presión doble que la onda incidente, y la velocidad normal de las partículas en la frontera es cero. Debido a esto, la

Tabla III. Valores de densidad e impedancia para gases, líquidos y materiales sólidos (tomados de Blackstock (2001) págs. 511 y 512).

Gases (a presión de 1.013×10^5 N/m²)

Gas	Temperatura, T [°C]	Densidad, ρ_0 [kg/m ³]	Velocidad, c_0 [m/s]	Impedancia característica, $Z_m = \rho_0 c_0$ [rayls]
Aire	0	1.293	331.6	428
Aire	20	1.21	343	415
Oxígeno	0	1.43	317.2	453
CO ₂ (Bajas frec.)	0	1.98	258	512
CO ₂ (Altas frec.)	0	1.98	268.6	532
Hidrógeno	0	0.09	1269.5	114
Vapor de agua	100	0.6	404.8	242

Líquidos

Líquido	Temperatura, T [°C]	Densidad, ρ_0 [kg/m ³]	Velocidad, c_0 [m/s]	Impedancia característica, $Z_m = \rho_0 c_0$ [Grayls]
Agua (dulce)	20	998	1,481	1.48
Agua (de mar)	13	1026	1,500	1.54
Alcohol (etílico)	20	790	1,150	0.91
Aceite para ruedas	20	950	1,540	1.45
Mercurio	20	13,600	1,450	19.7
Trementina	20	870	1,250	1.11
Glicerina	20	1,260	1,980	2.5

Sólido

Sólido	Módulo de volumen, B [GPa]	Densidad, ρ_0 [kg/m ³]	Velocidad, c_0 (Bulk) [m/s]	Impedancia característica, $Z_m = \rho_0 c_0$ [Mrayls]
Aluminio	24	2,700	6,300	17.0
Bronce	38	8,500	4,700	40.0
Cobre	44	8,900	5,000	44.5
Hierro (fundido)	44	7,700	4,350	33.5
Plomo	5.5	11,300	2,050	23.2
Níquel	80	8,800	5,850	51.5
Plata	28	10,500	3,700	39.0

frontera se denomina **rígida**, que es un caso “idóneo”, es decir, inalcanzable en la realidad.

2. La condición opuesta a lo anterior es una pared que es **suave** y ocurre cuando $Z_{\text{aire}}/Z_m \rightarrow \infty$, o bien, $Z_m \rightarrow 0$ lo que conlleva a que la reflectancia $R \rightarrow -1$. La amplitud de la onda reflejada es de nuevo igual a la de la incidente, y la onda transmitida tiene una amplitud de presión nula. Dado que la presión acústica en el límite es cero, el límite se denomina de liberación de presión.
3. El tercer caso especial es una pared cuya impedancia coincide con la impedancia característica del fluido (el aire en nuestro caso), que corresponde a $Z_m = Z_{\text{aire}}$. Aquí $R = 0$ y decimos que es una frontera no reflectante.

IV.4. Función de Green en la Ecuación de Helmholtz

Partiremos de la Ec. (23) para el desarrollo del método numérico integral. En primera instancia usaremos una técnica conocida para resolver ecuaciones diferenciales, que consiste en hallar la función de Green que sea solución al operador de la Ec. (23) (Dennerly and Krzywycki, 1996). Tomamos entonces la función de Green que satisface

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (46)$$

donde $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ representa el propagador del campo de presión debido a una fuente puntual (bocina) que emite a la frecuencia ω en la posición \mathbf{r}' , y $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ es la delta de Dirac definida por

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} \infty, & \mathbf{r} = \mathbf{0} \\ 0, & \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \end{cases}. \quad (47)$$

La función de Green que es solución de la Ec. (46) para nuestro sistema independiente del eje z (bidimensional) está dada entonces por (ver Apéndice C)

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (48)$$

donde $H_0^{(1)}(\xi)$ es la función de Hankel de primera clase y orden cero.

IV.5. Forma Integral de la Ecuación de Helmholtz

Tomando la segunda identidad de Green dada por (Dennerly and Krzywycki, 1996)

$$\int_V dV (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v) = \int_S dS \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right), \quad (49)$$

donde $u(\mathbf{r})$ y $v(\mathbf{r})$ son campos escalares arbitrarios definidos en un volumen V rodeado por una superficie cerrada S , y $\partial\xi/\partial n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\xi$ es la derivada a lo largo de la normal a la superficie dirigida hacia afuera del volumen V . En el caso particular de que los campos escalares son independientes de la variable z , la Ec. (49) es de la forma

$$\oint_S dA (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v) = \oint_\Gamma dS \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right), \quad (50)$$

siendo Γ el contorno cerrado que limita la superficie S . Así, si multiplicamos la Ec. (23) por $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y a la Ec. (46) por $-p(\mathbf{r})$ (siendo p nuestro campo de presiones), las sumamos e integramos sobre la superficie cerrada S obtenemos

$$\oint_S dA (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\nabla^2 p(\mathbf{r}) - p(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = 4\pi \oint_S dA (p(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')), \quad (51)$$

donde es posible aplicar la identidad de la Ec. (50) al lado izquierdo de la Ec. (51) y el lado derecho es la definición de una función escalón. Por lo que la Ec. (51) resulta como

$$\oint_\Gamma ds' \left(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n} - p(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right) = 4\pi p(\mathbf{r}')\Theta(\mathbf{r}'), \quad (52)$$

donde por convención la normal va hacia afuera y $\Theta(\mathbf{r}')$ es la función escalón dada por

$$\Theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in S \\ 0, & \xi \notin S \end{cases}. \quad (53)$$

Si consideramos la convención de que \mathbf{r} representa la posición del observador, que es donde se mide el campo, podemos entonces intercambiar las variables \mathbf{r} y \mathbf{r}' en la Ec. (52), resultando en

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} ds \left(G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}')}{\partial n'} - p(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} \right) = p(\mathbf{r}) \Theta(\mathbf{r}), \quad (54)$$

donde ahora \mathbf{r}' se deslaza sobre los contornos. Por lo tanto la Ec. (54) representa la forma integral de la ecuación de Helmholtz para campos de presión acústica en sistemas 2D, donde se debe tener presente la ecuación de Green para medios homogéneos dada en la Ec. (48).

IV.6. Discretización de Integrales

La ecuación integral que hemos obtenido (Ec. (54)) es una integral de línea cuya variable de integración es el parámetro de longitud de arco s . Debido a esto conviene representar los integrandos en términos de dicho parámetro y para hacerlo consideraremos una representación paramétrica de los puntos que forman el contorno Γ . Tomaremos las formas paramétricas de las coordenadas cartesianas de un punto arbitrario $(x(s), y(s))$ y de sus derivadas de primer $(x'(s), y'(s))$ y segundo $(x''(s), x''(s))$ orden, donde por la simplicidad de los sistemas bajo estudio que todas estas funciones son continuas al menos por tramos. Además, será de utilidad nombrar las integrales de la Ec. (54) como

$$I_G(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} ds \left(G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) \quad (55)$$

y

$$I_p(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} ds \left(p(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} \right). \quad (56)$$

Para resolver numéricamente las Ecs. (55) y (56) realizamos una discretización, dividiendo el contorno Γ en N pequeños segmentos de longitud de arco Δs . De este modo, las ecuaciones anteriores pueden expresarse como

$$I_G(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \sum_n \oint_{s_n - \frac{\Delta s}{2}}^{s_n + \frac{\Delta s}{2}} ds \left(G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) \quad (57)$$

y

$$I_p(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \sum_n \oint_{s_n - \frac{\Delta s}{2}}^{s_n + \frac{\Delta s}{2}} ds \left(p(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} \right). \quad (58)$$

Si Δs es suficientemente pequeño, entonces podemos considerar que el campo $p(\mathbf{r}')$ y su derivada normal $\partial p(\mathbf{r}')/\partial n'$ son aproximadamente constantes entre dos puntos consecutivos de la discretización, podremos sacarlos de las integrales, obteniendo una aproximación de las ecuaciones anteriores dadas por

$$I_G(\mathbf{r}') \approx \sum_n \Phi_n L_{mn}, \quad (59)$$

$$I_p(\mathbf{r}') \approx \sum_n p_n N_{mn}, \quad (60)$$

siendo

$$\Phi_n = \left. \frac{\partial p(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}'_n}, \quad (61)$$

$$p_n = p(\mathbf{r}')|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}'_n}, \quad (62)$$

y los elementos de matriz,

$$L_{mn} = \frac{1}{4\pi} \oint_{s_n - \frac{\Delta s}{2}}^{s_n + \frac{\Delta s}{2}} ds (G(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r})), \quad (63)$$

$$N_{mn} = \frac{1}{4\pi} \oint_{s_n - \frac{\Delta s}{2}}^{s_n + \frac{\Delta s}{2}} ds \left(\frac{\partial G(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r})}{\partial n'} \right), \quad (64)$$

donde el subíndice m indica el punto de observación y el n el punto de integración. Los elementos de matriz de las Ecs. (63) y (64) están dados por (Mendoza-Suárez *et al.*,

2011)

$$L_{mn} = \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k |\mathbf{r}'_m - \mathbf{r}_n|) \Delta s & \text{si } m \neq n \\ \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k \frac{\Delta s}{2e}) \Delta s & \text{si } m = n \end{cases}, \quad (65)$$

$$N_{mn} = \begin{cases} \frac{i}{4} k \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'_m - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r}'_m - \mathbf{r}_n|} \right) H_1^{(1)}(k |\mathbf{r}'_m - \mathbf{r}_n|) \Delta s & \text{si } m \neq n \\ \frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4\pi} \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n & \text{si } m = n \end{cases}, \quad (66)$$

donde

$$|\mathbf{r}'_m - \mathbf{r}_n| = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}, \quad (67)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot (\mathbf{r}'_m - \mathbf{r}_n) = -y'(s_n)(x_m - x_n) + x'(s_n)(y_m - y_n), \quad (68)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n = x'(s_n)y''(s_n) - y'(s_n)x''(s_n), \quad (69)$$

$\hat{\mathbf{n}}_n$ es la normal al contorno Γ en el punto de integración \mathbf{r}_n y $\hat{\mathbf{t}}'_n$ es la derivada del vector tangente al contorno Γ en el punto \mathbf{r}_n . Nótese que de las Ecs. (59) y (60) se puede tener una representación aproximada de la Ec. (54) dada por

$$\sum_n \Phi_n L_{mn} - \sum_n p_n N_{mn} \approx p(\mathbf{r}) \Theta(\mathbf{r}). \quad (70)$$

Así, hemos obtenido un sistema de ecuaciones lineales en el que habrá un conjunto de estas ecuaciones por cada interfaz implicada, en las cuales deben considerarse las condiciones de frontera, que toman la forma (ver Apéndice A)

$$p_i^{(j)} = p_i^{(j')}, \quad (71)$$

$$\frac{c_j}{Z_j} \frac{\partial p_i^{(j)}}{\partial n} = \frac{c_{j'}}{Z_{j'}} \frac{\partial p_i^{(j')}}{\partial n}, \quad (72)$$

donde, el índice j denota la j -ésima región en el sistema con el i -ésimo contorno Γ_i y es considerado un material acústico real. En los casos extremos de impedancia infinita o nula (superficie suave o rígida) el problema se simplifica notablemente. Cuando se tiene una superficie rígida, la presión normal de las partículas en la frontera es cero; es

decir, la segunda condición de frontera en la interfaz (se tiene un problema de frontera de Neumann) se iguala a cero (Kinsler *et al.*, 2000; Pike and Sabatier, 2001),

$$\frac{c_j}{Z_j} \frac{\partial p_i^{(j)}}{\partial n} = 0 = \frac{c_{j'}}{Z_{j'}} \frac{\partial p_i^{(j')}}{\partial n}. \quad (73)$$

En el caso contrario, cuando se tiene una superficie suave, la onda transmitida tiene una amplitud de presión nula en la frontera, la primera condición en la interfaz (se tiene un problema de frontera de Dirichlet) se iguala a cero (Kinsler *et al.*, 2000; Pike and Sabatier, 2001),

$$p_i^{(j)} = 0 = p_i^{(j')}. \quad (74)$$

Notemos además, la similitud entre la polarización eléctrica transversal (TE) o también llamada “polarización s” con una superficie que limita un conductor eléctrico perfecto es equivalente al caso de la superficie acústica suave; es decir, un problema de Dirichlet. Y que la polarización transversal magnética (TM) o también llamada “polarización p” con una superficie que limita un conductor eléctrico perfecto es equivalente al caso de la superficie acústica rígida; es decir, un problema de Neumann (Pike and Sabatier, 2001). Con ello el sistema de ecuaciones obtenido puede ser representado en forma algebraica por un sistema matricial de la forma

$$M(\mathbf{K}, \omega) F(\mathbf{K}, \omega) = H, \quad (75)$$

donde la matriz M es la matriz representativa asociada al sistema, la cual es función de la frecuencia ω y del vector de Bloch \mathbf{K} . El cual aparece, como veremos más adelante, gracias a que se considera un sistema periódico. Además M está formada por los elementos L_{mn} y N_{mn} (Ecs. (65) y (66)) y la matriz F contiene las funciones fuentes p_n y Φ_n . El sistema matricial es homogéneo, $H = 0$, en el caso de tener un sistema físico idealmente infinito, por lo que representa un problema de eigenvalores, en el que es posible encontrar una solución no trivial del sistema cuando el determinante del mismo

es cero. Por tanto, para determinar las frecuencias que generan soluciones no triviales definimos la función

$$D(K, \omega) = \ln(|\det(M)|), \quad (76)$$

que nos proporciona la relación de dispersión numérica $\omega = \omega(K)$, con la cual podemos calcular los modos del sistema al obtener la estructura de bandas y su correspondiente intensidad del campo de presión acústica. En caso contrario, $H \neq 0$, en el sistema finito donde existe una onda incidente; es decir, un problema de matriz inversa.

IV.7. PnCW Infinita

El método descrito hasta ahora asume que el sistema contiene varios cuerpos con los que el campo de presión interactúa, por lo que deben considerarse las condiciones de frontera de cada interacción. Dicho sistema está formado por dos superficies planas infinitas y un arreglo periódicamente perfecto de inclusiones cilíndricas circulares de superficies acústicas suaves o rígidas, cuyo eje de simetría va a lo largo del eje z , como se muestra en la Fig. 16. Consideremos que se tiene un periodo P en los perfiles planos, una separación entre las placas de la guía dada por b y las inclusiones cilíndricas circulares de radio r , el cual puede estar en términos de la fracción de llenado f . Con

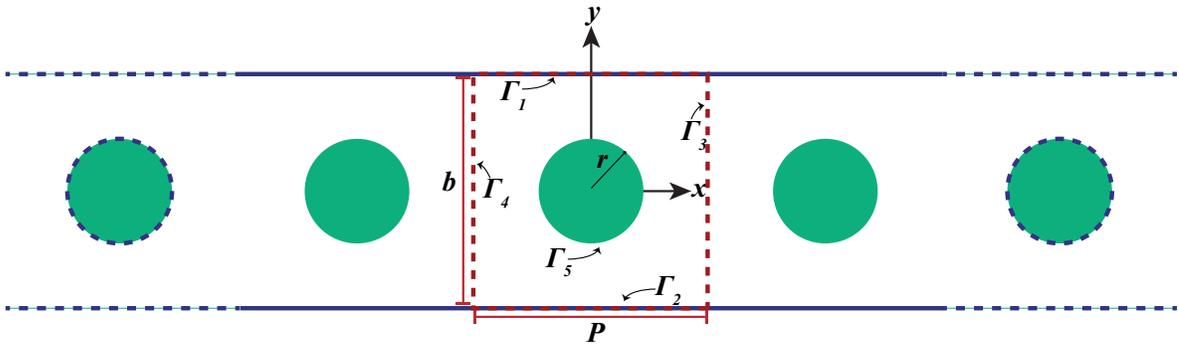


Figura 16. Diagrama de una guía de ondas infinita con inclusiones cilíndricas de materiales acústicos. Las líneas punteadas en rojo delimitan la región de la celda unitaria.

el objetivo de mostrar el procedimiento de usar el método integral en la guía de ondas infinita, procedemos a utilizar las Ecs. (23), (46), (54) y (48) para el sistema infinito considerando la geometría de la celda unitaria. Así, para el j -ésimo medio tendrá una ecuación de la forma

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} ds \left(G_j(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial p_j(\mathbf{r}')}{\partial n'} - p_j(\mathbf{r}') \frac{\partial G_j(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} \right) = 0, \quad (77)$$

donde se ha igualado a cero porque el vector del punto de observación \mathbf{r} no está dentro del j -ésimo medio correspondiente.

Cabe mencionar que, la geometría de la celda unitaria de la Fig. 16 puede ser descrita por la representación de puntos a lo largo de las curvas cerradas $C_I = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ y $C_{II} = \Gamma_5$ con coordenadas $x(s)$ y $y(s)$ como funciones paramétricas de la longitud de arco s y sus respectivas derivadas hasta el segundo orden, $x'(s)$, $y'(s)$, $x''(s)$ y $y''(s)$. Cada contorno Γ_j es dividido en N_j pequeños segmentos de longitud Δs . Sea $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$ el número total de puntos en la celda unitaria. Además para cada Γ_j corresponde un vector normal $\hat{\mathbf{n}}_j$ que apunta hacia afuera de la celda unitaria. Por consiguiente, obtenemos las ecuaciones integrales para cada región. Por ejemplo, para la región R_0

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \oint_{C_I} ds \left(G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial p_0(\mathbf{r}')}{\partial n'} - p_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} \right) = \\ & \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{\Gamma_1} ds \left(G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial p_0(\mathbf{r}')}{\partial n'_1} - p_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'_1} \right) + \right. \\ & \quad + \int_{\Gamma_2} ds \left(G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial p_0(\mathbf{r}')}{\partial n'_2} - p_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'_2} \right) + \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} ds \left(G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial p_0(\mathbf{r}')}{\partial n'_3} - p_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'_3} \right) + \\ & \quad + \int_{\Gamma_4} ds \left(G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial p_0(\mathbf{r}')}{\partial n'_4} - p_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'_4} \right) + \\ & \quad \left. + \int_{\Gamma_5} ds \left(G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial p_0(\mathbf{r}')}{\partial n'_5} - p_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'_5} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (78)$$

donde \mathbf{r}' corresponde a cualquier punto de la curva Γ_i correspondiente a la integral en la que se encuentra. Ahora aplicando la discretización en la Ec. (78) se obtiene el

siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn}^{(0,1)} \Phi_n^{(0,1)} - \sum_{n=1}^{N_1} N_{mn}^{(0,1)} p_n^{(0,1)} + \\
& + \sum_{n=N_1+1}^{N_1+N_2} L_{mn}^{(0,2)} \Phi_n^{(0,2)} - \sum_{n=N_1+1}^{N_1+N_2} N_{mn}^{(0,2)} p_n^{(0,2)} + \\
& + \sum_{n=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} L_{mn}^{(0,3)} \Phi_n^{(0,3)} - \sum_{n=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} N_{mn}^{(0,3)} p_n^{(0,3)} + \\
& + \sum_{n=N-N_5-N_4+1}^{N-N_5} L_{mn}^{(0,4)} \Phi_n^{(0,4)} - \sum_{n=N-N_5-N_4+1}^{N-N_4} N_{mn}^{(0,4)} p_n^{(0,4)} + \\
& + \sum_{n=N-N_5+1}^N L_{mn}^{(0,5)} \Phi_n^{(0,5)} - \sum_{n=N-N_5+1}^N N_{mn}^{(0,5)} p_n^{(0,5)} = 0, \tag{79}
\end{aligned}$$

donde $m = 1, 2, \dots, N$. El primer índice superior entre paréntesis se refiere a la región y el segundo al perfil del contorno correspondiente.

