



UNIVERSIDAD MICHUACANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICO-MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

SINCRONIZACIÓN
MAESTRO-ESCLAVO EN LOS
OSCILADORES
RAYLEIGH-DUFFING Y DUFFING

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN
INGENIERÍA FÍSICA

PRESENTA

Felipe De Jesús Álvarez Acha



ASESORES:
DR. JOAQUIN ESTEVEZ DELGADO
DR. ULISES URIOSTEGUI LEGORRETA

MORELIA, MICHUACÁN.

OCTUBRE 2023

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis asesores el Dr. Joaquín Estevez y el Dr. Ulises Uriostegui por darme la oportunidad de realizar este proyecto con ustedes. Me apoyaron en todo el proceso de titulación y por eso estaré agradecido siempre. Al resto de los profesores que me ayudaron en mi formación académica, aprendí grandes cosas durante mi estancia en la maestría.

A mi familia, mis padres que siempre me apoyaron toda la vida y en cada paso de mi formación profesional.

A mis amigos, sin ellos no hubiera llegado tan lejos, gracias por hacer un poco más fácil la vida académica.

Índice general

Capítulos	Página
Agradecimientos	I
Resumen	IV
Abstract	V
1. Introducción	1
2. Sistemas Dinámicos	4
2.1. Introducción	4
2.2. Sistemas Autónomos y No Autónomos	5
2.3. Estabilidad del Sistema	5
2.4. El Teorema de Poincaré-Bendixson	9
2.5. El Teorema de Hartman-Grobman	11
2.6. Ejemplos	12
3. Dinámica de los osciladores de Duffing y de Rayleigh-Duffing	16
3.1. Introducción	16
3.2. Oscilador de Duffing	16
3.2.1. Análisis del oscilador de Duffing	18
3.3. Oscilador de Rayleigh-Duffing	20
3.3.1. Análisis del oscilador de Rayleigh-Duffing	21
4. Sincronización y Control de Sistemas Caóticos	23
4.1. Introducción	23
4.2. Métodos de control caos	24
4.2.1. Control a través de un parámetro accesible del sistema	26

ÍNDICE GENERAL

4.2.2.	Control por inyección de señales externas	27
4.2.3.	Técnicas clásicas de Ingeniería de control	28
4.3.	El problema general de la sincronización	28
4.4.	Sincronización de sistemas caóticos	29
4.4.1.	Métodos de sincronización	30
4.4.2.	Tipos de Sincronización	34
4.4.3.	Método de Pecora y Carroll (PC)	35
4.4.4.	Método de APD.	36
5.	Sincronización entre los osciladores de Rayleigh-Duffing y Duffing	38
5.1.	Acoplamiento elástico	38
5.1.1.	Oscilador de Rayleigh-Duffing (Maestro) y oscilador de Duffing (Esclavo)	39
5.1.2.	Oscilador de Duffing (Maestro) y oscilador de Rayleigh-Duffing (Esclavo)	42
5.2.	Acoplamiento disipativo	44
5.2.1.	Oscilador de Rayleigh-Duffing (Maestro) y oscilador de Duffing (Esclavo)	44
5.2.2.	Oscilador de Duffing (Maestro) y oscilador de Rayleigh-Duffing (Esclavo)	47
5.3.	Acoplamiento combinado	49
5.3.1.	Oscilador de Rayleigh-Duffing (Maestro) y oscilador de Duffing (Esclavo)	50
5.3.2.	Oscilador de Duffing (Maestro) y oscilador de Rayleigh-Duffing (Esclavo)	52
6.	Conclusiones	55
	Bibliografía	57

Resumen

En este trabajo, se presenta un estudio sobre la sincronización entre los osciladores de Rayleigh-Duffing y Duffing. Analizamos el acoplamiento elástico y disipativo así como una combinación de ambos, de esta manera hacemos una comparación entre cada uno de los casos para ver que acoplamiento es el más eficaz para lograr la sincronización entre ambos osciladores. Los resultados numéricos demuestran que cuando se emplea el acoplamiento elástico o disipativo existe una sincronización completa en uno de los estados del sistema esclavo. Dependiendo del sistema que se elige como maestro o esclavo y el acoplamiento empleado, existe sincronización completa o parcial. De modo que cuando se utiliza una combinación de los acoplamientos elástico y disipativo, siempre se tendrá una sincronización completa.

Palabras Claves: Sistemas Dinámicos, Oscilador de Duffing, Oscilador de Rayleigh-Duffing, Control de Caos, Sincronización.

Abstract

In this work, a study on the synchronization between the Rayleigh-Duffing and Duffing oscillators is presented. We analyze elastic and dissipative coupling as well as a combination of both, in this way we make a comparison between each of the cases to see which coupling is the most effective to achieve synchronization between both oscillators. The numerical results demonstrate that when elastic or dissipative coupling is used, there is complete synchronization in one of the states of the slave system. Depending on the system that is chosen as master or slave and the coupling used, there is complete or partial synchronization. So when you use a combination of elastic and dissipative coupling, you will always have complete synchronization.

Keywords: Dynamical Systems, Duffing Oscillator, Rayleigh-Duffing Oscillator, Chaos Control, Synchronization.

Capítulo 1

Introducción

Los osciladores no lineales han tenido una gran variedad de aplicaciones en distintas ramas de las ciencias, como física, ingeniería, biología, química y economía. En la teoría y control de caos, estos osciladores sirven para el estudio de sistemas caóticos así como para el desarrollo de técnicas para el control de caos [1]. En circuitos electrónicos estos osciladores son utilizados para generar frecuencias, ondas y sincronización [2, 3]; donde este último será el objeto de estudio del trabajo presente. Otras aplicaciones se ven en el estudio de extracción de energía vibracional del ambiente [4]. Así como estos ejemplos, existen una gran cantidad de aplicaciones en otras áreas de estudio.

Los osciladores no lineales más estudiados en la actualidad son los osciladores de Duffing y Van Der Pol, donde el oscilador de Duffing se describió por primera vez en 1918 por el científico Georg Duffing [5, 6]. Desde entonces el oscilador de Duffing se convirtió en el prototipo de sistemas no lineales para el estudio de oscilaciones no armónicas y sistemas caóticos. El oscilador de Rayleigh es muy similar al oscilador de Van Der Pol, donde ambos tienen un factor disipativo similar. Ahora, el llamado oscilador de Rayleigh-Duffing es uno donde combina el término disipativo del oscilador de Rayleigh con el potencial del oscilador de Duffing. De esta manera, la dinámica del oscilador de Rayleigh-Duffing es un ejemplo de un sistema no lineal que presenta un comportamiento caótico. La dinámica del sistema de Rayleigh-Duffing con parámetros globales, incluyendo puntos singulares, orbitas homocíclicas, coexistencia y existencia de límites cíclicos fueron estudiados en Ref. [7, 8].

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas no lineales idénticos o distintos que presentan el mismo tipo de atractores son actualmente de gran importancia y pueden originar información importante para investigación en futuras aplicaciones en señales encriptadas. Debido a su comportamiento no periódico, un modelo de dos osciladores no lineales acoplados cada uno en su propio régimen caótico, puede ser utilizado para el estudio de fenómenos resonantes o histéresis basado en sistemas biológicos o tecnológicos. Por otro lado, la sincronización es importante en sistemas biológicos y físicos, por ejemplo: sistemas nerviosos, células, colonias de luciérnagas o láseres acoplados. De modo que la comprensión de las interacciones mutua de sistemas acoplados es un tema de gran interés.

El control del caos se refiere a la manipulación del comportamiento de algunos sistemas complejos no lineales, donde se modifican las características del sistema. Existen varios métodos de control del caos, por ejemplo tenemos el control adaptivo, activo, modo deslizante o control óptimo por mencionar algunos. También hay varios tipos de sincronización que se han desarrollado y son de gran importancia, algunos de los más utilizados son: sincronización de fase, anticipada, generalizada, proyectiva, completa, híbrida o forzada, por mencionar algunas.

Existen distintos tipos de acoplamiento entre osciladores, tres de estos tipos son: acoplamiento elástico, acoplamiento disipativo y acoplamiento giroscópico [9, 10]. De estos, acoplamientos con más aplicaciones son los elásticos y los disipativos. Estos últimos dos acoplamientos se han estudiado a fondo y aplicados a distintos sistemas, teniendo como resultado que se logre diferentes tipos de sincronización, como la sincronización completa, parcial o no presentar ninguna sincronización. De modo que para obtener mejores resultados, en un trabajo reciente se propone una combinación de acoplamiento elástico con uno disipativo [11]. Los autores observaron que se obtiene una sincronización completa cuando se emplea el acoplamiento mixto a comparación de una sincronización parcial cuando se emplea el acoplamiento por separado.

En este trabajo de tesis, vamos a estudiar y analizar tres tipos de acoplamientos para determinar cuál es el más efectivo en un sistema maestro-esclavo. Los sistemas que se estarán analizando serán los osciladores Duffing y Rayleigh-Duffing y los acoplamientos serán: acoplamiento elástico, acoplamiento disipativo y un que combina ambos acoplamientos. También, se estarán analizando el rango de valores para los cuales se obtiene la sincronización. Dicho

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

esto, la estructura de la tesis queda de la siguiente manera. En el capítulo 2 se dará una descripción sobre sistemas dinámicos, estabilidad de dichos sistemas y unos teoremas importantes que serán de utilidad. El capítulo 3 se estudia la dinámica de los sistemas que estaremos empleando, los osciladores de Duffing y Rayleigh-Duffing. En el capítulo 4 se tratará sobre el control de sistemas caóticos así como la sincronización de dichos sistemas. Por otro lado, en el capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos sobre los distintos tipos de acoplamientos empleando los osciladores antes ya mencionados. Finalmente, en el capítulo 6 estaremos presentando las conclusiones.

Capítulo 2

Sistemas Dinámicos

2.1. Introducción

Un sistema dinámico es una manera de describir el paso en el tiempo de todos los puntos de un espacio dado S . El espacio S se puede pensar, como el espacio de estados de un sistema físico. De esta manera, un sistema dinámico en S nos da la trayectoria de x para todo tiempo t . El mapeo de $R \rightarrow S$, que manda t en x_t , es una curva en S que representa la vida de x mientras el tiempo corre de menos infinito a infinito [12].

De manera formal podemos definir que un *sistema dinámico* es un mapeo $R \times S \xrightarrow{\phi} S$ tipo C^1 , donde S es un conjunto abierto en el espacio Euclidiano y escrito como $\phi(t, x) = \phi_t(x)$, el mapeo $\phi_t : S \rightarrow S$ satisface

- (a) $\phi_0 : S \rightarrow S$ es la identidad;
- (b) La composición $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ para cada t, s en R .

Los sistemas dinámicos se pueden dividir en dos tipos: sistemas donde la variable del tiempo es discreto ($t \in \mathbb{Z} \vee \mathbb{N}$) y sistemas donde variable del tiempo es continuo ($t \in \mathbb{R}$). Los sistemas discretos se pueden ver como la iteración de una función, por ejemplo:

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad t \in \mathbb{Z} \vee \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Cuando el tiempo es continuo, el sistema se representa mediante una ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}. \quad (2.2)$$

2.2. Sistemas Autónomos y No Autónomos

Dentro de los sistemas dinámicos tenemos que un sistema puede ser autónomo o no autónomo. Un sistema autónomo, la función que describe el sistema no depende explícitamente del tiempo t , sino de manera implícita a través de la dependencia de t en x ,

$$\dot{\mathbf{x}}^i(t) = f^i(\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)) \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Ahora, un sistema no autónomo depende explícitamente del tiempo t ,

$$\dot{\mathbf{x}}^i(t) = g^i(t, \mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)) \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Estos sistemas se pueden transformar a uno autónomo si introducimos una variable dependiente x^{n+1} y la ecuación

$$\mathbf{x}^{n+1}(t) = f^{n+1}(\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t), \mathbf{x}^{n+1}(t)) \equiv 1. \quad (2.5)$$

Tomamos el siguiente ejemplo

$$\dot{\mathbf{x}} = \sin\omega t, \quad (2.6)$$

y la transformamos de la siguiente manera para hacerla independiente del tiempo usando la Ec. (2.5). De modo que ahora representamos la Ec. (2.6) como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^1 &= \sin\omega x^2 \\ \dot{\mathbf{x}}^2 &= 1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Se debe mencionar que al transformar una ecuación no autónoma a una autónoma, esta deja de ser lineal [13, 14].

2.3. Estabilidad del Sistema

La estabilidad de un sistema autónomo lineal y el tipo de dinámica de los puntos fijos queda caracterizada por los eigenvalores de la matriz del sistema. Consideremos un sistema autónomo lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (2.8)$$

donde \mathbf{A} es una matriz 2×2 , y \mathbf{x} es un vector columna de 2×1 . Se buscan soluciones que sean de la forma $\mathbf{x} = \xi e^{\lambda t}$, ahora si sustituimos esto a la ecuación anterior, obtenemos que

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\xi = 0. \quad (2.9)$$

De modo que λ debe ser un eigenvalor y ξ un eigenvector correspondiente de la matriz \mathbf{A} [15, 16]. De esta manera, los eigenvalores son las raíces de la Ec. (2.9) se determinan de la siguiente manera.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \text{tr} \mathbf{A} + \det \mathbf{A}. \quad (2.10)$$

Los eigenvalores λ del sistema guardan una estrecha relación con los puntos fijos ya que determinan la forma en que las trayectorias interactúan con el punto fijo. De la Ec. (2.10) es fácil conocer qué tipo de punto fijo presenta dicho sistema; simplemente se calculan los eigenvalores λ a partir de la ecuación característica del sistema.

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr} \mathbf{A} \pm \sqrt{(\text{tr} \mathbf{A})^2 - 4 \det \mathbf{A}}}{2}, \quad (2.11)$$

La estabilidad del punto de fijo se determina de la siguiente manera: Es estable si

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ y $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$. Es un nodo estable.
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ y $\text{Re}(\lambda_1) < 0$ y $\text{Re}(\lambda_2) < 0$. Es un foco estable.
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ y $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = 0$. Es un centro.

El punto fijo es inestable si

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ y $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$. Es un nodo inestable.
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ y $\text{Re}(\lambda_1) > 0$ y $\text{Re}(\lambda_2) > 0$. Es un foco inestable.
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ y $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Es un punto silla.

CAPÍTULO 2. SISTEMAS DINÁMICOS

Esta estabilidad la podemos visualizar en la Fig. 2.1, donde a), b) y c) son puntos fijos estables mientras que d) es un punto fijo inestable.

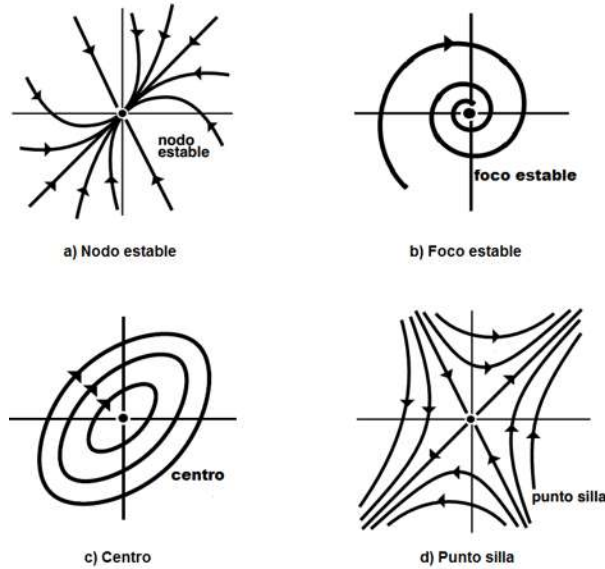


Figura 2.1: Punto fijo estable a) nodo estable b) foco estable y c) centro. Punto fijo inestable d) punto silla.

Los eigenvalores dependen de la traza y del determinante de la matriz \mathbf{A} . Es posible hacer un diagrama general por medio del discriminante de las soluciones de la ecuación característica, graficando $\text{tr}\mathbf{A}$ vs $\det\mathbf{A}$. En la Fig. 2.2 podemos observar la variación en la solución a la Ec. (2.11) para los diferentes casos.

- si $\det\mathbf{A} > 0$, $\text{tr}\mathbf{A} < 0$ y $(\text{tr}\mathbf{A})^2 - 4\det\mathbf{A} \geq 0$ entonces el origen es un nodo estable.
- si $\det\mathbf{A} > 0$, $\text{tr}\mathbf{A} > 0$ y $(\text{tr}\mathbf{A})^2 - 4\det\mathbf{A} \geq 0$ entonces el origen es un nodo inestable.
- si $\det\mathbf{A} > 0$, $\text{tr}\mathbf{A} < 0$ y $(\text{tr}\mathbf{A})^2 - 4\det\mathbf{A} < 0$ entonces el origen es un foco estable.
- si $\det\mathbf{A} < 0$, $\text{tr}\mathbf{A} < 0$ y $(\text{tr}\mathbf{A})^2 - 4\det\mathbf{A} \geq 0$ entonces el origen es un punto silla.

