



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM - UMSNH**

DIFRACCIÓN DE SOMMERFELD SOBRE EL SEMIPLANO

TESIS
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

PRESENTA:
TANIA RAQUEL GARIBAY VALLADOLID

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. ANATOLI MERZON
IFM-UMSNH

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
Dr. ANATOLI MERZON
IFM-UMSNH
Dr. PETR ZHEVANDROV
UMSNH
Dr. FRANCISCO DOMÍNGUEZ MOTA
UMSNH

MORELIA, MICHOACÁN, SEPTIEMBRE 2023

Índice general

Resumen	II
Abstract	III
Introducción	IV
1. Planteamiento del problema	1
2. Solución de Sommerfeld	3
3. Onda difractada	7
4. Análisis de la onda difractada	11

Resumen

Este trabajo se dedica a la justificación del proceso de la obtención de las soluciones de la ecuación de Helmholtz ramificadas, las cuales fueron obtenidas por A.Sommerfeld [5] para resolver el problema de difracción sobre el semiplano.

Palabras Clave *Difracción, Sommerfeld, Ecuación de Helmholtz.*

Abstract

This work is dedicated to the justification of the process of obtaining the solutions of the branched Helmholtz equation, which was obtained by A.Sommerfeld [5] to solve the problem of diffraction on the half plane. Before this process was never described strictly in the mathematical form.

Introducción

En este trabajo hemos descrito el método de Sommerfeld para la obtención de las soluciones ramificadas de la ecuación de Helmholtz. Esto se hace en los capítulos del 1 al 4.

En el capítulo 1; planteamos el problema de difracción de Sommerfeld sobre una onda plana que cae sobre una pantalla plana no transparente. Además analizamos el porqué $u_i + u_r$ no resuelve este problema sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathbb{R}_+}$, donde u_i , u_r son las ondas incidente, reflejada y $\overline{\mathbb{R}_+}$ es la pantalla. En el capítulo 2; proponemos la función U_0 , la cual es la base para la solución de este problema y a partir de esta definimos la función u la cual satisface la ecuación de Helmholtz dada en (1.5) y las condiciones de frontera dadas en (1.6). En el capítulo 3; descomponemos la función u como la suma de las ondas incidente, reflejada y difractada, es decir $u = u_i + u_r + u_d$. En el capítulo 4; analizamos la convergencia a cero de la onda difractada u_d cuando $r \rightarrow \infty$.

Capítulo 1

Planteamiento del problema

Sean (r, φ) las coordenadas polares correspondientes a las coordenadas cartesianas (x, y) . Consideramos la función u_0 dada por $u_0(r, \varphi) = e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')}$, $k > 0$, $\varphi' \in (0, \pi)$. En la teoría de difracción esta función se interpreta como una onda plana incidente que se propaga en la dirección $\pi + \varphi'$, véase la figura 1.1. Supongamos que esta onda cae a un obstáculo que es una pantalla no transparente $\overline{\mathbb{R}}_+ := \{x_2 = 0, x_1 > 0\}$. En este caso la onda u_0 no existe en la zona de la sombra $\varphi \in (\pi + \varphi', 2\pi)$. Por lo tanto definimos la onda incidente

$$u_i(x) := \begin{cases} e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')}, & r > 0, \quad \varphi \in [0, \pi + \varphi') \\ 0, & \varphi \in (\pi + \varphi', 2\pi) \end{cases} \quad (1.1)$$

que interactúa con el obstáculo $\overline{\mathbb{R}}_+$. De la teoría de la óptica geométrica es conocido que existe una onda reflejada plana u_{ref} que es la reflexión de la onda incidente u_i del obstáculo $(x_1, 0)$. Esta onda se propaga bajo el ángulo $\pi - \varphi'$ y su dominio es el ángulo φ dado en (1.2); véase la figura 1.1.

Esta onda reflejada se define como

$$u_{ref}(x) := \begin{cases} -e^{ikr \cos(\varphi + \varphi')}, & r > 0, \quad \varphi \in [0, \pi - \varphi') \\ 0, & \varphi \in (\pi - \varphi', 2\pi) \end{cases} \quad (1.2)$$