Notemos que las incógnitas son p_n y Φ_n , de manera que en el sistema se tienen $2N$ incógnitas y N ecuaciones; es decir la matriz asociada al sistema no es una matriz cuadrada. Ahora consideraremos las condiciones de frontera entre cada interfaz que separa el medio acústico suave (o rígido) y el medio que lo rodea, entonces para los perfiles Γ_1 y Γ_2 se tiene que:

para superficie suave

$$p_n^{(0,1)} = p_n^{(0,2)} = 0 \tag{80}$$

y para superficie rígida

$$\Phi_n^{(0,1)} = \Phi_n^{(0,2)} = 0. \tag{81}$$

Es decir el campo o su derivada normal son cero en la superficie de una superficie acústica suave o rígida, respectivamente.

Por otro lado, debido a que la periodicidad del sistema infinito es a lo largo del eje x , es posible hacer uso del teorema de Bloch, el cual establece que el campo p se puede

escribir como el producto de una onda plana y una función periódica $u(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r} + \mathbf{R})$, donde \mathbf{R} es un vector de traslación en la red:

$$p(\mathbf{r}) = e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}u(\mathbf{r}), \quad (82)$$

donde \mathbf{K} es el vector de Bloch y en este sistema particular $\mathbf{R} = (P, 0)$. La Ec. (82) nos permitirá relacionar las fuentes de los perfiles Γ_3 y Γ_4 de donde obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$p_n^{(0,4)} = e^{-iK_x P} p_n^{(0,3)} \quad (83)$$

y

$$\Phi_n^{(0,4)} = -e^{-iK_x P} \Phi_n^{(0,3)}. \quad (84)$$

De manera que finalmente obtenemos un sistema de N ecuaciones y N incógnitas. Sustituyendo las Ecs. (80), (81), (83) y (84) en la Ec. (79) obtenemos (Mendoza-Suárez and Villa-Villa, 2006):

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^{N_1} L_{mn}^{(0,1)} \Phi_n^{(0,1)} + \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn}^{(0,2)} \Phi_n^{(0,2)} \right) (1 - \delta_{l2}) \\ & - \left(\sum_{n=1}^{N_1} N_{mn}^{(0,1)} p_n^{(0,1)} + \sum_{n=1}^{N_1} N_{mn}^{(0,2)} p_n^{(0,2)} \right) (1 - \delta_{l1}) \\ & + \sum_{n=1}^{N_3} [L_{mn}^{(0,3)} - e^{-iK_x P} L_{mn}^{(0,4)}] \Phi_n^{(0,3)} - \sum_{n=1}^{N_3} [N_{mn}^{(0,3)} + e^{-iK_x P} N_{mn}^{(0,4)}] p_n^{(0,3)} \\ & + \left(\sum_{n=1}^{N_5} L_{mn}^{(0,5)} \Phi_n^{(0,5)} \right) (1 - \delta_{l2}) - \left(\sum_{n=1}^{N_5} N_{mn}^{(0,5)} p_n^{(0,5)} \right) (1 - \delta_{l1}) = 0, \quad (85) \end{aligned}$$

con $m = 1, 2, \dots, N$ en la Ec. (85); además $l = 1$ para superficie suave y $l = 2$ para superficie rígida. Por consiguiente, el sistema puede ser expresado en términos de un sistema de ecuaciones algebraicas homogéneas como la Ec. (75) con $H = 0$, usando la Ec. (76) podemos calcular sus mínimos locales, que serán los modos del sistema y así, obtener las fuentes y la intensidad del campo de presión.

IV.8. PnCW Finita

El método integral numérico no sólo nos permite el cálculo de estructuras de bandas, sino que además podemos calcular la intensidad del campo correspondiente a modos del campo de presión dentro de la celda unitaria. Sin embargo, en la realidad los sistemas tienen longitud finita, razón por la que es de suma importancia poder tratar los problemas físicos reales. Como parte de este trabajo se implementó un método numérico capaz de calcular la respuesta acústica mediante el cálculo de la reflectancia, la transmitancia y el campo esparcido por una PnCW finita que contiene inclusiones de superficies acústicas suaves (o rígidas). El sistema está formado por dos placas paralelas y un arreglo de diez inclusiones cilíndricas; por lo que, el problema se considera como un sistema de M cuerpos como se ve en la Fig. 17.

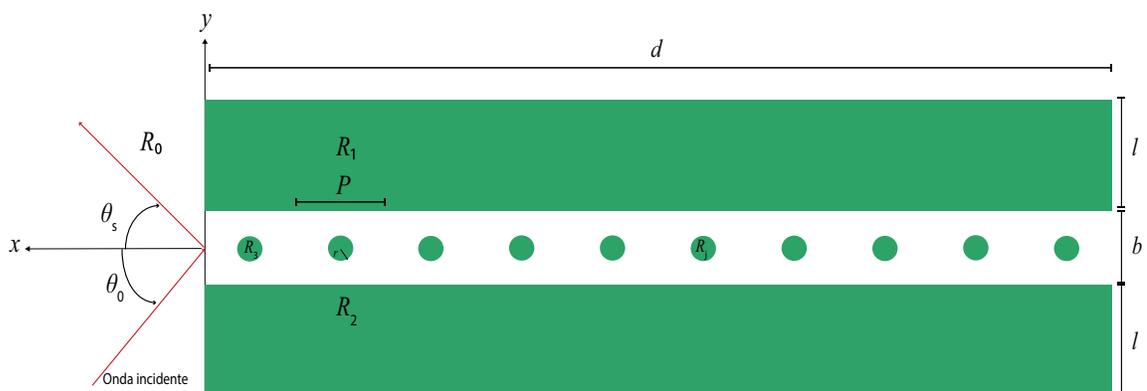


Figura 17. Diagrama de una guía de ondas finita con inclusiones cilíndricas de materiales acústicos.

La región R_0 tiene una impedancia acústica característica $Z_{\text{aire}} = 428$ rayls y las regiones desde 1 a M están definidas por las curvas Γ_j y se caracterizan por los correspondientes impedancias acústicas Z_j .

Como ya se ha descrito el procedimiento del método integral, ahora utilizaremos las

Ecs. (23), (46), (54) y (48) de tal modo que podemos expresar el campo en R_0 como:

$$p^{(0)}(\mathbf{r}) = p_{inc}^{(0)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial p_0(\mathbf{r})}{\partial n} - p_0(\mathbf{r}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds. \quad (86)$$

En esta expresión, $p_{inc}^{(0)}(\mathbf{r})$ representa el campo incidente y la suma de las integrales representa el campo esparcido.

Siguiendo los mismos pasos, para la j -ésima región, el campo $p^{(j)}(\mathbf{r})$ puede expresarse como:

$$p^{(j)}(\mathbf{r})\Theta_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial p_j(\mathbf{r})}{\partial n} - p_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds, \quad (87)$$

donde $\Theta(\mathbf{r}) = 1$ si \mathbf{r} está dentro del medio j -ésimo o $\Theta(\mathbf{r}) = 0$ en caso contrario. Las Ecs. (86) y (87) forman un sistema de ecuaciones con las que se puede obtener el campo total en cualquier parte.

Para encontrar el campo esparcido usando el segundo término del lado derecho de la Ec. (86), es necesario encontrar una forma de obtener las funciones fuente a partir de las ecuaciones integrales. Para esto, se hace una aproximación del punto de observación en la región 0 a la superficie de la j -ésima región. Por tanto, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$p^{(0)}(\mathbf{r}) = p_{inc}^{(0)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial p_0(\mathbf{r})}{\partial n} - p_0(\mathbf{r}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds \quad (88)$$

y

$$p^{(j)}(\mathbf{r})\Theta_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[\frac{c_{aire}}{c_j} \frac{Z_j}{Z_{aire}} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial p_j(\mathbf{r})}{\partial n} - p_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] \delta_{ij} ds. \quad (89)$$

En este caso δ_{ij} es la delta de Kronecker, $Z_{0j} = c_{0j}\rho_{0j}$ es la impedancia acústica característica del j -ésimo medio, con $i = 1, 2, \dots, M$. Nuevamente se hace una discretización sobre la geometría del sistema, usando una aproximación de rectángulos para evaluar las integrales en intervalos pequeños, siendo representado cada cuerpo por N_j puntos.

Se obtiene así, un conjunto de ecuaciones matriciales de la forma (Mendoza-Suárez *et al.*, 2007):

$$p^{(0)}(\mathbf{r}) = p_{inc}^{(0)}(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{N_j} \left[L_{mn}^{(0)} \frac{\partial p^{(0)}(\mathbf{r}')}{\partial n_j} - N_{mn}^{(0)} p^{(0)}(\mathbf{r}') \right], \quad (90)$$

y

$$\sum_{n=1}^{N_j} \left[\frac{c_{aire}}{c_j} \frac{Z_j}{Z_{aire}} L_{mn}^{(j)} \frac{\partial p^{(0)}(\mathbf{r}')}{\partial n_j} - N_{mn}^{(j)} p^{(0)}(\mathbf{r}') \right] = 0, \quad (91)$$

para $j = 1, 2, \dots, M$ y los elementos L_{mn} , N_{mn} como en las Ecs. (65) y (66), respectivamente. Aplicando la condición de frontera de la derivada normal (ver Apéndice A) se tiene que el sistema se reescribe como

$$\sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{N_j} [\delta_{mn} - N_{mn}^{(0,j)}] p_n^{(j,0)} + \frac{c_j}{c_{aire}} \frac{Z_{aire}}{Z_j} \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{N_j} L_{mn}^{(0,j)} \Phi_n^{(j,0)} = p_m^{inc}, \quad (92)$$

$$\sum_{n=1}^{N_1} [\delta_{mn} - N_{mn}^{(1,1)}] p_n^{(0,1)} + \frac{c_{aire}}{c_1} \frac{Z_1}{Z_{aire}} \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn}^{(1,1)} \Phi_n^{(1,0)} = 0, \quad (93)$$

$$\sum_{n=1}^{N_2} [\delta_{mn} - N_{mn}^{(2,2)}] p_n^{(0,2)} + \frac{c_{aire}}{c_2} \frac{Z_2}{Z_{aire}} \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn}^{(2,2)} \Phi_n^{(2,0)} = 0, \quad (94)$$

⋮

$$\sum_{n=1}^{N_{M-1}} [\delta_{mn} - N_{mn}^{(M-1,M-1)}] p_n^{(0,M-1)} + \frac{c_{aire}}{c_{M-1}} \frac{Z_{M-1}}{Z_{aire}} \sum_{n=1}^{N_{M-1}} L_{mn}^{(M-1,M-1)} \Phi_n^{(0,M-1)} = 0 \quad (95)$$

$$\sum_{n=1}^{N_M} [\delta_{mn} - N_{mn}^{(M,M)}] p_n^{(0,M)} + \frac{c_{aire}}{c_j} \frac{Z_j}{Z_{aire}} \sum_{n=1}^{N_M} L_{mn}^{(M,M)} \Phi_n^{(0,M)} = 0, \quad (96)$$

con $m = 1, 2, \dots, N$ y el primer super-índice denota la región y el segundo el contorno. Las Ecs. (92) a (96) constituyen un sistema inhomogéneo de $2 \sum_{j=1}^M N_j$ ecuaciones lineales que pueden resolverse numéricamente para determinar el campo y su derivada normal a lo largo de todos los cuerpos. Además, en el caso particular en el que las paredes de la guía son consideradas de superficies acústicas perfectamente suaves (o rígidas), las Ecs. (90) a (91) logran simplificarse de manera análoga al caso infinito, debido a

las condiciones de frontera, siendo aún mas simple el caso en el que las inclusiones son de ese mismo tipo. En caso contrario, de cuerpos acústicos reales, las condiciones de frontera de las Ecs. (90) a (91), en general no se simplifican y serán de ésta forma.

IV.8.1. Campo incidente

Para tratar el problema de la PnCW finita con el método previamente descrito es necesario hacer suposiciones sobre el campo incidente. Una vez que se obtienen las fuentes¹ $\Psi_n^{(j)}$ y $\Phi_n^{(j)}$, con $j = 1, 2, \dots, M$, ahora se puede calcular el campo en cualquier punto dentro de las regiones que constituyen el sistema mediante las mismas ecuaciones integrales. Si $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_0$, es decir la región de propagación, la ecuación correspondiente es

$$\Psi_m^{(0)} = \sum_{n=1}^N L_{mn}^{(0)} \Phi_n^{(0)} - \sum_{n=1}^N N_{mn}^{(0)} \Psi_n^{(0)} - \Psi_m^{\text{inc}(0)}. \quad (97)$$

De lo contrario, para las demas regiones $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_j$, la ecuación asociada es

$$\Psi_m^{(j)} = \sum_{n=1}^N L_{mn}^{(j)} \Phi_n^{(j)} - \sum_{n=1}^N N_{mn}^{(j)} \Psi_n^{(j)}. \quad (98)$$

Por lo que, el campo incidente está expresado por

$$\Psi^{(\text{inc})}(\mathbf{r}) = \Psi_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (99)$$

donde Ψ_0 es una constante con unidades adecuadas, \mathbf{k} es el vector de onda de propagación y \mathbf{r} la posición de cada punto sobre el cual la onda incide.

Para el campo lejano se utilizarán las expresiones

$$L_{mn} \approx \frac{i\Delta s}{4} H_0^{(1)}(kR_{mn}), \quad (100)$$

y

$$N_{mn} \approx \frac{i\Delta s}{4} k H_1^{(1)}(kR_{mn}) \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \frac{\mathbf{R}_{mn}}{R_{mn}}, \quad (101)$$

¹Hemos cambiado de notación para el caso del campo de presión en un punto $p^{(j)} \equiv \Psi_n^{(j)}$.

que han sido definidas anteriormente en las Ecs. (65) y (66), respectivamente. Aquí, $\mathbf{R}_{mn} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n$ donde \mathbf{r}_m indica el punto de observacion y \mathbf{r}_n el punto de integracion.

Tomando en cuenta que el observador r_m se encuentra muy lejos del sistema; es decir, que $r_m \gg r_n$ y que $r_m \gg \lambda$. Así pues, se necesita una aproximación asintótica de la función de Hankel $H_0^{(1)}(x)$ para argumentos grandes, por lo que se considera la expresión

$$H_0^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{ix}, \quad (102)$$

donde $x = kR_{mn}$, siendo

$$R_{mn} \approx r_m \left(1 - \frac{\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{r}_n}{r_m^2} \right) = r_m - \frac{\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{r}_n}{r_m}. \quad (103)$$

Por ende,

$$\sqrt{R_{mn}} \approx \sqrt{r_m} \sqrt{\left(1 - \frac{\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{r}_n}{r_m^2} \right)} \approx \sqrt{r_m}, \quad (104)$$

Sustituyendo la Ec. (102) con las aproximaciones de las Ecs. (103) y (104) en la Ec. (65):

$$L_{mn} \approx q e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{ikr_m}}{\sqrt{r_m}} e^{-ik(\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{r}_n)}, \quad (105)$$

siendo

$$q = \left(\frac{i\Delta s}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right). \quad (106)$$

Análogamente, la función $H_1^{(1)}(x)$ para argumentos grandes,

$$H_1^{(1)}(x) \approx -i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{ix} = -i H_0^{(1)}(x), \quad (107)$$

se tiene que

$$\hat{\mathbf{R}}_{mn} = \frac{\mathbf{R}_{mn}}{R_{mn}} \approx \frac{x_m}{r_m} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y_m}{r_m} \hat{\mathbf{j}}. \quad (108)$$

Sustituyendo las Ecs. (107) y (108) en la Ec. (66), tenemos

$$N_{mn} \approx \left(q \frac{e^{ikr_m}}{\sqrt{r_m}} e^{-ik\left(\frac{\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{r}_n}{r_m}\right)} \right) \left(-ik \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{R}}_{mn} \right). \quad (109)$$

Por lo tanto, el campo reflejado dado por la Ec. (97) se puede reescribir como

$$\Psi_m^{(0)} = q \frac{e^{ik_0 r_m}}{\sqrt{r_m}} \sum_{n=1}^N \left(\Phi_n^{(0)} + ik_0 \left(\frac{\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{r}_n}{r_m} \right) \Psi_n^{(0)} \right) e^{-ik_0 \left(\frac{\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{r}_n}{r_m} \right)}, \quad (110)$$

donde se ha omitió el término del campo incidente. Similarmente, para la región de transmisión donde $\mathbf{r}_m \in \mathbf{R}_j$:

$$\Psi_m^{(j)} = q \frac{e^{ik_j r_m}}{\sqrt{r_m}} \sum_{n=1}^N \left(\Phi_n^{(j)} + ik_0 \left(\frac{\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{r}_n}{r_m} \right) \Psi_n^{(j)} \right) e^{-ik_j \left(\frac{\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{r}_n}{r_m} \right)}. \quad (111)$$

Ahora se va a determinar la potencia total incidente. La intensidad acústica se define como la variación del flujo de energía producido por la perturbación acústica. La propagación de una onda acústica va acompañada de un flujo de energía en la dirección en que se desplaza. La intensidad sonora I en una dirección determinada es definida como la media temporal del flujo de energía (flujo de energía significa energía por unidad de tiempo, o potencia) a través de una unidad de área, donde la normal al área apunta en la dirección especificada. En acústica viene dada por la expresión (Blackstock, 2001):

$$P = pu\Delta s. \quad (112)$$

Para calcular el coeficiente de reflexión diferencial, el cual representa la fracción de energía incidente sobre una superficie que es esparcida por unidad de ángulo, se necesita calcular tanto el flujo incidente total así como el flujo esparcido total. Para esto, se emplea la Ec. (112) y suponiendo que el campo incidente en la superficie es una onda plana, es decir

$$p^{(\text{inc})}(x, y) = e^{ik_0[r]}, \quad (113)$$

de donde, como la impedancia acústica característica es $Z = pu$, se tiene que

$$P^{(\text{inc})} = \frac{1}{Z_{\text{aire}}} |p^{\text{inc}}|^2 \Delta s. \quad (114)$$

Para obtener la potencia incidente total es necesario integrar sobre un área en particular a lo largo del plano x - z . Entonces, la potencia total incidente en un área de $\Delta s = L_x L_z$ perteneciente a la interfaz será $|p^{(\text{inc})}|^2 = 1$, entonces la Ec. (114) será

$$P_{\text{total}}^{(\text{inc})} = \frac{1}{Z_{\text{aire}}} L_x L_z. \quad (115)$$

IV.8.2. El campo esparcido

Si el campo esparcido tiene la forma

$$\Psi^{(j)}(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma_j} [L_{mn}^{(j)} \Phi_n^{(j)} - N_{mn}^{(j)} \Psi_n^{(j)}] ds', \quad (116)$$

empleando las funciones de Hankel en el límite asintótico bajo la suposición de que $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{R}|$, la Ec. (110) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \Psi_m^{(0)}(\mathbf{r}) = & \left\{ \left(\frac{-i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{ik_0 r_m}}{\sqrt{r_m}} \right) \sum_{n=1}^N [ik_0 (y'_n \sin \theta_s - x'_n \cos \theta_s) \Psi_n^{(0)} - \Phi_n^{(0)}] \Delta s \right\} \\ & \times [e^{-ik_0(x_n \sin \theta_s + y_n \cos \theta_s)}]. \end{aligned} \quad (117)$$

