Universidad Nacional Autónoma de México y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

Una clasificación de ideales monomiales de tipo lineal

T E S I S

Que para optar por el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Ismael Romo Alvarado
Director: Dr. Mustapha Lahyane (IFM-UMSNH)

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
U M S N H

Morelia, Michoacán - agosto de 2023.

Índice general

Agradecimientos

Me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que me apoyaron durante mi proyecto de tesis. En primer lugar, quiero agradecer al Dr. Juan Bosco Frías Medina por brindarme su invaluable ayuda y guía desde el inicio hasta el final de mi proyecto de tesis. Sin su orientación y apoyo, no podría haber completado este proyecto con éxito.

En segundo lugar, deseo agradecer a mi director de tesis, el Dr. Mustapha Lahyane, por sus valiosos consejos y su dedicación en enseñarme sobre el fascinante mundo de la geometría algebraica y el álgebra conmutativa. Sus enseñanzas han sido fundamentales para mi formación académica y profesional.

En tercer lugar, me gustaría expresar mi agradecimiento a mi familia por ser mi soporte y mi refugio durante este proceso. Quiero dedicar un agradecimiento especial a mi bisabuela, María de Jesús Quezada Carbajal, quien falleció en el transcurso de mi posgrado. Su presencia siempre me dio fortaleza y su ausencia me ha dejado una gran tristeza.

En cuarto lugar, quiero agradecer a todos mis compañeros y profesores del Centro de Ciencias Matemáticas y de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Con ellos aprendí conocimientos de inestimable valor y me enriquecí con experiencias valiosas que llevaré a lo largo de mi vida.

Por último, quiero agradecer a mis dos princesas, Moris y Pancita Manchada. Sus ronquidos, juegos y compañía me dieron momentos de alegría y relax en los momentos más intensos de mi proyecto. A ellas les dedico mi logro, que sin duda no habría sido posible sin su amor incondicional.

Resumen

Los ideales monomiales son el puente entre el álgebra conmutativa y la combinatoria. En este trabajo se caracterizar los ideales monomiales de Veronesese, de productos mixtos normales y de bitipo de Veronese. La caracterización en cuestión surge con una relación entre el álgebra de Rees y el álgebra simétrica asociada a dichos ideales. Si tales álgebras son isomorfas se dice que el ideal es de tipo lineal. En este trabajo se responde cuáles de los ideales mencionados anteriormente son de tipo lineal.

Palabras clave: Ideales monomiales, productos mixtos, ideales de Veronese, ideales de bitipo de Veronese, ideales de tipo lineal.

Abstract

Monomial ideals serve as the bridge between commutative algebra and combinatorics. This study focuses on characterizing Veronese monomial ideals, normal mixed product ideals, and Veronese bitype ideals. The specific characterization arises through a connection between the Rees algebra and the symmetric algebra associated with these ideals. If these algebras are isomorphic, the ideal is termed linear. This work addresses the question of which of the aforementioned ideals are linear type.

Key words: Monomial ideals, mixed products, Veronese ideals, bitype Veronese ideals, linear type ideals.

Introducción

Los ideales monomiales forman un puente entre el álgebra conmutativa y la combinatoria. En el presente trabajo se abordan los resultados de [**5**] los cuales caracterizan a los ideales de Veronese libres de cuadrados, a los ideales de productos mixtos y a los ideales bitipo de Veronese. Estos últimos ideales están asociados a las gráficas bipartitas con ciclos y fueron introducidos por La Barbiera en [**6**].

La caracterización en cuestión se da cuando el álgebra de Rees asociada al ideal es naturalmente isomorfa al álgebra simétrica asociada a dicho ideal. A los ideales que cumplen esta propiedad se le conoce como de **tipo lineal** (ver [**7**]). Esta clasificación, además de contar con múltiples propiedades algebraicas, ofrece información pertinente acerca de las gráficas cuando su ideal de aristas es de tipo lineal (ver [**7**]) y por ello, son ampliamente estudiados dentro del álgebra conmutativa y la combinatoria.

Este trabajo de tesis de maestría busca dar una clasificación completa de los ideales de Veronese libres de cuadrados, a los ideales de productos mixtos normales y a los ideales bitipo de Veronese. Para ello, se usarán múltiples métodos brindados por las bases de Gröbner, por esta razón, los primeros dos capítulos son un recordatorio de bases de Gröbner para anillos y módulos, haciendo énfasis en determinar un conjunto generador del módulo de sizigias. En el tercer y último capítulo se dará en primer lugar un breve repaso de la relación entre el álgebra simétrica y el álgebra de Rees asociado a un ideal dado; posteriormente, se definen los ideales de tipo lineal y se muestra una caracterización cuando se trata de ideales monomiales. Luego, en segundo lugar, el capítulo concluye con condiciones necesarias y suficientes para que los diferentes tipos de ideales mencionados anteriormente sean de tipo lineal.

Notación y terminología

A lo largo de este trabajo se denotará como $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $\mathbb{Z}_{>0}$ al conjunto de números enteros, enteros no negativos y enteros positivos respectivamente; la letra minúscula k siempre denotará un campo (no necesariamente algebraicamente cerrado); las letras minúsculas n, m y l siempre denotarán enteros positivos; $k[x_1, \ldots, x_n]$ denotará al anillo de polinomios con coeficientes en k y variables $x_1, \ldots, x_n$; para un subconjunto Γ de $k[x_1, \ldots, x_n]$ se denotará como $\langle \Gamma \rangle$ al ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$ generado por Γ y la letra mayúscula I usualmente denotará un ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$.

En el Capítulo 1, frecuentemente se usarán las letras minúsculas u y v para denotar monomios y $\mathrm{Mon}(k[x_1, \ldots, x_n])$ para denotar al conjunto de todos los monomios del anillo $k[x_1, \ldots, x_n]$.

En el Capítulo 2, la letra mayúscula S denotará al anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n]$, la letra mayúscula F denotará un $S-$módulo libre de rango finito y $\mathrm{Mon}(F)$ denotará al conjunto de productos de monomios de S con la base canónica de F (tal definición se puede consultar en el Capítulo 2, página 9).

En el Capítulo 3, $\mathrm{Sym}_S(M)$ denotará al álgebra simétrica asociada al $S-$módulo M (tal definición se puede consultar en el Capítulo 3, página 17); $\mathcal{R}_I$ denotará al álgebra de Rees asociado al ideal I y $\mathcal{R}(I)$ denotará a la presentación del álgebra de Rees $\mathcal{R}_I$ (tal definición se puede consultar en el Capítulo 3, página 20).

Capítulo 1

Bases de Gröbner

En este capítulo se mostrará cómo es posible garantizar la existencia de bases de Gröbner para un ideal del anillo de polinomios con coeficientes en un campo k en n variables y se mostrará un algoritmo para construir tales bases partiendo de un conjunto de generadores del ideal.

Para comenzar, veremos algunos preliminares acerca del anillo de polinomios, después, mostraremos la relación que tienen los monomios con la divisibilidad, hablamos del lema de Dickson. Dicho resultado afirma que todo ideal generado por una familia de monomios contiene una subfamilia finita generadora. Luego, mostraremos un tipo de relación de orden total sobre los monomios el cual nos permitirá definir un ideal monomial y por lo anterior, garantizar la existencia de bases de Gröbner.

1. Preliminares

El anillo de polinomios con coeficientes en k y variables $x_1, \ldots, x_n$, denotado por $k[x_1, \ldots, x_n]$, es el $k-$ espacio vectorial generado por el monoide $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. A un elemento básico $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ en $k[x_1, \ldots, x_n]$ le llamamos **monomio** y lo denotamos como $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Así, un elemento de $k[x_1, \ldots, x_n]$ es una $k-$combinación finita de monomios y le llamaremos **polinomios**. Particularmente a los elementos de la forma λx^α con $\lambda \in k$ les llamaremos **términos**.

El grupo abeliano $k[x_1, \ldots, x_n]$ tiene estructura de anillo definiendo el producto entre términos como

$$\lambda_\alpha x^\alpha \cdot \lambda_\beta x^\beta = \left(\lambda_\alpha \lambda_\beta\right) x^{\alpha+\beta}$$

donde $\lambda_\alpha, \lambda_\beta \in k$. Este producto se extiende distributivamente a los polinomios y de esta manera, $k[x_1, \ldots, x_n]$ es una $k-$álgebra. Más aún, esta $k-$álgebra posee la siguiente propiedad universal:

Proposición 1.1. *Sean A una $k-$álgebra y $a_1, \ldots, a_n \in A$. Entonces, existe un único homomorfismo de $k-$álgebras $\overline{\varphi} : k[x_1, \ldots, x_n] \to A$ tal que $\overline{\varphi}(x_i) = a_i$ y el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & A \\ k[x_1, \ldots, x_n] \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Aquí, $\varphi : k \to A$ es el homomorfismo de anillos que dota a A con una estructura de $k-$álgebra e $i : k \to k[x_1, \ldots, x_n]$ es la inclusión natural.

De la proposición anterior se deduce que todo homomorfismo de $k-$álgebras $k[x_1, \ldots, x_n] \to A$ es un homomorfismo evaluación. Típicamente se usará la siguiente descripción para tales homomorfismos:

$$\begin{aligned} k[x_1, \ldots, x_n] &\to A \\ x_i &\mapsto a_i. \end{aligned}$$

2. El lema de Dickson y órdenes monomiales

Denotamos por $\mathrm{Mon}(k[x_1, \ldots, x_n])$ al conjunto de monomios del anillo $k[x_1, \ldots, x_n]$. Los monomios tienen la siguiente relación con la divisibilidad:

$$\left[x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}\right] \Leftrightarrow [\beta_i \geq \alpha_i \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}].$$

Así, la relación de divisibilidad sobre el conjunto de monomios es una relación de orden parcial. Más aún, por lo anterior toda cadena decreciente de monomios eventualmente se estabiliza. Nótese que si $n = 1$, el orden de la divisibilidad es total pues es el orden natural inducido de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Sea $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Se define el **soporte de f** como el conjunto de monomios que componen a f, tal conjunto se denota como $\mathrm{supp}(f)$. Por convención, si $f = 0$ se considera $\mathrm{supp}(f) = \emptyset$ y si f es constante no cero se considera $\mathrm{supp}(f) = \{1\}$.

Un ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$ es **monomial** si es generado por monomios. Estos ideales son caracterizados con la propiedad de contener el soporte de todos sus polinomios. Así, los monomios generadores tienen la siguiente propiedad que los caracteriza:

PROPOSICIÓN 1.2. *Sean I un ideal monomial de $k[x_1, \ldots, x_n]$ y $\mathcal{M}$ un conjunto de monomios de I. Entonces, $\mathcal{M}$ es un conjunto generador de I si y sólo si para todo monomio $v \in I$ existe $u \in \mathcal{M}$ tal que $u \mid v$.*

Resulta que los conjuntos de monomios cumplen la siguiente propiedad con respecto a la divisibilidad:

TEOREMA 1.3. [**3**, Lema de Dickson, Capítulo 1, Teorema 1.9]

Sea $\mathcal{M}$ un conjunto no vacío de monomios. Con respecto a la divisibilidad, el conjunto $\mathcal{M}$ tiene un número finito de elementos minimales.

Por la Proposición 1.2 y el lema de Dickson, se obtiene el siguiente resultado que caracteriza a los ideales monomiales:

Corolario 1.4. *Sea I un ideal monomial de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Entonces, cada conjunto de generadores monomiales contiene un conjunto finito que genera a I.*

El **teorema de la base de Hilbert** afirma que todo ideal I del anillo $k[x_1, \ldots, x_n]$ es finitamente generado. En el caso de ideales monomiales, el lema de Dickson afirma que un subconjunto finito de los generadores de un ideal monomial genera al ideal. Por esto, el lema de Dickson es más específico cuando se trata de ideales monomiales.

