



Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas



Análisis Bayesiano del Modelo Cosmológico Logotrópico

Trabajo recepcional en la modalidad de:

TESIS

que para obtener el título de:

**Maestro en Ciencias
en el área de Física**

P R E S E N T A :

Lic. Hugo Iván García Barradas

Director:

Dr. Ulises Nucamendi Gómez

Codirector:

Dr. Francisco Xavier Linares Cedeño

Morelia, Michoacán

Mayo 2023

A Iliana, Francisco y Paco.

Agradecimientos

Deseo expresar mis agradecimientos a Ulises y Francisco. Por su inspiración, paciencia, disponibilidad y altruismo. Resulta invaluable todo el conocimiento que me transmitieron para consolidar el presente trabajo de tesis y mi formación académica. Admiro mucho su pasión por la Física y la investigación, y aún más su calidad humana.

Agradezco a los docentes e investigadores del IFM que fueron mis maestros: James Edwards, Salomón Borjas, Ricardo Becerril, Gabriel Espinosa, Axel Weber, Thomas Zannias, Olivier Sarbach, Antonio González y Alfredo Raya.

Quiero agradecer el apoyo recibido por parte de CONACYT bajo el programa de becas nacionales 2020.

En especial gracias a los pilares de mi vida: Iliana, Francisco y Paco, por su eterno apoyo y amor, soy un gran afortunado de tener en casa todos los días un abrazo y un refugio.

A Lydia, por toda la confianza que me haces sentir para lograr mis objetivos.

A Judith y María, por su gran cariño.

A Sara, por todo tu amor. Gracias por el enorme apoyo para lograr esta tesis.

A mis compañeros, Matuz y Rafa.

A mis amigos: Jared, Gibran, Virues, Jahziel, Dominique, Rodrigo, Magali, Dante Calderón, Jafet, Dante Mujica, David, Gustavo, José Luis, Miriam, Pacheco, Rafa y Erick.

A todos, muchas gracias.

Resumen

En el presente trabajo de tesis se realiza un análisis estadístico bayesiano para obtener inferencia sobre los parámetros del Modelo Cosmológico Logotrópico empleando los datos observacionales contemporáneos más relevantes. Análogamente, se efectúa el mismo análisis para el modelo estándar actual conocido como Λ CDM, permitiendo llevar a cabo una comparación entre ambos modelos mediante la escala de Jeffreys y determinando cuál de ellos se ajusta mejor a las observaciones cosmológicas.

El Modelo Cosmológico Logotrópico interpreta a la energía oscura y a la materia oscura como consecuencia de la evolución de un único fluido oscuro, en el cual se encuentran unificadas a través de la ecuación de estado $P = A \ln \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)$, donde P es la presión, ρ es la densidad de masa en reposo, A es una constante y ρ_* es una densidad de referencia constante. La variable definida como $B \equiv \frac{A}{\epsilon_{DE}}$ caracteriza por completo la dinámica de este fluido, siendo ϵ_{DE} la densidad de energía de la energía oscura. Lo anterior está en contraste con Λ CDM, donde estas dos contribuciones de energía son independientes. Tomando el valor particular de $B = 0$ en el Modelo Logotrópico se recupera el modelo Λ CDM.

Al realizar inferencia bayesiana, se obtiene el valor de $B = -0.0012^{+0.0041}_{-0.0056}$ para el Modelo Logotrópico. La distribución de probabilidad posterior incluye el valor planteado por Pierre Henry Chavanis $B = 3.53 \times 10^{-3}$ [1], inferido mediante el análisis de halos de materia oscura, este se encuentra a 1.18σ de dispersión con respecto a la media y el modelo Λ CDM se recupera a 0.31σ . Se demuestra que el modelo es muy susceptible en el rango obtenido, refutando la conclusión que Chavanis obtiene para la densidad de referencia de la ecuación de estado logotrópica ρ_* [1], en donde proponía que el Modelo Logotrópico resuelve el problema de la constante cosmológica.

Al hacer uso del factor de Bayes para la comparación de modelos mediante la escala de Jeffreys, se obtiene que los datos observacionales relacionados con la evolución cosmológica de fondo y las perturbaciones cosmológicas favorecen muy fuertemente al modelo Λ CDM con respecto al Modelo Logotrópico.

Palabras clave: modelo Λ CDM, fluido oscuro, ecuación de estado, distribución de probabilidad, escala de Jeffreys.

Abstract

In this thesis, a Bayesian statistical analysis is performed to obtain inference on the parameters of the Logotropic Cosmological Model using the most relevant contemporary observational data. In the same manner, the analysis is performed for the current standard model known as Λ CDM, allowing a comparison to be made between the two models using the Jeffreys scale and determining which one best fits the cosmological observations.

The Logotropic Cosmological Model interprets dark energy and dark matter as a consequence of the evolution of a single dark fluid, in which they are unified through the equation of state $P = A \ln \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)$, where P is the pressure, ρ is the rest mass density, A is a constant, and ρ_* is a constant reference density. The variable defined as $B \equiv \frac{A}{\epsilon_{DE}}$ completely characterizes the dynamics of this fluid, ϵ_{DE} being the energy density of the dark energy. The above is in contrast to Λ CDM, where these two energy contributions are independent. Taking the particular value of $B = 0$ in the Logotropic Model, the Λ CDM model is recovered.

By performing Bayesian inference, the value of $B = -0.0012^{+0.0041}_{-0.0056}$ for the Logotropic Model is obtained. The posterior probability distribution includes the value posed by Pierre Henry Chavanis $B = 3.53 \times 10^{-3}$ [1], inferred by dark matter halo analysis, this is at 1.18σ dispersion with respect to the mean and the Λ CDM model recovers at 0.31σ . It is demonstrated that the model is very susceptible in the obtained range, refuting the conclusion that Chavanis obtains for the reference density of the logotropic equation of state ρ_* [1], where he proposed that the Logotropic Model solves the cosmological constant problem.

By making use of the Bayes factor for model comparison using the Jeffreys scale, it is obtained that the observational data related to the cosmological background evolution and cosmological perturbations very strongly favor the Λ CDM model with respect to the Logotropic Model.

Índice general

Introducción	1
1. Cosmología	3
1.1. Relatividad general	4
1.1.1. Relatividad especial	4
1.1.2. Curvatura del espacio-tiempo	5
1.1.3. Tensor de energía-momento	7
1.1.4. Ecuaciones de Einstein	8
1.2. Métrica de Friedmann-Robertson-Walker	9
1.3. Ecuaciones de Friedmann	9
2. Modelos Cosmológicos	12
2.1. Modelo Λ CDM	12
2.1.1. Inconsistencias del Modelo Λ CDM	16
2.2. Modelo Logotrópico	17
2.2.1. Modelo Logotrópico Generalizado	21
3. Análisis Bayesiano	23
3.1. Inferencia Bayesiana	23
3.1.1. Teorema de Bayes	24
3.1.2. Cadenas de Markov y Monte Carlo	27
3.2. Conjunto de datos observacionales	29
4. Metodología y Resultados	31
4.1. Inferencia de parámetros del modelo Λ CDM y del ML	31
4.1.1. Caso I)	32
4.1.2. Caso II)	37
4.2. Comparación entre Λ CDM y ML	45
5. Conclusiones	46
A. Perturbaciones Cosmológicas	47
A.1. Teoría de perturbaciones lineales cosmológicas	47
A.2. Elección de norma	50
A.3. Observaciones de las perturbaciones cosmológicas	52
B. Implementación del ML y MLG en CLASS y MontePython	56
B.1. CLASS	56
B.2. MontePython	67

Índice de figuras

1.1.	Nota. Adaptado de Nine Year Microwave Sky, por NASA/WMAP Science Team, 2014, https://map.gsfc.nasa.gov/media/121238/index.html [25]. Se muestran las fluctuaciones de temperatura de la radiación cósmica de fondo, concebida como la radiación electromagnética más temprana del universo referente a la época de recombinación. Los fotones del CMB corresponden a una temperatura promedio de $2.725K$. Se le considera isotrópica con fluctuaciones de temperatura en el rango de $\pm 200\mu K$. En la figura, los diferentes colores muestran la temperatura que va de la más fría (azul) a la más caliente (rojo).	10
1.2.	Nota. Adaptado de Slices through the SDSS 3-dimensional map of the distribution of galaxies, por M. Blanton y Sloan Digital Sky Survey, https://classic.sdss.org/includes/sideimages/sdss_pie2.html [28]. Se muestra la estructura a gran escala de la distribución de galaxias en el universo. En la figura, la Tierra se encuentra en el centro, y cada punto representa una galaxia, donde los colores corresponden a su edad. Las dos regiones que no muestran datos es debido al polvo de la Vía Láctea que impide la observación.	11
2.1.	Evolución de los parámetros de densidad de energía Ω_i para el modelo Λ CDM, empleando los datos de Planck 2018 [34].	15
2.2.	Evolución del parámetro de Hubble $H(z)$ para el modelo Λ CDM. Los puntos y las líneas verticales representan el valor estimado y la incertidumbre respectivamente del parámetro de Hubble para diferentes estudios: azul [35], rosa [36], naranja [37], morado [38], rojo [39], verde [40] y café [41]	16
2.3.	Solución numérica de la evolución del parámetro de densidad de energía del ML de las componentes que imitan a DE y DM del fluido oscuro para diferentes valores de B	20
2.4.	Solución numérica de la evolución del parámetro de la ecuación de estado del ML para diferentes valores de B	21
2.5.	Solución numérica de la evolución del parámetro de Hubble del ML para diferentes valores de B	21
4.1.	Distribuciones de Probabilidad Posterior de los parámetros del modelo Λ CDM y del ML , Caso I . En la parte superior de cada recuadro se puede observar el nombre del parámetro y el resultado de la media y desviación estándar del ML . Las líneas segmentadas indican los valores para $B = 0$ que recupera el modelo Λ CDM (negro), el valor obtenido por Chavanis $B = 3.53 \times 10^{-3}$ (rojo), y el mejor ajuste para el ML de la Tabla 4.6 $B = 3.8 \times 10^{-2}$ (verde).	35

4.2.	Relación bidimensional de las Distribuciones de Probabilidad Posterior de los parámetros del modelo Λ CDM y del ML , Caso I . En los contornos se aprecian regiones más opacas que señalan los entornos de confianza al 95 %. Las líneas segmentadas indican los valores para $B = 0$ que recupera el modelo Λ CDM (negro), el valor obtenido por Chavanis $B = 3.53 \times 10^{-3}$ (rojo), y el mejor ajuste para el ML de la Tabla 4.6 $B = 3.8 \times 10^{-2}$ (verde).	36
4.3.	Distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros del modelo Λ CDM, Caso II .	39
4.4.	Distribuciones de Probabilidad Posterior de los parámetros del ML , Caso II . Las líneas segmentadas indican los valores para $B = 0$ y $\omega_{0,DE} = -1$ que recupera el modelo Λ CDM (negro), el valor obtenido por Chavanis $B = 3.53 \times 10^{-3}$ (rojo), y el mejor ajuste para el ML de la Tabla 4.12 $B = 8.2 \times 10^{-3}$ (verde).	42
4.5.	Distribuciones de Probabilidad Posterior de los parámetros del modelo Λ CDM (negro) y del ML (azul), Caso II . En la parte superior de cada recuadro se puede observar el nombre del parámetro y el resultado de la media y desviación estándar del ML . Las líneas segmentadas indican los valores para $B = 0$ que recupera el modelo Λ CDM (negro), el valor obtenido por Chavanis $B = 3.53 \times 10^{-3}$ (rojo), y el mejor ajuste para el ML de la Tabla 4.12 $B = 8.2 \times 10^{-3}$ (verde).	43
4.6.	Relación bidimensional de las Distribuciones de Probabilidad Posterior de los parámetros del modelo Λ CDM (negro) y del ML (azul), Caso II . En los contornos se aprecian regiones más opacas que señalan los entornos de confianza al 95 %. Las líneas segmentadas indican los valores para $B = 0$ que recupera el modelo Λ CDM (negro), el valor obtenido por Chavanis $B = 3.53 \times 10^{-3}$ (rojo), y el mejor ajuste para el ML de la Tabla 4.12 $B = 8.2 \times 10^{-3}$ (verde).	44
A.1.	Nota. (Espectro de potencia de temperatura de Planck 2018) Adaptado de Aghanim, N., Akrami, Y., Ashdown, M., et al. (2020). Planck 2018 results-VI. Cosmological parameters. Astronomy and Astrophysics, 641, A6. [34]. La línea de color azul de la gráfica superior representa el espectro teórico mejor ajustado a Planck del modelo Λ CDM, mientras que la línea punteada resalta la división entre los multipolos altos $l > 30$ y los multipolos bajos $l < 30$, en donde las barras de error (incertidumbres a 1σ) son mayores debido a la varianza cósmica. Los residuos del modelo teórico con respecto a las observaciones conforman la gráfica inferior.	54
A.2.	Nota. (MPS en $z = 0$) Adaptado de Aghanim, N., Akrami, Y., Arroja, F., et al. (2020). Planck 2018 results-I. Overview and the cosmological legacy of Planck. Astronomy and Astrophysics, 641, A1. [89]. Inferido a partir de los sondeos de cúmulos de galaxias y de las mediciones del bosque Ly α , proporciona información de la evolución cosmológica a través de 14 Gyr . La línea negra es la solución teórica asumiendo el modelo Λ CDM.	55

Índice de tablas

2.1. Valor de ω y dependencia de ϵ con respecto al factor de escala para cada componente de la densidad de energía.	14
2.2. Puntos relevantes de la evolución del Modelo Logotrópico.	19
3.1. Escala de Jeffreys, basada en (Raftery, 1996) [62].	27
4.1. Priors de los parámetros del modelo Λ CDM, Caso I	32
4.2. Resumen de las 8 cadenas en los dos procesos del modelo Λ CDM, Caso I	32
4.3. Análisis estadístico de la inferencia de parámetros cosmológicos del modelo Λ CDM, Caso I	33
4.4. Priors de los parámetros del ML , Caso I	33
4.5. Resumen de las 8 cadenas en los dos procesos del ML , Caso I	34
4.6. Análisis estadístico de la inferencia de parámetros cosmológicos del ML , Caso I	34
4.7. Priors de los parámetros del modelo Λ CDM, Caso II	37
4.8. Resumen de las 8 cadenas en los dos procesos del modelo Λ CDM, Caso II	37
4.9. Análisis estadístico de la inferencia de parámetros cosmológicos del modelo Λ CDM, Caso II	38
4.10. Priors de los parámetros del ML , Caso II	40
4.11. Resumen de las 8 cadenas del ML , Caso II	40
4.12. Análisis estadístico de la inferencia de parámetros cosmológicos del ML , Caso II	41
4.13. Resultados para la evidencia $\ln[\mathcal{P}(D \mid \mathcal{M})]$ para el modelo Λ CDM y el ML , considerando las observaciones relacionadas con la evolución cosmológica de fondo en el Caso I y añadiendo las observaciones de Planck 2018 en el Caso II	45

Introducción

Durante toda la historia de la humanidad, el objeto de estudio que ha generado mayor evolución en la psique humana, además de crear admiración al parecer eterno e inalcanzable para el hombre, es el cosmos: al estudiarlo, se puede dar respuesta a algunas de las preguntas más fundamentales como ¿de dónde venimos? y ¿de qué estamos hechos? La Cosmología es la rama de las ciencias naturales encargada del estudio del universo: se le considera de creación muy reciente, pero sin duda alguna los aportes proporcionados a la Física durante los últimos años son invaluable. Algo que ha detonado sus alcances es la tecnología reciente, permitiendo tener un enorme conjunto de datos observacionales y de mayor calidad en comparación a los que se tenían en los inicios de este campo de estudio. Gracias a esto, los cosmólogos son capaces de corroborar las diversas teorías existentes que buscan explicar la evolución y composición del universo.

En la actualidad, el modelo cosmológico de mayor aceptación es Λ CDM (por las siglas en inglés de Lambda Cold Dark Matter), el cual se compone por las contribuciones de la materia bariónica, la radiación, la materia oscura fría y la constante cosmológica. Siendo la última de ellas la responsable de causar la expansión acelerada del universo. Sin embargo, existen aspectos en los cuales este modelo presenta inconsistencias y fallas. Es por ello que dentro de este trabajo se implementa el análisis estadístico bayesiano en un modelo alternativo estudiado por Pierre Henry Chavanis llamado Modelo Cosmológico Logotrópico [1]-[5], usando los datos observacionales de mayor relevancia al día de hoy, obteniendo restricciones sobre los parámetros que lo caracterizan. Aunado a lo anterior, se realiza la comparación de su eficacia al explicar las observaciones cosmológicas con respecto al modelo Λ CDM.

Resulta interesante estudiar al Modelo Logotrópico debido a que describe correctamente la estructura de los halos de materia oscura, y algunos problemas que el modelo Λ CDM tiene al describir las observaciones a corta escala como el de núcleo-cúspide y del satélite perdido no se presentan para este modelo alternativo. Además, pretende dar solución al problema del valor de la constante cosmológica.

El presente trabajo se encuentra organizado en cinco capítulos: el primero resume el formalismo necesario para entender un estudio sobre cosmología, mencionando las partes esenciales de la Teoría General de la Relatividad y las consideraciones que se deben de realizar para que a partir de ella pueda estudiarse la evolución y composición del universo (para los lectores conocedores del área se les sugiere remitir directamente al capítulo 2).

El segundo presenta los conceptos más relevantes de los dos modelos a evaluar. En principio, se retoma al modelo cosmológico estándar actual y se revisan las inconsistencias que presenta con respecto a los datos observacionales; posteriormente, se estudian los fundamentos y componentes más relevantes del Modelo Cosmológico Logotrópico y su generalización.

En el tercero se describe el análisis estadístico bayesiano, el cual es la herramienta fundamental para realizar inferencia sobre los parámetros que caracterizan a los modelos. Se expone el algoritmo computacional empleado para la exploración del espacio de parámetros y el criterio de convergencia, culminando con el listado de los datos observacionales implementados en la tesis.

Por último, el cuarto muestra la metodología seguida y los resultados obtenidos del trabajo de investigación apoyado de diversas gráficas. Finalizando con el quinto capítulo que muestra las conclusiones que se derivan, dictaminando si el análisis estadístico bayesiano para la inferencia de parámetros del Modelo Logotrópico es congruente con los resultados de Chavanis [1], además de su eficacia al explicar los datos observacionales en comparación con el modelo cosmológico estándar.

A lo largo del presente trabajo se hace uso de la siguiente notación: los índices griegos hacen referencia a todo el conjunto de coordenadas espacio-temporales mientras que los índices latinos denotan a las coordenadas espaciales. Se emplean unidades naturales, donde la velocidad de la luz $c = 1$; sin embargo, se colocará explícitamente cuando se requiera para una mejor comprensión del texto. Además, se implementa la convención de suma de Einstein y el punto que aparece sobre alguna de las variables denota derivada con respecto al tiempo cósmico. Cabe resaltar que, para tener congruencia con la notación de Chavanis [1]-[5], se hace uso de la variable ϵ como la densidad de energía, mientras que ρ corresponde a la densidad de materia en reposo.

Capítulo 1

Cosmología

Etimológicamente, el término cosmología proviene del griego *κόσμος* (‘orden’, ‘universo’) y *λογία* (‘tratado’, ‘estudio’), es la ciencia que estudia el universo. Resulta interesante que en la semántica de la palabra se relacione un orden, pues es ambicioso querer comprender todo aquello que es el universo, pero es a partir de un cierto orden conocido como principio cosmológico por el cual podemos simplificar y entender la estructura, composición, características y evolución del mismo.

El principio cosmológico establece que el universo es espacialmente homogéneo e isotrópico a gran escala; es decir, en distancias $d > 100 \text{ Mpc}$, donde se introduce la definición de parsec $1 \text{ pc} \simeq 3.09 \times 10^{15} \text{ m}$ como la distancia a la que una unidad astronómica (aproximadamente la distancia media entre la Tierra y el Sol, $1 \text{ UA} \simeq 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$) subtende un ángulo de un arcosegundo y es usada por los astrónomos para medir distancias interestelares [6]. Por su parte, la homogeneidad nos dice que no existen puntos preferidos en el universo: en otras palabras, este se ve igual no importa dónde se encuentre situado un observador (invariancia ante traslaciones). Finalmente, la isotropía implica que no hay direcciones preferidas en el universo a gran escala: es decir, si un observador se coloca en un punto el espacio se ve igual no importa en qué dirección observe (invariancia ante rotaciones). Este concepto se estudia formalmente en la sección 1.2.

Después de que Albert Einstein publicara la teoría general de la relatividad en 1915 [7]-[9], se buscó encontrar una solución a las ecuaciones de Einstein que describan al universo que observamos. Los primeros trabajos sobre este tema son del propio Einstein y de Willem de Sitter en 1917, obteniendo la descripción para un universo estático e infinito [10]-[11], e independientemente el matemático ruso Aleksandr Friedmann en 1922 consiguiendo el resultado para un universo en expansión y con curvatura [12]. Sin embargo, las observaciones cosmológicas y la tecnología de la época eran deficientes para poder corroborar algún modelo propuesto.

El auge teórico propiciado por la relatividad general fomentó el avance de la astronomía hasta la actualidad. Antes del siglo XX, para la mayoría de los físicos y astrónomos el universo comprendía la Vía Láctea [13]; sin embargo, a la par de los trabajos mencionados previamente, surgían las primeras observaciones que cambiaron esta concepción, empezando con las investigaciones de Vesto Slipher con las cuales obtuvo las primeras mediciones para el espectro de la galaxia M31 [14] y otras nebulosas espirales [15]-[16], en estos trabajos se encontró que la mayoría de ellas se alejaban a grandes velocidades sugiriendo que no podrían estar unidas gravitacionalmente a la Vía Láctea. Posteriormente, en 1929 Edwin Hubble estimó la distancia de una muestra de 20 galaxias cuyo corrimiento al rojo había sido medido mediante una relación lineal conocida como la ley

de Hubble [17], dando así los primeros indicios de que el universo se está expandiendo.

Al día de hoy, resulta indispensable continuar realizando observaciones cosmológicas pues se ha notado que los grandes proyectos astronómicos contemporáneos han revolucionado nuestro conocimiento del universo. Algunos de ellos son los telescopios espaciales Hubble y James Webb que permitieron extender las observaciones a galaxias distantes, y el explorador de fondo cósmico COBE (por sus siglas en inglés) con el objetivo de medir la radiación infrarroja y de microondas difusa para poder inferir las características del universo primitivo. Se mencionarán otros estudios en secciones posteriores.

En este capítulo se proveen los fundamentos esenciales de relatividad general necesarios para su implementación dentro de la cosmología. Además, se revisa la métrica de Friedmann-Robertson-Walker y las ecuaciones de Friedmann que permiten conocer la evolución del universo a grandes escalas.

1.1. Relatividad general

Albert Einstein, con base en la geometría diferencial para espacios curvos desarrollada por Bertrand Riemann, postula en 1915 a la teoría de la relatividad general buscando reformular el concepto de gravedad (entendida como la fuerza de atracción entre dos objetos masivos, este concepto fue introducido por Isaac Newton en 1687 dentro de su libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*) y volverlo consistente con la teoría especial de la relatividad consolidada diez años antes por el mismo Einstein.

1.1.1. Relatividad especial

La relatividad especial se desprende de la idea newtoniana de que el tiempo es absoluto y que todos los observadores son sistemas de referencia inerciales. Además, Einstein postula que las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales al igual que la velocidad de la luz ($c \simeq 3 \times 10^8 m/s$) es una constante universal.

Los postulados anteriores implican que el espacio y el tiempo son partes de un mismo conjunto, en palabras de Wald: “El espacio-tiempo es una variedad $\mathbb{R}^4$ con métrica plana de signatura de Lorentz definida en él” [18], donde a cada punto en el espacio-tiempo se le llama evento y el camino parametrizado trazado por una partícula se le conoce como línea de mundo. Minkowski notó la correspondencia con una geometría no euclidiana sobre un espacio cuatridimensional, proporcionando una cantidad que toma las coordenadas de dos eventos en el espacio-tiempo y que permanece invariante para todos los sistemas coordinados inerciales globales, conocida como intervalo espacio-temporal que se expresa de la siguiente manera:

$$(\Delta s)^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta r)^2. \quad (1.1)$$

Se observa que (1.1) puede ser positivo, cero o negativo. La colección de eventos mayormente separados en el espacio $(\Delta s)^2 > 0$ son llamados tipo espacio; aquellos conectados por una señal propagada a la velocidad de la luz tendrán $(\Delta s)^2 = 0$ nombrados tipo luz o nulos; por último, los mayormente separados en el tiempo $(\Delta s)^2 < 0$ son tipo tiempo y estos corresponden a los caminos realizados por partículas masivas parametrizadas por el tiempo propio (no pueden viajar a velocidades mayores que c)

$$(\Delta \tau)^2 = -(\Delta s)^2. \quad (1.2)$$

Un resultado importante es el conjunto de transformaciones que mantienen invariante a (1.1) conocido como grupo de Poincaré, el cual está conformado por:

- 1.- Traslaciones espaciales $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_0$, y temporales $t' = t + t_0$.
- 2.- Rotaciones espaciales, siendo $\mathbf{A} \in SO(3)$ (grupo de rotaciones espaciales):

$$\vec{r}' = \mathbf{A}\vec{r}, \quad \text{con} \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T.$$

- 3.- Inversión del sentido del tiempo: $t' = -t$.
- 4.- Inversión de la paridad.
- 5.- Transformaciones de Lorentz:

$$\vec{r}' = \gamma(\vec{r} - \vec{v}t), \quad t' = \gamma(t - v/c^2),$$

siendo $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ el factor de Lorentz y v la velocidad del observador. Este grupo fue introducido inicialmente como las transformaciones que preservan invariante a las ecuaciones de Maxwell.

Se define al intervalo infinitesimal o elemento de línea espacio-temporal como:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (1.3)$$

Donde por convención $x^\mu = (x^0, x^i) = (ct, \vec{r})$, con x^i ($i = 1, 2, 3$) corresponden a las coordenadas espaciales. En (1.3) se introduce al término conocido como la métrica del espacio-tiempo de Minkowski, el cual es un tensor de rango dos donde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, que cumple $\partial_\sigma \eta_{\mu\nu} = 0$.

Esto resalta a la métrica como una cantidad intrínseca del espacio-tiempo, la cual debería de aparecer dentro de las ecuaciones fundamentales que describen a los fenómenos físicos. Cabe resaltar que el espacio de Minkowski corresponde a una geometría plana.

1.1.2. Curvatura del espacio-tiempo

Hasta este punto, no se ha relacionado a la fuerza gravitacional con la relatividad especial; para ello se debe tomar en cuenta el principio de equivalencia de Einstein estableciendo que *no existe experimento alguno que le permita a un observador distinguir localmente entre los efectos producidos por un campo gravitatorio a aquellos realizados por una aceleración y que en regiones pequeñas del espacio-tiempo las leyes de la física se reducen a aquellas en relatividad especial*. Esto conlleva a pensar que la materia afecta a la estructura del espacio-tiempo: es decir, se debe ver a la curvatura de la métrica como la herramienta para poder cuantificar los efectos causados por la presencia de objetos con masa.

Para comprender de mejor manera el principio de equivalencia, primero hay que revisar la estructura matemática que describe a una geometría no plana. Se introduce al tensor métrico $g_{\mu\nu}$ para un espacio-tiempo curvo: el cual es un tensor simétrico, no degenerado, de rango dos con signatura $(-, +, +, +)$, que cumple:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = g_{\lambda\sigma} g^{\sigma\mu} = \delta_\lambda^\mu. \quad (1.4)$$

En otras palabras, la métrica define un producto interno sobre el espacio tangente en cada punto de la variedad diferencial, a partir ella, podemos conocer la distancia infinitesimal asociada con un desplazamiento infinitesimal:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.5)$$

La noción de curvatura está dada en términos del transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva que va del punto p al punto q de la variedad diferencial. Esta identificación de los espacios tangentes de diferentes puntos está en términos de la derivada covariante ∇_μ , considerando que no hay torsión, se relaciona con el operador derivada ordinario ∂_μ mediante:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu V^\sigma, \quad \nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma V_\sigma, \quad (1.6)$$

donde V^ν son las componentes de un campo vectorial y $\Gamma_{\mu\sigma}^\nu$ son los símbolos de Christoffel. Al transportar paralelamente a lo largo de una curva dos campos vectoriales V^μ y W^ν , su producto interno $g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu$ no cambia, esto conlleva a que existe un único operador derivada covariante que satisface:

$$\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0. \quad (1.7)$$

Con ello, mediante (1.6) y (1.7) podemos expresar a los símbolos de Christoffel en términos de la métrica como la siguiente expresión:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (1.8)$$

Al transportar paralelamente un vector de un punto a otro, el resultado dependerá de la curva escogida para hacerlo. El tensor de curvatura de Riemann $R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho$ mide la dependencia de la trayectoria del transporte paralelo de un vector tangente:

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)v_\sigma = R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho v_\rho. \quad (1.9)$$

De (1.6) podemos expresar (1.9) en términos de segundas derivadas de la métrica como:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (1.10)$$

Resulta conveniente por el momento definir dos cantidades de interés, el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ como la contracción del tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}{}^\lambda, \quad (1.11)$$

y al escalar de curvatura como la traza del tensor de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.12)$$

Algunas propiedades importantes de las cantidades definidas anteriormente son:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_{\nu\mu} \quad , & \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad , \\ R_{\mu\nu\sigma\rho} &= g_{\rho\lambda} R_{\mu\nu\sigma}{}^\lambda \quad , & R_{\mu\nu\sigma\rho} &= -R_{\nu\mu\sigma\rho} = -R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad , \\ R_{\mu\nu\sigma\rho} &= R_{\sigma\rho\mu\nu} \quad , & R_{[\mu\nu\sigma]}{}^\rho &= 0 \quad , \\ \nabla_{[\lambda} R_{\mu\nu]\sigma}{}^\rho &= 0 \quad , & R_{\mu\nu} &= R_{\nu\mu} \quad . \end{aligned}$$

Con el formalismo anterior es posible describir a los espacios que tienen una geometría no plana.

1.1.3. Tensor de energía-momento

Para definir las propiedades físicas de objetos masivos en relatividad especial, resulta útil emplear el tiempo propio (1.2) como parámetro de los caminos que describen las partículas en el espacio-tiempo, porque es invariante del sistema de coordenadas. El vector tangente a esta curva es llamado la cuadrivelocidad, que se escribe de la siguiente manera:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (1.13)$$

Siendo $d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, a partir de (1.3) se encuentra la relación $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$, de manera explícita $u^\mu = \gamma(1, v^i)$, siendo $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ la velocidad coordenada. Si un observador se sitúa en el marco de referencia en reposo de la partícula, su velocidad es $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. La norma espacio-temporal de la cuadrivelocidad es invariante

$$u^\mu u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{d\tau^2} = -1. \quad (1.14)$$

Se define al cuadrimento de la partícula como $p^\mu = mu^\mu = \gamma(m, mv^i)$, donde se reconoce a la componente temporal como la energía de la partícula. Las cantidades previas resultan relevantes al estudiar distribuciones de materia continuas en relatividad especial. Para describir las densidades y flujos de la energía y momento que mide un observador que se mueve con respecto a un elemento de fluido, se requiere definir un campo tensorial conocido como el tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$ (de forma más general se le llama tensor de estrés-energía-momento), que es un tensor simétrico de rango 2:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}, \quad (1.15)$$

donde cada componente tiene dimensión de energía/volumen y están relacionadas de la siguiente manera: T^{00} densidad de energía propia ϵ , T^{0i} flujo de energía, T^{i0} densidad de momento, y T^{ij} es el estrés o esfuerzo. También, se debe de cumplir que un observador con velocidad v^μ mide una densidad de energía tal que $T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \geq 0$.

En palabras de Poisson, E. y Will, C. “El tensor de energía-momento tiene divergencia nula cuando la energía y el momento se conservan localmente” [19], por lo tanto $\partial_\mu T^{\mu 0} = 0$ corresponde a la conservación de la energía, Por su parte $\partial_\mu T^{\mu j} = 0$ representa la conservación local de momento, entonces se dice que $T^{\mu\nu}$ se conserva:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.16)$$

Un ejemplo es el tensor de estrés-energía electromagnético

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right], \quad (1.17)$$

obtenido a partir de las ecuaciones de Maxwell y está en términos de un tensor anti-simétrico $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -F^{\nu\mu}$, donde A^μ es el potencial vector.

Comunmente en cosmología se hace uso del tensor de energía-momento para un fluido perfecto el cual tiene ausencia de términos correspondientes a viscosidades y flujo de calor. Se caracteriza por medio de tres cantidades: densidad de energía ϵ , la cuadrivelocidad u^μ y la única fuerza por unidad de área creada es por la presión isotrópica P y tiene la siguiente forma:

$$T_{\mu\nu} = (\epsilon + P)u_\mu u_\nu + P\eta_{\mu\nu}. \quad (1.18)$$

1.1.4. Ecuaciones de Einstein

Bajo el principio de equivalencia se relaciona a la curvatura del espacio tiempo con la dinámica de objetos masivos, en palabras de John Wheeler “el espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse; la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse” [20].

El tensor de Riemann cumple con varias propiedades, pero resulta de gran interés tomar una de ellas conocida como la identidad de Bianchi:

$$\nabla_{[\lambda} R_{\mu\nu]\sigma}{}^{\rho} = \nabla_{\lambda} R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho} + \nabla_{\mu} R_{\nu\lambda\sigma}{}^{\rho} + \nabla_{\nu} R_{\lambda\mu\sigma}{}^{\rho} = 0. \quad (1.19)$$

Contrayendo (1.19) dos veces y utilizando las propiedades de que el tensor de Ricci y la métrica son tensores simétricos, se obtiene:

$$\nabla^{\mu} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] = 0. \quad (1.20)$$

El término entre corchetes de (1.20) se define como el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Ya que el tensor de Ricci y la métrica son simétricos, le heredan esta propiedad y tendrá 10 componentes independientes,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (1.21)$$

Para encontrar las ecuaciones que describen la relación entre la geometría del espacio-tiempo y la distribución de materia, resulta conveniente comparar los resultados descritos en las secciones (1.1.2) y (1.1.3) con la ecuación de Poisson para el límite newtoniano que relaciona al potencial gravitacional con la densidad de materia:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (1.22)$$

Donde G es la constante de gravitación universal de Newton. Esto llevó a Einstein a reformular (1.22) donde del lado izquierdo de la igualdad tendría que aparecer la métrica para el espacio-tiempo curvo; mientras tanto, del lado derecho debería estar el tensor de energía-momento. Debido a que el tensor de Ricci está en función de segundas derivadas de la métrica, Einstein propone $R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ como la versión relativista de la ecuación de Poisson, pero esta relación resulta errónea al considerar la conservación del tensor de energía-momento $\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0$, debido a (1.20), se tiene que del lado izquierdo $\nabla^{\mu} R_{\mu\nu} \neq 0$, si fuese igual a cero implicaría que el escalar de Ricci es constante. Para solucionar dicho problema se observa que (1.21) es un tensor conservado construido a partir de la métrica y de sus primeras y segundas derivadas. A la par de Einstein, el matemático David Hilbert obtiene los mismos resultados desde un fundamento variacional [21], de esta manera las ecuaciones de Einstein vienen dadas por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.23)$$

Realizando la aproximación para el límite newtoniano se encuentra que $\kappa = 8\pi G$, sustituyéndolo en (1.23) se llega a:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.24)$$

La ecuación de campo (1.24) es un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden, donde el lado izquierdo describe la geometría del espacio-tiempo curvo y el lado derecho la materia presente.