CAPÍTULO 2. SISTEMAS DINÁMICOS

- si $\det \mathbf{A} > 0$, $\text{tr} \mathbf{A} > 0$ y $(\text{tr} \mathbf{A})^2 - 4\det \mathbf{A} < 0$ entonces el origen es un foco inestable.
- si $\det \mathbf{A} < 0$ entonces el origen es un punto silla.
- si $\det \mathbf{A} > 0$, $\text{tr} \mathbf{A} = 0$ entonces el origen es un centro.

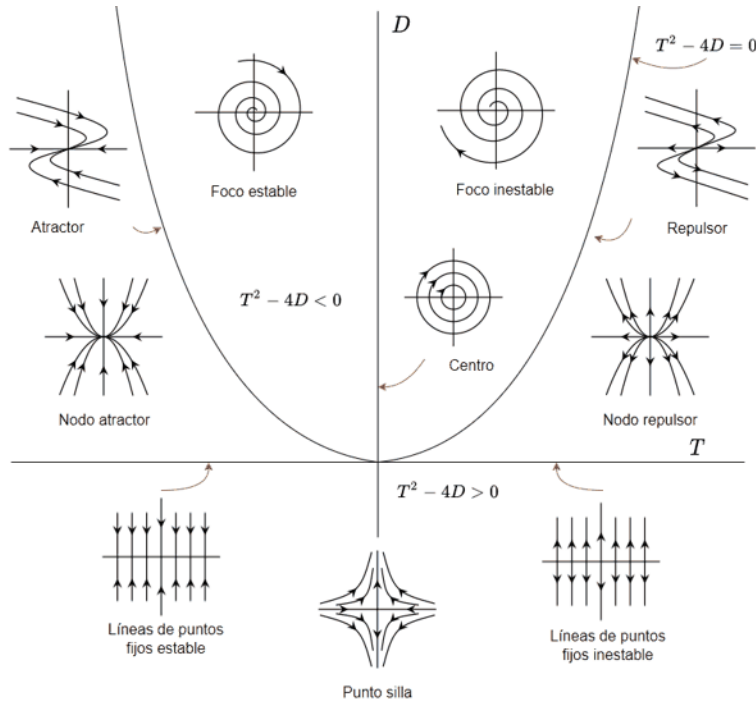


Figura 2.2: Diferentes dinámicas para la solución de la Ec. (2.11).

Ahora, pasamos a definir algunos conceptos que estaremos utilizando a lo largo del presente trabajo. Para eso vamos a definir un sistema dinámico $\phi(t, x)$ como:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}). \quad (2.12)$$

De esta manera cuando nos referimos a una *órbita periódica* del sistema dinámico de la Ec. (2.12), nos referimos a cualquier solución de curva cerrada en donde no hay un punto de fijo [13]. Este sistema tiene una solución curva cerrada si y solo si para todo $t \in \mathbf{R}$ $\phi(t + T, x_0) = \phi(t, x_0)$ para algún $T > 0$. El mínimo T para cual esto se mantiene se le llama un *periodo* de la

órbita periódica. Para el estudio de la estabilidad de las órbitas periódicas es importante mencionar el *mapa de Poincaré*, definido por Henri Poincaré en 1881 [13]. Esta idea es muy simple, si Γ es una órbita periódica del sistema de la Ec. (2.12) por el punto x_0 y Σ es un hiper-plano perpendicular a Γ en x_0 , entonces para cualquier punto $x \in \Sigma$ suficientemente cercano a x_0 , la solución de la Ec. (2.12) a través de $x(t = 0)$, $\phi_t(x)$ volverá a cruzar Σ en un punto $P(x)$ cercas de x_0 . El mapeo de $x \rightarrow P(x)$ es llamado el mapa de Poincaré podemos ver como se puede visualizar mediante la Fig. (2.3).

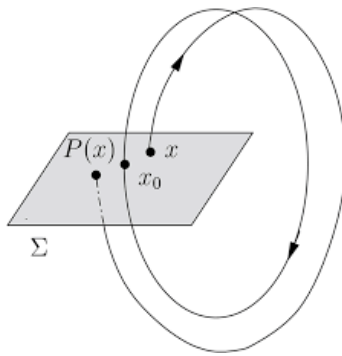


Figura 2.3: Representación gráfica de un mapa de Poincaré.

2.4. El Teorema de Poincaré-Bendixson

El teorema de Poincaré-Bendixson nos da una vista completa del comportamiento asintótico de una gran variedad de flujos, ya sea en un plano, un cilindro o una esfera. Cabe mencionar que esto no nos dará información detallada del campo vectorial, sino soluciones únicas, propiedades de conjuntos límite y propiedades de la geometría del espacio fase subyacente. Ahora, para poder dar una explicación del teorema, primero tenemos que dar algunas definiciones, lemas y corolarios que estaremos utilizando [14, 15].

Definición 1. Un **punto límite** ω de una trayectoria, es un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ de $x \in \mathbb{R}^n$, es denotado como $\omega(x)$ si existe una secuencia $t_i, t_i \rightarrow \infty$, tal que

$$\phi(t_i, x) \rightarrow x_0.$$

El punto límite α se define de la misma manera que el punto ω , solo que la secuencia $t_i, t_i \rightarrow -\infty$. Ahora, el conjunto de todos los puntos límite ω de

un flujo o un mapeo se llama un ω **conjunto límite**. El α conjunto límite se define de manera similar.

Proposición: (Propiedades de puntos límite ω) Sea $\phi_t(x, y)$ un flujo generado por un campo vectorial y sea \mathcal{M} un conjunto compacto positivo e invariante. Entonces, para $p \in \mathcal{M}$ tenemos que

- $\omega(p) \neq \emptyset$,
- $\omega(p)$ es cerrado,
- $\omega(p)$ es invariante bajo el flujo, e.i. $\omega(p)$ es una unión de orbitas,
- $\omega(p)$ está conectado.

Consideremos los siguientes campos vectoriales tipo C^r , $r \geq 1$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{P},\end{aligned}$$

donde \mathcal{P} es el espacio fase. Denotamos un flujo por este campo vectorial como $\phi_t(x, y)$.

Entenderemos que por Σ sea un arco conectado continuo en \mathcal{P} y que \mathcal{M} es un conjunto compacto positivo e invariante en \mathcal{P} . Para cada punto $p \in \mathcal{P}$, denotaremos que la órbita de p bajo el flujo $\phi_t(x, y)$ para cuando es positivo como $\mathcal{O}_+(p)$, también llamado como la semi-órbita positiva de p . Con esto en mente podemos definir el siguiente lema.

Lema Sea $\Sigma \subset \mathcal{M}$ sea un arco transversal al campo vectorial. La órbita positiva a través de cualquier punto $p \in \mathcal{M}$, $\mathcal{O}_+(p)$, se cruza con Σ en una secuencia; esto es, si p_i es la i -ésima intersección de $\mathcal{O}_+(p)$ con Σ , entonces $p_i \in [p_{i-1}, p_{i+1}]$.

Corolario: El conjunto límite ω de $p(\omega(p))$ intersecciona Σ por mucho en un solo punto.

Lema Si $\omega(p)$ no contiene puntos fijos, entonces $\omega(p)$ es una órbita cerrada.

Lema Sea p_1 y p_2 puntos fijos distintos de un campo vectorial contenidos en $\omega(p)$, $p \in \mathcal{M}$. Entonces debe solo existir por mucho una orbita $\gamma \subset \omega(p)$ tal que $\alpha(\gamma) = p_1$ y $\omega(\gamma) = p_2$.

Teorema (Poincaré-Bendixson) Sea \mathcal{M} una region positiva invariante para el campo vectorial que contiene un numero finito de puntos fijos. Sea $p \in \mathcal{M}$, y considerando $\omega(p)$. Entonces una de las siguientes afirmaciones se cumplen.

1. $\omega(p)$ es un punto fijo,
2. $\omega(p)$ es una orbita cerrada,
3. $\omega(p)$ consiste de un numero finito de puntos fijos p_1, \dots, p_n y orbitas γ con $\alpha(\gamma) = p_i$ y $\omega(\gamma) = p_j$.

2.5. El Teorema de Hartman-Grobman

En el estudio de sistemas dinámicos, el teorema Hartman-Grobman o teorema de linealización dice como es el comportamiento localmente de un punto fijo hiperbólico. Afirma que cualitativamente es el mismo comportamiento que el sistema linealizado, el cual es una simplificación del sistema [15].

Teorema (Hartman-Grobman) Sea x_0 un punto fijo hiperbólico de un mapeo continuo diferenciable $f \in \mathbf{R}^n$. Entonces, existe una vecindad abierta pequeña U de x_0 tal que f sobre U son topológicamente conjugados a su linealización.

Entonces decimos que la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{2.13}$$

es topológicamente equivalente al campo vectorial asociado

$$\dot{x} = Df(x_0)\mathbf{x}. \tag{2.14}$$

2.6. Ejemplos

A continuación, se analizará la estabilidad y el tipo de dinámica que tienen algunos sistemas. En sistemas dinámicos, el oscilador de Van der Pol es un oscilador con amortiguamiento no lineal. Su evolución temporal obedece a una ecuación diferencial de segundo orden:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (2.15)$$

reescribiendo la Ec. (2.15), como un conjunto de ecuaciones diferenciables de primer orden obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu(1 - x^2)y - x, \end{aligned}$$

El sistema tiene un punto fijo $x_0 = (0, 0)$, la matriz Jacobiana del sistema es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2\mu xy & \mu(1 - x^2) \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Encontramos la estabilidad del sistema evaluando la matriz Jacobiana en el punto fijo x_0 , para obtener su polinomio característico y sus eigenvalores.

$$\lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0.$$

Cuando $\mu = 0$ en el punto de fijo x_0 se tiene dinámica centro y para valores de $\mu > 0$, en el punto de fijo x_0 se tiene dinámica foco inestable. En la Fig. 2.4 se muestra la dinámica del sistema para un valor de $\mu = 0,5$.

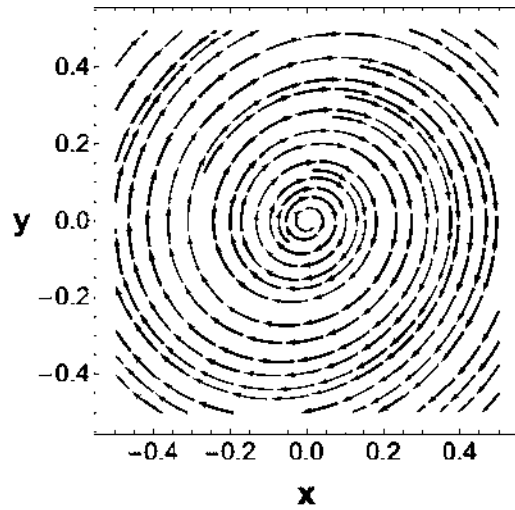


Figura 2.4: Dinámica foco inestable.

Las ecuaciones de Lotka-Volterra, también conocidas como modelo presa-predador, son un par de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales que se usan para describir dinámicas de sistemas biológicos en el que dos especies interactúan, una como presa y otra como depredador [16]. Tales ecuaciones se definen como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - xy, \\ \dot{y} &= -y + xy,\end{aligned}$$

El sistema tiene dos puntos fijos $x_0 = (0, 0)$ y $x_1 = (1, 1)$, la matriz Jacobiana del sistema es

$$J = \begin{pmatrix} 1 - y & -x \\ y & -1 + x \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Encontramos la estabilidad del sistema evaluando la matriz Jacobiana en el punto fijo x_0 , para obtener su polinomio característico y sus eigenvalores.

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Los eigenvalores $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$, el punto fijo x_0 corresponde a una dinámica silla. De manera similar obtenemos el polinomio característico y sus eigenvalores en el punto fijo x_1 .

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Los eigenvalores $\lambda_{1,2} = \pm i$, el punto fijo x_1 corresponde a una dinámica centro. En la Fig. (2.5) se muestra la dinámica del sistema Lotka-Volterra.

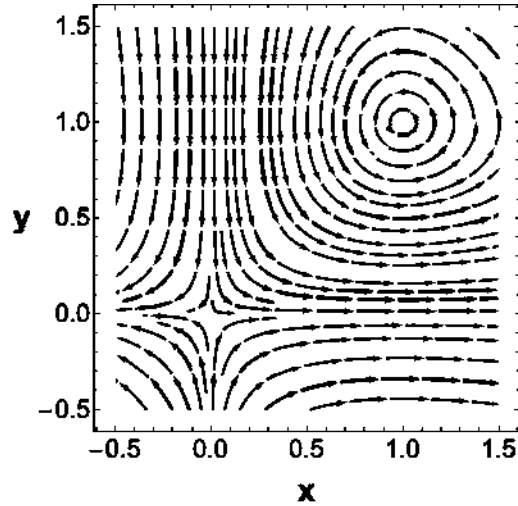


Figura 2.5: Dinámica silla y centro.

El siguiente sistema que físicamente no representa nada, pero analizaremos su estabilidad y el tipo de dinámica.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y, \\ \dot{y} &= 1 - xy,\end{aligned}$$

Este sistema tiene dos puntos fijos $x_1 = (-1, -1)$ y $x_2 = (1, 1)$, la matriz Jacobiana del sistema es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -y & -x \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Encontramos la estabilidad del sistema evaluando la matriz Jacobiana en el punto fijo x_1 , para obtener su polinomio característico y sus eigenvalores.

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Los eigenvalores $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, el punto fijo x_1 corresponde a una dinámica foco inestable. De manera similar obtenemos el polinomio característico y sus eigenvalores en el punto fijo x_2 .

$$\lambda^2 - 2 = 0.$$

Los eigenvalores $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, el punto fijo x_2 corresponde a una dinámica silla. En la Fig. (2.6) se muestra la dinámica del sistema.

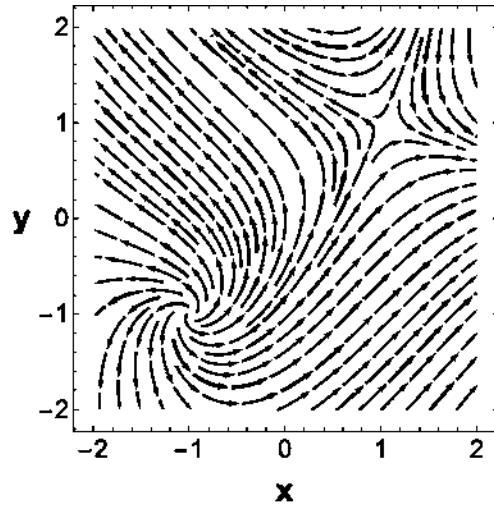


Figura 2.6: Dinámica foco inestable y silla.

Capítulo 3

Dinámica de los osciladores de Duffing y de Rayleigh-Duffing

3.1. Introducción

En este capítulo estaremos viendo dos sistemas de interés, el oscilador de Duffing y el oscilador de Rayleigh-Duffing. Estos dos sistemas, en especial el oscilador de Duffing ha sido de los más estudiados en los últimos cien años cuando Georg Duffing lo describió por primera vez a principios del siglo XX. Ambos osciladores, uno siendo una variación del otro, describen un comportamiento complejo o caótico debido a su no linealidad. Este comportamiento es de gran interés, ya que puede ser utilizado para el estudio distintos fenómenos físicos; como son los circuitos eléctricos, vibraciones mecánicas incluso sistemas biológicos.

3.2. Oscilador de Duffing

En 1918 Duffing introdujo un oscilador no lineal con un término cúbico que describe la rigidez de un resorte que presentaba en varios problemas mecánicos [17]. Esta ecuación representa el movimiento de un oscilador amortiguado con un potencial más complejo que el de un oscilador armónico amortiguado. Junto con la ecuación de Van der Pol, estas ecuaciones se convirtieron en los principales ejemplos para oscilaciones no lineales en su época. La ecuación de Duffing es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden utilizada para modelar ciertos tipos de osciladores amortiguados que presen-

CAPÍTULO 3. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES DE DUFFING Y DE RAYLEIGH-DUFFING

tan un comportamiento caótico. Algunos de los sistemas físicos que describe la ecuación de Duffing son:

1. Sistemas mecánicos: La ecuación de Duffing puede describir la dinámica de un sistema mecánico con forzamiento periódico. Por ejemplo, se ha utilizado para modelar el movimiento de sistema masa-resorte amortiguado con un resorte no lineal. También se ha utilizado para mecanismos tipo de restauración rígida de materiales por mencionar algunos [18].
2. Circuitos Eléctricos: Existen varias aplicaciones en circuitos eléctricos, uno de ellos es el resultado de estudiar circuitos que contienen un inductor no lineal con un condensador lineal [19].
3. Biología y redes neuronales: También la ecuación de Duffing se ha utilizado para el estudio de sistemas biológicos tal como la interacción entre neuronas en el cerebro. Por ejemplo, se ha hecho un modelo para la sincronización de neuronas en la presencia de ruido y estímulos externos [20].