Con ánimos de querer comparar monomios (para definir supremos e ínfimos), se define lo siguiente:

Definición 1.5. (Orden monomial)

Un orden total $\leq$ sobre $\mathrm{Mon}(k[x_1, \ldots, x_n])$ es un **orden monomial** sobre $k[x_1, \ldots, x_n]$ si se cumple:

1. $1 \leq u$ para todo $u \in \mathrm{Mon}(k[x_1, \ldots, x_n])$.
2. La relación $\leq$ es compatible con la multiplicación de monomios, es decir, si $u \leq v$ en $\mathrm{Mon}(k[x_1, \ldots, x_n])$ y si $w \in \mathrm{Mon}(k[x_1, \ldots, x_n])$, entonces $uw \leq vw$.

Los órdenes monomiales se definen de esta forma por dos razones principales:

1. Se busca un orden total.
2. Se busca que el orden contenga a la relación de la divisibilidad.

En efecto, los órdenes monomiales definidos de esta forma cumplen la siguiente propiedad:

Proposición 1.6. *Sea $\leq$ un orden monomial sobre $k[x_1, \ldots, x_n]$. Si $u, v \in Mon(k[x_1, \ldots, x_n])$ con $u \mid v$, entonces $u \leq v$.*

Recuerde que los monomios con la divisibilidad tienen la propiedad de que toda cadena decreciente se estabiliza. Pues bien, los órdenes monomiales cumplen la misma propiedad. Enseguida se muestran dos ejemplos de órdenes monomiales.

Ejemplo 1.7. (El caso de una variable)

En $k[x_1]$, el orden usual de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ define un orden monomial sobre $k[x_1]$:

$$\left[x_1^c \leq x_1^d\right] \Leftrightarrow [c \leq d \text{ en } \mathbb{Z}_{\geq 0}].$$

Este orden es trivialmente de buen orden y además, es compatible con la multiplicación de monomios pues el orden $\leq$ sobre $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ es compatible con la suma: si $x_1^c \leq x_1^d$ y si x_1^e es un monomio de $k[x_1]$, entonces

$$\begin{aligned}\left[x_1^c x_1^e \leq x_1^d x_1^e\right] &\Leftrightarrow \left[x_1^{c+e} \leq x_1^{d+e}\right] \\ &\Leftrightarrow [c+e \leq d+e].\end{aligned}$$

Como $x_1^c \leq x_1^d$, entonces $c \leq d$ y como $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ se tiene que $c+e \leq d+e$. Por lo tanto, $\leq$ es orden monomial sobre $k[x_1]$. De hecho, es el orden monomial dado por la divisibilidad:

$$\begin{aligned}\left[x_1^c \leq x_1^d\right] &\Leftrightarrow [c \leq d] \\ &\Leftrightarrow [\exists e \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ tal que } d = c+e] \\ &\Leftrightarrow \left[\exists e \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ tal que } x_1^d = x_1^c x_1^e\right] \\ &\Leftrightarrow \left[x_1^c \mid x_1^d\right].\end{aligned}$$

Más aún, este orden monomial es único. En efecto, sea $\preceq$ un orden monomial arbitrario sobre $k[x_1]$. Si $x_1^c \leq x_1^d$, entonces $x_1^c \mid x_1^d$ y $x_1^c \preceq x_1^d$. Por otro lado, si $x_1^c \preceq x_1^d$, se tiene que $c \leq d$ en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. En efecto, si $d < c$, entonces existiría $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ no cero tal que

$$c = d + e$$

y $x_1^d \mid x_1^c$. Así, $x_1^d \preceq x_1^c$ y $x_1^c = x_1^d$, esto implicaría que $c = d$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $c \leq d$ en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Se concluye que

$$\left[x_1^c \leq x_1^d\right] \Leftrightarrow \left[x_1^c \preceq x_1^d\right]$$

y el orden $\leq$ es el único orden monomial sobre $k[x_1]$.

Ejemplo 1.8. (Orden lexicográfico puro)

Como se vio en el ejemplo anterior solo existe un orden monomial en $k[x_1]$. Llámese $\leq$ a dicho orden monomial. Este orden monomial se puede extender al anillo $k[x_1, x_2]$ definiendo $\leq_{plex}$ como sigue:

$$\left[x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \leq_{plex} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x_1^{\alpha_1} < x_1^{\beta_1} \text{ o} \\ \alpha_2 \leq \beta_2 \text{ si } x_1^{\alpha_1} = x_1^{\beta_1} \end{array}\right].$$

Es rutinario verificar que $\leq_{plex}$ es una relación de orden total sobre $\operatorname{Mon}(k[x_1, x_2])$. Además, es claro que

$$1 \leq_{plex} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \text{ para todo } x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \in \operatorname{Mon}(k[x_1, x_2]).$$

Luego, si $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \in \operatorname{Mon}(k[x_1, x_2])$ son tales que

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \leq_{plex} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}.$$

Sea $x_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2} \in \mathrm{Mon}\,(k\,[x_1, x_2])$. Entonces,

$$x_1^{\alpha_1+\gamma_1}x_2^{\alpha_2+\gamma_2} \leq_{plex} x_1^{\beta_1+\gamma_1}x_2^{\beta_2+\gamma_2},$$

pues $\leq$ es compatible con la multiplicación de monomios en $k\,[x_1]$ y $\leq$ es compatible con la suma en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Por lo tanto, $\leq_{plex}$ es un orden monomial sobre $k\,[x_1, x_2]$. A tal orden se le conoce como el **orden lexicográfico puro**.

El orden lexicográfico puro se puede extender inductivamente a varias variables. Resulta que tal orden es equivalente a que se cumpla la siguiente regla: si $x^\alpha, x^\beta \in \mathrm{Mon}\,(k\,[x_1, \ldots, x_n])$, entonces,

$$\left[x^\alpha \leq_{plex} x^\beta\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \text{El primer elemento no cero de } \alpha - \beta \text{ es negativo,} \\ \text{o bien, } \alpha = \beta. \end{array}\right].$$

Observe que el orden lexicográfico puro sobre $k\,[x_1, x_2]$ cumple que

$$x_2^{2022} \leq_{plex} x_1.$$

Así, tenemos que el orden lexicográfico puro no considera el grado de los monomios. Sin embargo, existe un orden derivado del orden lexicográfico puro que sí considera el grado. Sean x^α y x^β monomios. Definimos

$$\left[x^\alpha \leq_{lex} x^\beta\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \deg\,(x^\alpha) < \deg\left(x^\beta\right), \text{ o bien,} \\ x^\alpha \leq_{plex} x^\beta \text{ si } \deg\,(x^\alpha) = \deg\left(x^\beta\right) \end{array}\right].$$

El orden anterior se le conoce como el **orden lexicográfico**[1]. Observe que el orden restringido a los $k-$subespacios

$$k\,[x_1, \ldots, x_n]_d$$

con $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ es el orden lexicográfico puro. Aquí, $k\,[x_1, \ldots, x_n]_d$ son los polinomios homogéneos de grado d en las variables $x_1, \ldots, x_n$ y coeficientes en k.

Definición 1.9. (Monomio inicial e ideal inicial)

Sea $\leq$ un orden monomial sobre $k\,[x_1, \ldots, x_n]$. Se define el **monomio inicial** de un polinomio no cero f, denotado por $\mathrm{in}_{\leq}(f)$, como el monomio máximo de $\mathrm{supp}\,(f)$ con respecto al orden monomial $\leq$.

Asimismo, dado I un ideal no cero de $k\,[x_1, \ldots, x_n]$, el **ideal inicial de I** es el ideal generado por los monomios iniciales de los polinomios no cero de I.

[1] A lo que nosotros llamamos orden lexicográfico puro y orden lexicográfico, algunos autores prefieren usar la denominación orden lexicográfico y orden lexicográfico graduado.

Si el ideal I es finitamente generado por los polinomios $g_1, \ldots, g_t$, entonces no necesariamente $\mathrm{in}_{\leq}(I)$ es igual a $\langle \mathrm{in}_{\leq}(g_1), \ldots, \mathrm{in}_{\leq}(g_t)\rangle$. Sin embargo, siempre se puede garantizar que

$$\langle \mathrm{in}_{\leq}(g_1), \ldots, \mathrm{in}_{\leq}(g_t)\rangle \subseteq \mathrm{in}_{\leq}(I).$$

Ejemplo 1.10. Considere $I = \left\langle x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x\right\rangle$. En el orden lexicográfico se tiene que

$$\mathrm{in}_{\leq_{lex}}\left(x^3 - 2xy\right) = x^3 \text{ y } \mathrm{in}_{\leq_{lex}}\left(x^2y - 2y^2 + x\right) = x^2y.$$

Entonces,

$$x\left(x^2y - 2y^2 + x\right) - y\left(x^3 - 2xy\right) = x^2 \in I.$$

Así, $\mathrm{in}_{\leq_{lex}}\left(x^2\right) = x^2 \in \mathrm{in}_{\leq_{lex}}(I)$. Sin embargo, $x^2 \notin \left\langle \mathrm{in}_{\leq_{lex}}\left(x^3 - 2xy\right), \mathrm{in}_{\leq_{lex}}\left(x^2y - 2y^2 + x\right)\right\rangle = \left\langle x^3, x^2y\right\rangle$ pues x^2 no es divisible por x^2y ni por x^3. Por lo tanto,

$$\mathrm{in}_{\leq_{lex}}(I) \neq \left\langle \mathrm{in}_{\leq_{lex}}\left(x^3 - 2xy\right), \mathrm{in}_{\leq_{lex}}\left(x^2y - 2y^2 + x\right)\right\rangle.$$

Definición 1.11. (Base de Gröbner)

Sean I un ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$ y $\leq$ un orden monomial sobre $k[x_1, \ldots, x_n]$. Una colección de elementos $g_1, \ldots, g_t \in I$ que cumple

$$\mathrm{in}_{\leq}(I) = \langle \mathrm{in}_{\leq}(g_1), \ldots, \mathrm{in}_{\leq}(g_t)\rangle$$

es una **base de Gröbner del ideal I** respecto al orden monomial $\leq$ sobre $k[x_1, \ldots, x_n]$.

La primera aparición de las bases de Gröbner en la escena matemática fue en 1965, en el artículo *Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenrings nach einem nulldimensionalen Polynomideal* (Un algoritmo para encontrar los básicos del anillo de clases de residuos módulo un ideal polinomial de dimensión cero), el cual, fue tesis doctoral del matemático austriaco Bruno Buchberger. Las bases de Gröbner han jugado un papel importante dentro del álgebra conmutativa, pues brindan información importante de los ideales (para más información, ver [**2**]). En este texto se mostrarán algunos resultados básicos de las bases de Gröbner.

Observación 1.12. Una base de Gröbner de un ideal I de $k[x_1, \ldots, x_n]$ respecto a un orden monomial $\leq$ siempre existe. En efecto, como $\mathrm{in}_{\leq}(I)$ es generado por monomios, el lema de Dickson indica que sólo una cantidad finita de estos lo generan, es decir, que existen $g_1, \ldots, g_t \in I$ tales que

$$\mathrm{in}_{\leq}(I) = \langle \mathrm{in}_{\leq}(g_1), \ldots, \mathrm{in}_{\leq}(g_t)\rangle.$$

Si $g_1, \ldots, g_t$ es una base de Gröbner de un ideal I de $k[x_1, \ldots, x_n]$ respecto a un orden monomial $\leq$, entonces para un $f \in I$, se tiene que $g_1, \ldots, g_t, f$ también es una base de Gröbner de I, pues $\mathrm{in}_{\leq}(f) \in \langle \mathrm{in}_{\leq}(g_1), \ldots, \mathrm{in}_{\leq}(g_t)\rangle$. De esta forma, se deduce que las bases de Gröbner no son únicas.