Por lo tanto,

$$|\Psi_m^{(0)}(\mathbf{r})|^2 = \frac{\Delta s}{8\pi k_0 r_m} |\sigma_R(\theta_s)|^2, \quad (118)$$

donde se ha definido la sección eficaz de esparcimiento del material como

$$\sigma_R(\theta_s) = \Delta s \sum_{n=1}^N [ik_0 (y'_n \sin \theta_s - x'_n \cos \theta_s) \Psi_n^{(0)} - \Phi_n^{(0)}] e^{-ik_0(x_n \sin \theta_s + y_n \cos \theta_s)}. \quad (119)$$

Observese que la Ec. (118) es función de dos variables independientes: \mathbf{r} y θ_s . Por ende,

$$p_s(\mathbf{r}, \theta_s) = I_s(\mathbf{r}) \sigma_R(\theta_s). \quad (120)$$

Utilizando un procedimiento similar al caso de la potencia incidente, la potencia esparcida en reflexión está dada por

$$P_R = \int \frac{1}{Z_{\text{aire}}} |p_s|^2 \hat{\mathbf{n}}_i \cdot d\mathbf{a}, \quad (121)$$

tal que

$$|p_s|^2 = |I_s(\mathbf{r})|^2 |\sigma_R(\theta_s)|^2. \quad (122)$$

Finalmente, la potencia esparcida en reflexión es

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{1}{Z_{\text{aire}}} \int |I_s(\mathbf{r})|^2 |\sigma_R(\theta_s)|^2 da \\ &= \frac{1}{8\pi k_0 Z_{\text{aire}}} \int \frac{1}{r_m} |\sigma_R(\theta_s)|^2 da \\ &= \frac{1}{8\pi k_0 Z_{\text{aire}}} \int_0^{L_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r_m} |\sigma_R(\theta_s)|^2 dz r_m d\theta_s \\ &= \frac{L_z}{8\pi k_0 Z_{\text{aire}}} \sum_{i=1}^{N_{\theta_s}} |\sigma_R(\theta_s)|^2 \Delta\theta_s. \end{aligned} \quad (123)$$

Dividiendo la Ec. (123) por la Ec. (115), se tiene el diferencial de la reflectancia:

$$dR(\theta_s) \equiv \frac{P_R}{P_{\text{total}}^{(\text{inc})}} = \frac{1}{8\pi k_0 L_x} |\sigma_R(\theta_s)|^2 \Delta\theta_s. \quad (124)$$

Al integrar sobre el intervalo de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, obtenemos la expresión para la reflectancia

$$R(\theta_s) \equiv \frac{1}{8\pi k_0 L_x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sigma_R(\theta_s)|^2 d\theta_s. \quad (125)$$

Por otro lado, la potencia esparcida en transmisión correspondiente a cada región es

$$P_T = \frac{L_z}{8\pi k_j Z_j} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} |\sigma_T(\theta_s)|^2 d\theta_s. \quad (126)$$

Análogamente, se llega al diferencial de transmitancia $dT(\theta_s)$:

$$dT(\theta_s) \equiv \frac{P_T}{P_{\text{total}}^{(\text{inc})}} = \frac{1}{8\pi k_j L_x} |\sigma_T(\theta_s)|^2 \Delta\theta_s. \quad (127)$$

Integrando la Ec. (127) sobre el intervalo de $[\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$, se obtiene la transmitancia total dada por

$$T(\theta_s) \equiv \frac{1}{8\pi k_j L_x} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} |\sigma_T(\theta_s)|^2 d\theta_s. \quad (128)$$

Cabe mencionar que dichas expresiones para R y T , deben obedecer la ley de la conservación de la energía referida por $R + T = 1$ cuando no se toma en cuenta medios absorbentes.

IV.9. Verificación de los métodos numéricos implementados

Se verifica la fiabilidad de los métodos numéricos implementados para los sistemas infinito y finito considerados en este trabajo de investigación. En estos cálculos es común introducir cantidades adimensionales, por lo que nuestros resultados serán expresados en términos de una frecuencia reducida dada por $\omega_r = (P/2\pi c_{\text{aire}})\omega$ y un vector de Bloch reducido dado por $K_r = (P/2\pi)K$.

IV.9.1. Verificación del método numérico en el sistema infinito

Con la finalidad de ver la funcionalidad del método de la ecuación integral en sistemas acústicos infinitos, comparamos los resultados analíticos con los obtenidos numéricamente para el caso particular de la PnCW infinita con paredes planas y sin inclusiones (ver Fig. 16 con $r = 0$). La relación de dispersión en este caso es (Luna-Acosta *et al.*, 1996b)

$$\omega(K_x) = c\sqrt{\left(K_x + \frac{2\pi n}{P}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{P}\right)^2}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \text{ y } m = 1, 2, \dots \quad (129)$$

La relación de dispersión dada por esta ecuación es similar a la de una placa de cristal fonónico, donde el espesor finito en la dirección y da un comportamiento diferente del presentado por el sistema infinito cuando comparamos este sistema con el caso de los cristales fonónicos unidimensionales. Consideremos el siguiente análisis utilizando esta ecuación. El lado derecho de Ec. (129) tiene dos términos dentro del símbolo de raíz cuadrada. La primera representa la estructura de la banda en la primera zona Brillouin². Este término depende del vector Bloch K_x (en este caso es unidimensional

²Definida por una celda primitiva de la red recíproca en el dominio de frecuencias. Su importancia radica en la descripción de las ondas que se propagan en un medio periódico y que pueden ser descritas a partir de ondas de Bloch dentro de la zona de Brillouin.

en la dirección x) y un entero n . El segundo término está presente porque el sistema es finito en la dirección y , y depende del entero m . En este caso, la frecuencia depende de una variable continua y dos variables discretas. Un cristal fotónico unidimensional tiene una relación de dispersión que depende sólo de una variable continua (vector de Bloch) y una variable discreta; esto se debe a que no hay restricción en la dirección y . Sin embargo, en el caso de los cristales fonónicos bidimensionales la frecuencia depende de dos variables continuas (las dos componentes del vector de Bloch) y dos variables discretas. Esto conduce a diferentes fenómenos físicos que no pueden estar presentes en nuestro sistema, ya que tenemos un vector de Bloch con una componente en lugar de dos.

En la Fig. 18 con círculos azules, mostramos la estructura de bandas calculada con el método de la ecuación integral, la cual está en términos de una frecuencia reducida $\omega_r = \left(\frac{P}{2\pi c}\right)\omega$ y un vector de Bloch reducido $-\frac{\pi}{P} \leq k_r \leq \frac{\pi}{P}$, con $P = 2\pi$ y $b = 3$ en unidades adimensionales (u.a.). Además, la estructura de bandas analítica calculada a partir de la Ec. (129) se encuentra en la misma figura representada por puntos rojos, mostrando una buena concordancia entre ambos resultados.

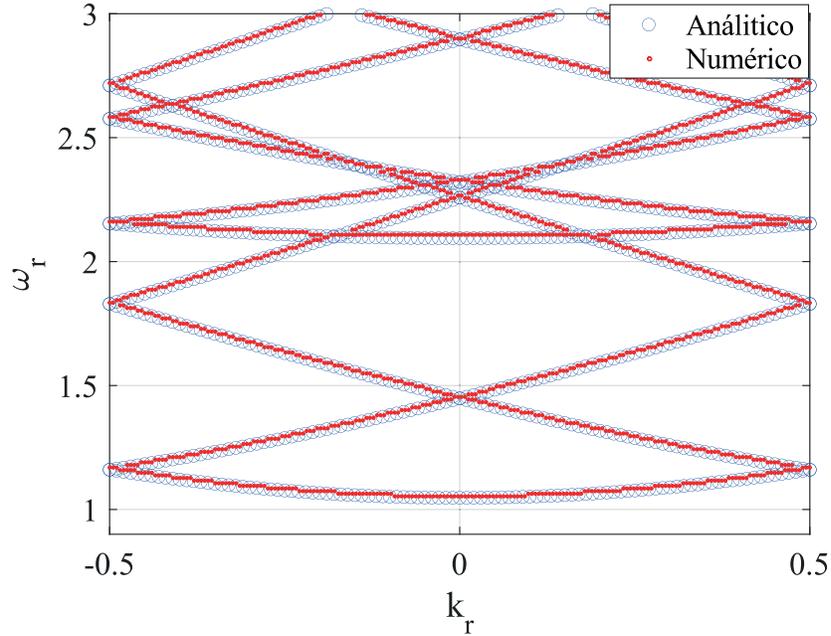


Figura 18. Estructura de bandas para una PnCW formada por dos paredes planas y paralelas. Comparación del modelo analítico (círculos azules) con el numérico (puntos rojos).

IV.9.2. Verificación del método numérico en el sistema finito

Se realiza una comparación entre la estructura de bandas para un PnCW de paredes planas con inclusiones cilíndricas de superficie acústica perfectamente suave y la reflectancia para un sistema finito análogo que es iluminado por un haz de ondas planas a incidencia normal. La Fig. 19 (a) muestra la estructura de bandas en términos de la frecuencia reducida ω_r donde $-\frac{\pi}{P} \leq k_r \leq \frac{\pi}{P}$, $P = 2\pi$, $b = \pi$ y el radio de las inclusiones es $r = 1.1772$. En el caso de la guía finita se toma una longitud $d = 20\pi$ (10 periodos) y un ancho de las placas $l = 30$, que bajo estos parámetros la Fig. 19 (b) muestra la respuesta acústica del sistema. Al comparar ambas gráficas se tiene que la reflectancia $R \approx 1$ en las regiones delimitadas por las bandas prohibidas, por lo que los modos discretos corresponden en gran medida con los mínimos ω_r de la reflectancia. Los métodos numéricos utilizados para calcular la estructura de bandas y la reflectancia son inde-

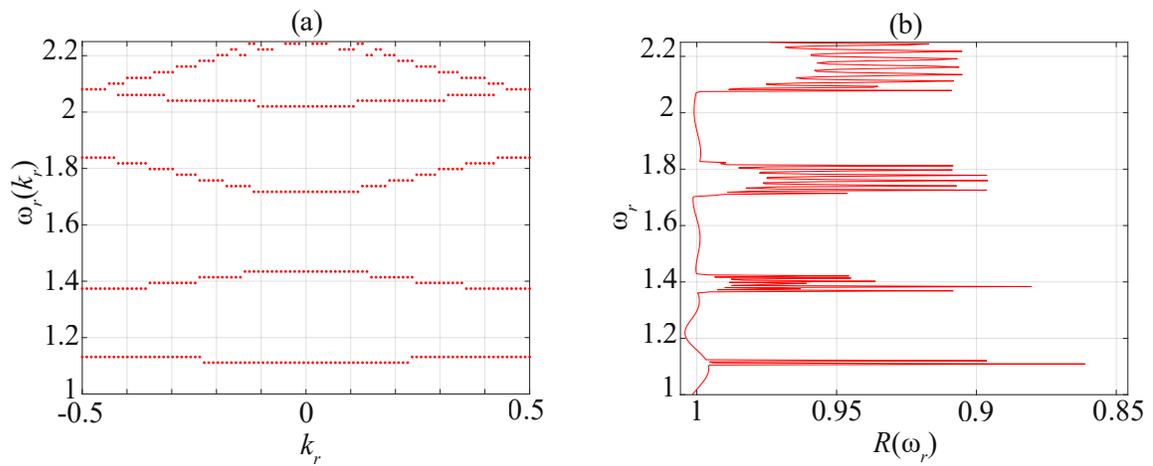


Figura 19. (a) Estructura de bandas para una PnCW formada por dos paredes planas y paralelas con inclusiones cilíndricas perfectamente suaves. (b) Respuesta óptica de una PnCW finita al considerar un haz de ondas planas que incide de forma normal sobre la guía con superficies idealmente suaves.

pendientes, aunque ambos hacen uso del teorema de Green. Las gráficas anteriores nos permiten constatar que el uso del método numérico integral es válido para calcular la respuesta acústica de los sistemas considerados en este trabajo.

Capítulo V

RESULTADOS

En esta sección mostraremos los resultados numéricos más sobresalientes obtenidos para cada sistema considerado.

V.1. Función de autocorrelación en sistemas acústicos

Una herramienta matemática importante para la interpretación de datos numéricos es la función de autocorrelación. La función de autocorrelación (ACF) define cómo se relacionan los puntos de datos de una serie espacial (o temporal), en promedio, con los puntos de datos precedentes. En otras palabras, mide la auto-similitud del conjunto de datos (Vilela *et al.*, 2013).

La función de autocorrelación para un patrón de intensidad de campo de presión acústica, $I(\mathbf{r})$, en la celda unitaria se define como:

$$ACF_j = \sum_{i=1}^{N_p} \frac{(I(\mathbf{r}_i) - \mu)(I(\mathbf{r}_{i-j}) - \mu)/N_p}{\sigma^2}, \quad (130)$$

con

$$\mu = \sum_{i=1}^{N_p} \frac{I(\mathbf{r}_i)}{N_p} \quad (131)$$

y

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N_p} \frac{(I(\mathbf{r}_i) - \mu)^2}{N_p}, \quad (132)$$

donde μ es el valor medio de I y σ^2 es la varianza; N_p es el número de puntos de muestreo con coordenadas $(x_i, y(x_i))$, siendo para este caso $y(x)$ fija, con $0 < x < P$ en el sistema infinito y $0 < x < 10P$ en el sistema finito y el subíndice j indica el valor de la ACF respecto al j -ésimo punto coordenado. De esta manera, la autocorrelación se calculó utilizando puntos localizados en la sección media superior de la guía. Las autocorrelaciones de los patrones de intensidad que mostraremos en este trabajo resultan de las correlaciones entre los valores de la propia intensidad $I(\mathbf{r})$. Una cantidad que podría ser aún más importante es la longitud de correlación l_c , la cual nos sirve para comparar los casos considerados ya que es una medida que se utiliza para cuantificar la dispersión de un conjunto de datos numéricos, y se define como la desviación estándar de la autocorrelación espacial (Doya *et al.*, 2002; Montenegro-García, 1989). Para sistemas donde se presenta el fenómeno de caos la longitud de correlación tiende a cero (Sugihara and May, 1990).

V.2. PnCW infinita con inclusiones cilíndricas de superficies acústicas

En primera instancia, consideraremos el sistema de la Fig. 20, el cual está formado por dos superficies planas que contienen un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares acústicas de radio $r = \sqrt{fPb/\pi}$, el cual se encuentra en términos de la fracción de llenado f , la separación entre las superficies planas b y el periodo P . Además,

el programa computacional requirió del protocolo de paralelización MPI¹ para reducir el tiempo de cómputo para la obtención de los resultados (Trejo, 2019; Hernández, 2015). Para calcular la distribución de campo dentro de la celda de unitaria de la Fig. 20,

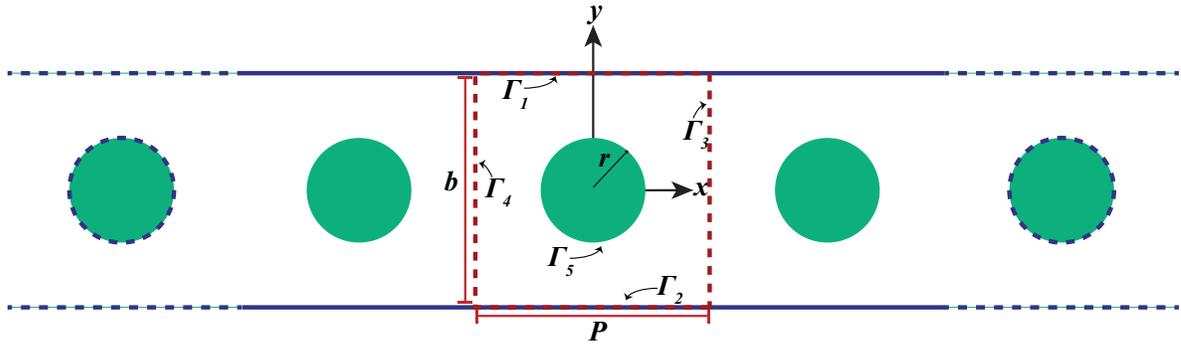


Figura 20. Diagrama de una PnCW infinita formada por paredes planas y paralelas que envuelven un arreglo periódico con inclusiones circulares superficies acústicas.

para un modo del sistema dado $(k_r = 0, \omega_r)$, consideramos el siguiente procedimiento en dos pasos:

1. Encontramos numéricamente las funciones de la fuente resolviendo el sistema de ecuaciones homogéneas. Es decir, obtenemos la función determinante dada por $D(K_r = 0, \omega_r)$ previamente descrita y tomamos sus mínimos locales para obtener las funciones fuente (ver Fig. 21(a)). Un paso adicional que puede realizarse es el obtener la estructura de bandas (ver Fig. 21(b)) que para distintos valores de las frecuencias estarán asociados distintos modos del sistema.
2. Sustituimos las funciones fuente para obtener el campo de presiones $p(\mathbf{r})$ en cualquier punto de la celda unitaria. Con éste obtenemos fácilmente la intensidad de presión $I(\mathbf{r}) = |p(\mathbf{r})|^2$.

¹Por sus siglas en inglés, *Message Passing Interface*. Es una especificación para programación de paso de mensajes, que proporciona una librería de funciones Fortran que son empleadas en los programas para comunicar datos entre procesos.

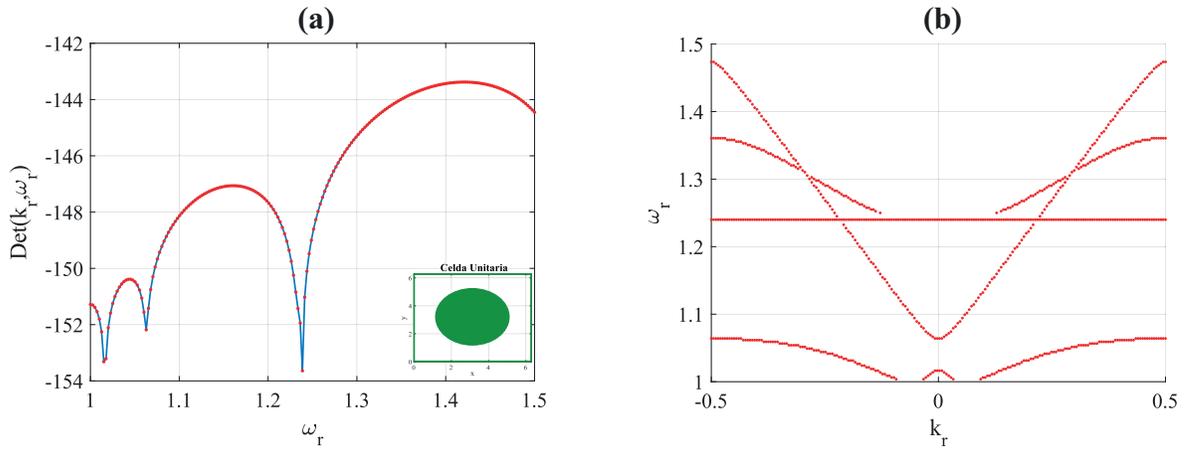


Figura 21. (a) Función determinante para un modo del sistema de la parte inferior derecha. (b) Estructura de bandas correspondiente al sistema.

Posteriormente obtuvimos las ACFs de acuerdo a una muestra de datos de la intensidad de presión $I(\mathbf{r})$, así como la longitud de correlación l_c .