Ahora, la ecuación del oscilador de Duffing puede ser vista de la siguiente manera:

$$\ddot{y} + \gamma y + \frac{dV_1(y)}{dy} = A_1 \cos(\omega_1 t), \quad (3.1)$$

donde $\gamma > 0$ es el parámetro de oscilación. La fuerza externa es una función armónica con frecuencia ω_1 y amplitud A_1 . Este sistema dinámico es un ejemplo de un péndulo elástico cuyo resorte tiene un movimiento no armónico de orden cuatro y no obedece a la ley de Hooke. El oscilador de Duffing representa el movimiento de una masa unida a un resorte no lineal con un amortiguamiento lineal. Entonces, la fuerza producida por el resorte esta dada por $F(y) = -\frac{dV_1(y)}{dy} = y - \delta y^3$. De esta manera, el potencial $V_1(y)$ esta dado por

$$V_1(y) = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}\delta y^4. \quad (3.2)$$

donde δ controla la no linealidad de la fuerza [21]. Además, este potencial $V_1(y)$ corresponde a un pozo doble. Este potencial tiene dos estados de equilibrio mínimos en $y = \pm 1/\sqrt{\delta}$ y un punto inestable máximo en $y = 0$. En la

CAPÍTULO 3. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES DE DUFFING Y DE RAYLEIGH-DUFFING

la Fig. 3.1 se muestra el potencial del oscilador de Duffing para un valor de $\delta = 1$.

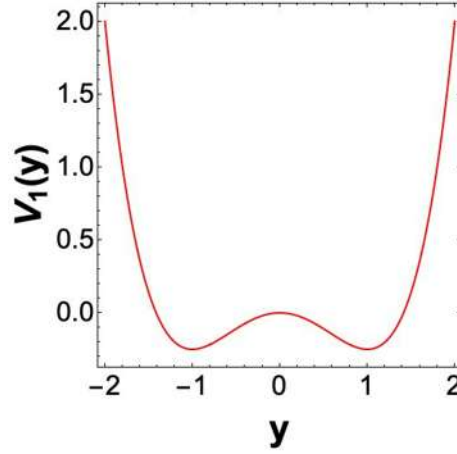


Figura 3.1: Potencial del oscilador de Duffing para $\delta = 1$.

3.2.1. Análisis del oscilador de Duffing

Hagamos ahora el análisis de la Ec. (3.1), considerando el sistema como autónomo calculamos los puntos fijos haciendo el término $A_1 = 0$. El sistema ahora puede expresarse como un par de ecuaciones diferenciales de primer orden como:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= v, \\ \dot{v} &= -\gamma v + y - \delta y^3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

El sistema en la Ec. (3.3) contiene tres puntos fijos: $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1/\sqrt{\delta}, 0)$, $P_2 = (-1/\sqrt{\delta}, 0)$. Aplicando el teorema de Hartman-Grobman a la Ec. (3.3), obtenemos la matriz Jacobiana del sistema linealizado A_J alrededor de los puntos fijos. La matriz Jacobiana evaluada en cualquier punto fijo $(y_0, v_0)^T$ se puede calcular como la siguiente manera:

$$A_J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3\delta y_0^2 & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

La estabilidad de los puntos fijos $(y_0, v_0)^T$ se calcula con la ecuación característica $\text{Det}(A_J - \lambda I) = 0$:

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + (3\delta y_0^2 - 1) = 0. \quad (3.5)$$

CAPÍTULO 3. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES DE DUFFING Y DE RAYLEIGH-DUFFING

Ahora cuando $\gamma > 0$, el punto fijo P_0 es un punto silla mientras que los puntos P_1 y P_2 del sistema son puntos fijos que corresponden a espirales estables. Por ejemplo, para los valores $\gamma = 0,3$ y $\delta = 0,5$, en P_0 se obtienen los eigenvalores correspondientes a este punto como -1.28078 y 0.780776 . Para el punto $P_1 = (\sqrt{2}, 0)$ y $P_2 = (-\sqrt{2}, 0)$ obtenemos los eigenvalores $-0.25 \pm 1.39194i$ que corresponden a los dos puntos en espiral que se muestran en la Fig. 3.2. La dinámica del oscilador de Duffing de la Ec. (3.1) describe las trayectorias en el espacio fase de dicho sistema como se observa en la Fig. 3.3. Resolvimos las simulaciones numéricamente utilizando el método de Runge-Kutta de orden cuatro. El sistema se resolvió utilizando los siguientes parámetros: $\gamma = 0.3$, $\delta = 0.5$, $A_1 = 0.5$ y $\omega_1 = 1.1$, con las condiciones iniciales $y(0) = 0.5$ y $v(0) = 2$.

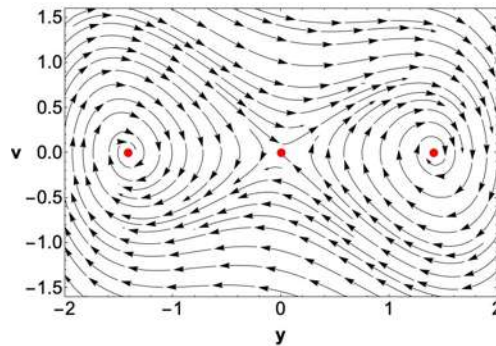


Figura 3.2: Espacio fase del oscilador de Duffing.

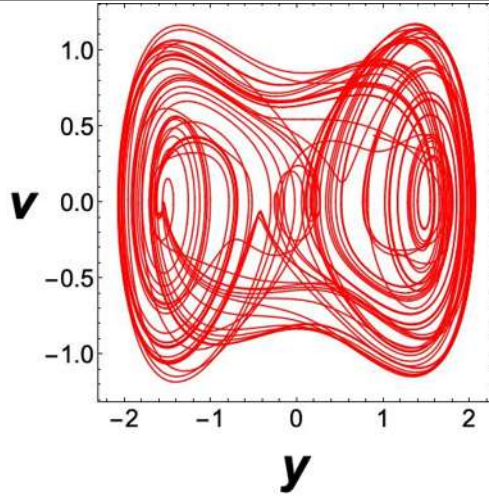


Figura 3.3: Oscilador de Duffing.

3.3. Oscilador de Rayleigh-Duffing

Los osciladores de Van der Pol y Duffing se han discutido ampliamente en la literatura. El oscilador de Van der Pol es muy similar al oscilador de Rayleigh ya que tienen un factor de disipación similar. El llamado oscilador de Rayleigh-Duffing es aquel que combina el término disipativo del oscilador de Rayleigh con la fuerza restauración no lineal correspondiente al potencial del oscilador de Duffing. El oscilador de Rayleigh-Duffing forzado es un ejemplo de un sistema no lineal que presenta un comportamiento caótico. Dicho sistema puede ser expresado como una ecuación no lineal de segundo orden justo como:

$$\ddot{x} - \mu(1 - \dot{x}^2)\dot{x} + \frac{dV_2(x)}{dx} = A_2 \cos(\omega_2 t), \quad (3.6)$$

donde $\mu > 0$ es el parámetro de amortiguamiento no lineal. De manera similar al oscilador de Duffing, tenemos una función armónica para la fuerza externa con amplitud A_2 y frecuencia ω_2 . El potencial $V_2(x)$ está dado como

$$V_2(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4. \quad (3.7)$$

donde los parámetros α y β son ajustados de manera conveniente. Ahora, este potencial tiene varios casos para distintos valores de estos parámetros, cada

CAPÍTULO 3. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES DE DUFFING Y DE RAYLEIGH-DUFFING

caso representa una situación física para el potencial. Entonces, el potencial para (i) $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ es un pozo simple, (ii) $\alpha < 0$ y $\beta < 0$ es una joroba simple, (iii) $\alpha < 0$ y $\beta > 0$ es un pozo doble y (iv) $\alpha > 0$ y $\beta < 0$ es una joroba doble.

3.3.1. Análisis del oscilador de Rayleigh-Duffing

Ahora, para nuestro análisis utilizaremos la configuración del potencial de pozo doble. Como en el caso del oscilador de Duffing, vamos hacer que la amplitud A_2 sea igual a cero, haciendo el sistema autónomo. El sistema puede reescribirse como un par de ecuaciones diferenciales de primer orden. De esta manera la Ec. (3.6) la expresamos como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= \mu(1 - u^2)u - \alpha x - \beta x^3.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Tenemos tres puntos fijos para el sistema Ec. (3.8). Estos puntos están ubicados en el espacio fase en $P_0 = (0, 0)$ y $P_{1,2} = \pm(\sqrt{-\alpha/\beta}, 0)$. Aplicando el teorema de Hartman-Grobman a este sistema, obtenemos la matriz Jacobiana del sistema linealizado alrededor de los puntos fijos, esta matriz Jacobiana es

$$A_J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - 3\beta x_0^2 & \mu(1 - 3u_0^2) \end{pmatrix}.\tag{3.9}$$

De esta manera, la estabilidad de los puntos fijos $(x_0, u_0)^T$ se calculan mediante la ecuación característica obtenida de $Det(A_J - \lambda I) = 0$. Así obtenemos que

$$\lambda^2 - \mu(1 - 3u_0^2)\lambda + (3\beta x_0^2 + \alpha) = 0.\tag{3.10}$$

Ahora cuando $\mu > 0$, de manera similar al caso anterior el punto fijo P_0 es un punto silla, mientras que los puntos P_1 y P_2 del sistema son puntos fijos correspondientes a espirales inestables. Para los valores $\mu = 0.5$, $\alpha = -1$ y $\beta = 1$, en P_0 se obtienen los eigenvalores correspondientes a este punto como -0.780776 y 1.28078 . Para el punto $P_1 = (1, 0)$ y $P_2 = (-1, 0)$ obtenemos los eigenvalores $0.25 \pm 1.39194i$ que corresponden a los dos puntos de espiral inestables como se muestran como en la Fig. 3.4. La dinámica del oscilador de Rayleigh-Duffing que la Ec. (3.6) describe las trayectorias en el espacio fase de dicho sistema como se observa en la Fig. 3.5. El sistema se resolvió utilizando los siguientes parámetros: $\mu = 0.5$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $A_2 = 1.5$ y $\omega_2 = 1.8$, con las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $u(0) = 0$.

CAPÍTULO 3. DINÁMICA DE LOS OSCILADORES DE DUFFING Y DE RAYLEIGH-DUFFING

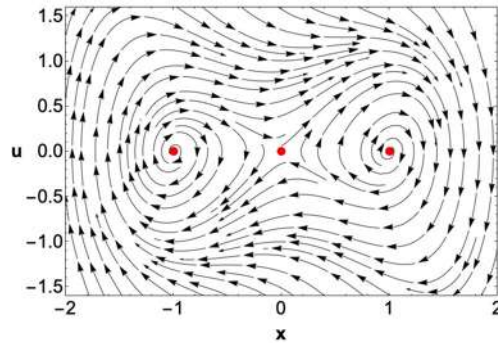


Figura 3.4: Espacio fase del oscilador Rayleigh-Duffing.

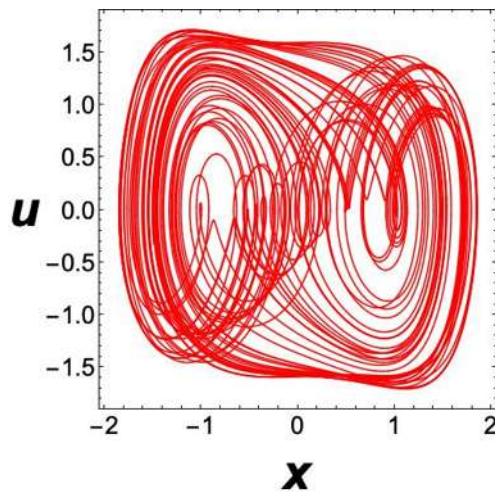


Figura 3.5: Oscilador Rayleigh-Duffing.

En conclusión para esta sección, observamos que la dinámica del sistema de Duffing presentan dos atractores mientras que el sistema de Rayleigh-Duffing tiene dos repulsores. Por lo que estos dos sistemas tienen dinámicas muy diferentes debido al termino disipativo.

Capítulo 4

Sincronización y Control de Sistemas Caóticos

4.1. Introducción

La sincronización y el control de sistemas caóticos son dos conceptos que involucran el control del comportamiento de sistemas complejos o caóticos. Sincronización se refiere al fenómeno donde dos o más sistemas dinámicos pueden comportarse de manera coordinada, aun cuando estos tengan distintos valores iniciales o parámetros. Este proceso se puede lograr mediante métodos mecánicos, como lo es el acoplamiento de sistemas o mediante el esquema maestro-esclavo. El control de sistemas caóticos se refiere al proceso de manipular el comportamiento de dicho sistema para lograr un comportamiento o estado deseado. Esto se puede lograr mediante algunas técnicas, como lo es el control de respuesta o control de ciclo abierto, esto ajusta los parámetros de entrada del sistema.

Tanto la sincronización como el control de sistemas caóticos tiene aplicaciones importantes en distintos campos de estudio. En ingeniería por ejemplo, la sincronización puede ser utilizada en sistemas de comunicación para transmitir información entre dispositivos, mientras que el control de caos puede ser utilizado para estabilizar sistemas que presenten algún comportamiento caótico. En física, la sincronización se utiliza para el estudio de sincronización de osciladores mientras que el control de caos puede ser utilizado para el estudio de sistemas caóticos en la mecánica cuántica. Existen más aplica-

CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

ciones en otras áreas de interés, pero por ahora en el trabajo presentado nos estaremos enfocando en el estudio de sincronización de osciladores.

El comportamiento caótico de un sistema dinámico puede ser indeseable, como en el caso de las fibrilaciones cardíacas, en la predicción de fenómenos climáticos, o en problemas ocasionados por la desincronización, etc, aunque también puede ser deseable, como en los procesos de mezclado o de transferencia de calor. Por ese motivo el “control del caos” ha sido uno de los tópicos de interés en los últimos años. Obviamente siempre es posible controlar el caos utilizando grandes perturbaciones, pero el punto importante es obtener una técnica de control eficiente, que requiera una energía de control mínima. Es decir debe constituir solo una pequeña perturbación del sistema dinámico.

Otro tópico de gran importancia, en función de sus aplicaciones, y estrechamente relacionado al “control del caos” es la “sincronización de sistemas caóticos”. La posibilidad que dos o más sistemas caóticos oscilen de manera sincronizada y coherente no es obvia, debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales. Sin embargo, Pecora y Carroll [22] demostraron que es posible acoplar dos sistemas caóticos, que parten de estados iniciales distintos, de modo tal que sus oscilaciones se sincronicen. El estudio de la sincronización ha dado origen al surgimiento de nuevos métodos para controlar un sistema caótico. En este sentido se han obtenido logros importantes en lo referente a estrategias para controlar arritmias cardíacas, reacciones químicas industriales de tipo oscilatorio y sistemas electrónicos.

El presente capítulo tiene como finalidad describir métodos de control y sincronización de sistemas caóticos, ya que constituye uno de los métodos principales para la obtención de un sistema de comunicaciones analógicas seguras. Sin embargo, por razones de complejidad, se hará referencia en este capítulo, a algunos de los métodos más utilizados para el control de sistemas caóticos.

4.2. Métodos de control caos

Durante las últimas dos décadas, el control y la sincronización de sistemas caóticos han sido ampliamente investigados. El control del caos se refiere a la manipulación de los comportamientos dinámicos caóticos de algunos sistemas no lineales complejos con el fin de modificar las características del

CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

sistema. El objetivo básico del control de un sistema caótico es forzarlo a seguir una determinada trayectoria. Obviamente el objetivo específico varía en función de cada aplicación particular, aunque el más común es lograr que el movimiento caótico se transforme en periódico. No obstante, recientemente se han presentado aplicaciones donde el estado final deseado del sistema es también de características caóticas; es decir el problema de control, en ese caso, consiste en transformar un comportamiento caótico indeseado, en otro comportamiento también caótico, pero cuyas propiedades pueden fijarse de alguna manera. De hecho la sincronización caótica utilizada en los sistemas de comunicaciones puede pensarse como un método de control de este tipo. También es importante el estudio del proceso inverso, donde se trata que un sistema que inicialmente es periódico cambie su comportamiento a caótico. En este caso el método de control se conoce como de *anti-control* del caos.