3. Algoritmo de la división para polinomios en varias variables y consecuencias

El anillo de polinomios en una variable, $k[x_1]$, tiene la propiedad de ser un dominio euclideano donde se tiene la función euclideana

$$\begin{aligned} d : k[x_1] &\to \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ p(x) &\mapsto \deg(p(x)) \end{aligned}$$

La función d proporciona el **algoritmo de división euclideano** para $k[x_1]$. Por otro lado, cuando se considera el anillo de polinomios con n variables, con $n > 1$, no puede existir una función euclideana (pues $k[x_1, \ldots, x_n]$ no es un dominio de ideales principales). Por lo tanto, no se tiene el algoritmo de división euclideano.

Sin embargo, los órdenes monomiales son la clave para proporcionar una herramienta similar al algoritmo de división euclideano.

Teorema 1.13. [**3**, Algoritmo de la división, Caítulo 2, Teorema 2.11]

Fijamos un orden monomial $\leq$ sobre $k[x_1, \ldots, x_n]$. Sean $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ y un conjunto finito de polinomios no cero $\{g_1, \ldots, g_m\} \subset k[x_1, \ldots, x_n]$. Entonces, existen $q_1, \ldots, q_m, r \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tales que se cumple:

1. $f = q_1 g_1 + \cdots + q_m g_m + r$.
2. $\operatorname{supp}(r) \cap \langle \operatorname{in}_{\leq}(g_1), \ldots, \operatorname{in}_{\leq}(g_m) \rangle = \emptyset$.
3. $\operatorname{in}_{\leq}(f) \geq \operatorname{in}_{\leq}(q_i g_i)$ *para todo* $q_i g_i \neq 0$.

A tal polinomio r se le conoce como el ***residuo de la división de f por $g_1, \ldots, g_m$***.

El algoritmo de la división es una herramienta poderosa de la cual, se deducen resultados importantes como los que presentamos a continuación:

Corolario 1.14. *Una base de Gröbner de un ideal es un conjunto generador del ideal. Así, el anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n]$ es un anillo de Noether.*

Proposición 1.15. *Sean $\leq$ orden monomial sobre $k[x_1, \ldots, x_n]$ y el conjunto de polinomios $\{g_1, \ldots, g_m\}$ una base de Gröbner de un ideal I de $k[x_1, \ldots, x_n]$ respecto al orden monomial $\leq$. Entonces, todo polinomio $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tiene un único residuo al dividir a f por los polinomios $g_1, \ldots, g_m$. Así, un polinomio está en el ideal I si y sólo si tiene residuo cero dividiendo por los polinomios $g_1, \ldots, g_m$.*

Existe un criterio para determinar si un conjunto generador de un ideal de $k[x_1,\ldots,x_n]$ es una base de Gröbner con respecto a un orden monomial, y se le conoce como el **criterio de Buchberger**. Para enunciarlo necesitaremos definir algunos polinomios. Para los monomios $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ y $x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}$, se define su **máximo común divisor** como el monomio

$$\gcd\left(x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}, x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}\right) = x_1^{\gamma_1}\cdots x_n^{\gamma_n},$$

donde $\gamma_i = \text{mín}\{\alpha_i,\beta_i\}$. Así, para $f,g \in k[x_1,\ldots,x_n]$ polinomios no cero, se define el polinomio $S(f,g)$ como

$$S(f,g) := \frac{\text{in}_{\leq}(g)}{\gcd(\text{in}_{\leq}(f), \text{in}_{\leq}(g))}f - \frac{\text{in}_{\leq}(f)}{\gcd(\text{in}_{\leq}(f), \text{in}_{\leq}(g))}g.$$

Observe que si f y g son monomios, entonces el polinomio $S(f,g)$ siempre es cero.

Con estos elementos se tiene el criterio que determina si un conjunto generador de un ideal es una base de Gröbner:

Teorema 1.16. [**3**, Criterio de Buchberger, Capítulo 2, Teorema 2.14]

Sean $\leq$ *un orden monomial sobre* $k[x_1,\ldots,x_n]$ *e* $I = \langle g_1,\ldots,g_m\rangle$ *con* $g_i \neq 0$ *para todo* $i \in \{1,\ldots,m\}$. *Son equivalentes:*

1. $\mathcal{G} = \{g_1,\ldots,g_m\}$ *es base de Gröbner de* I *con respecto a* $\leq$.
2. *El residuo de la división de* $S\left(g_i,g_j\right)$ *por los polinomios de* $\mathcal{G}$ *es cero para todo* $i<j$.

Así, si los polinomios $g_1\ldots g_m$ *son monomios, entonces forman una base de Gröbner del ideal* I *con respecto a cualquier orden monomial.*

Observación 1.17. (Algoritmo de Buchberger)

Fijamos un orden monomial $\leq$ sobre $k[x_1,\ldots,x_n]$. Consideremos el ideal I de $k[x_1,\ldots,x_n]$ generado por los polinomios $f_1,\ldots,f_\ell$. Sea

$$\mathcal{G}_0 = \{f_1,\ldots,f_\ell\}.$$

Si el residuo de $S\left(f_i,f_j\right)$ por $\mathcal{G}_0$ es cero para todo $i\neq j$, entonces $\mathcal{G}_0$ es una base de Gröbner de I. Si sucede lo contrario, para algunos $i_0\neq j_0$ se define

$$\mathcal{G}_1 = \left\{f_1,\ldots,f_\ell,\overline{S\left(f_{i_0},f_{j_0}\right)}^{\mathcal{G}_0}\right\},$$

donde $\overline{S\left(f_{i_0},f_{j_0}\right)}^{\mathcal{G}_0}$ es el residuo de $S\left(f_{i_0},f_{j_0}\right)$ por $\mathcal{G}_0$. Si el residuo de $S\left(f_i,f_j\right)$ por $\mathcal{G}_1$ es cero para todo $i\neq j$, entonces $\mathcal{G}_1$ es una base de Gröbner de I. Si ocurre lo contrario se hace un proceso análogo y este proceso se itera. Denotamos como $\mathrm{in}_{\leq}(\mathcal{G}) = \langle \mathrm{in}_{\leq}(f) \mid f \in \mathcal{G} \rangle \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$. El algoritmo anterior produce la siguiente cadena:

$$\mathrm{in}_{\leq}(\mathcal{G}_0) \subsetneq \mathrm{in}_{\leq}(\mathcal{G}_1) \subsetneq \cdots$$

pues

$$\mathcal{G}_0 \subsetneq \mathcal{G}_1 \subsetneq \cdots$$

y la contención de los ideales es propia por la condición 2 del algoritmo de la división. Por lo tanto, este algoritmo termina en una cantidad finita de pasos pues $k[x_1, \ldots, x_n]$ es un anillo noetheriano.

Capítulo 2

Bases de Gröbner para módulos

En este capítulo se verán las generalizaciones de algunos resultados del capítulo anterior en el contexto de módulos sobre el anillo de polinomios tales como la existencia de bases de Gröbner, el algoritmo de la división y el algoritmo de Buchberger. Además, se mostrará una relación entre módulos de sizigias y las bases de Gröbner para módulos.

Para este capítulo se usará la notación $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ y se tomará a r como un entero positivo. Nos restringiremos al caso de $S-$módulos libres finitamente generados. Además, consideremos la notación

$$F = (S)^r = \overbrace{S \times \cdots \times S}^{r-\text{veces}}$$

para el $S-$módulo libre de rango r.

Como S tiene estructura de $k-$espacio vectorial dada por la $k-$base $\operatorname{Mon}(S)$ y F tiene la $S-$base canónica $e_1, \ldots, e_r$, se tiene que F tiene estructura de $k-$espacio vectorial dada por la $k-$base canónica

$$\bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Mon}(S)\, e_i,$$

donde

$$\operatorname{Mon}(S)\, e_i = \{ue_i \in F \mid u \in \operatorname{Mon}(S)\}.$$

A los elementos de la unión se les llamará **monomios de F** y al conjunto de ellos se le denotará como $\operatorname{Mon}(F)$.

Definición 2.1. (Módulo monomial)

Un S-submódulo $U \subseteq F$ es un **módulo monomial** si es generado (como $S-$módulo) por monomios.

Este tipo de módulos son caracterizados por la siguiente propiedad:

Proposición 2.2. *Considere un $S-$submódulo U de F. Entonces,*

$$[U \text{ es monomial}] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} U = I_1 e_1 \oplus \cdots \oplus I_r e_r, \text{ donde} \\ I_1, \ldots, I_r \text{ son ideales monomiales de } S. \end{array} \right]$$

Así, se sigue que si U es monomial, entonces es finitamente generado.

Demostración.

($\Rightarrow$) Considere una familia L de monomios generadores de U como $S-$módulos. Considerando las proyecciones

$$\pi_i : L \to S,$$

se tiene $\pi_i(L) \subseteq \mathrm{Mon}(S)$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Por el lema de Dickson, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ existen $u_1^i, \ldots, u_{l_i}^i \in \pi_i(L)$ tales que

$$I_i := \left\langle u_1^i, \ldots, u_{l_i}^i \right\rangle = \langle \pi_i(L) \rangle \subseteq S.$$

Se afirma que

$$U = I_1 e_1 \oplus \cdots \oplus I_r e_r.$$

En efecto, fijando un $j \in \{1, \ldots, r\}$, como $u_i^j e_j \in L$ para todo $i \in \left\{1, \ldots, l_j\right\}$, se tiene que $I_j e_j \subseteq U$. Así,

$$I_1 e_1 \oplus \cdots \oplus I_r e_r \subseteq U.$$

Dado que L es un conjunto generador de U, se tiene que

$$U \subseteq I_1 e_1 \oplus \cdots \oplus I_r e_r.$$

($\Leftarrow$) Como los ideales $I_1, \ldots, I_r$ son monomiales, son generados por monomios, por lo cual U es generado por monomios.

❑

Observación 2.3. Sean U un $S-$submódulo monomial de F y $m \in \mathrm{Mon}(F)$. Entonces, por el resultado anterior, se tiene que

$$[m \in U] \Leftrightarrow [m = um' \text{ donde } m' \text{ es generador de } U \text{ y } u \in \mathrm{Mon}(S)],$$

obteniendo así un análogo a la Proposición 1.2.

1. Órdenes monomiales sobre módulos y bases de Gröbner para módulos

En esta sección se busca extender la noción de bases de Gröbner para módulos. Para ello, es indispensable extender la noción de órdenes monomiales a los módulos de la siguiente forma:

Definición 2.4. (Orden monomial)

Un orden total $\leq$ sobre $\mathrm{Mon}(F)$ es un **orden monomial sobre F** si se cumplen:

1. $m < um$ para todo $m \in \mathrm{Mon}(F)$ y para todo $u \in \mathrm{Mon}(S)$ diferente de uno.

2. Para cualesquier $m_1, m_2 \in \mathrm{Mon}(F)$ tales que $m_1 < m_2$, se tiene que

$$um_1 < um_2 \text{ para todo } u \in \mathrm{Mon}(S).$$

Existen dos formas estándares para definir órdenes monomiales sobre F, para estas técnicas es necesario fijar un orden monomial $\leq$ sobre S:

- **Posición sobre coeficiente**:
$$\left[ve_i < ue_j\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} i < j, \text{ o bien,} \\ v < u \text{ si } i = j \end{array}\right].$$
- **Coeficiente sobre posición**:
$$\left[ve_i < ue_j\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} v < u, \text{ o bien,} \\ i < j \text{ si } v = u \end{array}\right].$$

Típicamente el **orden lexicográfico** sobre el $S-$módulo libre F es el orden lexicográfico sobre S dando prioridad a la posición sobre el coeficiente. Por ejemplo, considerando el módulo libre $F = S^2$, se tiene que $x_1e_2 <_{lex} x_2e_1$.

Observación 2.5. Dado cualquier orden monomial $\leq$ sobre un $S-$módulo libre F de rango r, se tiene que la restricción de $\leq$ en $Se_i \subset F$ para cualquier $i \in \{1, \ldots, r\}$ es un orden monomial sobre S.