En primera instancia las Figs. 22 y 23 muestran resultados obtenidos de tomar distintas celdas unitarias, ilustrando 3 celdas unitarias consecutivas. La Fig. 22(a) es calculada con la celda unitaria que se estará tomando para los posteriores resultados; mientras que, las Figs. 22(d) y (g) son la misma celda unitaria desplazada en dirección del eje x . Como se muestra en la misma figura, las estructuras de bandas (Figs. 22(c), (f) e (i)) permanecen casi inalterables. Esto es debido a que el sistema representado por la celda unitaria en todos los casos caracterizan al mismo sistema infinito. La diferencia radica en que el método numérico genera el campo de los bordes de la celda unitaria a partir de una distancia $\epsilon > 0$; por lo que, si la inclusión es suficientemente cercana a las paredes del sistema los resultados empiezan a incrementar el error numérico. En el caso de las ACFs correspondientes a cada celda unitaria (Figs. 22(b), (e) y (h)), si bien mantienen la misma forma, su alteración se debe a que las celdas caracterizan el mismo sistema. Así, el conjunto de puntos que se toma de cada una, están desplazados respecto a la celda unitaria donde la inclusión permanece en el centro de la celda.

Por otro lado, un sistema distinto es planteado en la Fig. 23, en el que la inclusión se

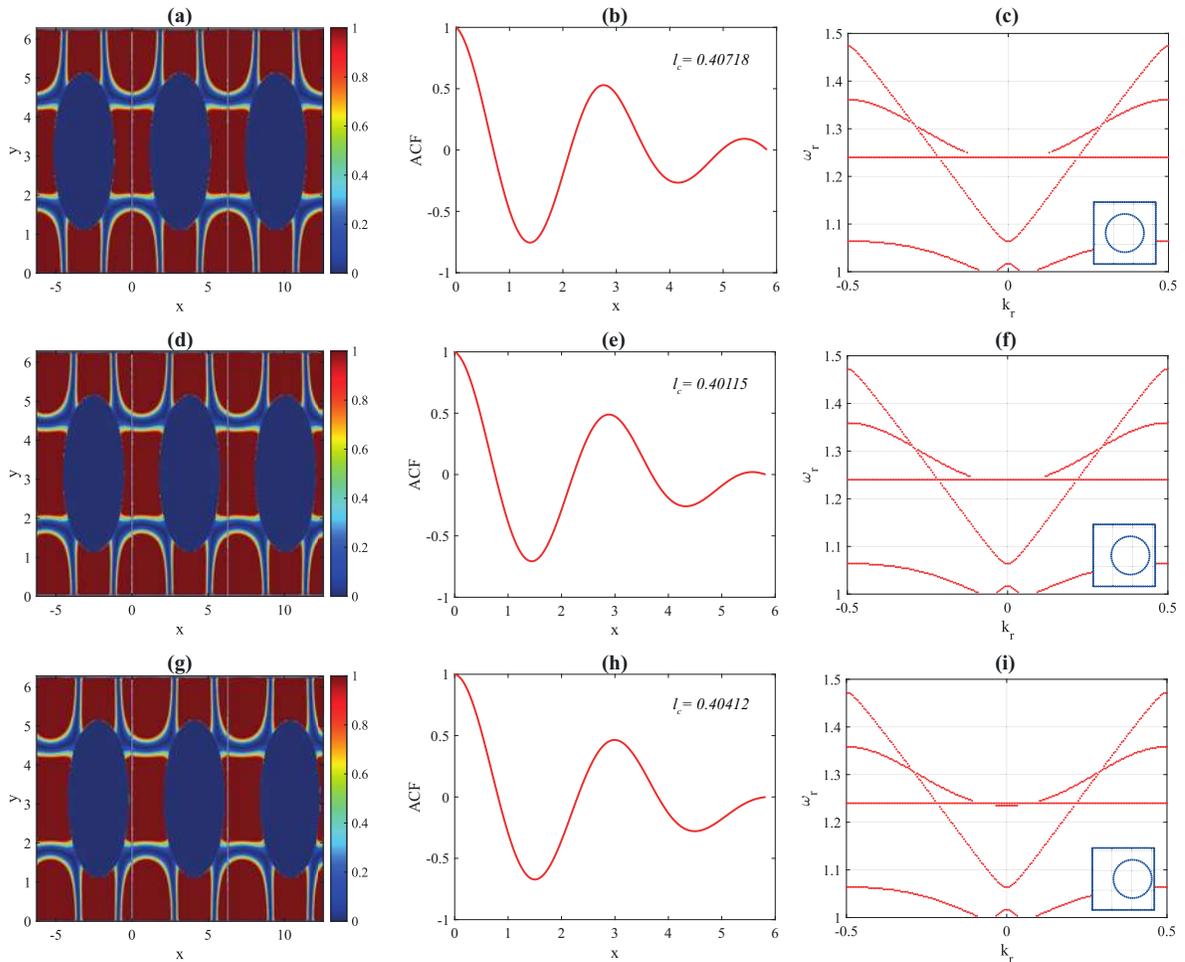


Figura 22. La primera columna son los campos con tres celdas unitarias desplazadas relativo al eje x , para un modo del sistema infinito. La segunda y tercera columna corresponden a las ACFs y estructura de bandas, respectivamente. La celda unitaria se muestra en la parte inferior derecha de las estructuras de bandas.

encuentra desplazada respecto al eje y . Si bien estos son sistemas distintos, ocurre lo análogo descrito con anterioridad; es decir, las celdas de los sistemas de las Figs. 23(d) y (g) corresponden al mismo sistema, obteniendo las mismas estructuras de bandas e intensidades en los campos de presiones. Siendo así las estructuras de bandas casi idénticas, debido al punto central de la inclusión de radio nulo.

A continuación se presentarán los resultados obtenidos con distintos materiales

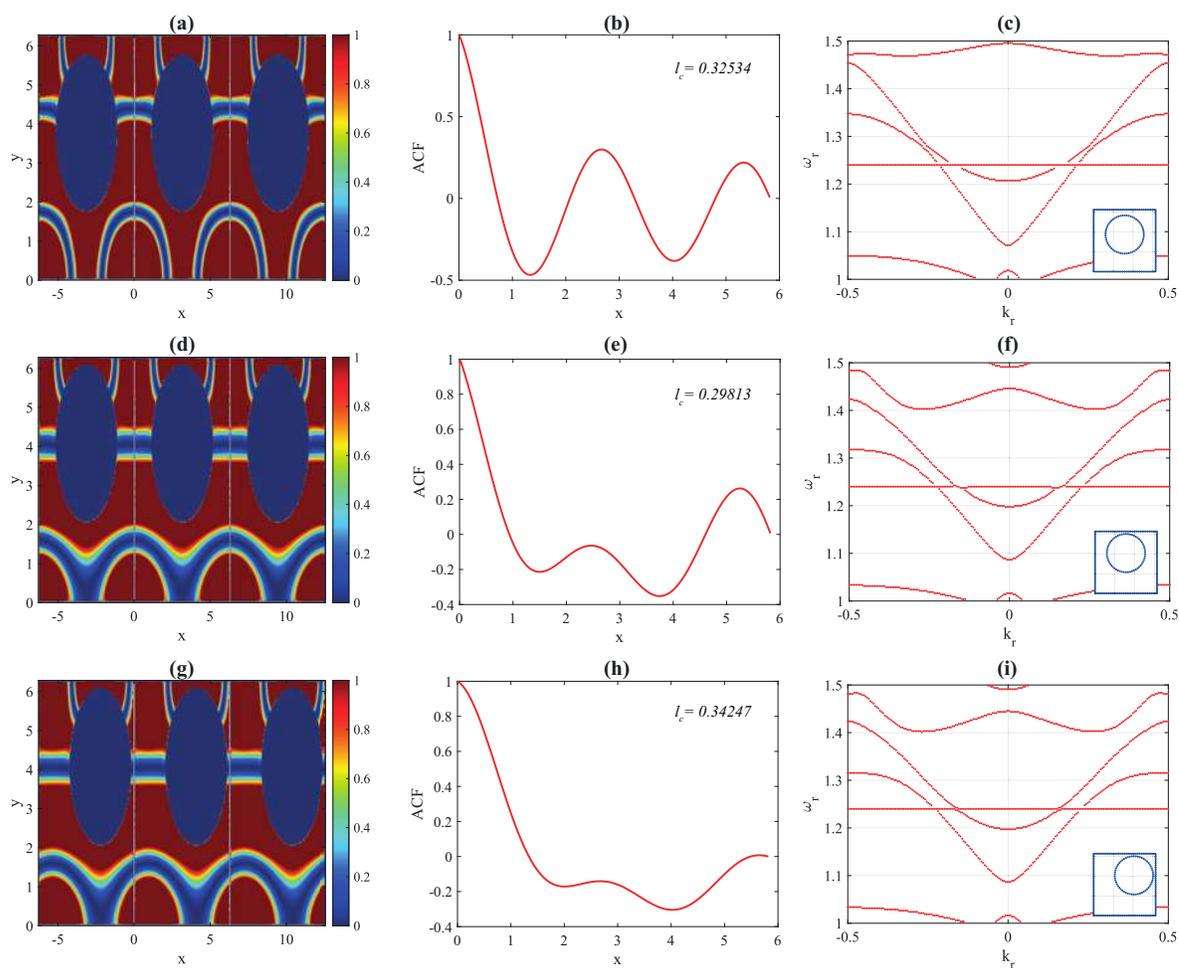


Figura 23. La primera columna son los campos con tres celdas unitarias desplazadas relativo al eje y , para un modo del sistema infinito. La segunda y tercera columna corresponden a las ACFs y estructura de bandas, respectivamente. La celda unitaria se muestra en la parte inferior derecha de las estructuras de bandas.

acústicos, para el caso de la celda unitaria cuadrada con la inclusión centrada en ésta.

V.2.1. Superficie Suave

Primeramente se consideró el caso en que los cuerpos del sistema son de superficies acústicas suaves; es decir la impedancia acústica característica de los cuerpos $Z_m \rightarrow 0$, por lo que tenemos un problema de Dirichlet. Los resultados mostrados a continuación son obtenidos considerando los siguientes parámetros. Se trata de una guía con una separación entre las placas $b = 2\pi \mu\text{m}$, con fracción de llenado $f = 0.3$ (radio de las inclusiones $r = 1.94 \mu\text{m}$) y periodicidad $P = 2\pi \mu\text{m}$ para un paso de discretización $\Delta s = 0.008971 \mu\text{m}$. Además, la función determinante $D(k_r = 0, \omega_r)$ fue calculada para un número de frecuencias dado por $n_\omega = 200$. En el primer caso obtenemos un mínimo local a la frecuencia de $\omega = 410.83\text{MHz}$ cuya intensidad de presión se muestra en la Fig. 24(a). En la Fig. 24(b) se muestra la función de autocorrelación calculada a partir de $N_p = 2,677$ puntos de muestreo y $y(x) \approx 5.5$. A partir de la ACF se obtiene la longitud de correlación de $l_c = 0.3157$. Consideremos ahora otro mínimo local dado por la frecuencia de $\omega = 6,696.51 \text{ MHz}$. En la Fig. 24(c) se muestra la intensidad del campo de presiones con su respectiva función de autocorrelación (Fig. 24(d)), obteniendo una longitud de correlación de $l_c = 0.1332$. Un cálculo más es obtenido para $\omega = 231,716.96 \text{ MHz}$, mostrando el campo resultante en la Fig. 24(e) y su respectiva ACF y $l_c = 0.0706$ en la Fig. 24(f). Notése que, con el aumento de ω_r , se tiene que, $l_c \rightarrow 0$. Para la obtención de resultados confiables en el caso de altas frecuencias, es necesario utilizar intervalos de discretización Δs pequeños comparados con las dimensiones del sistema. Además, comentaremos algunos resultados para casos particulares de sumo interés.

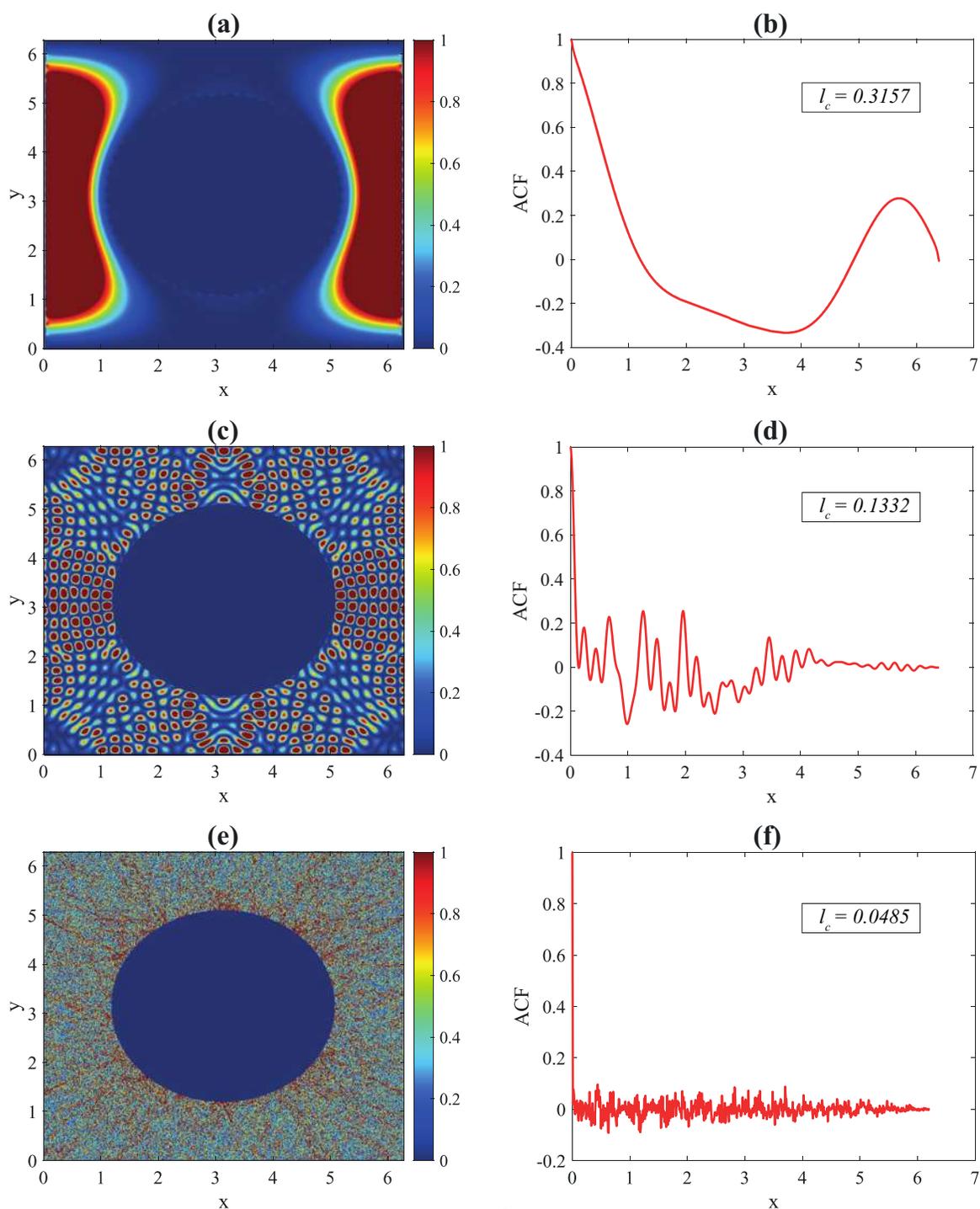


Figura 24. Intensidades del campo de presión de una guía de ondas infinita con materiales acústicos suaves calculadas para (a) $\omega = 410.83$ MHz, (c) $\omega = 6,696.51$ MHz y (e) $\omega = 231,716.96$ MHz. (b), (d) y (f) Funciones de autocorrelación calculadas a partir de (a), (c) y (e), respectivamente.

V.2.2. Superficie Rígida

Continuando con los resultados obtenidos en la guía de ondas infinita, consideraremos ahora las superficies rígidas o duras. Usando los mismos parámetros que en las superficies suaves: $b = 2\pi \mu\text{m}$, $f = 0.3$ (radio de las inclusiones $r = 1.94 \mu\text{m}$), $P = 2\pi \mu\text{m}$, $\Delta s = 0.008971 \mu\text{m}$, $N_p = 2677$ y $y(x) \approx 5.5$, pero ahora se considera un problema de Neumann, ya que la impedancia acústica $Z_m \rightarrow \infty$. Obtenemos así, mínimos locales en las frecuencias $\omega = 410 \text{ MHz}$, $\omega = 6,629.31 \text{ MHz}$ y $\omega = 231,716.96 \text{ MHz}$. En las Figs. 25(a), (c), (d) se muestran las intensidades del campo de presión para las frecuencias previamente mencionadas. En las Figs. 25(b), (d), (f) se muestran las funciones de autocorrelación calculadas de manera similar que en el caso de superficies suaves, obteniendo, las longitudes de correlación de $l_c = 0.4098$, $l_c = 0.0487$ y $l_c = 0.1216$ para cada modo del sistema, respectivamente. De donde notamos que, la ACF, así como la longitud de correlación l_c decaen conforme la frecuencia es mayor.

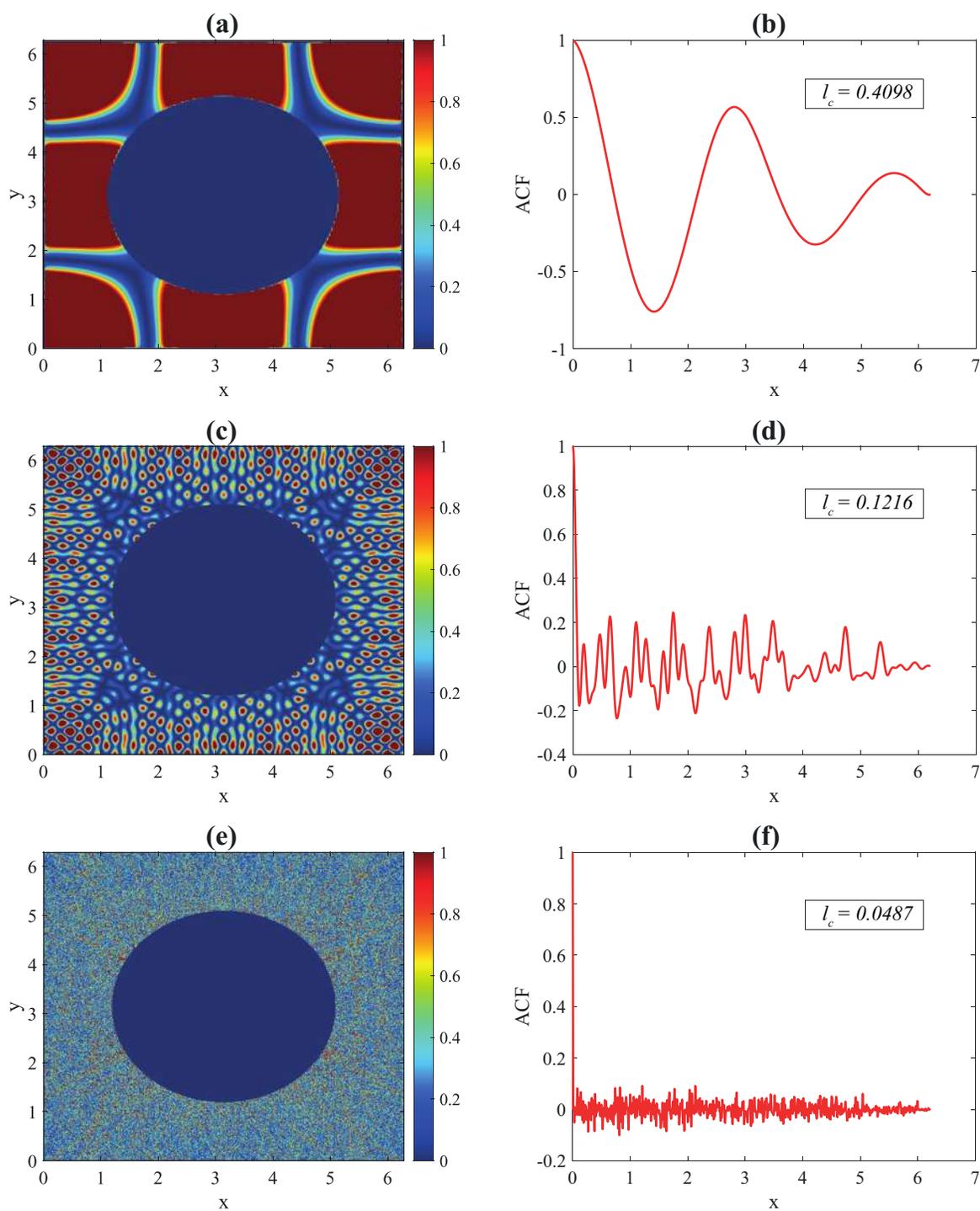


Figura 25. Intensidades del campo de presión de una guía de ondas infinita con materiales acústicos rígidos calculadas para (a) $\omega = 410$ MHz, (c) $\omega = 6,629.31$ MHz y (e) $\omega = 231,716.96$ MHz. En (b), (d) y (f) Funciones de autocorrelación calculadas a partir de (a), (c) y (e), respectivamente.