1.2. Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Los proyectos más relevantes en cosmología que sustentan al principio cosmológico se centran en dos vertientes: la evidencia observacional para isotropía espacial, con la medición de las anisotropías de la radiación del fondo cósmico de microondas realizadas por el explorador del fondo cósmico (COBE, 1992) [22], el experimento Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP, 2003-2011) [23] y el satélite Planck (2015) [24] (ver [Figura 1.1](#)); la segunda corresponde a la evidencia parcial para homogeneidad espacial, mediante el estudio de la distribución a gran escala de las galaxias, llevadas a cabo por los experimentos Two Degree Field Galaxy Redshift Survey (2dF, 1990- 2003) [26] midiendo el corrimiento al rojo para más de 250,000 galaxias y el Sloan Digital Sky Survey (2000-2020) [27] tomando el espectro de más de tres millones de objetos astronómicos y el estudio espectroscópico de oscilación de bariones (ver [Figura 1.2](#)). Es importante resaltar que las observaciones sólo permiten a los cosmólogos considerar homogeneidad e isotropía espacial estadísticamente hablando.

Resulta sencillo y consistente con las observaciones, postular que el universo es espacialmente homogéneo e isotrópico, pero evoluciona en el tiempo. En la relatividad general, esto se traslada en la proposición de que el universo se puede foliar en cortes espaciales de modo que cada corte tridimensional sea máximamente simétrico. (Carroll, 2014, p. 329) [29]

La métrica más general que describe homogeneidad e isotropía espacial es la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), por las siglas en alusión a las iniciales de sus autores,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (1.25)$$

Donde $a(t)$ es el factor de escala adimensional ($a = 1$ corresponde al tiempo presente $t = t_0$): nos dice si el espacio-tiempo se está expandiendo o contrayendo; k es la curvatura espacial: puede tomar tres valores $k = 0, -1, 1$ a los cuales se les denomina plano, abierto y cerrado respectivamente, con unidades de (longitud^{-2}) . Las geodésicas en un universo plano corresponden a trayectorias paralelas. Por su parte, en uno de tipo abierto divergen. Finalmente, en el cerrado convergen gradualmente como en una 2-esfera.

1.3. Ecuaciones de Friedmann

Una solución a las ecuaciones de Einstein para modelar al universo implementando alta simetría son las ecuaciones de Friedmann. Suponiendo que el universo es homogéneo e isotrópico, entonces la geometría (1.25) describe al espacio-tiempo. Las componentes de materia involucradas en el tensor de energía-momento tienen que ser congruentes con el principio cosmológico y están descritas por la ecuación de un fluido perfecto (1.18) con $\epsilon = \epsilon(t)$, $P = P(t)$ y $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$.

De (1.5) y (1.25) usando las etiquetas (0,1,2,3) para (t, r, θ, ϕ) , las componentes de la métrica son:

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 & , & & g_{11} &= \frac{a^2}{1-kr^2} & , \\ g_{22} &= a^2 r^2 & , & & g_{33} &= a^2 r^2 \sin^2 \theta & . \end{aligned}$$

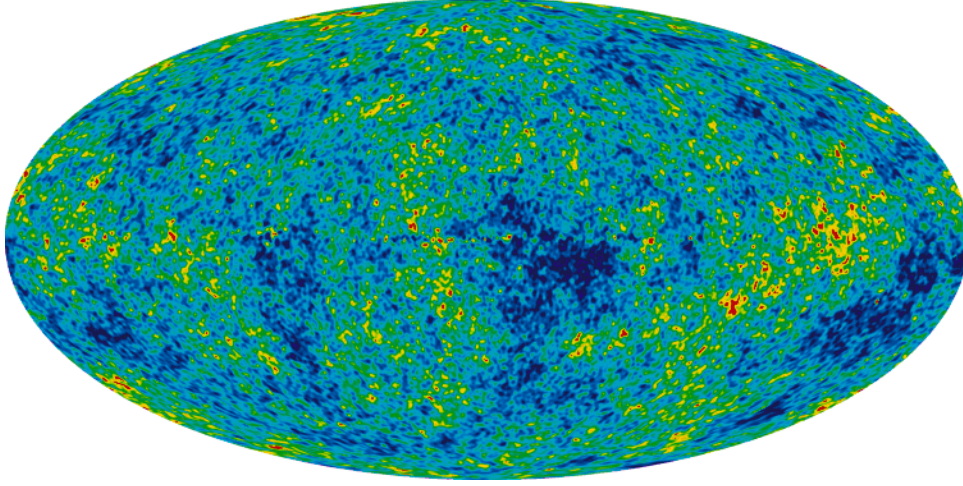


Figura 1.1: Nota. Adaptado de Nine Year Microwave Sky, por NASA/WMAP Science Team, 2014, <https://map.gsfc.nasa.gov/media/121238/index.html> [25]. Se muestran las fluctuaciones de temperatura de la radiación cósmica de fondo, concebida como la radiación electromagnética más temprana del universo referente a la época de recombinación. Los fotones del CMB corresponden a una temperatura promedio de $2.725K$. Se le considera isotrópica con fluctuaciones de temperatura en el rango de $\pm 200\mu K$. En la figura, los diferentes colores muestran la temperatura que va de la más fría (azul) a la más caliente (rojo).

Por consiguiente, es posible calcular las componentes del tensor de Ricci (1.11) que son diferentes de cero y al escalar de curvatura (1.12) a partir de los símbolos de Christoffel (1.8). Se encuentran los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad , & R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \quad , \\ R_{22} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \quad , & R_{33} &= r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \quad , \\ R &= 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] . \end{aligned}$$

De la forma dada para el tensor de energía-momento de un fluido perfecto (1.18), se observa que sólo tendrá valores cuando $\mu = \nu$, los cuales son:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \epsilon \quad , & T_{11} &= g_{11}P \quad , \\ T_{22} &= g_{22}P \quad , & T_{33} &= g_{33}P \quad . \end{aligned}$$

Con las relaciones anteriores se obtienen las soluciones para las componentes temporal y espacial a las ecuaciones de Einstein:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \epsilon - \frac{k}{a^2} \quad , \quad (1.26)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3P) \quad . \quad (1.27)$$

Donde se ha introducido al parámetro de Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$, las ecuaciones de Friedmann (1.26)-(1.27) permiten conocer cómo evoluciona el factor de escala con respecto al contenido de energía del universo.

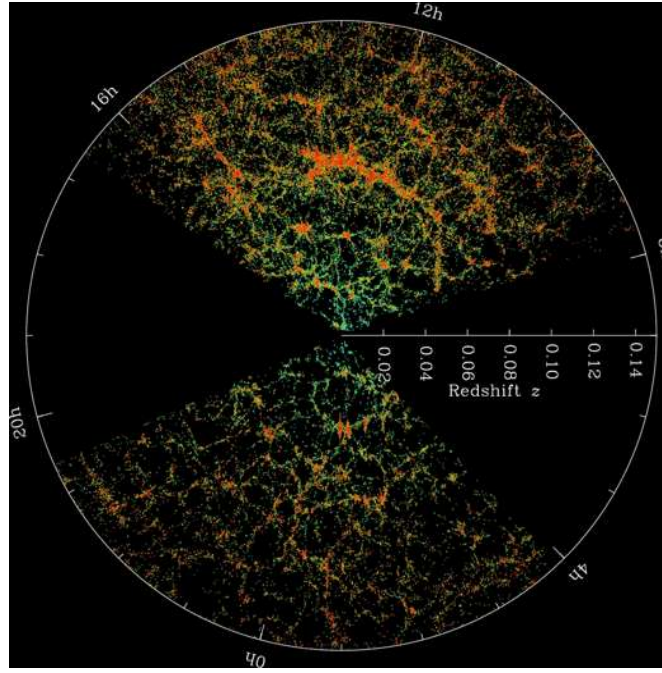


Figura 1.2: Nota. Adaptado de Slices through the SDSS 3-dimensional map of the distribution of galaxies, por M. Blanton y Sloan Digital Sky Survey, https://classic.sdss.org/includes/sideimages/sdss_pie2.html [28]. Se muestra la estructura a gran escala de la distribución de galaxias en el universo. En la figura, la Tierra se encuentra en el centro, y cada punto representa una galaxia, donde los colores corresponden a su edad. Las dos regiones que no muestran datos es debido al polvo de la Vía Láctea que impide la observación.

Otra relación importante surge al tomar en consideración la conservación de la energía $\nabla^\mu T_{\mu 0} = 0$ para el tensor de energía-momento del fluido perfecto (1.18) dando como resultado la ecuación de conservación de la energía:

$$\frac{d\epsilon}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0. \quad (1.28)$$

La ecuación (1.28) debe de satisfacerse para los diferentes tipos de partículas. Es necesario añadir una cuarta ecuación para poder resolver el sistema formado por (1.26), (1.27) y (1.28) ya que sólo dos de ellas son independientes, al considerar un fluido con varias componentes que contribuyen a la densidad de energía se tiene:

$$P_i = \omega_i \epsilon_i. \quad (1.29)$$

La expresión (1.29) se conoce como la ecuación de estado, siendo ω_i el parámetro de la ecuación de estado, el sufijo i denota cada componente. Por último, sustituyendo (1.29) en (1.28) se llega a:

$$\frac{\dot{\epsilon}_i}{\epsilon_i} = -3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega_i) \quad \Rightarrow \quad \epsilon_i = \epsilon_{0,i} a^{-3(1+\omega_i)}, \quad \text{con } \omega_i \text{ constante.} \quad (1.30)$$

Hasta este momento se han presentado las ecuaciones más relevantes de relatividad general y cosmología, a partir de las cuales es posible comprender la evolución del universo. Se resalta su aplicación directa dentro del siguiente capítulo, implementándolas para los diferentes modelos cosmológicos que el presente trabajo explora.

Capítulo 2

Modelos Cosmológicos

La Física, al ser una rama de estudio derivada de la Filosofía, hereda de ella la acción fundamental de cuestionar. En diversas ocasiones se le considera más importante a la pregunta que a la respuesta y, a partir de la práctica donde los dogmas no son aceptados, es cuando se acrecienta el conocimiento. Los físicos implementan el método científico para poner a prueba rigurosamente alguna hipótesis, centrando su atención en los ámbitos donde está limitada, con el objetivo de modificarla y consolidar una teoría.

Como se mencionó en el capítulo anterior, desde la década de 1910 hasta la actualidad la Cosmología afronta el desafío de obtener un modelo sustentado en la teoría general de la relatividad que permita comprender al universo observable a gran escala; para ello, es indispensable conocer los parámetros y propiedades de cada modelo. Con esta motivación, este capítulo expone las características más relevantes de los modelos cosmológicos que se examinan en el presente trabajo mediante la implementación del análisis estadístico bayesiano descrito en el [Capítulo 3](#). En primer lugar, se revisa el actual modelo cosmológico estándar Λ CDM y las evidencias observacionales donde tiene algunas inconsistencias. Posteriormente, con base en los estudios previos realizados por Pierre Henry Chavanis [1]- [5], se presenta al Modelo Cosmológico Logotrópico y su generalización como una alternativa que también busca explicar la evolución del universo.

2.1. Modelo Λ CDM

Einstein introdujo en 1917 una constante Λ a las ecuaciones (1.24) [10]. En principio, lo hizo para describir un universo estático que resultaba ser congruente con las observaciones astrofísicas de la época; sin embargo, investigaciones posteriores apuntaban en dirección de una descripción diferente. Fue hasta finales del siglo pasado mediante las observaciones de supernovas tipo Ia (consideradas como candelas estándar por su pico de luminosidad constante ya que se forman cuando poseen una masa crítica fija llamada masa de Chandrasekhar; aunado a su magnitud aparente, se puede inferir la distancia a la que se encuentran) donde se pudo concluir que el universo se está acelerando en el presente [30]-[31], lo que conllevó a reinterpretar a la constante cosmológica $\Lambda > 0$ como energía oscura. Si Edwin Hubble hubiese estado en una situación hipotética a la que se enfrentó Galileo Galilei de tener que abjurar su visión heliocéntrica ante el tribunal de la santa inquisición, en vez de la célebre frase *eppur si muove* (“y, sin embargo, se mueve”) probablemente la modificaría a “y, sin embargo, se expande”.

Se pueden reescribir las ecuaciones de Einstein con el término correspondiente a la constante cosmológica sin romper alguna ley de conservación modificando la parte derecha de (1.24) como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(0)}) , \quad (2.1)$$

donde $T_{\mu\nu}^{(0)} = -\epsilon_\Lambda g_{\mu\nu}$, siendo $\epsilon_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ la densidad de energía de la constante cosmológica, de este modo (2.1) toma la forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} . \quad (2.2)$$

Empleando de nuevo el principio cosmológico mediante la métrica FRW a (2.2) se obtienen las ecuaciones de Friedman con constante cosmológica:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\epsilon - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} , \quad (2.3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} . \quad (2.4)$$

Tomando en consideración un universo no estático que cumple $\epsilon > -3P$, resulta que, para un conjunto de valores amplio de Λ , la contribución de la constante cosmológica es la responsable de la expansión acelerada del mismo, teniendo una interpretación muy diferente a la que Einstein consideraba. En palabras de George Gamow: “Cuando discutía los problemas cosmológicos con Einstein, él comentó que la introducción del término cosmológico fue el mayor error que cometió en su vida” [32]. El modelo Λ CDM es nombrado así por las dos principales componentes que lo caracterizan: la materia oscura fría y la energía oscura inmersa en la constante cosmológica Λ , las cuales son las responsables de aportar alrededor del 25 % y 70 % respectivamente de la densidad de energía actual. Este modelo está constituido por:

Radiación: Compuesta de fotones y neutrinos ultrarelativistas. Por la ley de Stefan-Boltzmann y el valor del parámetro de la ecuación de estado para la radiación, se encuentra que la temperatura asociada a estas partículas es inversamente proporcional al factor de escala.

Materia bariónica: Es el tipo de materia con la que se está más familiarizado, ya que los planetas y estrellas están formados a partir de ella, se tiene bien fundamentada mediante el modelo estándar de partículas compuesto por 12 fermiones (6 quarks y 6 leptones) y 13 bosones (12 del tipo “gauge” y 1 escalar).

Materia oscura fría: Consolidada por el análisis de las curvas de rotación en galaxias espirales por Rubin, Ford y Thonnard [33]. Dado a que la velocidad orbital debido a la materia bariónica es mucho menor que la velocidad orbital medida, resulta necesario considerar a la Materia Oscura Fría (CDM, por sus siglas en inglés), la cual interactúa gravitacionalmente muy débil con la materia bariónica y no absorbe ni emite luz.

Constante cosmológica: Concebida como la responsable de la expansión acelerada del universo que actúa como energía oscura. Si se resuelve la ecuación de continuidad para ϵ_Λ , entonces $\dot{\epsilon}_\Lambda = 0$ encontrando que $P_\Lambda = -\epsilon_\Lambda$.

Para resolver el conjunto de ecuaciones (1.28), (2.3) y (2.4) es necesario especificar la ecuación de estado que caracteriza a cada una de las componentes descritas. La materia bariónica y oscura tienen el mismo valor para el parámetro de la ecuación de estado y pueden clasificarse como partículas no relativistas. Se sintetizan en la tabla **Tabla 2.1** los valores del parámetro de la ecuación de estado y la dependencia que tiene la densidad de energía de cada componente con respecto al factor de escala (1.30).

Se puede reescribir la ecuación (2.3) en términos de los parámetros de densidad de energía para cada componente $\Omega_i \equiv \frac{\epsilon_i}{\epsilon_c}$ siendo ϵ_c la densidad crítica $\epsilon_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$,

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_{0,r} a^{-4} + (\Omega_{0,b} + \Omega_{0,CDM}) a^{-3} + \Omega_{0,\Lambda} + \Omega_{0,k} a^{-2}] . \quad (2.5)$$

Donde el subíndice 0 corresponde a las cantidades evaluadas en el presente $a = 1$, $\Omega_{0,i} = \frac{\epsilon_{0,i}}{\epsilon_0}$ con $\epsilon_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ la densidad crítica actual. Se observa que existen 5 componentes $\Omega_{0,i}$ en (2.5) que corresponden, de izquierda a derecha, a radiación (fotones y neutrinos ultrarelativistas), materia bariónica, materia oscura fría, energía oscura (constante cosmológica) y curvatura respectivamente. En virtud de lo anterior, de (2.5) se obtiene la restricción $H(a = 1) = H_0$:

$$1 = \Omega_{0,r} + \Omega_{0,b} + \Omega_{0,CDM} + \Omega_{0,\Lambda} + \Omega_{0,k} . \quad (2.6)$$

Por los resultados del CMB se tiene que $\Omega_{0,k} \approx 0$. Observacionalmente, no se puede medir al factor de escala directamente de la luz que llega de los cuerpos celestes: es necesario hacerlo mediante su relación con el corrimiento al rojo o redshift que se puede obtener a partir de (1.25), cumpliéndose para fotones que viajan desde una fuente distante hasta la Tierra mediante una curva geodésica $ds^2 = 0$. Debido a la isotropía del espacio-tiempo de FRW se puede escoger a las coordenadas comóviles angulares constantes por lo que $d\theta = d\phi = 0$,

$$dt = \pm a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} . \quad (2.7)$$

Considerando que la fuente luminosa emite dos fotones de la misma frecuencia f_e en diferentes tiempos t_e y $t_e + \delta t_e$, el observador medirá los fotones en tiempos t_o y $t_o + \delta t_o$ respectivamente con una frecuencia f_o . Ya que la distancia comóvil entre la fuente y el observador no varía en ese pequeño periodo de tiempo, se tiene:

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{r'}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow \frac{\delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\delta t_o}{a(t_o)} . \quad (2.8)$$

Haciendo uso de la definición del corrimiento al rojo:

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{f_e - f_o}{f_o} . \quad (2.9)$$

	ω	ϵ
Radiación	$\frac{1}{3}$	a^{-4}
No relativistas	0	a^{-3}
Λ	-1	cte

Tabla 2.1: Valor de ω y dependencia de ϵ con respecto al factor de escala para cada componente de la densidad de energía.

en donde $\lambda = \frac{c}{f}$ es la longitud de onda y $f = \frac{2\pi}{\delta t}$ es la frecuencia. Combinando (2.8) y (2.9) con $a(t_o) = 1$ y $a(t_e) = a$, se llega a la relación entre z y a :

$$z = \frac{\delta t_o}{\delta t_e} - 1 = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} - 1 = \frac{1}{a(t_e)} - 1, \quad (2.10)$$

$$a = \frac{1}{z + 1}.$$

Es importante comprender al redshift como una medida de la tasa de expansión del universo y no confundirlo con el movimiento de una fuente respecto al observador. Su relación con el factor de escala es inversamente proporcional; es decir, si se obtienen valores altos entonces la luz que se observa fue emitida en un universo temprano (a se aproxima a 0), mientras que para valores pequeños correspondería a una etapa cercana a la actual (a se aproxima a 1). En términos del corrimiento al rojo (2.5) se escribe:

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_{0,r}(1+z)^4 + (\Omega_{0,b} + \Omega_{0,CDM})(1+z)^3 + \Omega_{0,\Lambda} + \Omega_{0,k}(1+z)^2]. \quad (2.11)$$

Se puede observar la evolución para el modelo Λ CDM analizando (2.5) con el apoyo de los resultados numéricos mostrados en: Figura 2.1 y Figura 2.2, donde para tiempos tempranos del universo, $a \rightarrow 0$, la principal contribución a la densidad de energía es por parte de la radiación. Posteriormente, transita a una etapa en la cual la materia oscura se sobrepone. Por último, mientras el factor de escala se acerca a uno, la constante cosmológica domina causando la expansión acelerada. La edad del Universo se puede calcular integrando (2.5):

$$H_0 t_0 = \int_0^1 \frac{da}{[\Omega_{0,r}a^{-4} + (\Omega_{0,b} + \Omega_{0,CDM})a^{-3} + \Omega_{0,\Lambda} + \Omega_{0,k}a^{-2}]^{1/2}}. \quad (2.12)$$

Empleando los datos de Planck 2018 [34], numéricamente se tiene $t_0 \approx 13.8 Gyr$. Cabe destacar que el modelo Λ CDM explica muy bien las observaciones de la radiación cósmica de fondo y la estructura a gran escala mediante un número pequeño de parámetros y bajo fundamentos teóricos sencillos. Es por ello que actualmente se considera como el mejor modelo teórico; sin embargo, en algunos aspectos es deficiente como se verá más adelante.

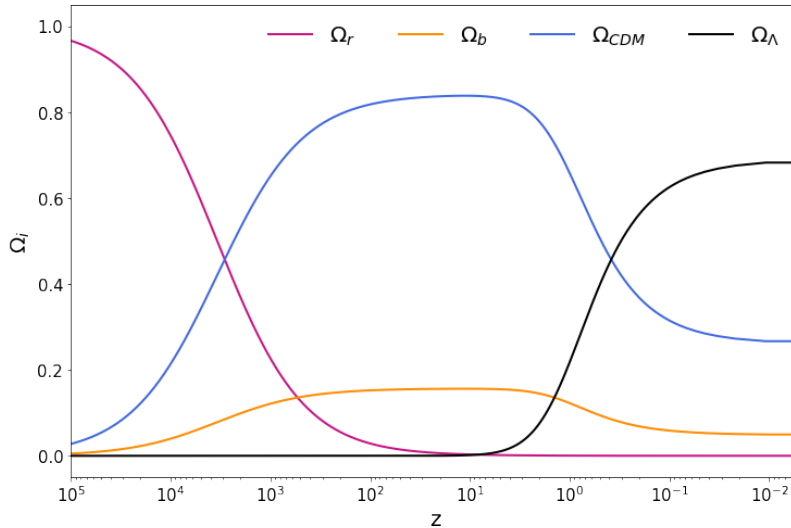


Figura 2.1: Evolución de los parámetros de densidad de energía Ω_i para el modelo Λ CDM, empleando los datos de Planck 2018 [34].

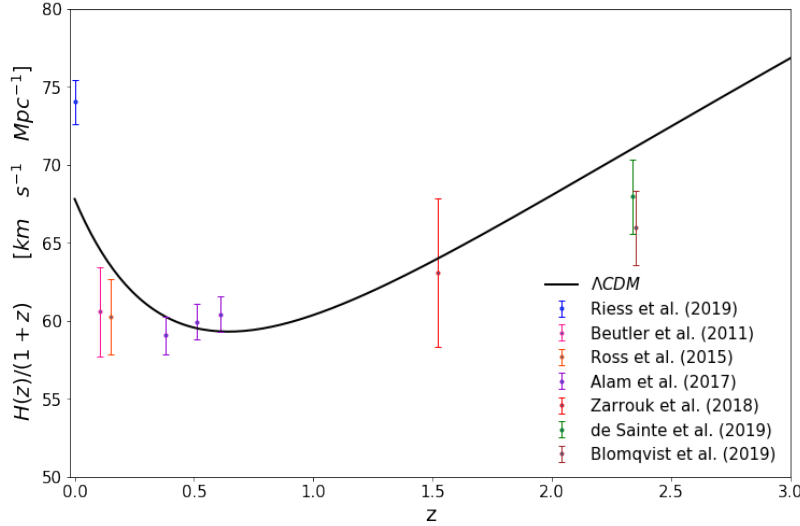


Figura 2.2: Evolución del parámetro de Hubble $H(z)$ para el modelo Λ CDM. Los puntos y las líneas verticales representan el valor estimado y la incertidumbre respectivamente del parámetro de Hubble para diferentes estudios: azul [35], rosa [36], naranja [37], morado [38], rojo [39], verde [40] y café [41]

2.1.1. Inconsistencias del Modelo Λ CDM

En esta sección se busca exponer brevemente los temas en donde el modelo Λ CDM presenta discrepancias con respecto a las observaciones.

Tensión de H_0 : Sin duda alguna este es el principal problema con el cual Λ CDM lidia actualmente. Si se deduce el valor del parámetro H_0 mediante las observaciones del universo tardío usando supernovas tipo Ia, se obtiene $H_0 = 74.0 \pm 1.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [35], mientras que para el universo temprano basado en las observaciones del CMB resulta $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [34]. Estos valores distan uno del otro y, a medida de que las técnicas para inferir los parámetros han mejorado, sus incertidumbres se han alejado con una diferencia de más de 4σ [42], por lo cual no sólo se le ha denominado como problema, sino que se designa como tensión.

Valor de la constante cosmológica: Si se interpreta a la densidad de energía de la constante cosmológica ϵ_Λ como la densidad de energía del vacío cuántico, la estimación a partir de los datos observacionales es de 120 órdenes de magnitud menor que el valor predicho por la teoría cuántica de campos [43].

Tensión de σ_8 : Proviene de comparar la relación entre las medidas del parámetro de densidad de energía de materia $\Omega_{0,m}$ con el de la amplitud del espectro de potencia lineal σ_8 dada por $S_8 = \sigma_8 \sqrt{\Omega_{0,m}/3}$, generando una discrepancia de 3.2σ de precisión entre las mediciones realizadas por el satélite Planck [34] contra los obtenidos por lentes gravitacionales débiles [44].

Satélite perdido: Este problema está dado por la sobreabundancia en el número de subhalos predecidos por las simulaciones de N-cuerpos asumiendo el modelo Λ CDM con respecto al número observado alrededor de la Vía Láctea [45]-[50].

Núcleo-cúspide: Otro problema que se presenta en escalas pequeñas, es al inferir la densidad de materia oscura para galaxias de masa y brillo superficial bajos tomando la simulación de N-cuerpos. Para el modelo Λ CDM se predicen halos de materia oscura con un perfil de densidad cúspide que aumenta para radios pequeños [51], mientras que las observaciones indican que se tiene un comportamiento constante en las regiones centrales o núcleos [52].

2.2. Modelo Logotrópico

Dentro de la literatura de Cosmología, se han presentado diferentes alternativas a Λ CDM a través de los años, con el objetivo de proponer soluciones a los diferentes problemas descritos previamente, algunos ejemplos son: gravedad modificada, teorías $f(R)$, teorías de campo escalar-tensorial, quintaesencia, membranas en dimensiones extras y modelos provenientes de teorías de cuerdas, y fluidos oscuros. Sin embargo, hasta hoy no se ha encontrado una opción que describa tan bien a las observaciones con un número pequeño de parámetros como lo hace el modelo Λ CDM; es en este punto donde toma relevancia estudiar a fondo al Modelo Logotrópico (ML), el cual describe a las componentes de materia oscura y energía oscura como manifestaciones de un único fluido oscuro en donde se encuentran unificadas.

En esta sección, se recopilarán los resultados más relevantes del modelo cosmológico logotrópico con base en el amplio estudio realizado por Pierre Henry Chavanis, se recomienda al lector en caso de querer profundizar en el tema consultar las referencias [1]-[5] ya que sólo se presentará una síntesis de los rasgos distintivos del modelo.

El punto central del ML se encuentra en estudiar las ecuaciones de evolución considerando un único fluido oscuro perfecto que tiene como ecuación de estado:

$$P = A \ln \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right). \quad (2.13)$$

Donde P es la presión, ρ es la densidad de masa en reposo (es importante no confundirla con la densidad de energía ϵ), A es una constante y ρ_* es una densidad de referencia constante. Tomando un Universo homogéneo e isotrópico descrito por la métrica de FRW y con constante de curvatura $k = 0$, sustentado en las observaciones del CMB, las ecuaciones (1.26 - 1.28) toman la forma:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \epsilon, \quad (2.14)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3P), \quad (2.15)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0. \quad (2.16)$$

La ecuación de estado logotrópica (2.13) busca explicar tanto observaciones a gran escala como a corta escala. Es importante destacar que la ecuación de estado (2.13) fue introducida fenomenológicamente en astrofísica en el estudio de la formación estelar bimodal para nubes moleculares [53] y posteriormente se usó para describir núcleos de nubes moleculares [54]. Por último, y de gran relevancia, Chavanis observa que la ecuación de estado logotrópica puede describir la estructura de los halos de materia oscura y resuelve los problemas de núcleo-cúspide y del satélite perdido.

Una justificación sobre la propuesta de la ecuación (2.13) para describir la estructura de los halos de materia oscura se obtiene cuando se toma en consideración la condición clásica de equilibrio hidrostático:

$$\nabla P + \rho \nabla \Phi = \mathbf{0}. \quad (2.17)$$

En donde Φ es el potencial gravitacional. En el caso de tener materia con presión constante, como en el modelo Λ CDM, se encuentra que $\nabla P = 0$; es decir, no existe un

gradiente de presión que equilibre la fuerza gravitacional, por lo que los halos de materia oscura presentan perfiles de densidad cúspide. Esto se puede solucionar considerando una ecuación de estado barotrópica $P = P(\rho)$; como caso particular, una ecuación de estado politrópica de la forma $P = K\rho^\gamma$, con K y γ constantes, muestra un núcleo de densidad constante que concuerda con las observaciones, sustituyendo en (2.17) se tiene:

$$K\gamma\rho^{\gamma-1}\nabla\rho + \rho\nabla\Phi = \mathbf{0}. \quad (2.18)$$

El valor para γ debe de ser cercano a cero [55]. Asumiendo que $\gamma \rightarrow 0^-$ y $K \rightarrow -\infty$, con su producto $A = K\gamma$ finito, se llega a:

$$A\frac{\nabla\rho}{\rho} + \rho\nabla\Phi = \mathbf{0}. \quad (2.19)$$

Comparando (2.19) con (2.17) se encuentra que la ecuación de estado debe de ser (2.13), que resulta ser más fácil de justificar teóricamente que una ecuación de estado politrópica. Se puede observar que A necesariamente es positivo si se busca que la presión equilibre la atracción gravitacional.

Para estudiar la evolución cosmológica del ML se requiere de tomar en consideración la primer ley de la termodinámica para un fluido perfecto con un proceso adiabático (con entropía constante):

$$dU = TdS - PdV \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right) = -Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad \Rightarrow \quad d\epsilon = \frac{P + \epsilon}{\rho}d\rho. \quad (2.20)$$

Combinando (2.16) y (2.20) se obtiene la conservación de la densidad de masa en reposo:

$$\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\rho_0}{a^3}. \quad (2.21)$$

Resolviendo la ecuación diferencial (2.20) mediante el método de variación de parámetros para una presión dada $P = P(\rho)$ se tiene:

$$\epsilon = \rho c^2 + \rho \int^\rho \frac{P(\rho')}{\rho'^2} d\rho'. \quad (2.22)$$

Tomando una presión constante $P = -\epsilon_\Lambda$ en (2.22) entonces la energía interna es ϵ_Λ recuperando los resultados para Λ CDM. Para poder describir la cosmología logotrópica se integra (2.22) usando (2.13) llegando a la ecuación de evolución de la densidad de energía respecto al factor de escala:

$$\epsilon = \frac{\rho_0 c^2}{a^3} - A \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho_* a^3}\right) - A. \quad (2.23)$$

Es en este punto donde resulta interesante realizar un análisis de (2.23) ya que el primer término del lado derecho se puede entender como la energía de la masa en reposo del fluido oscuro siendo equivalente al de un fluido sin presión, imitando así a la Materia Oscura (DM , por sus siglas en inglés), mientras que los dos últimos términos corresponderían a la energía interna del fluido oscuro que se puede interpretar como la contribución de la Energía Oscura (DE , por sus siglas en inglés) sustituyendo el rol de la constante cosmológica Λ . De esta forma, se considera al ML como un modelo alternativo a Λ CDM en donde las contribuciones de materia y energía oscura se encuentran unificadas dentro de un único fluido oscuro que tiene por ecuación de estado a la expresión (2.13).

Los valores a los que tiende la presión, la densidad de masa en reposo y la densidad de energía para valores relevantes del factor de escala se sintetizan en la [Tabla 2.2](#). Se observa que ϵ decrece conforme al incremento factor de escala, en tiempos tardíos alcanza un mínimo en a_M y posteriormente incrementa conforme al factor de escala; por lo que para $a < a_M$ se tiene un comportamiento normal y para $a > a_M$ es del tipo fantasma.

Identificando a $\rho_0 c^2$ con la densidad de energía actual de la materia oscura y evaluando la densidad de energía presente en $a = 1$ se tiene:

$$\rho_0 c^2 = \Omega_{0,DM} \epsilon_0, \quad (2.24)$$

$$\epsilon_0 = \Omega_{0,DM} \epsilon_0 - A \ln \left(\frac{\Omega_{0,DM} \epsilon_0}{\rho_* c^2} \right) - A, \quad (2.25)$$

$$\ln \left(\frac{\Omega_{0,DM} \epsilon_0}{\rho_* c^2} \right) = -\frac{(1 - \Omega_{0,DM}) \epsilon_0}{A} - 1. \quad (2.26)$$

Sustituyendo (2.25) en (2.23):

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\Omega_{0,DM}}{a^3} + (1 - \Omega_{0,DM}) \left[1 + \frac{3A}{\epsilon_0 (1 - \Omega_{0,DM})} \ln a \right]. \quad (2.27)$$

Introduciendo la constante adimensional B, definida como:

$$B = \frac{A}{\epsilon_{DE}} = \frac{A}{\epsilon_0 \Omega_{0,DE}} = \frac{A}{\epsilon_0 (1 - \Omega_{0,DM})}, \quad (2.28)$$

donde $\epsilon_{DE} = \epsilon_0 (1 - \Omega_{0,DM})$ es la densidad de energía de la energía oscura. Las ecuaciones (2.26), (2.27) y (2.13) toman la forma:

$$\frac{\rho_* c^2}{\Omega_{0,DM} \epsilon_0} = e^{1+1/B}, \quad (2.29)$$

$$\frac{\epsilon_{fl}}{\epsilon_0} = \frac{\Omega_{0,DM}}{a^3} + \Omega_{0,DE} (1 + 3B \ln a), \quad (2.30)$$

$$P_{fl} = -\Omega_{0,DE} \epsilon_0 (B + 1 + 3B \ln a). \quad (2.31)$$

Se emplea el subíndice *fl* para denotar a las componentes de densidad de energía y presión del fluido oscuro. Se destaca al parámetro B como la propiedad más importante del modelo cosmológico logotrópico y puede interpretarse como una nueva constante universal que suplementa a Λ . Cabe resaltar que Chavanis infiere el valor de $B = 3.53 \times 10^{-3}$ mediante el análisis numérico de los halos de materia oscura e identifica a la densidad de referencia con la densidad de Planck $\rho_* = \rho_P = \frac{c^5}{hG^2} = 5.16 \times 10^{99} g/m^3$ como una

a	P	ρ	ϵ
0	∞	∞	∞
$a_M = \left(\frac{\rho_0 c^2}{A} \right)^{1/3}$	$-\epsilon_M$	$\rho_M = \frac{A}{c^2}$	$\epsilon_M = -A \ln \left(\frac{A}{\rho_* c^2} \right)$
∞	$-\infty$	0	∞

Tabla 2.2: Puntos relevantes de la evolución del Modelo Logotrópico.

buena aproximación para su resultado obtenido dando así una alternativa para solucionar el problema del valor de la constante cosmológica. Sin embargo, para los fines de este trabajo, se considera que el método utilizado por Chavanis carece de fundamento desde el punto de vista cosmológico, ya que el parámetro B debe de inferirse haciendo uso del análisis estadístico bayesiano descrito en el [Capítulo 3](#) tomando en consideración los datos observacionales cosmológicos de estructuras a gran escala y del fondo cósmico de microondas.

