



UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Análisis Cosmográfico de Modelos $F(R)$ y $F(R,T)$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
Maestro en Ciencias en el área de Física

PRESENTA

Juan Luis Matuz Argueta

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Ulises Nucamendi Gómez

Morelia, Michoacán, Noviembre de 2023

Resumen

Para este trabajo de tesis se realizó un análisis cosmológico a través de la Cosmografía de tres modelos viables de teorías $f(R)$ que se encuentran reportados en la literatura. Para el ajuste y el análisis se usaron datos actuales de observaciones tales como: Cronómetros Cósmicos, Oscilaciones Acústicas Bariónicas, Luminosidad aparente de Supernovas Tipo Ia, Estrellas Cefeidas y Cuásares. También se analizaron los valores de la constante de Hubble H_0 y el parámetro de desaceleración, usando el conjunto total de datos previamente mencionados, se obtuvo $H_0 = 70.53^{+0.79}_{-0.78}$ Km/s/Mpc y $q_0 = -0.4707^{+0.095}_{-0.09}$. Como principal resultado se encontraron los valores de los parámetros de los tres modelos cosmológicamente viables que satisfacen las pruebas a nivel del sistema solar y se compararon con los valores usados en el trabajo de Negrelli et al. [1].

Los resultados encontrados para cada modelo son robustos. Para trabajo futuro, queda realizar una estimación de los parámetros de los tres modelos estudiados con datos de tiempo tempranos del universo.

Palabras Clave— Física, Cosmología, Cosmografía, Gravedad Modificada, Teorías $f(R)$

Abstract

In this thesis we do a cosmological investigation between Cosmography and three viable models in $f(R)$ theories reported in the literature. For the tests we use current observations such as: Cosmic Clocks, Baryon Acoustic Oscillations, Type Ia supernovae, Cepheid's stars and Quasars. We also fit the current values of the Hubble constant H_0 and the deceleration parameter, using all the data we find a Hubble constant, $H_0 = 70.53^{+0.79}_{-0.78}$ Km/s/Mpc and a deceleration parameter with $q_0 = -0.4707^{+0.095}_{-0.09}$. As a main result, we find the parameter values of each of the three viable cosmological models satisfy the solar system tests in gravity and we contrasted with the values used in Negrelli et al. [1].

The results we find for each model are robust. For future work, we can test the results we report for all three models using early universe time data.

Keywords— Physics, Cosmology, Cosmography, Modified Gravity, $f(R)$ theories

Índice general

Introducción	1
1. Teorías $f(R)$	3
1.1. Bases de la Cosmología Estándar	3
1.1.1. Ecuaciones de Friedmann	4
1.1.2. Problemas en la Cosmología Estándar	6
1.1.3. Teorema de Lovelock	8
1.2. Teorías $f(R)$	9
1.2.1. Formalismo Métrico	9
1.2.2. Ecuaciones de Friedmann en Gravedad $f(R)$	12
1.2.3. Viabilidad de las Teorías $f(R)$	16
1.2.4. Modelos Viables en Gravedad $f(R)$	25
1.2.5. Gravedad $f(R)$ e Inicios del Universo	27
2. Cosmografía	29
2.1. Distancias en Cosmografía	32
2.1.1. Distancia comóvil	32
2.1.2. Distancia de Luminosidad	34
2.1.3. Distancia Diámetro Angular	35
2.2. Cosmografía y Convergencia	36
2.3. Cosmografía y Gravedad $f(R)$	40
2.3.1. Modelos Viables en Gravedad $f(R)$ y Cosmografía	43
3. Cosmoestadística	45
3.1. Estadística Bayesiana	45
3.2. Sobre la función χ^2	46
3.3. Estadística χ^2 Reducida	46
3.4. Criterio de Información Bayesiano (BIC)	47
3.5. Método de Montecarlo Usando Cadenas de Markov	48
3.5.1. Criterio Gelman-Rubin	50
3.5.2. Códigos Computacionales en Cosmología	50
3.6. Datos Observacionales Cosmológicos	51
3.6.1. Cronómetros Cósmicos	51
3.6.2. Oscilaciones Acústicas Bariónicas	52
3.6.3. Supernovas Tipo Ia	54
3.6.4. Cefeidas	55
3.6.5. H0LICOW	55

4. Resultados	57
4.1. Cronómetros Cósmicos+Pantheon+Cefeidas	57
4.2. Cronómetros Cósmicos+Pantheon+BAO+ Cefeidas	59
4.3. Cronómetros Cósmicos+Pantheon+H0licow +Cefeidas	59
4.4. Cronómetros Cósmicos+Pantheon+H0licow +BAO+Cefeidas (Todos los Datos)	59
4.5. Cosmografía y Condiciones de Viabilidad	61
4.5.1. CC+Pantheon+Cefeidas	63
4.5.2. CC+Pantheon+BAO+Cefeidas	64
4.5.3. CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas	66
4.5.4. Todos los datos	68
4.6. Parámetros de los modelos viables	70
4.6.1. Gravedad Exponencial	70
4.6.2. Modelo de Starobinsky	73
4.6.3. Modelo de Hu-Sawicki	75
4.6.4. El Criterio de Información Bayesiano y el Modelo Estándar	77
Conclusiones	81
Referencias	85
Apéndice A	91
Apéndice B	93

Índice de figuras

1.1. Mapa de la radiación cósmica de microondas	4
1.2. Geometrías espaciales del universo	5
1.3. Valores de la constante de Hubble H_0 reportados	7
1.4. Mecanismo Camaleón	23
1.5. La quinta fuerza en gravedad $f(R)$	24
2.1. El fenómeno del corrimiento al rojo	32
2.2. Distancia Diámetro Angular	35
2.3. Radio de convergencia de la variable z	37
2.4. Radio de convergencia de la variable y	39
3.1. El método de Montecarlo [51].	48
3.2. Gráfico de un muestreo usando MCMC [51].	49
3.3. Gráfica de los datos del experimento Pantheon	55
4.1. Gráfica 2D de los parámetros cosmográficos usando CC, Pantheon y Cefeidas	58
4.2. Gráfica 2D de los parámetros cosmográficos usando CC, Pantheon, BAO y Cefeidas	60
4.3. Gráfica 2D de los parámetros cosmográficos usando CC, Pantheon, H0licow y Cefeidas	61
4.4. Gráfica 2D de los parámetros cosmográficos usando todos los conjuntos de datos	62
4.5. Gráfica 2D de lo valores derivados de un modelo $f(R)$ usando CC, Pantheon y Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.27$	63
4.6. Gráfica 2D de lo valores derivados de un modelo $f(R)$ usando CC, Pantheon y Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.315$	64
4.7. Gráfica 2D de lo valores derivados de un modelo $f(R)$ usando CC, Pantheon, BAO y Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.315$	65
4.8. Gráfica 2D de lo valores derivados de un modelo $f(R)$ usando CC, Pantheon, BAO y Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.315$	66
4.9. Gráfica 2D de lo valores derivados de un modelo $f(R)$ usando CC, Pantheon, H0licow y Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.27$	67
4.10. Gráfica 2D de lo valores derivados de un modelo $f(R)$ usando CC, Pantheon, H0licow y Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.315$	68
4.11. Gráfica 2D de lo valores derivados de un modelo $f(R)$ usando todos los conjuntos de datos y $\Omega_{m0} = 0.27$	69
4.12. Gráfica 2D de lo valores derivados de un modelo $f(R)$ usando todos los conjuntos de datos y $\Omega_{m0} = 0.315$	70

4.13. Contornos de confianza de los valores de las constantes del modelo de gravedad exponencial con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.27$, en orden de arriba a abajo son R_s y b	71
4.14. Contornos de confianza de los valores de las constantes del modelo de gravedad exponencial con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.27$, en orden de arriba a abajo son R_s y b	72
4.15. Contornos de confianza de los valores de las constantes del modelo de gravedad exponencial con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.315$, en orden de arriba a abajo son R_s y b	72
4.16. Contornos de confianza de los valores de las constantes del modelo de Starobinsky con $n=1$ (Izquierda) y $n=4$ (Derecha), con CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.27$, en orden de arriba a abajo son R_c y λ	73
4.17. Contornos de confianza de los valores de las constantes del modelo de Starobinsky con $n=1$ (Naranja) y $n=4$ (Azul), con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.27$, en orden de arriba a abajo son R_c y λ	74
4.18. Contornos de confianza de los valores de las constantes del modelo de Starobinsky con $n=1$ (Naranja) y $n=4$ (Azul), con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.315$, en orden de arriba a abajo son R_c y λ	75
4.19. Contornos de confianza de los valores de las constantes del modelo de Hu-Sawicki con $n=1$, con CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.27$, en orden de arriba a abajo son R_c, a y b	76
4.20. Contornos de confianza de los valores de las constantes del modelo de Hu-Sawicki con $n=1$, con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.27$, en orden de arriba a abajo son R_c, a y b	76
4.21. Contornos de confianza de los valores de las constantes del modelo de Hu-Sawicki con $n=1$, con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.315$, en orden de arriba a abajo son R_c, a y b	77

Índice de cuadros

1.1. Constricciones del valor $f'(R_0)$	25
3.1. Tabla del Factor de Bayes	47
3.2. Tabla de 31 datos de $H(z)$ de Cronómetros Cósmicos	52
3.3. Tabla de 15 datos de BAO angular.	54
4.1. Priors de los parámetros cosmográficos	57
4.2. Parámetros cosmográficos evaluados al tiempo presente para Cronómetros Cósmicos, Pantheon y Cefeidas.	58
4.3. Parámetros cosmográficos evaluados al tiempo presente para Cronómetros Cósmicos, Pantheon, BAO Angular y Cefeidas.	59
4.4. Parámetros cosmográficos evaluados al tiempo presente para Cronómetros Cósmicos, Pantheon, H0licow y Cefeidas.	60
4.5. Parámetros cosmográficos evaluados al tiempo presente para Cronómetros Cósmicos, Pantheon, H0licow, BAO Angular y Cefeidas.	62
4.6. Valores derivados de un modelo arbitrario $f(R)$ usando CC, Pantheon y Cefeidas con $\Omega_{m0} = 0.27$	63
4.7. Valores derivados de un modelo arbitrario $f(R)$ usando CC, Pantheon y Cefeidas con $\Omega_{m0} = 0.315$	64
4.8. Valores derivados de un modelo arbitrario $f(R)$ usando CC, Pantheon, BAO y Cefeidas con $\Omega_{m0} = 0.27$	65
4.9. Valores derivados de un modelo arbitrario $f(R)$ usando CC, Pantheon, BAO y Cefeidas con $\Omega_{m0} = 0.315$	65
4.10. Valores derivados de un modelo arbitrario $f(R)$ usando CC, Pantheon, H0licow y Cefeidas con $\Omega_{m0} = 0.27$	66
4.11. Valores derivados de un modelo arbitrario $f(R)$ usando CC, Pantheon, H0licow y Cefeidas con $\Omega_{m0} = 0.315$	67
4.12. Valores derivados de un modelo arbitrario $f(R)$ usando todos los conjuntos de datos con $\Omega_{m0} = 0.27$	68
4.13. Valores derivados de un modelo arbitrario $f(R)$ usando todos los conjuntos de datos con $\Omega_{m0} = 0.315$	69
4.14. Valores de las constantes del modelo de gravedad exponencial con CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.27$	71
4.15. Valores de las constantes del modelo de gravedad exponencial con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.27$	71
4.16. Valores de las constantes del modelo de gravedad exponencial con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.315$	72
4.17. Valores de las constantes del modelo de Starobinsky con $n=1$ y $n=4$, con CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.27$	73
4.18. Valores de las constantes del modelo de Starobinsky con $n=1$ y $n=4$, con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.27$	74

4.19. Valores de las constantes del modelo de Starobinsky con $n=1$ y $n=4$, con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.315$	74
4.20. Valores de las constantes del modelo de Hu-Sawicki con $n=1$, CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.27$	75
4.21. Valores de las constantes del modelo de Hu-Sawicki con $n=1$, con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.27$	75
4.22. Valores de las constantes del modelo de Hu-Sawicki con $n=1$, con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.315$	77
4.23. Resultados del ajuste de parámetros del modelo estándar.	78
4.24. Resultados del BIC para ambos modelos.	79

Introducción

La cosmología es una ciencia que estudia el universo, o el cosmos, como un todo. Durante los últimos años, esta ciencia ha tenido un amplio desarrollo debido a la gran cantidad de datos cosmológicos de precisión obtenidos por varios proyectos observacionales desarrollados por diversas colaboraciones científicas. El descubrimiento de la expansión acelerada del universo [2,3] es una de las sorpresas más grandes de la cosmología moderna en las últimas décadas, y su posible explicación mediante la suposición de la presencia de una nueva componente exótica en la estructura del universo ha abierto nuevas incógnitas en la historia de nuestro universo. Dicho descubrimiento implica un nuevo objeto de estudio para la cosmología, este nuevo objeto es la llamada energía oscura, y para su estudio fue necesaria la inclusión de un nuevo modelo cosmológico que incluyera dicha energía oscura, este modelo se conoce como Materia Oscura Fría con Constante Cosmológica, por sus siglas en inglés Λ CDM (Lambda-Cold Dark Matter), esto es debido a que el modelo incorpora a la energía oscura con esta constante Λ y además, de manera adicional se considera la existencia de una materia no lumínica que se encuentra presente en galaxias y que se denomina materia oscura, y es hasta el momento, el mejor modelo que concuerda con las observaciones. Sin embargo, el modelo, además de incorporar componentes todavía de naturaleza desconocida, tiene problemas al ajustar datos de tiempo tempranos y de tiempo tardíos, provocando lo que actualmente se conoce como los problemas de las tensiones entre los valores de la constante de Hubble H_0 y el valor del parámetro de crecimiento de la estructura cósmica S_8 .

Por lo anterior, una de las maneras en la que se intenta resolver estos problemas es considerando teorías que modifican geoméricamente a la Relatividad General sin la necesidad de la introducción de componentes nuevas de materia en el universo. Una de las Teorías de Gravedad Modificada más populares que intentan resolver estos problemas son las Teorías $f(R)$ que estudiaremos en este trabajo de Tesis.

A la rama de la Cosmología que propone analizar el universo sin la dependencia de un modelo de gravedad se le conoce como Cosmografía y parte únicamente del llamado Principio Cosmológico para encontrar la cinemática del universo, y recae en los llamados parámetros cosmográficos.

De acuerdo a lo anterior, en este trabajo de Tesis veremos como se efectúa un análisis cosmológico a través de la Cosmografía para distintos modelos viables de gravedad modificada $f(R)$ propuestos en distintos artículos. Los modelos que analizaremos son: el modelo de Gravedad Exponencial [4], el modelo de Starobinsky [5] y el modelo Hu-Sawicki [6]. Haciendo uso del análisis estadístico Bayesiano de los datos observacionales calcularemos la mejor estimación de los parámetros cosmográficos, con la finalidad posterior de evaluar si estos nos otorgan un modelo $f(R)$ viable, si esto se cumple mostraremos el rango de los valores más probables de los parámetros de los modelos de gravedad modificada $f(R)$.

Dividiremos el presente trabajo de tesis de la siguiente manera: en el Capítulo 1 daremos un introducción a las bases de la Cosmología Estándar y sus problemas para

luego pasar a las Teorías de Gravedad Modificada $f(R)$, las condiciones para ser físicamente viables y los modelos $f(R)$ que utilizaremos. En el Capítulo 2 se contestarán a las preguntas: ¿Qué es la Cosmografía? y ¿Cómo podemos ligarla con las Teorías $f(R)$?. En el Capítulo 3 presentaremos la cosmoestadística que utilizaremos para estudiar la Cosmografía y a los modelos presentados en el Capítulo 1. En el Capítulo 4 describiremos los resultados de los ajustes bayesianos obtenidos en Cosmografía y en los modelos de gravedad modificada. Finalmente, se presentaran las respectivas Conclusiones.