Proposición 2.6. *Sea $\leq$ un orden monomial sobre F. Entonces, toda cadena decreciente de monomios se estabiliza.*

Demostración. Considere la cadena
$$m_1 \geq m_2 \geq \cdots$$
de monomios en $\mathrm{Mon}(F)$. Sea U el $S-$módulo generado por la colección $\{m_i \mid i \in \mathbb{Z}_{>0}\}$. Por la Proposición 2.2, U es finitamente generado. Así, existen enteros $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ tales que $m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}$ generan al $S-$módulo U. Sea $\ell \geq i_k$. Entonces, $m_{i_k} \geq m_\ell$ y como $m_\ell \in U$ existe un $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $m_\ell = um_{i_j}$ para algún $u \in \mathrm{Mon}(S)$ con $m_{i_j} \leq m_\ell$. De esta manera, se tienen las siguientes desigualdades:
$$m_{i_k} \geq m_\ell \geq m_{i_j} \geq m_{i_k}.$$
Por consiguiente, $m_{i_k} = m_\ell$ y la cadena se estabiliza en i_k. ❑

Definición 2.7. (Monomio inicial y módulo inicial)

Considere $f \in F$ no cero. El **soporte de f** denotado por $\mathrm{supp}(f)$ es el conjunto de monomios que componen a f. Fijando un orden monomial $\leq$ sobre F, el **monomio inicial de f** es el máximo del conjunto $\operatorname{supp}(f)$ con respecto al orden monomial $\leq$, al cual se le denota por $\mathrm{in}_{\leq}(f)$. Para un $S-$submódulo U de F, se denota por $\mathrm{in}_{\leq}(U)$ al módulo generado por monomios iniciales de los elementos de U no cero. A este módulo se le conoce como el **módulo inicial de U**.

Por la Proposición 2.2, el módulo $\mathrm{in}_{\leq}(U)$ es finitamente generado. Más aún, existen $f_1, \ldots, f_m \in U$ tales que

$$\langle \mathrm{in}_{\leq}(f_1), \ldots, \mathrm{in}_{\leq}(f_m) \rangle = \mathrm{in}_{\leq}(U).$$

Al igual que en el caso de ideales, al conjunto $\{f_1, \ldots, f_m\}$ se le llama **base de Gröbner** del $S-$módulo U con respecto al orden monomial $\leq$ sobre F.

Observación 2.8. Los elementos canónicos $e_1, \ldots, e_r$ forman una base de Gröbner de F para cualquier orden monomial sobre F. Más aún, para cualquier $S-$módulo monomial U, por la Observación 2.3 se tiene que

$$U = \mathrm{in}_{\leq}(U).$$

Además, se tiene un resultado análogo al algoritmo de la división para módulos y cuya demostración es análoga al caso de polinomios (ver [**3**]):

Teorema 2.9. [**3**, Algoritmo de la división para módulos, Capítulo 4, Teorema 4.9]

Fijamos un orden monomial $\leq$ sobre F. Sean $f \in F$ y $\{g_1, \ldots, g_m\} \subset F$ un conjunto finito de elementos no cero. Entonces, existen $q_1, \ldots, q_m \in S$ y $r \in F$ tales que se cumple:

1. $f = q_1 g_1 + \cdots + q_m g_m + r$.
2. $\operatorname{supp}(r) \cap \langle \mathrm{in}_{\leq}(g_1), \ldots, \mathrm{in}_{\leq}(g_m) \rangle = \emptyset$.
3. $\mathrm{in}_{\leq}(f) \geq \mathrm{in}_{\leq}(q_i g_i)$ *para todo* $q_i g_i \neq 0$.

*A r se le conoce como el **residuo de la división de f por $g_1, \ldots, g_m$** y a la expresión de f del punto 1 se le conoce como la* **expresión estándar de f**.

Al igual que en el caso de polinomios, se tiene la siguiente consecuencia del algoritmo de la división:

Corolario 2.10. *Sea U un $S-$submódulo de F. Entonces, toda base de Gröbner de U es un sistema generador de U. Así, F es un $S-$módulo de Noether.*

Otra propiedad análoga que se tiene en el caso de $S-$módulos es la unicidad del residuo cuando se hace la división con bases de Gröbner:

Proposición 2.11. *Sean $\leq$ un orden monomial sobre F, U un submódulo de F, $\{g_1, \ldots, g_m\}$ una base de Gröbner de U respecto al orden $\leq$ y $f \in F$. Entonces,*

1. *f tiene residuo único respecto a $g_1, \ldots, g_m$.*
2. *$f \in U$ si y sólo si f tiene residuo cero con respecto a $g_1, \ldots, g_m$.*

El siguiente objetivo es generalizar el criterio y el algoritmo de Buchberger para el caso de $S-$módulos. Para ello, es necesario definir el análogo a los $S-$polinomios:

Definición 2.12. ($S-$elementos)

Sean $\leq$ un orden monomial sobre F y $f, g \in F$ tales que $\mathrm{in}_{\leq}(f) = ue_i$ y $\mathrm{in}_{\leq}(g) = ve_i$ para $i \in \{1, \ldots, r\}$ y $u, v \in \mathrm{Mon}(S)$. Es decir, los monomios iniciales de f y g respecto a $\leq$ están en la misma coordenada de F. Se define el **$S-$elemento de f y g** como el elemento

$$S(f,g) := \frac{v}{\gcd(u,v)} f - \frac{u}{\gcd(u,v)} g.$$

De esta forma, se obtiene el siguiente criterio para determinar si un conjunto generador es una base de Gröbner:

Teorema 2.13. [**3**, Criterio de Buchberger para módulos, Capítulo 4, Teorema 4.11]

Sean $\leq$ un orden monomial sobre F, U un $S-$submódulo de F y $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_m\}$ un sistema de generadores de U. Entonces, $\mathcal{G}$ es una base de Gröbner de U respecto a $\leq$ si y sólo si para cada par de elementos $\left(g_i, g_j\right)$ cuyo monomio inicial está en la misma coordenada de F, se tiene que $S\left(g_i, g_j\right)$ tiene residuo cero con respecto a $\mathcal{G}$.

Observación 2.14. (Algoritmo de Buchberger)

Fijamos un orden monomial $\leq$ sobre F. Considere un $S-$submódulo $U = \langle f_1, \ldots, f_\ell \rangle$ de F. Sea

$$\mathcal{G}_0 := \{f_1, \ldots, f_\ell\}.$$

Si $S\left(f_i, f_j\right)$ tiene residuo cero respecto $\mathcal{G}_0$ para todo $i \neq j$ (donde exista el $S-$elemento), entonces $\mathcal{G}_0$ es base de Gröbner de U. Si $S\left(f_{i_0}, f_{j_0}\right)$ tiene residuo no cero respecto $\mathcal{G}_0$ para algunos $i_0 \neq j_0$ (donde exista el $S-$elemento), se define

$$\mathcal{G}_1 := \left\{f_1, \ldots, f_\ell, \overline{S\left(f_{i_0}, f_{j_0}\right)}^{\mathcal{G}_0}\right\},$$

donde $\overline{S\left(f_{i_0}, f_{j_0}\right)}^{\mathcal{G}_0}$ es el residuo de la división de $S\left(f_{i_0}, f_{j_0}\right)$ con $\mathcal{G}_0$. Si $S(f,g)$ tiene residuo cero respecto $\mathcal{G}_1$ para todo $f, g \in \mathcal{G}_1$ (donde exista el $S-$elemento), entonces $\mathcal{G}_1$ es base de Gröbner de U. De lo contrario, el proceso se itera. Denotamos como $\mathrm{in}_{\leq}(\mathcal{G}) = \langle \mathrm{in}_{\leq}(f) \mid f \in \mathcal{G} \rangle \subseteq F$. El algoritmo anterior cumple que

$$\mathrm{in}_{\leq}(\mathcal{G}_0) \subsetneq \mathrm{in}_{\leq}(\mathcal{G}_1) \subsetneq \cdots \tag{1.1}$$

pues

$$\mathcal{G}_0 \subsetneq \mathcal{G}_1 \subsetneq \cdots$$

y la contención (1.1) de los $S-$módulos es propia por la condición 2 de residuo del algoritmo de la división. Este proceso termina en una cantidad finita de pasos, pues F es un $S-$módulo noetheriano.

2. Resoluciones y módulos de sizigias

Considere un anillo noetheriano R y un $R-$módulo finitamente generado $M = \langle m_1, \ldots, m_r \rangle$. Existe el $R-$homomorfismo siguiente:

$$\begin{aligned} \varepsilon : R^r &\to M \\ e_i &\mapsto m_i, \end{aligned}$$

el cual es sobreyectivo. Como $\ker \varepsilon \subseteq R^r$ y R es de Noether, se tiene que es finitamente generado y así, procediendo de manera análoga, existe un $R-$homomorfismo sobreyectivo

$$\varepsilon_1 : R^{r_1} \to \ker \varepsilon$$

donde $r_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$. De esta manera, se obtiene la sucesión exacta:

$$\mathbb{F}: \ \cdots \xrightarrow{\varepsilon_3} R^{r_2} \xrightarrow{\varepsilon_2} R^{r_1} \xrightarrow{\varepsilon_1} R^r \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

A la sucesión exacta $\mathbb{F}$ se le llamará una ***R*−resolución libre de *M*** y a $\operatorname{Im}(\varepsilon_i) = \ker(\varepsilon_{i-1}) \subseteq R^{r_{i-1}}$ se le llamará el ***i*−ésimo módulo de sizigias de *M*** con respecto a la resolución $\mathbb{F}$.

Resulta que cuando $R = k[x_1, \ldots, x_n]$, se pueden usar las bases de Gröbner para calcular los módulos de sizigias:

Sean $S = k[x_1, \ldots, x_n]$, $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $F = S^r$. Consideremos un $S-$módulo finitamente generado M y asumimos que el número de generadores es r. Entonces,

$$M = \frac{F}{U},$$

donde U es un $S-$submódulo de F (el módulo U es el núcleo del $S-$homomorfismo sobreyectivo $\varepsilon : F \to M$). El $S-$módulo U es el primer módulo de sizigias de M. Como F es un $S-$módulo noetheriano, U es finitamente generado. Fijamos un orden monomial $\leq$ sobre F y consideramos una base de Gröbner $f_1, \ldots, f_m \in F$ de U respecto al orden monomial $\leq$. Así, existe un $S-$homomorfismo sobreyectivo

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 : S^m &\to U \\ e_i &\mapsto f_i \end{aligned}$$

Observe que $\ker\varepsilon_1 \subseteq S^m$ es el segundo módulo de sizigias de M, al cual, se le denota como $\operatorname{Syz}(f_1,\ldots,f_m)$[1]. Nótese que para $\sum_{i=1}^m s_ie_i \in S^m$, sucede que

$$\left[\sum_{i=1}^m s_ie_i \in \operatorname{Syz}(f_1,\ldots,f_m)\right] \Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^m s_if_i = 0 \in U\right].$$

Además, el criterio de Buchberger proporciona elementos de $\operatorname{Syz}(f_1,\ldots,f_m)$. Como $f_1,\ldots,f_m$ es una base de Gröbner, para los pares $\left(f_i,f_j\right)$ tales que el monomio inicial se encuentra en la misma coordenada se tiene que el $S-$elemento tiene residuo cero respecto a $f_1,\ldots,f_m$. Así, existen $q_{ij,1},\ldots,q_{ij,m} \in S$ tales que

$$S\left(f_i,f_j\right) = q_{ij,1}f_1 + \cdots + q_{ij,m}f_m,$$

es la expresión estándar de $S\left(f_i,f_j\right)$. Por otro lado,

$$S\left(f_i,f_j\right) = u_{ij}f_i - u_{ji}f_j,$$

donde los monomios u_{ij} y u_{ji} están definidos como

$$u_{ij} = \frac{u_j}{\gcd\left(u_i,u_j\right)} \text{ y } u_{ji} = \frac{u_i}{\gcd\left(u_i,u_j\right)},$$

y donde $\operatorname{in}_\leq(f_i) = u_ie_k$ e $\operatorname{in}_\leq\left(f_j\right) = u_je_k$. De esta manera,

$$u_{ij}f_i - u_{ji}f_j - q_{ij,1}f_1 - \cdots - q_{ij,m}f_m = 0 \in U.$$

Por lo tanto,

$$r_{ij} = u_{ij}e_i - u_{ji}e_j - q_{ij,1}e_1 - \cdots - q_{ij,m}e_m \in \operatorname{Syz}(f_1,\ldots,f_m)\,. \tag{2.1}$$

Resulta, que estos elementos generan el segundo módulo de sizigias:

Teorema 2.15. [**3**, Capítulo 4, Teorema 4.12]

Fijamos un orden monomial $\leq$ sobre F. Sea $U \subseteq F$ un $S-$módulo finitamente generado con base de Gröbner $f_1,\ldots,f_m$ respecto al orden monomial $\leq$. Los r_{ij} descritos en (2.1) generan al $S-$módulo $\operatorname{Syz}(f_1,\ldots,f_m)$.