El parámetro de la ecuación de estado del fluido oscuro es:

$$\omega_{fl} = \frac{P_{fl}}{\epsilon_{fl}} = \frac{-\Omega_{0,DE}(B + 1 + 3B \ln a)}{\frac{\Omega_{0,DM}}{a^3} + \Omega_{0,DE}(1 + 3B \ln a)}. \quad (2.32)$$

Se puede escribir al parámetro de Hubble en término de los parámetros de densidad, como en (2.5), para el ML :

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_{0,r} a^{-4} + (\Omega_{0,b} + \Omega_{0,CDM}) a^{-3} + \Omega_{0,DE}(1 + 3B \ln a)] , \quad (2.33)$$

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_{0,r}(1+z)^4 + (\Omega_{0,b} + \Omega_{0,CDM})(1+z)^3 + \Omega_{0,DE}(1 - 3B \ln(1+z))] . \quad (2.34)$$

A continuación, se muestran resultados numéricos del ML con diferentes valores de B para la evolución de los parámetros de densidad de energía de DM y DE que componen al fluido oscuro [Figura 2.3](#), del parámetro de la ecuación de estado para la componente que actúa como DE [Figura 2.4](#), y del parámetro de Hubble [Figura 2.5](#). Se observa que mientras B se acerca a cero, el ML se aproxima a ΛCDM y en el presente $a = 1$ son indistinguibles. Si B aumenta, entonces el punto correspondiente a la transición entre el dominio de DM a DE corresponde a un tiempo mayor que en el modelo ΛCDM . Por último, para valores de $B > 0$, el parámetro de la ecuación de estado se indefiniría cuando $a = e^{-1/3B}$, pasando del régimen tipo quintaesencia al tipo fantasma.

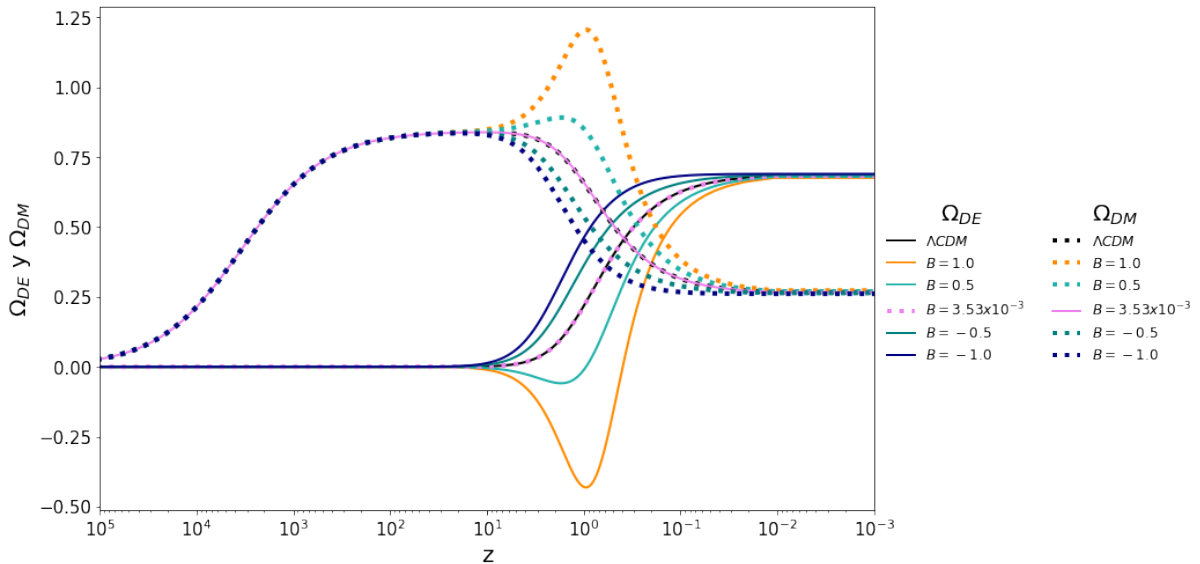


Figura 2.3: Solución numérica de la evolución del parámetro de densidad de energía del ML de las componentes que imitan a DE y DM del fluido oscuro para diferentes valores de B .

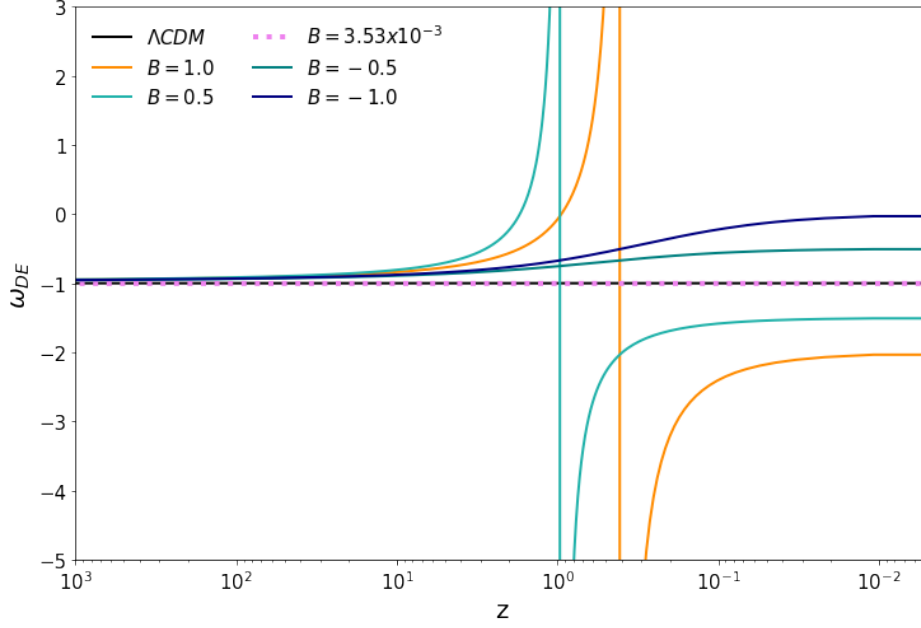


Figura 2.4: Solución numérica de la evolución del parámetro de la ecuación de estado del ML para diferentes valores de B .

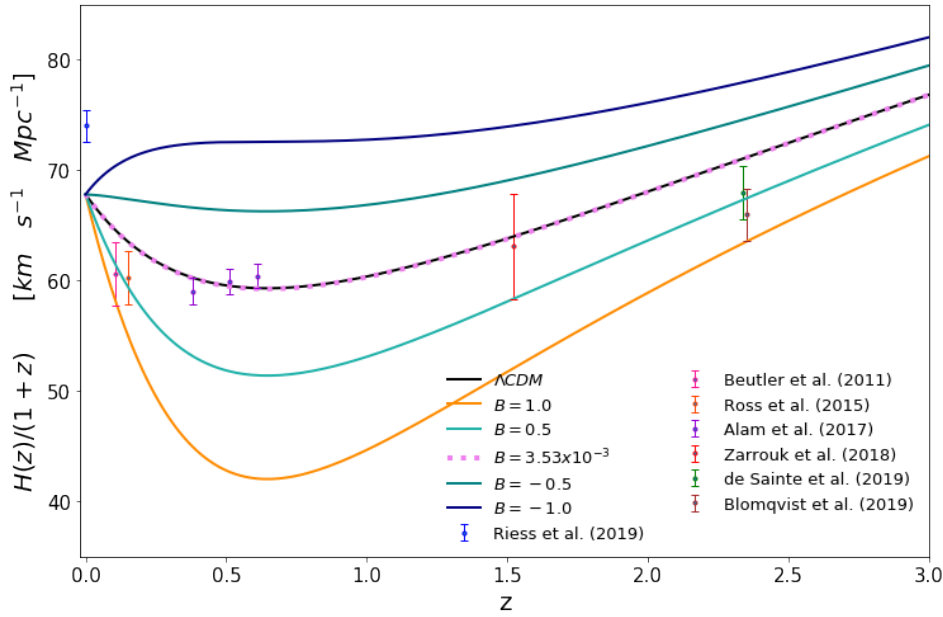


Figura 2.5: Solución numérica de la evolución del parámetro de Hubble del ML para diferentes valores de B .

2.2.1. Modelo Logotrópico Generalizado

Recientemente, Benaoum, Chavanis y Quevedo toman una generalización del ML a la que nombraron como Modelo Logotrópico Generalizado (MLG) [5], proponiendo a la ecuación de estado logotrópica (2.13) como una serie de potencias de la siguiente forma:

$$P_{fl} = \sum_{i=0}^N A_i \ln^i \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right). \quad (2.35)$$

En el artículo original se utiliza $\rho_* = \rho_P$, pero como se mencionó anteriormente es necesario implementar la inferencia de parámetros mediante el análisis estadístico bayesiano para obtener el valor de ρ_* , es por ello que por conveniencia se decide continuar

con la notación de la sección anterior. Utilizando nuevamente la primera ley de la termodinámica para un fluido con evolución adiabática, dada una función $P = P(\rho)$, para la ecuación (2.22) aunado a (2.35) se encuentra que la densidad de energía tienen la forma:

$$\epsilon_{fl} = \rho c^2 - \sum_{i=0}^N A_i \frac{\rho}{\rho_*} \Gamma \left[i + 1, \ln \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right) \right]. \quad (2.36)$$

La relación (2.36) esta en términos de la función gamma incompleta, que para números enteros cumple la siguiente propiedad:

$$\Gamma(\alpha + 1, x) = \int_x^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt = \alpha! e^{-x} \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{1}{k!} x^k. \quad (2.37)$$

Utilizando las relaciones (2.21), (2.24) y (2.29) se tiene que la densidad de energía del fluido oscuro es:

$$\epsilon_{fl} = \frac{\Omega_{0,DM}\epsilon_0}{a^3} - \frac{e^{-1-1/B}}{a^3} \sum_{i=0}^N A_i \Gamma \left(i + 1, -1 - \frac{1}{B} - 3 \ln a \right). \quad (2.38)$$

El primer término de (2.38) corresponde a la contribución de materia oscura mientras que el segundo se interpreta como la energía oscura. El *MLG* depende del parámetro libre N ; estudiando únicamente el término de orden n -ésimo de la serie finita bajo la condición $A_i = A_n \delta_{i,n}$, Chavanis encuentra que los valores $n \leq 2$ son favorecidos al analizar su comportamiento asintótico tipo fantasma presentando una muerte lenta; por otro lado, para $n > 2$ se tiene como resultado una muerte rápida. El caso $n = 0$ se reduce al modelo Λ CDM identificando A_0 con la densidad de energía de la constante cosmológica, mientras que el caso $n = 1$ corresponde al *ML* presentado previamente.

Por lo tanto, se plantea un límite superior para el *MLG* de $N = 2$ donde la presión y la densidad de energía evolucionan con respecto al factor de escala de la siguiente manera:

$$P_{fl} = A_0 - A_1 \left(1 + \frac{1}{B} + 3 \ln a \right) + A_2 \left(1 + \frac{1}{B} + 3 \ln a \right)^2, \quad (2.39)$$

$$\epsilon_{fl} = \frac{\Omega_{0,DM}\epsilon_0}{a^3} - A_0 + A_1 \left(\frac{1}{B} + 3 \ln a \right) - 2A_2 \left[-\frac{1}{B} - 3 \ln a + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{B} + 3 \ln a \right)^2 \right]. \quad (2.40)$$

El parámetro de la ecuación de estado para el término del fluido oscuro que actúa como energía oscura es:

$$\omega_{DE} = - \frac{[A_0 B^2 - A_1 B(B + 1 + 3B \ln a) + A_2(B + 1 + 3B \ln a)^2]}{[A_0 B^2 - (A_1 + 2A_2) B(1 + 3B \ln a) + A_2(B + 1 + 3B \ln a)^2]}. \quad (2.41)$$

Para concluir este capítulo, resulta indispensable observar que las ecuaciones (2.39), (2.40) y (2.41) se reducen al modelo Λ CDM tomando $A_1 = A_2 = 0$ y $A_0 = -\epsilon_\Lambda$. Mientras que para $A_0 = A_2 = 0$ se recupera el *ML* identificando $A_1 \equiv A$ con la relación (2.28).

Capítulo 3

Análisis Bayesiano

Toda ciencia busca comprender las estructuras y patrones de la naturaleza, para lograrlo hace uso de dos componentes principales: la medición y el análisis, el primero busca cuantificar los atributos del objeto de estudio mediante la comparación de una unidad de medida seleccionada con él, mientras que el segundo busca interpretar los resultados generados a través del primer proceso para conocer las características o cualidades, y extraer conclusiones. Nos encontramos en una era privilegiada para la Cosmología, ya que desde finales del siglo XX hasta la actualidad se tiene un gran avance tecnológico de los satélites y telescopios encargados de explorar la fenomenología del universo, produciendo una nueva y robusta cantidad de datos observacionales los cuales requieren de técnicas específicas que permitan manejar una enorme cantidad de estos para contrastar las cantidades medidas con la teoría; es allí donde los cosmólogos se han apoyado en el Análisis Estadístico Bayesiano, el cual permite explorar el comportamiento y valores posibles de los parámetros θ desconocidos de algún modelo o hipótesis $\mathcal{M}$ haciendo uso de un conjunto de datos D : a este proceso se le conoce como Inferencia.

En palabras de Andrew R. Liddle “La inferencia es el método por el cual traducimos información experimental y observacional en restricciones de nuestros modelos matemáticos” [56]; es decir, se busca obtener qué valores de θ son más probables y el grado de incertidumbre asociado a dichas estimaciones.

Dentro de este capítulo se revisa brevemente el Teorema de Bayes, siendo este la herramienta principal para realizar inferencia sobre los parámetros cosmológicos, por esta razón resulta imprescindible comprender cada uno de sus componentes. En segundo lugar, se expone el método computacional conocido como Cadenas de Markov y Monte Carlo, utilizado para el análisis estadístico bayesiano. Por último, se ha mencionado que es indispensable contar con un conjunto de datos observacionales, es por ello que se proporciona un resumen de los estudios más relevantes hasta hoy, en los cuales se basa la presente exploración de parámetros del *ML*.

3.1. Inferencia Bayesiana

Existen dos maneras diferentes de comprender a la probabilidad: la primera de ellas es la noción clásica (o frecuentista), donde las probabilidades están ligadas a la frecuencia de los resultados después de realizar un número grande de eventos [57]; mientras que la otra perspectiva es la bayesiana, en donde se le asigna densidades de probabilidad o “grado de confianza” a todas las cantidades de interés y con base en el conocimiento previo de alguna proposición se puede calcular la probabilidad de que algún evento ocurra [58].

La aplicación del pensamiento bayesiano recupera los resultados frecuentistas para casos suficientemente simples donde los resultados se conocen pero resulta ser más rico al permitir realizar predicciones a futuro sobre variables complejas, mientras que esto no es posible realizarlo desde la perspectiva frecuentista. Se trabaja con variables aleatorias que son una cantidad numérica desconocida sobre la que hacemos declaraciones de probabilidad [59], las cuales pueden ser discretas o continuas: las primeras tienen asociada una Función de Masa de Probabilidad (FMP) mientras que las segundas una Función de Densidad de Probabilidad (FDP).

3.1.1. Teorema de Bayes

El teorema de Bayes [60], derivado por el matemático británico Thomas Bayes en 1763, se puede obtener mediante un procedimiento sencillo, no obstante, el resultado ha sido indispensable para el análisis de datos en varios campos de estudio de la ciencia.

Introduciendo un poco de notación, dadas dos hipótesis A y B , se llama probabilidad conjunta $\mathcal{P}(A, B)$ a la probabilidad de que A y B sucedan juntas, la probabilidad condicional $\mathcal{P}(A | B)$ es la probabilidad de que A suceda dado que B ha sucedido, tomando la regla del producto donde A y B son dependientes:

$$\mathcal{P}(A, B) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B | A). \quad (3.1)$$

En caso de ser independientes:

$$\mathcal{P}(A, B) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B), \quad (3.2)$$

donde (3.1) se lee como: la probabilidad conjunta de A y B es igual a la probabilidad de A multiplicado por la probabilidad de B dado A . Del mismo modo, se tiene que:

$$\mathcal{P}(B, A) = \mathcal{P}(B)\mathcal{P}(A | B). \quad (3.3)$$

Sin embargo, se debe de cumplir que la probabilidad conjunta de A y B sea igual a la probabilidad conjunta de B y A ,

$$\mathcal{P}(A, B) = \mathcal{P}(B, A). \quad (3.4)$$

Haciendo uso de (3.1), (3.3) y (3.4) se obtiene el teorema de Bayes:

$$\mathcal{P}(A | B) = \frac{\mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B | A)}{\mathcal{P}(B)}. \quad (3.5)$$

Del lado izquierdo de la igualdad (3.5) se encuentra la densidad de probabilidad posterior $\mathcal{P}(A | B)$, mientras que a las variables en el numerador del lado derecho se les denota como densidad de probabilidad previa $\mathcal{P}(A)$ y función de probabilidad “likelihood” $\mathcal{P}(B | A)$ (a estas tres variables comúnmente se les llama Posterior, Prior y Likelihood respectivamente por sus nombres en inglés). Por último, al denominador se le conoce como evidencia.

Tomando el teorema de Bayes para un modelo $\mathcal{M}$ descrito por un conjunto de parámetros θ y contando con un conjunto de datos observacionales D , se puede escribir (3.5) como:

$$\mathcal{P}(\theta | D) = \frac{\mathcal{P}(\theta)\mathcal{P}(D | \theta)}{\mathcal{P}(D)}. \quad (3.6)$$

En caso de tener diferentes modelos que busquen explicar los mismos datos, si se quiere hacer énfasis en un modelo $\mathcal{M}_i$ que se describe a partir de los parámetros θ_i , el teorema de Bayes toma la forma:

$$\mathcal{P}(\theta_i | D, \mathcal{M}_i) = \frac{\mathcal{P}(\theta_i | \mathcal{M}_i) \mathcal{P}(D | \theta_i, \mathcal{M}_i)}{\mathcal{P}(D | \mathcal{M}_i)}. \quad (3.7)$$

En palabras de Trotta: “El teorema de Bayes relaciona la probabilidad posterior con el likelihood y el prior. Puede ser pensada como una regla general para actualizar nuestro conocimiento acerca de una cantidad del prior al posterior” [57].

Para comprender de mejor manera el párrafo anterior se aborda la función de cada componente que interviene en el teorema de Bayes.

Prior

La densidad de probabilidad previa $\mathcal{P}(\theta)$, también expresada como $\Pi(\theta)$: cuantifica el grado de conocimiento o creencia que se tiene sobre los parámetros por parte del usuario antes de conocer los datos.

Se encuentra con el problema de que el teorema de Bayes nos dice cómo manipular las probabilidades, pero no los valores que deberían tener en primer lugar, por esto la asignación de las probabilidades previas resulta relevante; comúnmente se emplea el uso de priors planos, es decir, se le asigna la misma probabilidad para cualquier valor de los parámetros dentro de un rango $(\theta_{min}, \theta_{max})$ y cero para valores fuera de el, con ello la dependencia de la densidad de probabilidad posterior se simplifica siendo proporcional al likelihood, sin embargo, cuando se tiene un mayor grado de conocimiento previo se puede tomar alguna distribución de probabilidad específica.

Resulta relevante dentro de la inferencia de parámetros que el Posterior converja independientemente del prior inicial, la única condición necesaria para el prior es:

$$\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \Pi(\theta) d\theta = 1. \quad (3.8)$$

Likelihood

La función de probabilidad Likelihood $\mathcal{P}(D | \theta)$: se entiende como la probabilidad de obtener los datos dado un cierto valor de los parámetros; suponiendo que se tiene el conjunto de datos $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, el likelihood será $\mathcal{P}(D = x | \theta)$. Se observa que depende sólo del valor de θ y se evalúa para los datos, es por ello que se le llama función de probabilidad y no distribución de probabilidad, es posible denotarlo como $\mathcal{L}(\theta)$.

Cuando se realiza inferencia se busca obtener los valores de los parámetros para los cuales tenemos la mayor probabilidad de obtener los datos, a esto se le conoce como Principio de Maximización del Likelihood, que matemáticamente hablando es encontrar los valores θ_{ML} para los cuales se maximiza el valor del likelihood

$$\theta_{ML} = \max\{\mathcal{L}(\theta)\}. \quad (3.9)$$

Para ello se debe de satisfacer:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta_{ML}} = 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta_{ML}} < 0. \quad (3.10)$$

Resulta conveniente usar:

$$\left. \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta_{ML}} = 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta_{ML}} < 0, \quad (3.11)$$

ya que en numerosas ocasiones se trabaja con datos observacionales que cumplen con una distribución gaussiana.

Evidencia

La distribución marginal $\mathcal{P}(D)$ también conocida como evidencia: es el denominador de (3.6), si se enfoca en el estudio de un solo modelo, la evidencia puede verse como un factor de normalización. Al integrar (3.6) sobre todo el espacio de parámetros de θ se tiene:

$$\int \mathcal{P}(\theta | D) d\theta = \int \frac{\Pi(\theta) \mathcal{L}(\theta)}{\mathcal{P}(D)} d\theta. \quad (3.12)$$

El lado izquierdo debe de ser igual a 1; mientras que del lado derecho la evidencia puede salir de la integral ya que no depende de los parámetros. Reescribiendo, se obtiene:

$$\mathcal{P}(D) = \int \Pi(\theta) \mathcal{L}(\theta) d\theta. \quad (3.13)$$

Es decir, la evidencia resulta ser la probabilidad promedio de los parámetros por el Prior. Esta cantidad se vuelve relevante cuando se comparan diferentes modelos, ya que no sólo se busca que los datos observacionales se ajusten bien para valores específicos de los parámetros, también deben hacerlo en la región del espacio de parámetros alrededor de esos puntos; se pueden realizar mejores predicciones por medio de un modelo que cumpla la condición anterior en comparación con uno que no la satisface, para ello se requiere calcular el Factor de Bayes para las evidencias de los modelos $\mathcal{M}_i$ y $\mathcal{M}_j$ introducido por Harold Jeffreys en 1935 [61]:

$$B_{ij} = \frac{\mathcal{P}(D | \mathcal{M}_i)}{\mathcal{P}(D | \mathcal{M}_j)}. \quad (3.14)$$

El resultado de (3.14) se interpreta comúnmente mediante la escala de Jeffreys (Tabla 3.1), dando la fuerza de la evidencia al comparar los dos modelos.

Posterior

La densidad de probabilidad posterior $\mathcal{P}(\theta | D)$: representa la probabilidad de obtener los parámetros dados los datos. Después de revisar las componentes restantes del teorema de Bayes, cuando se enfoca en el estudio de un modelo en particular con un Prior $\Pi(\theta)$ específico y, aunado a que $\mathcal{P}(D)$ es un factor de normalización, el Posterior se vuelve proporcional al Likelihood $\mathcal{P}(\theta | D) \propto \mathcal{L}(\theta)$. Entonces, al implementar el análisis estadístico bayesiano, se desea maximizar la densidad de probabilidad posterior y mediante su exploración se busca encontrar los valores más probables e incertidumbres para θ con el uso del conjunto de datos D : para ello, se requiere usar métodos computacionales que permitan calcular integrales multidimensionales en diferentes puntos del espacio de parámetros.

$\ln B_{ij}$	B_{ij}	Conclusión sobre $\mathcal{M}_i$
< 0	< 1	Negativa, respalda a $\mathcal{M}_j$
0 a 1.1	1 a 3	Débil, No merece más que una simple mención
1.1 a 3	3 a 20	Positiva
3 a 5	20 a 150	Fuerte
> 5	> 150	Decisiva o Muy Fuerte

Tabla 3.1: Escala de Jeffreys, basada en (Raftery, 1996) [62].

3.1.2. Cadenas de Markov y Monte Carlo

Mediante la implementación de métodos numéricos potencializados con las herramientas computacionales es posible tomar algoritmos para obtener la solución aproximada de problemas matemáticamente complejos que no tienen solución analítica o que resultan difíciles de calcular con exactitud. Uno de ellos es el método Monte Carlo basado en el muestreo aleatorio y desarrollado principalmente por John von Neumann, Stanislaw Ulam y Nicholas Metropolis [63]-[64]. Una de sus principales ventajas se destaca en la evaluación de integrales múltiples.

Al implementar únicamente el método Monte Carlo para explorar el espacio de parámetros, se encuentra una dificultad, el hecho de que conlleva una gran cantidad de tiempo muestrear regiones donde el Posterior es muy pequeño [65]. Es preferible combinar el método Monte Carlo con una cadena de Markov generada por el algoritmo Metropolis-Hastings (MH) [66] dando como resultado el método conocido como Cadenas de Markov y Monte Carlo (MCMC, por sus siglas en inglés Markov Chain Monte Carlo). Este método busca generar una secuencia de puntos en el espacio de parámetros que converga al estado estacionario de la máxima probabilidad para el Posterior.

Se entiende a una cadena de Markov como una secuencia de variables aleatorias $\{x_1, \dots, x_N\}$ donde el elemento x_{i+1} sólo depende del último elemento generado x_i . En el método de MCMC este muestreo comúnmente se produce por medio del algoritmo MH que se puede resumir como el siguiente proceso:

1. Comenzar de un punto aleatorio dentro del espacio de parámetros $\theta^{(0)}$ y evaluar su Posterior $\mathcal{P}(\theta^{(0)} | D)$.
2. Realizar un salto aleatorio hacia un nuevo punto en el espacio de parámetros $\theta^{(n)}$ mediante una función de probabilidad $\mathcal{P}(\theta^{(0)}, \theta^{(n)})$ que cumpla con la condición de simetría $\mathcal{P}(\theta^{(0)}, \theta^{(n)}) = \mathcal{P}(\theta^{(n)}, \theta^{(0)})$ (expresa que un salto de vuelta al punto de partida es igual de probable). Este paso se facilita cuando se hace uso de una función gaussiana multievaluada centrada en el punto actual.
3. Calcular el Posterior en el nuevo punto $\mathcal{P}(\theta^{(n)} | D)$ y determinar el cociente de los Posteriors del nuevo candidato entre el actual:

$$C = \frac{\mathcal{P}(\theta^{(n)} | D)}{\mathcal{P}(\theta^{(0)} | D)}$$

4. Por último, tomar un número aleatorio $a \in [0, 1)$, si $C > a$ entonces se acepta el punto propuesto, se añade a la cadena y se mueve hacia él; si $C < a$ se mantiene

el punto de partida y se cuenta doble en la secuencia. Se repite el proceso desde el punto 2 hasta que la cadena permita explorar por completo el espacio de parámetros.

Una vez concluidos los N pasos de la cadena se afronta con una cuestión: ¿cómo se puede asegurar que se ha llegado a la región del espacio de parámetros con máxima probabilidad? Para dar respuesta a ello, se busca hacer un análisis de la varianza de múltiples cadenas que comiencen en diferentes puntos en el espacio de parámetros para asegurar que todas ellas alcancen el máximo de la probabilidad posterior. Este proceso es conocido como el criterio de convergencia de Gelman-Rubin [67]-[68] sintetizado en la siguiente metodología:

- Ejecutar $m > 1$ cadenas de Markov, con diferentes puntos de partida dispersos en el espacio de parámetros. En virtud de que cada cadena se dirige de un punto de baja probabilidad hacia uno con alta probabilidad, se omiten las primeras iteraciones y se queda con n pasos para cada una. Se denota al promedio y varianza de la j -ésima cadena como:

$$\mu_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_{ij} \quad , \quad \sigma_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\theta_{ij} - \mu_j)^2. \quad (3.15)$$

- Posteriormente, se calcula la varianza entre (B) y dentro (W) de las cadenas:

$$B = \frac{n}{m-1} \sum_{j=1}^m (\mu_j - \mu)^2, \quad \text{con} \quad \mu = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mu_j, \quad (3.16)$$

$$W = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sigma_j^2. \quad (3.17)$$

- Se debe de sobrestimar la varianza de la distribución objetivo σ^2 mediante un promedio ponderado de B y W , cuando $n \gg 1$:

$$\hat{\sigma} = \frac{n-1}{n} W + \frac{1}{n} B. \quad (3.18)$$

Si se tiene en cuenta la variabilidad muestral del estimador, se obtiene una estimación de la varianza posterior combinada:

$$\hat{V} = \hat{\sigma}^2 + \frac{B}{mn}. \quad (3.19)$$

- Por último, para dictaminar si se ha logrado convergencia, es necesario obtener el factor de reducción de escala potencial FREP:

$$R = \frac{\hat{V}}{W} = \frac{n-1}{n} + \frac{m+1}{mn} \frac{B}{W}. \quad (3.20)$$

El proceso descrito puede interpretarse como un diagnóstico de convergencia que depende del cociente de las varianzas entre y dentro de las cadenas, se debe notar que para $n \gg 1$ el primer término de (3.20) tiende a 1. Analizando el FREP: si R es grande, sugiere que cualquiera de las estimaciones de varianza puede reducirse mediante más simulaciones y que no se ha explorado en su totalidad el espacio de parámetros, mientras que si $R \sim 1$ se puede concluir que cada j -ésima cadena se aproxima a la distribución objetivo y se ha logrado la convergencia para los parámetros del modelo a estudiar, usualmente se toma la condición $R - 1 < 0.01$.

3.2. Conjunto de datos observacionales

Al comprender el funcionamiento del análisis estadístico bayesiano, se debe hacer notar que para realizar inferencia sobre los parámetros resulta indispensable el conjunto de datos a usar. Para finalizar este capítulo, se presentan los conjuntos de datos observacionales de las exploraciones cosmológicas de mayor relevancia en la actualidad que el presente trabajo de tesis usa:

Pantheon: es el muestreo más grande combinado de luminosidad de Supernovas tipo Ia (SNe Ia), con un total de 1048 SNe Ia en el rango de $0.01 < z < 2.3$ [69].

Cronómetros Cósmicos: tomada de la tabla 4 de [70], donde se infiere al parámetro de Hubble a través de $H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}$, usando los pares de galaxias masivas de tipo temprano y que evolucionan pasivamente, las cuales han agotado su reserva de gas y sólo forman unas pocas estrellas nuevas.

HOLiCOW: presenta restricciones sobre la constante de Hubble H_0 y de otros parámetros cosmológicos a partir de un análisis conjunto de seis cuásares con lentes gravitacionales con retrasos temporales medidos [71].

Planck 2018: resultados de los parámetros cosmológicos de las mediciones finales del satélite Planck de las anisotropías del fondo cósmico de microondas, combinando la información de los mapas de temperatura y polarización y la reconstrucción de las lentes.[34].

BAO BOSS dR12: proporciona la distancia de diámetro angular D_M y el parámetro de Hubble H recopilando 1.2 millones de galaxias masivas en un área de 9329 grados² y volumen de $18.7 Gpc^3$ del conjunto de datos de cúmulos de galaxias del estudio espectroscópico de oscilación de bariones (BOSS, por sus siglas en Inglés) el cual es parte del Sloan Digital Sky Survey III (SDSS III) [38].

BAO smallz 2014: combinación de los resultados para la función de correlación de gran escala del 6dF Galaxy Survey (6dFGS) [36] y la muestra de galaxias identificadas espectroscópicamente con $z < 0.2$ del SDSS Data Realise 7 que cubre 6813 grados² [37].

WiggleZ: resultados cosmológicos usando los espectros de potencia del estudio de energía oscura WiggleZ [72] medidos en $z = 0.22, 0.41, 0.60$ y 0.78 , el cual analiza las líneas de emisión de 240,000 galaxias a gran escala con un cubrimiento del orden de 1000 grados² del cielo ecuatorial.

WiggleZ bao: resultados para las galaxias mapeadas por WiggleZ aplicando la técnica de reconstrucción de la característica acústica de bariones [73].

SDSS lrgDR4: el cual hace uso de 58,360 galaxias rojas luminosas (LRG) y 285,804 galaxias principales de la cuarta publicación de datos del Sloan Digital Sky Survey (SDSS DR4) para medir el espectro de potencia del espacio real a gran escala $P(k)$ [74].

SDSS lrgDR7: proporciona las mediciones del espectro de potencia de masa realizadas por lentes débiles del CHITLenS. Considerando 110,576 galaxias rojas luminosas utilizadas como trazadores de la estructura a gran escala, tomadas de la séptima publicación del SDSS, que cubre 7931 grados² en el casquete galáctico norte [75].

eBOSS DR14 Ly- α combined: donde se utilizan los datos de eBOSS DR14 para investigar la tensión entre las mediciones de la oscilación acústica de bariones (BAO) del SDSS-DR14, midiendo la función de correlación de la absorción de Lyman- α en los espectros de cuásares [40], [41] y [76].

Planck compressed: obtienen la distribución de probabilidad a priori de la distancia a partir de los datos de la correlación TT , TE , $EE + lowE$ de Planck publicados en 2018 [34]. Las restricciones son consistentes para los parámetros cosmológicos relevantes en comparación con las de la publicación completa de datos [77].

Capítulo 4

Metodología y Resultados

El gran potencial que tiene el análisis estadístico bayesiano en combinación con un conjunto de datos observacionales para encontrar restricciones sobre los parámetros cosmológicos que caracterizan a algún modelo se refleja dentro de este capítulo. Se expone la metodología implementada para realizar inferencia sobre los parámetros del Modelo Cosmológico Logotrópico y del modelo Λ CDM, simultáneamente se presentan los resultados obtenidos con el apoyo de las gráficas para las densidades de probabilidad posterior.

4.1. Inferencia de parámetros del modelo Λ CDM y del ML

Para la delimitación de los parámetros del modelo Λ CDM y del ML se plantean dos vertientes: la primera de ellas, solo toma en consideración las observaciones relacionadas con la evolución cosmológica de fondo. La segunda, añade las observaciones vinculadas con la teoría de perturbaciones cosmológicas descrita en el [Apéndice A](#); con ello, es posible tomar en consideración los resultados para las anisotropías del fondo cósmico de microondas y del espectro de potencia de masa (MPS, pos sus siglas en inglés). A continuación, se presenta la lista de los datos observacionales descritos en la [Sección 3.2](#) para los dos casos mencionados:

Caso I): Pantheon, Cronómetros Cósmicos, HOLiCOW, BAO BOSS dR12, BAO smallz 2014, WiggleZ, WiggleZ bao, SDSS lrgDR4, SDSS lrgDR7, eBOSS DR14 $Ly\alpha$ combined y Planck_compressed.

Caso II): Planck 2018 (highL_TTTEEE, lowL_EE y lowL_TT), Pantheon, Cronómetros Cósmicos, HOLiCOW, BAO BOSS dR12, BAO smallz 2014, WiggleZ, WiggleZ bao, SDSS lrgDR4, SDSS lrgDR7 y eBOSS DR14 $Ly\alpha$ combined.

Se usan en combinación los softwares CLASS [\[90\]](#)-[\[93\]](#) versión 3.2.0 y Montepython [\[96\]](#)-[\[97\]](#) versión 3.4.0 para realizar la inferencia de los parámetros cosmológicos. El primero se emplea para resolver el sistema de ecuaciones que dictaminan la evolución de la cosmología de fondo y las perturbaciones lineales. El segundo hace uso del método bayesiano para la inferencia de parámetros mediante una interfaz con CLASS, además contiene los datos observacionales descritos anteriormente. En el [Apéndice B](#) se explica su funcionamiento y las modificaciones que se realizaron para implementar al ML y al MLG , asimismo se detalla el proceso de inferencia para ambos casos.