Capítulo 1

Teorías $f(R)$

En este capítulo nos enfocaremos a mostrar una teoría de gravedad modificada que intenta resolver los problemas que tiene el modelo de la Cosmología Estándar, esta teoría es conocida como teoría $f(R)$, esta teoría intenta afrontar el problema haciendo una modificación a la acción de Einstein-Hilbert, esto es, asumiendo que la densidad lagrangiana es una función arbitraria que depende del escalar de Ricci. A continuación, se mostrarán las condiciones de viabilidad que debe de cumplir dicha teoría de gravedad y que usaremos en los resultados, finalmente mostraremos los modelos que usamos en este trabajo, pero antes, daremos un breve panorama del estado en que se encuentra actualmente la Cosmología Estándar y porqué es necesario buscar nuevas alternativas.

1.1. Bases de la Cosmología Estándar

La cosmología estándar surge a partir de la asunción de un modelo de Gran explosión caliente (Hot Big Bang) basado en el principio cosmológico. El principio cosmológico establece que el universo es espacialmente homogéneo e isotrópico, es decir, a cada tiempo fijo la materia está distribuida de forma uniforme y no hay una dirección preferencial al menos a grandes distancias, estas distancias son a partir del orden de 260 Mpc/h [7], donde h es la constante de Hubble reducida, esta suposición a distancias cosmológicas se vuelve estadísticamente cierta y la observación más famosa que la respalda es la radiación cósmica de fondo, CMB por sus siglas en inglés, la variación de temperatura de los fotones que llegan de dicha radiación formada en la época de la recombinación, cuando el universo tenía 380000 años de edad es de 10^{-5} de una temperatura promedio de 2.726K, lo cuál muestra que de todas direcciones la temperatura de los fotones provenientes del CMB es prácticamente la misma.

Entonces, para describir la expansión cósmica del universo a través del modelo estándar tenemos que resolver las ecuaciones de Einstein considerando el principio cosmológico, para ello partimos de la acción de Einstein-Hilbert más materia

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M, \quad (1.1)$$

con R el escalar de curvatura de Ricci, dicha acción será incluida más adelante como un caso especial de las teorías $f(R)$. Variando la acción (1.1) con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$ obtenemos las llamadas ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento.

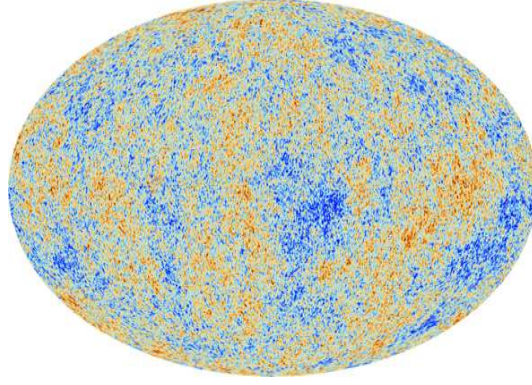


Figura 1.1: Mapa del universo visible de la radiación cósmica de fondo, con datos del programa espacial Planck [8], las regiones en rojo son zonas con temperaturas mayores que la temperatura promedio y las regiones en azul son zonas con temperaturas menores que la temperatura promedio.

1.1.1. Ecuaciones de Friedmann

La métrica que describe un universo 4-dimensional espacialmente homogéneo e isotrópico es la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) y está dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (1.3)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala que depende del tiempo cósmico t y k la curvatura del espacio tridimensional el cual puede tomar valores de $+1, -1, 0$ que corresponden a una geometría cerrada, abierta y plana respectivamente, $d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ es el diferencial de ángulo sólido. El contenido en el universo en el espacio tiempo con métrica FLRW se restringe a comportarse como un fluido perfecto,

$$T^\mu_\nu = (\rho + P)u^\mu u_\nu + P\delta^\mu_\nu, \quad (1.4)$$

donde $u^\mu = (-1, 0, 0, 0)$ es la cuatrivelocidad del fluido en coordenadas comóviles, ρ la densidad de energía del fluido y P la presión del fluido son funciones del tiempo t . Introduciendo todo lo anterior a las ecuaciones de Einstein obtenemos las siguientes ecuaciones conocidas como las ecuaciones de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (1.5)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -8\pi G P - \frac{k}{a^2}, \quad (1.6)$$

donde H es definido como el parámetro de Hubble $H \equiv \dot{a}/a$ y nos indica la tasa de expansión del universo, el punto indicará la derivada con respecto al tiempo cósmico de ahora en adelante. Podemos usar dichas ecuaciones para encontrar la ecuación de desaceleración y la ecuación de estado del fluido perfecto, obteniendo respectivamente

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P), \quad (1.7)$$

y

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (1.8)$$

La ecuación (1.5) la podemos escribir como:

$$\Omega_M + \Omega_k = 1, \quad (1.9)$$

donde $\Omega_M \equiv \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$, $\Omega_k \equiv -\frac{k}{(aH)^2}$, son los llamados parámetros de densidad que describen la cantidad relativa o el porcentaje que representa cada componente en el universo, los parámetros de densidad al día de hoy se definen como:

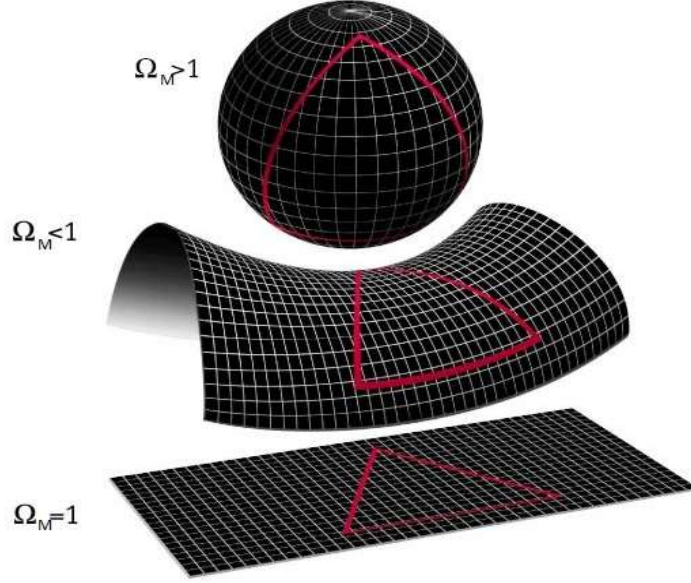


Figura 1.2: Diferentes geometrías espaciales posibles para el universo, de arriba hacia abajo corresponde el valor de $k = 1$, $k = -1$ y $k = 0$.

$$\Omega_{r0} = \frac{8\pi G\rho_{r0}}{3H_0^2}, \quad (1.10a)$$

$$\Omega_{m0} = \frac{8\pi G\rho_{m0}}{3H_0^2}, \quad (1.10b)$$

$$\Omega_{\Lambda 0} = \frac{8\pi G\rho_{\Lambda 0}}{3H_0^2}, \quad (1.10c)$$

$$\Omega_{k0} = -\frac{k}{a_0 H_0^2}, \quad (1.10d)$$

donde Ω_{r0} es la densidad de radiación en el universo al día de hoy, Ω_{m0} la densidad de materia, $\Omega_{\Lambda 0}$ la densidad de constante cosmológica en el universo presente y Ω_{k0} la densidad de curvatura al día de hoy, respectivamente. En este trabajo nos enfocaremos al caso de un universo plano $k = 0$ por simplicidad y también por las evidencias en distintos trabajos de que el universo tiene una geometría plana [9]. Considerando un fluido barotrópico que relaciona la presión con la densidad de la siguiente forma para cada fluido,

$$P \equiv \omega\rho, \quad (1.11)$$

tenemos que para radiación y polvo $\omega_r = 1/3$ y $\omega_m = 0$ respectivamente. Si queremos obtener una aceleración cósmica de la ecuación (1.7) se debe cumplir

$$P < -\rho/3 \rightarrow \omega < -1/3, \quad (1.12)$$

donde hemos considerado la densidad ρ positiva. La componente dominante que el modelo estándar atribuye a esta aceleración cósmica es la componente de constante cosmológica con un valor $\omega_\Lambda = -1$, así el modelo estándar en la cosmología, también

llamado modelo de la constante cosmológica y materia oscura fría, es

$$E(z) = \frac{H(z)}{H_0} = \sqrt{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda0} + \Omega_{r0}(1+z)^4}, \quad (1.13)$$

donde z es el corrimiento al rojo y será explicado en el capítulo 2 con más profundidad, los datos cosmológicos [9] indican que al día de hoy la densidad de cada componente usando el modelo estándar es $\Omega_{m0} = 0.315 \pm 0.007$, $\Omega_{r0} = 8.24 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{\Lambda0} = 0.685 \pm 0.007$.

1.1.2. Problemas en la Cosmología Estándar

Como acabamos de mostrar, el modelo de la cosmología estándar es el modelo de la constante cosmológica y materia oscura fría, el cual ha dado buenos resultados describiendo una amplia variedad de observaciones astrofísicas y cosmológicas, así como el ajuste estadístico de datos cosmológicos. Sin embargo, el modelo estándar no está exento de problemas. Estos problemas abarcan desde la necesidad de componentes de materia exóticas (energía oscura, materia oscura), así como etapas cosmológicas como inflación para explicar el universo que observamos hoy en día, hasta inconsistencias en valores de parámetros cosmológicos calculados con observaciones de tiempo temprano y de tiempo tardío. A continuación, mencionaremos algunos de estos problemas que se intentan aminorar hoy en día haciendo uso de teorías de gravedad modificada.

El problema físico que está causando más problemas en la cosmología actual proviene de la ley de Hubble, y es la llamada tensión en la constante de Hubble, H_0 [10], cuyo valor se define como

$$H_0 = H(z=0) = \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{z=0} \quad \text{donde } a^{-1} = 1+z, \quad (1.14)$$

la ley de Hubble relaciona la velocidad de recesión de un objeto cosmológico con su distancia, el valor de H_0 es la tasa de expansión del universo que relaciona ambas cantidades, la medición de este parámetro cosmológico puede ser estimado a través de dos métodos, el primero es con la escalera de distancias cósmicas haciendo uso de Supernovas tipo Ia o estrellas Cefeidas y el segundo es usando el CMB, los valores de H_0 reportados en la literatura actual se pueden ver en la figura (1.3). El problema radica en que usando independientemente ambos métodos para calcular el valor de H_0 , estos valores difieren enormemente, donde los valores de los proyectos más precisos son $H_0 = 68 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ [9] usando CMB y $H_0 = 73.3 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ [11] usando estrellas Cefeidas, la distancia entre el valor promedio a 1σ de cada uno es de más de 5σ , y esto último no puede explicarse simplemente por errores sistemáticos. Debido a lo anterior, esta “tensión” genera la necesidad de revisar el modelo cosmológico estándar, lo cual lleva a sugerir la necesidad de una nueva física a nivel cosmológico, planteando así teorías de gravedad modificada, o podría deberse a las suposiciones que se han tomado usando el modelo estándar al hacer las mediciones en ambos métodos antes mencionados.

Otra problema que aparece en la cosmología actual es la llamada tensión del parámetro sigma ocho “ S_8 ” [10], que se define como,

$$S_8 = \sigma_8(\Omega_m/0.3)^{1/2} \quad (1.15)$$

donde σ_8 mide la amplitud del espectro de potencias a una escala de $8(H_0/100)^{-1} \text{ Mpc}$. El parámetro S_8 mide las amplitudes de las fluctuaciones de materia en el universo tardío y nos permite entender como estructuras de grandes escalas se formaron. La tensión nuevamente se presenta entre los dos métodos en los que el parámetro S_8

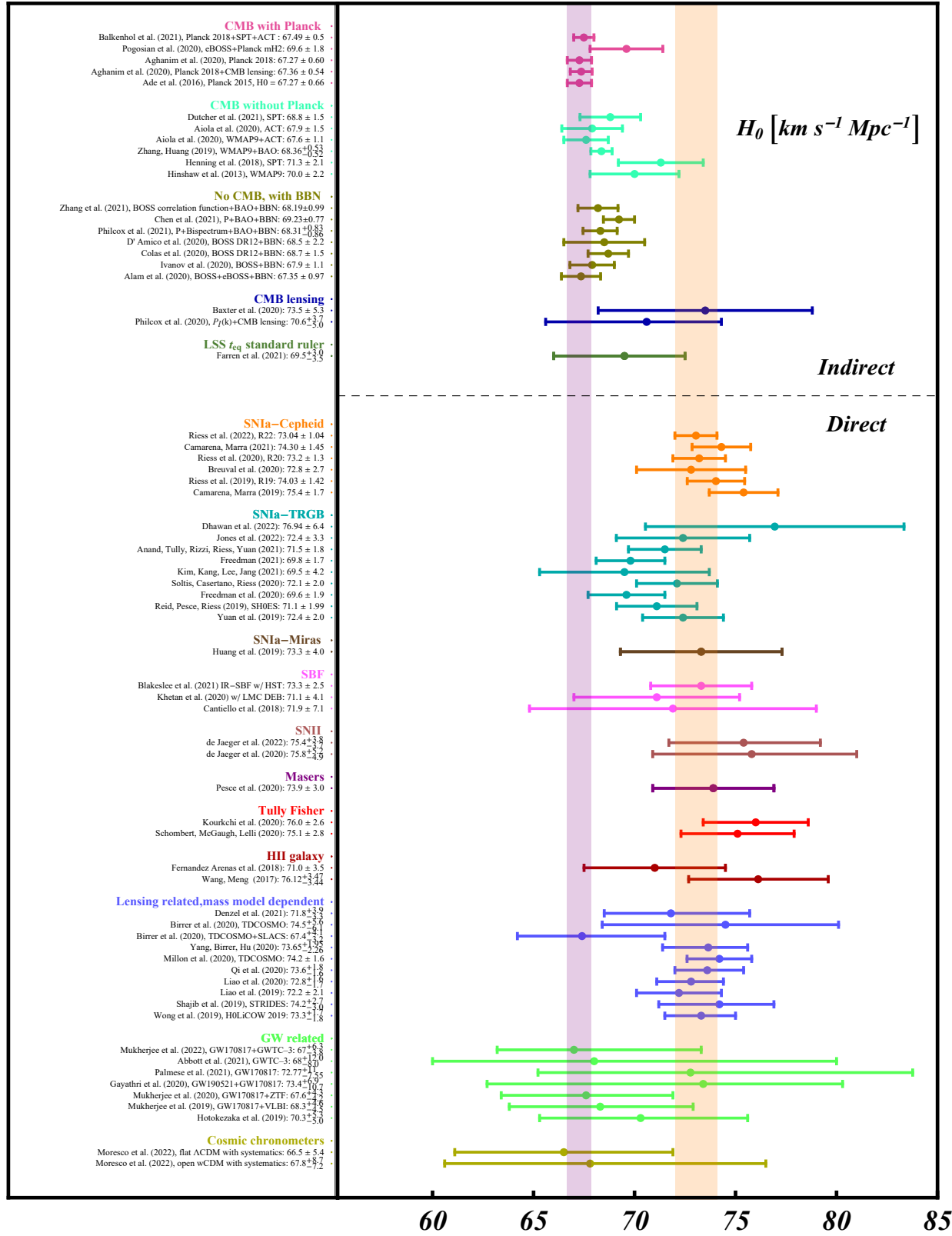


Figura 1.3: Diferentes valores de la constante de Hubble H_0 dentro de la dispersión 1σ inferidas con diferentes experimentos [10].

puede medirse, estos métodos son usando los datos de CMB o usando observaciones de lentes gravitacionales débiles, entre esos dos métodos la diferencia entre el valor promedio obtenido es de 3σ , con un valor más alto de S_8 usando datos de tiempos tempranos, por este resultado al igual que con H_0 se considera utilizar alternativas al modelo cosmológico estándar.