V.2.3. Superficies acústicas reales

Ahora vamos a considerar que las inclusiones son de materiales reales y para ello necesitamos las condiciones de frontera sobre la inclusión. Además, de considerar la relación de dispersión

$$k = \frac{\rho_r}{Z_r} \frac{\omega}{c_{\text{aire}}}. \quad (133)$$

que viene dada en términos de la densidad relativa del material respecto al aire ρ_r ; así como de la impedancia acústica característica relativa del material respecto al aire Z_r . Las densidades e impedancias características de los materiales se toman de la Tabla III.

La Fig. 26 muestra los casos para el campo y ACFs calculados para el caso particular en que la inclusión es de aire, y las placas son superficies suaves o rígidas. Esto sirve como otra manera de verificar el método integral, ya que teóricamente, un sistema de placas plano-paralelas es el análogo a considerar uno de placas plano-paralelas con inclusiones de aire en un sistema sumergido en aire. La impedancia característica del aire es de $Z_{\text{aire}} = 428$ Rayls y una densidad de $\rho = 1.293 \text{ kgm}^{-3}$, para un sistema con celda unitaria cuadrada de $2\pi \mu\text{m}$ con inclusiones de radio $r = 1.94 \mu\text{m}$ y un paso de discretización de $\Delta s = 8.9 \times 10^{-3} \mu\text{m}$. En el caso en que las placas son de superficie suave (Figs. 26(a) y (d)) las intensidades del campo de presiones para una frecuencia de $\omega = 369.79$ MHz coinciden en gran medida. Sus respectivas ACFs difieren en un punto, ya que son obtenidas de $N = 6277$ puntos a lo largo del $y \approx \pi$; es decir, la línea paralela al eje x que atraviesa el centro de la inclusión. Así, en el caso en el que no hay inclusión, se considera un radio $r = 0$, por lo que el código considera a la inclusión como un sólo punto que no tiene valor en el programa, causando esa discontinuidad sobre su ACF. Caso similar ocurre cuando las placas de la PnCW son de superficie rígida (Figs. 26(f) y (h)).

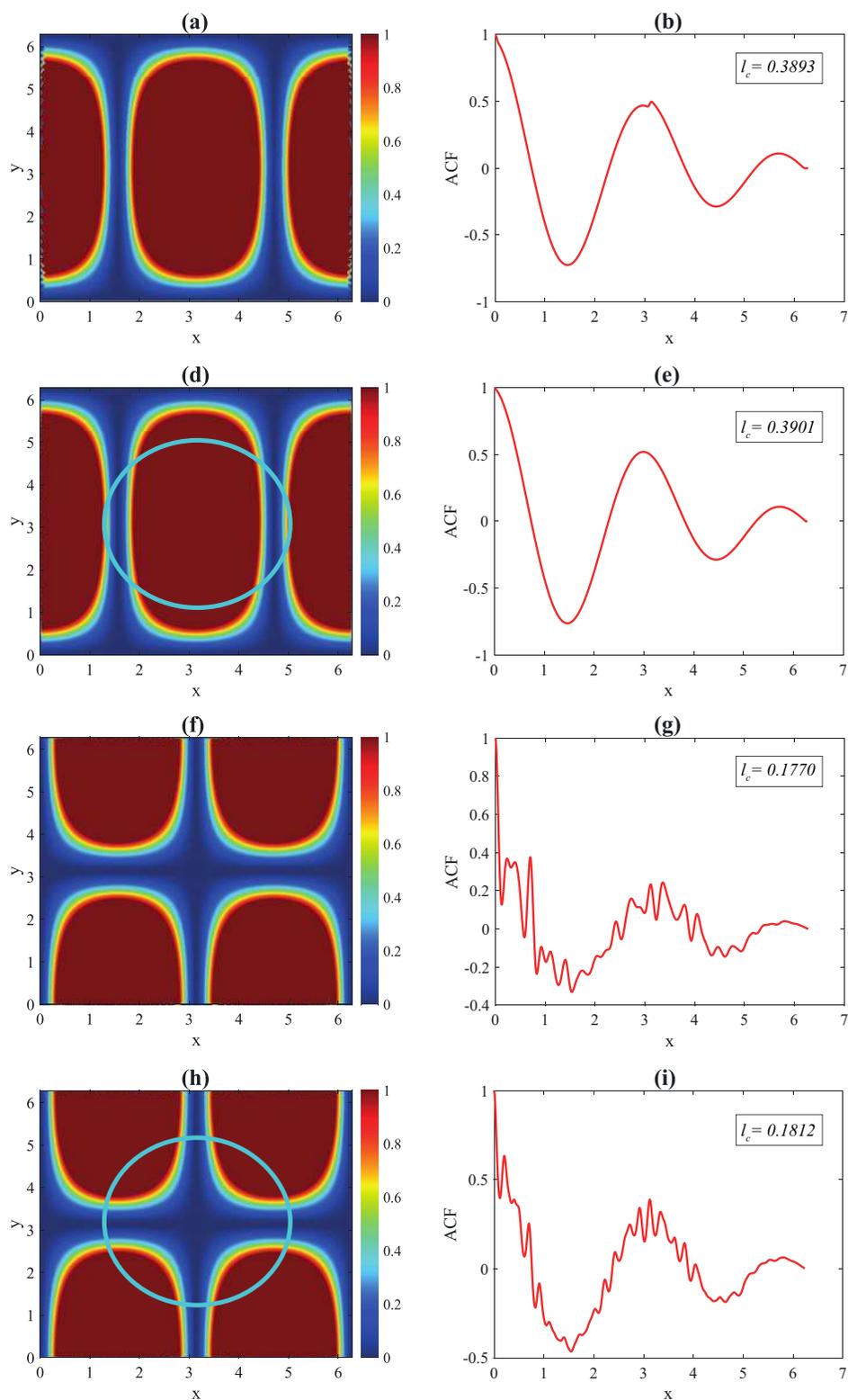


Figura 26. (a) y (f) Intensidades de campo para PnCW infinta sin inclusiones. (d) y (h) Con inclusiones de aire con placas planas de superficies (a) y (d) suaves y (f) y (h) rígidas, con sus respectivas ACFs.

El siguiente caso es para una PnCW cuadrada de $2\pi \mu\text{m}$, con placas de superficies acústicas rígidas con inclusiones de aluminio de radio $r = 1.94 \mu\text{m}$ (ver Fig. 27) para un paso de discretización de $\Delta s = 1.26 \times 10^{-1} \mu\text{m}$. La impedancia característica del aluminio es de $Z_{\text{aluminio}} = 17 \text{ MRayls}$ y tiene una densidad de $\rho = 2700 \text{ kgm}^{-3}$. Se obtiene la intensidad del campo de presiones para frecuencias de $\omega = 410.10 \text{ MHz}$, $\omega = 1.69 \times 10^4 \text{ MHz}$, $\omega = 6.66 \times 10^4 \text{ MHz}$ y $\omega = 1.99 \times 10^5 \text{ MHz}$ obteniendo longitudes de correlación de $l_c = 0.3152$, $l_c = 0.1263$, $l_c = 0.1016$ y $l_c = 0.0828$, respectivamente. Notemos que la longitud de correlación decrece para el caso de material de aluminio con el aumento de la frecuencia al igual que en el caso del aire como es de esperarse.

El último caso considerado es en el que se tiene una PnCW cuadrada de $2\pi \mu\text{m}$, con placas de superficies acústicas suaves con inclusiones de hidrógeno de radio $r = 1.94 \mu\text{m}$ (ver Fig. 28) para un paso de discretización de $\Delta s = 1.26 \times 10^{-1} \mu\text{m}$. La impedancia característica del hidrógeno es de $Z_{\text{hidrógeno}} = 17 \text{ MRayls}$ y tiene una densidad de $\rho = 2700 \text{ kgm}^{-3}$. Obtenemos la intensidad del campo de presiones para frecuencias de $\omega = 462.4 \text{ MHz}$, $\omega = 1.70 \times 10^4 \text{ MHz}$, $\omega = 6.67 \times 10^4 \text{ MHz}$ y $\omega = 2 \times 10^5 \text{ MHz}$ con sus respectivas longitudes de correlación de $l_c = 0.3430$, $l_c = 0.1367$, $l_c = 0.0964$ y $l_c = 0.0745$. Notemos que aunque dentro la inclusión los patrones de campo no son igual de “desordenados” que afuera de ésta, se aprecia un patrón más complejo que al de frecuencias más bajas.

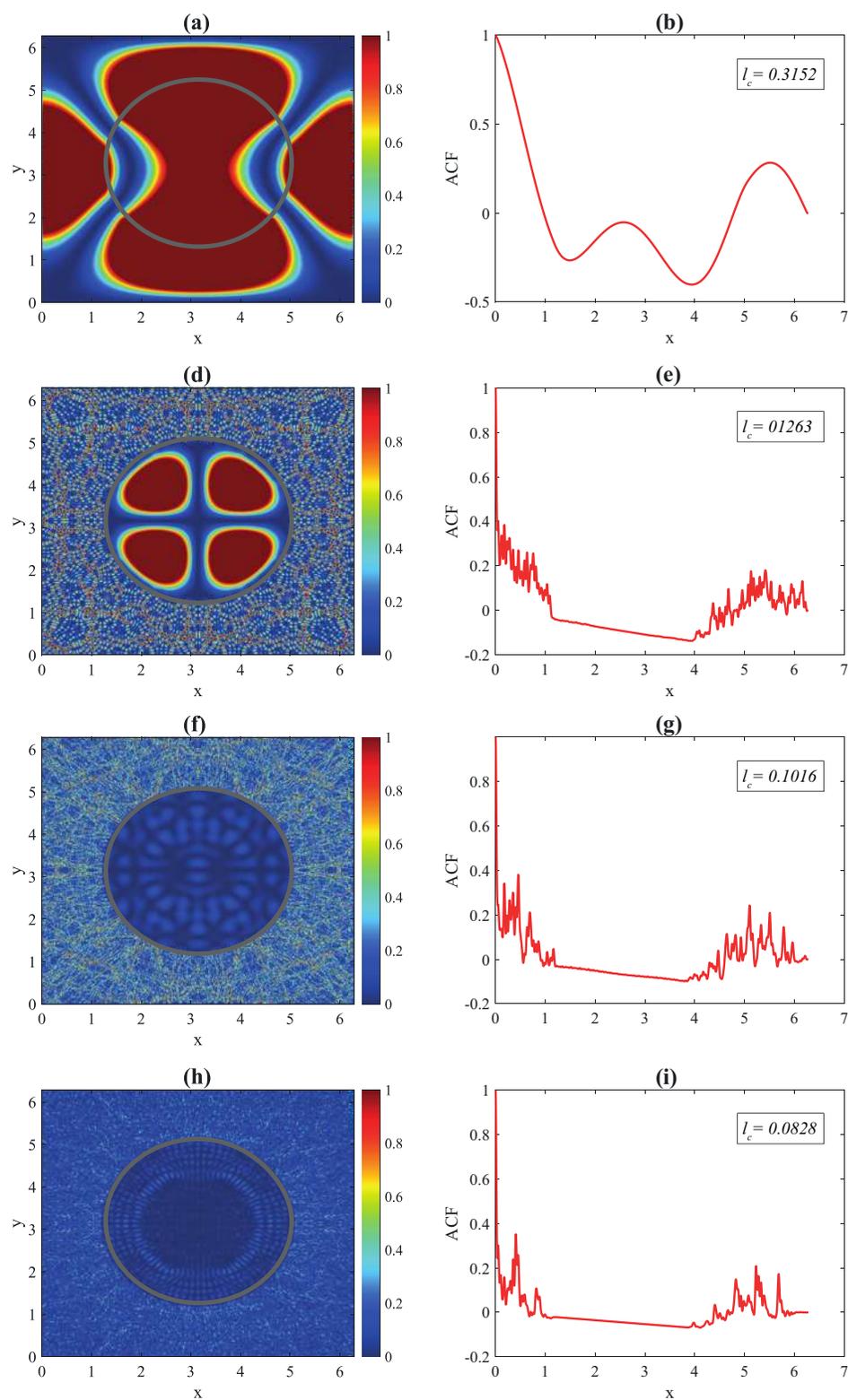


Figura 27. Intensidades de campo para PnCW infinita con inclusiones de **aluminio** con placas planas de superficies rígidas con sus respectivas ACFs y longitudes de autocorrelación.

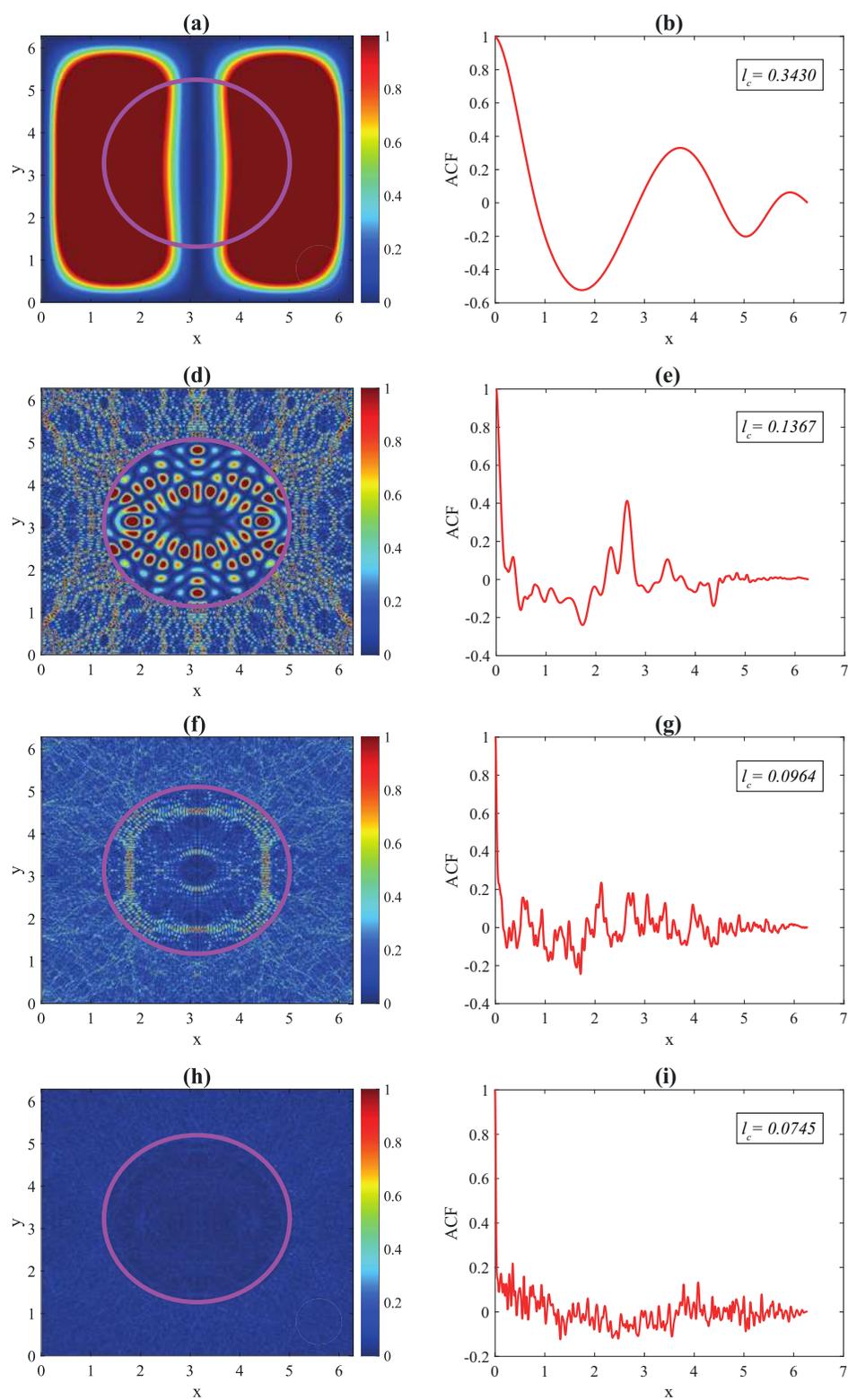


Figura 28. Intensidades de campo para PnCW infinita con inclusiones de **hidrógeno** con placas planas de superficies rígidas con sus respectivas ACFs y longitudes de autocorrelación.

V.3. PnCW finita con inclusiones cilíndricas de superficies acústicas

En el sistema de la PnCW finita (ver Fig. 29) se consideraron 10 inclusiones y las paredes de la guía tienen un grosor $l = 30 \mu\text{m}$ para una mayor fiabilidad en los datos obtenidos. Además, se considera una onda de presión plana a incidencia normal, es decir, $\theta_0 = 0$. Consideramos que la separación entre las placas es de $b = 2\pi \mu\text{m}$ y al igual que el sistema infinito, se tiene el radio de las inclusiones en función de la fracción de llenado $r = \sqrt{fPb/\pi}$. Además, para calcular los patrones de la intensidad del campo

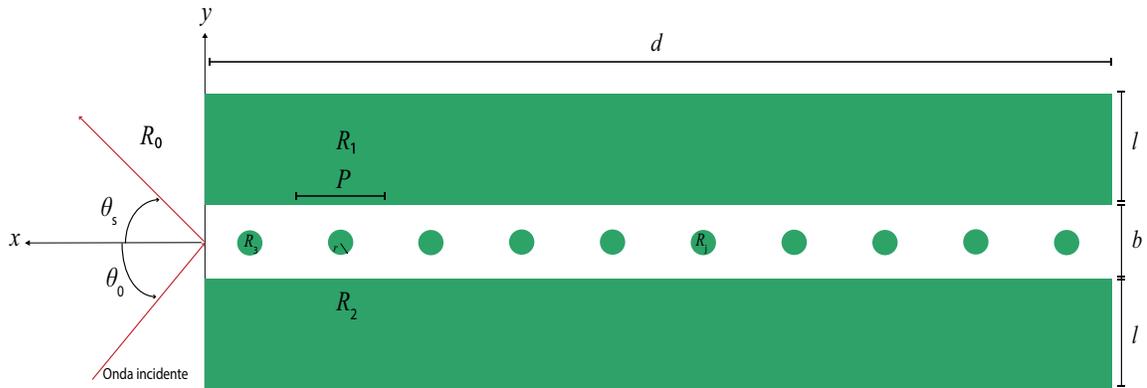


Figura 29. Diagrama de guía de ondas finita con paredes planas e inclusiones cilíndricas de superficies acústicas.

dentro de la guía y en una región cercana a la entrada y salida del haz incidente, se toman los modos donde ω_r tiene asociada una reflectancia mínima y distinta de 1 (ver Fig. 30), que con ello se obtiene el campo $p(\mathbf{r})$ en cualquier punto del sistema. Con éste obtenemos fácilmente la intensidad $I(\mathbf{r}) = |p(\mathbf{r})|^2$. Posteriormente obtuvimos las ACFs y la l_c correspondiente.