4.1.1. Caso I)

Para la inferencia de los parámetros del modelo Λ CDM se realiza una corrida inicial de 8 cadenas de 100,000 pasos cada una a partir de los priors mostrados en la [Tabla 4.1](#), donde a cada parámetro se le asigna una distribución gaussiana proporcionando: el promedio, los valores mínimo y máximo que puede tomar, y la desviación estándar presentadas en las primeras 4 columnas respectivamente. La palabra None hace referencia a que no se asigna un valor específico; la quinta es la escala de magnitud; y la última columna es el rol, siendo los parámetros cosmológicos de interés del tipo ‘cosmo’. Aquellos que no son relevantes pero necesarios para el cálculo de los likelihoods son llamados ‘nuisance’, y los nombrados ‘derived’ son los parámetros que pueden ser calculados a partir de los otros parámetros cosmológicos, por lo que los valores ingresados en las columnas anteriores para estos no son tomados en cuenta en el proceso de inferencia.

Cuando este proceso termina, se calcula la tasa de aceptación T. A. dada por el cociente entre los pasos aceptados y el número total de pasos.

$$\text{T. A.} = \frac{\text{Número de pasos aceptados}}{\text{Número total de pasos}}$$

Este cociente no debe de ser cercano a cero pues es probable que se esté lejos de los valores reales de los parámetros o a uno, indicando la posibilidad de encontrarse en un máximo local. Posteriormente, a partir de los mejores ajustes y de la matriz de covarianza del primer proceso, se inicia una segunda corrida de 8 cadenas de 50,000 pasos cada una. En la [Tabla 4.2](#) se muestra la tasa de aceptación para los dos procesos.

Parámetro	Promedio	Mínimo	Máximo	1σ	Escala	Rol
H_0	70.3	60.	75.	0.05	1	‘cosmo’
$\Omega_{0,b}$	4.86	3.	7.	0.001	0.01	‘cosmo’
$\Omega_{0,CDM}$	0.2562	None	None	0.008	1	‘cosmo’
M	-19.02	None	None	0.004	1	‘nuisance’
$\Omega_{0,\Lambda}$	0	-1	-1	0	1	‘derived’

Tabla 4.1: Priors de los parámetros del modelo Λ CDM, **Caso I**.

#	# Pasos	T. A.	# Pasos	T. A.
1	100,000	0.27	50,000	0.31
2	100,000	0.27	50,000	0.31
3	100,000	0.27	50,000	0.32
4	100,000	0.27	50,000	0.31
5	100,000	0.27	50,000	0.31
6	100,000	0.27	50,000	0.31
7	100,000	0.27	50,000	0.31
8	100,000	0.27	50,000	0.31

Tabla 4.2: Resumen de las 8 cadenas en los dos procesos del modelo Λ CDM, **Caso I**.

Por último, se realiza el análisis estadístico de la segunda corrida, la condición de convergencia del criterio de Gelman-Rubin $R - 1 < 0.01$ se satisface para todos los parámetros como se muestra a detalle en la Sección B.2. La Tabla 4.3 presenta un resumen de los parámetros estadísticos descriptivos de las distribuciones de probabilidad posterior. En la primera columna se encuentran los nombres de los parámetros inferidos, omitiendo los del tipo ‘nuisance’. La segunda muestra la media μ y la desviación estándar 1σ del muestreo. La tercera y cuarta columna son los extremos inferior y superior del intervalo de confianza al 95 % respectivamente. La última presenta los valores de los parámetros con los cuales se obtiene el mejor ajuste de los datos.

Es importante distinguir claramente el significado que tiene la segunda columna con respecto a la última, el promedio y la desviación estándar definen por completo la distribución de probabilidad posterior del muestreo indicando la región del espacio de parámetros para la cual el modelo concuerda con las observaciones, por otro lado el valor de los parámetros para el cual se tiene el mejor ajuste de los datos puede estar distante a ella e incluso no pertenecer al entorno delimitado por la incertidumbre, para este caso en particular el mejor ajuste es muy cercano a la media pero no siempre se tiene ese comportamiento.

Parámetro	$\mu \pm \sigma$	95 % Inf.	95 % Sup.	Mejor ajuste
H_0	$67.92^{+0.36}_{-0.36}$	67.22	68.61	67.9
$100 \Omega_{0,b}$	$4.874^{+0.041}_{-0.041}$	4.795	4.954	4.874
$\Omega_{0,CDM}$	$0.2593^{+0.0042}_{-0.0044}$	0.251	0.2676	0.2594
$\Omega_{0,\Lambda}$	$0.6919^{+0.0048}_{-0.0045}$	0.6828	0.7009	0.6917

Tabla 4.3: Análisis estadístico de la inferencia de parámetros cosmológicos del modelo Λ CDM, **Caso I**.

La metodología anterior se siguió para la restricción de parámetros del ML , considerando los mismos datos observacionales y a partir de los Priors mostrados en la Tabla 4.4, añadiendo la información previa del parámetro B a partir del análisis numérico mostrado en Figura 2.3, Figura 2.4 y Figura 2.5. Como se examinó en la Sección 2.2, se espera que su valor sea positivo y cercano a cero pero se busca que, una vez lograda la inferencia, el resultado coincida sin proveer esta información. Se realizaron dos corridas de 8 cadenas cada una, donde la segunda se inició a partir de los mejores ajustes y de la matriz de covarianza de la primera. El número total de pasos dados y las tasas de aceptación de las cadenas en los dos procesos se muestran en la Tabla 4.5.

Parámetro	Promedio	Mínimo	Máximo	1σ	Escala	Rol
B	0.	-1.0	1.0	0.05	1	‘cosmo’
H_0	70.3	60.	75.	0.05	1	‘cosmo’
$\Omega_{0,b}$	4.86	3.	7.	0.001	0.01	‘cosmo’
$\Omega_{0,DM}$	0.2562	None	None	0.008	1	‘cosmo’
M	-19.02	None	None	0.004	1	‘nuisance’
$\Omega_{0,DE}$	0	-1	-1	0	1	‘derived’

Tabla 4.4: Priors de los parámetros del ML , **Caso I**.

#	# Pasos	T. A.	# Pasos	T. A.
1	100,000	0.35	50,000	0.29
2	100,000	0.34	50,000	0.29
3	100,000	0.34	50,000	0.29
4	100,000	0.35	50,000	0.29
5	100,000	0.34	50,000	0.29
6	100,000	0.34	50,000	0.30
7	100,000	0.35	50,000	0.30
8	100,000	0.34	50,000	0.29

Tabla 4.5: Resumen de las 8 cadenas en los dos procesos del *ML*, **Caso I**.

En virtud de lo anterior se logra convergencia para todos los parámetros inferidos. El análisis estadístico para el *ML* se resume en la [Tabla 4.6](#). Con respecto a los resultados obtenidos para el modelo Λ CDM ([Tabla 4.3](#)) el valor promedio y el mejor ajuste para los parámetros H_0 y $\Omega_{0,DE}$ aumenta, mientras que para $\Omega_{0,b}$ y $\Omega_{0,DM}$ disminuye debido a la restricción de [\(2.33\)](#) evaluada en $a = 1$.

$$1 = \Omega_{0,r} + \Omega_{0,b} + \Omega_{0,CDM} + \Omega_{0,DE} \quad (4.1)$$

Parámetro	$\mu \pm \sigma$	95 % Inf.	95 % Sup.	Mejor ajuste
B	$0.0344^{+0.0301}_{-0.028}$	-0.0229	0.0913	0.038
H_0	$68.67^{+0.74}_{-0.73}$	67.22	70.11	68.72
$100 \Omega_{0,b}$	$4.757^{+0.104}_{-0.11}$	4.547	4.968	4.748
$\Omega_{0,DM}$	$0.2553^{+0.0052}_{-0.0055}$	0.2448	0.266	0.255
$\Omega_{0,DE}$	$0.6971^{+0.0065}_{-0.0061}$	0.6845	0.7093	0.6974

Tabla 4.6: Análisis estadístico de la inferencia de parámetros cosmológicos del *ML*, **Caso I**.

Las distribuciones de probabilidad posterior para la inferencia de parámetros del Modelo Logotrópico y del modelo Λ CDM considerando observaciones para la evolución cosmológica de fondo se presentan en la [Figura 4.1](#). En el recuadro correspondiente al parámetro B se observa que la distribución posterior del *ML* contiene al modelo Λ CDM ($B = 0$) y al resultado obtenido por Chavanis ($B = 3.53 \times 10^{-3}$) con 2σ de precisión.

La relación bidimensional entre las distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros de ambos modelos se presenta en la [Figura 4.2](#). Las gráficas unidimensionales de la diagonal son las de la [Figura 4.1](#). Para identificar cómo se relacionan dos parámetros es necesario centrarse en el recuadro donde se interseccionan, analizando la columna del parámetro B que caracteriza al *ML*, se observa que está correlacionado con H_0 y $\Omega_{0,DE}$; es decir, cuando uno aumenta el otro también lo hace, mientras que con $\Omega_{0,b}$ y $\Omega_{0,DM}$ está anticorrelacionado.

En ambos modelos las relaciones bidimensionales entre los parámetros H_0 , $\Omega_{0,b}$, $\Omega_{0,DM}$ y $\Omega_{0,DE}$ tienen el mismo comportamiento, destacando la anticorrelación entre $\Omega_{0,DM}$ y $\Omega_{0,DE}$, este resultado concuerda con [\(4.1\)](#).

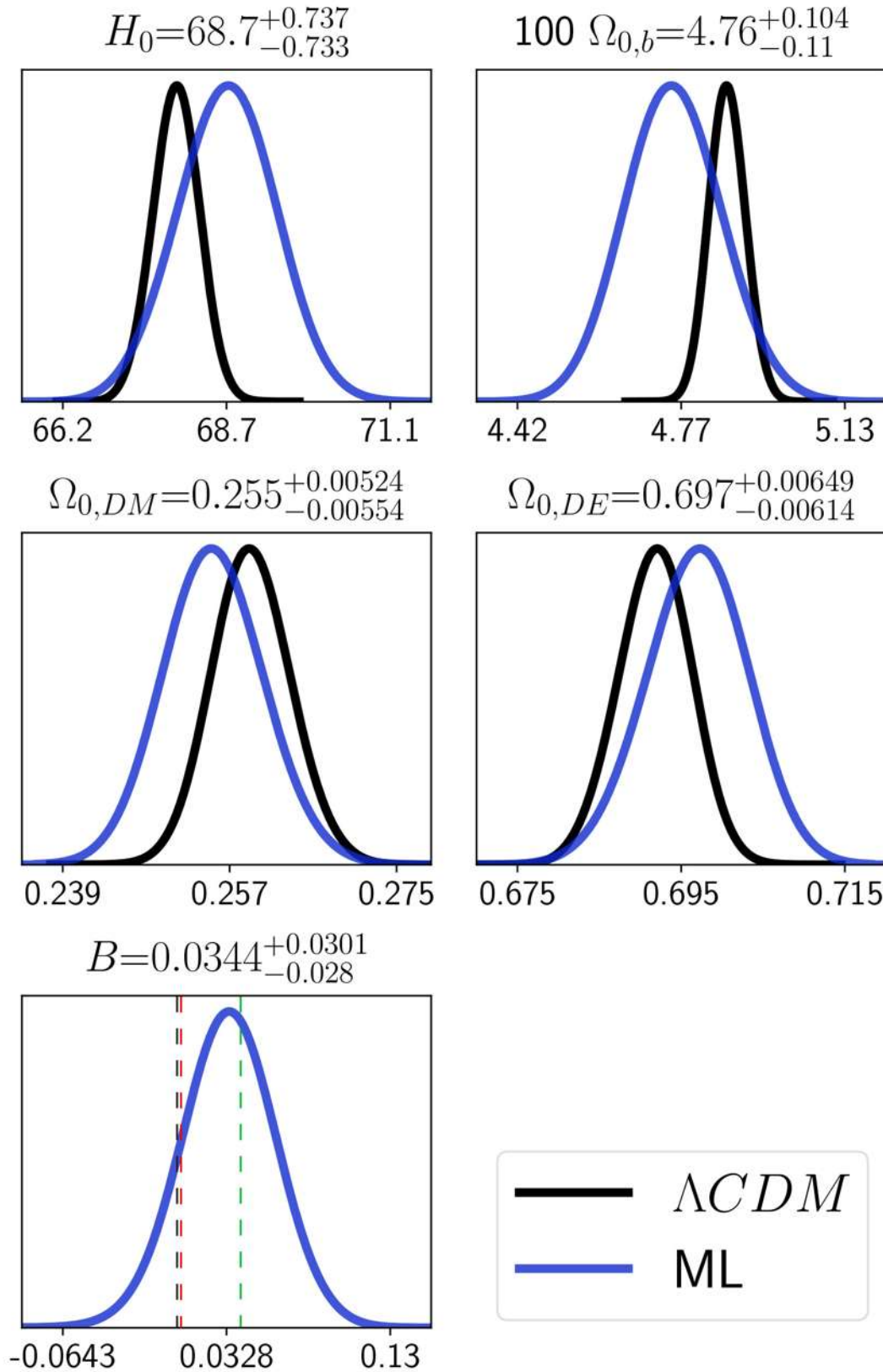


Figura 4.1: Distribuciones de Probabilidad Posterior de los parámetros del modelo Λ CDM y del ML, **Caso I**. En la parte superior de cada recuadro se puede observar el nombre del parámetro y el resultado de la media y desviación estándar del ML. Las líneas segmentadas indican los valores para $B = 0$ que recupera el modelo Λ CDM (negro), el valor obtenido por Chavanis $B = 3.53 \times 10^{-3}$ (rojo), y el mejor ajuste para el ML de la Tabla 4.6 $B = 3.8 \times 10^{-2}$ (verde).

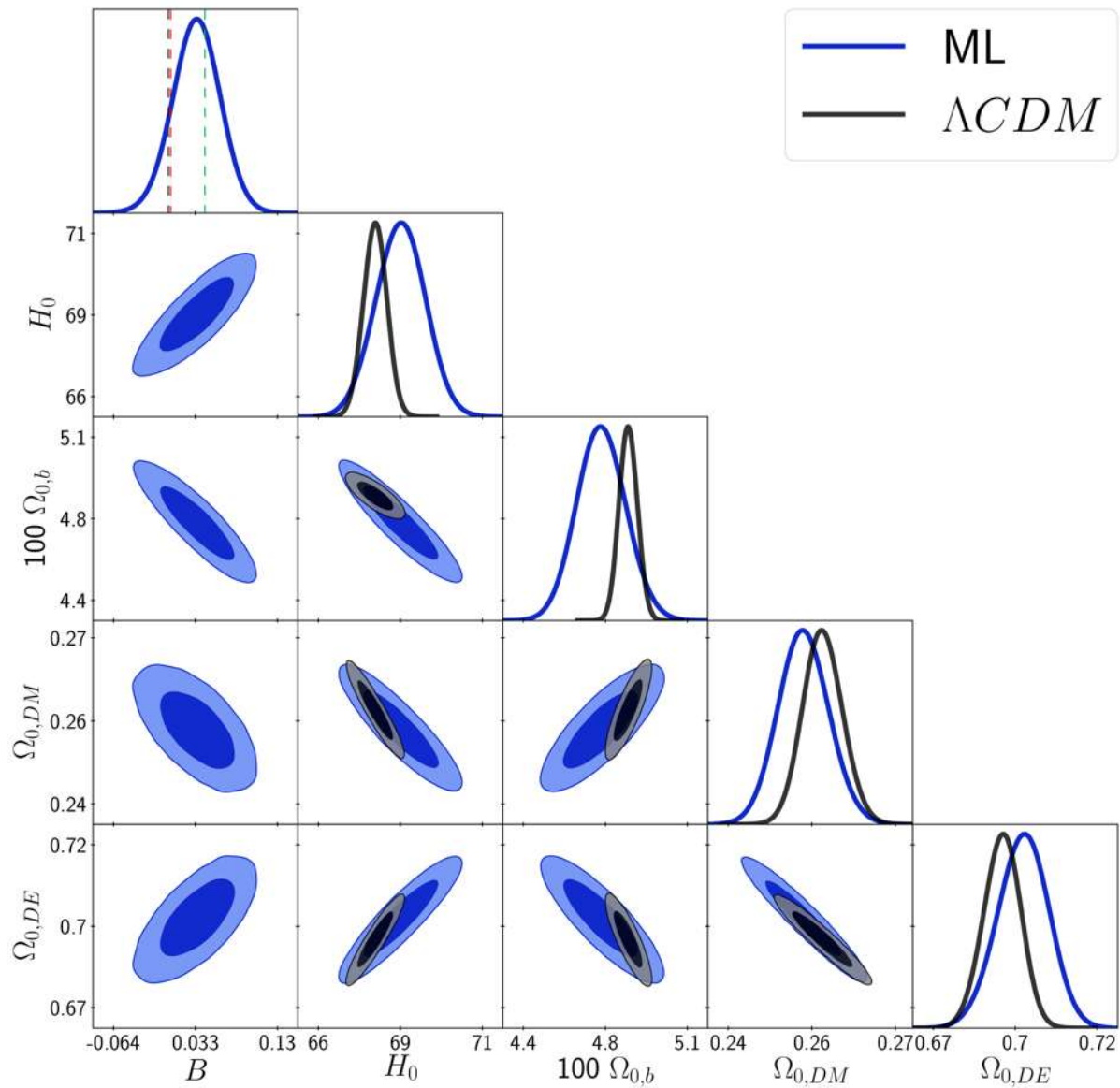


Figura 4.2: Relación bidimensional de las Distribuciones de Probabilidad Posterior de los parámetros del modelo Λ CDM y del ML, **Caso I**. En los contornos se aprecian regiones más opacas que señalan los entornos de confianza al 95 %. Las líneas segmentadas indican los valores para $B = 0$ que recupera el modelo Λ CDM (negro), el valor obtenido por Chavanis $B = 3.53 \times 10^{-3}$ (rojo), y el mejor ajuste para el ML de la [Tabla 4.6](#) $B = 3.8 \times 10^{-2}$ (verde).

4.1.2. Caso II)

Debido a la inclusión de los datos de Planck 2018, el número de parámetros sobre los que se realiza inferencia aumenta. Aunado a lo anterior, las ecuaciones relacionadas con la teoría de perturbaciones lineales cosmológicas (Apéndice A) que CLASS debe de solucionar en cada punto de la cadena son más complejas, por lo que el tiempo necesario para la inferencia de parámetros es mucho mayor con respecto al caso anterior.

Para el modelo Λ CDM se emplea una metodología similar a las realizadas previamente. Tomando los Priors de la Tabla 4.7 se realizan dos corridas de 8 cadenas cada una, donde la segunda se inicia a partir de los mejores ajustes y de la matriz de covarianza de la primera, la longitud y la tasa de aceptación de las cadenas se presenta en la Tabla 4.8. Con respecto al **Caso I** se añaden los parámetros: θ_s , A_s , n_s , τ_{re} , z_{re} , Y_{He} y σ_8 , además de otros del tipo ‘nuisance’ omitidos en esta sección ligados con la calibración de las observaciones. El significado de cada uno de ellos se encuentra en la Sección B.2.

Parámetro	Promedio	Mínimo	Máximo	1σ	Escala	Rol
$100 \theta_s$	1.04110	None	None	0.00030	1	‘cosmo’
$\ln(10)^{10} A_s$	3.0447	None	None	0.015	1	‘cosmo’
n_s	0.9659	None	None	0.0042	1	‘cosmo’
τ_{re}	0.0543	0.004	None	0.008	1	‘cosmo’
$\Omega_{0,b}$	4.86	3.	7.	0.001	0.01	‘cosmo’
$\Omega_{0,CDM}$	0.2562	None	None	0.008	1	‘cosmo’
M	-19.02	None	None	0.004	1	‘nuisance’
z_{re}	1	None	None	0	1	‘derived’
Y_{He}	1	None	None	0	1	‘derived’
H_0	0	None	None	0	1	‘derived’
A_s	0	None	None	0	1e-9	‘derived’
σ_8	0	None	None	0	1	‘derived’
$\Omega_{0,\Lambda}$	1	None	None	0	1	‘derived’

Tabla 4.7: Priors de los parámetros del modelo Λ CDM, **Caso II**.

#	# Pasos	T. A.	# Pasos	T. A.
1	100,000	0.16	100,000	0.27
2	100,000	0.18	100,000	0.27
3	100,000	0.16	100,000	0.27
4	100,000	0.22	100,000	0.27
5	100,000	0.21	100,000	0.27
6	100,000	0.19	100,000	0.27
7	100,000	0.24	100,000	0.27
8	100,000	0.23	100,000	0.27

Tabla 4.8: Resumen de las 8 cadenas en los dos procesos del modelo Λ CDM, **Caso II**.

Culminado este proceso, el criterio de convergencia de Gelman-Rubin se cumple para todos los parámetros explorados. En la [Tabla 4.9](#) se sintetizan los resultados de los parámetros estadísticos descriptivos de la distribución de probabilidad posterior de la segunda corrida. Paralelamente, la [Figura 4.3](#) presenta los gráficos correspondientes de cada parámetro inferido, en la parte superior de los recuadros aparecen los valores de la media y desviación estándar asociadas a la distribución.

Se observa que los resultados obtenidos para los parámetros comunes del modelo Λ CDM en el **Caso I** y el **Caso II** son muy similares ajustándose con 1σ de precisión y concuerdan con [34].

Parámetro	$\mu \pm \sigma$	95 % Inf.	95 % Sup.	Mejor ajuste
H_0	$67.91^{+0.42}_{-0.42}$	67.1	68.72	68.05
$100 \Omega_{0,b}$	$4.872^{+0.045}_{-0.047}$	4.785	4.959	4.884
$\Omega_{0,CDM}$	$0.2579^{+0.0049}_{-0.0052}$	0.2482	0.2676	0.2569
$\Omega_{0,\Lambda}$	$0.6919^{+0.0056}_{-0.0052}$	0.6813	0.7024	0.6928
$100 \theta_s$	$1.042^{+0.0003}_{-0.0003}$	1.0414	1.0426	1.0421
n_s	$0.969^{+0.004}_{-0.004}$	0.961	0.976	0.971
τ_{re}	$0.0548^{+0.008}_{-0.0082}$	0.0387	0.0713	0.0531
z_{re}	$7.683^{+0.84}_{-0.78}$	6.029	9.328	7.495
Y_{He}	$0.2479^{+0.00006}_{-0.00006}$	0.2478	0.248	0.2479
$10^9 A_s$	$2.097^{+0.034}_{-0.035}$	2.026	2.169	2.096
σ_8	$0.8075^{+0.0072}_{-0.0074}$	0.7925	0.8223	0.8077

Tabla 4.9: Análisis estadístico de la inferencia de parámetros cosmológicos del modelo Λ CDM, **Caso II**.

El último caso corresponde a la inferencia de parámetros del ML considerando observaciones relacionadas con la cosmología de fondo y las perturbaciones lineales, para ello se consideran los Priors mostrados en la [Tabla 4.10](#) donde se incluyen los parámetros del modelo generalizado (2.35): B , A_0 , A_1 y A_2 . Aunque todos tengan el rol ‘cosmo’, realmente el único parámetro sobre el que se hace inferencia será B ; los otros pertenecientes al MLG se encuentran fijos debido a que la desviación estándar para su distribución de probabilidad previa es igual a cero. Por ello, el valor promedio asignado $A_0 = A_2 = 0$ y $A_1 = 1$ se mantiene constante y el MLG se reduce al ML .

En virtud de los resultados del ML en el **Caso I**, con los cuales se acrecenta el grado de conocimiento previo para el parámetro B , los valores máximo y mínimo elegidos en este proceso acortan el rango a explorar $B \in [-0.1, 0.1]$.

A partir de los Priors se realiza una corrida en paralelo de 8 cadenas, la longitud y tasa de aceptación de cada una se muestra en [Tabla 4.11](#). Se destaca que el número de pasos necesarios que las cadenas tuvieron que realizar es 10 veces mayor al del ML en el **Caso I** debido a la robustez de los datos agregados de Planck 2018.

Al realizar un diagnóstico del proceso anterior, se tiene que la condición para el factor de reducción de escala potencial ($R - 1 < 0.01$) se satisface para todos los parámetros inferidos, con lo cual se logra la convergencia bajo el criterio de Gelman-Rubin.

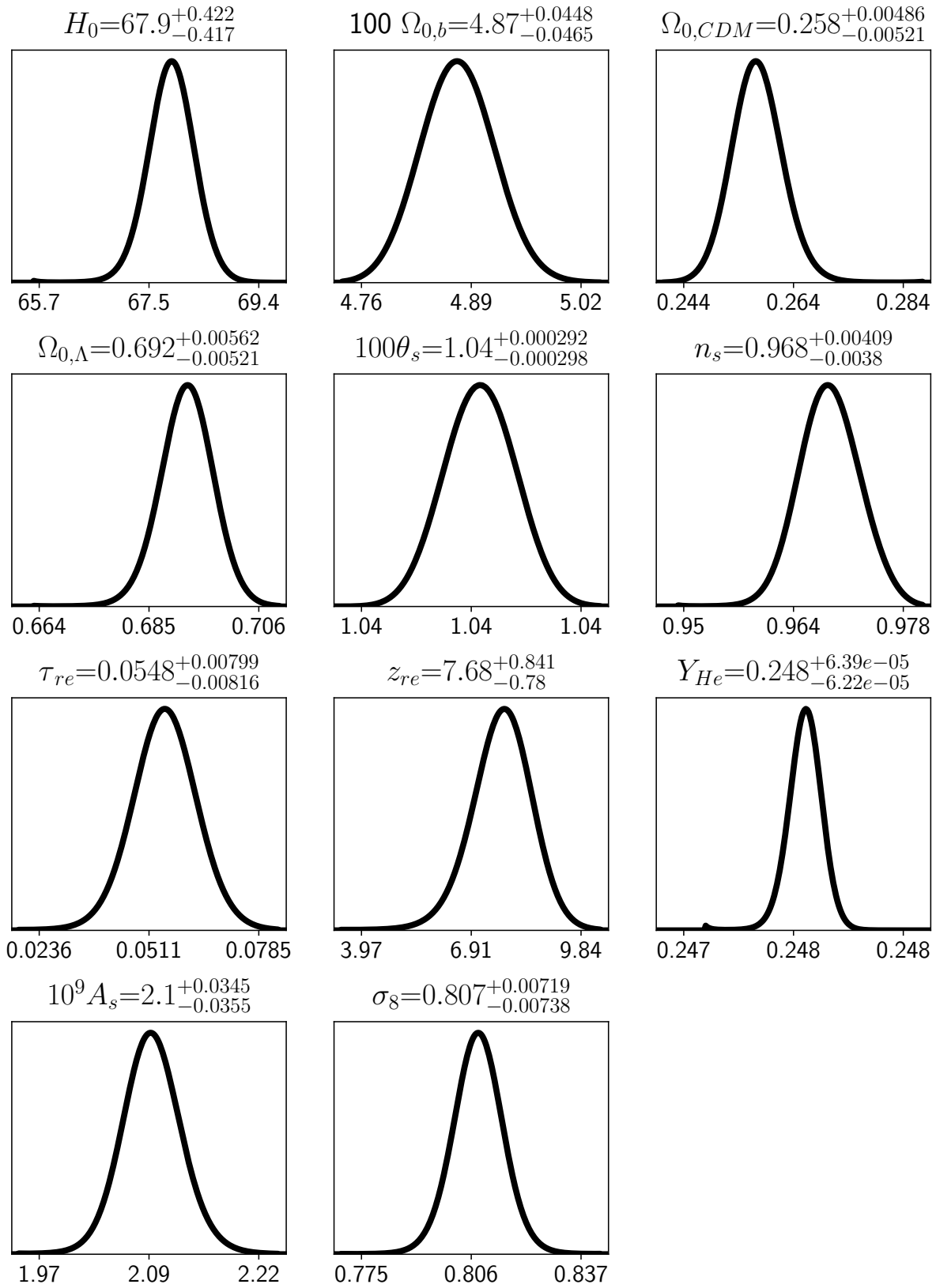


Figura 4.3: Distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros del modelo Λ CDM, **Caso II**.

Parámetro	Promedio	Mínimo	Máximo	1σ	Escala	Rol
$100 \theta_s$	1.04110	None	None	0.00030	1	‘cosmo’
$\ln(10)^{10} A_s$	3.0447	None	None	0.015	1	‘cosmo’
n_s	0.9659	None	None	0.0042	1	‘cosmo’
τ_{re}	0.0543	0.004	None	0.008	1	‘cosmo’
B	0.	-0.1	0.1	0.001	1	‘cosmo’
A_0	0.	None	None	0	1	‘cosmo’
A_1	1.	None	None	0	1	‘cosmo’
A_2	0.	None	None	0	1	‘cosmo’
$\Omega_{0,b}$	4.86	3.	7.	0.001	0.01	‘cosmo’
$\Omega_{0,DM}$	0.2562	None	None	0.008	1	‘cosmo’
M	-19.02	None	None	0.004	1	‘nuisance’
z_{re}	1	None	None	0	1	‘derived’
Y_{He}	1	None	None	0	1	‘derived’
H_0	0	None	None	0	1	‘derived’
A_s	0	None	None	0	1e-9	‘derived’
σ_8	0	None	None	0	1	‘derived’
$\Omega_{0,DE}$	1	None	None	0	1	‘derived’

Tabla 4.10: Priors de los parámetros del *ML*, **Caso II**.

Los resultados del análisis estadístico para las distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros inferidos se muestran en la [Tabla 4.12](#). En comparación a los resultados del modelo Λ CDM empleando los mismos datos observacionales ([Tabla 4.9](#)), el valor promedio y el mejor ajuste para los parámetros H_0 y $\Omega_{0,DE}$ es mayor, y para $\Omega_{0,b}$ y $\Omega_{0,DM}$ son menores.

Aunado a lo anterior, los resultados del parámetro B difieren a los obtenidos en el **Caso I** ([Tabla 4.6](#)); se observa que la media es un orden de magnitud menor y con signo negativo, mientras que el mejor ajuste también tiene un orden de magnitud menor pero sigue siendo positivo con una desviación de 3σ . Cabe destacar que la desviación estándar se reduce al igual que para H_0 , $\Omega_{0,b}$, $\Omega_{0,DM}$ y $\Omega_{0,DE}$ por lo que se tiene una mejor restricción para todos los parámetros.

En el caso de $\omega_{0,DE}$, la media corresponde al régimen de quintaesencia, pero su diferencia con respecto a Λ CDM ($\omega_\Lambda = -1$) es de 0.001, siendo menor que la desviación estándar. Por el contrario, el mejor ajuste pertenece al régimen tipo fantasma.

#	# Pasos	T. A.	#	# Pasos	T. A.
1	1,000,000	0.25	5	1,000,000	0.25
2	1,000,000	0.25	6	1,000,000	0.26
3	1,000,000	0.25	7	1,000,000	0.26
4	1,000,000	0.25	8	1,000,000	0.26

Tabla 4.11: Resumen de las 8 cadenas del *ML*, **Caso II**.

Parámetro	$\mu \pm \sigma$	95 % Inf.	95 % Sup.	Mejor ajuste
B	$-0.0012^{+0.0041}_{-0.0056}$	-0.0092	0.0082	0.0082
H_0	$68.1^{+0.21}_{-0.21}$	67.69	68.52	68.25
$100 \Omega_{0,b}$	$4.846^{+0.004}_{-0.009}$	4.829	4.853	4.836
$\Omega_{0,DM}$	$0.2552^{+0.0023}_{-0.0024}$	0.2507	0.2598	0.2551
$\Omega_{0,DE}$	$0.6949^{+0.0024}_{-0.0023}$	0.6902	0.6995	0.6951
$\omega_{0,DE}$	$-0.999^{+0.006}_{-0.004}$	-1.008	-0.991	-1.008
$100 \theta_s$	$1.0421^{+0.0003}_{-0.0003}$	1.0415	1.0426	1.042
n_s	$0.97^{+0.003}_{-0.003}$	0.963	0.976	0.97
τ_{re}	$0.055^{+0.0077}_{-0.0075}$	0.0395	0.0701	0.0586
z_{re}	$7.69^{+0.8}_{-0.73}$	6.104	9.208	8.062
Y_{He}	$0.2479^{+0.00006}_{-0.00006}$	0.2478	0.248	0.2479
$10^9 A_s$	$2.094^{+0.034}_{-0.034}$	2.028	2.161	2.106
σ_8	$0.8051^{+0.007}_{-0.0072}$	0.7911	0.819	0.8115

Tabla 4.12: Análisis estadístico de la inferencia de parámetros cosmológicos del ML , **Caso II**.

Las gráficas para las distribuciones de probabilidad Posterior de cada parámetro del ML se presentan en la [Figura 4.4](#), se nota que con respecto a la media: el modelo Λ CDM ($B = 0$) se encuentra a 0.31σ , el resultado de Chavanis $B = 3.53 \times 10^{-3}$ se recupera a 1.18σ , y el mejor ajuste $B = 8.2 \times 10^{-3}$ tiene 2.33σ de dispersión. Además, la distribución para $\omega_{0,DE}$ es simétrica a la de B debido a que $\omega_{0,DE} = -1 - B$.

Posteriormente, para clarificar las diferencias de los resultados del modelo Λ CDM y del ML considerando las observaciones para la evolución cosmológica de fondo más las perturbaciones lineales, la [Figura 4.5](#) muestra las distribuciones de probabilidad posterior de ambos. El comportamiento de las distribuciones correspondientes de los parámetros θ_s , A_s , n_s , τ_{re} , z_{re} , Y_{He} y σ_8 es muy similar en los dos modelos.

Para concluir esta sección, la [Figura 4.6](#) expone la relación bidimensional entre las distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros de ambos modelos. Las gráficas unidimensionales de la diagonal son las de la [Figura 4.5](#). Los contornos del modelo Λ CDM contienen a los del ML , contrariamente a lo que sucede en el **Caso I** ([Figura 4.2](#)).

La fila correspondiente al parámetro B del ML muestra su relación con los demás parámetros, se observa que la inclinación de los contornos con respecto al eje vertical es muy ligera; es decir, aunque el valor para B aumente o disminuya, el valor de las otras variables no varía significativamente, debido a lo anterior no se presenta una correlación o anticorrelación clara.

En ambos modelos las relaciones bidimensionales entre los parámetros H_0 , $\Omega_{0,DM}$ y $\Omega_{0,DE}$ tienen el mismo comportamiento, existe una anticorrelación entre $\Omega_{0,DM}$ y $\Omega_{0,DE}$ que concuerda con la restricción (4.1). Por otro lado, el parámetro $\Omega_{0,b}$ en el ML actúa de manera similar a B , mientras que para el modelo Λ CDM sí está relacionado con los anteriores debido a la inclinación de sus contornos.

Aun cuando el ajuste del ML es más preciso que Λ CDM para este caso, no quiere decir que los datos observacionales se expliquen de mejor manera, esto depende estrictamente de la Evidencia (distribución marginal) como se analiza en la siguiente sección.