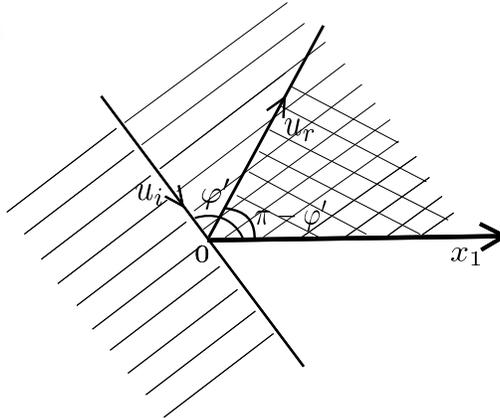


Figura 1.1: Óptica geométrica

Notemos que para $x = (x_1, 0)$ con $x_1 > 0$, la suma

$$u_i(x_1, \pm 0) + u_{ref}(x_1, \pm 0) = 0. \quad (1.3)$$

Las funciones u_i y u_{ref} son ondas incidentes y reflejadas que satisfacen la ecuación de Helmholtz

$$(\Delta + k^2)u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + k^2 u = 0 \quad (1.4)$$

en sus dominios dados por (1.1) y (1.2) respectivamente. Su suma $u_{op} := u_i + u_{ref}$ es la parte óptica del problema de difracción, ya que u_{op} satisface la ecuación (1.4), la condición de frontera (1.3) y es continua para $\varphi \in [0, 2\pi) \setminus \{\pi \pm \varphi'\}$. Pero la solución óptica u_{op} es una función discontinua en $\varphi = \pi \pm \varphi'$, y no satisface la ecuación de Helmholtz en $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathbb{R}}_+$, ya que las soluciones de la ecuación de Helmholtz son necesariamente continuas, dado que $\Delta + w^2$ es el operador elíptico [4]. Por lo tanto $u_i + u_{ref}$ no resuelve el problema de difracción de Sommerfeld.

El problema de difracción consiste en construir una solución de clase C^∞ que satisfaga las siguientes condiciones

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u(x_1, x_2) = 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathbb{R}}_+ \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} u(x_1, x_2 + 0) = u(x_1, x_2 - 0) = 0, & x_1 > 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

y tal que u pueda ser descompuesta en la siguiente suma

$$u(x) = u_i(x) + u_{ref}(x) + u_d(x) \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathbb{R}}_+), \quad (1.7)$$

donde $u(x)$ se llama la solución total del problema, u_{ref} es la onda reflejada (1.2) y

$$u_d(r, \varphi) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \varphi \neq \pi \pm \varphi'. \quad (1.8)$$

En el siguiente capítulo definimos la función u que satisface las condiciones (1.5) y (1.6).

Capítulo 2

Solución de Sommerfeld

Sea

$$U_0(r, \varphi) := \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left(f(e^{i(\varphi+\alpha-\pi/2)}) - f(e^{i(\varphi-\alpha-\pi/2)}) \right) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha, \quad (2.1)$$

donde f es una función compleja arbitraria y γ un contorno en el plano $\alpha \in \mathbb{C}$. Tomando

$$f(Z) := \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad Z' := e^{i(\varphi' - \frac{\pi}{2})}, \quad \varphi' \in (0, \pi), \quad (2.2)$$

y eligiendo $\gamma = A$ como se muestra en la Figura 2.1, tal que

$$-\pi + \epsilon < \operatorname{Re}(\alpha) < 2\pi - \epsilon, \quad (2.3)$$

obtenemos después de algunos cálculos que U_0 admite la siguiente representación para $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$U_0(r, \varphi) = \frac{1}{4\pi i} \int_A \frac{\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right)} d\alpha. \quad (2.4)$$

Esta función es la base para la solución de Sommerfeld.

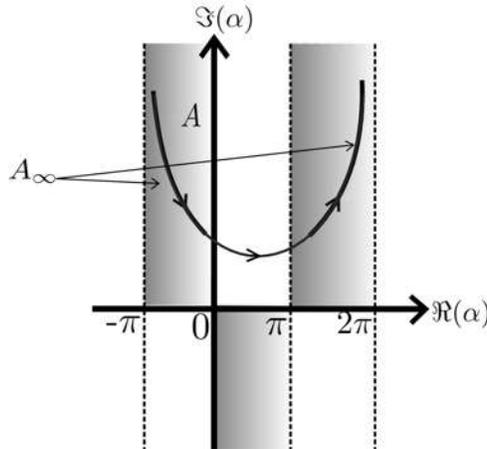


Figura 2.1: Contorno A

En los siguientes dos lemas demostraremos que la integral (2.4) converge. Primero estimemos la exponencial en (2.4) sobre A .