Para el caso particular de módulos monomiales, se deduce el siguiente corolario:

Corolario 2.16. *Sea U un $S-$módulo generado por monomios $f_1,\ldots,f_m$. Entonces, el $S-$módulo* $\operatorname{Syz}(f_1,\ldots,f_m)$ *es generado por las relaciones $r_{ij} = u_{ij}e_i - u_{ji}e_j$ para todo $i < j$ tales que los monomios f_i y f_j están en la misma coordenada. Si $f_i = u_ie_k$ y $f_j = u_je_k$, entonces $u_{ij} = \operatorname{lcm}\left(u_i,u_j\right)/u_i$ y $u_{ji} = \operatorname{lcm}\left(u_i,u_j\right)/u_j$.*

[1] Al conjunto $\operatorname{Syz}(f_1,\ldots,f_m)$ se le conoce también al **conjunto de relaciones de U**, es decir, $\operatorname{Syz}(f_1,\ldots,f_m)$ consiste de todos los elementos $(s_1,\ldots,s_m) \in S^m$ tales que $\sum_{i=1}^m s_if_i = 0$.

Capítulo 3

Ideales de tipo lineal

Este capítulo tiene como objetivo mostrar una clasificación para algunos **ideales monomiales libres de cuadrados** y un caso especial para los **ideales de Veronese de bitipo**. Para realizar tal clasificación se dará un breve repaso del álgebra simétrica y del álgebra de Rees. Luego, se clasificarán los ideales de Veronese libres de cuadrados del anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n]$ y se hará un proceso análogo para ideales de productos mixtos y de Veronese de bitipo en el anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m]$.

1. El álgebra simétrica

Considere un anillo noetheriano S y un $S-$módulo M. Para $n \in \mathbb{N}$ se define el $S-$módulo

$$T^n(M) := \bigotimes_{i=1}^{n} M.$$

Tomando como convención que $T^0(M) = S$, se define el $S-$módulo graduado

$$T(M) := \bigoplus_{n \geq 0} T^n(M).$$

Observe que $T(M)$ es cerrado bajo el producto tensorial, de hecho, para $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$T^n(M) \otimes T^m(M) = T^{n+m}(M).$$

Luego, sea $\mathcal{J}$ el submódulo generado por todos los conmutadores de $T(M)$ respecto al producto tensorial, es decir,

$$\mathcal{J} = \langle x \otimes y - y \otimes x \mid x, y \in T(M) \rangle.$$

Usando la bilinealidad del producto tensorial se construye la siguiente $R-$álgebra:

Definición 3.1. (Álgebra simétrica)

Considerando a S y M como antes, el **álgebra simétrica de M** con respecto a S es la $S-$álgebra:

$$\mathrm{Sym}_S(M) := \frac{T(M)}{\mathcal{J}}.$$

Observación 3.2. El álgebra simétrica es conmutativa respecto al producto tensorial. Además, el álgebra simétrica tiene una estructura de anillo graduado dada por

$$\mathrm{Sym}_S^n(M) = \frac{T^n(M)}{T^n(M) \cap \mathcal{J}} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Con esto, se tiene la inclusión natural del S−módulo M en su álgebra simétrica:

$$M \cong \mathrm{Sym}_S^1(M) \hookrightarrow \mathrm{Sym}_S(M).$$

Dado que $\mathrm{Sym}_S(M)$ es generada por todos los posibles productos de los generadores de M, se tiene que todo morfismo de S−álgebras de la forma $\mathrm{Sym}_S(M) \to A$ está únicamente determinado por las imagénes de los generadores de M. Obtenemos así la siguiente propiedad del álgebra simétrica:

Teorema 3.3. [**1**, Capítulo 3, Sección 6, Proposición 2]

Sean M un S−módulo y A una S−álgebra. Si $f : M \to A$ es un homomorfismo de S−módulos, entonces existe un único homomorfismo de S−álgebras $g : \mathrm{Sym}_S(M) \to A$ tal que hace conmutar al diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & A \\ \mathrm{Sym}_S(M) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión natural.

Observación 3.4. En el caso particular del S−módulo libre S^n de rango n, se tiene que

$$\mathrm{Sym}_S(S^n) \cong S[x_1, \ldots, x_n]$$

como S−álgebras. En efecto, la asignación $S^n \to S[x_1, \ldots, x_n]$ dada por $(p_1, \ldots, p_n) \mapsto \sum_{i=1}^m p_i x_i$, induce un homomorfismo de S−álgebras

$$\mathrm{Sym}_S(S^n) \to S[x_1, \ldots, x_n]$$
$$e_i \mapsto x_i$$

cuya inversa es el homomorfismo de S−álgebras

$$S[x_1, \ldots, x_n] \to \mathrm{Sym}_S(S^n)$$
$$x_i \mapsto e_i$$

Además, para un homomorfismo de S−módulos $f : M \to N$ existe un único homomorfismo de S−álgebras inducido $\overline{f} : \mathrm{Sym}_S(M) \to \mathrm{Sym}_S(N)$ el cual está dado por el producto tensorial de las imagénes de f y así, hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & N \arrow[d, "i"] \\ \mathrm{Sym}_S(M) \arrow[r, "\overline{f}"'] & \mathrm{Sym}_S(N) \end{tikzcd}$$

Una propiedad importante del álgebra simétrica es su relación con las $S-$resoluciones libres:

Proposición 3.5. [**1**, Capítulo 3, Sección 6, Proposición 4]

Si $f : M \to N$ es un homomorfismo de $S-$módulos sobreyectivo, entonces el homomorfismo inducido $\overline{f} : \mathrm{Sym}_S(M) \to \mathrm{Sym}_S(N)$ es sobreyectivo y el núcleo de $\overline{f}$ es generado por el núcleo de f (considerando la inclusión $\ker f \hookrightarrow M \hookrightarrow \mathrm{Sym}_S(M)$).

Observación 3.6. Consideremos un $S-$módulo M finitamente generado. Entonces, una resolución libre

$$\cdots \xrightarrow{\varepsilon_3} S^{r_2} \xrightarrow{\varepsilon_2} S^{r_1} \xrightarrow{\varepsilon_1} S^{r} \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta

$$\cdots \xrightarrow{\overline{\varepsilon_2}} S[y_1,\ldots,y_{r_1}] \xrightarrow{\overline{\varepsilon_1}} S[y_1,\ldots,y_r] \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} \mathrm{Sym}_S(M) \longrightarrow 0$$

la cual cumple que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\varepsilon_2"] & S^{r_1} \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[d, "i"'] & S^{r} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "i"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & 0 \\ \cdots \arrow[r, "\overline{\varepsilon_2}"'] & S[y_1,\ldots,y_{r_1}] \arrow[r, "\overline{\varepsilon_1}"'] & S[y_1,\ldots,y_r] \arrow[r, "\overline{\varepsilon}"'] & \mathrm{Sym}_S(M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Así, cada $i-$ésimo módulo de sizigias de M genera al $i-$ésimo ideal $\ker(\overline{\varepsilon}_i)$.

Tomando el caso particular de $S = k[x_1,\ldots,x_n]$ e $I = \langle f_1,\ldots,f_m\rangle$ un ideal de S, se tiene el homomorfismo de $S-$módulos $\beta : S^m \to I$ definido como $\beta(p_1,\ldots,p_m) = \sum_{i=1}^m p_i f_i$. Tal homomorfismo es sobreyectivo e induce el homomorfismo sobreyectivo graduado

$$\overline{\beta} : S[y_1,\ldots,y_m] \to \mathrm{Sym}_S(I) \text{ donde } y_i \mapsto f_i. \tag{1.1}$$

Así,

$$\mathrm{Sym}_S(I) \cong \frac{S[y_1,\ldots,y_m]}{\ker\overline{\beta}},$$

donde

$$\ker\overline{\beta} = \left\langle \sum_{i=1}^m p_i y_i \mid \sum_{i=1}^m p_i f_i = 0,\ p_i \in S \right\rangle.$$

Es decir, $\ker\overline{\beta}$ está generado por las relaciones $S-$lineales de los $f_1, \dots f_m$.

2. El álgebra de Rees

Sea I un ideal graduado de $S = k[x_1, \dots, x_n]$ generado por los elementos homogéneos $f_1, \dots, f_m$. Entonces, podemos considerar el homomorfismo de $S-$álgebras graduado definido como

$$\begin{aligned} \varphi : S[y_1, \dots, y_m] &\to S[t] \\ y_i &\mapsto f_i t. \end{aligned}$$

Denotamos $\mathcal{R}(I) := \ker\varphi$. A la imagen de este homomorfismo se le conoce como el **álgebra de Rees del ideal *I*** y se le denota como $\mathcal{R}_I$.

Observación 3.7. El álgebra de Rees tiene una estructura $S-$graduada dada como sigue:

$$\mathcal{R}_I = S \oplus It \oplus I^2t^2 \oplus \cdots$$

En efecto, es directo que

$$I^i t^i \subseteq \mathcal{R}_I \text{ para todo } i \geq 0.$$

Luego, sea

$$\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)} p_{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)} (f_1t)^{\alpha_1} \cdots (f_mt)^{\alpha_m} \in \mathcal{R}_I,$$

y notemos que claramente

$$(f_1t)^{\alpha_1} \cdots (f_mt)^{\alpha_m} = f_1^{\alpha_1} \cdots f_m^{\alpha_m} t^{\alpha_1+\dots+\alpha_m} \in I^{\alpha_1+\dots+\alpha_m} t^{\alpha_1+\dots+\alpha_m}.$$

Así, $\mathcal{R}_I = \sum_{n\geq 0} I^n t^n$ y además

$$\left[I^i t^i \cap I^j t^j = \{0\}\right] \Leftrightarrow [i \neq j].$$

Observe que el hecho de que φ sea graduado implica que $\mathcal{R}(I)$ es un $S-$submódulo graduado de $S[y_1, \dots, y_m]$ y además dado un polinomio homogéneo $\sum_{|\alpha|=d} p_\alpha y^\alpha \in \mathcal{R}(I)$ se tiene que

$$\left[\sum_{|\alpha|=d} p_\alpha f_1^{\alpha_1} \cdots f_m^{\alpha_m} t^d = 0\right] \Leftrightarrow \left[\sum_{|\alpha|=d} p_\alpha f_1^{\alpha_1} \cdots f_m^{\alpha_m} = 0\right].$$

Por lo anterior,

$$\left[\sum_{|\alpha|=d} p_\alpha y^\alpha \in \mathcal{R}(I)\right] \Leftrightarrow \left[\{p_\alpha\}_{|\alpha|=d} \in \operatorname{Syz}\left(I^d\right)\right].$$

En el caso particular de que $f_1, \dots, f_m$ sean monomios, por el Corolario 2.16, se tiene que el ideal $\mathcal{R}(I)$ es tórico, es decir, primo y generado por binomios $x^{\alpha'}y^\alpha - x^{\beta'}y^\beta \in S[y_1, \dots, y_m]$ tales que

$$x^{\alpha'} f^\alpha - x^{\beta'} f^\beta = 0,$$

donde $\alpha', \beta' \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ con $|\alpha| = |\beta|$. Usando el algoritmo de Buchberger, no es difícil probar que para cualquier orden monomial, la base de Gröbner de $\mathcal{R}(I)$ es binomial.