Sea un sistema dinámico $n - dimensional$ de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, u). \quad (4.1)$$

donde las componentes del vector $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ son las n variables de estado, en tanto que u es un parámetro externo o de control cuyo propósito es modificar la dinámica del sistema mediante la mínima perturbación posible. En lo que sigue se supone que para el valor elegido de este parámetro, $x(t)$ es una solución caótica de la Ec. (4.1).

Los métodos de control del caos generalmente utilizan dos propiedades fundamentales de los sistemas caóticos: la sensibilidad a las condiciones iniciales, y la existencia de infinitas órbitas periódicas inestables embebidas en el atractor (estable).

Si $x(t)$ es la trayectoria del sistema, sin aplicar el control u , y $g(t)$ es la trayectoria deseada, el propósito del control puede expresarse matemáticamente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{x}(t) - g(t)| = 0. \quad (4.2)$$

en donde $\tilde{x}(t)$ es la trayectoria modificada por el control u .

La Ec. (4.2) puede entenderse como un problema de seguimiento de trayectoria, trata de encontrar un control u que fuerce la trayectoria del sistema

CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

dinámico a seguir una trayectoria deseada $g(t)$, de manera que la función de error converga a cero. Según la aplicación particular $g(t)$ puede ser una de las soluciones inestables existente en el propio sistema, o bien una señal externa que se desea imponer. Existen varios métodos para controlar el caos, como el control de retroalimentación lineal, el control adaptativo, el control activo, el control bang-bang, el control de modo deslizante o el control óptimo, entre otros. En base a los distintos métodos de control para modificar la dinámica del sistema, describiremos a continuación tres métodos.

4.2.1. Control a través de un parámetro accesible del sistema

El estudio de la influencia de las variaciones de los parámetros en el comportamiento asintótico del sistema es el objeto de la teoría de bifurcaciones [21]. Si el propósito del control es suprimir oscilaciones caóticas y obtener comportamiento regular, éste es el método más simple. En efecto, en el caso de los circuitos electrónicos, basta con modificar el valor de uno de los componentes pasivos (resistencias o capacitores). La principal desventaja del método es que pueden requerirse variaciones grandes en los valores de los parámetros, para lograr el comportamiento deseado. Por otro lado, el método es difícil de aplicar en la etapa de diseño, donde existen pocas herramientas de simulación que cuenten con la posibilidad de realizar un análisis de bifurcaciones, y aún existiendo esa posibilidad, se requiere una descripción del problema en una forma matemática cerrada (ecuaciones diferenciales o en diferencias) que no siempre se puede obtener en forma simple [23, 24].

Otra alternativa es hacer variable el parámetro de control aplicando una pequeña perturbación de una frecuencia adecuada. Es decir se sustituye en la Ec. (4.1) al control u por un nuevo control de la forma $u + A \cos \omega t$. Merece mencionarse especialmente el método Ott-Grebogi-Yorke (OGY), propuesto en 1990, que se basa en aprovechar la existencia de un número infinito de órbitas periódicas inestables, embebidas en el atractor caótico. Aplicando pequeñas perturbaciones temporales al parámetro u (Ec. (4.1)), se busca estabilizar la trayectoria caótica haciendo que el sistema siga la órbita periódica seleccionada. Para determinar los valores de las perturbaciones se necesitan conocer los autovalores y autovectores de la órbita inestable; información que

CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

no está disponible si no se cuenta con el modelo matemático del sistema. Pero los datos necesarios pueden obtenerse a partir de las órbitas reconstruidas en el espacio de fases por el método “embebimiento por retraso temporal”, que transforma una serie temporal de las mediciones de una variable del sistema, en una trayectoria (vectorial) en el espacio de estados. Una ventaja adicional del método OGY es la flexibilidad de poder elegir la órbita periódica que se va a controlar.

El método OGY se ha utilizado para controlar sistemas dinámicos, sistemas Hamiltonianos (conservativos), transitorios caóticos y dispersiones (scattering) caóticas. Cuando esta técnica se aplica a un circuito físico real, el principal problema se encuentra en los errores introducidos por el ruido, la cuantificación de los conversores (A/D y D/A) y los efectos de redondeo en los cálculos. Se encontró que el método es muy sensible al nivel de ruido, ya que las señales de control pequeñas pueden quedar enmascaradas por el mismo, imposibilitando cualquier intento para modificar el comportamiento en la forma deseada.

4.2.2. Control por inyección de señales externas

Uno de estos métodos es la estimulación resonante que consiste en la perturbación con señales que pueden ser periódicas, cuasi-periódicas o caóticas [25, 26]. Se inyecta una señal $u(t)$ al sistema dinámico que puede verse como una fuerza externa. Un ejemplo sencillo de este método de control es la ecuación de un oscilador amortiguado con forzamiento $u(t)$.

$$\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2x = u(t) \quad (4.3)$$

La solución a la Ec. (4.3) está formada por dos términos: la solución general del sistema homogéneo más una solución particular. Por tanto, la solución está formada por dos partes, una parte transitoria (que se anula pasado cierto tiempo), más una parte estacionaria o estable. La solución estacionaria esta relacionada con la señal de control $u(t)$, esta señal es la encargada de controlar al sistema dinámico a tiempos largos y que se mantega en una trayectoria deseada.

Otro método es el control por retroalimentación de estados, este método consiste en retroalimentar una de las variables del vector de estados del sistema,

CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

utilizando una señal de control proporcional a la diferencia entre esa variable y la señal de control. La ecuación diferencial para la variable elegida resulta:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) + K(x_i(t) - u(t)). \quad (4.4)$$

4.2.3. Técnicas clásicas de Ingeniería de control

Se ha trabajado mucho en técnicas de control clásico: proporcional integral (PI), proporcional integral derivativo (PID), lineal, alineal, estocástico, etc. Huberman y Lumer [27], por ejemplo, propusieron llevar un sistema de un estado x a un estado deseado x_s , modificando dinámicamente el valor del parámetro de control u , por medio de la ecuación:

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon G(x - x_s) \quad \varepsilon \ll 1. \quad (4.5)$$

donde ε es un parámetro que ajusta la dureza del control y G es una función lineal o no lineal de la diferencia entre ambos estados. Este método, conocido como Algoritmo de Control Adaptativo (Adaptive Control Algorithm - ACA), no requiere señales externas ni el acceso a los parámetros internos y la acción de control es inmune a pequeñas variaciones en los valores de los parámetros. Su principal desventaja es que no se conoce a priori cuál es la meta que se debe alcanzar, sino que se trabaja por “prueba y error”.

4.3. El problema general de la sincronización

La sincronización es de fundamental importancia en sistemas físicos y biológicos, por ejemplo, en sistemas nerviosos, células cardíacas, colonias de luciérnagas, ciclos circadianos y láseres acoplados. Por lo tanto, la comprensión de las interacciones mutuas entre diferentes sistemas no lineales acoplados y su sincronización representa un tema de investigación interesante. La sincronización de señales periódicas es un fenómeno bien conocido en Física, Ingeniería y muchas otras disciplinas científicas. En su aceptación tradicional, se dice que dos señales periódicas están sincronizadas cuando sus períodos son conmensurables. Una de las formas de lograr esta sincronización es mediante el empleo de fuerzas externas, como sucede en el caso de las comunicaciones electrónicas, donde se utiliza un oscilador patrón, de frecuencia muy estable

CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

(oscilador a cristal), pero de baja potencia como sincronismo de varios osciladores de inferior calidad y de mayor potencia [28].

La sincronización de osciladores, desacoplados entre sí, resulta, en esencia, más simple que el alterar el sincronismo natural que se establece cuando osciladores casi idénticos se acoplan entre sí, constituyendo un sistema más robusto [29]. Pero aún el problema más sencillo de varios osciladores independientes entre sí, sincronizados por una única señal periódica externa, presenta una estructura de resonancias múltiples muy compleja [30, 31].

La posibilidad de que dos o más sistemas caóticos oscilen de manera sincronizada y coherente no es obvia debido a la conocida dependencia sensible con las condiciones iniciales. Sin embargo Pecora y Carroll [22] demostraron que es posible acoplar dos sistemas caóticos, que parten de estados iniciales distintos, de modo tal que sus oscilaciones (que no tiene por qué ser periódicas) se sincronicen. Esta sincronización puede ser idéntica (las señales correspondientes en ambos sistemas coinciden exactamente) o bien generalizada (existe una relación funcional fija entre las variables de uno y otro sistema). En ambos casos, la sincronización es un proceso asintótico. También es posible lograr una sincronización de fase, que es una noción más débil y de alguna forma equivalente a la sincronización usual en señales periódicas.

La sincronización y el control son temas estrechamente vinculados. A partir de técnicas de sincronización se han podido inferir nuevos métodos para controlar sistemas caóticos [32] y se han obtenido logros importantes en el control de arritmias cardíacas, reacciones químicas industriales de tipo oscilatorio y sistemas electrónicos.

Ha habido un amplio desarrollo en la aplicación de técnicas de sincronización a sistemas de comunicaciones. Algunas de las más utilizadas se describen a continuación.

4.4. Sincronización de sistemas caóticos

Los fenómenos caóticos se presentan en muchos sistemas naturales y en dispositivos artificiales. Muchos trabajos de investigación se han centrado principalmente en el descubrimiento y caracterización del caos. Recientemente

CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

te, se han propuesto varias ideas y técnicas para utilizar las características del caos para alcanzar ciertos objetivos. La sincronía de caos se ha empleado para incrementar la potencia de láseres, sincronizar circuitos electrónicos, controlar oscilaciones en reacciones químicas, estabilizar el ritmo cardíaco en animales y para seguridad en las comunicaciones mediante la codificación de información. Las aplicaciones del caos en diferentes campos de la ciencia y tecnología tienen su base en dos problemas, que son el control del caos y la sincronización de sistemas caóticos.

La sincronización de sistemas caóticos es el problema que se abordará en este trabajo de tesis; por tanto, se tratará de proporcionar una explicación más detallada del mismo.

La posibilidad de que dos o más sistemas caóticos oscilen de manera coherente y sincronizada no es obvia. Una de las principales características asociadas al comportamiento caótico, es la sensibilidad a condiciones iniciales. De lo anterior se pudiera concluir que la sincronización de sistemas caóticos no es factible, porque en sistemas reales no es posible reproducir exactamente condiciones iniciales idénticas. Así, incluso una desviación infinitesimal en los parámetros o de las condiciones iniciales eventualmente dará lugar a la divergencia de trayectorias. En este contexto, el hecho de alcanzar sincronía de sistemas caóticos, pueden considerarse como un problema fascinante e importante.

4.4.1. Métodos de sincronización

La sincronización, que puede ser entendida como el ajuste de ritmos entre dos o más osciladores debido a sus interacciones, es un fenómeno presente tanto en sistemas naturales como artificiales y es un típico ejemplo de auto-organización. El análisis del fenómeno de sincronización de sistemas dinámicos ha sido objeto de un área de investigación muy activa desde su primera observación por el científico holandés Christian Huygens en 1673 quien observó sincronización en dos péndulos acoplados.

El estudio sistemático moderno, tanto experimental como teórico, de este fenómeno fue iniciado por Appleton, van der Pol y Andronov y Vitt que observaron sincronización en generadores eléctricos. Cobra popularidad hace aproximadamente 40 años, tiempo en el cual se produjeron diversidad

CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

de artículos y libros que tratan de una u otra manera sobre la sincronización en sistemas que van desde los biológicos tales como luciérnagas, grillos, cigarras, hormigas, sistemas ecológicos, diferentes comportamientos en poblaciones humanas, células cardiacas, neuronas en el sistema nervioso y en la relación fisiológica entre el corazón y pulmones, pasando por sistemas químicos (osciladores bioquímicos) y llegando a sistemas artificiales como circuitos electrónicos, etc.

Los grandes trabajos sobre la sincronización del caos se atribuyen a Fujisaka, Picovsky, Afraimovich, Pecora y Carroll [33–35] quienes presentaron los primeros ejemplos sobre la sincronización unidireccional de sistemas caóticos acoplados. Sin embargo, tras el trabajo de Pecora y Carroll, se ha mostrado que dos comportamientos caóticos imprevisibles, que inicialmente evolucionan sobre trayectorias diferentes, pueden fundirse en una única trayectoria común si se acoplan adecuadamente. El desarrollo de los sistemas de comunicaciones utilizando caos nació a partir de esa idea y se ha afianzado, a través de trabajos fundamentales de un número importante de investigadores.

Los circuitos se presentan como una herramienta de una gran utilidad para estudiar una gran variedad de procesos, actuando como complemento entre el experimento en sí y la simulación numérica por computadora. Entre las ventajas que ofrece la simulación con circuitos se encuentran tanto el alto grado de desarrollo de componentes electrónicos como el bajo costo de los dispositivos. Y son varios los ejemplos de circuitos electrónicos utilizados para el estudio de Caos: el sistema de Lorenz, Rössler y Chua, por mencionar solo algunos.

El significado de sincronización de caos se refiere al proceso en el que se involucran dos o varios sistemas dinámicos que pueden ser iguales o distintos, ajustando sus propiedades para que tiendan a un comportamiento común (periódico o caótico) [34]. Este fenómeno de sincronización inicialmente hace que los sistemas evolucionen sobre atractores diferentes para que finalmente puedan lograr empatar, acoplarse y coincidir en una misma trayectoria [35]. Es sorprendente que la sincronización entre dos sistemas caóticos aparece cuando se considera la dependencia de la dinámica caótica en las condiciones iniciales del sistema.

Hay que destacar que hay una gran variedad de esquemas de acoplamiento

CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

que conducen al régimen de sincronización. Dependiendo de la configuración particular del acoplamiento, podemos distinguir dos casos principales: acoplamiento unidireccional y acoplamiento bidireccional.

1. Acoplamiento unidireccional.

El sistema global está formado por dos subsistemas acoplados según una configuración de tipo maestro-esclavo Fig. 4.1. Eso implica que el comportamiento del sistema esclavo depende del comportamiento del sistema maestro, mientras que este último no se ve influido por el comportamiento del sistema esclavo. Como resultado, el sistema esclavo se encuentra forzado a seguir la dinámica del maestro. Dicho de otro modo, cuando la evolución de uno de los dos sistemas no es alterada por el acoplamiento la configuración resultante es un acoplamiento unidireccional.



Figura 4.1: Acoplamiento unidireccional.

2. Acoplamiento bidireccional.

Aquí ambos subsistemas son acoplados con otro, o cuando los dos subsistemas son conectados de tal forma que sus trayectorias están mutuamente influenciadas por el comportamiento del otro, con este tipo de acoplamiento no se puede hablar de un sistema maestro o esclavo Fig. 4.2. Esta situación ocurre en fisiología, entre el sistema cardiaco y el respiratorio, también se da en láseres con retroalimentación.

CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS



Figura 4.2: Acoplamiento bidireccional.

En telecomunicaciones la sincronización brinda comunicaciones seguras [36]. Existen dos formas principales de acoplamiento, de forma unidireccional la cual consiste en sistemas maestro-esclavo donde el maestro es el sistema guía o de referencia y el esclavo es el sistema guiado el cual es dependiente del maestro. En el caso de ser bidireccional ambos sistemas interactúan entre sí y están acoplados uno con el otro creando una sincronización mutua. La sincronización entre dos sistemas, se consigue cuando uno de los sistemas modifica su comportamiento y sigue la trayectoria del otro sistema, o ambos oscilan en una nueva trayectoria en común [37, 38].

Es sorprendente que la sincronización entre dos sistemas caóticos aparece cuando se considera la dependencia de la dinámica caótica en las condiciones iniciales del sistema. Cuando las condiciones iniciales en los sistemas caóticos, al tener la más mínima variación en el sistema, provoca que se obtengan resultados y evolucione en un sistema más complejo que al que originalmente se tenía, esto hace que a simple vista sea difícil la sincronización en sistemas caóticos reales, ya que en la práctica no es posible igualar las condiciones iniciales o hacer dos sistemas totalmente idénticos, para poder lograr la sincronización; se pueden crear sistemas muy parecidos pero siempre existirá un margen de error.