Lema 2.0.1. *Sea $\alpha \in A$ tal que $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, entonces $\exists c_0 \geq 1, \delta > 0$, tal que*

$$|e^{ikr \cos \alpha}| \leq c_0 e^{-\delta e^{\alpha_2}}. \quad (2.5)$$

Demostración.

$$|e^{ikr \cos \alpha}| = |e^{ikr \cos(\alpha_1 + i\alpha_2)}| = |e^{ikr \cos \alpha_1 \cosh \alpha_2 + kr \sin \alpha_1 \sinh \alpha_2}| = e^{kr \sin \alpha_1 \sinh \alpha_2}. \quad (2.6)$$

1). Sea $\alpha \in A_\infty$, donde

$$A_\infty := \{\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in A : \alpha_1 < -\epsilon \vee \pi + \epsilon < \alpha_1, \alpha_2 > \alpha_2^0 > 0\}. \quad (2.7)$$

Entonces, para $\alpha \in A_\infty$, $\exists \delta_1 > 0$, tal que, $-1 \leq \sin \alpha_1 < -\delta_1$. De aquí

$$kr \sin \alpha_1 \sinh \alpha_2 \leq -\delta e^{\alpha_2}, \quad \delta > 0, \quad (2.8)$$

y usando (2.6), obtenemos

$$|e^{ikr \cos \alpha}| \leq e^{-\delta e^{\alpha_2}}, \quad \alpha \in A_\infty. \quad (2.9)$$

2). Sea $\alpha \in A_1 := A \setminus A_\infty$. Ya que A_1 es un conjunto cerrado, acotado y la función (2.6) es continua, entonces $\exists c > 0$ tal que

$$|e^{ikr \cos \alpha}| \leq c. \quad (2.10)$$

Consideremos la función $e^{-\delta e^{\alpha_2}}$, $\alpha \in A_1$. Existe

$$m = \min_{\alpha \in A_1} \{e^{-\delta e^{\alpha_2}}\} > 0,$$

ya que $e^{-\delta e^{\alpha_2}} \neq 0 \forall \alpha \in A_1$. Entonces por (2.10)

$$|e^{ikr \cos \alpha}| \leq \max(1, c/m) e^{-\delta e^{\alpha_2}}, \quad \alpha \in A_1. \quad (2.11)$$

De (2.9) se sigue que la misma cota cumple para $\alpha \in A_\infty$, ya que el $\max(1, c/m) \geq 1$. Tomando $c_0 = \max(1, c/m)$ terminamos la demostración del Lema 2.0.1. ■

En el siguiente Lema estimamos $M(\alpha)$ definida en (2.12), sobre el contorno A .

Lema 2.0.2. *Sea $\alpha \in A$, donde A es el contorno dado en la Figura 2.1, y sea*

$$M(\alpha) := \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right)}, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \varphi' \in (0, \pi) \quad (2.12)$$

entonces existe $c > 0$ tal que $|M(\alpha)| \leq c$.

Demostración. Primero demostraremos que M es continua sobre el contorno A . Para $\alpha \in A$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha_1}{2} \cosh \frac{\alpha_2}{2} - i \sin \frac{\alpha_1}{2} \sinh \frac{\alpha_2}{2} \in \mathbb{R}$ sii $\alpha_1 = 0$. Entonces $\forall \alpha \in A$ tal que $\alpha_1 \neq 0$, M es continua, ya que $\cos(\frac{\varphi-\varphi'}{2}) \in \mathbb{R}$. Por otro lado, para $\alpha_1 = 0$, se sigue que $\cos \frac{\alpha}{2} > 1$, ya que $\cosh \alpha_2 > 1$. Por lo tanto $\forall \alpha \in A$, M es continua. A continuación demostraremos la acotación de (2.12) sobre A . Usando las definiciones de \sin , \cos , tenemos que

$$|M(\alpha)| = \left| \frac{\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2i}}{\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2} - \cos(\frac{\varphi-\varphi'}{2})} \right| = \left| \frac{1 - e^{i\alpha}}{1 + e^{i\alpha} - 2e^{i\frac{\alpha}{2}} \cos(\frac{\varphi-\varphi'}{2})} \right|. \quad (2.13)$$

Sustituyendo $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ en (2.13), tenemos que

$$|M(\alpha)| = \left| \frac{1 - e^{i\alpha_1 - \alpha_2}}{1 + e^{i\alpha_1 - \alpha_2} - 2e^{i\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2}} \cos(\frac{\varphi-\varphi'}{2})} \right|. \quad (2.14)$$

Cuando $\alpha_2 \rightarrow \infty$, tenemos que $M(\alpha) \rightarrow 1$. De aquí y de la continuidad de (2.12), tenemos que (2.12) es acotada sobre A .

Lema 2.0.2; se demostró. ■

Del Lema 2.0.1 y el Lema 2.0.2 se sigue que la integral definida en (2.4) es convergente sobre el contorno A . Además de ser convergente sobre A , la función U_0 dada en (2.4) satisface la ecuación (1.5), lo cual se sigue del siguiente Teorema.