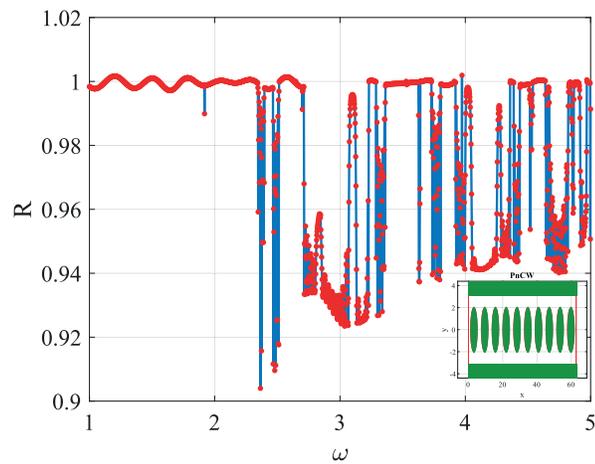


Figura 30. Reflectancia obtenida para distintas frecuencias para el sistema de la parte inferior derecha, en las que las líneas rojas representan una interfaz aire-aire.

Al igual que en el sistema infinito, se considera el efecto de recorrer las inclusiones respecto al eje y en una PnCW finita con superficies acústicas rígidas como se muestra en la Fig. 31. Esto con la intención de acercarnos aún mas al modelo real, que tiene longitudes finitas y el arreglo experimental tiene soportes como en éste caso, las placas plano paralelas. Se obtiene que, si bien son sistemas distintos entre ellos, la longitud de correlación correspondiente no difiere en gran medida uno de otro.

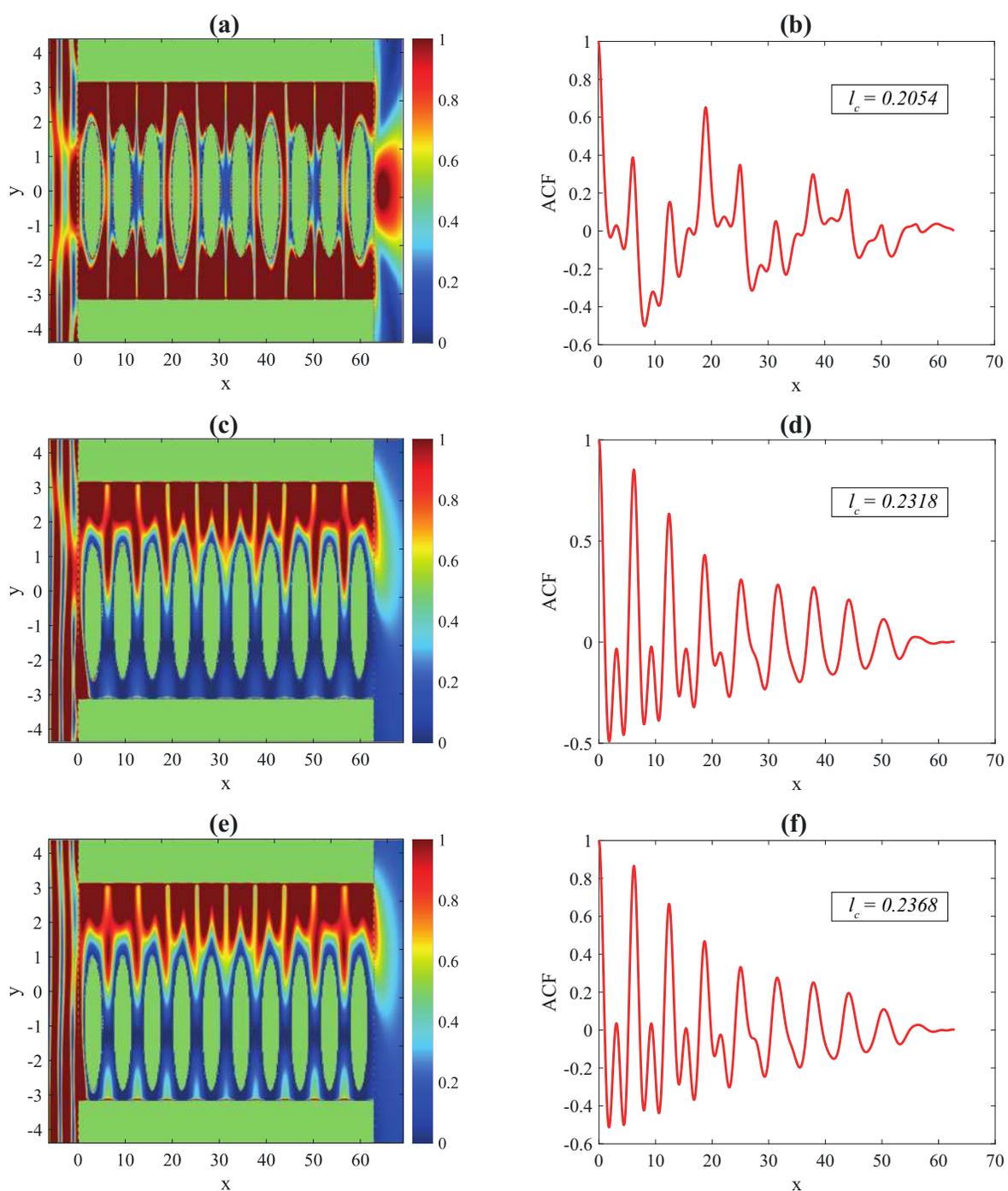


Figura 31. Intensidad del campo de presiones y valor de las ACFs para una PnCW con las inclusiones rígidas siendo recorridas sobre el eje y .

V.3.1. Superficie Suave

Los resultados mostrados a continuación son obtenidos considerando los siguientes parámetros: separación entre las placas $b = 2\pi \mu\text{m}$, fracción de llenado $f = 0.3$ ($r = 1.94 \mu\text{m}$) y periodicidad $P = 2\pi \mu\text{m}$ para un paso de discretización $\Delta s = 0.0209 \mu\text{m}$. La respuesta acústica es calculada a partir del mínimo local de la reflectancia, dada por cierto valor de ω_r . Así, la reflectancia fue calculada para distintos intervalos con un número de frecuencias dado por $n_\omega = 200$, que en el primer caso nos da un mínimo local a la frecuencia $\omega = 492.34 \text{ MHz}$. En la Fig. 32(a) se muestra la intensidad del campo de presión, obtenido para esta frecuencia. En la Fig. 32(b) se muestra la función de autocorrelación calculada a partir de $N_p = 2677$ puntos de muestreo y similarmente para un conjunto de datos dentro de la PnCW a $y(x) \approx 2.5$ obteniendo la longitud de correlación de $l_c = 0.6280$. Consideremos ahora otro mínimo local dado por la frecuencia máxima calculada de $\omega = 33,115.96 \text{ MHz}$. En la Fig. 32(c) se muestra la intensidad del campo de presión con su respectiva ACF ilustrada en la Fig. 32(d), obteniendo una longitud de correlación de $l_c = 0.0309$.

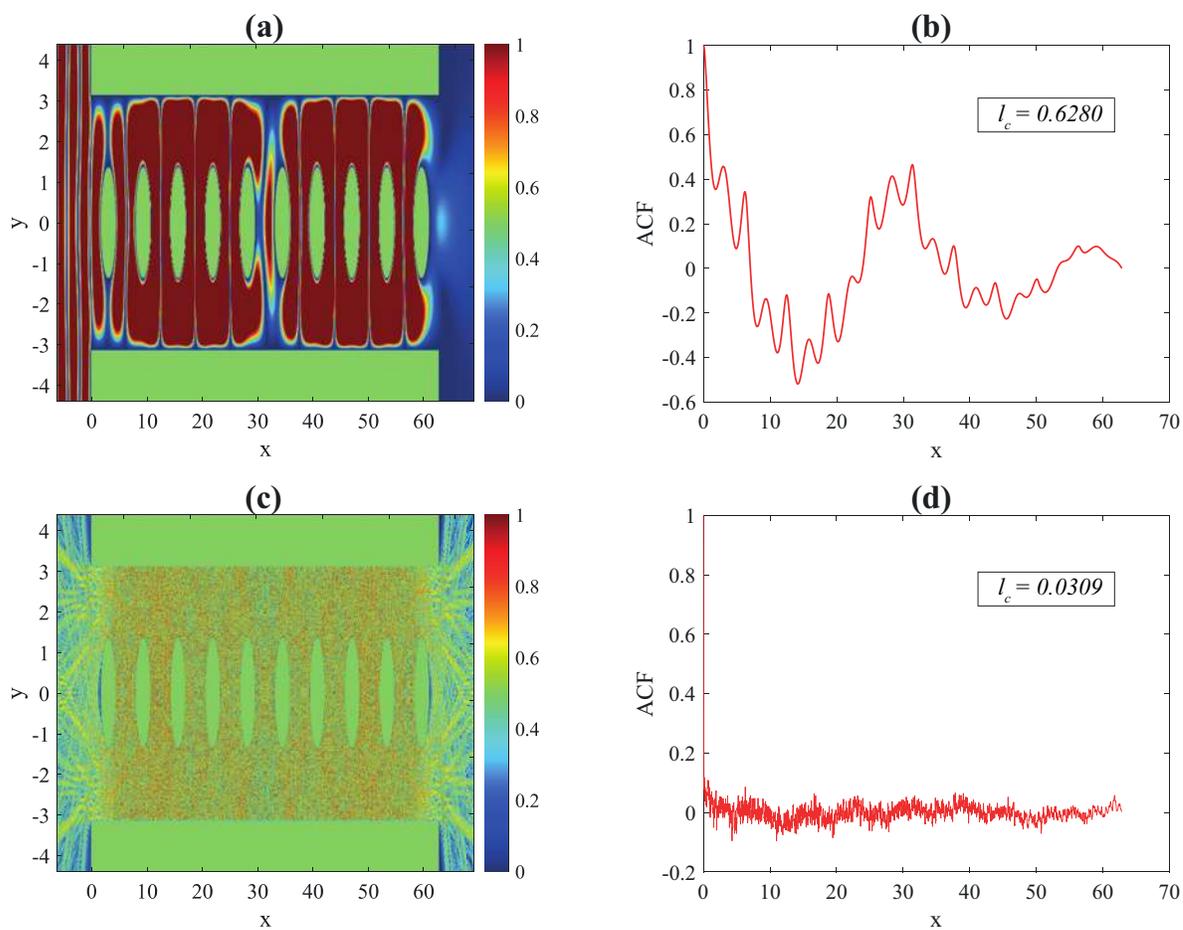


Figura 32. Intensidades del campo de presión de una guía de ondas finita con materiales acústicos suaves calculadas para (a) $\omega = 492.34$ MHz y (c) $\omega = 33,115.96$ MHz. (b) y (d) Funciones de autocorrelación respectivas.

V.3.2. Superficie Rígida

Para los resultados obtenidos en la guía de ondas finita, consideraremos ahora las superficies rígidas o duras. Usando los mismos parámetros que en las superficies suaves: $b = 2\pi \mu\text{m}$, $f = 0.3$ ($r = 1.94 \mu\text{m}$), $P = 2\pi \mu\text{m}$, $\Delta s = 0.0209 \mu$, $n_\omega = 200$, $N_p = 2677$ para $y(x) \approx 2.5$. Obtenemos así, mínimos locales para la reflectancia en las frecuencias $\omega = 398.36 \text{ MHz}$ y $\omega = 33,113.14 \text{ MHz}$. En las Figs. 25(a) y (c) se muestran las intensidades del campo de presión para las frecuencias previamente mencionadas. En las Figs. 25(b) y (d) se muestran las funciones de autocorrelación calculadas de manera similar que en el caso de superficies suaves, obteniendo, las longitudes de correlación de $l_c = 0.1899$ y $l_c = 0.0464$ para cada modo del sistema, respectivamente. De donde nuevamente la ACF así como la longitud de correlación l_c decaen conforme la frecuencia es mayor.

De acuerdo con los resultados presentados, se puede observar que en el sistema infinito a grandes frecuencias los patrones de la intensidad del campo son similares en ambos tipos de superficies acústicas. Mientras que, en el sistema finito las frecuencias mayores además de requerir un mayor tiempo de cómputo, se requiere un paso de discretización menor. Así como también muestran unos patrones de la intensidad del campo similares en las frecuencias mayores obtenidas. Además de las longitudes de correlación obtenidas de las ACFs, en ambos sistemas decrecen. Esto puede ser interpretado como un indicio del fenómeno de caos acústico en los sistemas propuestos bajo estudio.

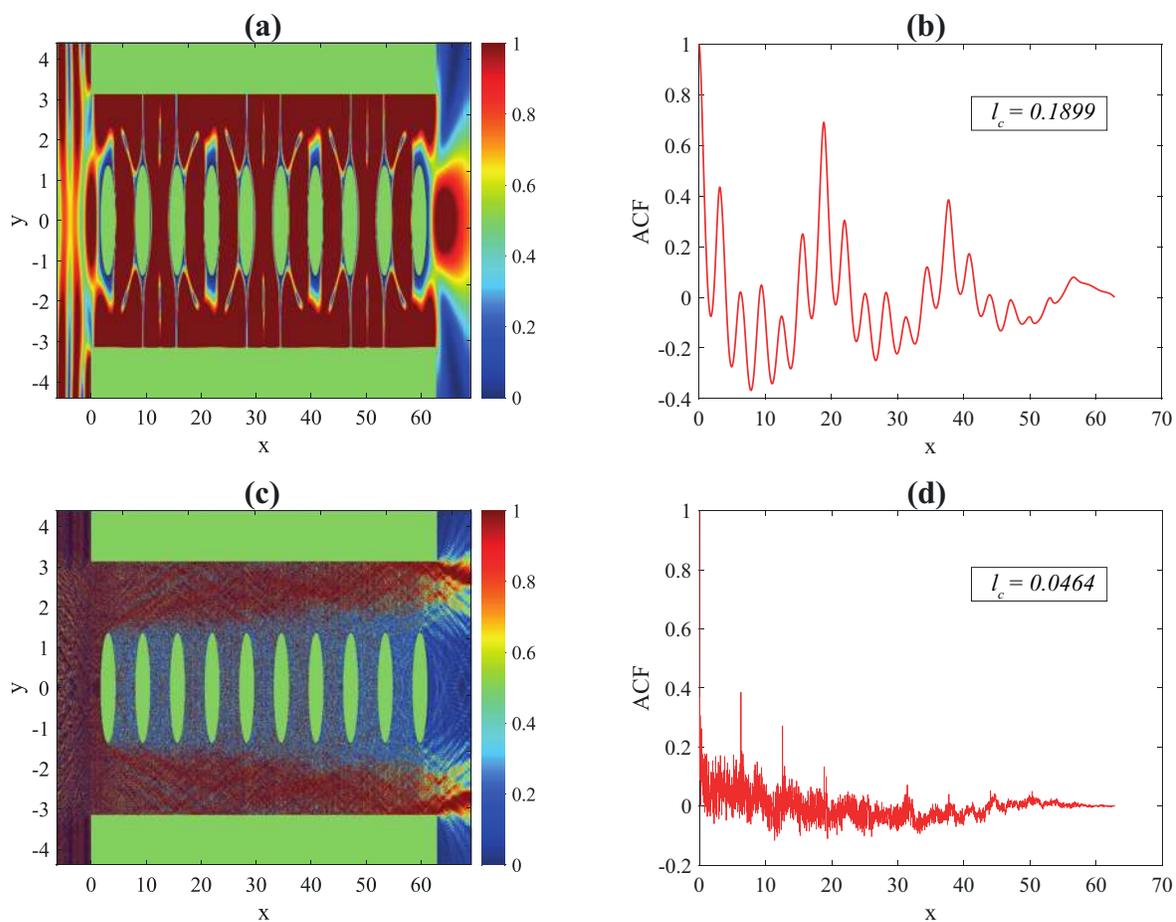


Figura 33. Intensidades del campo de presión de una guía de ondas finita con materiales acústicos rígidos calculadas para (a) $\omega = 398.36$ MHz y (c) $\omega = 33,113.14$ MHz. (b) y (d) Funciones de autocorrelación respectivas.

Capítulo VI

CONCLUSIONES

En el presente trabajo de investigación hemos mostrado un estudio teórico y numérico de la intensidad del campo de presión dentro una guía de ondas de cristal fonónico bidimensional, considerando el sistema de longitudes finita e infinita. Para ello, se aplicó un método integral numérico partiendo de la ecuación de Helmholtz para estudiar las intensidades del campo de presión acústica. Para ambos sistemas se consideraron medios homogéneos, siendo aire el medio entre las superficies acústicas. El método de la ecuación integral que se utilizó en este trabajo parte del segundo teorema integral de Green permitiendo obtener un sistema de ecuaciones integrales acopladas que involucran, como incógnitas al campo de presión y su derivada normal, evaluadas en las superficies involucradas. La discretización del sistema resulta en una ecuación matricial homogénea en el caso infinito, cuya solución determina las funciones fuente, con las que se puede calcular las estructuras de bandas, así como la intensidad de campo. Por otro lado, la ecuación matricial es inhomogénea en el caso finito, por lo que las funciones fuentes nos permiten calcular la reflectancia y con ello el campo cercano al sistema.

Dado que el sistema infinito se encuentra caracterizado por una celda unitaria cuadrada (compuesta de materiales acústicos perfectamente rígidos o suaves), el método

computacional tiene la capacidad de considerar el radio de las inclusiones como cero. Así, se realizó una comparación entre la estructura de bandas obtenida con nuestro método numérico y la estructura de bandas obtenida de forma analítica al considerar un radio igual a cero. Ambas estructuras muestran una excelente concordancia. Al comparar la estructura de bandas y la reflectancia obtenidas, se hace constar que las secciones donde la reflectancia es máxima delimita las bandas prohibidas del sistema análogo, mientras que los mínimos de la reflectancia muestran los modos del sistema. Siguiendo con el sistema finito, se mostró que el desplazamiento de las inclusiones en dirección de la periodicidad es equivalente a seleccionar una celda unitaria desplazada por la misma cantidad, teniendo las mismas estructuras de bandas ya que la celda unitaria y el sistema son en principio el mismo. Caso contrario ocurre cuando el desplazamiento es sobre otra dirección que no sea la de periodicidad. Además, el método numérico considera los patrones de intensidades de los sistemas en el que no hay inclusión y en el que el radio es cero como el mismo sistema. Esto que sugiere otra manera de verificar el método integral, ya que teóricamente, estos dos sistemas describen el mismo problema. Por otro lado, se obtuvieron patrones desordenados de la intensidad del campo de presión acústica en las PnCW infinitas con el aumento de frecuencias, para los casos en que las inclusiones eran de superficies acústicas perfectamente suaves, o rígidas o reales. Siendo estos caracterizados por la impedancia acústica específica; o lo que es lo mismo, la resistencia del material a la propagación de la onda. Estos patrones desordenados están asociados con sistemas caóticos. Otra forma de corroborar esta aseveración es mediante el valor de la longitud de correlación de la función de autocorrelación calculada, que tiende a cero cuando la frecuencia aumenta. De igual manera se obtuvieron patrones de la intensidad del campo de presión acústica en la PnCW finita con el aumento de frecuencias, mediante la reflectancia y el campo esparcido,

para superficies acústicas perfectamente suaves y rígidas. De igual manera, el valor de la longitud de correlación de la función de autocorrelación tiende a cero cuando la frecuencia aumenta.