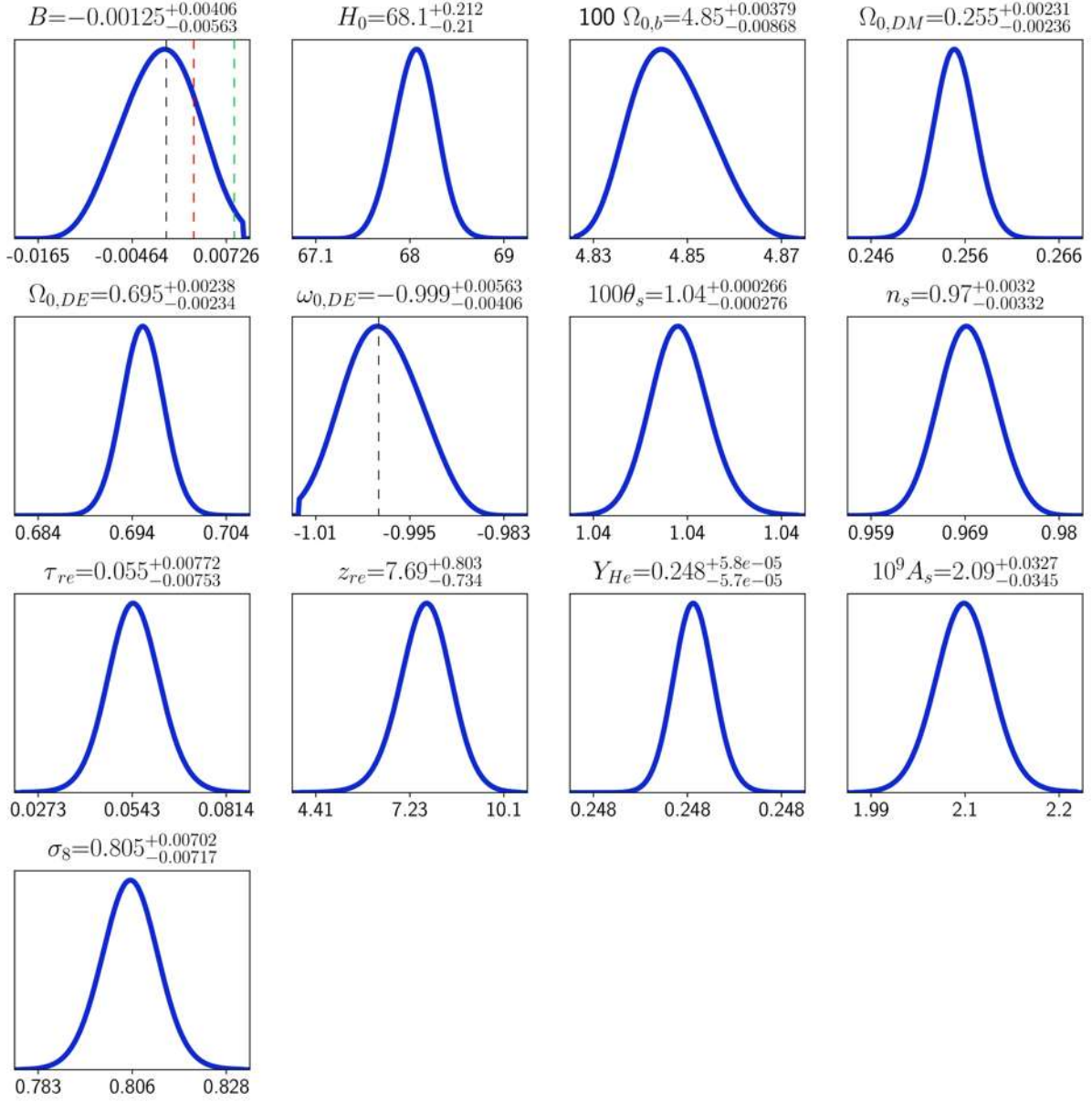


Figura 4.4: Distribuciones de Probabilidad Posterior de los parámetros del *ML*, **Caso II**. Las líneas segmentadas indican los valores para $B = 0$ y $\omega_{0,DE} = -1$ que recupera el modelo Λ CDM (negro), el valor obtenido por Chavanis $B = 3.53 \times 10^{-3}$ (rojo), y el mejor ajuste para el *ML* de la Tabla 4.12 $B = 8.2 \times 10^{-3}$ (verde).

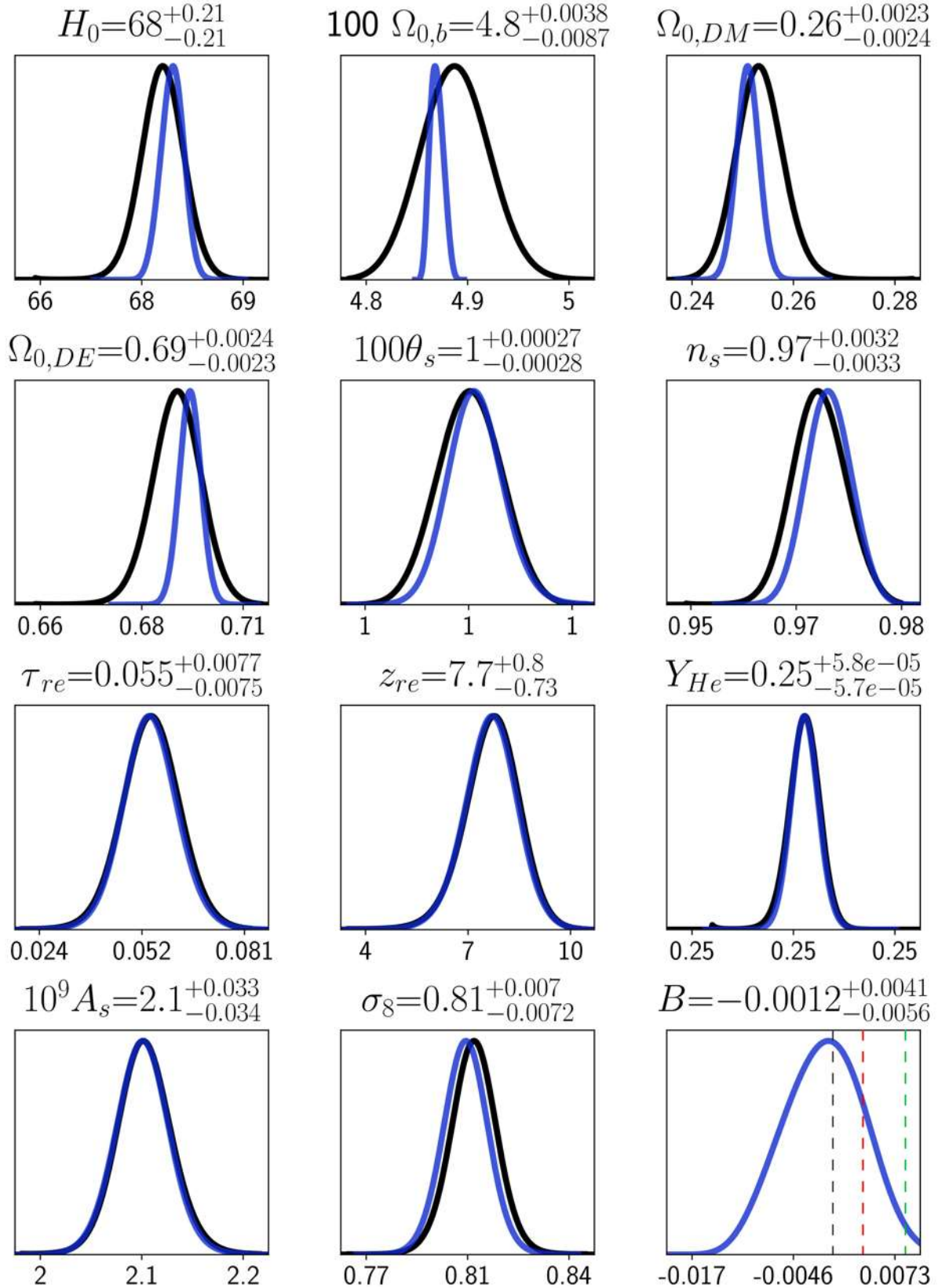


Figura 4.5: Distribuciones de Probabilidad Posterior de los parámetros del modelo Λ CDM (negro) y del ML (azul), **Caso II**. En la parte superior de cada recuadro se puede observar el nombre del parámetro y el resultado de la media y desviación estándar del ML. Las líneas segmentadas indican los valores para $B = 0$ que recupera el modelo Λ CDM (negro), el valor obtenido por Chavanis $B = 3.53 \times 10^{-3}$ (rojo), y el mejor ajuste para el ML de la [Tabla 4.12](#) $B = 8.2 \times 10^{-3}$ (verde).

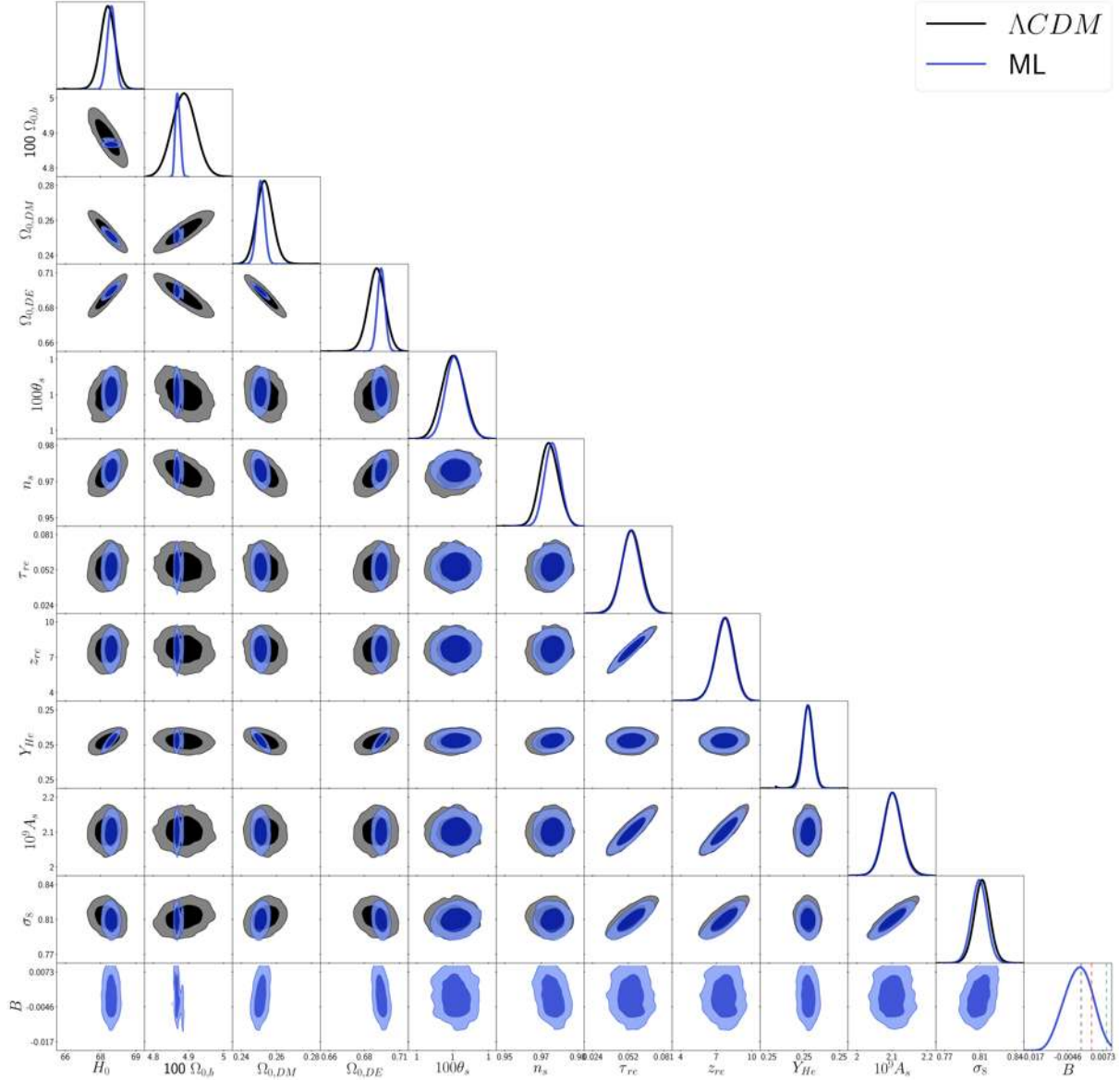


Figura 4.6: Relación bidimensional de las Distribuciones de Probabilidad Posterior de los parámetros del modelo Λ CDM (negro) y del ML (azul), **Caso II**. En los contornos se aprecian regiones más opacas que señalan los entornos de confianza al 95 %. Las líneas segmentadas indican los valores para $B = 0$ que recupera el modelo Λ CDM (negro), el valor obtenido por Chavanis $B = 3.53 \times 10^{-3}$ (rojo), y el mejor ajuste para el ML de la Tabla 4.12 $B = 8.2 \times 10^{-3}$ (verde).

4.2. Comparación entre Λ CDM y ML

En la [Sección 3.1](#) se estudia la relevancia de la evidencia $\mathcal{P}(D)$ en la comparación de modelos. Cuando se tienen dos modelos $\mathcal{M}_i$ y $\mathcal{M}_j$, el factor de Bayes determina la fuerza de la evidencia. A partir de (3.14) se tiene que:

$$\ln B_{ij} = \ln \left[\frac{\mathcal{P}(D | \mathcal{M}_i)}{\mathcal{P}(D | \mathcal{M}_j)} \right] = \ln[\mathcal{P}(D | \mathcal{M}_i)] - \ln[\mathcal{P}(D | \mathcal{M}_j)]. \quad (4.2)$$

Por lo tanto si $\ln B_{ij} < 0$ los datos observacionales favorecen al modelo $\mathcal{M}_j$, en cambio si $\ln B_{ij} > 0$ el modelo $\mathcal{M}_i$ es más robusto. Se interpreta el grado de fuerza de un modelo respecto a otro mediante la escala de Jeffreys ([Tabla 3.1](#)).

Un método propuesto para calcular la evidencia a partir de un muestreo MCMC es usando la propiedad de que la probabilidad posterior no normalizada $\tilde{\mathcal{P}}(\theta | D, \mathcal{M})$ es proporcional al valor de expectación de la densidad numérica $n(\theta | D, \mathcal{M})$ multiplicada por una constante a :

$$\tilde{\mathcal{P}}(\theta | D, \mathcal{M}) = \mathcal{P}(\theta | D, \mathcal{M}) \mathcal{P}(D | \mathcal{M}) = a n(\theta | D, \mathcal{M}). \quad (4.3)$$

La densidad numérica está definida por $n(\theta | D, \mathcal{M}) = N \mathcal{P}(\theta | D, \mathcal{M})$, siendo N el número de pasos dados por la cadena. Por consiguiente se llega a la relación:

$$\mathcal{P}(D | \mathcal{M}) = a N. \quad (4.4)$$

Permitiendo calcular la evidencia una vez determinada la constante a y el número de pasos dados por las cadenas para lograr inferencia es relevante. Para ello se hace uso de la k -ésima distancia al vecino más cercano en el espacio de parámetros, calculada mediante la distancia de Mahalanobis [78]. El proceso descrito anteriormente se realiza mediante el programa MCEvidence [79] y se utiliza en el presente trabajo para el cálculo de la evidencia del modelo Λ CDM y el ML en el **Caso I** y el **Caso II**, cuyo resultado se presenta en la [Tabla 4.13](#).

En virtud de lo anterior, es posible calcular el factor de Bayes (4.2) e interpretarlo mediante la escala de Jeffreys ([Tabla 3.1](#)). Para el **Caso I** se tiene:

$$\ln B_{ML, \Lambda CDM} = -\ln B_{\Lambda CDM, ML} = -2.83.$$

Resultado que favorece al modelo Λ CDM de manera positiva. En el **Caso II** se tiene:

$$\ln B_{ML, \Lambda CDM} = -\ln B_{\Lambda CDM, ML} = -6.129.$$

Concluyendo que la evidencia soporta de manera decisiva o muy fuertemente al modelo Λ CDM al añadir los datos de Planck 2018.

Modelo	Caso I	Caso II
Λ CDM	-1066.355	-2470.537
ML	-1069.185	-2476.666

Tabla 4.13: Resultados para la evidencia $\ln[\mathcal{P}(D | \mathcal{M})]$ para el modelo Λ CDM y el ML, considerando las observaciones relacionadas con la evolución cosmológica de fondo en el **Caso I** y añadiendo las observaciones de Planck 2018 en el **Caso II**.

Capítulo 5

Conclusiones

El objetivo del presente trabajo se cumple, obteniendo las restricciones para los parámetros del Modelo Logotrópico mediante el análisis estadístico bayesiano, considerando los datos observacionales relacionados con la evolución cosmológica de fondo y las perturbaciones lineales.

Al incluir el conjunto completo de datos observacionales de Planck 2018 [34] para el Modelo Logotrópico en el **Caso II**, el rango de las distribuciones de probabilidad posterior es menor con respecto a las del **Caso I**. Por lo tanto, los resultados mostrados en la **Tabla 4.12** son más robustos.

Las distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros que comparten ambos modelos presentan un comportamiento muy similar, como es de esperarse, debido a que al valor inferido para el parámetro B del Modelo Logotrópico es muy cercano a 0. Sin embargo, la comparación de modelos (**Sección 4.2**) en los dos casos explorados favorece a Λ CDM; es decir, este modelo explica mejor a los datos observacionales empleados con un número menor de parámetros que el Modelo Logotrópico. La evidencia anterior sugiere que el parámetro B difícilmente puede sustituir el rol que tiene la constante cosmológica Λ .

Con respecto a la media de la distribución de probabilidad posterior del **Caso II**, el valor establecido por Chavanis de $B = 3.53 \times 10^{-3}$, obtenido mediante el análisis numérico de los halos de materia oscura, difiere en 1.18σ de precisión. En virtud de lo anterior, se concluye que la estimación de Chavanis concuerda con el resultado obtenido mediante el análisis estadístico bayesiano del presente trabajo.

Haciendo uso de su valor obtenido, Chavanis identifica mediante la relación (2.29) a la densidad de referencia con la densidad de Planck $\rho_* = \rho_P$, lo cual resuelve la inconsistencia del valor de la constante cosmológica que se presenta en el modelo Λ CDM. Sin embargo, cuando se estima empleando diferentes valores de B pertenecientes a la distribución de probabilidad posterior del **Caso II**, se tiene que los órdenes de magnitud de ρ_* difieren drásticamente. En concreto, utilizando el valor $B = 8.2 \times 10^{-3}$ que mejor ajusta a los datos observacionales, el valor de ρ_* dista con un orden de magnitud 70 veces menor a ρ_P . El resultado anterior, refuta definitivamente lo postulado por Chavanis.

Como trabajo a futuro, resulta de interés realizar un análisis estadístico bayesiano para el Modelo Logotrópico bajo el formalismo Post-Friedmann Parametrizado (PPF, por sus siglas en inglés) [84] y [85], debido a que el modelo en cuestión presenta transiciones entre los regímenes quintaesencia $\omega_{DE} > -1$ y fantasma $\omega_{DE} < -1$ en $a = e^{-1/3B}$.

Apéndice A

Perturbaciones Cosmológicas

En esta sección se busca proporcionar al lector una breve introducción a la teoría de perturbaciones lineales cosmológicas, empleando este formalismo es posible describir las fluctuaciones iniciales del contenido de materia del universo responsables de la formación de estructuras a gran escala. Si se desea profundizar en el tema, se recomienda consultar: [29], [80]-[86]. En principio, se presentan los fundamentos de las perturbaciones lineales de las ecuaciones de Einstein. Posteriormente, se restringe a la descripción de los modos escalares en la norma síncrona. Por último, se expone a las observables cosmológicas relacionadas con las fluctuaciones primordiales.

A.1. Teoría de perturbaciones lineales cosmológicas

Al considerar un espacio-tiempo perturbado cercano al espacio-tiempo de fondo, se puede escribir su métrica de la siguiente manera:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} . \quad (\text{A1})$$

Donde $\bar{g}_{\mu\nu}$ es la métrica de fondo (se emplea el guión superior para designar a todas las cantidades no perturbadas pertenecientes a este espacio-tiempo). Por otro lado, $\delta g_{\mu\nu}$ representa la perturbación pequeña, al igual que su primer y segunda derivada ($\partial_\rho \delta g_{\mu\nu}$ y $\partial_{\rho\sigma} \delta g_{\mu\nu}$). En función de lo anterior, se inducen perturbaciones para el tensor de Einstein y el tensor de energía-momento:

$$G_{\mu\nu} = \bar{G}_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu} \quad \text{y} \quad T_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu} . \quad (\text{A2})$$

Las ecuaciones de Einstein (1.24) se deben de satisfacer en ambos espacios-tiempos:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad \text{y} \quad \bar{G}_{\mu\nu} = 8\pi G \bar{T}_{\mu\nu} , \quad \Rightarrow \quad \delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu} . \quad (\text{A3})$$

Las perturbaciones lineales permiten analizar las desviaciones de un universo homogéneo e isotrópico. El espacio-tiempo de fondo está descrito por la métrica de FRW que comúnmente se toma con curvatura plana $k = 0$, empleando por practicidad al tiempo conforme definido por $d\eta = \frac{dt}{a}$ como la coordenada temporal, se tiene:

$$\bar{ds}^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a(\eta)^2 [-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j] = a(\eta)^2 [-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2] . \quad (\text{A4})$$

De esta manera, es posible realizar transformaciones de Fourier 3-dimensionales para la parte espacial. Se tienen las ecuaciones correspondientes para el parámetro de la ecuación de estado $\omega = \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}$ y el parámetro de la velocidad del sonido $c_s^2 = \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} = \frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}'}$, el punto sobre una variable designa derivación con respecto al tiempo cósmico, mientras que la tilde denota derivación con respecto al tiempo conforme. Mediante (A4) se reescribe a la métrica del espacio-tiempo perturbado (A1) como:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = a(\eta)^2 [\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}], \quad (\text{A5})$$

donde la métrica del espacio-tiempo de fondo $\bar{g}_{\mu\nu} = a(\eta)^2 \eta_{\mu\nu}$ está en función de la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Por notación se designa a la perturbación de la métrica $\delta g_{\mu\nu}$ como $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$, la cual debe ser pequeña al igual que $\partial_\rho h_{\mu\nu}$ y $\partial_{\rho\sigma} h_{\mu\nu}$, además debe de satisfacer $h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}$. Al realizar el cálculo del tensor de Einstein (1.21) para el espacio-tiempo perturbado mediante el uso de (1.8), (1.10), (1.11) y (1.12) se desprecian todos los términos que van como $\mathcal{O}(h^2)$ o mayores.

Es posible descomponer a la perturbación de la métrica $h_{\mu\nu}$ en sus componentes de la traza y de la parte sin traza:

$$[h_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -2A & -B_i \\ -B_i & -2D\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{bmatrix}, \quad (\text{A6})$$

$$\text{con} \quad D = -\frac{1}{6}h^i_i = -\frac{1}{6}h, \quad \delta^{ij}E_{ij} = E^i_i = 0.$$

Dando como resultado la expresión para el elemento diferencial de línea del espacio-tiempo perturbado:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-(1 + 2A)d\eta^2 - 2B_i d\eta dx^i + [(1 - 2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}] dx^i dx^j \right]. \quad (\text{A7})$$

El campo vectorial B_i puede dividirse en dos partes $B_i = B^S_i + B^V_i$, la primera corresponde al gradiente de un campo escalar y tiene producto externo nulo, y la segunda es un campo vectorial con divergencia igual a cero:

$$B_i = -\nabla B + B^V_i, \quad \text{que satisface} \quad \nabla \times B^S = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \cdot B^V = 0. \quad (\text{A8})$$

También se puede descomponer al tensor simétrico sin traza E_{ij} de la siguiente manera:

$$E_{ij} = \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) E - \frac{1}{2} (\partial_j E^V_i + \partial_i E^V_j) + E^T_{ij}, \quad (\text{A9})$$

$$\text{con} \quad \nabla \cdot E^V = 0 \quad \text{y} \quad \delta^{ik} \partial_k E_{ij} = 0.$$

Después de realizar este análisis, se nota que la perturbación de la métrica se compone por tres tipos de modos:

Escalares: A , B , D y E .

Vectoriales: B^V_i y E^V_i .

Tensoriales: E^T_{ij} .

Estos nombres vienen dados por sus propiedades de transformación bajo rotaciones en el espacio de fondo. Se implementa el mismo razonamiento para las perturbaciones del lado derecho de las ecuaciones de campo. El tensor de energía-momento de fondo corresponde a un fluido perfecto:

$$\bar{T}^\mu_\nu = (\bar{\rho} + \bar{P})\bar{u}^\mu\bar{u}_\nu + \bar{P}\delta^\mu_\nu, \quad (\text{A10})$$

donde $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\eta)$ y $\bar{P} = \bar{P}(\eta)$ son la densidad y la presión del fluido de fondo respectivamente. Para un observador que usa las coordenadas (A4), el fluido se encuentra en reposo $\bar{u}^\mu = \frac{1}{a}(1, 0, 0, 0)$ y $\bar{u}_\mu = a(-1, 0, 0, 0)$ que satisface la condición $\bar{u}^\mu\bar{u}_\mu = \bar{g}_{\mu\nu}\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu = -1$. Las perturbaciones del tensor de energía-momento para el espacio-tiempo perturbado (A2) son debidas a las perturbaciones de la densidad $\rho = \bar{\rho} + \delta\rho$, la presión $P = \bar{P} + \delta P$ y la velocidad $u^i = \bar{u}^i + \delta u^i = \delta u^i = \frac{1}{a}v_i$. Usando las relaciones (A5) y (A6), se pueden determinar las perturbaciones restantes para la cuadrivelocidad δu^0 , δu_0 y δu_i bajo las condiciones $u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu$ y $u^\mu u_\mu = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$, obteniendo:

$$u^\mu = \frac{1}{a}(1 - A, v_i) \quad \text{y} \quad u_\mu = a(-1 - A, v_i - B_i). \quad (\text{A11})$$

Siendo v_i la velocidad del fluido medida por un observador comovil. En virtud de lo anterior, la perturbación del tensor de energía-momento se puede escribir en sus componentes de la traza y de la parte sin traza.

$$[\delta T^\mu_\nu] = \begin{bmatrix} -\delta\rho & (\bar{\rho} + \bar{P})(v_i - B_i) \\ -(\bar{\rho} + \bar{P})v_i & \delta P\delta^i_j + \Sigma_{ij} \end{bmatrix}. \quad (\text{A12})$$

Siendo $\delta P = \delta T^i_i$ la perturbación para la parte correspondiente a la traza espacial de la presión y Σ_{ij} la parte sin traza llamada estrés anisotrópico que para un fluido perfecto es igual a cero. En el espacio-tiempo perturbado, se debe de cumplir:

$$T^\mu_\nu = (\rho + P)u^\mu u_\nu + P\delta^\mu_\nu. \quad (\text{A13})$$

Del mismo modo en que se realizó la descomposición para las perturbaciones de la métrica (A6), se puede extraer más información de (A12) para v_i y Σ_{ij} ,

$$v_i = -\nabla v + v^V_i \quad \text{que satisface} \quad \nabla \times v^S = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \cdot v^V = 0. \quad (\text{A14})$$

Reescribiendo al estrés anisotrópico como $\Pi_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\bar{P}}$, se tiene:

$$\Pi_{ij} = \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) \Pi - \frac{1}{2} (\partial_j \Pi^V_i + \partial_i \Pi^V_j) + \Pi^T_{ij}, \quad (\text{A15})$$

$$\text{con} \quad \nabla \cdot \Pi^V = 0 \quad \text{y} \quad \delta^{ik} \partial_k \Pi_{ij} = 0.$$

Por lo tanto, las perturbaciones del tensor de energía-momento se pueden descomponer en los modos:

Escalares: $\delta\rho$, δP , v y Π .

Vectoriales: v^V_i y Π^V_i .

Tensoriales: Π^T_{ij} .

La separación empleada para las perturbaciones de la métrica y del tensor de energía-momento en sus partes escalar, vectorial y tensorial, toma relevancia cuando se resuelven las ecuaciones de campo de Einstein a orden lineal, debido a que los modos resultan ser independientemente unos de otros, es decir, estos no se acoplan entre ellos.

Dependiendo de la investigación que se quiera realizar se escogen los modos pertinentes a analizar. En principio, las perturbaciones escalares son las más implementadas en cosmología debido a que influyen directamente en las perturbaciones para la densidad y la presión, responsables de las fluctuaciones iniciales que causan la formación de estructuras a gran escala en el universo. Mientras que las perturbaciones vectoriales afectan la velocidad rotacional del fluido y para un universo en expansión decaen rápidamente por lo que no son muy relevantes en el análisis cosmológico. Por último, las perturbaciones tensoriales están íntimamente relacionadas con la descripción de las ondas gravitacionales.

Restringiendo el estudio únicamente para los modos escalares, se tiene que las perturbaciones de la métrica y del tensor de energía se escriben de la siguiente manera:

$$[h_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -2A & \partial_i B \\ \partial_i B & -2(D + \frac{1}{3}\nabla^2 E)\delta_{ij} + 2\partial_i\partial_j E \end{bmatrix}, \quad (\text{A16})$$

$$[\delta T^\mu_\nu] = \begin{bmatrix} -\delta\rho & -(\bar{\rho} + \bar{P})[\partial_i v - \partial_i B] \\ (\bar{\rho} + \bar{P})\partial_i v & \delta P\delta^i_j + \bar{P}[\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2]\Pi \end{bmatrix}. \quad (\text{A17})$$

A.2. Elección de norma

Existen muchos sistemas coordenados posibles para describir al espacio-tiempo perturbado, en los que (A1) es válida. Es por ello que se requiere de una correspondencia entre los puntos del espacio-tiempo de fondo y del espacio-tiempo perturbado

$$\hat{x}^\mu = \bar{x}^\mu + \xi^\mu. \quad (\text{A18})$$

Donde ξ^μ es del orden de las perturbaciones introducidas anteriormente, mientras que el sombrero designa a las cantidades pertenecientes al espacio-tiempo perturbado. La condición de que el elemento diferencial de línea ds^2 se mantiene invariante ante esta transformación de coordenadas implica que $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \bar{g}_{\mu\nu}d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu$. Por lo anterior, la métrica correspondiente al espacio-tiempo perturbado es afectada y esto es debido únicamente a $\delta g_{\mu\nu} = a^2 h_{\mu\nu}$. Aplicando la transformación de norma a la perturbación de la métrica se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{\delta g}_{\mu\nu} &= \delta g_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\beta}\partial_\nu\xi^\beta - \bar{g}_{\alpha\nu}\partial_\mu\xi^\alpha - \xi^\alpha\partial_\alpha\bar{g}_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\xi^2) \\ &= \delta g_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\beta}\partial_\nu\xi^\beta - \bar{g}_{\alpha\nu}\partial_\mu\xi^\alpha - \xi^0\partial_0\bar{g}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

La componente espacial de $\xi^\mu = (\xi^0, \xi^i)$ puede descomponerse en su parte transversa más el gradiente de un campo escalar que tiene producto externo igual a cero $\xi^i = \xi^{Vi} - \nabla\xi$. De esta manera, ξ^0 y ξ son las responsables de los cambios en las perturbaciones escalares.

Con el uso de (A19), los modos escalares (A16) que componen a la métrica perturbada se transforman de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= A - \xi^{0'} - \frac{a'}{a}\xi^0, \\ \hat{B} &= B + \xi' + \xi^0, \\ \hat{D} &= D - \frac{1}{3}\nabla^2\xi + \frac{a'}{a}\xi^0, \\ \hat{E} &= E + \xi.\end{aligned}\tag{A20}$$

Similarmente, bajo la transformación de norma para los modos escalares (A17) que conforman al tensor de energía-momento, se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\hat{\delta} &= \delta - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}\xi^0 = \delta + 3\mathcal{H}(1+w)\xi^0, \\ \delta\hat{P} &= \delta P - \bar{P}'\xi^0, \\ \hat{v} &= v + \xi', \\ \hat{\Pi} &= \Pi,\end{aligned}\tag{A21}$$

en donde se implementa la definición de la perturbación de la densidad de energía relativa o contraste de densidad $\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}$ y del parámetro de Hubble en función del tiempo conforme $\mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a} = aH = \dot{a}$. Se observa que el estrés anisotrópico Π es un invariante de norma. De (A20) y (A21) se conforma un sistema de 8 ecuaciones que permiten encontrar a los modos escalares del espacio-tiempo perturbado una vez que se conocen los modos pertenecientes al universo de fondo; sin embargo, se tienen 10 incógnitas inmersas a encontrar que corresponden a los 8 modos escalares con sombrero más ξ^0 y ξ . Debido a esta incompletitud, se deben de imponer valores particulares para ξ^0 y ξ que permitan cerrar el sistema, a esto se le denomina: elección de norma.

En el presente trabajo se utiliza la norma síncrona, empleada por primer vez en perturbaciones cosmológicas por Lifshitz [87], que establece:

$$\begin{aligned}\xi^{0'} + \mathcal{H}\xi^0 &= A, \\ \xi' + \xi^0 &= -B.\end{aligned}\tag{A22}$$

Denotando con el superíndice s a los modos pertenecientes a la norma síncrona, para las primeras dos relaciones de (A20) se tiene:

$$A^s = B^s = 0.\tag{A23}$$

Por lo tanto, en la norma síncrona todos los observadores miden el mismo tiempo cósmico y la perturbación de la métrica sólo se encuentra en la parte espacial, además la elección de la hipersuperficie inicial y de sus asignaciones de coordenadas son arbitrarias.

Como se mencionó previamente, las propiedades del espacio-tiempo de fondo permiten simplificar los cálculos al realizar una expansión de Fourier de la parte espacial para una perturbación dada $F(\eta, \vec{x})$ y para ξ :

$$\begin{aligned}F(\eta, \vec{x}) &= \sum_{\vec{k}} F_{\vec{k}}(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \\ \xi(\eta, \vec{x}) &= \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}}(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}.\end{aligned}\tag{A24}$$

Empleando la notación de Ma y Bertschinger [82]: $h \equiv -6D^s$ y $\eta \equiv D^s + \frac{1}{3}\nabla^2 E^s$. Las ecuaciones de Einstein perturbadas son:

$$\begin{aligned} k^2\eta - \frac{1}{2}\mathcal{H}h' &= -4\pi Ga^2\delta\rho^s, \\ k^2\eta' &= 4\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{P})k\nu^s, \\ h'' + 2\mathcal{H}h' - 2k^2\eta &= -24\pi Ga^2\delta P^s, \\ h'' + 6\eta'' + 2\mathcal{H}h' + 12\mathcal{H}\eta' - 2k^2\eta &= -16\pi Ga^2\bar{P}\Pi. \end{aligned} \quad (\text{A25})$$

Aunado a ello, se tienen las ecuaciones para la conservación del tensor de energía-momento $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ de la parte temporal y espacial respectivamente:

$$\begin{aligned} \delta^{s'} &= -(1 + \omega) \left(k\nu^s + \frac{1}{2}h' \right) - 3\mathcal{H} \left(\frac{\delta P^s}{\delta\rho^s} - \omega \right) \delta^s, \\ \nu^{s'} &= -\mathcal{H}(1 - 3\omega)\nu^s - \frac{\omega'}{1 + \omega}\nu^s + \frac{\delta P^s/\delta\rho^s}{1 + \omega}k\delta^s - \frac{2}{3}\frac{\omega}{1 + \omega}k\Pi. \end{aligned} \quad (\text{A26})$$

En virtud de lo anterior, se logra cerrar el sistema de ecuaciones (A25) y (A26) para determinar los modos δ , δP , ν , Π , h y η . Es indispensable notar que las ecuaciones perturbadas de evolución se cumplen independientemente para todas las componentes del fluido cósmico, por consiguiente se puede escribir a $T_{\mu\nu}$ y $\delta T_{\mu\nu}$ en las contribuciones por parte de los bariones, fotones, neutrinos, DM y DE.