Teorema 2.0.3. La función $U_0(r, \varphi)$ dada por (2.4) satisface la ecuación de Helmholtz para $\varphi \in (0, 2\pi)$

$$(\Delta + k^2)U_0(r, \varphi) = 0. \quad (2.15)$$

Pero esta función no satisface las condiciones de frontera (1.6). Para modificar U_0 a la función que satisfaga (1.6) A.Sommerfeld usa el método de simetrización, de manera precisa él define la función

$$u(x_1, x_2) = u(r, \varphi) := U_0(r, \varphi, \varphi') - U_0(r, \varphi, -\varphi'), \quad (2.16)$$

donde $U_0(r, \varphi, \varphi') = U_0(r, \varphi)$ y $U_0(r, \varphi)$ se define en (2.4).

Lema 2.0.4. La función definida por (2.16) admite la siguiente representación

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{4\pi i} \int_A \sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha} \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos(\frac{\varphi-\varphi'}{2})} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos(\frac{\varphi+\varphi'}{2})} \right) d\alpha. \quad (2.17)$$

Demostración. Sustituyendo (2.4) en (2.16), obtenemos (2.17). ■

De la definición de u dada en (2.16) se sigue que u satisface la ecuación de Helmholtz (1.5), ya que U_0 satisface esta ecuación. Nos falta revisar que u satisface (1.6).

Lema 2.0.5. $u(r, \varphi)$ dada por (2.16) satisface las condiciones de frontera (1.6).

Demostración. Del Lema 2.0.4, u se representa en la forma (2.17). De esta representación se sigue que $u(r, \varphi) \Big|_{\varphi=0} = 0$, ya que la función \cos es par. Por otro lado

$$u(r, \varphi) \Big|_{\varphi=2\pi} = \frac{1}{4\pi i} \int_A \sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha} \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\pi - \frac{\varphi'}{2} \right)} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\pi + \frac{\varphi'}{2} \right)} \right) d\alpha = 0. \quad (2.18)$$

ya que $\cos(\pi - \beta) = \cos(\pi + \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$. ■

De esta manera hemos demostrado que u definida en (2.16) es una solución del problema de difracción.

Teorema 2.0.6. u dada por (2.16) satisface las ecuaciones (1.5) y (1.6).

Capítulo 3

Onda difractada

En este capítulo descomponemos u a la forma (1.7). Para esto primero representamos de manera equivalente a U_0 dada en (2.4) sobre el contorno $C := A \cup (-A)$. Por los Lemas 2.0.1, 2.0.2 y la condición (2.3) podemos mover el contorno A dado en la Figura 2.1 en la forma de la Figura 3.1.

Haciendo el cambio de variable de $\alpha \rightarrow -\alpha$ en (2.4). Obtenemos

$$U_0(r, \varphi) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-A} \frac{-\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(\varphi - \varphi')}{2}} (-d\alpha) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-A} \frac{\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(\varphi - \varphi')}{2}} d\alpha \quad (3.1)$$

donde $-A$ es el reflejo simétrico de A con respecto de 0, véase la Fig. 3.1

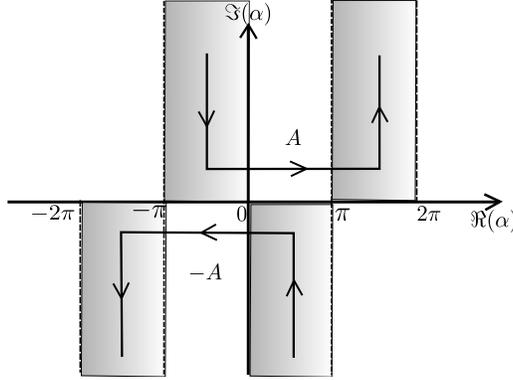


Figura 3.1: Contorno C

Sumando (2.4) con (3.1) y dividiendo entre dos, obtenemos

$$U_0(r, \varphi) = \frac{1}{8\pi i} \int_C \frac{\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(\varphi - \varphi')}{2}} d\alpha. \quad (3.2)$$

Tomando U_0 como en (3.2), representamos después de algunos cálculos elementales a u dada en (2.16), de la siguiente manera

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{8\pi i} \int_C \sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha} \left[\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} \right] d\alpha. \quad (3.3)$$

Esta función contiene a u_i y u_{ref} , como veremos más adelante en el Lema 3.0.3. Para encontrarlas usaremos el contorno D . Este contorno consiste de los dos lazos que se muestran en la Figura 3.2.