En el contexto de sistemas caóticos acoplados, diferentes tipos de sincronización han sido estudiadas recientemente, por ejemplo: sincronización completa, sincronización en fase, sincronización de retardo, sincronización generalizada, sincronización híbrida, sincronización proyectiva, sincronización practical, sincronización parcial y sincronización de desplazamiento vertical.

4.4.2. Tipos de Sincronización

Cuando uno trata con sistemas acoplados, la sincronización aparece como la igualdad de las variables de estado, mientras que evoluciona en el tiempo. Para el acoplamiento, debemos distinguir entre dos diferentes situaciones. Cuando la evolución de uno de los sistemas acoplados es inalterada por el acoplamiento, tenemos como resultado el acoplamiento unidireccional o maestro-esclavo. Por el contrario nos referimos a un acoplamiento bidireccional cuando ambos sistemas son conectados de manera tal que influyen mutuamente en su comportamiento [39].

En primer lugar, para establecer con la mayor claridad posible el análisis posterior, introduzcamos primero las siguientes definiciones para dos sistemas dinámicos de dos dimensiones con espacio de fase (x, u) y (y, v) , respectivamente:

Definición 2. Dos sistemas caóticos están en sincronización completa si las funciones de error convergen a cero, para un t suficientemente grande:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - v(t)| = 0. \quad (4.6)$$

Lo que significa que cada estado en el sistema esclavo es idéntico o está muy cerca de su estado correspondiente en el sistema maestro, en el límite del tiempo que va al infinito. La sincronización puede entenderse como un problema de estabilización o como un problema de seguimiento de trayectoria. La estabilización consiste en obtener un control que lleve a las trayectorias de un sistema dinámico que representa el error de sincronización a converger a cero. El problema de seguimiento de trayectorias consiste en encontrar un control que haga que las trayectorias del sistema esclavo sigan las trayectorias del sistema maestro.

Definición 3. Dos sistemas caóticos están en sincronización práctica si las funciones de error satisfacen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| \leq \kappa \quad (4.7)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - v(t)| \leq \sigma \quad (4.8)$$

para valores dados positivos $\kappa, \sigma > 0$.

CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

Esta definición es necesaria porque, en muchos casos, las funciones de error no convergen precisamente a cero con la evolución del tiempo, pero en la práctica, aún podemos considerar los sistemas como sincronizados. Sin embargo, en la implementación de circuitos analógicos, los componentes electrónicos tienen tolerancias, lo que hace imposible reproducir las condiciones iniciales de las simulaciones numéricas.

Definición 4. Dos sistemas caóticos están en sincronización de desplazamiento vertical si las funciones de error satisfacen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - (y(t) + \Lambda)| = 0 \quad (4.9)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - (v(t) + \Pi)| = 0 \quad (4.10)$$

Es decir, las funciones de error convergen a cero para ciertos valores de Λ y Π (lo que hemos llamado constantes de desplazamiento vertical de Λ y Π).

Definición 5. Dos sistemas caóticos son de sincronización parcial cuando solo una parte de las variables de estado se sincronizan y las demás no.

En ciertos casos se puede lograr una sincronización completa en un solo estado del sistema esclavo mientras que en el otro se puede lograr una sincronización práctica o nula.

4.4.3. Método de Pecora y Carroll (PC)

Iniciamos considerando un sistema caótico cuya evolución temporal está dada por la siguiente ecuación:

$$\dot{z} = F(z), \quad (4.11)$$

Aquí $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ es un vector de estado $n - dimensional$. El esquema PC consiste al suponer un sistema dinámico de Ec. (4.11), y descomponerlo en tres subsistemas.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u, w), \\ \dot{w} &= g(u, w), \quad \text{Maestro} \\ \dot{w}' &= h(u, w'). \quad \text{Esclavo} \end{aligned} \quad (4.12)$$

CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS
CAÓTICOS

Donde $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_l)$, $w' = (w'_1, w'_2, \dots, w'_l)$ y $n = m + k + l$. El segundo subsistema de Ec. (4.12) define el sistema maestro, considerando el tercer subsistema de Ec. (4.12) que representa el sistema esclavo, su evolución es guiada por la trayectoria del maestro por medio de una señal de control u (ver Fig. 4.3).

Así la sincronización completa es definida como una identidad entra las trayectorias del sistema respuesta w y una réplica w' de esta $w' = h(u, w')$ para la misma señal de control caótica $u(t)$. La existencia de la sincronización completa implica que la respuesta del sistema es asintóticamente estable ($\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, siendo $e(t)$ el error de sincronización dado por $e(t) = |w(t) - w'(t)|$). En otras palabras, el sistema olvida sus condiciones iniciales, evolucionando en un atractor caótico. Este tipo de sincronización se puede lograr siempre que los exponentes de Lyapunov del sistema esclavo bajo las órdenes del maestro (los exponentes condicionales de Lyapunov) sean negativas, es decir el sistema es conservativo. Como condición se cumple solo si u es una señal de sincronización.

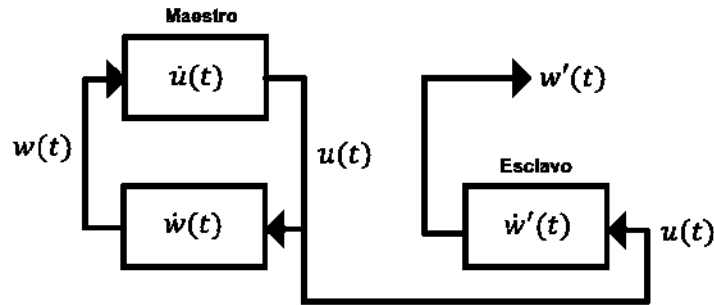


Figura 4.3: Método de Pecora y Carroll.

4.4.4. Método de APD.

El método de descomposición activa-pasiva (APD) nos proporciona un esquema maestro-esclavo mucho más general que el PC para la sincronización de sistemas caóticos idénticos. El método APD considera un sistema caótico autónomo y lo reescribe como un sistema no autónomo de la siguiente forma:

$$\dot{x} = f(x, u(t)). \quad (4.13)$$

CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

donde $u(t)$ es la señal de control $u = h(x)$ o $\dot{u} = h(x, u)$. La sincronización completa se refiere a la relación entre el sistema Ec. (4.13) y una réplica (el sistema de esclavo) que es controlado por la misma señal $u(t)$. Cabe mencionar que esta última afirmación no excluye un comportamiento caótico de $x(t)$, ya que es controlado por una señal caótica $u(t)$.

Para poder ilustrar mejor esta configuración, L. Kocarev y U. Parlitz [38] analizaron el sistema propuesto por Lorenz.

$$\text{Maestro} : \begin{cases} \dot{x}_1 = 10(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = 28x_1 - y_1 - x_1z_1, \\ \dot{z}_1 = x_1y_1 - \frac{8}{3}z_1. \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\text{Esclavo} : \begin{cases} \dot{x}_2 = -10x_2 + u(t), \\ \dot{y}_2 = 28x_2 - y_2 - x_2z_2, \\ \dot{z}_2 = x_2y_2 - \frac{8}{3}z_2. \end{cases} \quad (4.15)$$

Controlado por $u(t) = \alpha y_1(t)$, se puede comprobar mediante el uso de los exponentes de Lyapunov que el sistema se sincroniza con el sistema esclavo, al variar el parámetro α considerado en la señal de control $u(t)$.

Mientras el esquema PC permite para un sistema caótico dado sólo un número finito de posibles descomposiciones para producir la sincronización, aquí la libertad para elegir la señal de control $u(t)$, hace el esquema APC muy poderoso y general extrema flexibilidad en aplicaciones. Esta cualidad puede ser útil en la aplicación a comunicaciones. Por ejemplo, sean dos sistemas, uno emisor y el otro receptor, los cuales tienen un comportamiento caótico, pero sincronizados entre ellos a través de una señal de control $u(t)$.

Capítulo 5

Sincronización entre los osciladores de Rayleigh-Duffing y Duffing

5.1. Acoplamiento elástico

Para estudiar la sincronización en el esquema maestro-esclavo, analizamos y comparamos tres diferentes tipos de acoplamientos utilizando los osciladores de Rayleigh-Duffing y Duffing: el acoplamiento elástico, el acoplamiento disipativo, y una combinación de ambos utilizada previamente por U. Urioste-gui *et al*, [3,39]. El esquema de sincronización maestro-esclavo que estudiamos en este trabajo, el sistema maestro corresponde al oscilador Rayleigh-Duffing, mientras que el sistema esclavo corresponde al oscilador Duffing y viceversa. El caso en que los osciladores interactúan mediante acoplamientos elásticos se describe mediante el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= \mu(1 - u^2)u - \alpha x - \beta x^3 + A_1 \cos(\omega_1 t) + K_1(y - x),\end{aligned}\quad (5.1)$$

$$\begin{aligned}\dot{y} &= v, \\ \dot{v} &= -\gamma v + y - \delta y^3 + A_2 \cos(\omega_2 t) + K_2(x - y),\end{aligned}\quad (5.2)$$

donde, $K_1(y - x)$ y $K_2(x - y)$ representan los acoplamientos elásticos, siendo K_1 y K_2 los parámetros de control de cada acoplamiento. En el caso, $K_1 = K_2 = 0$, ambos sistemas están desacoplados. En general, las Ecs. (5.1) y

(5.2) representan un acoplamiento bidireccional, por lo tanto las ecuaciones pueden ser estudiadas como un sistema hipercaótico.

5.1.1. Oscilador de Rayleigh-Duffing (Maestro) y oscilador de Duffing (Esclavo)

Nos interesa analizar el esquema maestro-esclavo, por lo que nos limitamos a estudiar el acoplamiento unidireccional, es decir, fijando K_1 o K_2 igual a cero. Primero, fijamos $K_1 = 0$ el oscilador de Rayleigh-Duffing es el sistema maestro y analizamos la sincronización variando K_2 , y después fijamos $K_2 = 0$ (el oscilador de Duffing es el sistema maestro) y analizamos la sincronización variando K_1 .

El acoplamiento elástico es una realimentación lineal que puede verse como la perturbación de cada sistema por una señal proporcional a la diferencia de sus posiciones, introducida en la parte de aceleración del sistema esclavo. Nos interesa analizar el sistema esclavo en función del parámetro de acoplamiento K_2 o K_1 , según el caso estudiado. En particular, el problema de sincronización consiste en encontrar un valor específico del parámetro de acoplamiento, tal que el sistema maestro y el sistema esclavo estén ambos sincronizados. Como ya mencionamos, para este caso consideramos $K_1 = 0$ y las funciones de error $|x(t) - y(t)|$ y $|u(t) - v(t)|$, tomando K_2 como parámetro de control y lo variamos en pequeños pasos en un rango de 0 a 200. De esta manera vamos verificar que estos dos sistemas están sincronizados mediante las funciones de error. Como ya mencionado, esto ocurre cuando las funciones tienden a cero para un tiempo suficientemente grande. La función de error nos permite encontrar el rango de valores del parámetro de control K_2 , donde se logra alcanzar la sincronización. Como se puede observar en la Fig. 5.1(a), la sincronización completa existe, esto se cumple para valores muy grandes del valor K_2 . Ahora, para la segunda función de error la sincronización práctica existe, ya que la función de error no converge exactamente a cero (ver Fig. 5.1(b)). La dinámica del error se obtiene mediante la resta de las Ecs. (5.1) y (5.2), el cálculo del error es $e_1 = x - y$ y $e_2 = u - v$. De esta manera obtenemos el error como:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x} - \dot{y} = e_2, \\ \dot{e}_2 &= \mu(1 - u^2)u - \alpha x - \beta x^3 + A_1 \cos(\omega_1 t) + \gamma v - y + \delta y^3 \\ &\quad - A_2 \cos(\omega_2 t) - K_2 e_1, \end{aligned} \tag{5.3}$$

CAPÍTULO 5. SINCRONIZACIÓN ENTRE LOS OSCILADORES DE RAYLEIGH-DUFFING Y DUFFING

estos valores en valor absoluto son las funciones de error.

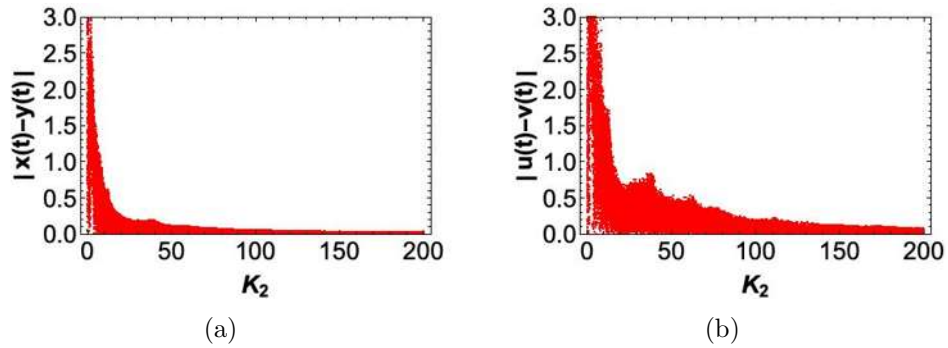


Figura 5.1: (a) Función de error $|x(t) - y(t)|$. (b) Función de error $|u(t) - v(t)|$.

Ahora pasamos directamente a observar las gráficas correspondientes a las soluciones obtenidas. La gráfica que se muestra en la Fig. 5.2 representa las soluciones para $x(t)$ y $y(t)$, de la gráfica podemos observar que ambos sistemas oscilan en completa sincronización. De la misma manera, en la Fig. 5.3 se observa una sincronización práctica entre ambos osciladores. El acoplamiento elástico produce una sincronización parcial de todo el sistema de modo que la sincronización completa solo se logra en un estado del sistema esclavo (oscilador de Duffing).

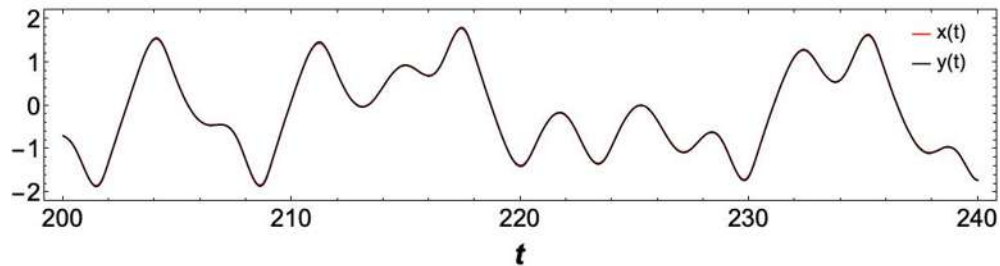


Figura 5.2: Soluciones para $x(t)$ y $y(t)$, para un valor $K_2 = 150$.

CAPÍTULO 5. SINCRONIZACIÓN ENTRE LOS OSCILADORES DE RAYLEIGH-DUFFING Y DUFFING

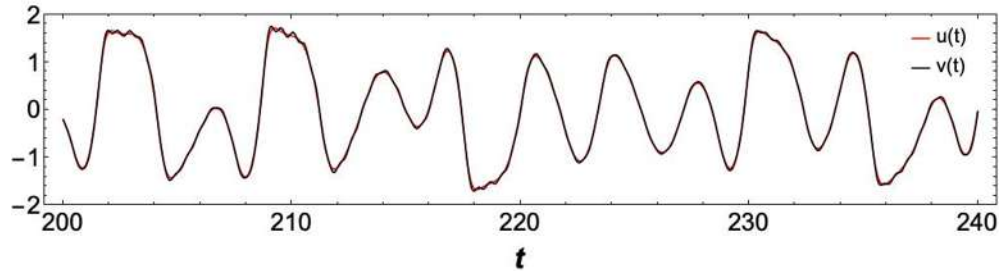


Figura 5.3: Soluciones para $u(t)$ y $v(t)$, para un valor $K_2 = 150$.

Continuando con el análisis del comportamiento del sistema, vamos a observar el comportamiento de las proyecciones en los planos (x, y) y (u, v) para el valor ya mencionado de $K_2 = 150$. En la Fig. 5.4(a) se muestra el comportamiento del sistema esclavo. El caso interesante se ve en la Fig. 5.4(b), se observa que la proyección del plano (x, y) , existe una sincronización completa ya que el resultado nos da una línea recta delgada inclinada a 45° . Comparando esto con el siguiente resultado, en la Fig. 5.4(c), donde la proyección del plano (u, v) muestra una línea recta más gruesa inclinada a 45° , esto nos indica que se presenta una sincronización práctica.