A.3. Observaciones de las perturbaciones cosmológicas

Resolver las perturbaciones cosmológicas para cada componente de materia del universo resulta un trabajo demasiado complejo de efectuar. Para conocer más sobre la evolución de la estructura cósmica es necesario estudiar el comportamiento termodinámico a través de la ecuación de Boltzmann:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} = \mathcal{C}[f]. \quad (\text{A27})$$

Se tiene que: f es la función de distribución, x y p representan a la posición y al momento de la partícula en el espacio fase, y $\mathcal{C}[f]$ es el término de colisión que cuantifica las interacciones de las partículas que constituyen el fluido. Las ecuaciones de Boltzmann representan la tasa de cambio en la abundancia de una determinada partícula. Esta abundancia (también conocida como la densidad numérica) es la integral sobre todos los momentos de f y varia dependiendo de las tasas de producción y aniquilación de cada especie. Para clarificar el significado de $\mathcal{C}[f]$, se observa que en caso de no existir colisiones, se tiene $\frac{df}{dt} = 0$ recuperando el teorema de Liouville, es decir, el número de partículas en un volumen dado del espacio fase se conserva. Además depende de la componente a analizar, por ejemplo, para los fotones se toma en cuenta a la dispersión de Thomson.

Al construir las ecuaciones (A27) para cada tipo de materia considerando su respectiva distribución (Bose o Fermi) y a la ecuación de las geodésicas en el espacio perturbado, se llega a: las ecuaciones de Einstein-Boltzmann que se pueden encontrar explícitamente en el trabajo de Ma y Bertschinger [82], requiriendo de conocer las condiciones iniciales de la función de distribución para ser solucionadas.

Con el formalismo explicado hasta el momento, es posible relacionar a las perturbaciones lineales cosmológicas con las observaciones de las fluctuaciones de los fotones y los bariones descritas a continuación.

Anisotropías del CMB

La radiación del fondo cósmico de microondas descubierta por Penzias y Wilson en 1965 [88] se asocia con la radiación de cuerpo negro emitida en una etapa temprana del universo correspondiente al momento de la recombinación $z \simeq 1100$, en donde se forman los primeros átomos neutros de hidrógeno causando el desacoplamiento de los fotones de la materia bariónica. Las perturbaciones de los fotones son responsables de las pequeñas fluctuaciones en la temperatura y la polarización del CMB. En principio, se mide la temperatura de los mapas celestes (como el mostrado en la [Figura 1.1](#)):

$$T(\hat{n}) = T_{CMB} \left[1 + \frac{\Delta T(\hat{n})}{T} \right], \quad (\text{A28})$$

en donde $T_{CMB} \simeq 2.725K$, el vector unitario $\hat{n}$ es la dirección en que se mide y $\frac{\Delta T(\hat{n})}{T}$ corresponde a las anisotropías de temperatura, que para describirlas se descomponen en coeficientes de armónicos esféricos:

$$\frac{\Delta T(\hat{n})}{T} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{n}), \quad (\text{A29})$$

siendo ℓ el momento multipolar. Para una distribución gaussiana de los coeficientes $a_{\ell m}$ se tiene que su promedio es cero, mientras que la varianza es:

$$C_{\ell} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} = \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'} \rangle. \quad (\text{A30})$$

Para la relación (A30), C_{ℓ} representa el espectro de potencia angular del CMB y está directamente relacionado con los parámetros cosmológicos de un cierto modelo mediante una función de transferencia angular $\Theta(k, \ell)$ que se calcula resolviendo las ecuaciones de Einstein-Boltzmann descritas anteriormente para los fotones, su dependencia esta dada por la siguiente formula:

$$C_{\ell} = 4\pi \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}(k) \Theta^2(k, \ell). \quad (\text{A31})$$

El término $\mathcal{P}(k)$ es el espectro de potencia primordial de las perturbaciones. A partir de ello, se busca obtener las correlaciones de dos puntos de las anisotropías de temperatura y de polarización del CMB:

$$\begin{aligned} C_{\ell}^{TT} &= 4\pi \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}(k) [\Theta^T(k, \ell)]^2, \\ C_{\ell}^{EE} &= 4\pi \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}(k) [\Theta^E(k, \ell)]^2, \\ C_{\ell}^{TE} &= 4\pi \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}(k) \Theta^T(k, \ell) \Theta^E(k, \ell). \end{aligned} \quad (\text{A32})$$

donde el superíndice TT hace referencia a la correlación en las anisotropías de temperatura. EE se emplea para la correlación de la polarización de los fotones. Por último, también se toma en consideración las correlaciones entre temperatura y polarización denotadas por TE .

En la [Figura A.1](#) se muestra el espectro de potencia de la temperatura del CMB, la altura y posición de las crestas (llamados picos acústicos) y valles son de gran importancia al restringir los parámetros del modelo cosmológico empleado, el primer pico corresponde a la escala del horizonte en el momento de la recombinación.

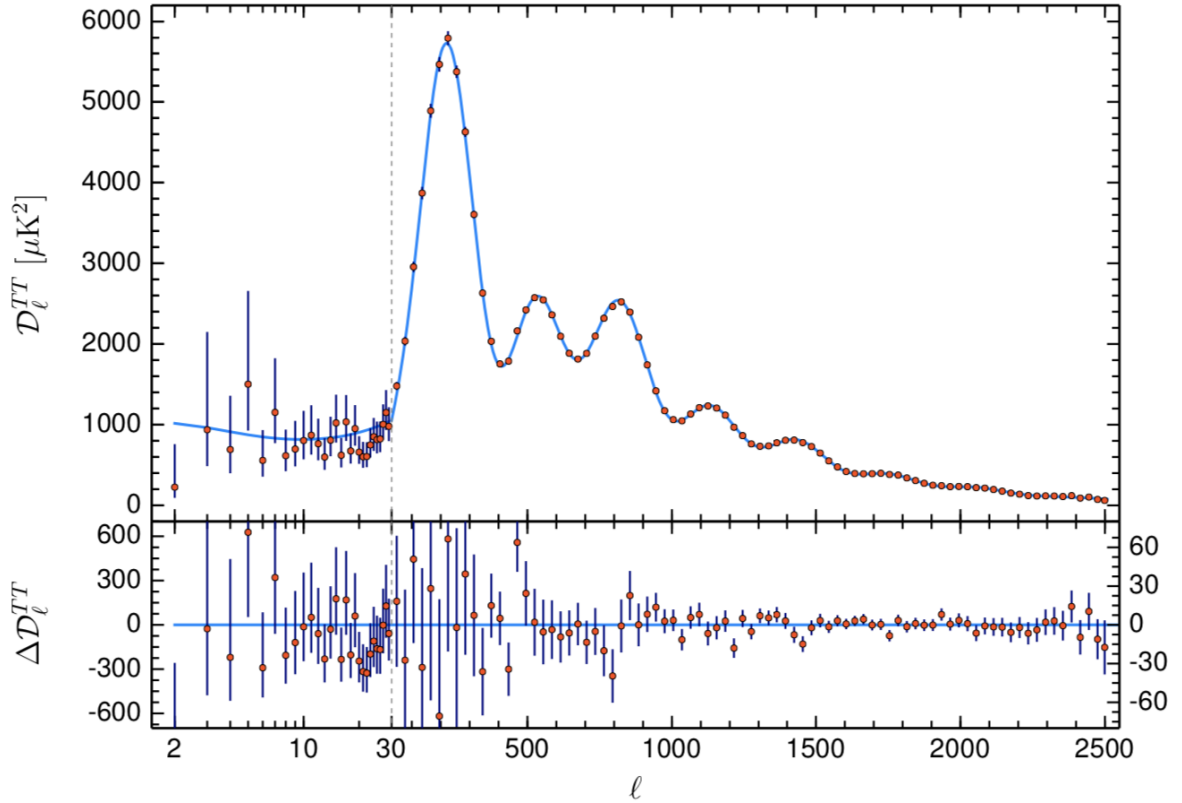


Figura A.1: Nota. (Espectro de potencia de temperatura de Planck 2018) Adaptado de Aghanim, N., Akrami, Y., Ashdown, M., et al. (2020). Planck 2018 results-VI. Cosmological parameters. *Astronomy and Astrophysics*, 641, A6. [\[34\]](#). La línea de color azul de la gráfica superior representa el espectro teórico mejor ajustado a Planck del modelo Λ CDM, mientras que la línea punteada resalta la división entre los multipolos altos $l > 30$ y los multipolos bajos $l < 30$, en donde las barras de error (incertidumbres a 1σ) son mayores debido a la varianza cósmica. Los residuos del modelo teórico con respecto a las observaciones conforman la gráfica inferior.

MPS

Después del desacoplamiento de los fotones, la materia bariónica se acopla con la materia oscura generando pequeñas fluctuaciones primordiales que se amplifican debido a la inestabilidad gravitacional hasta formar la estructura a gran escala del universo. El Espectro de Potencia de Masa (MPS, por sus siglas en inglés) permite estudiar la evolución de dichas fluctuaciones, se construye a partir de la transformada de Fourier de la función de correlación a dos puntos del contraste de densidad de materia $\delta_m = \delta_b + \delta_{DM}$, y se define como:

$$\mathcal{P}(k) = (2\pi)^3 \int d^3x [\delta_m]^2 e^{-ikx}. \quad (\text{A33})$$

Cuantifica el exceso de probabilidad de encontrar dos galaxias a una cierta distancia comparado con el esperado para una distribución aleatoria. Si no se tomara en consideración la contribución de la materia oscura, los bariones no formarían estructuras.

En la [Figura A.2](#) se muestra el MPS en $z = 0$, se observa la amplitud de las fluctuaciones de densidad de materia a diferentes escalas de longitud k^{-1} , tiene un máximo que da información sobre el momento de equilibrio entre la radiación y la materia k_{eq} . Para los números de onda pequeños la curva presenta un comportamiento lineal mientras que para los números de onda grandes decrece conforme a k^3 .

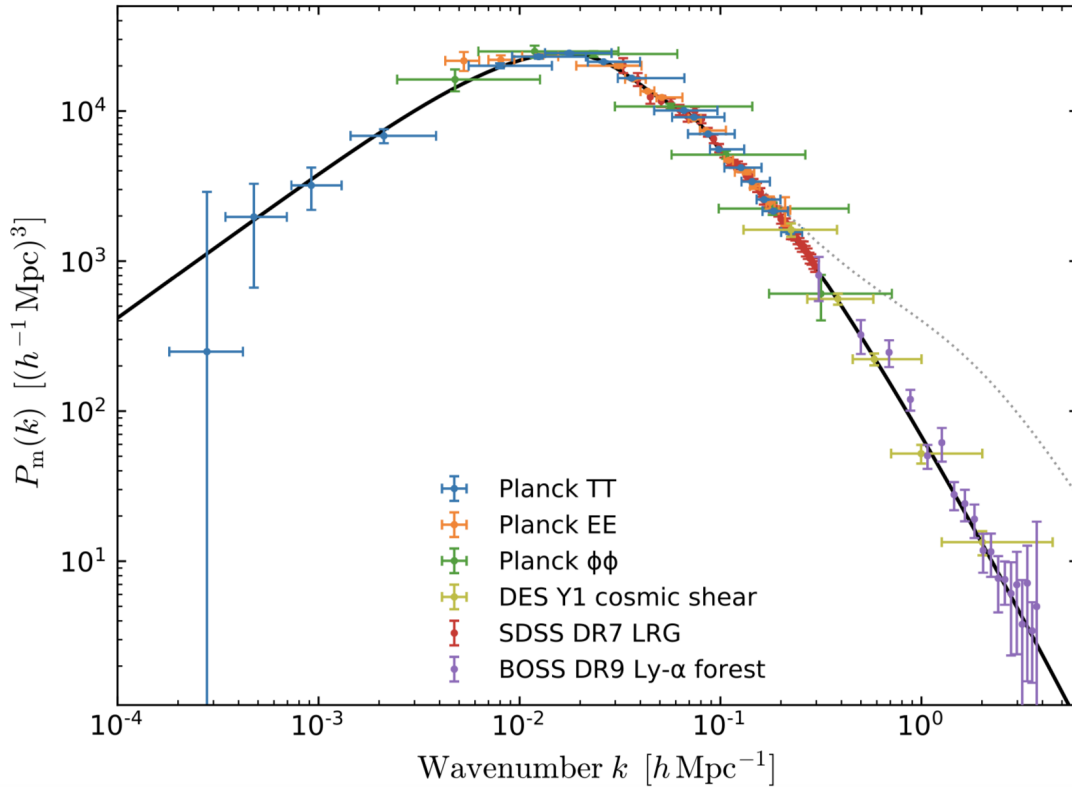


Figura A.2: Nota. (MPS en $z = 0$) Adaptado de Aghanim, N., Akrami, Y., Arroja, F., et al. (2020). Planck 2018 results-I. Overview and the cosmological legacy of Planck. Astronomy and Astrophysics, 641, A1. [89]. Inferido a partir de los sondeos de cúmulos de galaxias y de las mediciones del bosque Ly α , proporciona información de la evolución cosmológica a través de 14 *Gyr*. La línea negra es la solución teórica asumiendo el modelo Λ CDM.

Apéndice B

Implementación del ML y MLG en CLASS y MontePhyton

El presente trabajo hace uso de dos códigos computacionales principales: CLASS y MontePython, que permiten realizar la inferencia bayesiana de los parámetros cosmológicos del ML y Λ CDM. Dentro de este apéndice se revisa su estructura y las modificaciones necesarias que se requieren para implementar al Modelo Logotrópico.

B.1. CLASS

Primero se presenta al código tipo Boltzmann CLASS (Cosmic Linear Anisotropy Solving System, por sus siglas en inglés) [90]-[93]: se encuentra escrito en el lenguaje de programación tipo C y se enfoca en resolver numéricamente el sistema de ecuaciones que dictamina la evolución de: la cosmología de fondo; las perturbaciones lineales; y la termodinámica, emplea un integrador tipo Runge-Kutta para las dos primeras y el módulo RECFAST para la última. Del mismo modo, permite calcular las anisotropías del fondo cósmico de microondas y el espectro de potencia de masa.

Si se desea hacer uso de CLASS, se remite a su repositorio de GitHub: https://github.com/lesgourg/class_public y a su página web: <http://class-code.net> donde se aclara el proceso de instalación y uso. El programa se encuentra dividido en 10 módulos principales que contienen las ecuaciones físicas y la lógica del código:

1. **input.c**: determina los parámetros físicos de entrada.
2. **background.c**: resuelve la cosmología de fondo.
3. **thermodynamics.c**: se encarga de solucionar la parte termodinámica.
4. **perturbations.c**: encuentra las funciones fuentes responsables de las perturbaciones cosmológicas.
5. **primordial.c**: obtiene el espectro primordial.
6. **nonlinear.c**: realiza correcciones no lineales.
7. **transfer.c**: determina las funciones de transferencia.
8. **spectra.c**: provee el espectro observable.

9. **lensing.c**: determina al espectro del CMB.
10. **output.c**: proporciona el formato de salida de los parámetros

El orden de la lista es relevante, ya que cada módulo depende de los anteriores. CLASS se encuentra escrito inicialmente para resolver el modelo cosmológico Λ CDM; sin embargo, gracias a su flexibilidad puede ser modificado para implementar otro modelo.

Como se revisó en el [Capítulo 2](#), la característica más relevante del *ML* es que mediante la ecuación de estado logotrópica (2.13) del fluido oscuro, se obtiene una componente que evoluciona como la materia oscura fría al igual que el modelo Λ CDM y otra que se interpreta como energía oscura sustituyendo el rol de la constante cosmológica. En las publicaciones de Chavanis [4] y [5] se detalla que: se pueden obtener exactamente y sin pérdida de generalidad las ecuaciones de evolución encontradas para el fluido oscuro al considerar dos fluidos que no interactúan, uno corresponde a la materia oscura y el otro a la energía oscura. Estos están caracterizados por las siguientes ecuaciones para la presión, la densidad de energía y el parámetro de la ecuación de estado:

$$P_{DM} = 0, \quad \epsilon_{DM} = \frac{\Omega_{0,DM}\epsilon_0}{a^3}, \quad \omega_{DM} = 0, \quad (B1)$$

$$P_{DE} = -\Omega_{0,DE}\epsilon_0[1 + B + 3B \ln a], \quad (B2)$$

$$\epsilon_{DE} = \Omega_{0,DE}\epsilon_0[1 + 3B \ln a], \quad (B3)$$

$$\omega_{DE} = -1 - \frac{B}{1 + 3B \ln a}. \quad (B4)$$

Por lo tanto, basta realizar modificaciones en CLASS únicamente para las ecuaciones que caracterizan a la energía oscura. Existen tres opciones que el usuario puede elegir para modelar a la energía oscura: constante cosmológica; un fluido; o un campo escalar. Debido a esta practicidad, la implementación varía para los dos casos que se exploran en la inferencia de parámetros del *ML* en la [Sección 4.1](#).

Para el **Caso I**, ya que solo se considera la evolución cosmológica de fondo, basta modificar la parte del código correspondiente a la constante cosmológica para que esta sea interpretada como la contribución de energía oscura del *ML*. En principio, se crea una copia de la carpeta `class_public` (código original de CLASS) a la que se le llama `class_caso_1`, en donde se modifican los siguientes archivos: En `input.c` es necesario añadir dentro de la función `input_read_parameters_general` las siguientes líneas para designar el apuntador de la estructura del background de la variable `B`.

```
/** 5.1) Read Logotropic constant B*/

class_call(parser_read_double(pfc,"B",&param1,&flag1,errmsg),
            errmsg,
            errmsg);

pba->B = param1;
```

Con ello, CLASS comprende que existe un nuevo parámetro `B`, el cual puede intervenir dentro de las ecuaciones escritas en el archivo `background.c`.

Posteriormente en `background.c`, dentro de la función `background_functions` se remueven las ecuaciones de la densidad de energía y la presión para la constante cosmológica Λ que se encuentran en la línea 524 del código original.

```
/* Lambda */
if (pba->has_lambda == _TRUE_) {
    pvecback[pba->index_bg_rho_lambda] = pba->Omega0_lambda
        * pow(pba->H0, 2);
    rho_tot += pvecback[pba->index_bg_rho_lambda];
    p_tot -= pvecback[pba->index_bg_rho_lambda];
}
```

Sustituyendo esta sección por las ecuaciones (B2) y (B3) que caracterizan a la parte del fluido oscuro que actúa como energía oscura y añadiendo la ecuación correspondiente a $\frac{dP}{d \ln a} = -3 \Omega_{0,DE} \epsilon_0$,

```
/* Change Lambda to the DE part of the Logotropic Dark Fluid*/
if (pba->has_lambda == _TRUE_) {
    pvecback[pba->index_bg_rho_lambda] = pba->Omega0_lambda
        * pow(pba->H0, 2) * (1 + 3 * pba->B * log(a));
    rho_tot += pvecback[pba->index_bg_rho_lambda];
    p_tot -= pvecback[pba->index_bg_rho_lambda]
        + pba->B * pba->Omega0_lambda * pow(pba->H0, 2);
    dp_dloga -= 3 * pba->B * pba->Omega0_lambda * pow(pba->H0, 2);
}
```

Otra modificación necesaria en el mismo archivo se realiza en la función `background_solve` añadiendo la instrucción para que el valor seleccionado del parámetro B se imprima en la información de salida. Esto se implementa dentro del condicional `if (pba->background_verbose > 0)` en la línea 1972,

```
/** - send information to standard output */
if (pba->background_verbose > 0) {
    printf(" -> age = %f Gyr\n", pba->age);
    printf(" -> conformal age = %f Mpc\n", pba->conformal_age);
    printf(" -> N_eff = %g (summed over all species that are
        non-relativistic at early times) \n", pba->Neff);
    printf(" -> B = %f \n", pba->B);
}
```

Aunado a ello, en la carpeta `include`, dentro del archivo `background.h` se introduce la variable B en la función `struct background`

```
double B; /**< Logotropic constant */
```

Por último, dentro del archivo `explanatory.ini` en la función `General parameters`, se añade el valor de B con el cual CLASS realizará la solución numérica de las ecuaciones

```
# 5.1) Logotropic parameter: value of the constant B
B = 0.          # The user can change this number
```

El usuario puede modificar esta sección cambiando el valor inicial de $B = 0$ a otro valor $B \neq 0$ para contabilizar la parte de energía oscura del modelo logotrópico.

Se ilustra un ejemplo que resalta los resultados de las modificaciones empleadas realizando una corrida de CLASS, introduciendo el valor $B = 0.1$ en el archivo explanatory.ini. Posteriormente, en la terminal del ordenador, moviéndose a la carpeta class_caso_1 se ejecuta el comando `./class explanatory.ini` obteniendo como salida:

```
/class_logotropico$ ./class explanatory.ini
Reading input parameters
  -> matched budget equations by adjusting Omega_Lambda = 0.690026
Running CLASS version v3.0.0
Computing background
  -> age = 13.982369 Gyr
  -> conformal age = 14275.374877 Mpc
  -> N_eff = 3.044 (summed over all species that are non-relativistic at
early times)
  -> B = 0.100000
  -> radiation/matter equality at z = 3405.751104
      corresponding to conformal time = 112.722902 Mpc
Computing thermodynamics using HyRec 2020
  -> with primordial helium mass fraction Y_He = 0.2454
  -> recombination (maximum of visibility function) at z = 1088.775235
      corresponding to conformal time = 280.650005 Mpc
      with comoving sound horizon = 144.510134 Mpc
      angular diameter distance = 12.841845 Mpc
      sound horizon angle 100*theta_s = 1.032604
      Thomson optical depth crosses one at z_* = 1085.099140
      giving an angle 100*theta_* = 1.034950
  -> baryon drag stops at z = 1059.921687
      corresponding to conformal time = 286.316141 Mpc
      with comoving sound horizon rs = 147.071393 Mpc
  -> reionization with optical depth = 0.054644
      corresponding to conformal time = 5128.498919 Mpc
Computing sources
Computing primordial spectra (analytic spectrum)
Computing linear Fourier spectra.
  -> sigma8=0.837115 for total matter (computed till k = 1.0651 h/Mpc)
No non-linear spectra requested. Nonlinear calculations skipped.
Computing transfers
Computing unlensed harmonic spectra
Computing lensed spectra (fast mode)
No distortions requested. Distortions module skipped.
```

Que contrasta con el resultado originado de una corrida por defecto del modelo Λ CDM que se realiza similarmente al computar el comando anterior en la terminal pero dentro de la carpeta class_public para el explanatory.ini original.

```
/class_public$ ./class_explanatory.ini
Reading input parameters
-> matched budget equations by adjusting Omega_Lambda = 0.690026
Running CLASS version v3.2.0
Computing background
-> age = 13.770598 Gyr
-> conformal age = 14151.897989 Mpc
-> N_eff = 3.044 (summed over all species that are non-relativistic at
early times)
-> radiation/matter equality at z = 3405.751104
    corresponding to conformal time = 112.722902 Mpc
Computing thermodynamics using HyRec 2020
-> with primordial helium mass fraction Y_He = 0.2454
-> recombination (maximum of visibility function) at z = 1088.775238
    corresponding to conformal time = 280.650004 Mpc
    with comoving sound horizon = 144.510134 Mpc
    angular diameter distance = 12.728540 Mpc
    sound horizon angle 100*theta_s = 1.041796
    Thomson optical depth crosses one at z_* = 1085.129321
    giving an angle 100*theta_* = 1.044144
-> baryon drag stops at z = 1059.921817
    corresponding to conformal time = 286.316115 Mpc
    with comoving sound horizon rs = 147.071381 Mpc
-> reionization with optical depth = 0.054308
    corresponding to conformal time = 5127.540389 Mpc
Computing sources
Computing primordial spectra (analytic spectrum)
Computing linear Fourier spectra.
-> sigma8=0.824398 for total matter (computed till k = 1.08688 h/Mpc)
No non-linear spectra requested. Nonlinear calculations skipped.
Computing transfers
Computing unlensed harmonic spectra
Computing lensed spectra (fast mode)
No distortions requested. Distortions module skipped.
```

Evidenciando que el código sí está tomando en cuenta al parámetro B del ML. Para este caso en particular, cuando se considera $B = 0.1$ los resultados de la edad del universo y el tiempo de reionización son mayores que en los obtenidos para Λ CDM.

El **Caso II** toma en cuenta las perturbaciones lineales cosmológicas. Para ello, es necesario implementar a la energía oscura como un fluido. Se fija dentro del código $\Omega_\Lambda = \Omega_{scf} = 0$ con el propósito de que $\Omega_{fld} \neq 0$ sea el responsable de contabilizar dicha contribución, siendo un parámetro derivado de:

$$1 = \underbrace{\Omega_r}_{\text{Radiación}} + \underbrace{\Omega_b}_{\text{Bariones}} + \underbrace{\Omega_{DM}}_{\text{DM del fluido oscuro}} + \underbrace{\Omega_K}_0 + \underbrace{\Omega_{fld}}_{\text{DE del fluido oscuro}}. \quad (\text{B5})$$

Por practicidad, se modifica en el código la parte correspondiente a la parametrización CPL (Chevallier-Polarski-Linder) [94] y [95], la cual requiere introducir las ecuaciones correspondientes para:

$$\omega_{fld}, \quad \frac{d\omega_{fld}}{da}, \quad \text{y} \quad \int_a^{a_0} da \frac{3(1 + \omega_{fld})}{a}. \quad (\text{B6})$$

En este punto resulta de gran importancia evidenciar la reducción del *MLG* al *ML*; en principio, se presenta el cálculo de las tres cantidades de interés (B6). Partiendo del parámetro de la ecuación de estado perteneciente a la contribución de *DE* del fluido oscuro (B4) del *ML*, se tienen los siguientes resultados:

$$\boxed{\omega_{DE} = -1 - \frac{B}{1 + 3B \ln a}}$$

$$\boxed{\frac{d\omega_{DE}}{da} = \frac{3}{a} \left[\frac{B}{1 + 3B \ln a} \right]^2} \quad (\text{B7})$$

$$\int_a^{a_0} da \frac{3(1 + \omega_{DE})}{a} = -3B \int_a^{a_0} \frac{da}{a(1 + 3B \ln a)}$$

$$\boxed{\int_a^{a_0=1} da \frac{3(1 + \omega_{DE})}{a} = \ln[1 + 3B \ln a]} \quad (\text{B8})$$

Ahora, realizando el cálculo para el *MLG* a partir de (2.41), se tiene:

$$\boxed{\omega_{DE} = - \frac{[A_0 B^2 - A_1 B(B + 1 + 3B \ln a) + A_2(B + 1 + 3B \ln a)^2]}{[A_0 B^2 - (A_1 + 2A_2) B(1 + 3B \ln a) + A_2(B + 1 + 3B \ln a)^2]}} \quad (\text{B9})$$

$$\boxed{\frac{d\omega_{DE}}{da} = \frac{3B^2}{a} \left[\frac{18B^2 A_2^2 \ln^2 a + (12BA_2^2 - 6B^2 A_1 A_2) \ln a + (2 - 2B^2) A_2^2}{(9B^2 A_2 \ln^2 a + (6BA_2 - 3B^2 A_1) \ln a + (B^2 + 1) A_2 - BA_1 + B^2 A_0)^2} \right.}$$

$$\left. + \frac{-(2BA_1 + 2B^2 A_0) A_2 + B^2 A_1^2}{(9B^2 A_2 \ln^2 a + (6BA_2 - 3B^2 A_1) \ln a + (B^2 + 1) A_2 - BA_1 + B^2 A_0)^2} \right] \quad (\text{B10})$$

$$\int_a^{a_0} da \frac{3(1 + \omega_{DE})}{a} = \int_a^{a_0} \left[\frac{\frac{3}{a} [A_1 B^2 - 2A_2 B(1 + 3B \ln a)] da}{A_0 B^2 - (A_1 + 2A_2) B(1 + 3B \ln a) + A_2(B + 1 + 3B \ln a)^2} \right]$$

$$\boxed{\int_a^{a_0=1} da \frac{3(1 + \omega_{DE})}{a} = \ln \left[\frac{9A_2 B^2 \ln^2 a + (6A_2 B - 3A_1 B^2) \ln a + (A_0 + A_2) B^2 - A_1 B + A_2}{A_0 B^2 - A_1 B + A_2 (B^2 + 1)} \right]} \quad (\text{B11})$$

Como se mencionó en la [Subsección 2.2.1](#), el *MLG* se debe de reducir al *ML* tomando $A_0 = A_2 = 0$. Bajo esta consideración, las ecuaciones (B9), (B10) y (B11) toman la forma:

$$\omega_{DE}(A_0 = A_2 = 0) = -\frac{A_1 B(B + 1 + 3B \ln a)}{A_1 B(1 + 3B \ln a)} = -1 - \frac{B}{1 + 3B \ln a},$$

$$\left[\frac{d\omega_{DE}}{da} \right] (A_0 = A_2 = 0) = \frac{3B^2}{a} \left[\frac{B^2 A_1^2}{B^2 A_1^2 (3B \ln a + 1)^2} \right] = \frac{3}{a} \left[\frac{B}{1 + 3B \ln a} \right]^2,$$

$$\left[\int_a^{a_0=1} da \frac{3(1 + \omega_{DE})}{a} \right] (A_0 = A_2 = 0) = \ln \left[\frac{3A_1 B^2 \ln a + A_1 B}{A_1 B} \right] = \ln[1 + 3B \ln a],$$

que son equivalentes a (B4), (B7) y (B8) respectivamente. En las expresiones anteriores se resalta que el término de A_1 se anula; es decir, se cumplen para cualquier valor $A_1 \neq 0$. Como se muestra a continuación, este aspecto es relevante debido a que el código se modifica para que comprenda al *MLG* mediante las ecuaciones (B9), (B10) y (B11), y posteriormente se reduce al *ML* con la condición anterior. El proceso de implementación es muy similar al **Caso I**, comenzando por generar una copia de la carpeta `class_public` con el nombre `class_caso_2`, realizando las siguientes modificaciones dentro de ella: En el archivo `input.c` para la función `input_read_parameters_general` se colocan las líneas que designan a los apuntadores de la estructura del background de la variables del *MLG*: B , A_0 , A_1 y A_2 .

```
/** 5.1) Logotropic constants B, A_0, A_1 and A_2*/
class_call(parser_read_double(pfc,"B",&param1,&flag1,errmsg),
           errmsg,
           errmsg);

pba->B = param1;

class_call(parser_read_double(pfc,"A0",&param1,&flag1,errmsg),
           errmsg,
           errmsg);

pba->A0 = param1;

class_call(parser_read_double(pfc,"A1",&param1,&flag1,errmsg),
           errmsg,
           errmsg);

pba->A1 = param1;

class_call(parser_read_double(pfc,"A2",&param1,&flag1,errmsg),
           errmsg,
           errmsg);

pba->A2 = param1;
```

Ahora, en el archivo `background.c` se modifican las relaciones que establecen ω_{fld} , $\frac{d\omega_{fld}}{da}$ y $\int_a^{a_0} da \frac{3(1+\omega_{fld})}{a}$ para el caso CPL, estas se encuentran dentro de la función `background_w_fld` en las líneas 669, 702 y 725 respectivamente.

```
switch (pba->fluid_equation_of_state) {
case CLP:
    *w_fld = pba->w0_fld + pba->wa_fld * (1. - a);
    break;
```

```
switch (pba->fluid_equation_of_state) {
case CLP:
    *dw_over_da_fld = - pba->wa_fld;
    break;
```

```
switch (pba->fluid_equation_of_state) {
case CLP:
    *integral_fld = 3. * (( 1. + pba->w0_fld + pba->wa_fld) * log(1./a)
        + pba->wa_fld * (a - 1.));
    break;
```

Sustituyéndolas por las ecuaciones calculadas para el *MLG*: (B9), (B10) y (B11), que caracterizan a la parte del fluido oscuro que actúa como energía oscura.

```
switch (pba->fluid_equation_of_state) {
case CLP:
    *w_fld = - (pba->A0 * pow(pba->B, 2)
        - pba->A1 * pba->B * (pba->B + 1 + 3 * pba->B * log(a))
        + pba->A2 * pow(pba->B + 1 + 3 * pba->B * log(a), 2)) /
        (pba->A0 * pow(pba->B, 2) - (pba->A1 + 2 * pba->A2)
        * pba->B * (1 + 3 * pba->B * log(a))
        + pba->A2 * pow(pba->B + 1 + 3 * pba->B * log(a), 2));
    break;
```

```
switch (pba->fluid_equation_of_state) {
case CLP:
    *dw_over_da_fld = (( 3 * pow(pba->B, 2)) / a)
        * (( 18 * pow(pba->B, 2) * pow(pba->A2, 2) * pow(log(a), 2)
        + (12 * pba->B * pow(pba->A2, 2)
        - 6 * pow(pba->B, 2) * pba->A1 * pba->A2 * log(a)
        + (2 - 2 * pow(pba->B, 2)) * pow(pba->A2, 2)
        - (2 * pba->B * pba->A1 + 2 * pow(pba->B, 2) * pba->A0)
        * pba->A2 + pow(pba->B, 2) * pow(pba->A1, 2)) /
        (pow(9 * pow(pba->B, 2) * pba->A2 * pow(log(a), 2)
        + (6 * pba->B * pba->A2 - 3 * pow(pba->B, 2) * pba->A1)
        * log(a) + (pow(pba->B, 2) + 1) * pba->A2 - pba->B * pba->A1
        + pow(pba->B, 2) * pba->A0, 2)))));
    break;
```

```

switch (pba->fluid_equation_of_state) {
case CLP:
    *integral_fld = log((9 * pba->A2 * pow(pba->B, 2) * pow(log(a), 2)
        + (6 * pba->A2 * pba->B - 3 * pba->A1 * pow(pba->B, 2)) * log(a)
        + (pba->A0 + pba->A2) * pow(pba->B, 2)
        - pba->A1 * pba->B + pba->A2) /
        (pba->A0 * pow(pba->B, 2) - pba->A1 * pba->B
        + pba->A2 * (pow(pba->B, 2) + 1)));
    break;

```

Dentro del mismo archivo, en la función *background_solve* se coloca la instrucción para que se imprima en la información de salida los valores de B , A_0 , A_1 y A_2 en la línea 1972.

```

/** - send information to standard output */
if (pba->background_verbose > 0) {
    printf(" -> age = %f Gyr\n", pba->age);
    printf(" -> conformal age = %f Mpc\n", pba->conformal_age);
    printf(" -> N_eff = %g (summed over all species that are
        non-relativistic at early times) \n", pba->Neff);
    printf(" -> B = %f \n", pba->B);
    printf(" -> A0 = %f \n", pba->A0);
    printf(" -> A1 = %f \n", pba->A1);
    printf(" -> A2 = %f \n", pba->A2);
}

```

Del mismo modo para el archivo *background.h* perteneciente a la carpeta *include*, se introducen las variables en la función *struct background*.

```

double B; /**< Logotropic constant B*/
double A0; /**< constant A0 */
double A1; /**< constant A1 */
double A2; /**< constant A2 */

```

Para que el usuario pueda elegir diferentes valores de los parámetros B , A_0 , A_1 y A_2 , con los cuales CLASS realizará la solución numérica de las ecuaciones de evolución, estos deben ser agregados en el archivo *explanatory.ini* dentro de la función *General parameters*.

```

#5.1)Logotropic parameters: value of the constants B, A_0, A_1 and A_2
B = 0.02    # The user can change this number
A0 = -1.    # The user can change this number
A1 = 1.     # The user can change this number
A2 = -1.    # The user can change this number

```

El usuario puede modificar esta sección introduciendo los valores que desee para contabilizar la parte de energía oscura. Después de realizar estas modificaciones, el código es capaz de considerar los parámetros del *ML* al resolver las ecuaciones para la teoría de perturbaciones cosmológicas de orden lineal estudiada en el apéndice anterior, las cuales se encuentran escritas en norma síncrona dentro del archivo *perturbations.c*.