Debido a que el los sistemas finito e infinito comparten casi en su totalidad los mismos parámetros, y estos comparten una analogía con los sistemas electromagnético y clásico (de billares), podemos concluir que bajo ciertas condiciones, la intensidad describe un comportamiento desordenado con el aumento de la frecuencia, la cual depende de la presencia de la inclusión. El uso de estos métodos numéricos resultó ser bastante útil, ya que se obtuvo lo esperado si lo comparamos con los sistemas clásicos de geometrías semejantes como son los billares de Sinaí.

Además, la optimización de estos métodos numéricos jugó un papel sumamente importante, ya que la implementación de la paralelización MPI en los métodos numéricos y el cambio a las librerías de Intel MKL ayudó a reducir en gran medida el tiempo de obtención de los cálculos, reduciéndolos de días a horas. Además, el poder computacional de memoria requerido para el tamaño de las matrices cambio considerablemente con el uso de máquinas con más procesadores. Esto nos lleva a concluir, a que las limitaciones computacionales son uno de los factores por los cuales no se llegó a un “caos total” ya que no se pudo utilizar un paso de discretización más pequeño, lo que daría más fiabilidad a los datos obtenidos.

Concluimos de grata manera, que el método numérico utilizado en la obtención de las intensidades del campo de presión acústica dan resultados preliminares satisfactorios y que los datos obtenidos de las ACFs y las correspondientes longitudes de correlación nos permiten vislumbrar el fenómeno del caos en los problemas acústicos abordados. Un pleno entendimiento y desarrollo de este tipo de sistemas acústicos y su relación con el fenómeno del caos puede conllevar a grandes avances tecnológicos, como lo ha hecho

el caso del espectro electromagnético.

Apéndice A

CONDICIONES DE FRONTERA

Consideremos a continuación las ecuaciones de continuidad, la ecuación de fuerza no viscosa y la ecuación de estado dadas por

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (134)$$

$$-\nabla p(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad (135)$$

$$p = Bs. \quad (136)$$

Para la primera condición de frontera supongamos que la función es armónica en el tiempo $p(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, así como la velocidad de la partícula $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{u}(\mathbf{r}))e^{-i\omega t}$. Además apliquemos la integral sobre una trayectoria C a la Ec. (135), que pasa por la interfaz como se muestra en la Fig. 34(a) (Filippi *et al.*, 1998),

$$-\int_1^2 \nabla p(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = -i\omega \int_1^2 \rho_0 \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}. \quad (137)$$

Por cálculo integral, el lado izquierdo de la igualdad se simplifica como

$$p^{(2)} - p^{(1)} = i\omega \int_1^2 \rho_0 \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}, \quad (138)$$

donde el super-índice en la presión denota el valor del campo de presión en esos puntos. Además en el límite $|d\mathbf{l}| \rightarrow 0$ se tiene que la Ec. (138) se iguala a cero y obtenemos

que

$$p^{(2)} = p^{(1)}. \quad (139)$$

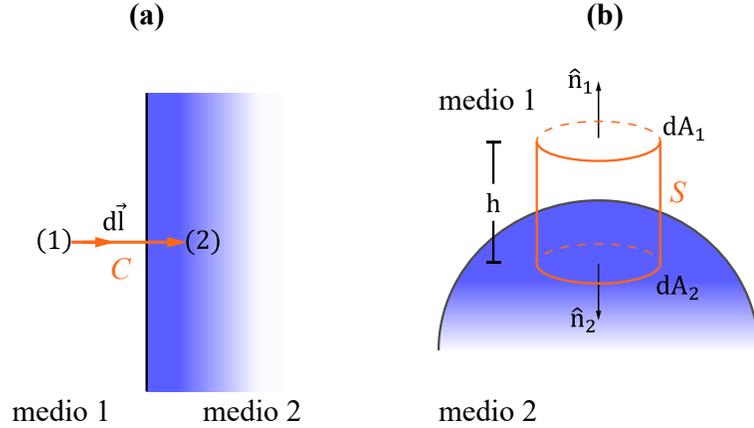


Figura 34. (a) Trayectoria C que va de un punto (1) a un punto (2) atravesando dos medios. (b) Superficie cilíndrica S que abarca ambos medios.

Para la segunda condición de frontera tomemos una superficie cilíndrica cuya mitad se encuentra en la interfaz como se muestra en la Fig. 34(b) e integremos sobre el volumen formado a la Ec. (134),

$$\int_V \frac{\partial s}{\partial t} dV = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV, \quad (140)$$

que del teorema de la divergencia toma la forma

$$\int_V \frac{\partial s}{\partial t} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{a}, \quad (141)$$

puesto que $d\mathbf{a} = dA\hat{\mathbf{n}}$, $dV = h dA$ y la velocidad es armónica en el tiempo, se tiene

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{B} \right) h dA = \oint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} d., \quad (142)$$

Además de la Ec. (135) puede obtenerse

$$\mathbf{u} = -\frac{i}{\omega\rho_0} \nabla p(\mathbf{r}, t), \quad (143)$$

donde ρ_0 depende de en cual de los medios se encuentra. Sustituyendo lo anterior en la Ec. (142) junto al hecho que la presión también es armónica se obtiene

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{B} \right) h dA = -\frac{i}{\omega} \oint_S \frac{1}{\rho_0} \nabla p(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA, \quad (144)$$

que en el limite $h \rightarrow 0$ el lado izquierdo se hace cero y la superficie ahora sólo se compone de las “tapas”. Por otro lado, sabiendo que

$$\frac{\partial p}{\partial n} \equiv \nabla p(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (145)$$

la Ec. (144) nos queda como (tomando en cuenta que $\hat{\mathbf{n}}_2 = -\hat{\mathbf{n}}_1$)

$$\frac{i}{\omega} \int_{S_1+S_2} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial n} dA = 0, \quad (146)$$

$$\int_{S_1} \frac{1}{\rho_{01}} \frac{\partial p}{\partial n_1} dA - \int_{S_2} \frac{1}{\rho_{02}} \frac{\partial p}{\partial n_1} dA = 0. \quad (147)$$

Como las áreas de las tapas son la misma, se obtiene finalmente

$$\frac{1}{\rho_{01}} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial n_1} = \frac{1}{\rho_{02}} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial n_1}. \quad (148)$$

Notemos que elegir el vector normal hacia dentro o hacia fuera es hablar del problema del exterior o del interior. Además, relacionando para ondas planas la densidad con la impedancia y la velocidad del sonido en el medio $Z_m = \rho_0 c_m$. Por lo que las condiciones de frontera son en la interfaz:

$$p^{(1)} = p^{(2)}, \quad (149)$$

$$\frac{c_{m_1}}{Z_{m_1}} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial n} = \frac{c_{m_2}}{Z_{m_2}} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial n}. \quad (150)$$

La primera condición (la continuidad de la presión), significa que no puede haber ninguna fuerza neta en la interfaz que separa los medios. La segunda condición (la continuidad de la componente normal de la presión), exige que los medios permanezcan en contacto (Kinsler *et al.*, 2000).

Cuando el medio 2 es una superficie rígida, la presión normal de las partículas en la frontera es cero; es decir, la segunda condición de frontera en la interfaz (condición de frontera de Neumann) se iguala a cero (Kinsler *et al.*, 2000; Pike and Sabatier, 2001),

$$\frac{c_{m_1}}{Z_{m_1}} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial n} = 0 = \frac{c_{m_2}}{Z_{m_2}} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial n}. \quad (151)$$

En el caso contrario, cuando el medio 2 es una superficie suave, la onda transmitida tiene una amplitud de presión nula en la frontera. Por lo que la primera condición en la interfaz (condición de frontera de Dirichlet) se iguala a cero (Kinsler *et al.*, 2000; Pike and Sabatier, 2001),

$$p^{(1)} = 0 = p^{(2)}. \quad (152)$$

Notemos la similitud entre la polarización eléctrica transversal (TE) con una superficie que limita un conductor eléctrico perfecto es equivalente al caso de la superficie acústica suave; es decir, un problema de Dirichlet. Y que la polarización transversal magnética (TM) con una superficie que limita un conductor eléctrico perfecto es equivalente al caso de la superficie acústica rígida; es decir, un problema de Neumann (Pike and Sabatier, 2001). En el caso particular donde el medio 1 es aire, podemos reescribir las condiciones de frontera como

$$p^{(1)} = p^{(2)}, \quad (153)$$

$$\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial n} = \frac{Z_{m_2}}{Z_{\text{aire}}} \frac{1}{Z_r} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial n}. \quad (154)$$

Apéndice B

ECUACIONES DE MEDIOS CONTINUOS

En este apéndice se obtienen las ecuaciones básicas de la mecánica de los continuos para el caso bastante general de un fluido no viscoso. Se obtiene todo el material necesario para la derivación de las ecuaciones acústicas. Para ello se hacen algunas suposiciones, que suelen ser bastante válidas. Una de ellas es que se ignora la disipación de energía debida a la viscosidad y otros procesos. Otra es la restricción a situaciones en las que el fluido es homogéneo, lo que significa que sus propiedades en un estado no perturbado son las mismas en todas partes. También consideramos que el fluido está en reposo en ausencia de una perturbación acústica.

B.1. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad relaciona el movimiento de un fluido respecto a su dilatación o compresión; es decir, establece una relación entre la velocidad de la partícula \mathbf{u} y la densidad homogénea $\rho(t)$.

Una forma de derivar la ecuación de continuidad es examinar la masa que entra y sale de un volumen de control fijo durante un intervalo de tiempo. Observando la Fig. 35

podemos deducir que, dada la densidad de un elemento infinitesimal $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta m}{\Delta V} \right)$, el cambio de la cantidad de masa total contenida en el volumen V por unidad de tiempo es

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_V \rho(t) dV \right). \quad (155)$$

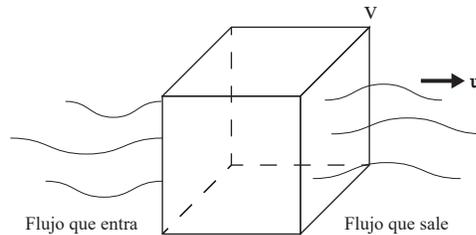


Figura 35. Flujo de masa por elemento de volumen.

Por otro lado el flujo de materia Φ , con velocidad \mathbf{u} , sobre el volumen V es

$$\Phi = \oint_S (\rho(t)\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{s} = \int_V \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) dV, \quad (156)$$

donde $\Phi > 0$ si sale materia y $\Phi < 0$ si entra materia. Como la cantidad de masa en el volumen V crece o decrece a través del flujo de materia, la cantidad de masa que cruza debe ser igual a la que entra; es decir

$$\frac{dm}{dt} = -\Phi, \quad (157)$$

de donde se obtiene con las Ecs. (155) y (156),

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) \right) dV = 0. \quad (158)$$

La Ec. (158) puede ser representada en forma diferencial como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0, \quad (159)$$

la cual se denomina ecuación de continuidad. Puede observarse que debido a que el segundo término en la Ec. (159) contiene el producto de ρ con \mathbf{u} no se tiene una relación lineal.

Para obtener una ecuación linealizada expresemos la densidad instantánea como $\rho = \rho_0(1 + s)$, siendo $s = (\rho - \rho_0) / \rho_0$ la condensación en cualquier punto, la cual por hipótesis cumple que $|s| \ll 1$ y sabiendo que ρ_0 es una densidad constante respecto del tiempo, se llega a que

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (160)$$

La Ec. (160) es denominada como la ecuación de continuidad linealizada.

B.2. Ecuación de Fuerza no viscosa

La siguiente pregunta que nos hacemos es ¿cómo reaccionan las partículas del fluido a las fuerzas que actúan sobre ellas? En este apartado obtendremos la ecuación del movimiento en un fluido deducida por L. P. Euler, la cual permite representar el caso de un fluido sin viscosidad sujeto a un campo de fuerzas externas \mathbf{f} (que actúan como una fuente para la perturbación), variando con el tiempo en cada dirección.

Tomemos un volumen de fluido situado en un medio homogéneo encerrado en una caja cúbica con paredes flexibles e ingravidas, como se muestra en la Fig. 36. La presión sonora aumenta de izquierda a derecha con la velocidad espacial en la forma del ∇p . Supongamos que los lados de la caja están completamente libres de fricción; es decir, que es despreciable todo arrastre viscoso entre las partículas de fluido dentro de la caja y las de afuera. Luego, las únicas fuerzas que actúan sobre el fluido interior son las debidas a la presión ejercida sobre las paredes de la caja.

Así, la diferencia entre las fuerzas que actúan sobre dos caras opuestas de la caja cúbica es igual a la velocidad de variación de la fuerza con la distancia, multiplicada por la distancia incremental entre las dos caras. Por consiguiente, la fuerza que actúa

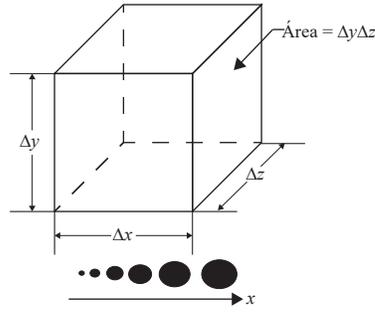


Figura 36. Pequeño cubo de aire que parte de un medio gaseoso en el que la presión sonora aumenta en la dirección x . El tamaño de los puntos indica el aumento de la magnitud de p .

acelerando la caja en dirección positiva es

$$\mathbf{f} = -\hat{\mathbf{i}}[(\partial p/\partial x)\Delta x]\Delta y\Delta z - \hat{\mathbf{j}}[(\partial p/\partial y)\Delta y]\Delta x\Delta z - \hat{\mathbf{k}}[(\partial p/\partial z)\Delta z]\Delta x\Delta y. \quad (161)$$

Al dividir la expresión anterior por el volumen $V = \Delta x\Delta y\Delta z$, nos proporciona la fuerza por unidad de volumen que acelera a la caja,

$$-\nabla p = \frac{\mathbf{f}}{V}. \quad (162)$$

Por la segunda ley de Newton, el miembro derecho de la Ec. (162)) es igual a la velocidad de variación de la cantidad de movimiento por unidad de volumen de la caja.

Por ende,

$$-\nabla p = \frac{\mathbf{f}}{V} = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad (163)$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ es la velocidad vectorial media del fluido dentro de la caja y $m = \rho V$ es la masa total del fluido en la caja. Además, como \mathbf{u} es un campo de velocidades, su derivada total temporal representa la velocidad total de variación de la velocidad de un volumen muy pequeño de fluido en la caja, independientemente de su posición; es decir,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (164)$$

donde dx/dt , dy/dt , dz/dt son las componentes u_x , u_y , u_z , respectivamente de la velocidad vectorial de las partículas, \mathbf{u} . De las Ecs. (163) y (164) se tiene entonces

$$-\nabla p = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right). \quad (165)$$

En la Ec. (165), si la velocidad vectorial \mathbf{u} de las partículas es lo suficientemente pequeña, la velocidad de variación de la cantidad de movimiento de las partículas en la caja puede tomarse como aproximadamente igual a la velocidad de variación de la cantidad de movimiento en un punto fijo; i.e. $d\mathbf{u}/dt \doteq \partial\mathbf{u}/\partial t$. Tenemos así, una ecuación de la forma

$$-\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}. \quad (166)$$

Finalmente, la densidad instantánea ρ puede tomarse como la densidad media del fluido en la caja ρ_0 . Por lo tanto,

$$-\nabla p = \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad (167)$$

denominada la ecuación de fuerza no viscosa, válida para procesos acústicos de pequeña amplitud.

B.3. Ecuación de Estado

La ecuación de estado es la ecuación que describe el estado termodinámico del material considerado. En particular, describe si es un sólido o un fluido. Un material admite un cierto número de variables de estado termodinámicas independientes. Dado este número, se puede elegir cualquiera como primaria, siempre que sea independiente. Las demás se convertirán en variables de estado secundarias y son generalmente llamadas funciones de estado, ya que se convierten en funciones de las variables de estado primarias. La ecuación de estado es entonces la ecuación que describe la dependencia de

la energía interna específica de las variables de estado primarias elegidas (Filippi *et al.*, 1998). En este apartado obtendremos la ecuación de estado para un fluido.

La ecuación de estado relaciona las fuerzas restauradoras internas con las deformaciones correspondientes. Asumiendo que el medio es un gas ideal, partimos de la ley de Charles-Boyle sobre nuestro volumen (Ginsberg, 2018a),

$$PV = RT, \quad (168)$$

donde P es la presión total en el elemento de volumen V , T es la temperatura absoluta y R es la constante del gas ideal. O bien, la Ec. (168) puede reescribirse como

$$T(p, \rho) = \frac{p}{R\rho}, \quad (169)$$

siendo p la presión en el volumen V y ρ la densidad del volumen de fluido. Obteniendo el diferencial de temperatura

$$dT = dp \left. \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R\rho} \right) \right|_{\rho = \text{cte}} + d\rho \left. \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{p}{R\rho} \right) \right|_{p = \text{cte}}, \quad (170)$$

el cual podemos escribir como

$$dT = dT_A + dT_B, \quad (171)$$

con

$$dT_A = dp \left. \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R\rho} \right) \right|_{\rho = \text{cte}}, \quad (172)$$

$$dT_B = d\rho \left. \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{p}{R\rho} \right) \right|_{p = \text{cte}}, \quad (173)$$

los cuales son incrementos de la temperatura asociados a un proceso A que incrementa la presión a densidad constante y un proceso B que incrementa la densidad a presión constante. Igualando las Ecs. (170) y (171) se tiene que

$$\frac{1}{R\rho} dp - \frac{p}{R\rho^2} d\rho = dT_A + dT_B. \quad (174)$$

Por otro lado, los calores específicos isocórico e isobárico son coeficientes tal que

$$c_v = \frac{dq}{dT_A} \quad \text{y} \quad c_p = \frac{dq}{dT_B}, \quad (175)$$

corresponden con los términos de la Ec. (174). Si el sistema es adiabático; es decir, no entra ni sale calor por lo que $dq = 0$ entonces como nuestro sistema tiene ambas ecuaciones se tiene que

$$c_v \frac{1}{R\rho} dp - c_p \frac{p}{R\rho^2} d\rho = 0. \quad (176)$$

Definiendo el coeficiente adiabático $\gamma = c_p/c_v$; es decir, la razón de los calores específicos a presión y volumen constante, se obtiene que

$$\int_{\beta_0}^{\beta} \frac{dp}{p} = \gamma \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho}, \quad (177)$$

cuya solución es

$$\ln \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right) = \gamma \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right), \quad (178)$$

de donde puede despejarse β para llegar a la ecuación de estado

$$\beta = \beta_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (179)$$

donde ρ es la densidad del medio, ρ_0 es la densidad de equilibrio constante. Además, $\beta = \beta(\rho)$ representa la presión instantánea en cualquier punto y β_0 es la presión de equilibrio constante en el fluido. Consideremos ahora una expansión en serie de Taylor para la Ec. (179), alrededor de $\rho = \rho_0$,

$$\beta = \beta_0 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial \rho^2} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots \quad (180)$$

Al considerar valores pequeños para $(\rho - \rho_0)$, la Ec. (180) puede escribirse hasta primer orden como:

$$\beta - \beta_0 \simeq B \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right), \quad (181)$$

donde

$$B = \rho_0 \left(\frac{\partial \beta}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} = \beta_0 \gamma, \quad (182)$$

es llamado el módulo volumétrico adiabático (del inglés *adiabatic bulk modulus*). Finalmente la Ec. (181) puede aproximarse como:

$$p \simeq Bs, \quad (183)$$

donde $p = \beta - \beta_0$ es la presión acústica en cualquier punto y $s = (\rho - \rho_0) / \rho_0$ es la condensación en cualquier punto, la cual cumple que $|s| \ll 1$. La Ec. (183) es conocida como la ecuación de estado.