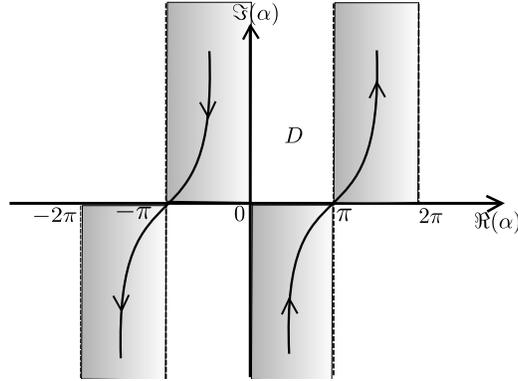


Figura 3.2: Contorno D

Sea $\varphi' \in (0, \pi)$ y sea

$$\Phi := \{\varphi \in [0, 2\pi) \mid \varphi \neq \pi \pm \varphi'\}. \quad (3.4)$$

Por el Teorema de residuos de Cauchy y para $\varphi \in \Phi$, u dada en (3.3), puede ser representada en la siguiente forma

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) = & \frac{1}{8\pi i} \int_D \sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha} \left[\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} \right] d\alpha \\ & - \frac{1}{8\pi i} \int_{D_1} \sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha} \left[\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} \right] d\alpha, \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde D_1 es el contorno mostrado en la Fig. 3.3.

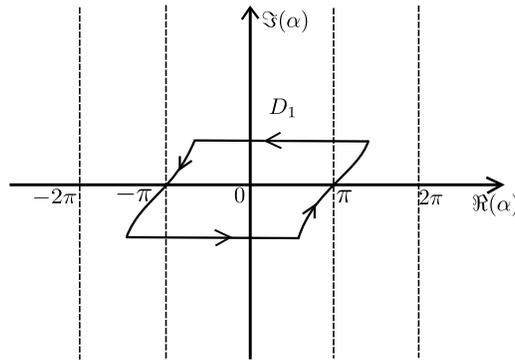


Figura 3.3: Contorno D_1

Definimos u_d , u_{D_1} , de la siguiente forma

$$u_d := \frac{1}{8\pi i} \int_D \sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha} \left[\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} \right] d\alpha, \quad \varphi \in \Phi \quad (3.6)$$

$$u_{D_1} := -\frac{1}{8\pi i} \int_{D_1} \sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha} \left[\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} \right] d\alpha, \quad \varphi \in \Phi. \quad (3.7)$$

Lema 3.0.1. u admite la siguiente representación para $\varphi \in \Phi$.

$$u = u_d + u_{D_1}, \quad (3.8)$$

donde Φ se define en (3.4).

Demostración. Se sigue de (3.5) y de la definición de u_d , u_{D_1} dadas en (3.6) y (3.7).

En los siguiente dos Lemas, demostraremos que para $\varphi \in \Phi$

$$u_{D_1} = u_i + u_{ref}, \quad (3.9)$$

donde u_i , u_{ref} son las funciones definidas en (1.1), (1.2) y u_{D_1} se define en (3.7).

Lema 3.0.2. Tomando $\varphi \in \Phi$ como en (3.4), se tiene la siguiente representación para u_{D_1} .

1. Si $\varphi \in [0, \pi - \varphi')$, se tiene

$$u_{D_1}(r, \varphi) = e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')} - e^{ikr \cos(\varphi + \varphi')}. \quad (3.10)$$

2. Si $\varphi \in (\pi - \varphi', \pi + \varphi')$, se tiene

$$u_{D_1}(r, \varphi) = e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')}. \quad (3.11)$$

3. Si $\varphi \in (\pi + \varphi', 2\pi)$, se tiene

$$u_{D_1}(r, \varphi) = 0. \quad (3.12)$$

Demostración. Sea $f := f_1 + f_2$, donde f_1, f_2 se definen de la siguiente manera

$$f_1(\alpha) := \frac{\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}}, \quad f_2(\alpha) := -\frac{\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}}. \quad (3.13)$$

Denotemos $\alpha_1 := (\varphi - \varphi')$, $\alpha_2 := -\alpha_1$, $\alpha_3 := (\varphi + \varphi')$, $\alpha_4 := -\alpha_3$ a los puntos singulares de la función f . De la definición de f_1, f_2 se observa que α_1, α_2 son polos simples de f_1 , y α_2, α_3 , son polos simples de f_2 .