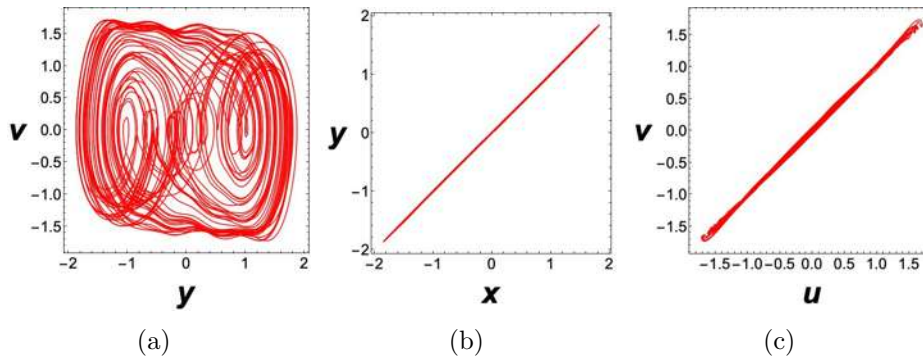


Figura 5.4: Acoplamiento elástico: En (a) el sistema esclavo. En (b) y (c) proyecciones de los planos (x, y) y (u, v) , respectivamente.

5.1.2. Oscilador de Duffing (Maestro) y oscilador de Rayleigh-Duffing (Esclavo)

Pasemos ahora al acoplamiento inverso, donde el oscilador de Duffing es el sistema maestro y el oscilador de Rayleigh-Duffing corresponde al sistema esclavo. Para este caso, vamos a mantener el valor $K_2 = 0$ y vamos a ir variando el valor de K_1 . De manera similar al caso anterior, consideremos las funciones de error $|y(t) - x(t)|$ y $|v(t) - u(t)|$, mientras que el parámetro de control K_1 lo iremos variando de 0 a 200. Similarmente, ahora vamos a obtener las funciones de error mediante la resta de las Ecs. (5.1) y (5.2). El error lo vemos como $e_3 = y - x$ y $e_4 = v - u$, de modo que podemos obtener:

$$\begin{aligned} \dot{e}_3 &= \dot{y} - \dot{x} = e_4, \\ \dot{e}_4 &= -\gamma v + y - \delta y^3 + A_2 \cos(\omega_2 t) \\ &\quad - \mu(1 - u^2)u + \alpha x + \beta x^3 - A_1 \cos(\omega_1 t) - K_1 e_3. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Como se muestra en la Fig. 5.5(a) se puede ver que existe una sincronización completa para valores mayores a 200. Mientras que en la Fig. 5.5(b) no existe tal sincronización.

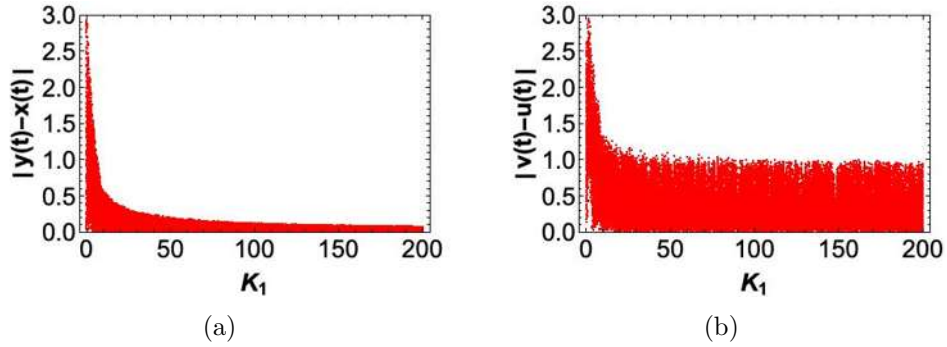


Figura 5.5: (a) Función de error $|y(t) - x(t)|$. (b) Función de error $|v(t) - u(t)|$.

En la Fig. 5.6 se puede observar como las soluciones $x(t)$ y $y(t)$ oscilan en una sincronización práctica. Ahora, las soluciones de $u(t)$ y $v(t)$, se observa que las dos señales no se sincronizan (ver Fig. 5.7). En este caso no es posible obtener una sincronización completa en el sistema esclavo.

CAPÍTULO 5. SINCRONIZACIÓN ENTRE LOS OSCILADORES DE RAYLEIGH-DUFFING Y DUFFING

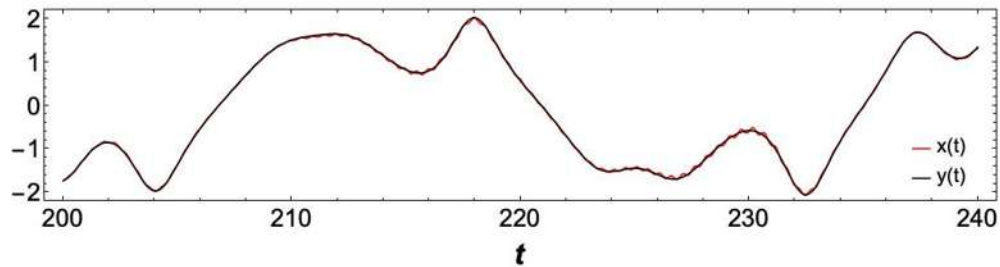


Figura 5.6: Soluciones para $x(t)$ y $y(t)$, para $K_1 = 150$.

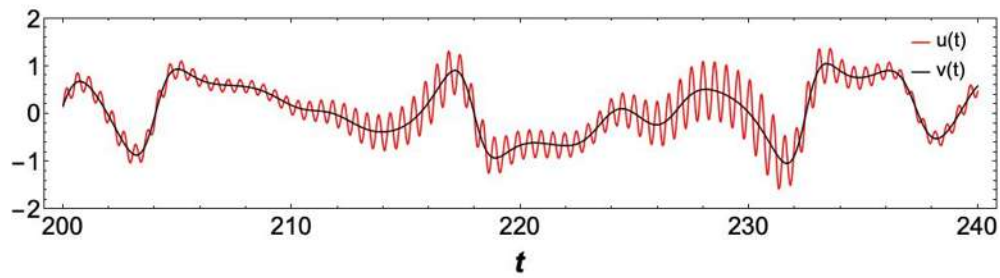


Figura 5.7: Soluciones para $u(t)$ y $v(t)$, para $K_1 = 150$.

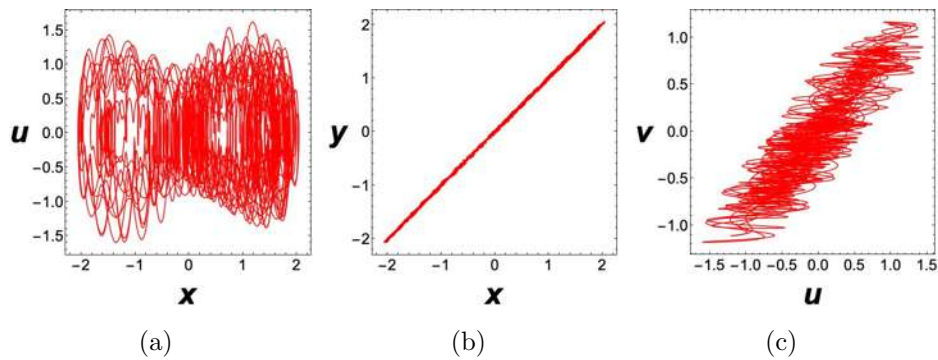


Figura 5.8: Acoplamiento elástico: En (a) el sistema esclavo. En (b) y (c) proyecciones de los planos (x, y) y (u, v) , respectivamente.

Veamos ahora las proyecciones en los planos (x, y) y (u, v) para un valor $K_1 = 150$. En la Fig. 5.8(a) se muestra el comportamiento del sistema esclavo.

CAPÍTULO 5. SINCRONIZACIÓN ENTRE LOS OSCILADORES DE RAYLEIGH-DUFFING Y DUFFING

Por otro lado, en la Fig. 5.8 (b) se muestra la proyección del plano (x, y) existe una sincronización práctica, esto se puede ver por la línea recta gruesa inclinada a 45° . Mientras que, en la proyección del plano (u, v) no existe ninguna sincronización, se observa una forma irregular tal y como se aprecia en la Fig. 5.8(c).

5.2. Acoplamiento disipativo

En el caso donde los osciladores interactúan por medio de acoplamiento disipativo, el sistema correspondiente son descritos por el siguiente conjuntos de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= \mu(1 - u^2)u - \alpha x - \beta x^3 + A_1 \cos(\omega_1 t) + K_3(v - u),\end{aligned}\quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}\dot{y} &= v, \\ \dot{v} &= -\gamma v + y - \delta y^3 + A_2 \cos(\omega_2 t) + K_4(u - v).\end{aligned}\quad (5.6)$$

Aquí, $K_3(v - u)$ y $K_4(u - v)$ representan los acoplamientos disipativos, siendo las constantes K_3 y K_4 los parámetros de control de cada acoplamiento. Para el caso donde $K_3 = K_4 = 0$, el sistema no está acoplado. El acoplamiento disipativo es una retroalimentación lineal que se puede ver como la perturbación de cada sistema por una señal proporcional a la diferencia de sus velocidades, las cuales se introducen en la parte de aceleración del sistema esclavo. Como en el acoplamiento elástico de la sección anterior, primero una de las constantes la fijamos a cero mientras variamos la otra constante. Para el caso $K_3 = 0$ y variando K_4 , el sistema maestro será el oscilador de Rayleigh-Duffing. Caso contrario, $K_4 = 0$ y variando K_3 será donde el oscilador de Duffing que actúa como el sistema maestro.

5.2.1. Oscilador de Rayleigh-Duffing (Maestro) y oscilador de Duffing (Esclavo)

Ahora, vamos a iniciar con el oscilador de Rayleigh-Duffing como sistema maestro, haciendo $K_3 = 0$ y variando K_4 en pequeños pasos de 0 a 200. De la misma manera como vimos anteriormente, las funciones de error $|x(t) - y(t)|$ y $|u(t) - v(t)|$ se calculan variando el parámetro de control K_4 . Las funciones

CAPÍTULO 5. SINCRONIZACIÓN ENTRE LOS OSCILADORES DE RAYLEIGH-DUFFING Y DUFFING

error las obtenemos de la resta de las Ecs. (5.5) y (5.6), de este modo tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_5 &= \dot{x} - \dot{y} = e_6, \\
 \dot{e}_6 &= \mu(1 - u^2)u - \alpha x - \beta x^3 + A_1 \cos(\omega_1 t) + \gamma v - y + \delta y^3 \\
 &\quad - A_2 \cos(\omega_2 t) - K_4 \dot{e}_5.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

De esta manera, utilizando las funciones de error podemos determinar si se logra la sincronización entre ambos osciladores. En la Fig. 5.9(a) podemos ver que la función de error $|x(t) - y(t)|$ no converge a cero, pero para ciertos valores podemos lograr una sincronización práctica y para otros valores se puede lograr una sincronización práctica con desplazamiento vertical. Por otro lado, en la Fig. 5.9(b) la función de error $|u(t) - v(t)|$ presenta sincronización completa.

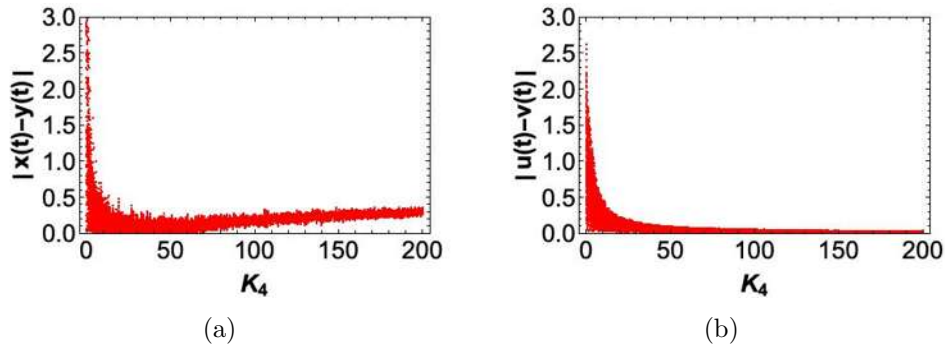


Figura 5.9: (a) Función de error $|x(t) - y(t)|$. (b) Función de error $|u(t) - v(t)|$.

Comparando las soluciones de $x(t)$ y $y(t)$, podemos observar como las soluciones oscilan con un desplazamiento vertical como se aprecia en la Fig. 5.10. En la Fig. 5.10 vemos como las soluciones $u(t)$ y $v(t)$ están en sincronización completa.

CAPÍTULO 5. SINCRONIZACIÓN ENTRE LOS OSCILADORES DE RAYLEIGH-DUFFING Y DUFFING

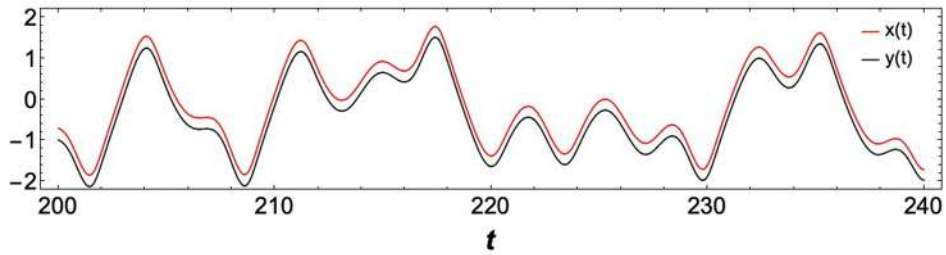


Figura 5.10: Soluciones para $x(t)$ y $y(t)$, para $K_4 = 150$.

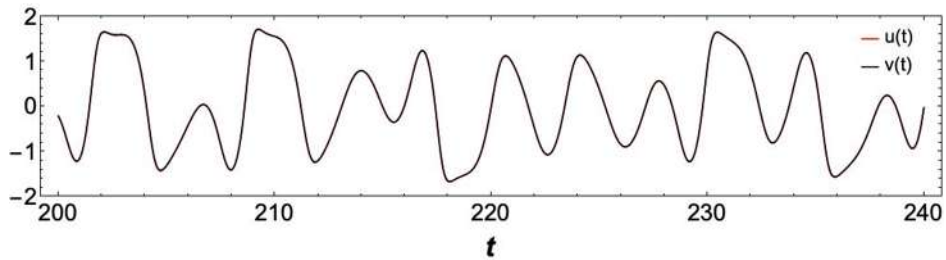


Figura 5.11: Soluciones para $u(t)$ y $v(t)$, para $K_4 = 150$.

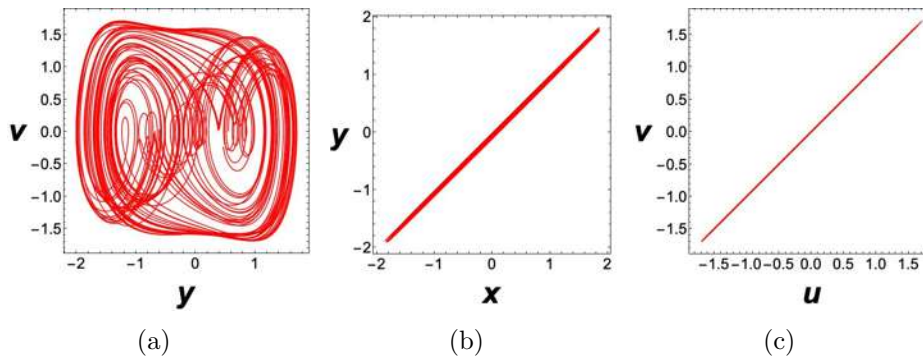


Figura 5.12: Acoplamiento disipativo: En (a) el sistema esclavo. En (b) y (c) proyecciones en los planos (x, y) y (u, v) respectivamente.

Ahora analizamos el comportamiento de las proyecciones de los planos (x, y) y (u, v) para el valor $K_4 = 150$. En la Fig. 5.12(a) se muestra la dinámica del sistema esclavo. En la Fig. 5.12(b) podemos observar una sincronización

CAPÍTULO 5. SINCRONIZACIÓN ENTRE LOS OSCILADORES DE
RAYLEIGH-DUFFING Y DUFFING

práctica con un pequeño desplazamiento vertical, esto se nota con la línea gruesa con inclinación de 45° . Finalmente, la Fig. 5.12(c) muestra una sincronización completa que podemos observar con la línea recta delgada con inclinación de 45° .