Además de los problemas mencionados sobre la discrepancia entre los valores de los parámetros físicos medidos usando datos de distintos tiempos cosmológicos, el modelo estándar contiene nuevos componentes de materia que no se han detectado directamente y de los cuales se desconoce su origen pero son necesarias en la teoría para que tenga un excelente ajuste estadístico a los datos observacionales cosmológicos, estas componentes son las llamadas Energía Oscura y la Materia Oscura. Además de componentes de materia nuevos el modelo cosmológico estándar necesita incluir etapas cosmológicas al inicio del universo para explicar las observaciones de un universo plano al día de hoy, esta época se conoce como inflación y es otro problema que se sigue estudiando actualmente. Con lo anterior, el modelo estándar nos motiva a realizar las siguientes preguntas

- ¿Cual es la naturaleza de la Energía y de la Materia Oscuras? ¿Porqué no hemos podido detectarlas directamente?
- ¿El universo tuvo efectivamente una época inflacionaria? ¿Hay observables que prueben dicha época?
- ¿Existe una teoría de gravedad más fundamental que incluya a la RG como un límite particular?

Debido a lo anterior, en este trabajo se analiza una clase de teorías de gravedad modificada que intenta contestar a algunas de las preguntas anteriores y cuya formulación revisaremos a continuación.

1.1.3. Teorema de Lovelock

En RG existen varios teoremas que son sumamente importantes para la estructura teórica de la misma, así como de las soluciones de sus ecuaciones de campo. Estos teoremas sustentan en gran parte la intuición adquirida sobre como debería funcionar la gravedad en diferentes entornos en RG, pero para dar paso a modificar la gravedad debemos de enfocarnos en la parte izquierda de las ecuaciones de campo de Einstein y “relajar” algunas hipótesis de estos teoremas.

El teorema que modificamos al empezar a trabajar en teorías de gravedad modificada es el conocido Teorema de Lovelock [12]; este teorema limita a las teorías de gravedad que se construyen únicamente a través del tensor métrico. Si la acción puede escribirse en términos solamente del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, tenemos

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(g_{\mu\nu}) \quad (1.16)$$

con ello el teorema dice

Theorem 1.1.1. *La única expresión de Euler-Lagrange posible de segundo orden covariante obtenible en un espacio cuatro dimensional y con una densidad escalar de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu})$ es*

$$E_{\mu\nu} = \alpha \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] + \lambda \sqrt{-g} g_{\mu\nu}, \quad (1.17)$$

donde α y λ son constantes, y $R_{\mu\nu}$ y R son el tensor y escalar de curvatura, respectivamente [13].

Este teorema nos dice que si queremos crear una teoría de gravedad en un espacio cuatro dimensional Pseudo-Riemanniano de un principio de acción que solo involucre al tensor métrico y sus derivadas, entonces las únicas ecuaciones de campo que son de segundo orden o menor son las ecuaciones de Einstein-Hilbert.

Por lo anterior, para poder construir una teoría de gravedad con ecuaciones de campo que difieran de las de RG debemos de relajar una o varias hipótesis que se enuncian en el teorema. Las condiciones son las siguientes:

- Incluir nuevos campos (Tensoriales, Vectoriales, Escalares).
- Aceptar derivadas mayores al orden dos de la métrica en las ecuaciones de campo.
- Trabajar en un espacio con una dimensión superior a cuatro.
- Aceptar acoplamientos no mínimos con los campos de materia.
- Violar la condición de localidad.

Como veremos en la siguiente sección, para teorías $f(R)$ se trabaja con la segunda condición y se aceptan derivadas de orden superior en las ecuaciones de campo.

1.2. Teorías $f(R)$

Las teorías $f(R)$ aparecieron por primera vez en la década de los setentas del siglo XX y es de las teorías de gravedad modificada más simples y estudiadas [14–17], pero no hay que subestimarlas, la gravedad $f(R)$ (como la estaremos llamando de ahora en adelante) ha demostrado poder reproducir distintos fenómenos físicos (época de aceleración, época de inflación) al igual que teorías de gravedad modificada de mayores dimensiones o usando otros campos.

La gravedad $f(R)$ es una extensión de la Relatividad General donde modificamos el Lagrangiano en la acción Einstein-Hilbert asumiendo que el campo gravitacional no es exactamente lineal en el escalar de curvatura R . La gravedad $f(R)$ entonces asume una función arbitraria que depende de R .

Los modelos de gravedad $f(R)$ han tenido buenos resultados en diferentes problemas en la Cosmología Estándar por lo cual su consideración sigue vigente, uno de ellos es en la época de inflación del universo y el modelo que ha pasado las pruebas ha sido el modelo de Starobinsky dado por la función $f(R)=R+\alpha R^2$ [18]. También en la época de expansión acelerada hay varios modelos que siguen satisfaciendo las cotas que provienen de datos cosmológicos y que estaremos poniendo a prueba en este trabajo, estos modelos son el modelo exponencial [4], el modelo de Starobinsky [5] (distinto al de la época de inflación) y el modelo de Hu-Sawicki [6].

1.2.1. Formalismo Métrico

Actualmente existen dos maneras distintas de formular las ecuaciones de campo de una teoría de gravedad $f(R)$, la primera de ellas se deriva del uso del formalismo métrico y la segunda proviene de la utilización del formalismo de Palatini. El primero asume que la acción es dependiente solamente de la métrica y la derivación de las ecuaciones de campo es obtenida a través de variaciones de ella, mientras que en el formalismo de Palatini la acción depende de la métrica y de la conexión las cuales son independientes y sus correspondientes ecuaciones de campo se obtienen realizando su variación con respecto a ambas variables independientes. En este trabajo usaremos el

Formalismo Métrico:
Partimos de la acción

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M, \quad (1.18)$$

y realizamos la variación de dicha acción con respecto a la métrica

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x (\delta \sqrt{-g} f(R) + \sqrt{-g} \delta f(R)) + \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M), \quad (1.19)$$

ahora, como la segunda integral en la ecuación (1.19) es idéntica a la encontrada en las ecuaciones de campo de Einstein usuales, ya conocemos su resultado y por lo tanto trabajaremos solamente con la primera integral.

El primer término de la primera integral ya fue obtenido antes [19] ya que la variación del determinante de la métrica es

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.20)$$

Ahora, para el segundo término, la variación de $f(R)$ es

$$\delta f(R) = f'(R) \delta R, \text{ con } f'(R) = \frac{df}{dR}, \quad (1.21)$$

recordando que el escalar de curvatura esta definido como $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, tenemos que la variación es

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \nabla_\sigma (g^{\mu\nu} (\delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma) - g^{\mu\sigma} (\delta \Gamma_{\mu\gamma}^\gamma)), \quad (1.22)$$

ahora, realizamos la variación de los símbolos de Christoffel

$$\delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma = \frac{1}{2} \delta g^{\sigma\gamma} (\partial_\nu g_{\gamma\mu} + \partial_\mu g_{\gamma\nu} - \partial_\gamma g_{\nu\mu}) + \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} (\partial_\nu \delta g_{\gamma\mu} + \partial_\mu \delta g_{\gamma\nu} - \partial_\gamma \delta g_{\nu\mu}), \quad (1.23)$$

a continuación escribimos las derivadas parciales en términos de la derivada covariante,

$$\nabla_\gamma \delta g_{\mu\nu} = \partial_\gamma \delta g_{\mu\nu} - \Gamma_{\gamma\mu}^\sigma \delta g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\gamma\nu}^\sigma \delta g_{\mu\sigma}, \quad (1.24)$$

sustituyendo lo anterior en (1.23) y por las condiciones de frontera $\delta g^{\mu\nu} = 0$ entonces

$$\delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} (\nabla_\nu \delta g_{\gamma\mu} + \nabla_\mu \delta g_{\gamma\nu} - \nabla_\gamma \delta g_{\nu\mu}), \quad (1.25)$$

de (1.25) obtenemos,

$$\delta \Gamma_{\mu\gamma}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} (\nabla_\mu \delta g_{\sigma\gamma}), \quad (1.26)$$

en (1.26) introducimos la expresión $\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta}$, esto produce el siguiente resultado,

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma &= \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} (\nabla_\nu (-g_{\mu\alpha} g_{\gamma\beta} \delta g^{\alpha\beta}) + \nabla_\mu (-g_{\nu\alpha} g_{\gamma\beta} \delta g^{\alpha\beta}) - \nabla_\gamma (-g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} \delta g^{\alpha\beta})) \\ &= -\frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} (g_{\mu\alpha} g_{\gamma\beta} \nabla_\nu (\delta g^{\alpha\beta}) + g_{\nu\alpha} g_{\gamma\beta} \nabla_\mu (\delta g^{\alpha\beta}) - g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} \nabla_\gamma (\delta g^{\alpha\beta})) \\ &= -\frac{1}{2} (g_{\mu\alpha} \delta_\beta^\sigma \nabla_\nu (\delta g^{\alpha\beta}) + g_{\nu\alpha} \delta_\beta^\sigma \nabla_\mu (\delta g^{\alpha\beta}) - g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} g^{\gamma\sigma} \nabla_\gamma (\delta g^{\alpha\beta})) \\ &= -\frac{1}{2} (g_{\mu\gamma} \nabla_\nu (\delta g^{\sigma\gamma}) + g_{\nu\gamma} \nabla_\mu (\delta g^{\sigma\gamma}) - g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} \nabla^\sigma (\delta g^{\alpha\beta})), \end{aligned} \quad (1.27)$$

de igual forma, de (1.27), tenemos,

$$\delta\Gamma_{\mu\gamma}^{\gamma} = -\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\nabla_{\mu}(\delta g^{\alpha\beta}), \quad (1.28)$$

con (1.27) y (1.28) tenemos,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}) - g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma_{\mu\gamma}^{\gamma}) &= -\frac{1}{2}(g^{\mu\nu}g_{\mu\gamma}\nabla_{\nu}(\delta g^{\sigma\gamma}) + g^{\mu\nu}g_{\nu\gamma}\nabla_{\mu}(\delta g^{\sigma\gamma}) - g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\nabla^{\sigma}(\delta g^{\alpha\beta}) \\ &\quad - g^{\mu\sigma}g_{\alpha\beta}\nabla_{\mu}(\delta g^{\alpha\beta})) \\ &= -\frac{1}{2}(\nabla_{\gamma}(\delta g^{\sigma\gamma}) + \nabla_{\gamma}(\delta g^{\sigma\gamma}) - g_{\alpha\beta}\nabla^{\sigma}(\delta g^{\alpha\beta}) - g_{\alpha\beta}\nabla^{\sigma}(\delta g^{\alpha\beta})) \\ &= -\frac{1}{2}(2\nabla_{\gamma}(\delta g^{\sigma\gamma}) - 2g_{\alpha\beta}\nabla^{\sigma}(\delta g^{\alpha\beta})), \end{aligned} \quad (1.29)$$

por lo tanto,

$$g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}) - g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma_{\mu\gamma}^{\gamma}) = g_{\alpha\beta}\nabla^{\sigma}(\delta g^{\alpha\beta}) - \nabla_{\gamma}(\delta g^{\sigma\gamma}), \quad (1.30)$$

sustituyendo (1.30) en (1.22) obtenemos,

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \nabla_{\mu}g_{\mu\nu}\nabla^{\mu}(\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}(\delta g^{\mu\nu}), \quad (1.31)$$

definimos $\square \equiv \nabla_{\sigma}\nabla^{\sigma}$ y sustituimos en (1.19) obteniendo,

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}f(R) + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square(\delta g^{\mu\nu}) \right. \\ &\quad \left. - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}(\delta g^{\mu\nu}))f'(R) \right) + \int \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \end{aligned} \quad (1.32)$$

considerando que la acción permanece invariante ante variaciones de la métrica de lo anterior obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + (R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu})f'(R) \right) \\ &\quad + \int \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \end{aligned} \quad (1.33)$$

con lo anterior concluimos que

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + (R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu})f'(R) = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.34)$$

con

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.35)$$

Las ecuaciones (1.34) son las ecuaciones de campo en gravedad $f(R)$, podemos notar que son una generalización de las ecuaciones de campo en RG, ya que si hacemos $f(R) = R$ entonces $f'(R) = 1$ y sustituyendo vemos que el tercero y cuarto termino se anulan y obtenemos, como caso particular, a la Relatividad General.

De las ecuaciones de campo en teorías $f(R)$ hemos obtenido nuevos términos asociados a derivadas de orden superior del escalar de Ricci tal como esperábamos al violar uno de los argumentos del teorema de Lovelock. A continuación, debemos verificar si estas ecuaciones de campo, más generales a las de RG, satisfacen que la divergencia de la parte de mano derecha de (1.34) es igual a cero, es decir, implican la conservación del

tensor de energía momento asociado a la materia. Para comprobar lo anterior aplicamos la derivada covariante del lado derecho de la ecuación (1.34)

$$\begin{aligned}
& \nabla^\mu \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + (R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)f' \right) = \\
& \nabla^\mu \left(R_{\mu\nu}f' - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) \right) + \nabla^\mu \left((g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)f' \right) = \\
& f'\nabla^\mu R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f' - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\mu f(R) + (g_{\mu\nu}\nabla^\mu\square - \nabla^\mu\nabla_\mu\nabla_\nu)f' = \\
& f'\nabla^\mu R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f' - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f'\nabla^\mu R + (\nabla_\nu\square - \square\nabla_\nu)f' = \\
& f'\nabla^\mu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) + R_{\mu\nu}\nabla^\mu f' + (\nabla_\nu\square - \square\nabla_\nu)f' = 0.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

La igualdad nula en el último renglón de la expresión (1.36) se ha obtenido usando que $\nabla^\mu(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = 0$ y la identidad $(\square\nabla_\nu - \nabla_\nu\square)f'(R) = R_{\mu\nu}\nabla^\mu f'(R)$ [20], por lo tanto, el tensor de energía-momento en teorías $f(R)$ también se conserva al igual que en RG.

Debido a que hemos aceptado derivadas de orden superior de la métrica en las ecuaciones de campo, es clara la aparición de más términos que en RG. Una forma de notar la diferencia entre RG y esta teoría de gravedad modificada es tomando la traza de las ecuaciones de campo (1.34).

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} \left(f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square f'(R) - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) \right) &= 8\pi GT_{\mu\nu}, \\
f'(R)R - 2f(R) + 3\square f'(R) &= 8\pi GT.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Como podemos ver, a diferencia de RG donde el escalar de curvatura de Ricci esta determinado de forma algebraica con la traza del tensor de energía-momento ($R = -8\pi GT$), en el caso de la gravedad modificada $f(R)$, la relación entre R y T pasa a ser de forma diferencial tal como se ve en (1.37). De lo anterior, podemos observar que las ecuaciones de campo en $f(R)$ admiten una variedad mayor de soluciones a las obtenidas en RG, ya que $f'(R)$ es un nuevo grado de libertad. Es posible reacomodar las ecuaciones de campo (1.34) para darle una forma parecida a RG,

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &\equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \\
&= \frac{8\pi GT_{\mu\nu}}{f'(R)} + g_{\mu\nu} \frac{f(R) - Rf'(R)}{2f'(R)} + \frac{\nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\square f'(R)}{f'(R)}, \\
G_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{f'(R)} \left(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(eff)} \right),
\end{aligned} \tag{1.38}$$

donde

$$T_{\mu\nu}^{(eff)} \equiv \frac{1}{8\pi G} \left(g_{\mu\nu} \frac{f(R) - Rf'(R)}{2} + \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\square f'(R) \right), \tag{1.39}$$

es un tensor que llamaremos tensor de energía-momento efectivo que reescribiremos más adelante.