Por otro lado, como $f_1, \ldots, f_m$ generan al ideal I, se puede considerar el epimorfismo $\overline{\beta}$ de la Ecuación (1.1). Así, existe un homomorfismo $\alpha : \mathrm{Sym}_S(I) \to \mathcal{R}_I$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} S[y_1, \ldots, y_m] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\overline{\beta}"'] & \mathcal{R}_I \\ \mathrm{Sym}_S(I) \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\varphi = \alpha \circ \overline{\beta}$. De esta forma, $\alpha(f_i) = f_i t$ y α es $S-$epimorfismo. Observe que $\ker \overline{\beta}$ es generado por polinomios lineales y $\ker \overline{\beta} \subseteq \ker \varphi$.

Definición 3.8. (Ideal de tipo lineal)
Un ideal I de S es de **tipo lineal** si $\mathcal{R}(I)$ está generado por polinomios homogéneos de grado 1.

Observación 3.9. Si $I = \langle f \rangle$ con f polinomio no cero, entonces $\mathcal{R}(I) = \{0\}$. En efecto, dado un elemento homogéneo $p_d y^d \in S[y_1]$, se tiene

$$\begin{aligned} \left[p_d y^d \in \mathcal{R}(I)\right] &\Leftrightarrow \left[p_d f^d t^d = 0\right] \\ &\Leftrightarrow \left[p_\alpha f^d = 0 \text{ en } S\right] \\ &\Leftrightarrow \left[p_d = 0 \text{ en } S\right]. \end{aligned}$$

Consecuentemente, $\mathcal{R}(I) = \{0\}$.

Si I es de tipo lineal, entonces la contención $\ker \overline{\beta} \subseteq \ker \varphi$ es una igualdad. Pues, dado un elemento generador $\sum_{i=1}^m p_i y_i$ de $\ker \varphi$, entonces

$$\sum_{i=1}^m p_i f_i t = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m p_i f_i = 0,$$

y con ello $\sum_{i=1}^m p_i y_i \in \ker \overline{\beta}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} [I \text{ es de tipo lineal}] &\Leftrightarrow \left[\ker \overline{\beta} = \ker \varphi\right] \\ &\Leftrightarrow [\ker \alpha = \{0\}] \\ &\Leftrightarrow [\alpha \text{ es un isomorfismo}]. \end{aligned}$$

Si I es un ideal generado por los monomios $f_1, \ldots, f_m$; para $1 \leq i < j \leq m$ se definen los siguientes polinomios en $S[y_1, \ldots, y_m]$:

$$g_{ij} := f_{ij} y_j - f_{ji} y_i, \tag{2.1}$$

donde $f_{ij} = \dfrac{f_i}{\gcd\left(f_i, f_j\right)}$ y $f_{ji} = \dfrac{f_j}{\gcd\left(f_i, f_j\right)}$. Por el Corolario 2.16, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.10. *Sea I un ideal generado por los monomios $f_1, \ldots, f_m$. Entonces, la familia $\left\{g_{ij}\right\}_{1\leq i<j\leq m}$ - definida en (2.1) - genera a $\ker\overline{\beta}$.*

El resultado anterior ofrece un método para determinar si un ideal generado por monomios $f_1, \ldots, f_m$ es un ideal de tipo lineal. Si las relaciones binomiales de $\mathcal{R}(\langle f_1, \ldots, f_m\rangle)$ son combinaciones de los polinomios g_{ij} mencionados anteriormente, se tiene como resultado que el ideal $\langle f_1, \ldots, f_m\rangle$ es de tipo lineal.

3. Ideales de productos mixtos y de Veronese de bitipo

Sean n un número natural y $S = k[x_1, \ldots, x_n]$. Considere los monomios

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1^{\alpha_1^{(1)}} \cdots x_n^{\alpha_n^{(1)}}, \\ f_2 &= x_1^{\alpha_1^{(2)}} \cdots x_n^{\alpha_n^{(2)}}, \\ &\vdots \\ f_m &= x_1^{\alpha_1^{(m)}} \cdots x_n^{\alpha_n^{(m)}} \end{aligned}$$

en S, I el ideal monomial generado por los monomios anteriores y el homomorfismo φ que determina el álgebra de Rees $\mathcal{R}_I$. Observe que si existen diferentes índices $i, j, \ell, t \in \{1, \ldots, m\}$ tales que $y_iy_j - y_\ell y_t \in \mathcal{R}(I)$, entonces se tiene que I no es de tipo lineal. En efecto, si I fuese de tipo lineal, por la Proposición 3.10 se tendría que las relaciones de $\mathcal{R}(I)$ son lineales (sobre las variables $y_1, \ldots, y_m$). Así, observamos qué condiciones deben cumplir los monomios para que tales índices diferentes existan:

$$\begin{aligned} \left[y_iy_j - y_\ell y_t \in \mathcal{R}(I)\right] &\Leftrightarrow \left[x_1^{\alpha_1^{(i)}+\alpha_1^{(j)}} \cdots x_n^{\alpha_n^{(i)}+\alpha_n^{(j)}} = x_1^{\alpha_1^{(\ell)}+\alpha_1^{(t)}} \cdots x_n^{\alpha_n^{(\ell)}+\alpha_n^{(t)}}\right] \\ &\Leftrightarrow \left[\alpha_r^{(i)} + \alpha_r^{(j)} = \alpha_r^{(\ell)} + \alpha_r^{(t)} \text{ para todo } r \in \{1, \ldots, n\}\right] \\ &\Leftrightarrow \left[\alpha_r^{(i)} - \alpha_r^{(\ell)} = \alpha_r^{(t)} - \alpha_r^{(j)} \text{ para todo } r \in \{1, \ldots, n\}\right]. \end{aligned}$$

Para monomios libres de cuadrados, esta última condición es equivalente a que se cumpla la siguiente afirmación: los monomios de f_i coinciden con los de f_ℓ si y sólo si los monomios de f_j coinciden con los monomios de f_t. En lo sucesivo, se usarán estas observaciones para determinar si algunos ideales no son de tipo lineal.

3.1. Ideales de Veronese libres de cuadrados. Se define el **ideal de Veronese de grado** ℓ como el ideal monomial libre de cuadrados generado por ℓ productos de variables diferentes del conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$. A tal ideal lo vamos a denotar como I_ℓ.

EJEMPLO 3.11. Considerando $k[x_1, x_2, x_3]$, el ideal

$$I_2 = \langle x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3 \rangle$$

es el ideal de Veronese de grado 2 en $k[x_1, x_2, x_3]$.

Se tiene el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 3.12. *Si* $1 < \ell < n-1$, *entonces* I_ℓ *no es de tipo lineal.*

DEMOSTRACIÓN. Como los generadores de I_ℓ consisten de ℓ productos en las n variables, se tiene que existen dos generadores $x_{i_1} \cdots x_{i_\ell}$ y $x_{j_1} \cdots x_{j_\ell}$ tales que difieren en dos variables. Sin perder generalidad, asumimos que $x_{i_{l-1}}, x_{i_\ell}, x_{j_{l-1}}$ y x_{j_ℓ} son tales variables. Así, construimos los l productos, $x_{i_1} \cdots x_{i_{\ell-1}} x_{j_\ell}$ y $x_{j_1} \cdots x_{j_{\ell-1}} x_{i_\ell}$. Observe que los monomios $x_{i_1} \cdots x_{i_\ell}$ y $x_{i_1} \cdots x_{i_{\ell-1}} x_{j_\ell}$ son iguales salvo la última variable (al igual que $x_{j_1} \cdots x_{j_\ell}$ y $x_{j_1} \cdots x_{j_{\ell-1}} x_{i_\ell}$). Además, los generadores

$$f_i = x_{i_1} \cdots x_{i_\ell},\ f_j = x_{j_1} \cdots x_{j_\ell},\ f_\ell = x_{i_1} \cdots x_{i_{\ell-1}} x_{j_\ell} \text{ y } f_t = x_{j_1} \cdots x_{j_{l-1}} x_{i_\ell},$$

son diferentes y cumplen con la siguiente propiedad: los monomios de f_i y f_ℓ coinciden si y sólo si los monomios de f_j y f_t coinciden. Por lo tanto, $y_iy_j - y_\ell y_t \in \mathcal{R}(I_\ell)$ e I_ℓ no es de tipo lineal. ❑

Para el caso $\ell = 1$, observe que $x_1, \ldots, x_n$ en $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ es una ***d*−sucesión**, es decir, para todo $j \geq i+1$ con $i \geq 1$ se cumple que

$$\Big(\langle x_1, \ldots, x_i \rangle : x_jx_{i+1}\Big) = \Big(\langle x_1, \ldots, x_i \rangle : x_j\Big).$$

Esto sucede ya que los ideales $\langle x_1, \ldots, x_i \rangle \subset S$ son primos para todo $i \geq 1$. En [**4**], Huneke demostró que todos los ideales tales que son generados por d−sucesiones son de tipo lineal. Por ende, el ideal $I_1 = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ es de tipo lineal.

TEOREMA 3.13. *El ideal* $I_{n-1} \subset S$ *es de tipo lineal.*

DEMOSTRACIÓN. Considere los generadores de I_{n-1} denotados como

$$f_i = x_1 \cdots x_{n-i-1} \widehat{x_{n-i}} x_{n-i+1} \cdots x_n \text{ para } i = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Aquí, la notación $\widehat{x_{n-i}}$ significa que el elemento x_{n-i} no es miembro del producto f_i.

Dado que I_{n-1} es un ideal monomial libre de cuadrados, para mostrar que es de tipo lineal, se debe mostrar que el ideal $\mathcal{R}(I_{n-1})$ es generado por los polinomios lineales $g_{ij} = f_{ij}y_j - f_{ji}y_i$

(definidos en la Ecuación (2.1)). Mostraremos que tales polinomios forman una base de Gröbner de $\mathcal{R}(I_{n-1})$ respecto al orden monomial $<_{plex}$ sobre $k[x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_n]$. Observe que

$$\mathrm{in}_{<_{plex}}\left(g_{ij}\right) = f_{ij}y_j,$$

pues

$$f_{ij} = x_{n-j} >_{plex} x_{n-i} = f_{ji} \text{ con } i < j.$$

Sea $\Gamma = \left\langle f_{ij}y_j \mid 1 \leq i < j \leq n\right\rangle$. Asuma que tal resultado es falso. Dado que las relaciones binomiales forman una base de Gröbner de $\mathcal{R}(I_{n-1})$, existiría un binomio $x^{\alpha'}y^{\alpha} - x^{\beta'}y^{\beta}$ tal que

$$\mathrm{in}_{<_{plex}}\left(x^{\alpha'}y^{\alpha} - x^{\beta'}y^{\beta}\right) \notin \Gamma.$$

Esto implicaría que $x^{\alpha'}y^{\alpha}, x^{\beta'}y^{\beta} \notin \Gamma$, pues si algún monomio estuviese, implicaría directamente que los dos están en el ideal Γ. Sea $i \geq 1$ el mínimo índice tal que la variable y_i divide a y^{α}, o bien, divide a y^{β}. Asuma que y_i divide a y^{β}. Así, f_i divide a $x^{\beta'}f^{\beta}$. Distinguimos dos casos:

1. Si $f_i \mid x^{\beta'}$, entonces sea y_j una variable de y^{β}. De este modo, se tiene que

$$f_{ij}y_j \mid f_iy_j \text{ y } f_iy_j \mid x^{\beta'}y^{\beta}.$$

2. Si $f_i \nmid x^{\beta'}$. Consideremos, $f_i = x_{i_1}\cdots x_{i_{n-1}}$ con $i_1 < \cdots < i_{n-1}$ e i_k el primer índice tal que $x_{i_k} \nmid x^{\beta'}$, por lo que $x_{i_1},\ldots,x_{i_{k-1}}$ dividen a $x^{\beta'}$. Dado que $f_i \mid x^{\beta'}f^{\beta}$ existe un j tal que $x_{i_k} \mid f_j$ y $y_j \mid y^{\beta}$. Como $x_{i_k} \mid f_i$, se tiene que $f_{ij} \mid x_{i_t}$ con $t \in \{1,\ldots,k-1\}$ y por tanto

$$f_{ij}y_j \mid x^{\beta'}y^{\beta}.$$

En ambos casos, obtenemos una contradicción. ❏

Corolario 3.14. *Un ideal de Veronese de grado ℓ sobre el anillo $k[x_1,\ldots,x_n]$ es de tipo lineal si y sólo si $\ell = 1$ o $\ell = n-1$.*

Para lo siguiente, considere enteros $n, m > 1$, $R = k[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m]$ y enteros ℓ, r, s, t no negativos tales que

$$\ell + r = s + t.$$

Sea I_ℓ el ideal monomial libre de cuadrados generado por ℓ productos de variables del conjunto $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Similarmente, J_r es el ideal monomial libre de cuadrados generado por r productos de variables del conjunto $\{y_1,\ldots,y_m\}$. Los ideales de la forma $I_\ell J_r + I_s J_t$ se les conoce como **ideales de productos mixtos**. Tomamos la convención $I_0 = J_0 = R$. Como en este trabajo se busca clasificar los ideales de productos mixtos normales (ver [7]), se considerarán los siguientes casos:

1. $I_\ell J_r$ con $1 \leq \ell \leq n$ y $1 \leq r \leq m$,

2. $I_\ell J_r + I_{\ell+1} J_{r-1}$ con $1 \leq \ell \leq n$ y $2 \leq r \leq m$, y
3. $J_r + I_s J_t$ con $r = s + t$, $1 \leq s \leq n$, $1 \leq r \leq m$ y $t \geq 1$.

Observe que estos ideales son libres de cuadrados.

Ejemplo 3.15.

1. Si $R = k[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2]$, se tiene que
$$I_2 J_1 = \langle x_1x_2y_1, x_1x_3y_1, x_2x_3y_1, x_1x_2y_2, x_1x_3y_2, x_2x_3y_2 \rangle .$$
2. Si $R = k[x_1, x_2, y_1, y_2, y_3]$, se tiene que
$$\begin{aligned} I_1 J_2 + I_2 J_1 &= \langle x_1y_1y_2, x_1y_1y_3, x_1y_2y_3, x_2y_1y_2, x_2y_1y_3, x_2y_2y_3 \rangle + \\ &+ \langle x_1x_2y_1, x_1x_2y_2, x_1x_2y_3 \rangle . \end{aligned}$$

En las siguientes secciones clasificaremos cuáles de los ideales de productos mixtos son de tipo lineal.

3.2. Caso 1: $I_\ell J_r$ para $1 \leq \ell \leq n$ y $1 \leq r \leq m$.

Proposición 3.16. *Si $1 < r < m - 1$, entonces $I_\ell J_r$ no es de tipo lineal.*

Demostración. Como $1 < r < m - 1$, existen dos productos mixtos
$$x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} y_{j_1} \cdots y_{j_r} \text{ y } x_{i'_1} \cdots x_{i'_\ell} y_{j'_1} \cdots y_{j'_r}$$
tales que difieren en dos variables del conjunto $\{y_1, \ldots, y_m\}$. Sin perder generalidad, asumimos que tales variables son $y_{j_{r-1}}, y_{j_r}, y_{j'_{r-1}}$ y $y_{j'_r}$. Así, se construyen productos
$$x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} y_{j_1} \cdots y_{j'_r} \text{ y } x_{i'_1} \cdots x_{i'_\ell} y_{j'_1} \cdots y_{j_r}.$$
Observe que los monomios $x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} y_{j_1} \cdots y_{j_r}$ y $x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} y_{j_1} \cdots y_{j'_r}$ son iguales salvo la última variable (al igual que $x_{i'_1} \cdots x_{i'_\ell} y_{j'_1} \cdots y_{j'_r}$ y $x_{i'_1} \cdots x_{i'_\ell} y_{j'_1} \cdots y_{j_r}$). Además, notemos que los generadores
$$\begin{aligned} f_i &= x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} y_{j_1} \cdots y_{j_r}, \\ f_j &= x_{j_1} \cdots x_{j_\ell}, \\ f_{\ell'} &= x_{i_1} \cdots x_{i_{\ell-1}} x_{j_\ell} \text{ y} \\ f_t &= x_{j_1} \cdots x_{j_{\ell-1}} x_{i_\ell} \end{aligned}$$
son diferentes y cumplen con la siguiente propiedad: los monomios de f_i y $f_{\ell'}$ coinciden si y sólo si los monomios de f_j y f_t coinciden. Por lo tanto, $y_i y_j - y_{\ell'} y_t \in \mathcal{R}(I_\ell J_r)$ y el ideal $I_\ell J_r$ no es de tipo lineal. ❏

Observación 3.17. Similarmente se puede demostrar que fijando $r = 1$, para valores de ℓ entre 1 y $n-1$, el ideal $I_\ell J_1$ no es de tipo lineal. Incluso si $\ell = 1$ con $n > 1$. En efecto, se construyen generadores $x_i y_j$ y $x_{i'} y_{j'}$ tales que difieren en todas las variables. Similarmente para $r = m-1$ y $l = n-1$. Estos resultados fuerzan a que las únicas opciones para ideales de tipo lineal sean: $I_{n-1}J_m$, $I_1 J_m$, $I_n J_{m-1}$ e $I_n J_1$.

Resulta entonces que los ideales mencionados en la Observación 3.17 son los únicos ideales de tipo lineal para los productos mixtos $I_s J_r$:

Teorema 3.18. *$I_{n-1}J_m$ y $I_1 J_m$ son de tipo lineal.*

Demostración. Para $I_{n-1}J_m$ considere los generadores

$$f_i' = f_i y_1 \cdots y_m$$

donde f_i es el generador de I_{n-1} dado en la Ecuación (3.1). Dado que $I_{n-1}J_m$ es un ideal monomial libre de cuadrados, para mostrar que es de tipo lineal, se debe mostrar que el ideal $\mathcal{R}(I_{n-1}J_m)$ en $k[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m; t_1, \ldots, t_n]$ es generado por los polinomios lineales $g_{ij} = f_{ij}' t_j - f_{ji}' t_i$ (descritos en la Ecuación (2.1)). Se mostrará que tales polinomios forman una base de Gröbner de $\mathcal{R}(I_{n-1}J_m)$ respecto al orden monomial $<_{plex}$ sobre $k[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m; t_1, \ldots, t_n]$. Observe que tenemos la igualdad

$$\mathrm{in}_{<_{plex}}\left(g_{ij}\right) = f_{ij}' t_j,$$

pues

$$f_{ij}' = x_{n-j} >_{plex} x_{n-i} = f_{ji}' \text{ con } i < j.$$

Sea $\Gamma = \left\langle f_{ij}' t_j \mid 1 \leq i < j \leq n \right\rangle$. De la demostración del Teorema 3.13, estos forman una base de Gröbner para las relaciones binomiales que no dependen de las variables $\{y_1, \ldots, y_m\}$. Por definición de los generadores $f_1', \ldots, f_n'$, las variables $\{y_1, \ldots, y_m\}$ aportan información irrelevante en las relaciones binomiales de $\mathcal{R}(I_{n-1}J_m)$. En efecto, dada una relación $x^{\alpha'} y^{\alpha''} t^{\alpha} - x^{\beta'} y^{\beta''} t^{\beta} \in \mathcal{R}(I_{n-1}J_m)$ homogénea (respecto a las variables $t_1, \ldots, t_n$) se tiene que

$$\begin{aligned} &x_1^{\alpha_1'} \cdots x_n^{\alpha_n'} y_1^{\alpha_1''} \cdots y_m^{\alpha_m''} f_1^{\alpha_1} y_1^{\alpha_1} \cdots y_m^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n} y_1^{\alpha_n} \cdots y_m^{\alpha_n} \\ &\qquad - x_1^{\beta_1'} \cdots x_n^{\beta_n'} y_1^{\beta_1''} \cdots y_m^{\beta_m''} f_1^{\beta_1} y_1^{\beta_1} \cdots y_m^{\beta_1} \cdots f_n^{\beta_n} y_1^{\beta_n} \cdots y_m^{\beta_n} = 0 \end{aligned}$$

y como $|\alpha| = |\beta|$, entonces $\alpha_t'' = \beta_t''$ para todo $t \in \{1, \ldots, m\}$. De esta forma la relación $x^{\alpha'} y^{\alpha''} t^{\alpha} - x^{\beta'} y^{\beta''} t^{\beta}$ es divisible por la relación $x^{\alpha'} t^{\alpha} - x^{\beta'} t^{\beta}$. Así, los polinomios g_{ij} forman una base de Gröbner del ideal $\mathcal{R}(I_{n-1}J_m)$ y por tanto $I_{n-1}J_m$ es de tipo lineal.

Para $I_1 J_m$ considere los generadores

$$f_i' = x_i y_1 \cdots y_m$$

Dado que $I_1 J_m$ es un ideal monomial libre de cuadrados, para mostrar que es de tipo lineal, se debe mostrar que el ideal $\mathcal{R}(I_1 J_m) \subset k[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m; t_1, \ldots, t_n]$ es generado por los polinomios lineales $g_{ij} = f'_{ij} t_j - f'_{ji} t_i$ (descritos en la Ecuación (2.1)). Se mostrará que dichos polinomios forman una base de Gröbner de $\mathcal{R}(I_1 J_m)$ respecto al orden monomial $<_{plex}$ sobre el anillo $k[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m; t_1, \ldots, t_n]$. Observe que

$$\mathrm{in}_{<_{plex}}\left(g_{ij}\right) = f'_{ij} t_j,$$

pues

$$f'_{ij} = x_i >_{plex} x_j = f'_{ji} \text{ con } i < j.$$

Sea $\Gamma = \left\langle f'_{ij} t_j \mid 1 \leq i < j \leq n \right\rangle$. De la demostración del Teorema 3.13, estos forman una base de Gröbner para las relaciones binomiales que no dependen de las variables $\{y_1, \ldots, y_m\}$. Con un argumento análogo al anterior caso, por definición de los generadores $f'_1, \ldots, f'_n$, las variables $\{y_1, \ldots, y_m\}$ aportan información irrelevante en las relaciones binomiales de $\mathcal{R}(I_{n-1} J_m)$. Así, los polinomios g_{ij} forman una base de Gröbner del ideal $\mathcal{R}(I_{n-1} J_m)$ y con ello $I_{n-1} J_m$ es de tipo lineal. ❏

Observación 3.19. Mostrar que $I_n J_{m-1}$ e $I_n J_1$ son ideales de tipo lineal es completamente análogo a la demostración del resultado anterior.

Corolario 3.20. *Los únicos ideales de productos mixtos de la forma $I_\ell J_r$ en el anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m]$ que son de tipo lineal son $I_{n-1} J_m$, $I_1 J_m$, $I_n J_{m-1}$ e $I_n J_1$.*

3.3. Caso 2: $I_\ell J_r + I_{l+1} J_{r-1}$ para $1 \leq \ell \leq n$ y $2 \leq r \leq m$.

Proposición 3.21. *Si $\ell < n-1$ o $r < m$, entonces $I_\ell J_r + I_{\ell+1} J_{r-1}$ no es de tipo lineal.*

Demostración. Si $\ell < n-1$, entonces existen dos ℓ productos tales que difieren en dos variables, digamos $x_{i_1} \cdots x_{i_\ell}$ y $x_{i'_1} \cdots x_{i'_\ell}$. Sin perder generalidad, se asume que $x_{i_{\ell-1}}$, x_{i_ℓ}, $x_{i'_{\ell-1}}$ y $x_{i'_\ell}$ son las variables donde difieren dichos ℓ productos. Así, $f_i := x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} y_1 \cdots y_r$ y $f_j := x_{i'_1} \cdots x_{i'_\ell} y_1 \cdots y_r$ son generadores diferentes del ideal $I_\ell J_r + I_{\ell+1} J_{r-1}$. Luego, se consideran los generadores $f_s := x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} x_{i'_\ell} y_1 \cdots y_{r-1}$ y $f_t := x_{i'_1} \cdots x_{i'_\ell} x_{i_\ell} y_1 \cdots y_{r-1}$ del ideal $I_\ell J_r + I_{\ell+1} J_{r-1}$. Observe que son diferentes y que cumplen la siguiente propiedad: los monomios de f_i y f_s coinciden si y sólo si los monomios de f_j y f_t coinciden. Por lo tanto, $y_i y_j - y_s y_t \in \mathcal{R}(I_\ell J_r + I_{\ell+1} J_{r-1})$ y así $I_\ell J_r + I_{\ell+1} J_{r-1}$ no es de tipo lineal.