Demostración de la Afirmación 1. Tomando $\varphi \in [0, \pi - \varphi')$, se tiene que los polos simples α_i , $i = 1, \dots, 4$, de f , están dentro del contorno D_1 . En efecto

$$\varphi \in [0, \pi - \varphi') \Leftrightarrow 0 \leq \varphi < \pi - \varphi' \Leftrightarrow -\varphi' \leq \varphi - \varphi' < \pi - 2\varphi'. \quad (3.14)$$

De aquí se sigue que $\alpha_1, \alpha_2 \in (-\pi, \pi)$, ya que $\varphi' \in (0, \pi)$. Análogamente $\alpha_3, \alpha_4 \in (-\pi, \pi)$. Por otro lado, definiendo h_1, g_1, h_2, g_2 de la siguiente forma

$$h_1(\alpha) := \sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}, \quad g_1(\alpha) := \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}, \quad h_2(\alpha) := \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}, \quad (3.15)$$

obtenemos la siguiente representación para f_1, f_2

$$f_1 = \frac{h_1}{g_1}, \quad f_2 = \frac{h_2}{g_2}. \quad (3.16)$$

donde f_1, f_2 se definen en (3.13). Del Teorema de los residuos de Cauchy se sigue

$$\begin{aligned} u_{D_1}(r, \varphi) &= -\frac{1}{8\pi i} \left(2\pi i \sum_{k=1}^2 \operatorname{Res}_{\alpha=\alpha_k} f_1(\alpha) + \operatorname{Res}_{\alpha=\alpha_{k+2}} f_2(\alpha) \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^2 \frac{h_1(\alpha_k)}{g_1'(\alpha_k)} - \frac{h_2(\alpha_{k+2})}{g_2'(\alpha_{k+2})} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(-4e^{ikr \cos(\varphi-\varphi')} + 4e^{ikr \cos(\varphi+\varphi')} \right) \\ &= e^{ikr \cos(\varphi-\varphi')} - e^{ikr \cos(\varphi+\varphi')}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Afirmación 1; se demostró ■

Demostración de la afirmación 2. Tomando $\varphi \in (\pi - \varphi', \pi + \varphi')$, se tiene que los polos simples α_1, α_2 están en el interior del contorno D_1 . En efecto

$$\varphi \in (\pi - \varphi', \pi + \varphi') \Leftrightarrow \pi - \varphi' < \varphi < \pi + \varphi' \Leftrightarrow \pi - 2\varphi' < \varphi - \varphi' < \pi. \quad (3.18)$$

De aquí se sigue que $\alpha_1, \alpha_2 \in (-\pi, \pi)$, ya que $\varphi' \in (0, \pi)$. Análogamente $\alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R} \setminus [-\pi, \pi]$. Del Teorema de los residuos de Cauchy se sigue

$$\begin{aligned} u_{D_1}(r, \varphi) &= -\frac{1}{8\pi i} \left(2\pi i \operatorname{Res} \sum_{k=1}^2 f_1(\alpha_k) \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(-4e^{ikr \cos(\varphi-\varphi')} \right) \\ &= e^{ikr \cos(\varphi-\varphi')}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Afirmación 2; se demostró. ■

Demostración de la Afirmación 3. Tomando $\varphi \in (\pi + \varphi', 2\pi)$ se tiene que los polos simples $\alpha_i, i = 1, \dots, 4$, están fuera del contorno D_1 . En efecto

$$\varphi \in (\varphi' + \pi, 2\pi) \Leftrightarrow \varphi' + \pi < \varphi < 2\pi \Leftrightarrow \pi < \varphi - \varphi' < 2\pi - \varphi'. \quad (3.20)$$

De aquí se sigue que $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus [-\pi, \pi]$. Análogamente $\alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R} \setminus [-\pi, \pi]$. Por tanto la función f , es analítica en el interior y sobre D_1 . Por lo tanto $u_{D_1} = 0$.

Afirmación 3; se demostró ■

Corolario 3.0.3. u_{D_1} dada en (3.7) admite la siguiente representación para $\varphi \in \Phi$

$$u_{D_1} = u_i + u_{ref} \quad (3.21)$$

donde u_i, u_{ref} se definen en (1.1),(1.2) respectivamente.

Demostración. Se sigue del Lema (3.0.2).

Primero demostremos el siguiente Lema.