1.2.2. Ecuaciones de Friedmann en Gravedad $f(R)$

Lo siguiente que tenemos que encontrar es la generalización de las ecuaciones de Friedmann en las teorías de gravedad $f(R)$, para ello escribimos las ecuaciones de campo (1.34) usando la métrica FLWR considerando un espacio plano, es decir, $k = 0$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t)dX^2, \tag{1.40}$$

con ello,

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1, \\ g_{ii} &= a^2(t), \\ g_{ij} &= 0 \quad \text{con } i \neq j, \end{aligned} \tag{1.41}$$

el determinante del tensor métrico es, en este caso,

$$g = -a^6(t) \Rightarrow \sqrt{-g} = a^3(t), \tag{1.42}$$

definiendo al parámetro de Hubble como $H \equiv \dot{a}/a$, los componentes del tensor de Ricci son

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3(H^2 + \dot{H}), \\ R_{0i} &= R_{i0} = R_{ij} = 0 \quad \text{con } i \neq j, \\ R_{ii} &= a^2(t)(3H^2 + \dot{H}) \quad \text{con } i \neq 0, \end{aligned} \tag{1.43}$$

y el escalar de Ricci está dado por,

$$R = 6(2H^2 + \dot{H}). \tag{1.44}$$

Ahora, recordando que $f(R)$ es una función escalar, para esta subsección usaremos $F(R) = f'(R)$ por notación, con ello calculamos $\square F(R)$ como sigue,

$$\begin{aligned} \square F(R) &= \nabla_\sigma \nabla^\sigma F(R) \\ &= g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \nabla_\sigma F(R) \\ &= g^{\rho\sigma} \nabla_\rho (\partial_\sigma F(R)) \\ &= g^{\rho\sigma} (\partial_\rho \partial_\sigma F(R) - \Gamma_{\rho\sigma}^\gamma \partial_\gamma F(R)) \end{aligned} \tag{1.45}$$

El contenido en el universo en la métrica FLRW se restringe a comportarse como un fluido perfecto, es decir, no tiene viscosidad ni conduce calor, y tiene la forma,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \tag{1.46}$$

donde $u_\mu = (-1, 0, 0, 0)$ es la cuadrivelocidad del fluido en coordenadas comóviles, ρ (la densidad de energía) y P (la presión) son funciones del tiempo cósmico t . Introduciendo todo lo anterior en las ecuaciones de campo (1.34) y recordando que

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} T_\nu^\mu \quad \text{con } T_\mu^\nu = \text{diagonal}(-\rho, P, P, P), \tag{1.47}$$

escribimos la componente temporal-temporal que es,

$$F(R)R_{00} - \frac{1}{2}f(R)g_{00} + g_{00}\square F(R) - \nabla_0 \nabla_0 F(R) = 8\pi G g_{00} T_0^0 \tag{1.48}$$

a continuación, calculamos los siguientes términos de (1.48),

$$\begin{aligned} g_{00}\square F(R) &= (g_{00}) (g^{\rho\sigma} (\partial_\rho \partial_\sigma F(R) - \Gamma_{\rho\sigma}^\gamma \partial_\gamma F(R))) \\ &= (-1) (g^{00} \partial_0 \partial_0 F(R) + g^{ij} \partial_i \partial_j F(R) - g^{\rho\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^\gamma \partial_\gamma F(R)) \\ &= (-1) (-\partial_0 \partial_0 F(R) - g^{ii} \Gamma_{ii}^0 \partial_0 F(R)) \\ &= \ddot{F}(R) + 3H\dot{F}(R), \end{aligned} \tag{1.49}$$

y,

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= -3(H^2 + \dot{H}) \\
 &= -3(2H^2 + \dot{H} - H^2) \\
 &= -3\left(\frac{1}{6}R - H^2\right) \\
 &= -\frac{1}{2}R + 3H^2,
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

en el resultado (1.49) usamos que el escalar de curvatura R no depende de las coordenadas espaciales, y con ello la expresión (1.48) se escribe como,

$$F(R) \left(3H^2 - \frac{1}{2}R\right) + \frac{1}{2}f(R) + 3H\dot{F}(R) = 8\pi G\rho, \tag{1.51}$$

y así, la primera ecuación de Friedmann es

$$3F(R)H^2 = \frac{1}{2}(F(R)R - f(R)) - 3H\dot{F}(R) + 8\pi G\rho, \tag{1.52}$$

ahora, para la segunda ecuación tenemos,

$$F(R)R_{ii} - \frac{1}{2}f(R)g_{ii} + g_{ii}\square F(R) - \nabla_i\nabla_i F(R) = 8\pi Gg_{ii}T_i^i, \tag{1.53}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
 g_{ii}\square F(R) &= (g_{ii}) (g^{\rho\sigma}(\partial_\rho\partial_\sigma F(R) - \Gamma_{\rho\sigma}^\gamma\partial_\gamma F(R))) \\
 &= a^2 \left(-\ddot{F}(R) - 3H\dot{F}(R)\right),
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

y,

$$\begin{aligned}
 \nabla_i\nabla_i F(R) &= \partial_i\partial_i F(R) - \Gamma_{ii}^\gamma\partial_\gamma F(R) \\
 &= -\Gamma_{ii}^0\partial_0 F(R) \\
 &= -a^2 H\dot{F}(R).
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

Entonces la ecuación (1.53) queda como

$$a^2 \left(3H^2 + \dot{H}\right) F(R) - \frac{a^2}{2}f(R) - 2a^2 H\dot{F}(R) - a^2 \ddot{F}(R) = 8\pi G a^2 P, \tag{1.56}$$

cancelando los a^2 obtenemos

$$\left(3H^2 + \dot{H}\right) F(R) - \frac{1}{2}f(R) - 2H\dot{F}(R) - \ddot{F}(R) = 8\pi G P \tag{1.57}$$

ahora despejando $(-1/2)f(R)$ de la primera ecuación de Friedmann (1.52) y sustituyendo en (1.57) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \dot{H}F + 3H^2F + 3H^2F - \frac{1}{2}FR + 3H\dot{F} - 2H\dot{F} - \ddot{F} &= 8\pi G(\rho + P) \\
 \dot{H}F + 6H^2F - \frac{1}{2}F6 \left(2H^2 + \dot{H}\right) + H\dot{F} - \ddot{F} &= 8\pi G(\rho + P),
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

de lo anterior obtenemos

$$-2\dot{H}F(R) = \ddot{F}(R) - H\dot{F}(R) + 8\pi G(\rho + P), \tag{1.59}$$

que es la segunda ecuación de Friedmann; con esta ecuación y junto a la ecuación (1.52) podemos determinar la dinámica de un universo plano FLRW cuya teoría de fondo es la gravedad modificada $f(R)$. De igual forma, para volver a las ecuaciones de Friedmann

que encontramos en RG simplemente necesitamos escoger $f(R) = R$ y obtendremos el resultado deseado.

Como mencionamos anteriormente, el tensor de energía-momento sigue siendo el mismo que en RG por lo cual se tiene la misma ecuación de conservación del fluido perfecto ya que probamos que este tensor se conserva en gravedad $f(R)$, esta ecuación es dada por,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\nu T_0^\nu \\ &= \partial_\nu T_0^\nu + \Gamma_{\nu\mu}^\nu T_0^\mu - \Gamma_{\nu 0}^\mu T_\mu^\nu \\ &= -\dot{\rho} - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P), \end{aligned} \quad (1.60)$$

obteniendo la ecuación de continuidad del fluido perfecto ya conocida en el modelo estándar en Cosmología

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \quad (1.61)$$

Un aspecto importante que aparece en la deducción de las ecuaciones cosmológicas en gravedad $f(R)$ son los nuevos términos que esta teoría ofrece que dependen solamente del escalar de Ricci; dependiendo el funcional del modelo $f(R)$ podemos tener distintos comportamientos y obtener fenómenos físicos como inflación o expansión acelerada; debido a ello existieron una gran cantidad de modelos propuestos que generaban dichos comportamientos. Para modelos que buscan obtener una expansión acelerada, los nuevos términos dados por las derivadas de orden superior del escalar de Ricci sustituyen la necesidad de una energía oscura y podemos darles un aspecto de fluido perfecto bastante similar tal como en cosmología estándar.

Para mostrar lo anterior, recordemos que escribimos la ecuación (1.39) como un tensor de energía-momento efectivo y, debido a que en general las teorías $f(R)$ son libres de divergencia, ese tensor de energía-momento efectivo también se conserva y su densidad de energía efectiva la obtenemos de la primera ecuación de Friedmann en gravedad $f(R)$ reescribiendo como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3F(R)} \left(\rho + \rho_{eff} F(R) \right), \quad (1.62)$$

donde

$$\rho_{eff} = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{RF(R) - f(R)}{2F(R)} - \frac{3H\dot{F}(R)}{F(R)} \right), \quad (1.63)$$

para la presión efectiva P_{eff} primero despejamos $8\pi G\rho$ de la ecuación (1.52) y sustituimos en la ecuación (1.59) obteniendo

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{8\pi G}{F(R)} \left(P + P_{eff} F(R) \right), \quad (1.64)$$

donde

$$P_{eff} = \frac{1}{8\pi GF(R)} \left(\ddot{F}(R) - \frac{RF(R) - f(R)}{2} + 2H\dot{F}(R) \right), \quad (1.65)$$

en el caso $\rho \rightarrow 0$ es fácil ver que en vacío las correcciones dadas por los términos efectivos de la curvatura se comportan como un fluido perfecto, donde el parámetro de estado ω_{eff} está dado por [16]

$$\omega_{eff} \equiv \frac{P_{eff}}{\rho_{eff}} = \frac{\ddot{F}(R) - \frac{RF(R) - f(R)}{2} + 2H\dot{F}(R)}{\frac{RF(R) - f(R)}{2} - 3H\dot{F}(R)}, \quad (1.66)$$

podemos comprobar que el término ω_{eff} puede ser -1, que es el caso atribuido a una energía oscura por constante cosmológica, si hacemos $f(R) = R - 2\Lambda$, con ello vemos que para modelos $f(R)$ que buscan generar comportamientos similares al modelo estándar, su forma funcional en algún punto deberá comportarse como el escalar de Ricci menos una constante y eso lo revisaremos a continuación.

1.2.3. Viabilidad de las Teorías $f(R)$

Para poder construir una teoría de gravedad es de suma importancia establecer las propiedades que esta teoría tiene que satisfacer para considerarse realmente viable. Estas propiedades incluyen desde requerimientos fundamentales, como la universalidad de la caída libre, así como ser compatible con diferentes observaciones que se relacionan a la propagación de la luz o a las órbitas de cuerpos masivos.

En el área de la cosmología, la teoría de gravedad usada debe dar una dinámica cosmológica correcta (ecuaciones de Friedmann), así como describir correctamente las distintas épocas cosmológicas requeridas para ajustar las observaciones; debido a ello, para la época tardía del universo se proponen modificaciones pequeñas para el escalar de curvatura R , por lo que modelos del tipo $f(R) = R - \alpha/R^n$ (con $\alpha > 0$ y $n > 0$) fueron propuestos para evitar el uso de una componente de energía oscura, y aunque lograban proporcionar la aceleración necesaria a tiempos tardíos, estos no satisfacen las condiciones físicas requeridas por los fenómenos gravitatorios a nivel local (sistema solar, galaxias, etc.) [21, 22].

Por lo anterior, resumimos algunos de los puntos necesarios que toda teoría de gravedad, en este caso la gravedad $f(R)$, debe cumplir

- Tener un límite correcto de campo gravitacional débil a niveles Newtonianos como Post-Newtonianos para ser compatible con diferentes observaciones a nivel del Sistema Solar.
- Ser estable a nivel clásico y semi-clásico, para cumplir pruebas de estabilidad de materia o en espacios donde domina la constante cosmológica (espacios de de Sitter), así como en objetos compactos como por ejemplo agujeros negros.
- No contener campos fantasmas (campos clásicos con densidad de energía negativa).
- Admitir un problema de valor inicial bien puesto.

En esta sección mostraremos las condiciones de viabilidad físicas que se obtienen al aplicar el primer y el tercer punto a los modelos de gravedad $f(R)$. Para el segundo y cuarto punto, revisar [16, 23, 24].

Para aplicar el límite newtoniano a la gravedad $f(R)$ es recomendable pasar a su teoría escalar-tensorial equivalente para relacionar más fácilmente con los campos y potenciales gravitacionales clásicos que ya conocemos. Cabe aclarar que la teoría equivalente escalar-tensorial es distinta dependiendo del formalismo usado para trabajar con las teorías de gravedad $f(R)$ que pueden ser el formalismo métrico, de Palatini o métrico-afín.

En gravedad $f(R)$ partiendo del formalismo métrico, podemos reescribir a la acción en la ecuación (1.18) como [25, 26]

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [\psi R - U] + S^{(m)} \quad (1.67)$$

donde

$$\psi = f' \quad (1.68)$$

$$U = Rf' - f \quad (1.69)$$

se puede ver fácilmente que la acción (1.67) coincide con la acción (1.18) dadas las definiciones anteriores; ahora para trabajar el límite del campo débil es conveniente cambiar de marco y pasar del marco de Jordan al marco de Einstein esto debido a que en dicho marco es fácil notar que la dinámica de la gravedad $f(R)$ es equivalente a las ecuaciones de Einstein-Hilbert acopladas mínimamente a un campo escalar.

Para cambiar del marco de Jordan al marco de Einstein realizamos una transformación conformal, que no es más que un reescalamiento de la métrica de la siguiente manera

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad (1.70)$$

donde la tilde representará de ahora en adelante a las cantidades en el marco de Einstein. El escalar de curvatura de Ricci en el marco de Jordan se relaciona con el escalar de curvatura de Ricci en el marco de Einstein como sigue [19]:

$$R = \Omega^2 (\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\omega_{,\mu}\omega_{,\nu}), \quad (1.71)$$

donde

$$\omega_\mu \equiv \frac{\partial_\mu \Omega}{\Omega}, \quad \tilde{\square}\omega \equiv \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\partial_\mu(\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu\omega). \quad (1.72)$$

Usando lo anterior y la relación $\sqrt{-g} = \Omega^{-4}\sqrt{-\tilde{g}}$, la acción (1.67) se transforma en

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \frac{1}{16\pi G} \left[\psi \Omega^{-2} (\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\omega_{,\mu}\omega_{,\nu}) - \Omega^{-4} U \right] + S^{(m)}, \quad (1.73)$$

para obtener una acción lineal en $\tilde{R}$ se escoge que

$$\Omega^2 = \psi, \quad (1.74)$$

con $\psi > 0$ para no tener singularidades en la transformación conforme, por lo anterior

$$\omega_\mu = \frac{\partial_\mu \Omega}{\Omega} = \frac{\partial_\mu \psi}{2\psi}. \quad (1.75)$$

La integral $\int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\square}\omega$ desaparece usando el teorema de Gauss por la definición en (1.72). Con todo lo anterior la acción en el marco de Einstein obtiene la siguiente forma

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{R} - \frac{3}{2\psi^2} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi \tilde{g}^{\mu\nu} - \mathcal{V} \right] + S^{(m)}, \quad (1.76)$$

que es similar a la forma de la acción en RG acoplado a un campo escalar y donde el potencial es

$$\mathcal{V} = \frac{R\psi - f(R)}{\psi^2}, \quad (1.77)$$

variando dicha acción con respecto a $\tilde{g}_{\mu\nu}$ y ψ llegamos a las siguientes ecuaciones de campo

$$\tilde{G}_{\mu\nu} - \frac{3}{2\psi^2} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi + \tilde{g}_{\mu\nu} \left(\frac{3}{4\psi^2} \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi + \mathcal{V} \right) = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.78)$$

y la traza sería

$$3\tilde{\square}\psi + \mathcal{V}_p = 8\pi G T, \quad (1.79)$$

donde

$$\mathcal{V}_p \equiv \psi R - 2f(R) \quad (1.80)$$

otro camino para encontrar las ecuaciones de campo anteriores es haciendo los cambios correspondientes de la métrica y el escalar ψ en la ecuación de campo que reescribimos en (1.38).