Si $r < m$, entonces existen $r-1$ productos tales que difieren en dos variables, digamos $y_{j_1} \cdots y_{j_{r-1}}$ y $y_{j'_1} \cdots y_{j'_{r-1}}$. Sin perder generalidad, se asume que $y_{j_{r-2}}$, $y_{j_{r-1}}$, $y_{j'_{r-2}}$ y $y_{j'_{r-1}}$ son las variables donde difieren dichos $r-1$ productos. Así, $f_i := x_1 \cdots x_{\ell+1} y_{j_1} \cdots y_{j_{r-1}}$ y $f_j := x_1 \cdots x_{\ell+1} y_{j'_1} \cdots y_{j'_{r-1}}$

son generadores diferentes del ideal $I_\ell J_r + I_{\ell+1}J_{r-1}$. Luego, se consideran los generadores $f_s := x_1\cdots x_\ell y_{j_1}\cdots y_{j_{r-1}}y_{j'_{r-1}}$ y $f_t := x_1\cdots x_\ell y_{j'_1}\cdots y_{j'_{r-1}}y_{j_{r-1}}$ del ideal $I_\ell J_r + I_{\ell+1}J_{r-1}$. Observe que son diferentes y que cumplen la siguiente propiedad: los monomios de f_i y f_s coinciden si y sólo si los monomios de f_j y f_t coinciden. Por lo tanto, $y_iy_j - y_sy_t \in \mathcal{R}(I_\ell J_r + I_{\ell+1}J_{r-1})$ y con ello $I_\ell J_r + I_{\ell+1}J_{r-1}$ no es de tipo lineal. ❑

Dados los casos anteriores, se puede sospechar que el ideal $I_{n-1}J_m + I_nJ_{m-1}$ es de tipo lineal y no es la excepción, pues se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.22. *El ideal $I_{n-1}J_m + I_nJ_{m-1}$ es de tipo lineal.*

Demostración. Considere el siguiente conjunto generador de $I_{n-1}J_m + I_nJ_{m-1}$:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1x_2\cdots x_ny_1\cdots y_{m-1},\\ f_2 &= x_1\cdots x_ny_1\cdots y_{m-2}y_m,\\ &\vdots\\ f_m &= x_1\cdots x_ny_2\cdots y_m,\\ f_{m+1} &= x_1\cdots x_{n-1}y_1\cdots y_m,\\ &\vdots\\ f_{m+n} &= x_2\cdots x_ny_1\cdots y_m. \end{aligned}$$

De esta forma, probar que los polinomios $g_{ij} = f_{ij}t_j - f_{ji}t_i$ con $1 \le i < j \le n+m$ forman una base de Gröbner del ideal $\mathcal{R}(I_{n-1}J_m + I_nJ_{m-1})$ en $k[x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m;t_1,\dots,t_{n+m}]$ con respecto al orden lexicográfico se realiza de forma análoga a la del Teorema 3.13. Por lo tanto, $I_{n-1}J_m + I_nJ_{m-1}$ es de tipo lineal. ❑

Corolario 3.23. *El único ideal de producto mixto de la forma $I_\ell J_r + I_{l+1}J_{r-1}$ en el anillo $k[x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m]$ que es de tipo lineal es $I_{n-1}J_m + I_nJ_{m-1}$.*

3.4. Caso 3: $J_r + I_sJ_t$ con $r = s + t$, $1 \le s \le n$, $1 \le r \le m$ y $t \ge 1$. Para finalizar con los casos y objetivos propuestos, se considera el siguiente resultado:

Proposición 3.24. *Si $t > 1$, entonces el ideal $J_r + I_sJ_t$ no es de tipo lineal.*

Demostración. Como $r = s+t$ y se tiene que $1 < t \le m-1$, si $t < m-1$, entonces por un argumento similar al de la prueba de la Proposición 3.16, $J_r + I_sJ_t$ no es de tipo lineal. Si $t = m-1$, entonces $s = 1$ y $r = m$. Así, los monomios $x_1y_1\cdots y_{m-1}$, $x_2y_1\cdots y_{m-2}y_m$, $x_1y_1\cdots y_{m-2}y_{m-1}$ y $x_2y_1\cdots y_{m-2}y_{m-1}$

son generadores de $J_m + I_1 J_{m-1}$. Su existencia garantiza que $J_m + I_1 J_{m-1}$ no es de tipo lineal. ❏

Observe que para que $J_r + I_s J_t$ sea de tipo lineal depende de que $I_s J_t$ sea de tipo lineal, pero esto es posible si $s = n$ y $t = 1$. Por lo cual $m = n + 1$ pues, de lo contrario, se pueden encontrar relaciones no lineales en los generadores de J_r. Obtenemos así, el siguiente resultado:

Teorema 3.25. *El ideal $J_m + I_n J_1$ es de tipo lineal.*

Demostración. Considere el siguiente conjunto generador de $J_m + I_n J_1$:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 \cdots x_n y_1, \\ f_2 &= x_1 \cdots x_n y_2, \\ &\vdots \\ f_m &= x_1 \cdots x_n y_m \text{ y} \\ f_{m+1} &= y_1 \cdots y_m. \end{aligned}$$

De esta forma, probar que los polinomios $g_{ij} = f_{ij} t_j - f_{ji} t_i$ con $1 \leq i < j \leq m + 1$ forman una base de Gröbner del ideal $\mathcal{R}(J_m + I_n J_1)$ en $k[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m; t_1, \ldots, t_{m+1}]$ con respecto al orden lexicográfico puro se realiza de manera análoga a la del Teorema 3.18. Por lo tanto, $J_m + I_n J_1$ es de tipo lineal. ❏

En resumen, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.26. *El único ideal de producto mixto de la forma $J_r + I_s J_t$ en $k[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m]$ que es de tipo lineal es $J_m + I_n J_1$ con $m = n + 1$.*

Para la última parte del trabajo, sean $\ell, r, s \geq 1$. Denotamos por $I_{\ell,s}$ al ideal de **Veronese de primer tipo de grado** ℓ, el cual está generado por el conjunto

$$\left\{ x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \ell, 0 \leq \alpha_i \leq s \right\}.$$

De manera análoga, $J_{r,s}$ es el ideal de Veronese de primer tipo de grado r, el cual está generado por el conjunto

$$\left\{ y_1^{\beta_1} \cdots y_m^{\beta_m} \mid \sum_{j=1}^{m} \beta_j = r, 0 \leq \beta_j \leq s \right\}.$$

Así, se define el ideal de **Veronese de bitipo de grado** q como

$$L_{q,s} := \sum_{r+\ell=q} I_{\ell,s} J_{r,s} \text{ con } r, \ell \geq 1.$$

Ejemplo 3.27. En $k[x_1, x_2, y_1, y_2]$, considere los siguientes ejemplos de los ideales anteriores,

1. $L_{2,2} = I_{1,2}J_{1,2} = I_1J_1 = \langle x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2\rangle$,
2. $$L_{4,2} = I_{3,2}J_{1,2} + I_{1,2}J_{3,2} + I_{2,2}J_{2,2} = I_{3,2}J_1 + I_1J_{3,2} + I_2J_2.$$

Observación 3.28. Por definición, se tiene que los parámetros ℓ y r están acotados. En efecto, como $0 \leq \alpha_i \leq s$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \ell$, se tiene que $\ell \leq sn$. De forma análoga, se tiene que $r \leq sm$. Así, para los ideales de Veronese de bitipo $L_{q,s}$ se tiene que el parámetro q está acotado por $s(n+m)$. Si $q = s(n+m)$, entonces el ideal $L_{q,s}$ es principal, pues $l = sn$ y $r = sm$. Con eso se tiene que $I_{l,s} = \left\langle x_1^s \cdots x_n^s \right\rangle$, $J_{r,s} = \left\langle y_1^s \cdots y_m^s \right\rangle$ y $L_{q,s} = I_{l,s}J_{r,s} = \left\langle x_1^s \cdots x_n^s y_1^s \cdots y_m^s \right\rangle$. Además, si $q < s(n+m) - 1$, entonces existen dos generadores de $L_{q,s}$ tales que difieren en dos variables, así, procediendo como en los casos anteriores, se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 3.29. *Si los enteros q y s no satisfacen la ecuación $q = s(n+m) - 1$, entonces $L_{q,s}$ no es de tipo lineal.*

Resulta que si se cumple la ecuación $q = s(n+m) - 1$, se tiene que el ideal $L_{q,s}$ es de tipo lineal:

Teorema 3.30. *El ideal de Veronese de bitipo $L_{q,s}$ es de tipo lineal si se satisface la ecuación $q = s(n+m) - 1$.*

Demostración. Denotamos a los generadores de $L_{q,s}$ como

$$\begin{aligned}
f_1 &= x_1^s x_2^s \cdots x_{n-1}^s x_n^s y_1^s \cdots y_{m-1}^s y_m^{s-1},\\
f_2 &= x_1^s x_2^s \cdots x_{n-1}^s x_n^s y_1^s \cdots y_{m-1}^{s-1} y_m^s,\\
&\vdots\\
f_{n+m} &= x_1^{s-1} x_2^s \cdots x_{n-1}^s x_n^s y_1^s \cdots y_{m-1}^s y_m^s.
\end{aligned}$$

De esta forma, probar que los polinomios $g_{ij} = f_{ij}t_j - f_{ji}t_i$ con $1 \leq i < j \leq n+m$ forman una base de Gröbner del ideal $\mathcal{R}\left(L_{q,s}\right)$ en $k[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m; t_1, \ldots, t_{n+m}]$ con respecto al orden lexicográfico puro se realiza con un procedimiento análogo a la del Teorema 3.13. Por lo tanto, $L_{q,s}$ es de tipo lineal. ❑

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es la siguiente:

Corolario 3.31. *El ideal de Veronese de bitipo $L_{q,s} \subseteq k[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m]$ es de tipo lineal si y sólo si $q = s(n+m) - 1$.*

Bibliografía

[1] Bourbaki, N. (1998). Algebra I: Chapters 1-3. New York, USA: Springer.

[2] Cox, D., Little, J. & O'Shea, D. (2012). Ideals, Varieties, and Algorithms An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. San Francisco, USA: Springer.

[3] Ene, V. & Herzog, J. (2011). Gröbner Bases in Commutative Algebra. Providence, Rhode Island, USA: AMS.

[4] Huneke, C. (1980). On the Symmetric and Rees Algebra of an Ideal Generated by a $d-$sequence. Journal of Algebra, 62, pp. 268-275.

[5] La Barbiera, M. & Staglianò, P. (2014) Monomial ideals of linear type. Turkish Journal of Mathematics, 38, pp. 203-211.

[6] La Barbiera, M. (2008) Integral Closure and Normality of Some Classes of Veronese-type. Rivista di Matematica della Universita di Parma, 9, pp. 31-47.

[7] Villarreal, R. (2018). Monomial Algebras. Chapman & Hall/CRC Monographs and Research Notes in Mathematics: CRC Press.