Se ilustra un ejemplo de las modificaciones implementadas con los valores anteriores de B , A_0 , A_1 y A_2 en el archivo `explanatory.ini`. Ejecutando en la terminal dentro de la carpeta `class-caso_2` el comando `./class explanatory.ini` se tiene:

```
/class_generalizado$ ./class explanatory.ini
Reading input parameters
-> matched budget equations by adjusting Omega_fld = 0.690026
Running CLASS version v3.0.0
Computing background
-> age = 13.851489 Gyr
-> conformal age = 14198.899965 Mpc
-> N_eff = 3.044 (summed over all species that are non-relativistic at
early times)
-> B = 0.020000
-> A0 = -1.000000
-> A1 = 1.000000
-> A2 = -1.000000
-> radiation/matter equality at z = 3405.751104
corresponding to conformal time = 112.722902 Mpc
Computing thermodynamics using HyRec 2020
-> with primordial helium mass fraction Y_He = 0.2454
-> recombination (maximum of visibility function) at z = 1088.775234
corresponding to conformal time = 280.650005 Mpc
with comoving sound horizon = 144.510134 Mpc
angular diameter distance = 12.771670 Mpc
sound horizon angle 100*theta_s = 1.038278
Thomson optical depth crosses one at z_* = 1085.117966
giving an angle 100*theta_* = 1.040625
-> baryon drag stops at z = 1059.921808
corresponding to conformal time = 286.316117 Mpc
with comoving sound horizon rs = 147.071382 Mpc
-> reionization with optical depth = 0.054435
corresponding to conformal time = 5127.891614 Mpc
Computing sources
Computing primordial spectra (analytic spectrum)
Computing linear Fourier spectra.
-> sigma8=0.832553 for total matter (computed till k = 1.07594 h/Mpc)
No non-linear spectra requested. Nonlinear calculations skipped.
Computing transfers
Computing unlensed harmonic spectra
Computing lensed spectra (fast mode)
No distortions requested. Distortions module skipped.
```

Haciendo notar que el código toma en cuenta los valores elegidos. Para finalizar esta sección, se ejemplifica la reducción al *ML*: colocando los valores de $B = 0.1$, $A_1 = 1$ y $A_0 = A_2 = 0$ en el `explanatori.ini`, se tiene:

```
/class_generalizado$ ./class_explanatory.ini
Reading input parameters
-> matched budget equations by adjusting Omega_Lambda = 0.690026
Running CLASS version v3.0.0
Computing background
-> age = 13.982369 Gyr
-> conformal age = 14275.374877 Mpc
-> N_eff = 3.044 (summed over all species that are non-relativistic at
early times)
-> B = 0.100000
-> A0 = 0.000000
-> A1 = 1.000000
-> A2 = 0.000000
-> radiation/matter equality at z = 3405.751104
corresponding to conformal time = 112.722902 Mpc
Computing thermodynamics using HyRec 2020
-> with primordial helium mass fraction Y_He = 0.2454
-> recombination (maximum of visibility function) at z = 1088.775235
corresponding to conformal time = 280.650005 Mpc
with comoving sound horizon = 144.510134 Mpc
angular diameter distance = 12.841845 Mpc
sound horizon angle 100*theta_s = 1.032604
Thomson optical depth crosses one at z_* = 1085.099140
giving an angle 100*theta_* = 1.034950
-> baryon drag stops at z = 1059.921687
corresponding to conformal time = 286.316141 Mpc
with comoving sound horizon rs = 147.071393 Mpc
-> reionization with optical depth = 0.054644
corresponding to conformal time = 5128.498919 Mpc
Computing sources
Computing primordial spectra (analytic spectrum)
Computing linear Fourier spectra.
-> sigma8=0.837115 for total matter (computed till k = 1.0651 h/Mpc)
No non-linear spectra requested. Nonlinear calculations skipped.
Computing transfers
Computing unlensed harmonic spectra
Computing lensed spectra (fast mode)
No distortions requested. Distortions module skipped.
```

El resultado de salida es igual que el ejemplo mostrado en el **Caso I**, con ello se puede asegurar que la implementación del *ML* en CLASS para los dos casos que se busca explorar es correcta. Debido a lo anterior, se tiene la capacidad de resolver numéricamente las ecuaciones de evolución para la cosmología de fondo y las perturbaciones lineales.

Cada vez que se ejecuta el código se obtiene la solución particular para los valores que el usuario coloca; sin embargo, esto no es suficiente para explorar a fondo al ML , ya que se busca realizar inferencia bayesiana sobre sus parámetros como se describe en el [Capítulo 3](#). El objetivo es tener varias Cadenas de Markov lo suficientemente largas, donde en cada punto del espacio de parámetros perteneciente a ellas se deben de solucionar las ecuaciones de evolución. En virtud de lo anterior, se manifiesta la necesidad de una herramienta computacional que permita realizar este arduo proceso mediante una interacción sencilla con el usuario, la cual se describe a continuación.

B.2. MontePython

Este apartado expone la metodología para la restricción de los parámetros que caracterizan al modelo Λ CDM y al ML mediante el uso del código tipo Cadenas de Markov y Monte Carlo (MCMC): MontePython [96]-[97], que implementa el método bayesiano para la inferencia de parámetros cosmológicos mediante una interfaz práctica con CLASS. Además, contiene la información de los datos observacionales descritos en la [Sección 3.2](#). Si se desea hacer uso de MontePython, se remite a su repositorio de GitHub: https://github.com/brinckmann/montepython_public donde se aclara el proceso de instalación y uso. Para lograr satisfactoriamente este robusto proceso computacional, fue necesario hacer uso del cluster de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Como se menciona en la [Sección 4.1](#), la restricción de los parámetros del modelo Λ CDM y del ML se divide en dos casos como consecuencia de los datos observacionales a considerar, el **Caso I** se centra en las observaciones asociadas con la evolución cosmológica de fondo y el **Caso II** añade las observaciones relacionadas con las perturbaciones cosmológicas; es decir, se tendrá un total de 4 procesos que realizar: Λ CMD_caso_1, ML _caso_1, Λ CMD_caso_2 y ML _caso_2. Para la facilidad del lector, se revisan las peculiaridades de los 4 casos enunciados en tres instancias del proceso de inferencia: la primera, presenta la conexión que se debe de aplicar entre MontePython y CLASS para que se comuniquen entre ellas. En la segunda, se describen los archivos que contienen los Priors de los parámetros y los datos observacionales a considerar para la evaluación de los likelihoods. Por último, se expone el proceso de ejecución de las Cadenas de Markov y su análisis correspondiente.

Comunicación entre los programas

Para enlazar MontePython con CLASS, es necesario tomar como referencia el archivo default.conf.template que se encuentra en la carpeta principal de MontePython y presenta la siguiente información:

```
# default.conf
root = '/Path/to/your/codes'

path['cosmo'] = root+'/class'
path['clik'] = root+'/planck/code/plc_3.0/plc-3.01/'
```

A partir de él se deben de crear copias y modificarlas conforme a las necesidades de los diferentes casos que se tiene. La línea root designa la dirección del directorio en donde se localizan el código original de CLASS y las dos versiones modificadas presentadas

en la sección anterior, dentro del cluster se encontraban en la dirección `/home/hugo/`. La función principal `path['cosmo']` siempre debe de incluirse e indica cuál versión en específico de CLASS se quiere vincular. Por último, la línea `path['clik']` se emplea para la exploración del **Caso II** ya que es necesaria si se desea hacer uso de los datos del satélite Planck que se analizan mediante el Código de Likelihood de Planck basado en la librería `clik`. El código y los datos de Planck 2018 deben de ser instalados previamente como se detalla en el GitHub de MontePython.

Para `ΛCDM_caso_1` se crea la copia `LCDM_caso_1.conf` que debe indicar la dirección del código original de CLASS: `class_public`.

```
# LCDM_caso_1.conf
root = '/home/hugo/'

path['cosmo'] = root + 'class_public'
```

Por otro lado, para `ML_caso_1` se realiza la copia `ML_caso_1.conf` que especifica la ruta al código `class_caso_1` modificado previamente para el `ML`.

```
# ML_caso_1.conf
root = '/home/hugo/'

path['cosmo'] = root + 'class_caso_1'
```

Para `ΛCDM_caso_2` se tiene la copia `LCDM_caso_2.conf` que dirige a `class_public`, además de especificar la dirección de la librería `clik` para el uso del Código de Likelihood de Planck.

```
# LCDM_caso_2.conf
root = '/home/hugo/'

path['cosmo'] = root + 'class_public'
path['clik'] = root + 'planck/code/plc_3.0/plc-3.01/'
```

Similarmente para `ML_caso_2` se crea la copia `ML_caso_2.conf`, pero en la función principal se coloca la dirección del directorio `class_caso_2` en donde se ha implementado al `MLG`.

```
# ML_caso_2.conf
root = '/home/hugo/'

path['cosmo'] = root + 'class_caso_2'
path['clik'] = root + 'planck/code/plc_3.0/plc-3.01/'
```

Priors y datos observacionales

Se requiere de un archivo de partida con terminación `.param` para cada caso, en el cual se indica el conjunto de datos observacionales a usar y además contiene la información sobre el grado de conocimiento previo que se tiene de los parámetros cosmológicos a inferir. Dentro de la carpeta `input`, para los modelos en el **Caso I** se toma como referencia el archivo `example.param` a partir del cual se realizan las siguientes modificaciones:

Para Λ CDM_caso_1 se crea una copia a la que se le llama LCDM_caso_1.param que contiene la siguiente información:

```
# LCDM_caso_1.param
#-----Experiments to test (separated with commas)-----
data.experiments = ['bao_boss_dr12', 'bao_smallz_2014',
                    'WiggleZ', 'WiggleZ_bao', 'sdss_lrgDR4', 'sdss_lrgDR7',
                    'eBOSS_DR14_Lya_combined', 'Pantheon', 'cosmic_clocks_2016',
                    'timedelay_6lenses', 'compressed']

#----- Parameter list -----
# data.parameters[class name] = [mean, min, max, 1-sigma, scale, role]

# Cosmological parameters list
data.parameters['H0'] = [ 70.3, 60., 75., 0.05, 1, 'cosmo']
data.parameters['Omega_b'] = [ 4.86, 3., 7., 0.001, 0.01, 'cosmo']
data.parameters['Omega_cdm'] = [0.2562, None, None, 0.008, 1, 'cosmo']

# Nuisance parameter list
data.parameters['M'] = [ -19.02, None, None, 0.004, 1, 'nuisance']

# Derived parameter list
data.parameters['Omega_Lambda'] = [ 0, -1, -1, 0, 1, 'derived']

#----- Mcmc parameters ----
data.N=10
data.write_step=5
```

Es relevante estudiar la estructura de este archivo para el comprendimiento de los casos posteriores. Al inicio dentro del array `data.experiments[ ]` se introducen los nombres de los datos observacionales que se tomarán en cuenta. Posteriormente se presenta una lista de los parámetros cosmológicos sobre los que se hará inferencia, definiendo para cada uno de ellos un array `data.parameters[ ]` que tiene por argumento el nombre con el que se le designa a cada variable en el código CLASS. Los valores dentro de los arrays corresponden a la información previa (conocimiento o grado de creencia a priori) que se tiene sobre los parámetros; asignándoles distribuciones gaussianas, se tiene que:

- Las primeras tres entradas corresponden al valor promedio, al mínimo y al máximo respectivamente, cuando no se tiene información previa o resulta irrelevante se coloca la palabra `None`.
- La cuarta establece la desviación estándar (1σ), se pone el valor de 0 en caso de requerir que un parámetro no cambie su valor promedio dado durante todo el proceso de la obtención de las Cadenas de Markov.
- La quinta columna es la escala de magnitud.
- La última entrada da información sobre el tipo de rol que ejerce el parámetro, donde los parámetros cosmológicos de interés se designan por la palabra ‘cosmo’, siendo estos H_0 , Ω_b y Ω_{CDM} . Por el contrario, aquellos que no tienen relevancia pero son necesarios para el cálculo de los likelihoods son llamados ‘nuisance’ y sólo son usados por MontePython pero su información no se pasa a CLASS. El parámetro de la magnitud absoluta M se requiere para el likelihood de Pantheon. Por último, los que se nombran con el término ‘derived’

son los que pueden ser calculados a partir de los otros parámetros cosmológicos, como es el caso de Ω_Λ y todas las entradas anteriores del array para este tipo de parámetro son irrelevantes.

Finalmente, se definen los parámetros MCMC, proporcionando el número de pasos de la cadena y el número de pasos aceptados antes de escribir la información; sin embargo, estos pueden ser modificados al momento de ejecutar el comando para correr MontePython, como se explicará más adelante.

Para el *ML_caso_1* se tendrá un archivo de partida muy similar que se nombra *ML_caso_1.param*, en donde la única diferencia con respecto al anterior es que se añade el parámetro cosmológico B que caracteriza al *ML*. Analíticamente, se espera que su valor sea positivo y cercano a cero; sin embargo se busca que este resultado también se obtenga después de realizar la inferencia sin proveer esta información inicialmente. En virtud de lo anterior, el prior gaussiano para B se centra en cero tomando el rango de $B \in [-1, 1]$ como mínimo y máximo elegido a partir del análisis numérico que se presenta en [Figura 2.3](#), [Figura 2.4](#) y [Figura 2.5](#). La desviación estándar se establece con el valor de $1\sigma = 0.05$. Recordando que este caso se vincula con *class_caso_1* en donde por practicidad se ha implementado al *ML* modificando la sección correspondiente a la constante cosmológica. Se debe de enfatizar que los nombres por defecto de ‘Omega.Lambda’ y ‘Omega.cdm’ no deben de causar confusión, ya que estos corresponden a las contribuciones de Ω_{DE} y Ω_{DM} del fluido oscuro respectivamente.

```
# ML_caso_1.param
#-----Experiments to test (separated with commas)-----
data.experiments = ['bao_boss_dr12', 'bao_smallz_2014',
                    'WiggleZ', 'WiggleZ_bao', 'sdss_lrgDR4', 'sdss_lrgDR7',
                    'eBOSS_DR14_Lya_combined', 'Pantheon', 'cosmic_clocks_2016',
                    'timedelay_6lenses', 'compressed']

#----- Parameter list -----
# data.parameters[class name] = [mean, min, max, 1-sigma, scale, role]

# Cosmological parameters list
data.parameters['B'] = [ 0., -1.0, 1.0, 0.05, 1, 'cosmo']
data.parameters['H0'] = [ 70.3, 60., 75., 0.05, 1, 'cosmo']
data.parameters['Omega_b'] = [ 4.86, 3., 7., 0.001, 0.01, 'cosmo']
data.parameters['Omega_cdm'] = [0.2562, None, None, 0.008, 1, 'cosmo']
# Equal to the Omega_DM contribution

# Nuisance parameter list
data.parameters['M'] = [ -19.02, None, None, 0.004, 1, 'nuisance']

# Derived parameter list
data.parameters['Omega_Lambda'] = [ 0, -1, -1, 0, 1, 'derived']
# Equal to the Omega_DE contribution

#----- Mcmc parameters -----
data.N=10
data.write_step=5
```

Ahora, para los dos modelos dentro del **Caso II** se tendrá un archivo mucho más robusto debido al uso del conjunto de datos del 2018 del satélite Planck que conlleva la inclusión de muchos parámetros del tipo ‘nuisance’ que proporcionan la información referente a la contaminación, correlación y calibración de las observaciones. Los argumentos para `data.experiments[ ]` serán los mismos usados en el **Caso I** omitiendo Planck ‘compressed’ y añadiendo los siguientes datos de Planck 2018: ‘Planck_highl_TTTEEE’ (correlación en las anisotropías de temperatura y polarización para multipolos altos $30 < l < 2509$); ‘Planck_lowl_EE’; y ‘Planck_lowl_TT’ (correlación en las anisotropías de polarización y temperatura respectivamente para multipolos bajos $l < 30$).

Dentro de la carpeta `input`, a partir del archivo referencia `base2018TTTEEE.param` se implementan las siguientes modificaciones:

Para `ΛCDM_caso_2` se crea una copia que se nombra `LCDM_caso_2.param` compuesta por la siguiente información:

```
# LCDM_caso_2.param
#-----Experiments to test (separated with commas)-----
data.experiments = [ 'Planck_highl_TTTEEE', 'Planck_lowl_EE',
                    'Planck_lowl_TT', 'bao_boss_dr12', 'bao_smallz_2014',
                    'WiggleZ', 'WiggleZ_bao', 'sdss_lrgDR4', 'sdss_lrgDR7',
                    'eBOSS_DR14_Lya_combined', 'Pantheon',
                    'cosmic_clocks_2016', 'timedelay_6lenses']

#----- Settings for the over-sampling.
data.over_sampling=[1, 5, 2]
#----- Parameter list -----
# data.parameters[class name] = [mean, min, max, 1-sigma, scale, role]

# Cosmological parameters list
data.parameters['100*theta_s'] = [1.04110, None, None, 0.00030, 1, 'cosmo']
data.parameters['ln10^{10}A_s'] = [ 3.0447, None, None, 0.015, 1, 'cosmo']
data.parameters['n_s'] = [ 0.9659, None, None, 0.0042, 1, 'cosmo']
data.parameters['tau_reio'] = [ 0.0543, 0.004, None, 0.008, 1, 'cosmo']
data.parameters['Omega_b'] = [ 4.86, 3., 7., 0.001, 0.01, 'cosmo']
data.parameters['Omega_cdm'] = [ 0.2562, None, None, 0.008, 1, 'cosmo']

# Nuisance parameter list
data.parameters['A_cib_217'] = [ 47.2, 0, 200, 6.2593, 1, 'nuisance']
data.parameters['cib_index'] = [ -1.3, -1.3, -1.3, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['xi_sz_cib'] = [ 0.42, 0, 1, 0.33, 1, 'nuisance']
data.parameters['A_sz'] = [ 7.23, 0, 10, 1.4689, 1, 'nuisance']
data.parameters['ps_A_100_100'] = [ 251.0, 0, 400, 29.438, 1, 'nuisance']
data.parameters['ps_A_143_143'] = [ 47.4, 0, 400, 9.9484, 1, 'nuisance']
data.parameters['ps_A_143_217'] = [ 47.3, 0, 400, 11.356, 1, 'nuisance']
data.parameters['ps_A_217_217'] = [ 119.8, 0, 400, 10.256, 1, 'nuisance']
data.parameters['ksz_norm'] = [ 0.01, 0, 10, 2.7468, 1, 'nuisance']
data.parameters['gal545_A_100'] = [ 8.86, 0, 50, 1.8928, 1, 'nuisance']
data.parameters['gal545_A_143'] = [ 11.10, 0, 50, 1.8663, 1, 'nuisance']
data.parameters['gal545_A_143_217'] = [ 19.8, 0, 100, 3.8796, 1, 'nuisance']
```

```

data.parameters['gal545_A_217'] = [ 95.1,0,400, 6.9759,1, 'nuisance']
data.parameters['galf_EE_A_100'] = [0.055,0.055,0.055,0,1, 'nuisance']
data.parameters['galf_EE_A_100_143'] = [0.040,0.040,0.040,0,1, 'nuisance']
data.parameters['galf_EE_A_100_217'] = [0.094,0.094,0.094,0,1, 'nuisance']
data.parameters['galf_EE_A_143'] = [0.086,0.086,0.086,0,1, 'nuisance']
data.parameters['galf_EE_A_143_217'] = [ 0.21, 0.21, 0.21,0,1, 'nuisance']
data.parameters['galf_EE_A_217'] = [ 0.70, 0.70, 0.70,0,1, 'nuisance']
data.parameters['galf_EE_index'] = [ -2.4, -2.4, -2.4,0,1, 'nuisance']
data.parameters['galf_TE_A_100'] = [0.114,0,10,0.038762,1, 'nuisance']
data.parameters['galf_TE_A_100_143'] = [0.134,0,10,0.030096,1, 'nuisance']
data.parameters['galf_TE_A_100_217'] = [0.482,0,10,0.086185,1, 'nuisance']
data.parameters['galf_TE_A_143'] = [0.224,0,10,0.055126,1, 'nuisance']
data.parameters['galf_TE_A_143_217'] = [0.664,0,10,0.082349,1, 'nuisance']
data.parameters['galf_TE_A_217'] = [ 2.08,0,10, 0.27175,1, 'nuisance']
data.parameters['galf_TE_index'] = [-2.4, -2.4, -2.4, 0,1, 'nuisance']
data.parameters['calib_100T'] = [999.69,0,3000,0.61251,0.001, 'nuisance']
data.parameters['calib_217T'] = [998.16,0,3000,0.63584,0.001, 'nuisance']
data.parameters['calib_100P'] = [ 1.021, 1.021, 1.021, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['calib_143P'] = [ 0.966, 0.966, 0.966, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['calib_217P'] = [ 1.040, 1.040, 1.040, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['A_cnoise_e2e_100_100_EE'] = [ 1, 1, 1, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['A_cnoise_e2e_143_143_EE'] = [ 1, 1, 1, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['A_cnoise_e2e_217_217_EE'] = [ 1, 1, 1, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['A_sbp_x_100_100_TT'] = [ 1, 1, 1, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['A_sbp_x_143_143_TT'] = [ 1, 1, 1, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['A_sbp_x_143_217_TT'] = [ 1, 1, 1, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['A_sbp_x_217_217_TT'] = [ 1, 1, 1, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['A_sbp_x_100_100_EE'] = [ 1, 1, 1, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['A_sbp_x_100_143_EE'] = [ 1, 1, 1, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['A_sbp_x_100_217_EE'] = [ 1, 1, 1, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['A_sbp_x_143_143_EE'] = [ 1, 1, 1, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['A_sbp_x_143_217_EE'] = [ 1, 1, 1, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['A_sbp_x_217_217_EE'] = [ 1, 1, 1, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['A_planck'] = [1.00061, 0.9, 1.1, 0.0025,1, 'nuisance']
data.parameters['A_pol'] = [ 1, 1, 1, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['M'] = [ -19.02, None, None, 0.004,1, 'nuisance']

# Derived parameters
data.parameters['z_reio'] = [ 1, None, None, 0, 1, 'derived']
data.parameters['YHe'] = [ 1, None, None, 0, 1, 'derived']
data.parameters['H0'] = [ 0, None, None, 0, 1, 'derived']
data.parameters['A_s'] = [ 0, None, None, 0, 1e-9, 'derived']
data.parameters['sigma8'] = [ 0, None, None, 0, 1, 'derived']
data.parameters['Omega_Lambda'] = [ 1, None, None, 0, 1, 'derived']

#Other cosmo parameters (fixed parameters, precision parameters, etc.)
data.cosmo_arguments['sBBN file'] = data.path['cosmo']

```

```

+ '/external/bbn/sBBN.dat'
data.cosmo_arguments['k_pivot'] = 0.05

# The base model features two massless
# and one massive neutrino with m=0.06eV.
# The settings below ensures that Neff=3.046
# and m/omega = 93.14 eV
data.cosmo_arguments['N_ur'] = 2.0328
data.cosmo_arguments['N_ncdm'] = 1
data.cosmo_arguments['m_ncdm'] = 0.06
data.cosmo_arguments['T_ncdm'] = 0.71611

# These two are required to get sigma8 as a derived parameter
# (class must compute the P(k) until sufficient k)
data.cosmo_arguments['output'] = 'mPk'
data.cosmo_arguments['P_k_max_h/Mpc'] = 1.

#----- Mcmc parameters -----
data.N=10
data.write_step=5

```

Donde se han agregado en comparación a Λ CDM_caso_1 los parámetros cosmológicos referentes a: el tamaño angular del horizonte acústico en la última dispersión θ_s ; la amplitud de las perturbaciones de curvatura primordiales A_s ; el índice espectral escalar n_s ; la profundidad óptica de la dispersión de Thomson debida a la reionización τ_{re} ; el corrimiento al rojo para la etapa de reionización z_{re} ; la abundancia de Helio en la etapa de nucleosíntesis Y_{He} ; y la fluctuación de la materia en una escala de $8h^{-1}$ Mpc que se designa por el nombre de σ_8 . Por otra parte, los parámetros cosmológicos definidos en `data.cosmo_arguments[ ]`, se utilizan como parámetros fijos que se pasan directamente a CLASS y son tomados por el archivo `explanatori.ini`.

Se genera un archivo muy similar para el *ML_caso_2* nombrado `ML_caso_2.param`. Debido a que este caso está ligado a `class_caso_2` en donde se implementó al *MLG*, se tendrán que especificar diferentes parámetros a los del *ML_caso_1*. En principio para reducir el *MLG* al *ML* se debe aplicar la restricción $A_0 = A_2 = 0$, esto se traduce al lenguaje de MontePython tomando la entrada del valor promedio y de la desviación estándar igual a cero para estos dos parámetros cosmológicos, de esta forma los valores $A_0 = A_2 = 0$ estarán fijos. Aunado a ello, como consecuencia del estudio realizado en el Apéndice A, el parámetro A_1 debe ser diferente a cero y este siempre se anula en las ecuaciones resultantes, es por ello que se fija su valor promedio en $A_1 = 1$.

Tomando en cuenta que el tiempo computacional para el cálculo de las perturbaciones lineales incrementa considerablemente y por los resultados obtenidos en la exploración del *ML_caso_1*, se reduce el rango para $B \in [-0.1, 0.1]$. Para este caso, los nombres por defecto de los parámetros cosmológicos ‘`Omega_fld`’ y ‘`Omega_cdm`’ corresponden a las contribuciones de Ω_{DE} y Ω_{DM} del fluido oscuro respectivamente. Por último, en consecuencia de la implementación del *MLG* como un fluido modificando la parametrización CPL en `class_caso_2`, es necesario establecer mediante `data.cosmo_arguments[ ]` los siguientes parámetros para la ejecución correcta de CLASS: ‘`Omega_Lambda`’ = ‘`Omega_scf`’ = 0, además de ‘`use_ppf`’ = ‘no’ y ‘`fluid_equation_of_state`’ = ‘CLP’.

```

# ML_caso_2.param
#-----Experiments to test (separated with commas)-----
data.experiments = [ 'Planck_highl_TTTEEE', 'Planck_lowl_EE',
                    'Planck_lowl_TT', 'bao_boss_dr12', 'bao_smallz_2014',
                    'WiggleZ', 'WiggleZ_bao', 'sdss_lrgDR4', 'sdss_lrgDR7',
                    'eBOSS_DR14_Lya_combined', 'Pantheon',
                    'cosmic_clocks_2016', 'timedelay_6lenses']

#----- Settings for the over-sampling.
data.over_sampling=[1, 5, 2]
#----- Parameter list -----
# data.parameters[class name] = [mean, min, max, 1-sigma, scale, role]

# Cosmological parameters list
data.parameters['100*theta_s'] = [1.04110, None, None, 0.00030, 1, 'cosmo']
data.parameters['ln10^{10}A_s'] = [ 3.0447, None, None, 0.015, 1, 'cosmo']
data.parameters['n_s'] = [ 0.9659, None, None, 0.0042, 1, 'cosmo']
data.parameters['tau_reio'] = [ 0.0543, 0.004, None, 0.008, 1, 'cosmo']
data.parameters['B'] = [ 0., -0.1, 0.1, 0.001, 1, 'cosmo']
data.parameters['A0'] = [ 0., None, 0, 0, 1, 'cosmo']
data.parameters['A1'] = [ 1., None, None, 0, 1, 'cosmo']
data.parameters['A2'] = [ 0., None, 0, 0, 1, 'cosmo']
data.parameters['Omega_b'] = [ 4.86, 3., 7., 0.001, 0.01, 'cosmo']
data.parameters['Omega_cdm'] = [ 0.2562, None, None, 0.008, 1, 'cosmo']
# Equal to the Omega_DM contribution

# Nuisance parameter list
data.parameters['A_cib_217'] = [ 47.2, 0, 200, 6.2593, 1, 'nuisance']
data.parameters['cib_index'] = [ -1.3, -1.3, -1.3, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['xi_sz_cib'] = [ 0.42, 0, 1, 0.33, 1, 'nuisance']
data.parameters['A_sz'] = [ 7.23, 0, 10, 1.4689, 1, 'nuisance']
data.parameters['ps_A_100_100'] = [ 251.0, 0, 400, 29.438, 1, 'nuisance']
data.parameters['ps_A_143_143'] = [ 47.4, 0, 400, 9.9484, 1, 'nuisance']
data.parameters['ps_A_143_217'] = [ 47.3, 0, 400, 11.356, 1, 'nuisance']
data.parameters['ps_A_217_217'] = [ 119.8, 0, 400, 10.256, 1, 'nuisance']
data.parameters['ksz_norm'] = [ 0.01, 0, 10, 2.7468, 1, 'nuisance']
data.parameters['gal545_A_100'] = [ 8.86, 0, 50, 1.8928, 1, 'nuisance']
data.parameters['gal545_A_143'] = [ 11.10, 0, 50, 1.8663, 1, 'nuisance']
data.parameters['gal545_A_143_217'] = [ 19.8, 0, 100, 3.8796, 1, 'nuisance']
data.parameters['gal545_A_217'] = [ 95.1, 0, 400, 6.9759, 1, 'nuisance']
data.parameters['galf_EE_A_100'] = [ 0.055, 0.055, 0.055, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['galf_EE_A_100_143'] = [ 0.040, 0.040, 0.040, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['galf_EE_A_100_217'] = [ 0.094, 0.094, 0.094, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['galf_EE_A_143'] = [ 0.086, 0.086, 0.086, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['galf_EE_A_143_217'] = [ 0.21, 0.21, 0.21, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['galf_EE_A_217'] = [ 0.70, 0.70, 0.70, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['galf_EE_index'] = [ -2.4, -2.4, -2.4, 0, 1, 'nuisance']

```



```

data.parameters['galf_TE_A_100'] = [0.114,0,10,0.038762,1,'nuisance']
data.parameters['galf_TE_A_100_143'] = [0.134,0,10,0.030096,1,'nuisance']
data.parameters['galf_TE_A_100_217'] = [0.482,0,10,0.086185,1,'nuisance']
data.parameters['galf_TE_A_143'] = [0.224,0,10,0.055126,1,'nuisance']
data.parameters['galf_TE_A_143_217'] = [0.664,0,10,0.082349,1,'nuisance']
data.parameters['galf_TE_A_217'] = [2.08,0,10,0.27175,1,'nuisance']
data.parameters['galf_TE_index'] = [-2.4, -2.4, -2.4, 0,1,'nuisance']
data.parameters['calib_100T'] = [999.69,0,3000,0.61251,0.001,'nuisance']
data.parameters['calib_217T'] = [998.16,0,3000,0.63584,0.001,'nuisance']
data.parameters['calib_100P'] = [1.021, 1.021, 1.021, 0, 1,'nuisance']
data.parameters['calib_143P'] = [0.966, 0.966, 0.966, 0, 1,'nuisance']
data.parameters['calib_217P'] = [1.040, 1.040, 1.040, 0, 1,'nuisance']
data.parameters['A_cnoise_e2e_100_100_EE'] = [1, 1, 1, 0, 1,'nuisance']
data.parameters['A_cnoise_e2e_143_143_EE'] = [1, 1, 1, 0, 1,'nuisance']
data.parameters['A_cnoise_e2e_217_217_EE'] = [1, 1, 1, 0, 1,'nuisance']
data.parameters['A_sbpx_100_100_TT'] = [1, 1, 1, 0, 1,'nuisance']
data.parameters['A_sbpx_143_143_TT'] = [1, 1, 1, 0, 1,'nuisance']
data.parameters['A_sbpx_143_217_TT'] = [1, 1, 1, 0, 1,'nuisance']
data.parameters['A_sbpx_217_217_TT'] = [1, 1, 1, 0, 1,'nuisance']
data.parameters['A_sbpx_100_100_EE'] = [1, 1, 1, 0, 1,'nuisance']
data.parameters['A_sbpx_100_143_EE'] = [1, 1, 1, 0, 1,'nuisance']
data.parameters['A_sbpx_100_217_EE'] = [1, 1, 1, 0, 1,'nuisance']
data.parameters['A_sbpx_143_143_EE'] = [1, 1, 1, 0, 1,'nuisance']
data.parameters['A_sbpx_143_217_EE'] = [1, 1, 1, 0, 1,'nuisance']
data.parameters['A_sbpx_217_217_EE'] = [1, 1, 1, 0, 1,'nuisance']
data.parameters['A_planck'] = [1.00061, 0.9, 1.1, 0.0025,1,'nuisance']
data.parameters['A_pol'] = [1, 1, 1, 0, 1,'nuisance']
data.parameters['M'] = [-19.02, None, None, 0.004,1,'nuisance']

# Derived parameters
data.parameters['z_reio'] = [1, None, None, 0, 1,'derived']
data.parameters['YHe'] = [1, None, None, 0, 1,'derived']
data.parameters['H0'] = [0, None, None, 0, 1,'derived']
data.parameters['A_s'] = [0, None, None, 0, 1e-9,'derived']
data.parameters['sigma8'] = [0, None, None, 0, 1,'derived']
data.parameters['Omega_fld'] = [1, None, None, 0, 1,'derived']
# Equal to the Omega_DE contribution

#Other cosmo parameters (fixed parameters, precision parameters, etc.)
data.cosmo_arguments['sBBN file'] = data.path['cosmo']
                                + '/external/bbn/sBBN.dat'
data.cosmo_arguments['k_pivot'] = 0.05
data.cosmo_arguments['Omega_scf'] = 0
data.cosmo_arguments['Omega_Lambda'] = 0
data.cosmo_arguments['use_ppf'] = 'no'
data.cosmo_arguments['fluid_equation_of_state'] = 'CLP'
data.cosmo_arguments['cs2_fld'] = 1

```

```

# The base model features two massless
# and one massive neutrino with  $m=0.06\text{eV}$ .
# The settings below ensures that  $N_{\text{eff}}=3.046$ 
# and  $m/\omega = 93.14\text{ eV}$ 
data.cosmo_arguments['N_ur']    = 2.0328
data.cosmo_arguments['N_ncdm']  = 1
data.cosmo_arguments['m_ncdm']  = 0.06
data.cosmo_arguments['T_ncdm']  = 0.71611

# These two are required to get sigma8 as a derived parameter
# (class must compute the  $P(k)$  until sufficient  $k$ )
data.cosmo_arguments['output']  = 'mPk'
data.cosmo_arguments['P_k_max_h/Mpc'] = 1.

#----- Mcmc parameters -----
data.N=10
data.write_step=5

```

Ejecución y análisis

MontePython se conforma por dos módulos principales: *run* e *info*, el primero se encarga de producir las Cadenas de Markov para la exploración del espacio de parámetros, hace uso por defecto del algoritmo Metropolis Hastings. El segundo realiza el análisis estadístico para las cadenas generadas y calcula el criterio de convergencia de Gelman-Rubin (GR) para cada parámetro. En el [Capítulo 3](#) se presentó a detalle la teoría relacionada con estos aspectos. Una vez aclarada la estructura del código, se muestra el proceso de ejecución de las cadenas y su respectivo análisis para los 4 casos.