Para trabajar el campo débil en gravedad $f(R)$, consideremos fluctuaciones locales en un fondo caracterizado por una curvatura R_0 y densidad ρ_0 . Por local nos referimos a que la escala de la distancia de las fluctuaciones es pequeña con respecto a la escala de la distancia característica asociada con la curvatura de fondo, de esa forma podemos considerar el límite del espacio plano.

Expandimos en potencias de las fluctuaciones bajo la aproximación del campo débil. Descomponemos las cantidades ψ , $\tilde{g}_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}$ en su parte de fondo y su parte perturbada como sigue [25]

$$\begin{aligned} \psi &\equiv \psi_0(1 + \delta_\psi), \\ \tilde{g}_{\mu\nu} &\equiv \psi_0(g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu}) = \psi_0(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}), \\ T_{\mu\nu} &\equiv T_{\mu\nu}^0 + \delta T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.81)$$

como mencionamos antes tomamos como valor de fondo de la métrica el espacio plano $g_{\mu\nu}^0 \approx \eta_{\mu\nu}$. Con lo anterior a primer orden la ecuación de la traza (1.79) solo depende de las fluctuaciones δ_ψ con ello

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \delta_\psi + M_\psi^2 \delta_\psi = -\frac{8}{3} \pi G_{eff} \delta T, \quad (1.82)$$

donde $\delta T \equiv \nabla^{\mu\nu} \delta T_{\mu\nu}$, definimos la constante gravitacional efectiva de Newton como $G_{eff} \equiv G/\psi_0$ y

$$M_\psi^2 \equiv -\frac{1}{3} \mathcal{V}_p' = \left(\frac{f'(R_0)}{f''(R_0)} - R_0 \right) = \frac{R_0}{3} \left(\frac{1}{m(R_0)} - 1 \right) \quad (1.83)$$

donde $m(R_0) = R_0 f''(R_0)/f'(R_0)$. En el caso de un universo homogéneo e isotrópico donde δ_ψ es una función solamente del tiempo t , la ecuación (1.82) se reduce a

$$\ddot{\delta}_\psi + M_\psi^2 \delta_\psi = -\frac{8}{3} \pi G_{eff} \delta T, \quad (1.84)$$

para los modelos donde la desviación del modelo Λ CDM es pequeña se tiene que $m(R_0) \ll 1$ con ello $|M_\psi^2|$ es mucho mayor que R_0 . Si $M_\psi^2 < 0$, la perturbación δ_ψ presenta violentas inestabilidades por campos fantasma. Por lo tanto la condición $M_\psi^2 \simeq f'(R_0)/(3f''(R_0)) > 0$ es necesaria para la estabilidad en perturbaciones cosmológicas. Ahora dada la fuente de materia δT uno puede sin ambigüedad determinar δ_ψ a orden lineal. Por lo cual trabajamos en el caso de una distribución de materia con simetría esférica con densidad constante $\delta T = -\delta T_{00} = -\rho$, que se extiende sobre un radio r_c y densidad que se desvanece afuera del cuerpo. El caso estático y con simetría esférica dentro del cuerpo es

$$\nabla^2 \delta_\psi - M_\psi^2 \delta_\psi = -\frac{8}{3} \pi G_{eff} \rho. \quad (1.85)$$

Afuera del cuerpo el lado derecho de la ecuación anterior se desvanece. Con ello la solución de la perturbación δ_ψ para $M_\psi^2 > 0$ dentro y fuera del cuerpo está dada por

$$(\delta_\psi)_{r>r_c} = \mathcal{C}_1 \frac{e^{-M_\psi^2 r}}{r} + \mathcal{C}_2 \frac{e^{M_\psi^2 r}}{r}, \quad (1.86)$$

$$(\delta_\psi)_{r < r_c} = C_3 \frac{e^{-M_\psi^2 r}}{r} + C_4 \frac{e^{M_\psi^2 r}}{r} + \frac{8\pi G_{eff} \rho}{3M_\psi^2}, \quad (1.87)$$

donde C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes de integración y podemos determinarlos imponiendo las condiciones de frontera apropiadas. Primeramente tenemos la condición de que ψ tome el valor de fondo ψ_0 en el infinito, con ello requerimos que $\delta_\psi \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$. Esto determina que C_2 sea cero. Dentro del cuerpo necesitamos que δ_ψ sea regular en el origen y con ello obtenemos que $C_3 = -C_4$. Por ultimo, para determinar las ultimas dos constantes igualamos ambas soluciones utilizando condiciones de frontera para $r = r_c$

$$\begin{aligned} (\delta_\psi)_{r > r_c}(r_c) &= (\delta_\psi)_{r < r_c}(r_c), \\ (\delta_\psi)'_{r > r_c}(r_c) &= (\delta_\psi)'_{r < r_c}(r_c), \end{aligned} \quad (1.88)$$

si $M_\psi r_c \ll 1$ obtenemos las siguientes soluciones [25]

$$(\delta_\psi)_{r > r_c} \simeq \frac{2G_{eff}M}{3r} e^{-M_\psi r}, \quad (1.89)$$

$$(\delta_\psi)_{r < r_c} \simeq \frac{4\pi G_{eff}\rho}{3} \left(r_c^2 - \frac{r^2}{3} \right), \quad (1.90)$$

donde $M = 4\pi\rho r_c^3/3$ es la masa total de la distribución. Con lo anterior hemos encontrado las soluciones a primer orden del grado de libertad escalar extra ψ contenida en la métrica. Las soluciones de primer orden para las fluctuaciones $h_{\mu\nu}$ de $\tilde{g}_{\mu\nu}$ se obtienen de la linealización de (1.78) dando como resultado las mismas ecuaciones a las halladas en RG pero con una constante gravitacional de Newton reescalada

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^{(1)} = 8\pi G_{eff} \delta T_{\mu\nu}, \quad (1.91)$$

así para una distribución de masa estática y simétricamente esférica encontramos el resultado usual

$$h_{00} \simeq \frac{2G_{eff}M}{r}, \quad (1.92)$$

$$h_{ij} \simeq \delta_{ij} \frac{2G_{eff}M}{r}. \quad (1.93)$$

Ahora podemos escribir el resultado para la métrica actual

$$g_{\mu\nu} = \frac{\tilde{g}_{\mu\nu}}{\psi} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \delta_\psi \eta_{\mu\nu}, \quad (1.94)$$

en el caso de un escalar con masa pequeña, $M_\psi r_s \ll 1$, encontramos que los componentes (00) e (ii) de la métrica afuera de la distribución son

$$g_{00} \simeq -1 + \frac{2G_{eff}M}{r} + \frac{2G_{eff}M}{3r} e^{-M_\psi r}, \quad (1.95)$$

$$g_{ii} \simeq 1 + \frac{2G_{eff}M}{r} - \frac{2G_{eff}M}{3r} e^{-M_\psi r}, \quad (1.96)$$

y la métrica sería

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu} \\ &\simeq - \left(1 - \frac{2G_{eff}M}{r} - \frac{2G_{eff}M}{3r} e^{-M_\psi r} \right) dt^2 + \left(1 + \frac{2G_{eff}M}{r} - \frac{2G_{eff}M}{3r} e^{-M_\psi r} \right) dx^2, \end{aligned} \quad (1.97)$$

con lo anterior identificamos los potenciales en el marco de Jordan

$$\Phi = \frac{2G_{eff}M}{r} + \frac{2G_{eff}M}{3r}e^{-M_\psi r}, \quad (1.98)$$

$$\Psi = \frac{2G_{eff}M}{r} - \frac{2G_{eff}M}{3r}e^{-M_\psi r}, \quad (1.99)$$

de lo anterior y de la ecuación de campo (1.91) para que la constante gravitacional efectiva de Newton que definimos tenga el signo correcto, es decir que la gravedad tenga la propiedad de ser atractiva, debemos establecer que $\psi_0 = f'(R_0) > 0$, con ello para que la masa asociada al potencial no presente valores negativos (campos fantasma) como mencionamos anteriormente establecimos que $M_\psi^2 \simeq f'(R_0)/(3f''(R_0)) > 0$ entonces $f''(R_0) > 0$ debe cumplirse [27].

El parámetro post-Newtoniano γ establece cuanta curvatura espacial g_{ij} es producida por objetos masivos, como sabemos la luz se desvía cerca de un objeto masivo debido a su interacción gravitacional y usando los potenciales gravitatorios que encontramos podemos conocer la diferencia que tiene esta teoría con la RG, y se define como

$$\gamma \equiv \frac{\Psi}{\Phi} = \frac{3 - e^{-M_\psi r}}{3 + e^{-M_\psi r}}. \quad (1.100)$$

Ahora hay que revisar algunas condiciones de frontera asintóticas relacionadas con la curvatura de fondo, para ello vemos que la variación del escalar de curvatura es

$$\delta R = \frac{\psi_0}{f''(R_0)}\delta\psi = \frac{f'(R_0)}{f''(R_0)}\delta\psi \quad (1.101)$$

donde la validez de la expansión lineal anterior requiere que $\delta R \ll R_0$, por la condición anterior tenemos $\delta\psi \ll m(R_0)$. Usando el resultado que encontramos para $\delta\psi$ cuando $r = r_c$ tenemos $\delta\psi \simeq 2G_{eff}M_c/3r_c$ y por lo tanto la condición finalmente es

$$m(R_0) \gg \Phi_c, \quad (1.102)$$

donde $\Phi_c \equiv G_{eff}M_c/r_c$ es el potencial gravitacional en la superficie del cuerpo. Como mencionamos antes, cuando la desviación del modelo estándar es pequeña tenemos $m \ll 1$ y con ello $M_\psi^2 \simeq R_0/(3m(R_0))$ y $R \sim 8\pi G\rho$, entonces

$$M_\psi^2 r_c \sim \frac{\phi_c}{m(R_0)} \ll 1, \quad (1.103)$$

por lo tanto el análisis lineal realizado cumple con las condiciones asintóticas con las fluctuaciones de la curvatura de fondo. Ahora si consideramos el parámetro post-Newtoniano γ para una distancia r cercana a r_c obtenemos $\gamma \simeq 1/2$, lo cual no es compatible por los experimentos a nivel sistema solar que se tienen actualmente, donde las mediciones del proyecto espacial Cassini [28] reportan que la desviación del parámetro γ del valor en RG, donde para RG $\gamma = 1$, es

$$|\gamma - 1| < 2.3 \times 10^{-5}, \quad (1.104)$$

por lo tanto la gravedad $f(R)$ con un escalar con masa ligera, $M_\psi r_c \ll 1$, no es compatible con las restricciones de gravedad local. En regiones de alta densidad como lo son objetos compactos como el Sol o la Tierra, la condición $\delta R \ll R_0$ y el análisis lineal hecho anteriormente no se cumplen. En esta región no lineal en la cual δR es mayor al valor de fondo R_0 se necesita de un mecanismo para ocultar la presencia de un escalar masivo en una región de alta densidad, este mecanismo es conocido como Mecanismo

Camaleón [29–31].

Para trabajar con el mecanismo camaleón, introducimos un nuevo campo escalar ϕ definido como

$$\phi \equiv -\sqrt{\frac{3}{16\pi G}} \ln f'(R), \quad (1.105)$$

con este campo escalar la acción en el marco de Einstein queda de la siguiente forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\tilde{R}}{16\pi G} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \tilde{g}^{\mu\nu} - V(\phi) \right] + S^{(m)}, \quad (1.106)$$

donde

$$V(\phi) = \frac{Rf'(R) - f(R)}{16\pi G f'^2(R)}, \quad (1.107)$$

el reescalamiento de la métrica de un marco a otro es $g_{\mu\nu} = A^2 \tilde{g}_{\mu\nu}$ con $A^2 = (f'(R))^{-1}$ y con la definición del campo escalar ϕ obtenemos

$$A(\phi) = e^{\sqrt{\frac{4\pi G}{3}} \phi}, \quad (1.108)$$

conocido como la función de acoplamiento, debido a que el mecanismo camaleón usa la relación del acoplamiento entre el campo escalar y los campos de materia; es buen momento de aclarar que la función de acoplamiento se asume como una función débil del campo escalar ϕ y así las perturbaciones en la métrica son pequeñas en cada marco y que al pasar del marco de Jordan al campo de Einstein con el reescalamiento de la métrica pasamos de tener un tensor de energía-momento que es conservado covariantemente $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ a uno que no lo es en el marco de Einstein $\tilde{\nabla}^\mu \tilde{T}_{\mu\nu} \neq 0$, ambos tensores de energía-momento se relacionan entre sí como sigue [32]

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = A^6(\phi) T_{\mu\nu}, \quad (1.109)$$

lo que muestra que en el marco de Einstein el tensor de energía-momento está acoplado con la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, y esto se puede extender a las curvas geodésicas que siguen los componentes del universo en este marco, pero en el caso que estamos trabajando es con materia en sistemas astrofísicos que clasificamos típicamente como polvo no-relativista, en tal caso se puede mostrar que la materia no-relativista es conservada covariantemente en el marco de Einstein [32], con ello $\tilde{T}_{00} \approx -\tilde{\rho} \approx -\rho = T_{00}$; por lo anterior la densidad de energía de materia no-relativista no se ve afectada por el reescalamiento. Ahora, para el límite no-relativista la ecuación de la geodésica en el marco de Einstein es [33]

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial^i \Phi_N - \frac{\beta(\phi)}{M_{pl}} \partial^i \phi, \quad (1.110)$$

donde Φ_N es el potencial Newtoniano y $M_{pl}^{-2} = 8\pi G$ es la masa de Planck. El término extra podemos interpretarlo como una nueva fuerza o conocida en la literatura como la “quinta” fuerza

$$F_5 = -\frac{\beta(\phi)}{M_{pl}} \partial^i \phi, \quad (1.111)$$

donde

$$\beta(\phi) \equiv M_{pl} \frac{d \ln A}{d\phi}, \quad (1.112)$$

la ecuación de movimiento a través de la traza (1.79) en términos del nuevo campo escalar es

$$\square \phi = \frac{dV(\phi)}{d\phi} + \frac{\beta(\phi)}{M_{pl}} T = \frac{dV_{eff}}{d\phi}, \quad (1.113)$$

donde el potencial efectivo es

$$V_{eff} = V(\phi) + \rho \ln A(\phi), \quad (1.114)$$

en el mecanismo camaleón se trabaja con este nuevo potencial efectivo el cual se asume que posee un mínimo y que debido a la dependencia de la densidad que posee el potencial efectivo dicho mínimo ocurre a diferentes valores del campo escalar ϕ en diferentes regiones de densidad. Con ello requerimos que el campo escalar ϕ minimice el potencial efectivo en el interior de cualquier región de alta densidad. Consideremos un fondo cosmológico homogéneo con densidad ρ_0 y asumimos que el campo escalar se ha relajado para alcanzar el mínimo del potencial efectivo en dicho fondo $\phi_0 = \phi_{min}(\rho_0)$, entonces el campo escalar no carga con ninguna quinta fuerza cuando el potencial es $V_{eff}(\phi_0)$ y puede actuar como un término de constante cosmológica. Ahora, asumiendo también una pequeña perturbación de densidad $\delta\rho(r)$ con simetría esférica de radio r_c en la densidad de fondo, esta perturbación induce una perturbación en el campo escalar como