Lema 4.0.2. Sea $\varphi \in \Phi$, donde Φ esta dada en (3.4), y sea

$$M_1(\alpha, \varphi) := \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right)}. \quad (4.4)$$

Entonces existe $c(\varphi) > 0$ tal que $\forall \alpha \in \gamma^+$

$$|M_1(\alpha, \varphi)| \leq c(\varphi). \quad (4.5)$$

Demostración. Primero demostremos que M_1 es continua sobre γ^+ . Para $\alpha \in \gamma^+$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha_1}{2} \cosh \frac{\alpha_2}{2} - i \sin \frac{\alpha_1}{2} \sinh \frac{\alpha_2}{2} \in \mathbb{R}$ sii $\alpha = \pi$. Tomando $\alpha \in \gamma^+ \setminus \{\pi\}$, se sigue que, M_1 es continua, ya que $\cos(\frac{\varphi - \varphi'}{2}) \in \mathbb{R}$. Por otro lado, para $\alpha = \pi$, $\cos \frac{\alpha}{2} = 0$, y dado que $\varphi \in \Phi$, se sigue que $\varphi - \varphi' \in (-\pi, 2\pi) \setminus \{\pi\}$. De aquí $\cos(\frac{\varphi - \varphi'}{2}) \neq 0$. Por lo tanto M_1 es continua sobre γ^+ .

A continuación demostraremos que la propiedad (4.5) se satisface. Para esto demostraremos que esta propiedad se satisface en los contornos $\gamma_{1,1}^+$, $\gamma_{1,2}^+$ y γ_2^+ , dados en 4.1, los cuales conforman el contorno γ^+ .

Demostración para $\alpha \in \gamma_{1,2}^+$. De la definición de \sin , \cos , se sigue que M_1 admite la siguiente representación

$$|M_1(\alpha, \varphi)| = \left| \frac{1 - e^{i\alpha}}{1 + e^{i\alpha} - 2e^{i\frac{\alpha}{2}} \cos \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right)} \right| = \left| \frac{1 - e^{i\alpha_1 - \alpha_2}}{1 + e^{i\alpha_1 - \alpha_2} - 2e^{i\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2}} \cos \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right)} \right|. \quad (4.6)$$

Tomando el límite de $M_1(\alpha, \varphi)$ cuando $\alpha_2 \rightarrow \infty$, se sigue que $M_1(\alpha, \varphi) \rightarrow 1$. De aquí y de la continuidad de M_1 sobre γ^+ , $\exists c_1 > 0 : \forall \alpha \in \gamma_{1,2}^+, |M_1(\alpha, \varphi)| \leq c_1$.

Demostración para $\alpha \in \gamma_{1,1}^+$. Factorizando $e^{i\alpha}$ en (4.6)

$$|M_1(\alpha, \varphi)| = \left| \frac{1 - e^{-i\alpha}}{1 + e^{-i\alpha} - 2e^{-i\frac{\alpha}{2}} \cos \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right)} \right| = \left| \frac{1 - e^{-i\alpha_1 + \alpha_2}}{1 + e^{-i\alpha_1 + \alpha_2} - 2e^{-i\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2}} \cos \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right)} \right|. \quad (4.7)$$

De aquí $M_1(\alpha, \varphi) \rightarrow 1$, cuando $\alpha_2 \rightarrow -\infty$. Por lo tanto $\exists c_2 > 0$ tal que $\forall \alpha \in \gamma_{1,1}^+, |M_1(\alpha, \varphi)| \leq c_2$. Tomando $c = \max\{c_1, c_2\}$, se tiene que $\forall \alpha \in \gamma_1^+$

$$|M_1(\alpha, \varphi)| \leq c. \quad (4.8)$$

Demostración para $\alpha \in \gamma_2^+$. (4.5), se sigue de la continuidad de M_1 sobre el contorno compacto γ_2^+ .

Lema 4.0.2; se demostró. ■

Sea $u_{d_1}^+$ definida como en (4.3) y veamos que $u_{d_1}^+ \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$. Si $M_1(\alpha, \varphi)$ es como en (4.4) y $\gamma_{1,1}^+, \gamma_{1,2}^+$ son los contornos mostrados en la Fig. 4.1, entonces

$$|u_{d_1}^+(\alpha)| \leq \left| \int_{\gamma_{1,1}^+} M_1(\alpha, \varphi) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \right| + \left| \int_{\gamma_{1,2}^+} M_1(\alpha, \varphi) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \right|. \quad (4.9)$$

Por (4.8), y para $\alpha \in \gamma_{1,1}^+ = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha_1 = \frac{3\pi}{2}, \alpha_2 \in (\frac{\pi}{2}, \infty)\}$, $\alpha \in \gamma_{1,2}^+ = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \alpha_2 \in (-\infty, -\frac{\pi}{2})\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} |u_{d_1}^+(\alpha)| &\leq c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-kr \sinh \alpha_2} d\alpha_2 + c \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} e^{kr \sinh \alpha_2} d\alpha_2 \\ &= c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-kr \sinh \alpha_2} d\alpha_2 + c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{kr \sinh(-\alpha_2)} d\alpha_2 = 2c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-kr \sinh \alpha_2} d\alpha_2 \\ &\leq 2c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-\frac{kr}{4} e^{\alpha_2}} d\alpha_2 \leq 2c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-\frac{kr}{4} \alpha_2} d\alpha_2 = -\frac{8c}{kr} e^{-\frac{kr}{4} \alpha_2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} = \frac{8c}{kr} e^{-\frac{kr\pi}{8}}. \end{aligned}$$

De aquí tenemos que $u_{d_1}^+ \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$.