Apéndice C

FUNCIÓN DE GREEN

En el presente apéndice se obtiene la función de Green asociada a la ecuación de Helmholtz en un sistema que es independiente del eje z .

Consideremos la función de Green que satisface

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (184)$$

donde $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ representa el propagador del campo debido a una fuente (en nuestro caso un bocina) puntual que emite a la frecuencia ω en la posición \mathbf{r}' , y $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ es la delta de Dirac. Para un medio homogéneo, el campo producido por la fuente puntual \mathbf{r}' posee simetría radial en $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Expresando el laplaciano de la Ec. (184) en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 G(R) = \frac{d^2 G}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dG}{dR} = \frac{1}{R} \frac{d^2 (RG)}{dR^2}, \quad (185)$$

que sustituyendo se tiene que la Ec. (184), se puede reescribir como

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 (RG)}{dR^2} + k^2 RG = -4\pi\delta(R). \quad (186)$$

Como $R \neq 0$ podemos aplicar que $\delta(R) = 0$ y la Ec. (186) se transforma en

$$\frac{d^2 (RG)}{dR^2} + k^2 RG = 0, \quad (187)$$

la cual posee una solución armónica simple como $RG \approx e^{ikR}$, por lo que la función de Green es de la forma

$$G = a \frac{e^{-ikR}}{R} + b \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (188)$$

Podemos encontrar las constantes a y b al considerar que la función de Green satisface la condición de radiación de Sommerfeld, que nos dice que la onda es radiada desde la fuente hacia el infinito y que no puede ser radiada desde el infinito hacia la fuente. Esto es, la función de Green satisface

$$\lim_{kR \rightarrow \infty} G \rightarrow 0, \quad (189)$$

por lo que consideramos sólo el segundo término del lado derecho de la Ec. (188). Para encontrar la constante b , sustituimos el segundo término de la Ec. (188) en la Ec. (184) y la integramos sobre una esfera de radio r ,

$$\int_V dV \left(\nabla \cdot \nabla \left(b \frac{e^{ikR}}{R} + k^2 b \frac{e^{ikR}}{R} \right) \right) = -4\pi \int_V dV \delta(R). \quad (190)$$

Posteriormente aplicamos el teorema de la divergencia al primer término de la Ec. (190),

$$\begin{aligned} \int_V dV \left(\nabla \cdot \nabla \left(b \frac{e^{ikR}}{R} \right) \right) &= \int_S dS \left(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \left(b \frac{e^{ikR}}{R} \right) \right) \\ &= 4\pi b \lim_{r \rightarrow 0} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right]_{R=r} \\ &= -4\pi b. \end{aligned} \quad (191)$$

Para el segundo término de la Ec. (190), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_V dV \left(k^2 b \frac{e^{ikR}}{R} \right) &= 4\pi k^2 b \int_0^r dR \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \\ &= 4\pi k^2 b \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_0^r dR \left(b \frac{e^{ikR}}{R} \right) \right]_{R=r} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (192)$$

Finalmente el miembro del lado derecho de la Ec. (190) es

$$\begin{aligned}
 -4\pi \int_V dV \delta(R) &= -4\pi \left(\int_0^r dR \delta(R) \right) \\
 &= -4\pi \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_0^r dR \delta(R) \right]_{R=r} \\
 &= -4\pi.
 \end{aligned} \tag{193}$$

Así, sustituyendo lo obtenido en las Ecs. (191), (192) y (193) en la Ec.(190) se obtiene que $b = 1$ y la solución de la Ec. (184) es

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{194}$$

Como el sistema en consideración es independiente del eje z , y la Ec. (194) es para una sistema tridimensional, consideramos la superposición de un número infinito de fuentes puntuales a lo largo del eje z e integramos la Ec. (194),

$$G(x, y, ; x', y') = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{e^{ik\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}. \tag{195}$$

Aplicando un cambio de variable a la ecuación anterior en $z = 0$ y $z' = z_0$ y redefiniendo a $R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$ que por ser función par, tenemos

$$G(x, y, ; x', y') = 2 \int_0^{\infty} dz_0 \frac{e^{ik\sqrt{R^2+z_0^2}}}{\sqrt{R^2+z_0^2}}. \tag{196}$$

Para obtener su resolución aplicamos otro cambio de variable $u = \sqrt{R^2+z_0^2}$ y $du = z_0(dz_0)/u$ que sustituyendo en la Ec. (196), se tiene que

$$G(x, y, ; x', y') = 2 \int_R^{\infty} du \frac{e^{iku}}{\sqrt{u^2-R^2}}, \tag{197}$$

en la cual se sustituye $u = Rx$ y $du = Rdx$ resultando en

$$G(x, y, ; x', y') = 2 \int_1^{\infty} dx \frac{e^{ikRx}}{\sqrt{x^2-1}} = i\pi H_0^{(1)}(kR), \tag{198}$$

donde $H_0^{(1)}(\xi)$ es la función de Hankel de primera clase y de orden cero.

Por lo tanto, la función de Green para sistemas en 2D cuya geometría es independiente de z será

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (199)$$

Referencias

- Akter, R. and Ahmed, P. (2019). Some real-life applications of dynamical systems. *IRE.*, **2**(7): 5–15.
- Alonso, D., Ruiz, A., and de Vega, I. (2003). Polygonal billiards and transport: Diffusion and heat conduction. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, **66**: 066131.
- Bennis, A., Lomonosov, A., Shen, Z., and Hess, P. (2006). Laser-based measurement of elastic and mechanical properties of layered polycrystalline silicon structures with projection masks. *Applied physics letters*, **88**(10): 101915.
- Beranek, L. L. and Mellow, T. (2012). *Acoustics: sound fields and transducers*. Academic Press.
- Berry, M. V. (1977). Regular and irregular semiclassical wavefunctions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **10**(12): 2083–2091.
- Blackstock, D. T. (2001). *Fundamentals of physical acoustics*. Acoustical Society of America.
- Bloch, F. (1929). Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. *Zeitschrift für physik*, **52**(7): 555–600.
- Bose, R. and Pathak, S. (2006). A novel compression and encryption scheme using variable model arithmetic coding and coupled chaotic system. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, **53**(4): 848–857.
- Callister, W. D. (2019). *Ciencia e ingeniería de los materiales*. Reverté.
- Campa, G. and Camporeale, S. M. (2010). Application of transfer matrix method in acoustics. En *European COMSOL Conference*.
- Casadei, F. and Bertoldi, K. (2014). Harnessing fluid-structure interactions to design self-regulating acoustic metamaterials. *Journal of Applied Physics*, **115**(3): 034907.
- Castaldi, G., Galdi, V., and Pinto, I. M. (2008). A study of ray-chaotic cylindrical scatterers. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **56**(8): 2638–2648.
- Chen, M., Zhu, W., Du, J., Yang, C., Han, B., Zhou, D., Huo, L., and Zhuang, J. (2021). ¹¹C-acetate positron emission tomography is more precise than ¹⁸F-fluorodeoxyglucose positron emission tomography in evaluating tumor burden and predicting disease risk of multiple myeloma. *Scientific reports*, **11**(1): 1–10.

- Christensen, J., Fernández-Domínguez, A. I., de León-Pérez, F., Martín-Moreno, L., and García-Vidal, F. (2007). Collimation of sound assisted by acoustic surface waves. *Nature Physics*, **3**(12): 851–852.
- Cleland, A., Schmidt, D., and Yung, C. S. (2001). Thermal conductance of nanostructured phononic crystals. *Physical Review B*, **64**(17): 172301.
- Dennery, F. and Krzywycki, A. (1996). *Mathematics for Physicists*. Harper & Row and Jhon Weatherhill, Inc., New York, Evaston, London and Tokyo, primera edición.
- Deymier, P. A. (2013). *Acoustic metamaterials and phononic crystals*, Vol. 173. Springer Science & Business Media.
- Doya, V., Legrand, O., and Mortessagne, F. (2002). Light scarring in an optical fiber. *Physical Review Letters*, **88**(1): 014102.
- Eichenfield, M., Chan, J., Camacho, R. M., Vahala, K. J., and Painter, O. (2009). Optomechanical crystals. *Nature*, **462**(7269): 78–82.
- El-Kady, I., Olsson III, R., and Fleming, J. (2008). Phononic band-gap crystals for radio frequency communications. *Applied Physics Letters*, **92**(23): 233504.
- Fernández-Sanjuán, M. A. (2016). Dinámica no lineal, teoría del caos y sistemas complejos: una perspectiva histórica. *R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat. (Esp)*, **109**(1): 107–126.
- Feynman, R. P., Leighton, R. B., and Sands, M. (1963). *The Feynman Lectures on Physics, Mainly Mechanics, Radiations and Heat*. Adison-Wesley, primera edición. Vol. 1.
- Filippi, P., Bergassoli, A., Habault, D., and Lefebvre, J. P. (1998). *Acoustics: basic physics, theory, and methods*. Elsevier.
- Fraczek, K. and Ulcigrai, C. (2014). Ergodic directions for billiards in a strip with periodically located obstacles. *Communications in Mathematical Physics*, **327**(2): 643–663.
- Ghasemi Baboly, M., Reinke, C. M., Griffin, B. A., El-Kady, I., and Leseman, Z. (2018). Acoustic waveguiding in a silicon carbide phononic crystals at microwave frequencies. *Applied Physics Letters*, **112**(10): 103504.
- Ginsberg, J. H. (2018a). *Acoustics: A Textbook for Engineers and Physicists*, Vol. 1. Springer.
- Ginsberg, J. H. (2018b). *Acoustics: A Textbook for Engineers and Physicists*, Vol. 2. Springer.
- Glusker, J. P. and Trueblood, K. N. (2010). *Crystal structure analysis: a primer*, Vol. 14. Oxford University Press.

- Hernández, E. P. (2015). *Estudio numérico de la propagación de la luz en guías de ondas periódicas y onduladas usando programación en paralelo*. Tesis de licenciatura, Facultad de ciencias físico matemáticas. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
- Herrera-González, I., Arroyo-Correa, G., Mendoza-Suárez, A., and Tututi, E. S. (2011). Study of the resistivity in a channel with dephased ripples. *Int. J. Mod. Phys. B.*, **25**(5): 683–698.
- Hess, P. *et al.* (2002). Surface acoustic waves in materials science. *Physics Today*, **55**(3): 42–48.
- Hilborn, R. C. (2004). *Chaos and Nonlinear Dynamics an Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, USA., segunda edición.
- Holzfluss, J. and Lauterborn, W. (1989). Liapunov exponents from a time series of acoustic chaos. *Physical Review A*, **39**(4): 2146.
- Hu, X. and Chan, C. (2005). Refraction of water waves by periodic cylinder arrays. *Physical review letters*, **95**(15): 154501.
- Hussein, M. I., Hulbert, G. M., and Scott, R. A. (2007). Dispersive elastodynamics of 1d banded materials and structures: design. *Journal of Sound and Vibration*, **307**(3-5): 865–893.
- Hussein, M. I., Leamy, M. J., and Ruzzene, M. (2014). Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook. *Applied Mechanics Reviews*, **66**(4).
- Jiang, G., Liu, Y., Wu, Y., Xu, W., Kong, Q., and Zhang, C. (2017). Transmission and radiation of acoustic oblique incident through tube arrays based on phononic crystals theory. *Applied Acoustics*, **116**: 117–126.
- Khelif, A., Choujaa, A., Benchabane, S., Djafari-Rouhani, B., and Laude, V. (2004). Guiding and bending of acoustic waves in highly confined phononic crystal waveguides. *Applied physics letters*, **84**(22): 4400–4402.
- Khelif, A., Aoubiza, B., Mohammadi, S., Adibi, A., and Laude, V. (2006). Complete band gaps in two-dimensional phononic crystal slabs. *Phys. Rev. E*, **74**: 046610.
- Kimionis, J., Georgiadis, A., Daskalakis, S. N., and Tentzeris, M. M. (2021). A printed millimetre-wave modulator and antenna array for backscatter communications at gigabit data rates. *Nature Electronics*, **4**(6): 439–446.
- Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B., and Sanders, J. V. (2000). *Fundamentals of acoustics*. John Wiley & Sons.
- Kittel, C., McEuen, P., and McEuen, P. (1996). *Introduction to solid state physics*, Vol. 8. Wiley New York.

- Li, X.-F., Ni, X., Feng, L., Lu, M.-H., He, C., and Chen, Y.-F. (2011). Tunable unidirectional sound propagation through a sonic-crystal-based acoustic diode. *Physical review letters*, **106**(8): 084301.
- Luna-Acosta, G. A., Krokhin, A. A., Rodríguez, M. A., and Hernández-Tejeda, P. H. (1996a). Classical chaos and ballistic transport in a mesoscopic channel. *Physical Review B*, **54**(16): 11410–11416.
- Luna-Acosta, G. A., Na, K., Reichl, L. E., and Krokhin, A. (1996b). Band structure and quantum poincaré sections of a classically chaotic quantum rippled channel. *Physical Review E*, **53**(4): 3271–3283.
- Maldovan, M. (2013). Sound and heat revolutions in phononics. *Nature*, **503**(7475): 209–217.
- Maldovan, M. and Thomas, E. L. (2009). *Periodic materials and interference lithography: for photonics, phononics and mechanics*. John Wiley & Sons.
- McGurn, A. R. (2020). Introduction to photonic and phononic crystals and metamaterials. *Synthesis Lectures on Materials and Optics*, **1**(2): 1–209.
- Mendoza-Suárez, A. and Villa-Villa, F. (2006). Numerical method based on the solution of integral equations for the calculation of the band structure and reflectance of one- and twodimensional photonic crystals. *J. Opt. Soc. Am. B*, **23**(10): 2249–2256.
- Mendoza-Suárez, A., Villa-Villa, F., and Gaspar-Armenta, J. A. (2007). Band structure of two-dimensional photonic crystals that include dispersive lefthanded materials and dielectrics in the unit cell. *J. Opt. Soc. Am. B*, **24**(12): 3091–3098.
- Mendoza-Suárez, A., Pérez-Aguilar, H., and Villa-Villa, F. (2011). Optical response of a perfect conductor waveguide that behaves as a photonic crystal. *Progress In Electromagnetics Research*, **121**: 433–452.
- Miyashita, T. (2005). Sonic crystals and sonic wave-guides. *Measurement Science and Technology*, **16**(5): R47.
- Mohammadi, S., Eftekhar, A. A., Hunt, W. D., and Adibi, A. (2009). High-q micromechanical resonators in a two-dimensional phononic crystal slab. *Applied Physics Letters*, **94**(5): 051906.
- Montenegro-García, A. (1989). La función de autocorrelación y su empleo en el análisis de series de tiempo. *Revista Desarrollo y Sociedad*, (23): 117–132.
- Park, C. M. and Lee, S. H. (2019). Zero-reflection acoustic metamaterial with a negative refractive index. *Scientific Reports*, **9**(1): 1–7.
- Pennec, Y., Vasseur, J. O., Djafari-Rouhani, B., Dobrzyński, L., and Deymier, P. A. (2010). Two-dimensional phononic crystals: Examples and applications. *Surface Science Reports*, **65**(8): 229–291.

- Pérez-Aguilar, H., Mendoza-Suárez, A., Tututi, E. S., and Herrera-González, I. F. (2013a). Disordered field patterns in a waveguide with periodic surfaces. *Progress In Electromagnetics Research B*, **48**: 329–346.
- Pérez-Aguilar, H., Mendoza-Suárez, A., Tututi, E. S., and Herrera-González, I. F. (2013b). Chaotic behavior of a quantum waveguide. *Physica B*, **411**: 93–98.
- Phani, A. S., Woodhouse, J., and Fleck, N. (2006). Wave propagation in two-dimensional periodic lattices. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **119**(4): 1995–2005.
- Pike, E. R. and Sabatier, P. C. (2001). *Scattering, Two-Volume Set: Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science*. Elsevier.
- Resnick, R., Halliday, D., and Krane, K. S. (2013). *Física*. Grupo Editorial Patria, cuarta edición. Vol. 2.
- Shinohara, N. (2018). *Recent Wireless Power Transfer Technologies via Radio Waves*. River Publishers, primera edición.
- Sinai, Y. G. (1970). Dynamical systems with elastic reflections. ergodic properties of dispersing billiards. *Usp. Mat. Nauk*, **25**: 141–192.
- Sprott, J. C. (2010). *Elegant chaos: algebraically simple chaotic flows*. World Scientific.
- Strogatz, S. H. (2001). *Nonlinear Dynamics and Chaos with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Chaos-Westview Press, USA., primera edición.
- Sugihara, G. and May, R. M. (1990). Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series. *Nature*, **344**(6268): 734.
- Suppes, P. and Acacia-de Barros, J. (1996). *Photons, Billiards and Chaos*, capítulo 8, páginas 189–201. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, primera edición.
- Torrent, D. and Sánchez-Dehesa, J. (2008). Acoustic cloaking in two dimensions: a feasible approach. *New Journal of Physics*, **10**(6): 063015.
- Torrent, D. and Sánchez-Dehesa, J. (2009). Radial wave crystals: Radially periodic structures from anisotropic metamaterials for engineering acoustic or electromagnetic waves. *Phys. Rev. Lett.*, **103**: 064301.
- Trejo, E. L. (2019). *Estudio numérico de la propagación de la luz en guías de ondas de cristal fotónico utilizando el método de la ecuación integral y el método de elementos finitos*. Tesis de maestría, Facultad de ciencias físico matemáticas. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
- Vasileiadis, T., Varghese, J., Babacic, V., Gomis-Bresco, J., Navarro Urrios, D., and Graczykowski, B. (2021). Progress and perspectives on phononic crystals. *Journal of Applied Physics*, **129**(16): 160901.

- Vega-Flick, A., Duncan, R., Wallen, S., Boechler, N., Stelling, C., Retsch, M., Alvarado-Gil, J., Nelson, K. A., and Maznev, A. (2017). Vibrational dynamics of a two-dimensional microgranular crystal. *Physical Review B*, **96**(2): 024303.
- Vilela, M., Halidi, N., Besson, S., Elliott, H., Hahn, K., Tytell, J., and Danuser, G. (2013). Fluctuation analysis of activity biosensor images for the study of information flow in signaling pathways. En *Methods in enzymology*, Vol. 519, páginas 253–276. Elsevier.
- Yeh, J.-Y. *et al.* (2013). Application and analysis of phononic crystal energy harvesting devices. *Journal of engineering technology and education*, **10**(1): 18–26.
- Zhou, Y., Hua, Z., Pun, C.-M., and Chen, C. P. (2014). Cascade chaotic system with applications. *IEEE transactions on cybernetics*, **45**(9): 2001–2012.
- Ziman, J. M. (1962). Electrons in metals: A short guide to the fermi surface. *Contemporary Physics*, **4**(2): 81–99.