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi. \quad (1.115)$$

En el caso estático la ecuación de movimiento para el campo escalar es

$$\nabla^2 \phi = \frac{dV_{eff}}{d\phi}, \quad (1.116)$$

e insertando la perturbación la ecuación queda como

$$\nabla^2(\phi_0 + \delta\phi) = \frac{dV}{d\phi}(\phi_0 + \delta\phi) + \frac{\beta(\phi_0 + \delta\phi)}{M_{pl}}(\rho_0 + \delta\rho), \quad (1.117)$$

tenemos ahora dos límites que dependen de la amplitud de la perturbación. En el caso de una perturbación pequeña, se espera que la perturbación del campo escalar también sea pequeña $|\delta\phi| \ll \phi$. Entonces linealizando a la ecuación (1.117) tenemos

$$\nabla^2 \delta\phi \approx m_\phi^2 \delta\phi + \frac{\beta_0}{M_{pl}} \delta\rho(r), \quad (1.118)$$

con $m_\phi^2 \equiv d^2V(\phi_0)/d\phi^2$, donde para desviaciones pequeñas del modelo estándar tenemos $d^2V(\phi_0)/d\phi^2 \approx 1/(3f''(R_0))$ [31] con lo cual para que la masa del campo escalar sea positiva de nuevo la condición $f''(R_0) > 0$ debe cumplirse. En el límite $m_\phi r_c \ll 1$ podemos prescindir del termino de la masa del potencial y tenemos

$$\nabla^2 \delta\phi \approx \frac{\beta_0}{M_{pl}} \delta\rho(r). \quad (1.119)$$

En el otro limite donde la perturbación $\delta\rho$ es muy grande, el campo escalar debe alcanzar un nuevo mínimo y con ello la perturbación del campo escalar también es grande. En gravedad $f(R)$ el valor del campo escalar en el mínimo en regiones de alta densidad es mucho menor que en las de bajas densidades y con ello $|\delta\phi| \approx \phi_0$. En el interior de la perturbación de densidad al momento que el campo escalar consigue su nuevo mínimo el potencial efectivo se desvanece es decir

$$\frac{dV_{eff}}{d\phi} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{d\phi} \approx -\frac{\beta_0}{M_{pl}} \delta\rho(r), \quad (1.120)$$

con ello obtenemos

$$\nabla^2 \delta\phi \approx 0, \quad (1.121)$$

es decir el campo escalar queda atrapado dentro del nuevo mínimo para algún “radio de filtrado” $r < r_s$. Dentro de dicho radio r_s decimos que la región está protegida (screened) o desprotegida (unscreened) si $r \geq r_s$. En otra palabra el campo escalar alcanza un mínimo del potencial efectivo ($V''_{eff}(\phi_s) = 0$) y permanece ahí $\phi = \phi_s$ hasta un radio r_s , que al pasar dicha región entra en su segundo régimen donde comienza a dirigirse a su nuevo mínimo ϕ_0 de su valor de fondo, véase la Figura (1.4). Con ello combinando ambos límites tenemos [32]

$$\nabla^2 \delta\phi = \begin{cases} \beta_0 \delta\rho(r)/M_{pl} & r_s < r \ll m_\phi^{-1} \\ 0 & r < r_s \end{cases}, \quad (1.122)$$

Ahora integrando la ecuación (1.122) afuera de la región protegida encontramos

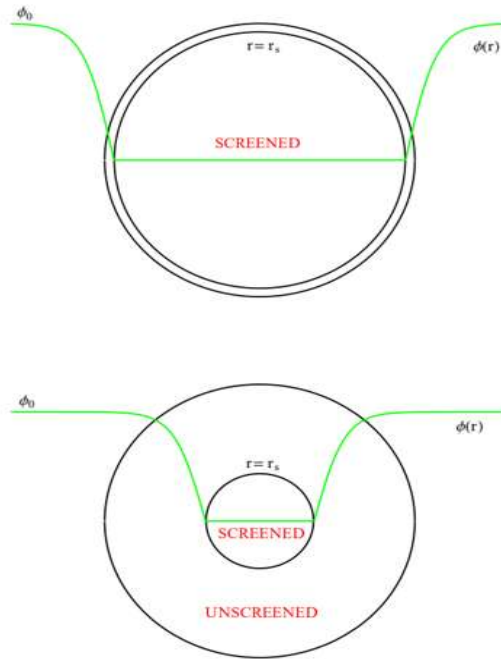


Figura 1.4: El campo escalar dentro de una densidad esférica. El campo alcanza un mínimo del potencial efectivo a una distancia r_s del centro. Lejos de la densidad el campo se aproxima asintóticamente al valor que minimiza el potencial efectivo de fondo, ϕ_0 . El objeto puede estar completamente protegido si $r_c \approx r_s$ (arriba) o parcialmente protegido (abajo) [32].

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\beta_0(\mathcal{M}(r) - \mathcal{M}(r_s))}{4\pi M_{pl} r^2}, \quad (1.123)$$

donde

$$\mathcal{M}(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \delta\rho(r') dr'; \quad \mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(r_c), \quad (1.124)$$

entonces la quinta fuerza es

$$F_\phi = \frac{2\beta_0^2 G(\mathcal{M}(r) - \mathcal{M}(r_s))}{r^2}, \quad (1.125)$$

con ello tenemos

$$\begin{aligned}
 F &= F_N + F_\phi \\
 &= \frac{d\Phi_N}{dr} + \frac{\beta_0}{M_{pl}} \frac{d\phi}{dr} \\
 &= \frac{GM(r)}{r^2} \left[1 + 2\beta_0^2 \left(1 - \frac{M(r_s)}{M(r)} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{1.126}$$

donde para gravedad $f(R)$ tenemos $\beta(\phi) = 1/\sqrt{6}$; en el caso $r_s \ll r_c$, la quinta fuerza es del orden de la fuerza gravitacional Newtoniana ($F_\phi/F_N \approx 1/3$) por ello se dice que el objeto está desprotegido. En el otro caso para que el objeto esté protegido se tiene $r_s \approx r_c$ entonces $F_\phi/F_N \ll 1$. En ese caso se dice que la quinta fuerza solo recibe contribuciones de la masa en un cascarón delgado afuera del radio de filtrado, ver Figura (1.5). A este fenomeno se le conoce como el “efecto del cascarón delgado” [31]. Ahora

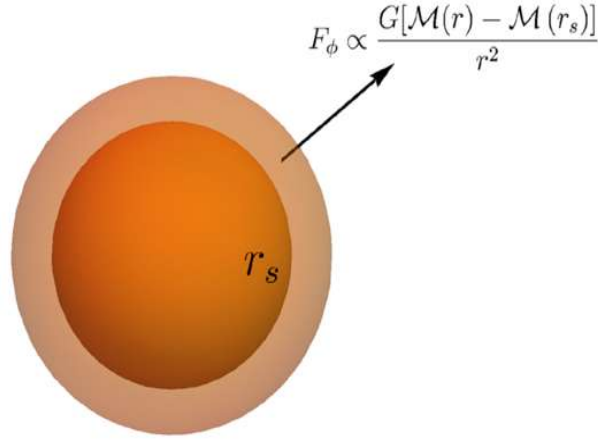


Figura 1.5: El efecto del cascarón delgado. La quinta fuerza F_ϕ solo recibe contribuciones de la masa en un cascarón delgado $r_s < r < r_c$ [31].

para poder determinar cuando un objeto está protegido o no, debemos de calcular r_s . Para ello integramos la ecuación (1.123) de r_s a ∞ para encontrar el campo escalar, y asumimos que $\phi_s \approx 0$ con ello obtenemos

$$\phi(r) \approx \begin{cases} 2\beta_0 M_{pl} \left[\Phi_N(r) - \Phi_N(r_s) + r_s^2 \Phi'_N(r_s) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_s} \right) \right] & r \geq r_s, \\ 0 & r < r_s, \end{cases} \tag{1.127}$$

tomando el limite $r/r_s \rightarrow \infty$ tenemos que el potencial newtoniano cumple $\Phi_N \rightarrow 0$ y el campo escalar debe aproximarse a su valor de fondo ϕ_0 por construcción, entonces encontramos la siguiente relación

$$\chi_0 \equiv \frac{\phi_0}{2\beta_0 M_{pl}} = -\Phi_N(r_s) - r_s \Phi'_N(r_s), \tag{1.128}$$

debido a que $\Phi_N < 0$ y $\Phi'_N > 0$, no existe solución cuando $\chi_0 > \Phi_N$, en ese caso $r_s = 0$ y se dice que el objeto está completamente desprotegido. Por lo tanto solo los objetos que cumplen $\chi_0 < \Phi_N$ pueden estar parcialmente o completamente protegidos. Este resultado nos da la manera de conocer el efecto del mecanismo camaleón usando un cascarón delgado a través de la estimación del potencial gravitacional en la superficie

del objeto. De la ecuación (1.105) podemos usar la relación que existe entre el campo escalar y la primera derivada con respecto de R del modelo $f(R)$ como

$$|f'(R_0) - 1| = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi_0}{M_{pl}} = \frac{2}{3} \chi_0, \quad (1.129)$$

con ello usando las observaciones de las distancias de protección de distintos objetos astronómicos podemos restringir distintos modelos en gravedad $f(R)$. Por ejemplo para el Sol se tiene $|f'(R_0) - 1| < 2 \times 10^{-6}$, otros resultados pueden verse en la Tabla (1.1).

Por lo tanto los modelos en gravedad $f(R)$ deben de cumplir varias cualidades para

Observación	$ f'(R_0) - 1 $
Misión Cassini ¹	$< 3 \times 10^{-2}$
Radiación monopolar de supernova	$< 10^{-2}$
Perfil de densidad de cústeres	$< 3.5 \times 10^{-3}$
Espectro de CMB	$< 10^{-3}$
Abundancias de cúmulos	$< 2.5 \times 10^{-5}$
Lentes Gravitacionales Fuertes	$< 2.6 \times 10^{-6}$

Cuadro 1.1: Comparación de los limites para los valores de $f'(R_0)$ para diferentes observaciones cosmológicas [34].

considerarse físicamente viables y satisfacer diferentes constricciones que las observaciones cosmológicas proporcionan. Las condiciones para que un modelo sea físicamente viable como aparece en la mayoría de la literatura actual se resumen en

- (i) $f_{,R} > 0$ para $R \geq R_0$, donde R_0 es el escalar de Ricci evaluado en el tiempo presente.
- (ii) $f_{,RR} > 0$ para $R \geq R_0$.
- (iii) $f(R) \rightarrow R - 2\Lambda$ para $R \gg R_0$.
- (iv) $0 < \frac{Rf_{,RR}}{f_{,R}} < 1$ evaluado en $r = -\frac{Rf_{,R}}{f} = -2$.

Donde de las condiciones (i) y (ii) acabamos de mostrar su necesidad en esta teoría de gravedad, la condición (iii) parcialmente mostrada a través de las pruebas que debe cumplir a nivel sistema solar pero es mas clara cuando se estudia a los modelos de gravedad $f(R)$ en las primeras etapas de la evolución del universo, de igual forma la condición (iv) es necesaria para obtener una etapa donde la materia dominaba [35, 36].

1.2.4. Modelos Viables en Gravedad $f(R)$

El estudio y la sencillez de la gravedad $f(R)$ dio origen a una gran cantidad de modelos que en su momento parecían candidatos a resolver los problemas que aquejaban a la cosmología estándar, pero debido a la etapa de observaciones cosmológicas de precisión la mayoría fueron descartadas ya que no cumplían las condiciones que acabamos de mostrar en la subsección anterior. A continuación, mostraremos a los modelos que han pasado las pruebas de gravedad local y que se mantienen como posibles candidatos en dar explicación a los problemas actuales de la cosmología estándar.

¹Limite encontrado usando el modelo Hu-Sawicki con $n=1$ [31].

Modelo de Gravedad Exponencial

El modelo exponencial al que nos estaremos refiriendo de ahora en adelante fue propuesto en [4], y ha sido ampliamente estudiado en la literatura [1,4,37]. Este modelo tiene la forma

$$f(R) = R - bR_s \left(1 - e^{-R/R_s}\right), \quad (1.130)$$

el cual como puede verse tiene una forma simple que involucra a solamente dos cantidades b y R_s , donde b es un parámetro libre y R_s es el escalar de curvatura característico cuyo valor se relaciona con R_0 y con el hecho de que el modelo se comporte correctamente en distintas etapas cosmológicas. Para satisfacer las condiciones de viabilidad que mostramos en la subsección anterior, el parámetro libre b debe cumplir $b > 1$ y $R_c > 0$ con $R_0 > R_s$ [4]. Debido a la condición (iii) cuando $R \gg R_0$ el término del exponencial se aproxima a 0, y con ello podemos ver que

$$bR_s \approx 2\Lambda. \quad (1.131)$$

Como podemos observar, este comportamiento asintótico que nos brinda el exponencial es una de las cualidades que hacen que el modelo siga satisfaciendo las pruebas cosmológicas actuales.

Modelo de Starobinsky

El modelo de Starobinsky fue propuesto en [5], es un modelo diseñado para cumplir las condiciones de viabilidad ya mostradas previamente, en especial en tener la propiedad de utilizar el mecanismo camaleón así como el fenómeno del cascarón delgado para satisfacer pruebas de gravedad local, la forma de este modelo es

$$f(R) = R - \lambda R_c \left(1 - \left(1 + \frac{R^2}{R_c^2}\right)^{-n}\right), \quad (1.132)$$

como se puede observar este modelo tiene 3 parámetros por determinar, donde $R_c, \lambda, n > 0$; para satisfacer las condiciones de viabilidad en gravedad local es necesario que [38]

$$n > 0.9. \quad (1.133)$$

Usando nuevamente la condición (iii) vemos que se debe cumplir

$$\lambda R_c \approx 2\Lambda. \quad (1.134)$$

Como podemos ver el modelo de Starobinsky fue construido de tal forma de replicar al modelo estándar en el régimen de altos corrimientos al rojo así como dar una expansión acelerada sin la necesidad de una verdadera constante cosmológica.

Modelo de Hu-Sawicki

El modelo de Hu-Sawicki fue propuesto en [6], y fue el primer modelo propuesto que satisfacía completamente las condiciones ya mencionadas y cumplía con distintas pruebas de gravedad local así como las distintas etapas cosmológicas, el modelo tiene la siguiente forma

$$f(R) = R - \frac{aR_c(R/R_c)^n}{b(R/R_c)^n + 1}, \quad (1.135)$$

donde este modelo cuenta con 4 parámetros $n, a, b, R_c > 0$. Este modelo, al igual que en el modelo de Starobinsky, para satisfacer las pruebas de gravedad local necesita la condición (1.133). Por la condición (iii) observamos que

$$\frac{aR_c}{b} \approx 2\Lambda. \quad (1.136)$$

Estos son los modelos con los cuales trabajamos en este proyecto de tesis. En el capítulo 2 ligaremos estos modelos con una área de la Cosmología que se llama Cosmografía.