5.2.2. Oscilador de Duffing (Maestro) y oscilador de Rayleigh-Duffing (Esclavo)

Estudiando ahora al caso donde tenemos que el oscilador de Duffing actúa como sistema maestro y el oscilador de Rayleigh-Duffing como sistema esclavo. Esto se hace fijando el valor $K_4 = 0$, y variando el parámetro de control K_3 . Ahora, las funciones de error serán $|y(t) - x(t)|$ y $|v(t) - u(t)|$, de nuevo restando las ecuaciones 5.5 y 5.6 obtenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{e}_7 &= \dot{y} - \dot{x} = e_8, \\ \dot{e}_8 &= -\gamma v + y - \delta y^3 + A_2 \cos(\omega_2 t) \\ &\quad - \mu(1 - u^2)u + \alpha x + \beta x^3 - A_1 \cos(\omega_1 t) - K_3 e_8. \end{aligned} \quad (5.8)$$

De esta manera, utilizando las funciones de error podemos determinar si existe sincronización con este acoplamiento empleado. En la Fig. 5.13(a) se observa que al ir incrementando el valor del parámetro de control K_3 la función de error tiende a un valor cercano a cero, por lo tanto en este caso se puede lograr una sincronización práctica. Mientras que, en la Fig. 5.13(b) se logra obtener una sincronización completa, ya que la función de error converge a cero.

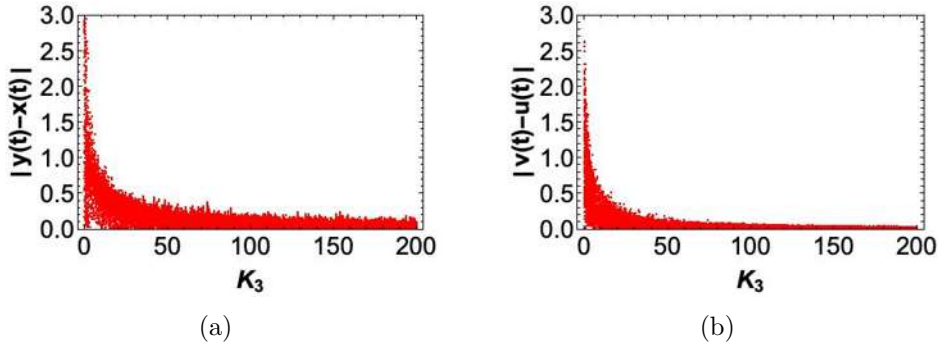


Figura 5.13: (a) Función de error $|y(t) - x(t)|$. (b) Función de error $|v(t) - u(t)|$.

CAPÍTULO 5. SINCRONIZACIÓN ENTRE LOS OSCILADORES DE RAYLEIGH-DUFFING Y DUFFING

Comparando las soluciones de $x(t)$ y $y(t)$, en la Fig. 5.14 se puede apreciar como las soluciones tienen una pequeña variación al oscilar, por lo tanto las dos señales están en sincronización práctica. En la Fig. 5.15 vemos como las soluciones $u(t)$ y $v(t)$ están en sincronización completa.

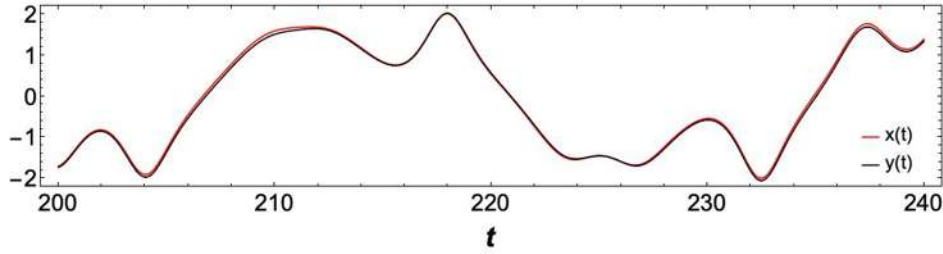


Figura 5.14: Soluciones para $x(t)$ y $y(t)$, para $K_3 = 150$.

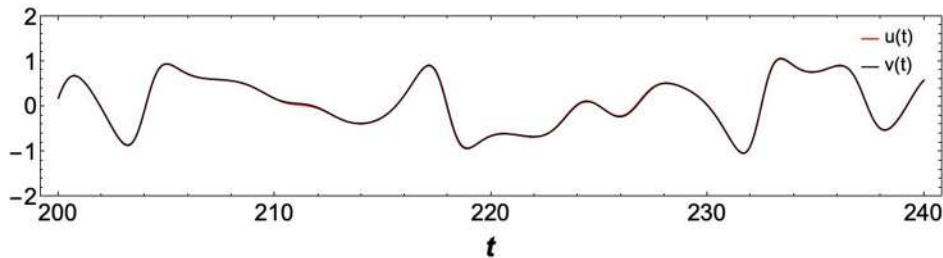


Figura 5.15: Soluciones para $u(t)$ y $v(t)$, para $K_3 = 150$.

Finalmente, el análisis del comportamiento de las proyecciones en los planos (x, y) y (u, v) para un valor $K_3 = 150$. En la Fig. 5.16(a) muestra la dinámica del sistema esclavo (oscilador de Rayleigh-Duffing). En la Fig. 5.16(b) se muestra una sincronización práctica con un pequeño desplazamiento vertical, esto se nota con la línea gruesa con inclinación de 45° . Por último, en la Fig. 5.16(c) muestra una sincronización completa que podemos observar como una línea delgada con inclinación de 45° . Para este acoplamiento disipativo, existe una sincronización parcial de todo el sistema, ya que la sincronización completa solo ocurre en un estado del sistema esclavo. En seguida vamos a ver como es posible alcanzar una sincronización completa de todo el sistema empleando otro tipo de acoplamiento.

CAPÍTULO 5. SINCRONIZACIÓN ENTRE LOS OSCILADORES DE RAYLEIGH-DUFFING Y DUFFING

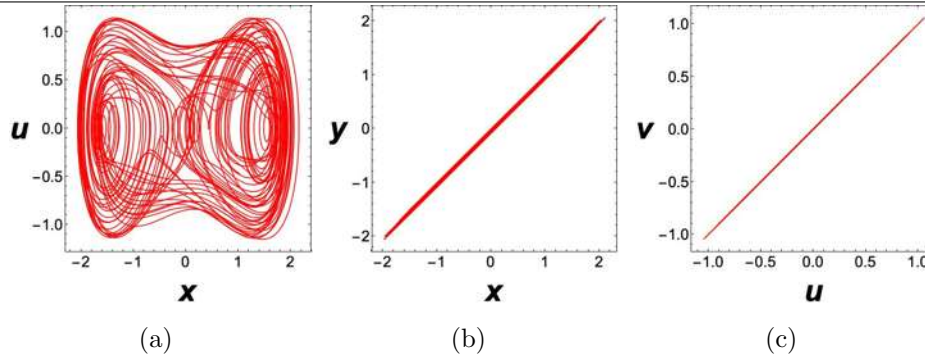


Figura 5.16: Acoplamiento disipativo: En (a) el sistema esclavo (Rayleigh-Duffing). En (b) y (c) proyecciones de los planos (x, y) y (u, v) , respectivamente.

5.3. Acoplamiento combinado

En algunos sistemas caóticos con distinta dinámica, es imposible llegar a una sincronización completa cuando se emplea el esquema maestro-esclavo. Adicionalmente, existen casos donde no es posible encontrar la fuerza de acoplamiento tal que ambos sistemas se sincronicen. En los cuatro casos que analizamos, solo tres de estos lograron obtener una sincronización completa en un solo estado del sistema esclavo. Variantes del esquema maestro-esclavo se han propuesto para resolver el problema de sincronización con distintas dinámicas, en particular Uriostegui et al [3], propusieron una variación del esquema maestro-esclavo que logra obtener una sincronización completa, incluso en sistemas con dinámicas diferentes donde falla el esquema maestro-esclavo clásico. Este acoplamiento propuesto, lo implementaremos para estudiar los osciladores de Rayleigh-Duffing y Duffing, previamente estudiado por Uriostegui et al. Este acoplamiento no convencional emplea dos retroalimentaciones lineales al sistema esclavo. El sistema bajo estudio combina un acoplamiento elástico y un acoplamiento disipativo. El acoplamiento elástico se introduce en la velocidad del sistema esclavo, mientras que el acoplamiento disipativo se introduce en la parte de la aceleración del sistema esclavo.

CAPÍTULO 5. SINCRONIZACIÓN ENTRE LOS OSCILADORES DE RAYLEIGH-DUFFING Y DUFFING

Para el caso donde los osciladores interactúan mediante una combinación de ambos acoplamientos se describe por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u + K_5(y - x), \\ \dot{u} &= \mu(1 - u^2)u - \alpha x - \beta x^3 + A_1 \cos(\omega_1 t) + K_6(v - u),\end{aligned}\quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}\dot{y} &= v + K_7(x - y), \\ \dot{v} &= -\gamma v + y - \delta y^3 + A_2 \cos(\omega_2 t) + K_8(u - v).\end{aligned}\quad (5.10)$$

5.3.1. Oscilador de Rayleigh-Duffing (Maestro) y oscilador de Duffing (Esclavo)

De manera similar, analizamos el caso donde el oscilador de Rayleigh-Duffing actúa como sistema maestro y oscilador de Duffing como sistema esclavo. Para esto, hacemos que las constantes $K_5 = K_6 = 0$ y variamos las constantes K_7 y K_8 , estas constantes representan los parámetros de acoplamiento elásticos y disipativos respectivamente. Ahora, como hemos hecho anteriormente, la dinámica de los errores los podemos calcular como $e_9 = x - y$ y $e_{10} = u - v$. De modo que al sustituir las Ecs. (5.9) y (5.10) obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{e}_9 &= \dot{x} - \dot{y} = u - v - K_7 e_9, \\ e_{10} &= u - v = \dot{e}_9 + K_7 e_9, \\ \dot{e}_{10} &= \mu(1 - u^2)u - \alpha x - \beta x^3 + A_1 \cos(\omega_1 t) \\ &\quad + \gamma v - y + \delta y^3 - A_2 \cos(\omega_2 t) - K_8 e_{10}.\end{aligned}\quad (5.11)$$

De modo que las funciones de error pueden ser expresadas como $K_7(x - y) = K_7 e_9$ y $K_8(u - v) = K_8(\dot{e}_9 + K_7 e_9)$. La dinámica de los sistemas acoplados se estudiaron variando los parámetros K_7 y K_8 , manteniendo uno de los parámetros constantes mientras el otro lo variamos. El caso donde los valores de los parámetros donde son iguales y distintos ya se ha estudiado previamente en el trabajo presentado por Uriostegui [40]. En dicho trabajo, muestra que para los osciladores de Van der Pol y Duffing, los valores del parámetro de control del acoplamiento elástico debe ser menor al valor correspondiente del acoplamiento disipativo para obtener sincronización completa.

CAPÍTULO 5. SINCRONIZACIÓN ENTRE LOS OSCILADORES DE RAYLEIGH-DUFFING Y DUFFING

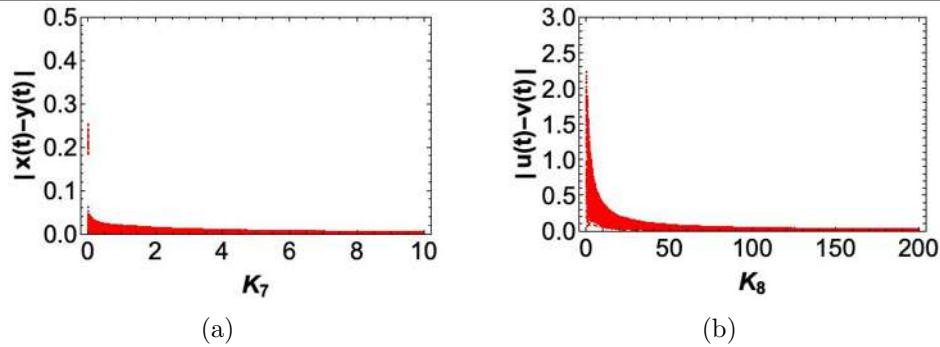


Figura 5.17: (a) Función de error $|x(t) - y(t)|$ con $K_8 = 100$ y variando K_7 . (b) Función de error $|u(t) - v(t)|$, con $K_7 = 5$ y variando K_8 .

Para analizar la sincronización entre los osciladores utilizamos las funciones de error $|x(t) - y(t)|$ y $|u(t) - v(t)|$ en términos de los parámetros de control K_7 y K_8 . Por ejemplo, calculamos la función de error $|x(t) - y(t)|$ fijando $K_8 = 100$ y variando el parámetro K_7 en un rango de 0 a 10. De manera similar para obtener la función de error $|u(t) - v(t)|$ fijamos $K_7 = 5$ y variamos el parámetro K_8 en un rango de 0 a 200. Los resultados los podemos observar en las figuras 5.17 (a) y (b). Las funciones de error tienden a cero mientras se va aumentando los valores de los parámetros K_7 y K_8 . En las Figs. 5.18 y 5.19 se puede observar que las soluciones de $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ y $v(t)$ están en sincronización completa.

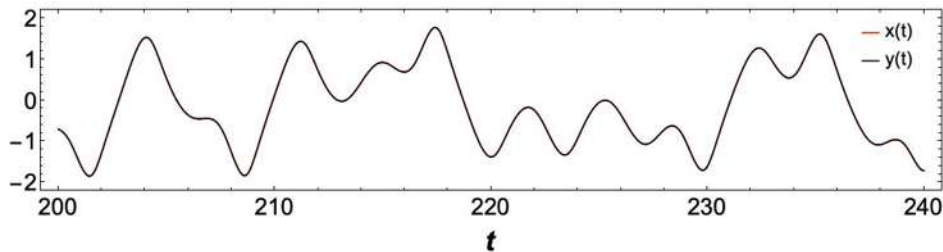


Figura 5.18: Soluciones para $x(t)$ y $y(t)$, con $K_7 = 5$ y $K_8 = 150$.

Finalmente analizamos las proyecciones de los planos (x, y) y (u, v) para los valores $K_7 = 5$ y $K_8 = 150$. El comportamiento del sistema esclavo (oscilador de Duffing) se muestra en la Fig. 5.20(a). En las Figs. 5.20(b) y (c), vemos

CAPÍTULO 5. SINCRONIZACIÓN ENTRE LOS OSCILADORES DE RAYLEIGH-DUFFING Y DUFFING

como se logra la sincronización completa ya que las proyecciones de los planos (x, y) y (u, v) son líneas delgadas a 45° .

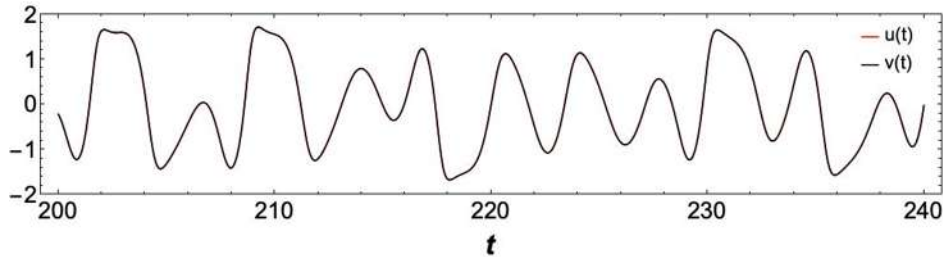


Figura 5.19: Soluciones para $u(t)$ y $v(t)$, con $K_7 = 5$ y $K_8 = 150$.

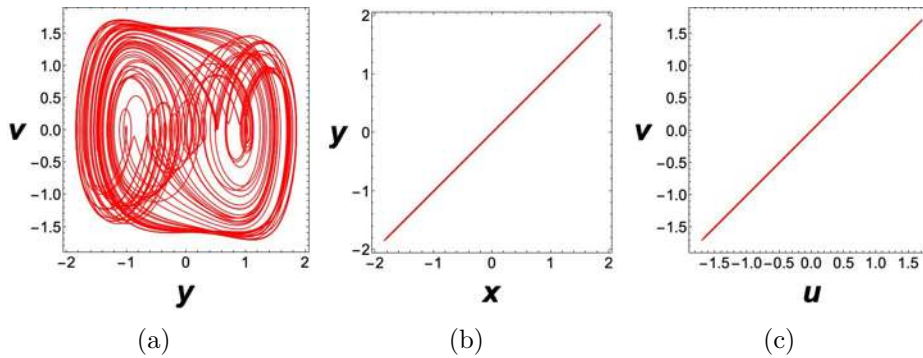


Figura 5.20: Acoplamiento elástico y disipativo: En (a) el sistema esclavo. En (b) y (c) proyecciones de los planos (x, y) y (u, v) , respectivamente.