LCDM_caso_1: en la terminal del sistema moviéndose al directorio montepython. se ejecuta una cadena de prueba con el siguiente comando

```

/montepython$ montepython/MontePython.py run --conf LCDM_caso_1.conf -p
input/LCDM_caso_1.param -o LCDM_caso_1/prueba/ -N 1000 --superupdate 20

```

En primer lugar, se llama al módulo principal MontePython.py. A continuación, utilizando la bandera `-conf` se proporciona la dirección del fichero `LCDM_caso_1.conf` que le indica a MontePython la versión de CLASS a usar. Posteriormente, la bandera `-p` guía al archivo `LCDM_caso_1.param` que contiene los parámetros cosmológicos sobre los que se realizará inferencia. Después, se indica la carpeta donde se guardará la información de salida con apoyo de la bandera `-o`. Finalmente, se establece el número de pasos deseados para la cadena, para esta prueba se eligen 1000 pasos. La bandera `-superupdate 20` se emplea para acelerar la convergencia de las ejecuciones, se encarga de actualizar la matriz de covarianza y el factor de salto para los nuevos puntos generados de la cadena.

Una vez terminado el proceso, dentro de la carpeta de salida `LCDM_caso_1/prueba/` se tienen tres archivos relevantes que tienen por nombre:

- Año-Mes-Día_Pasos_.paramnames.
- Año-Mes-Día_Pasos_.Cadena.txt.
- log.param.

El primero presenta una lista de los nombres de los parámetros usados. El segundo es el archivo de texto que contiene la información de la cadena generada, donde cada fila representa un nuevo paso dado, la primer columna es la multiplicidad del paso, la segunda es el negativo del logaritmo del likelihood $-\log(\mathcal{L})$, que siempre va en aumento debido a que se está maximizando, el resto de columnas son los valores que se tomaron de los parámetros para evaluar el Posterior en ese punto, y están ordenadas conforme a la lista del primer archivo. El tercero es una copia de LCDM_caso_1.param y añade la información del directorio en donde se encuentran los datos a usar que han sido especificados en data.experiments[].

Como se estudió en el [Capítulo 3](#), para asegurar que los parámetros converjan, se requiere de varias cadenas con una longitud mucho mayor que la de prueba. Debido a lo anterior, se ejecuta un nuevo proceso que genera múltiples cadenas en paralelo y se requiere del archivo log.param de la cadena de prueba. Para este caso se producen 8 cadenas de 100,000 pasos cada una, mediante el siguiente comando:

```
/montepython$ mpirun -np 8 montepython/MontePython.py run --conf LCDM_c
aso_1.conf -p LCDM_caso_1/prueba/log.param -o LCDM_caso_1/cadenas_1/ -N
100000 --superupdate 20
```

Al inicio se señala el número de cadenas que se quiere correr en paralelo y posteriormente se especifican las banderas explicadas en la corrida de prueba con las modificaciones pertinentes. La información de salida se aloja en la carpeta LCDM_caso_1/cadenas_1/, la cual contiene 8 archivos con la estructura Año-Mes-Día_Pasos_Cadena.txt que son las 8 cadenas generadas. Además, se tiene un fichero con el nombre cadenas_1.log que proporciona información sobre: el número de pasos dados, los pasos aceptados, la tasa de aceptación y el valor mínimo del logaritmo del likelihood $\min[-\log(\mathcal{L})]$ de cada cadena. Cuando el proceso ha finalizado, se realiza el análisis estadístico de la carpeta de salida usando el módulo *info* con el siguiente comando:

```
/montepython$ montepython/MontePython.py info LCDM_caso_1/cadenas_1/
--want-covmat
```

La última bandera `--want-covmat` se utiliza para generar la matriz de coarianza. Después de ejecutar el comando anterior, se tiene la siguiente información de salida:

```
/montepython$ montepython/MontePython.py info LCDM_caso_1/cadenas_1/
--want-covmat
Running Monte Python v3.4.0

--> Scanning file LCDM_caso_1/cadenas_1/
      # se enlistan las cadenas con los pasos aceptados para cada una
--> Computing variance
--> Computing convergence criterium (Gelman-Rubin)
-> R-1 is 0.000406      for H0
          0.000714      for Omega_b
          0.000440      for Omega_cdm
          0.000331      for M
          0.000469      for Omega_Lambda
--> Computing covariance matrix
```



```
-----
# se crean los histogramas para cada parámetro
-----

--> Saving figures to .pdf files
--> Writing .info and .tex files
```

Se puede observar que: primero se muestra la versión de MontePython. Posteriormente, el código lee los archivos de la carpeta LCDM_caso_1/cadenas_1/. Enseguida obtiene la varianza para las 8 cadenas. Continúa con el cálculo de los criterios de convergencia de GR, como se mencionó en el Capítulo 3 se busca que $R - 1 < 0.01$ para cada parámetro. Después obtiene la matriz de covarianza y se guarda en el archivo cadenas_1.covmat. Por último, genera los histogramas de cada parámetro usados para crear las gráficas de las distribuciones de probabilidad posterior unidimensionales y bidimensionales como las mostradas en el Capítulo 4 y guarda dentro de la misma carpeta ficheros que contienen información sobre los mejores ajustes en cadenas_1.bestfit y de los parámetros estadísticos descriptivos en cadenas_1.info.

A partir de los mejores ajustes y de la matriz de covarianza obtenida, se generan otras 8 cadenas de 50,000 pasos cada una para mejorar la convergencia y el ajuste de la distribución Posterior, ejecutando el siguiente comando:

```
/montepython$ mpirun -np 8 montepython/MontePython.py run --conf LCDM_c
aso_1.conf -p LCDM_caso_1/cadenas_1/log.param -o LCDM_caso_1/cadenas_2/
-c LCDM_caso_1/cadenas_1/cadenas_1.covmat -b LCDM_caso_1/cadenas_1/ca
denas_1.bestfit -N 50000 --superupdate 20
```

Las banderas -c y -b se emplean para decirle a MontePython en donde se encuentran los ficheros que contienen a la matriz de covarianza y los mejores ajustes respectivamente del proceso anterior. Para finalizar la exploración de este caso, se analiza la carpeta LCDM_caso_1/cadenas_2/ obteniendo la siguiente información de salida:

```
/montepython$ montepython/MontePython.py info LCDM_caso_1/cadenas_2/
--want-covmat
Running Monte Python v3.4.0

--> Scanning file LCDM_caso_1/cadenas_2/
# se enlistan las cadenas con los pasos aceptados para cada una
--> Computing variance
--> Computing convergence criterium (Gelman-Rubin)
-> R-1 is 0.000099 for H0
          0.000051 for Omega_b
          0.000113 for Omega_cdm
          0.000028 for M
          0.000103 for Omega_Lambda
--> Computing covariance matrix
-----
# se crean los histogramas para cada parámetro
-----

--> Saving figures to .pdf files
--> Writing .info and .tex files
```

Se observa que la convergencia ha mejorado al revisar los valores para $R - 1$ ya que estos se redujeron para todos los parámetros en comparación con el primer proceso. La metodología para los casos restantes descritos a continuación es muy similar, es por ello que se omitirá la explicación detallada de los comandos y sólo se abordará cuando sea necesario.

ML_caso_1: se realiza una cadena de prueba proporcionando la dirección para el fichero que le indica a MontePython la versión correspondiente de CLASS que se ha modificado para el *ML*, este se encuentra en `ML_caso_1.conf`; también se señala el archivo `input/ML_caso_1.param` que contiene los parámetros cosmológicos a inferir.

```
/montepython$ montepython/MontePython.py run --conf ML_caso_1.conf -p
input/ML_caso_1.param -o ML_caso_1/prueba/ -N 1000 --superupdate 20
```

El archivo `log.param` que se requiere para iniciar las cadenas en paralelo se aloja en la carpeta de salida `ML_caso_1/prueba/`. Posteriormente se ejecutan 8 cadenas de 100,000 pasos cada una.

```
/montepython$ mpirun -np 8 montepython/MontePython.py run --conf ML_cas
o_1.conf -p ML_caso_1/prueba/log.param -o ML_caso_1/cadenas_1/ -N 100000
--superupdate 20
```

Una vez culminado este proceso, el análisis de las 8 cadenas de la carpeta `ML_caso_1/cadenas_1/` se muestra a continuación:

```
/montepython$ montepython/MontePython.py info ML_caso_1/cadenas_1/
--want-covmat
Running Monte Python v3.4.0

--> Scanning file ML_caso_1/cadenas_1/
      # se enlistan las cadenas con los pasos aceptados para cada una
--> Computing variance
--> Computing convergence criterium (Gelman-Rubin)
  -> R-1 is 0.000907      for B
           0.000820      for H0
           0.000995      for Omega_b
           0.000694      for Omega_cdm
           0.000779      for M
           0.000759      for Omega_Lambda
--> Computing covariance matrix
-----
      # se crean los histogramas para cada parámetro
-----
--> Saving figures to .pdf files
--> Writing .info and .tex files
```

Se observa que se tiene inferencia para el parámetro cosmológico B del *ML*. Empleando la matriz de covarianza y los mejores ajustes del proceso anterior, se ejecutan otras 8 cadenas de 50,000 pasos cada una con el objetivo de mejorar la convergencia y el ajuste de las distribuciones de probabilidad posterior.

```
/montepython$ mpirun -np 8 montepython/MontePython.py run --conf ML_caso_1.conf -p ML_caso_1/cadenas_1/log.param -o ML_caso_1/cadenas_2/ -c ML_caso_1/cadenas_1/cadenas_1.covmat -b ML_caso_1/cadenas_1/cadenas_1.bes tfit -N 50000 --superupdate 20
```

Por último, se analiza la carpeta de salida ML_caso_1/cadenas_2/:

```
/montepython$ montepython/MontePython.py info ML_caso_1/cadenas_2/
--want-covmat
Running Monte Python v3.4.0

--> Scanning file ML_caso_1/cadenas_2/
      # se enlistan las cadenas con los pasos aceptados para cada una
--> Computing variance
--> Computing convergence criterium (Gelman-Rubin)
-> R-1 is 0.000099      for B
          0.000262      for H0
          0.000285      for Omega_b
          0.000443      for Omega_cdm
          0.000372      for M
          0.000413      for Omega_Lambda
--> Computing covariance matrix

-----
      # se crean los histogramas para cada parámetro
-----

--> Saving figures to .pdf files
--> Writing .info and .tex files
```

Los criterios de convergencia mejoraron y con ello se tiene inferencia para los parámetros que caracterizan al *ML* empleando las observaciones relacionadas con la evolución cosmológica de fondo. Para los dos procesos posteriores del **Caso II** cada nuevo punto de la cadena requiere de un tiempo de cómputo mayor que en el **Caso I** debido a que las ecuaciones que CLASS debe solucionar para las perturbaciones lineales son más complejas que las relacionadas a la cosmología de fondo.

Λ CDM_caso_2: se parte de una corrida inicial de prueba de 1000 pasos.

```
/montepython$ montepython/MontePython.py run --conf LCDM_caso_2.conf -p input/LCDM_caso_2.param -o LCDM_caso_2/prueba/ -f 1.5 -N 1000 --superupdate 20
```

Se emplea la bandera -f para dar como factor de salto inicial 1.5 recomendado cuando se implementan los likelihoods de Planck, el valor por defecto es 2.4. Si este factor es demasiado grande, la tasa de aceptación será demasiado pequeña siendo insuficiente para extraer información estadística. En cambio, cuando es demasiado pequeño, el índice de aceptación puede acercarse a uno por lo que las cadenas crecerían rápidamente, pero los puntos adyacentes estarían muy correlacionados y las cadenas no explorarían necesariamente todo el espacio de parámetros.

A partir de lo anterior, se inician 8 cadenas en paralelo de 100,000 pasos cada una.

```
/montepython$ mpirun -np 8 montepython/MontePython.py run --conf LCDM_c
aso_2.conf -p LCDM_caso_2/prueba/log.param -o LCDM_caso_2/cadenas_1/ -f
1.5 -N 100000 --superupdate 20
```

Cuando finaliza este proceso se realiza el análisis estadístico de la carpeta de salida LCDM_caso_2/cadenas_1/.

```
/montepython$ montepython/MontePython.py info LCDM_caso_2/cadenas_1/
--want-covmat
Running Monte Python v3.4.0

--> Scanning file LCDM_caso_2/cadenas_1/
      # se enlistan las cadenas con los pasos aceptados para cada una
--> Computing mean values
--> Computing variance
--> Computing convergence criterium (Gelman-Rubin)
-> R-1 is 0.048440      for 100*theta_s
      0.009463      for ln10^{10}A_s
      0.033386      for n_s
      0.022380      for tau_reio
      0.105478      for Omega_b
      0.055538      for Omega_cdm
      0.010738      for A_cib_217
      0.006878      for xi_sz_cib
      0.020410      for A_sz
      0.009467      for ps_A_100_100
      0.013126      for ps_A_143_143
      0.006824      for ps_A_143_217
      0.008941      for ps_A_217_217
      0.016062      for ksz_norm
      0.006173      for gal545_A_100
      0.002137      for gal545_A_143
      0.006473      for gal545_A_143_217
      0.007697      for gal545_A_217
      0.003244      for galf_TE_A_100
      0.004968      for galf_TE_A_100_143
      0.009280      for galf_TE_A_100_217
      0.006249      for galf_TE_A_143
      0.010508      for galf_TE_A_143_217
      0.019073      for galf_TE_A_217
      0.006993      for calib_100T
      0.003553      for calib_217T
      0.059044      for A_planck
      0.030393      for M
      0.021392      for z_reio
      0.021372      for YHe
      0.044408      for H0
      0.009378      for A_s
```

```

0.007503          for sigma8
0.059729          for Omega_Lambda
--> Computing covariance matrix
-----
# se crean los histogramas para cada parámetro
-----
--> Saving figures to .pdf files
--> Writing .info and .tex files

```

Se observa que los pasos dados por las 8 cadenas aún no son suficientes para lograr la convergencia, esto puede ser debido a varias razones como la inclusión de más parámetros cosmológicos y de más datos observacionales. Utilizando la matriz de covarianza y los mejores ajustes obtenidos se inicia un segundo proceso de 8 cadenas de 100,000 pasos cada una.

```

/montepython$ mpirun -np 8 montepython/MontePython.py run --conf LCDM_c
aso_2.conf -p LCDM_caso_2/cadenas_1/log.param -o LCDM_caso_2/cadenas_2/
-c LCDM_caso_2/cadenas_1/cadenas_1.covmat -b LCDM_caso_2/cadenas_1/ca
denas_1.bestfit -f 1.5 -N 100000 --superupdate 20

```

El análisis estadístico del segundo proceso proporciona la siguiente información de salida:

```

/montepython$ montepython/MontePython.py info LCDM_caso_2/cadenas_2/
--want-covmat
Running Monte Python v3.4.0

--> Scanning file LCDM_caso_2/cadenas_2/
# se enlistan las cadenas con los pasos aceptados para cada una
--> Computing variance
--> Computing convergence criterium (Gelman-Rubin)
-> R-1 is 0.005429          for 100*theta_s
0.003542          for ln10^{10}A_s
0.000897          for n_s
0.002542          for tau_reio
0.004012          for Omega_b
0.004830          for Omega_cdm
0.000298          for A_cib_217
0.001826          for xi_sz_cib
0.001078          for A_sz
0.001049          for ps_A_100_100
0.001528          for ps_A_143_143
0.001030          for ps_A_143_217
0.000686          for ps_A_217_217
0.000816          for ksz_norm
0.001330          for gal545_A_100
0.001421          for gal545_A_143
0.001626          for gal545_A_143_217
0.000979          for gal545_A_217

```

```

0.000836      for galf_TE_A_100
0.000700      for galf_TE_A_100_143
0.001094      for galf_TE_A_100_217
0.000934      for galf_TE_A_143
0.000609      for galf_TE_A_143_217
0.001588      for galf_TE_A_217
0.000538      for calib_100T
0.000187      for calib_217T
0.003440      for A_planck
0.003888      for M
0.002460      for z_reio
0.002460      for YHe
0.004445      for H0
0.003569      for A_s
0.005159      for sigma8
0.004799      for Omega_Lambda
--> Computing covariance matrix
-----
      # se crean los histogramas para cada parámetro
-----
--> Saving figures to .pdf files
--> Writing .info and .tex files

```

En donde se logra restringir los parámetros del modelo Λ CDM añadiendo las observaciones de las perturbaciones cosmológicas.

ML_caso_2: se realiza una corrida de prueba a partir de la información del archivo ML_caso_2.param.

```

/montepython$ montepython/MontePython.py run --conf ML_caso_2.conf -p
input/ML_caso_2.param -o ML_caso_2/prueba/ -f 1.5 -N 1000 --superupdate
ate 20

```

Haciendo uso del archivo log.param generado se comienzan las 8 cadenas en paralelo, se debe de destacar que para evaluar al ML en este proceso fue necesaria una longitud de 1,000,000 pasos para cada cadena.

```

/montepython$ mpirun -np 8 montepython/MontePython.py run --conf ML_cas
o_2.conf -p ML_caso_2/prueba/log.param -o ML_caso_2/cadenas_1/ -f 1.5
-N 1000000 --superupdate 20

```

Claramente el tiempo de ejecución de la corrida anterior fue el más largo y el resultado del análisis estadístico es el siguiente:

```

/montepython$ montepython/MontePython.py info ML_caso_2/cadenas_1/
--want-covmat
Running Monte Python v3.4.0

--> Scanning file ML_caso_2/cadenas_1/
      # se enlistan las cadenas con los pasos aceptados para cada una

```

```

--> Computing variance
--> Computing convergence criterium (Gelman-Rubin)
-> R-1 is 0.002251      for 100*theta_s
      0.009234      for ln10^{10}A_s
      0.002439      for n_s
      0.008809      for tau_reio
      0.006777      for B
      0.008628      for Omega_b
      0.004673      for Omega_cdm
      0.002606      for A_cib_217
      0.001555      for xi_sz_cib
      0.001975      for A_sz
      0.000943      for ps_A_100_100
      0.000989      for ps_A_143_143
      0.002025      for ps_A_143_217
      0.002681      for ps_A_217_217
      0.001949      for ksz_norm
      0.000715      for gal545_A_100
      0.000536      for gal545_A_143
      0.001070      for gal545_A_143_217
      0.002092      for gal545_A_217
      0.000591      for galf_TE_A_100
      0.001304      for galf_TE_A_100_143
      0.000208      for galf_TE_A_100_217
      0.001003      for galf_TE_A_143
      0.000478      for galf_TE_A_143_217
      0.000474      for galf_TE_A_217
      0.000986      for calib_100T
      0.000706      for calib_217T
      0.010567      for A_planck
      0.002032      for M
      0.008699      for z_reio
      0.008401      for YHe
      0.001432      for H0
      0.009239      for A_s
      0.006423      for sigma8
      0.004906      for Omega_fld

--> Computing covariance matrix
-----
      # se crean los histogramas para cada parámetro
-----

--> Saving figures to .pdf files
--> Writing .info and .tex files

```

Donde se puede observar que la condición $R - 1 < 0.01$ se satisface para todos los parámetros con excepción de A_planck, sin embargo la diferencia con respecto al valor deseado es de un orden de magnitud dos veces menor además de ser un parámetro del tipo ‘nuisance’, es por ello que se puede aseverar que se logra la convergencia.

Los procesos descritos en esta sección se sintetizan en las tablas y gráficas mostradas en el [Capítulo 4](#), dentro del mismo se exponen los resultados obtenidos de las distribuciones de probabilidad posterior para los dos modelos y su comparación. Por último, el [Capítulo 5](#) presenta la discusión de los resultados y los aportes que surgen de la presente investigación para la restricción del Modelo Logotrópico.

Bibliografía

- [1] Chavanis, P. H. (2015). Is the Universe logotropic?. The European Physical Journal Plus, 130(7), 1-44.
- [2] Chavanis, P. H. (2015). Cosmology with a stiff matter era. Physical Review D, 92(10), 103004.
- [3] Chavanis, P. H. (2016). The Logotropic Dark Fluid as a unification of dark matter and dark energy. Physics Letters B, 758, 59-66.
- [4] Chavanis, P. H., & Kumar, S. (2017). Comparison between the Logotropic and Λ CDM models at the cosmological scale. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2017(05), 018.
- [5] Benaoum, H. B., Chavanis, P. H., & Quevedo, H. (2021). Generalized Logotropic Models and their Cosmological Constraints. arXiv preprint arXiv:2112.13318.
- [6] Ryden, B. (2017). Introduction to cosmology. Cambridge university press.
- [7] Einstein, A. (1915). Zur allgemeinen relativitätstheorie. Akademie der Wissenschaften, in Kommission bei W. de Gruyter, pp. 778-786.
- [8] Einstein, A. (1915). Die Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften Berlin, pp. 844-847.
- [9] Einstein, A. (1917). "Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften Berlin.", 142.
- [10] Einstein, A. (1917). Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin, 142-152.
- [11] de Sitter, W. (1917). On Einstein's Theory of Gravitation and its Astronomical Consequences. Third Paper., Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 78, 3-28.
- [12] Friedmann, A. (1922). 125. On the Curvature of Space. Zeitschrift für Physik, 10, 377-386.
- [13] O'Riada, C., O'Keeffe, M., Nahm, W., & Mitton, S. (2017). Einstein's 1917 static model of the universe: a centennial review. The European Physical Journal H, 42(3), 431-474.
- [14] Slipher, V. M. (1913). The radial velocity of the Andromeda Nebula. Lowell Observatory Bulletin, 1, 56-57.

- [15] Slipher, V. M. (1915). Spectrographic Observations of Nebulae. *Popular Astronomy*, 23, 21-24.
- [16] Slipher, V. M. (1917). Nebulae. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 56, 403-409.
- [17] Hubble E. (1929). A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 15(3), 168–173.
- [18] Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. Pearson Education Limited. The University of Chicago Press.
- [19] Poisson, E. & Will, C. (2014). *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge University Press
- [20] Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (2014). *Gravitation*. W. H. Freeman and Company.
- [21] Hilbert, D. (1924). Die grundlagen der physik. *Mathematische Annalen*, 92(1), 1-32.
- [22] Boggess, N. W., Mather, J. C., Weiss, R., et al. (1992). The COBE Mission: Its Design and Performance Two Years after Launch. *The Astronomical Journal*. 397.
- [23] Komatsu, E. et al. (2011). Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *The Astrophysical Journal Supplement Series*. 192(2).
- [24] Adam, R., Ade, P. A., Aghanim, N., et al. (2016). Planck 2015 results-I. Overview of products and scientific results. *Astronomy & Astrophysics*, 594, A1.
- [25] Adaptado de Nine Year Microwave Sky, de NASA/WMAP Science Team, 2014, <https://map.gsfc.nasa.gov/media/121238/index.html>.
- [26] Collessy, M. (1999). First results from the 2dF galaxy redshift survey. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 357(1750), 105-116.
- [27] York, D. G., Adelman, J., Anderson Jr, J. E., et al. (2000). The sloan digital sky survey: Technical summary. *The Astronomical Journal*, 120(3), 1579.
- [28] Adaptado de Slices through the SDSS 3-dimensional map of the distribution of galaxies, por M. Blanton y Sloan Digital Sky Survey, https://classic.sdss.org/includes/sideimages/sdss_pie2.html.
- [29] Carroll, S. (2014). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Pearson Education Limited.
- [30] Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., et al. (1998). Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3), 1009.
- [31] Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., et al. (1999). Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2), 565.

- [32] Gamow, G. (1970). *My world line: An informal autobiography*. New York, NY. Viking Press.
- [33] Rubin, V.C., Ford, W.K., & Thonnard, N. (1980). Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 ($R = 4\text{kpc}$) to UGC 2885 ($R = 122\text{ kpc}$). *The Astrophysical Journal*, 238, 471-487.
- [34] Aghanim, N., Akrami, Y., Ashdown, M., et al. (2020). Planck 2018 results-VI. Cosmological parameters. *Astronomy and Astrophysics*, 641, A6.
- [35] Riess, A. G., Casertano, S., Yuan, W., Macri, L. M., & Scolnic, D. (2019). Large Magellanic Cloud Cepheid standards provide a 1 % foundation for the determination of the Hubble constant and stronger evidence for physics beyond ΛCDM . *The Astrophysical Journal*, 876(1), 85.
- [36] Beutler, F., Blake, C., Colless, M., et al. (2011). The 6dF Galaxy Survey: baryon acoustic oscillations and the local Hubble constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 416(4), 3017-3032.
- [37] Ross, A. J., Samushia, L., Howlett, C., Percival, W. J., Burden, A., & Manera, M. (2015). The clustering of the SDSS DR7 main Galaxy sample—I. A 4 per cent distance measure at $z = 0.15$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 449(1), 835-847.
- [38] Alam, S., Ata, M., Bailey, S., et al. (2017). The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 470(3), 2617-2652.
- [39] Zarrouk, P., Burtin, E., Gil-Marín, H., et al. (2018). The clustering of the SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey DR14 quasar sample: measurement of the growth rate of structure from the anisotropic correlation function between redshift 0.8 and 2.2. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 477(2), 1639-1663.
- [40] de Sainte Agathe, V., Balland, C., Des Bourboux, H. D. M., et al. (2019). Baryon acoustic oscillations at $z = 2.34$ from the correlations of $\text{Ly}\alpha$ absorption in eBOSS DR14. *Astronomy and Astrophysics*, 629, A85.
- [41] Blomqvist, M., Des Bourboux, H. D. M., de Sainte Agathe, V., et al. (2019). Baryon acoustic oscillations from the cross-correlation of $\text{Ly}\alpha$ absorption and quasars in eBOSS DR14. *Astronomy and Astrophysics*, 629, A86.
- [42] Verde, L., Treu, T., & Riess, A. G. (2019). Tensions between the early and late Universe.
- [43] S. Weinberg, (1989). The cosmological constant problem, *Rev. Mod. Phys.* 61.
- [44] Di Valentino, E., Anchordoqui, L. A., Akarsu, Ö., et al. (2021). Cosmology Intertwined III: $f\sigma_8$ and S_8 . *Astroparticle Physics*, 131, 102604.
- [45] Klypin, A., Kravtsov, A. V., Valenzuela, O., & Prada, F. (1999). Where are the missing galactic satellites?. *The Astrophysical Journal*, 522(1), 82.

- [46] Moore, B., Ghigna, S., Governato, F., Lake, G., Quinn, T., Stadel, J., & Tozzi, P. (1999). Dark matter substructure within galactic halos. *The Astrophysical Journal*, 524(1), L19.
- [47] Kamionkowski, M., & Liddle, A. R. (2000). The dearth of halo dwarf galaxies: is there power on short scales?. *Physical Review Letters*, 84(20), 4525.
- [48] Bullock, J. S. (2013). Notes on the missing satellites problem. *Local Group Cosmology*, 20, 95.
- [49] Kim, S. Y., Peter, A. H., & Hargis, J. R. (2017). There is no missing satellites problem. *arXiv preprint arXiv:1711.06267*.
- [50] Fielder, C. E., Mao, Y. Y., Newman, J. A., Zentner, A. R., & Licquia, T. C. (2019). Predictably missing satellites: subhalo abundances in Milky Way-like haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 486(4), 4545-4568.
- [51] Navarro, J. F. (1996). The structure of cold dark matter halos. In *Symposium-international astronomical union* (Vol. 171, pp. 255-258). Cambridge University Press.
- [52] Moore, B., Quinn, T., Governato, F., Stadel, J., & Lake, G. (1999). Cold collapse and the core catastrophe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 310(4), 1147-1152.
- [53] Lizano, S., & Shu, F. H. (1989). Molecular cloud cores and bimodal star formation. *The Astrophysical Journal*, 342, 834-854.
- [54] McLaughlin, D. E., & Pudritz, R. E. (1996). A model for the internal structure of molecular cloud cores. *arXiv preprint astro-ph/9605018*.
- [55] Kleidis, K., & Spyrou, N. K. (2015). Polytropic dark matter flows illuminate dark energy and accelerated expansion. *Astronomy and Astrophysics*, 576, A23.
- [56] Liddle, A. R. (2009). Statistical methods for cosmological parameter selection and estimation. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 59, 95-114.
- [57] Trotta, R. (2017). Bayesian methods in cosmology. *arXiv preprint arXiv:1701.01467*.
- [58] Hobson, M. P., Jaffe, A. H., Liddle, A. R., Mukherjee, P., & Parkinson, D. (Eds.). (2010). *Bayesian methods in cosmology*. Cambridge University Press.
- [59] Hoff, Peter D, (2009). *A First Course in Bayesian Statistical Methods*. Springer.
- [60] Bayes T. (1763). An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Phil. Trans.* 53:370–418 (translated to modern notation in *Biometrika* 45: 296–315).
- [61] Jeffreys, H. (1935). Some Tests of Significance, Treated by the Theory of Probability. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31(2), 203-222.
- [62] Raftery, A. E. (1996). Approximate Bayes Factors and Accounting for Model Uncertainty in Generalised Linear Models. *Biometrika*, 83(2), 251–266.
- [63] Metropolis, N., & Ulam, S. (1949). The Monte Carlo method. *Journal of the American Statistical Association*, 44(247), 335–341.

- [64] Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H., & Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, 21, 1087-1092.
- [65] Gregory, Phil, (2005). *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences, A Comparative Approach with Mathematica Support*. Cambridge University Press.
- [66] Hastings, W. K. (1970). Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications. *Biometrika*, 57(1), 97–109.
- [67] Gelman, A., & Rubin, D. B. (1992). Inference from iterative simulation using multiple sequences. *Statistical science*, 7(4), 457-472.
- [68] Brooks, S. P., & Gelman, A. (1998). General methods for monitoring convergence of iterative simulations. *Journal of computational and graphical statistics*, 7(4), 434-455.
- [69] Scolnic, D. M., Jones, D. O., Rest, A., et al. (2018). The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample. *The Astrophysical Journal*, 859(2), 101.
- [70] Moresco, M., Pozzetti, L., Cimatti, A., et al. (2016). A 6% measurement of the Hubble parameter at $z \sim 0.45$: direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(05), 014.
- [71] Wong, K. C., Suyu, S. H., Chen, G. C., et al. (2020). H0LiCOW–XIII. A 2.4% measurement of H_0 from lensed quasars: 5.3 σ tension between early- and late-Universe probes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 498(1), 1420-1439.
- [72] Parkinson, D., Riemer-Sørensen, S., Blake, C., et al. (2012). The WiggleZ dark energy survey: final data release and cosmological results. *Physical Review D*, 86(10), 103518.
- [73] Kazin, E. A., Koda, J., Blake, C., et al. (2014). The WiggleZ Dark Energy Survey: improved distance measurements to $z = 1$ with reconstruction of the baryonic acoustic feature. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 441(4), 3524-3542.
- [74] Tegmark, M., Eisenstein, D. J., Strauss, M. A., et al. (2006). Cosmological constraints from the SDSS luminous red galaxies. *Physical Review D*, 74(12), 123507.
- [75] Reid, B. A., Percival, W. J., Eisenstein, D. J., et al. (2010). Cosmological constraints from the clustering of the Sloan Digital Sky Survey DR7 luminous red galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 404(1), 60-85.
- [76] Cuceu, A., Farr, J., Lemos, P., & Font-Ribera, A. (2019). Baryon acoustic oscillations and the Hubble constant: past, present and future. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(10), 044.
- [77] Chen, L., Huang, Q. G., & Wang, K. (2019). Distance priors from Planck final release. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(02), 028.
- [78] Mahalanobis, P.C. (1936) On the Generalized Distance in Statistics. *Proceedings of the National Institute of Science of India*, 2, 49-55.

- [79] Heavens, A., Fantaye, Y., Mootoovaloo, A., Eggers, H., Hosenie, Z., Kroon, S., & Sellentin, E. (2017). Marginal Likelihoods from Monte Carlo Markov Chains. arXiv preprint arXiv:1704.03472.
- [80] Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. Oxford University Press.
- [81] Amendola, L. & Tsujikawa, S. (2010). *Dark Energy, Theory and Observations*. Cambridge University Press.
- [82] Ma, C. P., & Bertschinger, E. (1995). Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal Newtonian gauges. arXiv preprint astro-ph/9506072.
- [83] Bean, R., & Dore, O. (2004). Probing dark energy perturbations: the dark energy equation of state and speed of sound as measured by WMAP. *Physical Review D*, 69(8), 083503.
- [84] Hu, W., & Sawicki, I. (2007). Parametrized post-Friedmann framework for modified gravity. *Physical Review D*, 76(10), 104043.
- [85] Hu, W. (2008). Parametrized post-Friedmann signatures of acceleration in the CMB. *Physical Review D*, 77(10), 103524.
- [86] Kurki-Suonio, H. (2020). *Cosmological Perturbation Theory, part 1*. <https://www.mv.helsinki.fi/home/hkurkisu/CosPer.pdf>.
- [87] Lifshitz, E. (1945), On the gravitational stability of the expanding universe, *J. Phys. (USSR)*, 10, 116.
- [88] Penzias, A. A. & Wilson, R. W. (1965), A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 *Mc/s*. *APJ*, 142:419–421.
- [89] Aghanim, N., Akrami, Y., Arroja, F., et al. (2020). Planck 2018 results-I. Overview and the cosmological legacy of Planck. *Astronomy and Astrophysics*, 641, A1.
- [90] Lesgourgues, J. (2011). The cosmic linear anisotropy solving system (CLASS) I: overview. arXiv preprint arXiv:1104.2932.
- [91] Blas, D., Lesgourgues, J., & Tram, T. (2011). The cosmic linear anisotropy solving system (CLASS). Part II: approximation schemes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(07), 034.
- [92] Lesgourgues, J. (2011). The cosmic linear anisotropy solving system (CLASS) III: comparison with CAMB for LambdaCDM. arXiv preprint arXiv:1104.2934.
- [93] Lesgourgues, J., & Tram, T. (2011). The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) IV: efficient implementation of non-cold relics. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(09), 032.
- [94] Chevallier, M., & Polarski, D. (2001). Accelerating universes with scaling dark matter. *International Journal of Modern Physics D*, 10(02), 213-223.
- [95] Linder, E. V. (2003). Exploring the expansion history of the universe. *Physical Review Letters*, 90(9), 091301.

- [96] Brinckmann, T., & Lesgourgues, J. (2019). MontePython 3: boosted MCMC sampler and other features. *Physics of the Dark Universe*, 24, 100260.
- [97] Audren, B., Lesgourgues, J., Benabed, K., & Prunet, S. (2013). Conservative constraints on early cosmology with Conservative Constraints on Early Cosmology: an illustration of the Monte Python cosmological parameter inference code. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2013(02), 001.