1.2.5. Gravedad $f(R)$ e Inicios del Universo

Aunque en este trabajo no utilizaremos datos de tiempos tempranos del universo, por completez mencionaremos brevemente el tipo de observaciones que se usan para restringir a los modelos en gravedad $f(R)$ a inicios del universo.

Los datos del CMB del espectro de potencias proporcionan una importante restricción del comportamiento de la gravedad $f(R)$ a inicios del universo; usando teorías de perturbación en modelos $f(R)$ se busca el correcto comportamiento del espectro de potencias en esta teoría de gravedad modificada [14, 39]. Otra restricción viene dada por los valores de las densidades de elementos ligeros (H, D, ^3He , ^4He , ^7Li) en la época de nucleosíntesis de la gran explosión (BBN) que en conjunto con la densidad de bariones proporcionada por el CMB se puede acotar también a los modelos $f(R)$ [39, 40]. Por último, el estudio de los puntos críticos de la gravedad $f(R)$ restringe la forma de los modelos para satisfacer una época de transición donde dominaba la radiación a una donde domina la materia [14].

Por lo tanto sería interesante analizar los resultados obtenidos en este trabajo, con cotas obtenidas con datos observacionales de tiempos tempranos del universo.

Capítulo 2

Cosmografía

El modelo estándar en Cosmología establece que el 95 % del Universo consiste de componentes de una naturaleza desconocida, esto puede significar que existen puntos intermedios por entender sobre el comportamiento y la estructura de nuestro Universo. La falta de información sobre la naturaleza de estos nuevos componentes desconocidos que están aportando la mayor parte de la densidad de energía del Universo nos lleva en parte a la necesidad de expandir las formas de describir la evolución cosmológica actual.

El principio cosmológico, como hemos mostrado, nos ha permitido construir una métrica del Universo que nos permite medir distancias cosmológicas y con ello poder analizar distintas observaciones cosmológicas. En Cosmología se ha desarrollado un método que describe la evolución del Universo basándose únicamente en el principio cosmológico y se llama Cosmografía.

Las características dinámicas fundamentales de la evolución del Universo podemos extraerlas de la dependencia de los campos que llenan nuestro Universo, o también podemos extraer las características cinéticas fundamentales de la evolución del Universo si son extraídas directamente de la métrica del espacio-tiempo. Las características dinámicas dependen de un modelo cosmológico, mientras que las características cinéticas son más universales debido a que estos últimos evitan las incertidumbres que surgen al medir cantidades físicas, como por ejemplo, densidades de energía. Esta es una de las razones del porqué las características cinemáticas son más convenientes para la descripción de la actual expansión del Universo.

La evolución de un Universo homogéneo e isotrópico es descrito a través del factor de escala $a(t)$ la cual conecta a las coordenadas comoviles (Lagrangianas) r con las coordenadas físicas de Euler $x(t)$ a través de

$$x(t) = a(t)r, \quad (2.1)$$

realizando una derivada a la relación anterior obtenemos

$$v(t) = Hx(t), \quad (2.2)$$

que es conocida como la Ley de Hubble, donde $v(t) = dx/dt = \dot{x}$ es la velocidad de la expansión cosmológica y $H = \dot{a}/a$ es el parámetro de Hubble que ya habíamos presentado. Esta ley nos relaciona la distancia propia entre objetos con su velocidad de recesión.

La tasa de expansión del Universo descrita por el parámetro de Hubble $H(t)$ depende del tiempo. La medida de esta dependencia está dada por el parámetro de desaceleración, el cual definimos usando una expansión en serie de Taylor hasta el segundo orden

del factor de escala alrededor de un tiempo t_0 como

$$a(t) \approx a(t_0) + \dot{a}(t_0)[t - t_0] + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)[t - t_0]^2, \quad (2.3)$$

reescribiendo lo anterior de la siguiente forma

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} \approx 1 + H_0[t - t_0] - \frac{q_0}{2}H_0^2[t - t_0]^2, \quad (2.4)$$

donde el parámetro de desaceleración es

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)} = -\frac{\ddot{a}}{a(t)}\frac{1}{H^2(t)}, \quad (2.5)$$

el cual nos indica de una expansión acelerada si $q < 0$ y una expansión desacelerada si $q > 0$, teniendo una tasa de expansión constante si $q = 0$. En los inicios de la cosmología se pensaba que la búsqueda de estos dos parámetros H_0 y q_0 era lo único necesario para determinar la evolución cinemática del universo donde el primero era el termino dominante dando la tasa de expansión y el segundo una pequeña corrección debido a la gravedad que el contenido de materia era responsable por alentar la tasa de expansión, esto último debido a que era suficiente para acoplarse con las observaciones de galaxias cercanas que se tenían en aquella época. Sin embargo debido a las nuevas observaciones que se tienen del Universo lo anterior tuvo que cambiar.

La expansión con una aceleración constante es la forma más simple pero no la única posibilidad en la cinemática de un Universo estacionario. A manera que el Universo evoluciona, el contenido relativo a los componentes del Universo también cambian, la cual afecta la dinámica de la expansión, como se han teorizado las distintas etapas cosmológicas y aceptado en su mayoría, y como resultado el valor de la aceleración varía. Para poder analizar esta variación, es necesario el considerar la tercera derivada con respecto del tiempo del factor de escala. Debido a lo anterior y al gran progreso que se ha tenido en los ultimas décadas en la recopilación de datos de las observaciones cosmológicas, la necesidad de considerar ordenes superiores en las derivadas del factor de escala se han tomado en consideración. Es decir, en lugar de la expansión mostrada en (2.3) ahora tomamos en cuenta términos de orden superior de la serie de Taylor

$$a(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{a^{(n)}}{n!} (t - t_0)^n. \quad (2.6)$$

El termino “Cosmo-cinemática” es usado para referirse a la Cosmografía, en el hecho de que así como en Mecánica Clásica, la cinemática se entiende como la rama de la Física que describe el movimiento de los cuerpos, independientemente de las fuerzas que puedan causarlo. De esa misma forma, la Cosmografía representa la cinemática del Universo. Con ello, para una descripción más completa de la expansión cosmológica, es útil considerar como mencionamos un conjunto de parámetros más amplio, que involucren derivadas de orden superior con respecto del tiempo del factor de escala y esa inclusión de términos de orden superior ($N > 2$) nos permitirá ir más allá de los marcos de movimiento con aceleración constante, y transformar la Cosmografía en un caso general de cinemática cósmica.

Los parámetros cosmográficos se definen a continuación [41]

$$H \equiv \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad (2.7)$$

$$q \equiv -\frac{1}{aH^2} \frac{d^2a}{dt^2}, \quad (2.8)$$

$$j \equiv \frac{1}{aH^3} \frac{d^3 a}{dt^3}, \quad (2.9)$$

$$s \equiv \frac{1}{aH^4} \frac{d^4 a}{dt^4}, \quad (2.10)$$

$$l \equiv \frac{1}{aH^5} \frac{d^5 a}{dt^5}, \quad (2.11)$$

los tres últimos parámetros son conocidos como los parámetros jerk, snap y lerk respectivamente. También hay que notar que los últimos cuatro parámetros son adimensionales a diferencia del parámetro de Hubble que tiene unidades del inverso del tiempo. En este trabajo se utilizarán estos cinco parámetros cosmográficos para realizar los ajustes estadísticos de los datos observacionales ya que como se mostrará más adelante con este orden de la expansión se puede analizar correctamente el rango de las observaciones [41].

En términos de los parámetros cosmográficos la expansión en serie de Taylor del factor de escala queda como sigue

$$a(t) = a_0 \left(1 + H_0[t - t_0] - \frac{1}{2}q_0 H_0^2[t - t_0]^2 + \frac{1}{3!}j_0 H_0^3[t - t_0]^3 + \frac{1}{4!}s_0 H_0^4[t - t_0]^4 + \frac{1}{5!}l_0 H_0^5[t - t_0]^5 + \mathcal{O}([t - t_0]^6) \right), \quad (2.12)$$

donde a_0 es el valor del factor de escala evaluada al tiempo al día de hoy, t_0 .

Corrimiento al Rojo

Antes de presentar como se miden distancias en Cosmología es necesario introducir el concepto de corrimiento al rojo en Cosmología ya que además, como veremos más adelante, es de suma importancia en la Cosmografía.

Como bien sabemos, la Cosmología se basa en observaciones de objetos que se encuentran a grandes distancias cosmológicas; estas observaciones son en principio detectadas a través de la luz que emiten dichos objetos, si se conocen las componentes de materia de los objetos que se observan se puede conocer la longitud de onda y la frecuencia con la que su luz nos debería alcanzar, pero esto no es así ya que la luz llega con una longitud de onda más grande y frecuencia menor a la esperada por lo cual se deduce que la luz que viajó desde un objeto distante hacia nosotros sufrió un tipo de efecto Doppler como en las ondas de sonido dando lugar a un corrimiento al rojo que se expresa de la siguiente forma

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{emit}}{\lambda_{emit}}, \quad (2.13)$$

la luz viaja en el vacío del espacio, por lo cual la explicación de este corrimiento al rojo es que, entre el tiempo que la luz fue emitida y observada, el espacio-tiempo sufrió una expansión, ver figura (2.1). Por lo cual existe una relación entre la longitud de onda y el factor de escala, asumimos que la luz viaja en geodésicas nulas, es decir de (1.3) $ds^2 = 0$ y asumiendo $d\theta^2 = d\phi^2 = 0$, al calcular el radio Δt_0 y Δt_1 de un rayo de luz que se emite entre un tiempo t_1 y $t_1 + \Delta t_1$ y se recibe en un tiempo t_0 y $t_0 + \Delta t_0$ obtenemos [42]

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emit}} = \frac{a(t_0)}{a(t)}, \quad (2.14)$$

donde $a(t_0)$ es el factor de escala al día de hoy, y por definición $a(t_0) = a_0 = 1$ se relaciona a $z = 0$, con lo anterior la relación entre el corrimiento al rojo cosmológico y el factor de escala es

$$a(t) = \frac{1}{1 + z}, \quad (2.15)$$

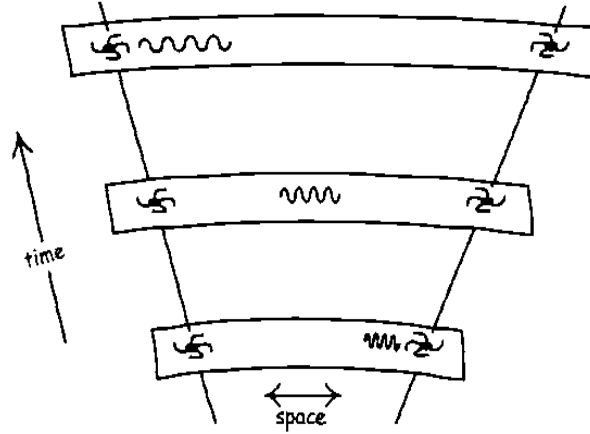


Figura 2.1: El corrimiento al rojo ocurre debido a que la luz viaja en un espacio-tiempo en expansión lo que provoca un aumento en su longitud de onda y reducción de su frecuencia [43].

esta ultima relación es importante para lo que sigue a continuación.

2.1. Distancias en Cosmografía

La cosmología está ligada a los datos, estos datos provienen de diferentes observaciones cosmológicas, y la forma que analizamos estas observaciones se reduce a medir distancias, en este apartado mostraremos las ecuaciones para medir distancias en Cosmología y su representación en Cosmografía.

2.1.1. Distancia comóvil

En un principio se puede pensar en medir distancias en el universo desde la tierra como la posición de un objeto en un momento del tiempo cosmológico, pero hay un problema, debido a la expansión del universo este objeto no se ha mantenido ni se mantendrá en dicha posición, esta distancia es la distancia propia del objeto. En vista de la expansión que sufre el universo debemos elegir coordenadas con las cuales sean fáciles o naturales de trabajar en un espacio que sufre dicho fenómeno. Las coordenadas con las que se trabajan en la Cosmología Estándar son las coordenadas comóviles, con estas coordenadas asignamos valores espaciales constantes a nuestro observadores que perciben al universo de forma isotrópica que se encuentra en expansión.

Entonces usando las coordenadas comóviles podemos obtener una distancia la cual no cambiará debido a la expansión del universo, esta distancia es la distancia comóvil como vimos en el apartado anterior del corrimiento al rojo asumimos geodésicas nulas $ds^2 = 0$ para los rayos de luz, con ello obtenemos

$$\chi = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (2.16)$$

donde $a(t')$ es el factor de escala, t_e es el tiempo de emisión de los fotones, t_0 es el tiempo presente y, como en todo este trabajo, la velocidad de la luz $c = 1$. La distancia propia y la distancia comóvil son la misma al tiempo presente pero son distintas en el pasado o futuro debido a la expansión por (2.1).

Ahora debemos relacionar la distancia comóvil con nuestra métrica FLRW. Donde como

mencionamos anteriormente, consideramos el rayo de luz en dirección radial sin pérdida de generalidad, debido a que puede existir una curvatura en el espacio obtenemos los siguientes resultados para la distancia comóvil y la distancia propia

$$\chi = \begin{cases} |\kappa|^{-1/2} \sinh^{-1} \sqrt{|\kappa|} r, & \text{si } \kappa < 0 \text{ (universo abierto)} \\ r, & \text{si } \kappa = 0 \text{ (universo plano)} \\ |\kappa|^{-1/2} \sin^{-1} \sqrt{|\kappa|} r, & \text{si } \kappa > 0 \text{ (universo cerrado)} \end{cases} \quad (2.17)$$

en este trabajo, como mencionamos, consideramos un universo plano debido a resultados de las observaciones que establecen un valor $\kappa \approx 0$.

Como veremos a continuación, la distancia comóvil es en cierto sentido la forma de medir distancias fundamentales ya que las demás distancias llegan a simplificarse en términos de la distancia comóvil. Reescribimos (2.16) usando la relación

$$1 + z = \frac{1}{a(t)} \Rightarrow dz = -\frac{\dot{a}(t)}{a^2(t)} dt = -\frac{H(t)}{a(t)} dt, \quad (2.18)$$

con ello

$$\chi = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (2.19)$$

donde en Cosmología usamos el parámetro de Hubble con un modelo como en (1.13) e integramos, pero en Cosmografía escribimos al parámetro de Hubble en términos de los parámetros cosmográficos; para ello realizamos una expansión en serie de Taylor del parámetro de Hubble alrededor de $z = 0$, es decir, al tiempo presente t_0

$$\begin{aligned} H(z) = & H_0 + \left. \frac{dH}{dz} \right|_{z=0} z + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 H}{dz^2} \right|_{z=0} z^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 H}{dz^3} \right|_{z=0} z^3 \\ & + \frac{1}{4!} \left. \frac{d^4 H}{dz^4} \right|_{z=0} z^4 + \mathcal{O}(z^5), \end{aligned} \quad (2.20)$$

para la derivada del parámetro de Hubble con respecto del corrimiento al rojo usamos la relación (2.18) y tenemos

$$\frac{dH}{dz} = \frac{dH}{dt} \frac{dt}{dz} = -\frac{\dot{H}}{(1+z)H}, \quad (2.21)$$

con ello necesitaremos para todos los términos de la expansión la representación de las derivadas de orden superior del parámetro de Hubble con respecto del tiempo en términos de los parámetros cosmográficos que son

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -H^2(1+q), \quad (2.22)$$

$$\ddot{H} = H^3(j+3q+2), \quad (2.23)$$

$$\dddot{H} = H^4(-6-4j-12q-3q^2+s), \quad (2.24)$$

$$\ddot{\ddot{H}} = -H^5(l-5s+10jq+20j+30q^2+60q+24), \quad (2.25)$$

con ello tenemos que la expansión del parámetro de Hubble es

$$H(z) = H_0 \left(1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + \mathcal{O}(z^5) \right), \quad (2.26)$$

donde

$$A_1 = 1 + q_0, \quad (2.27)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(j_0 - q_0^2), \quad (2.28)$$

$$A_3 = \frac{1}{6}(3q_0^2 + 3q_0^3 - 4q_0j_0 - 3j_0 - s_0), \quad (2.29)$$

$$A_4 = \frac{1}{24}(-12q_0^2 - 24q_0^3 - 15q_0^4 + 32q_0j_0 + 25q_0^2j_0 + 7q_0s_0 + 12j_0 - 4j_0^2 + 8s_0 + l_0), \quad (2.30)$$

el subíndice 0 en los parámetros cosmográficos significa que están evaluados en el tiempo presente en $z = 0$. Como veremos más adelante, la expresión cosmográfica del parámetro de Hubble (2.26) nos servirá para ajustar con datos de cronómetros cósmicos. Con lo anterior ya podemos integrar y encontrar la distancia comovil en termino de los parámetros cosmográficos, pero es mejor hacerlo en el siguiente apartado con la distancia de luminosidad.