5.3.2. Oscilador de Duffing (Maestro) y oscilador de Rayleigh-Duffing (Esclavo)

De manera similar, vamos a analizar el caso fijando $K_7 = K_8 = 0$, y variando las constantes K_5 y K_6 , donde las constantes representan los parámetros de control del acoplamiento elástico y disipativo respectivamente. Para estudiar la sincronización entre los osciladores de Duffing y Rayleigh-Duffing, usamos las funciones de error $|y(t) - x(t)|$ y $|v(t) - u(t)|$ en términos de los parámetros de control K_5 y K_6 . Por ejemplo, calculamos la función de error $|y(t) - x(t)|$ fijando $K_6 = 100$ y variando el parámetro control K_5 en un rango

CAPÍTULO 5. SINCRONIZACIÓN ENTRE LOS OSCILADORES DE RAYLEIGH-DUFFING Y DUFFING

de 0 a 10. De una forma similar, obtenemos la función de error $|v(t) - u(t)|$ con $K_5 = 5$ y variando el parámetro de control K_6 en un rango de 0 a 200. La dinámica del error $e_{11} = y - x$ y $e_{12} = v - u$ se obtiene restando las Ecs. (5.9) y (5.10). Los resultados los podemos observar en las Figs. 5.21 (a) y (b). Vemos como las funciones de error tienden a cero mientras los valores de los parámetros K_5 y K_6 se incrementan.

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_{11} &= \dot{y} - \dot{x} = v - u - K_5 e_{11}, \\
 e_{12} &= v - u = \dot{e}_{11} + K_5 e_{11}, \\
 \dot{e}_{12} &= -\gamma v + y - \delta y^3 + A_2 \cos(\omega_2 t) \\
 &\quad - \mu(1 - u^2)u + \alpha x + \beta x^3 - A_1 \cos(\omega_1 t) - K_6 e_{12}. \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

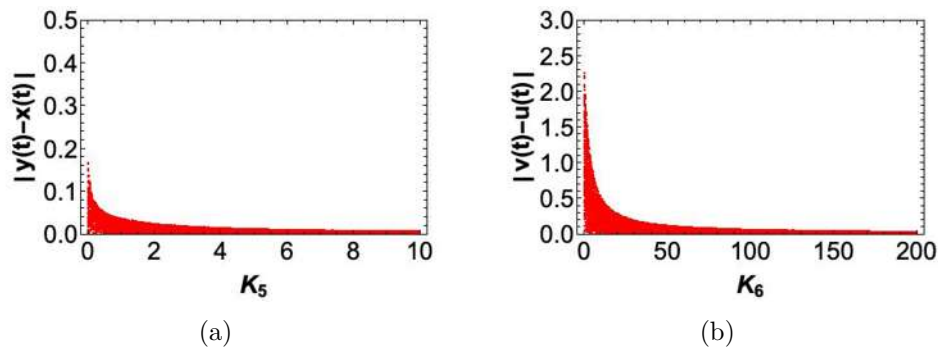


Figura 5.21: (a) Función de error $|y(t) - x(t)|$ con $K_6 = 100$ y variando K_5 . (b) Función de error $|v(t) - u(t)|$, con $K_5 = 5$ y variando K_6 .

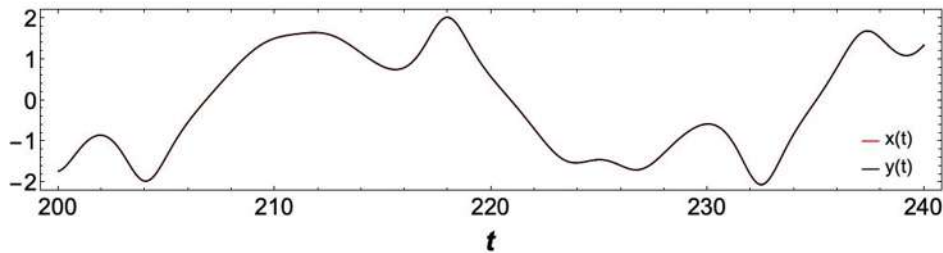


Figura 5.22: Soluciones para $x(t)$ y $y(t)$, con $K_5 = 5$ y $K_6 = 150$.

CAPÍTULO 5. SINCRONIZACIÓN ENTRE LOS OSCILADORES DE RAYLEIGH-DUFFING Y DUFFING

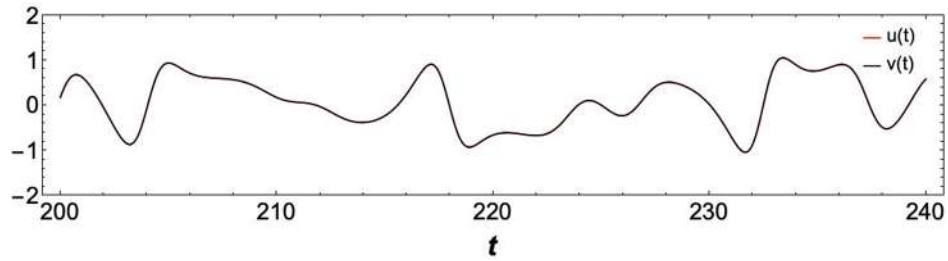


Figura 5.23: Soluciones para $u(t)$ y $v(t)$, con $K_5 = 5$ y $K_6 = 150$.

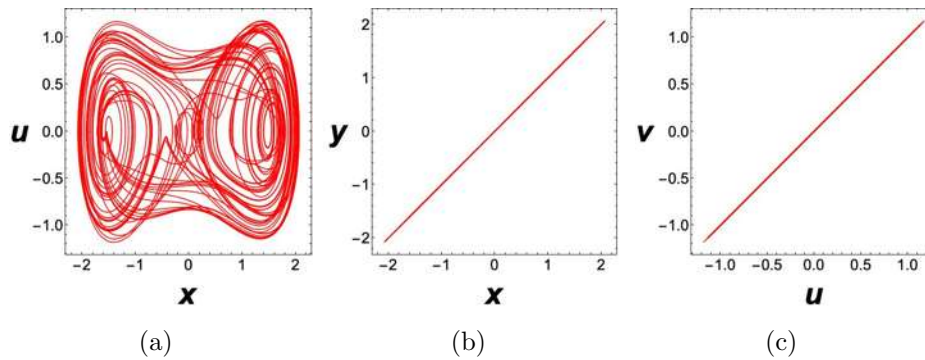


Figura 5.24: Acoplamiento elástico y disipativo: En (a) el sistema esclavo. En (b) y (c) proyecciones de los planos (x, y) y (u, v) , respectivamente.

En las Figs. 5.22 y 5.23 se puede observar que las soluciones de $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ y $v(t)$ que ambos osciladores están en sincronización completa. Finalmente, analizando las proyecciones de los planos (x, y) y (u, v) para los valores $K_5 = 5$ $K_6 = 150$. En la Fig. 5.24(a) se muestra el comportamiento del sistema esclavo, el oscilador de Rayleigh-Duffing. En las Figs. 5.24(b) y (c), vemos como se logra la sincronización completa en este caso. Esto sucede solo cuando empleamos el acoplamiento mixto, ya que de lo contrario como vimos en los casos empleados antes con acoplamiento elástico o disipativo esto no sucedía.

Capítulo 6

Conclusiones

En el trabajo presentado, estudiamos la sincronización entre los osciladores de Rayleigh-Duffing y Duffing empleando la configuración maestro-esclavo, así mismo, se han analizado los acoplamientos elástico, disipativo y una combinación de ambos. Analizamos primeramente el oscilador de Rayleigh-Duffing cuando actúa como sistema maestro mientras que el oscilador de Duffing actúa como sistema esclavo, después analizamos el caso contrario, ahora el oscilador de Duffing actúa como sistema maestro mientras que el oscilador de Rayleigh-Duffing como sistema esclavo. Para cada caso bajo estudio, consideramos los tres tipos de acoplamiento: elástico, disipativo y la combinación de ambos.

Para el caso donde el oscilador de Rayleigh-Duffing actúa como sistema maestro y el oscilador de Duffing actúa como sistema esclavo y empleando un acoplamiento elástico, obtenemos una sincronización completa en la proyección del plano (x, y) y una sincronización práctica en el plano (u, v) al variar la fuerza de acoplamiento elástico K_2 . En el caso contrario, donde el oscilador de Duffing es el sistema maestro y el oscilador de Rayleigh-Duffing es el sistema esclavo, encontramos una sincronización práctica en la proyección del plano (x, y) y en la proyección del plano (u, v) no existe ninguna sincronización al variar la fuerza de acoplamiento elástico K_1 .

En el caso donde se utilizó el acoplamiento disipativo, se analizó cuando el oscilador de Rayleigh-Duffing actúa como sistema maestro y el oscilador de Duffing como sistema esclavo, encontramos que existe una sincronización práctica o sincronización práctica con desplazamiento vertical en la proyec-

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

ción del plano (x, y) dependiendo del valor de K_4 . Por otro lado, en la proyección del plano (u, v) encontramos una sincronización completa al variar la constante de acoplamiento K_4 . Ahora, cuando el oscilador de Duffing es el sistema maestro, obtenemos una sincronización práctica en la proyección del plano (x, y) y una sincronización completa en la proyección del plano (u, v) al incrementar el valor de la constante de acoplamiento K_3 . En ambos casos solo se logra una sincronización completa en un solo estado del sistema esclavo, obteniendo una sincronización parcial entre ambos osciladores.

Por otro lado, cuando se emplea una combinación de ambos acoplamientos, primero se estudió el caso cuando el oscilador de Rayleigh-Duffing es el sistema maestro y después el caso contrario donde el oscilador de Duffing como sistema maestro. Esto nos permite que el sistema esclavo tenga una dinámica más compleja teniendo un amplio rango de las fuerzas de acoplamiento que se estudian. La diferencia entre los acoplamientos anteriormente utilizados, consiste en que ahora es posible obtener sincronización completa en las proyecciones de los planos (x, y) y (u, v) en el sistema esclavo. De esta manera, los resultados numéricos que obtuvimos usando la combinación del acoplamiento elástico y disipativo demuestran que es el más eficaz para lograr la sincronización completa entre de ambos osciladores. En futuros trabajos, el acoplamiento empleado será estudiado en otros osciladores no lineales donde no ha sido posible lograr la sincronización completa utilizando la configuración maestro-esclavo clásico.

Bibliografía

- [1] E. Ott, C. Grebogi, and J.A. Yorke, *Controlling chaos*. Phys. Rev. Lett. 64, 1196, 1990.
- [2] H. Jahanshahi, K. Rajagopal et al, *Complete analysis and engineering applications of a megastable nonlinear oscillator*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 107, Pages 126-136, 2018.
- [3] U. Uriostegui, E.S. Tututi and G. Arroyo, *A new scheme of coupling and synchronizing low-dimensional dynamical systems*, Rev. Mex. Fis 67, 334, 2021.
- [4] B.P. Mann, N.D. Sims, *Energy harvesting from the nonlinear oscillations of magnetic levitation*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 319, Issues 1–2, Pages 515-530, 2009.
- [5] G. Duffing, *Erzwungene schwingungen bei veränderlicher eigen-frequenz*, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1918.
- [6] D.K. Arrowsmith, C.M. Place, *Dynamical Systems, Differential equations, maps and chaotic behavior*. Chapman & Hall, 1992.
- [7] H. Chen and L. Zou, *Global study of Rayleigh–Duffing oscillators*, J. Phys. A: Math. Theor 49, 165202, 2016.
- [8] Y. Kanai and H. Yabuno, *Creation–annihilation process of limit cycles in the Rayleigh–Duffing oscillator*, Nonlinear Dynam 70, 1007, 2012.
- [9] I.A. Korneev, V.V. Semenov, A.V. Slepnev and T.E. Vadivasova, *Complete synchronization of chaos in systems with nonlinear inertial coupling*, Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 142, 110459, 2021.

BIBLIOGRAFÍA

- [10] J. Ramadoss, J. Kengne, S.T. Tanekou, K. Rajagopal and G.D. Kenmoe, *Reversal of period doubling, multistability and symmetry breaking aspects for a system composed of a van der pol oscillator coupled to a duffing oscillator*, Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 159, 112157, 2022.
- [11] U. Uriostegui-Legorreta, E.S. Tututi-Hernández, *Master-slave synchronization in the Rayleigh and Duffing oscillators via elastic and dissipative couplings*, REVISTA DE CIENCIAS TECNOLÓGICAS, 5(1), 151–164, 2022.
- [12] Morris W. Hirsch and Stephen Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. ACADEMIC PRESS, INC. 1974.
- [13] Lawrence Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems* Springer-Verlag New York, Inc, 1991.
- [14] J. Jost, *Dynamical Systems Examples of Complex Behaviour*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [15] Stephen Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos 2ed*. Springer, 1990.
- [16] William E. Boyce, Richard C. DiPrima, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Editorial Limusa, S.A. de C.V., México, 2000.
- [17] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, 1983.
- [18] I. Kovacic and M.J. Brennan, *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour*, John Wiley & Sons, 2011.
- [19] Y. Ueda, *Random phenomena resulting from nonlinearity in the system described by Duffing's equation*. International Journal of Non-linear Mechanics, Vol. 20, 481-491, 1985.
- [20] M. Rosenblum, A. Pikovsky and J. Kurths, Phase synchronization of chaotic oscillators. Physical Review Letters, 76(11), 1804-1807, 1996.
- [21] E. Ott, Chaos in Dynamical Systems. New York: Cambridge University Press, 1993.

BIBLIOGRAFÍA

- [22] L.M. Pecora, T.L. Carroll, *Synchronization in chaotic systems*, Physical Review Letters 64(8), 821-824, 1990.
- [23] M. Lakshmanan and K. Murali, *Chaos in Nonlinear Oscillators: Controlling and Synchronization*, World Scientific Serires on Nonlinear Science 13, Singapore, 1996.
- [24] E.A. Jackson, *The Entrainment and Migration Controls of Multiple-attractor Systems*, Physics Letters A 151(9), 478-484, 1990.
- [25] E.A. Jackson and A. Hubler, *Periodic Entrainment of Chaotic Logistic Map Dynamics*, Physica D 44(3), 407-420, 1990.
- [26] E.A. Jackson and A. Kodogeorgiou, *Entrainment and Migration Controls of Two-dimensional Maps*, Physica D 54(3), 253-265, 1992.
- [27] B.A. Huberman, E. Lumer, *Dynamics of adaptive systems*, IEEE Transactions on Circuits and Systems 37(4), 547-550, 1990.
- [28] M.L. Cartwright, *Forced oscillations in nearly sinusoidal systems*, Journal of the Institute of Electrical Engineering 95, 223-227, 1948.
- [29] T.L. Carroll, J. Heagy and L.M. Pecora, *Synchronization and desynchronization in pulse coupled relaxation oscillators*, Physics Letters A, 186(3), 225-229, 1994.
- [30] D.L. González and O. Piro, *Chaos in a Nonlinear Driven Oscillator with Exact Solution*, Physical Review Letters 52, 1841, 1984.
- [31] C.M. Arizmendi, H.A. Larrondo, J.R. Sánchez and O. Piro, *Bifurcaciones y Caos en un Oscilador Electrónico No Lineal*, 69a. Reunión Nacional de la AFA, Buenos Aires, 1984.
- [32] C. Lourenco and A. Babloyantz, *Control of Chaos in Networks with Delay: A Model for Synchronization of Cortical Tissue*, Neural Computation 6(6), 1141-1154, 1994.
- [33] H. Fujisaka and T. Yamada *Stability theory of synchronized motions in coupled oscillator systems*, Progress of Theoretical Physics 69, 32-46, 1983.
- [34] S. Boccaletti et al, *The Synchronization of chaotic systems*, Physics Reports 366, 1-101, 2002.

BIBLIOGRAFÍA

- [35] H. Fujisaka and T. Yamada *Stability theory of synchronized motions in coupled oscillator systems*, Progress of Theoretical Physics 69, 32-46, 1983.
- [36] M.K. Cuomo, A.V. Oppenheim and S.H. Strigatz, *Synchronization of Lorenz-Based Chaotic Circuits with Applications to Communications*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 40(10), pp 626-633, 1993.
- [37] T. Kapitaniak and L.O. Chua, *Strange nonchaotic trajectories on torus*, International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, vol. 7(2), 423-429, 1997.
- [38] U. Parlitz, L. Kocarev, T. Stojanovski and H. Preckel, *Encoding messages using chaotic synchronization*, Phys. Rev. E 53, 4351, 1996.
- [39] U. Uriostegui and E.S. Tututi, *Numerical study on synchronization in the Rayleigh–Duffing and Duffing oscillators*, International Journal of Modern Physics C Vol. 34, No 09, 2350122, 2023.
- [40] U. Uriostegui and E.S. Tututi, *Synchronization in the van der Pol–Duffing system via elastic and dissipative couplings*, Rev. Mex. Fis 68, 011402, 2022.