Ahora veamos que u_{d_2} , definida en (4.3), tiende a cero cuando $r \rightarrow \infty$, para $\varphi \in \Phi$. Tomando $\alpha \in \gamma_2^+ := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha_1 = (\alpha_2 + \pi), \alpha_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$, se sigue del Lema 4.0.2

$$\begin{aligned} |u_{d_2}^+(\alpha, \varphi)| &= \left| \int_{\gamma_2^+} M_1(\alpha, \varphi) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \right| \leq c(\varphi) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{kr \sin(\alpha_2 + \pi) \sinh \alpha_2} d\alpha_2 \\ &= c(\varphi) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-kr \sin \alpha_2 \sinh \alpha_2} d\alpha_2 \\ &= c(\varphi) \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^{-kr \sin \alpha_2 \sinh \alpha_2} d\alpha_2 + c(\varphi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-kr \sin \alpha_2 \sinh \alpha_2} d\alpha_2 \\ &\leq c(\varphi) \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^{-kr \frac{\alpha_2^2}{4}} d\alpha_2 + c(\varphi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-kr \frac{\alpha_2^2}{4}} d\alpha_2 \\ &= 2c(\varphi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{kr}{4} \alpha_2^2} d\alpha_2 \leq 2c(\varphi) \int_0^{\infty} e^{-\frac{kr}{4} \alpha_2^2} d\alpha_2. \end{aligned}$$

Tomando $\delta^2 = \frac{kr}{4} \alpha_2^2$ y teniendo en cuenta que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, tenemos que

$$|u_{d_2}^+(\alpha, \varphi)| \leq 2c(\varphi) \int_0^{\infty} e^{-\frac{kr}{4} \alpha_2^2} d\alpha_2 = \frac{4c(\varphi)}{\sqrt{kr}} \int_0^{\infty} e^{-\delta^2} d\delta = 2c(\varphi) \sqrt{\frac{\pi}{kr}}. \quad (4.10)$$

De aquí tenemos que $u_{d_2}^+ \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$. Por lo tanto Lema 4.0.1; se demostró. ■

Nota 1. $c(\varphi) \rightarrow \infty$ cuando $\varphi \rightarrow \pi + \varphi'$.

Nota 2. *Comportamiento de la onda difractada sobre los rayos* $\varphi = \pi \pm \varphi'$.

Notemos que la cota $c(\varphi)$, dada en (4.5), crece cuando φ se acerca a los rayos críticos $\varphi = \pi \pm \varphi'$. Sin embargo se puede demostrar que existen dos límites

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pi \pm \varphi'} u_d^\pm(r, \varphi) = u_d(r, \varphi' \pm 0) \quad (4.11)$$

tal que

$$u_d(r, \pi - \varphi' + 0) + u_d(r, \pi - \varphi' - 0) = u_i(r, \pi - \varphi') \quad (4.12)$$

$$u_d(r, \pi + \varphi' + 0) + u_d(r, \pi + \varphi' - 0) = u_i(r, \pi + \varphi') \quad (4.13)$$

De esta manera el salto de la onda difractada sobre los rayos críticos compensa las discontinuidades de la función u_{op} , dada en (1.3), sobre estos rayos.

Bibliografía

- [1] Sommerfeld A. Optics (lectures on theoretical physics). *New York: Academic Press*, Volume(4), 1954.
- [2] A.N.Tikhonov and A. A. Samarski. Equations of mathematical physics. *Dover Publications Inc., New York, translated from Russian by A. R. M. Robson and P. Basu, Reprint of the 1963 translation*, 1990.
- [3] Alexander Komech and Anatoli Merzon. *Stationary Diffraction by Wedges: Method of Automorphic Functions on Complex Characteristics*. 01 2019.
- [4] L.C.Evans. Partial differential equations. *AMS, Providence, RI*, Graduate Studies in Mathematics Volume(19), 1998.
- [5] R.J.Nagem M.Zampolli G.Sandri Arnold Sommerfeld. Mathematical theory of diffraction. *Springer Science+Business Media New York. Originally published by Birkhauser Boston*, Progress in Mathematical Physics Volume(35), 2014.