2.1.2. Distancia de Luminosidad

La distancia de luminosidad “ D_L ” la usaremos para relacionar la tasa de expansión del universo y la luminosidad de las supernovas usando datos de las observaciones en supernovas Tipo Ia.

La distancia de luminosidad se define como la razón entre la luminosidad absoluta de una fuente y el flujo observado de dicha fuente y se expresa de la siguiente forma

$$D_L = \sqrt{\frac{L_s}{4\pi\mathcal{F}}} \quad (2.31)$$

donde L_s es la luminosidad absoluta de la fuente y $\mathcal{F}$ es el flujo observado de la fuente. El flujo $\mathcal{F}$ lo definimos como $\mathcal{F} = L_0/S$, donde L_0 es la luminosidad observada de la fuente en $z = 0$ y $r = 0$ que es distinta a la luminosidad absoluta L_s de la fuente que fue emitida a una distancia r con cierto corrimiento z , y S es el área de una esfera en $z = 0$ dada por $S = 4\pi(a_0\chi(r))^2$ donde a_0 es el factor de escala evaluado en $z = 0$ y definimos igual a 1, $\chi(r)$ no es más que la ecuación (2.17). Con ello la distancia de luminosidad en (2.31) queda como

$$D_L = \chi(r)\sqrt{\frac{L_s}{L_0}}. \quad (2.32)$$

Ahora busquemos la relación de la razón entre L_s/L_0 . La luminosidad absoluta está definida como $L_s = \Delta E_s/\Delta t_s$ donde ΔE_s es la energía de la luz emitida en un intervalo de tiempo Δt_s . De igual forma tenemos que $L_0 = \Delta E_0/\Delta t_0$ donde ΔE_0 es la energía de la luz detectada en un intervalo de tiempo Δt_0 .

Sabemos que la energía de un fotón es inversamente proporcional a su longitud de onda λ y con ello tenemos que $\Delta E_s/\Delta E_0 = \lambda_0/\lambda_s$ y usando la definición del corrimiento al rojo tenemos que $\Delta E_s/\Delta E_0 = 1 + z$. Ahora, sabemos que la velocidad de la luz es constante y con ello $c = \lambda/\Delta t$, así obtenemos la relación $\lambda_s/\Delta t_s = \lambda_0/\Delta t_0$ entonces $\Delta t_0/\Delta t_s = \lambda_0/\lambda_s = 1 + z$. Con lo anterior vemos que la razón queda como

$$\frac{L_s}{L_0} = \frac{\Delta E_s}{\Delta E_0} \frac{\Delta t_0}{\Delta t_s} = (1 + z)^2. \quad (2.33)$$

Sustituyendo lo encontrado en la ecuación de la distancia de luminosidad obtenemos

$$D_L = \chi(r)(1 + z). \quad (2.34)$$

Como estamos en un universo plano obtenemos finalmente que la distancia de luminosidad es

$$D_L = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (2.35)$$

usando el parámetro de Hubble definido en (2.26) al integrar obtenemos

$$D_L(z) = \frac{1}{H_0} \left(z + B_1 z^2 + B_2 z^3 + B_3 z^4 + B_4 z^5 \right), \quad (2.36)$$

donde

$$B_1 = \frac{1}{2}(1 - q_0), \quad (2.37)$$

$$B_2 = -\frac{1}{6}(1 - q_0 + j_0 - 3q_0^2), \quad (2.38)$$

$$B_3 = \frac{1}{24}(2 - 2q_0 - 15q_0^2 - 15q_0^3 + 10q_0j_0 + 5j_0 + s_0), \quad (2.39)$$

$$B_4 = \frac{1}{120}(-6 + 6q_0 + 81q_0^2 + 165q_0^3 + 105q_0^4 - 110q_0j_0 - 105q_0^2j_0 - 15q_0s_0 - 27j_0 + 10j_0^2 - 11s_0 - l_0). \quad (2.40)$$

2.1.3. Distancia Diámetro Angular

La distancia diámetro angular es una distancia que está definida en términos de la razón del tamaño físico de un objeto, Δx , y su tamaño angular (en radianes), $\Delta\theta$, de la siguiente forma

$$D_A = \frac{\Delta x}{\Delta\theta} \quad (2.41)$$

Como se observa en la figura 2.2, el ángulo $\Delta\theta$ subtiende el tamaño actual del objeto

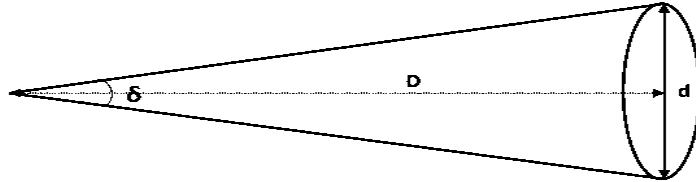


Figura 2.2: Distancia Diámetro Angular

Δx de forma ortogonal a la línea de visión.

Debido a que la fuente se encuentra en la superficie de una esfera con radio r con el observador en el centro, el tamaño actual Δx a un tiempo t en el espacio-tiempo FLRW está dado por

$$\Delta x = a(t)\chi(r)\Delta\theta, \quad (2.42)$$

con ello la distancia diámetro angular queda como

$$D_A = a(t)\chi(r). \quad (2.43)$$

Usando la definición del corrimiento al rojo y el factor de escala, considerando $a_0 = 1$, además de estar en un universo plano finalmente obtenemos que la distancia diámetro angular es

$$D_A = \frac{1}{1+z} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.44)$$

También nos es útil cuando ya calculamos la distancia de luminosidad la siguiente expresión

$$D_A = \frac{D_L}{(1+z)^2}. \quad (2.45)$$

Esta distancia se usa para convertir separaciones angulares en imágenes de telescopio en separaciones adecuadas a la fuente, es famosa por no incrementar indefinidamente cuando $z \rightarrow \infty$, ya que aproximadamente después de $z \sim 1$ decrece, por ello objetos muy distantes parecen en realidad más grandes en tamaño angular. Se utiliza comúnmente en observaciones de las anisotropías del CMB y aquí las utilizaremos para trabajar con observaciones de lentes gravitacionales y oscilaciones acústicas bariónicas (BAO).

Usando el parámetro de Hubble definido en (2.26) para integrar o de igual forma usando lo obtenido en la distancia de luminosidad obtenemos

$$D_A(z) = \frac{1}{H_0} \left(z + C_1 z^2 + C_2 z^3 + C_3 z^4 + C_4 z^5 \right), \quad (2.46)$$

donde

$$C_1 = -\frac{1}{2}(3 + q_0), \quad (2.47)$$

$$C_2 = \frac{1}{6}(11 + 7q_0 - j_0 + 3q_0^2), \quad (2.48)$$

$$C_3 = -\frac{1}{24}(50 + 46q_0 + 39q_0^2 + 15q_0^3 - 10q_0j_0 - 13j_0 - s_0), \quad (2.49)$$

$$C_4 = \frac{1}{120}(274 + 326q_0 + 411q_0^2 + 315q_0^3 + 105q_0^4 - 210q_0j_0 - 105q_0^2j_0 - 15q_0s_0 - 137j_0 + 10j_0^2 - 21s_0 - l_0). \quad (2.50)$$

Por lo tanto, con estas distancias en Cosmografía basta con ajustar los parámetros cosmográficos para discriminar entre modelos cosmológicos o como en el caso de este trabajo restringir valores de los modelos para el mejor ajuste.

2.2. Cosmografía y Convergencia

En Cosmografía, como hemos mostrado, las cantidades físicas como las distancias se expanden como series de Taylor con respecto al corrimiento cosmológico z . Esta expansión se considera para pequeños valores de z que es lo que en un inicio era el alcance de los datos obtenidos, pero ahora en esta época de observaciones cosmológicas de precisión, una gran cantidad de proyectos cosmológicos están obteniendo datos por encima de valores del corrimiento al rojo de $z > 1$. Por lo cual es bueno preguntarse si el formalismo que se mostró en Cosmografía funciona para corrimientos al rojo mayores a 1. Dos cosas pueden salir mal del formalismo anteriormente mostrado que son

- La serie de Taylor puede no converger.
- La serie de Taylor hasta el orden donde trabajamos puede ser una mala aproximación para el resultado exacto.

Por lo anterior hay que revisar si las series de Taylor utilizadas sirven para corrimientos al rojo mayores a 1, usando una combinación de razonamiento físico y matemático, para revisar el correcto radio de convergencia de la serie. Para analizar lo anterior, consideremos la ecuación (2.35). Es claro que es una función bien comportada, que no posee polos o singularidades obvias, ya que $H(z) > 0$. Sin embargo, la relación anterior

viene del desarrollo en serie de Taylor del factor de escala y el corrimiento al rojo, esto a través de la relación [44]

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} = \frac{a(t)}{a_0} = & 1 + H_0[t-t_0] - \frac{1}{2}q_0H_0^2[t-t_0]^2 + \frac{1}{3!}j_0H_0^3[t-t_0]^3 \\ & + \frac{1}{4!}s_0H_0^4[t-t_0]^4 + \frac{1}{5!}l_0H_0^5[t-t_0]^5 + \mathcal{O}([t-t_0]^6), \end{aligned} \quad (2.51)$$

podemos notar que esta expansión en serie de Taylor presenta un polo en $z = -1$, que corresponde en el instante cuando el universo se ha expandido a un volumen infinito, $a = \infty$, esto puede ser en un tiempo finito o infinito. Ya que los valores negativos del corrimiento al rojo corresponden a valores del factor de escala cuando $a(t) > a_0$, es decir en un universo en expansión $z < 0$ corresponde al futuro. Ya que existe una polo explícito en $z = -1$, por la teoría estándar de variable compleja sabemos que el radio de convergencia es a lo mucho $|z| = 1$, entonces esta serie falla en converger para valores del corrimiento al rojo $z > 1$, que corresponde cuando el universo era menos de la mitad de su tamaño actual.

Por consecuencia de lo anterior, cuando revertimos la serie de potencias para obtener el tiempo retrospectivo $T = t_0 - t$ como una función $T(z)$ de z , no deberíamos esperar que la serie deba converger para $z > 1$, por ende cuando escribimos a la serie de potencias con los parámetros cosmográficos en la expansión de series de potencia no debemos esperar que se comporten de forma correcta las distancias antes mostradas, D_L y D_A , para $z > 1$.

Lo anterior se debe a que la matemática que nos lleva a dicha afirmación es la definición de radio de convergencia, que nos indica que para cualquier serie de potencias el radio de convergencia es la distancia a la singularidad más cercana en el plano complejo, mientras que la física relevante que nos indica la teoría dice que por motivos físicos no deberíamos esperar poder extrapolar información más allá de $a = \infty$, que corresponde a $z = -1$. Físicamente, debemos esperar que este argumento se cumpla para cualquier cantidad observable cuando se expresa como una función del corrimiento al rojo y que se expande en serie de Taylor alrededor de $z = 0$, que el radio de convergencia de tal serie es menor o igual a 1, ver Figura 2.3.

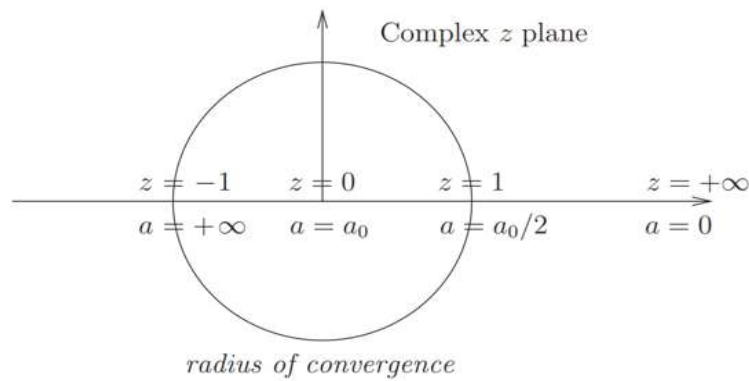


Figura 2.3: Representación del comportamiento del factor de escala y del radio de convergencia de la serie de Taylor usando la variable z [44].

Solucionando la Convergencia

Como ya mencionamos, las observaciones cosmológicas ya han rebasado el rango del corrimiento al rojo $z > 1$, por lo que es necesario para la Cosmografía ser estable

cuando se tiene que utilizar datos a tales valores de corrimiento al rojo, por lo cual se llegaron a proponer distintas formas de aliviar el problema de convergencia. Una forma es moviendo el radio de convergencia proponiendo la expansión alrededor de un punto distinto de cero, llamando ese punto el “pivote”, siendo

$$z = z_{pivot} + \Delta z, \quad (2.52)$$

y expandiendo en potencias de Δz tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + z_{pivot} + \Delta z} = \frac{a(t)}{a_0} = & 1 + H_0[t - t_0] - \frac{1}{2}q_0 H_0^2[t - t_0]^2 + \frac{1}{3!}j_0 H_0^3[t - t_0]^3 \\ & + \frac{1}{4!}s_0 H_0^4[t - t_0]^4 + \frac{1}{5!}l_0 H_0^5[t - t_0]^5 + \mathcal{O}([t - t_0]^6), \end{aligned} \quad (2.53)$$

el polo está ahora localizado en

$$\Delta z = -(1 + z_{pivot}), \quad (2.54)$$

y de nueva cuenta esto corresponde físicamente a un universo que tiene una expansión infinita, $a = \infty$. Con radio de convergencia

$$|\Delta z| \leq (1 + z_{pivot}), \quad (2.55)$$

con lo cual la serie fallará en este caso para

$$z > 1 + 2z_{pivot}. \quad (2.56)$$

Lo anterior como vimos es solo recorrer el radio una cantidad finita que puede solucionar la convergencia para así poder usar datos de corrimientos mayores a 1, pero que debido a la precisión con las que se encuentran datos de corrimientos al rojo mayores sería mejor intentar abarcar toda la teoría con un simple cambio de variable.

La Cosmografía actual para aliviar el problema de la convergencia propone el uso de un cambio de variable con respecto a la expansión en serie de potencias del corrimiento al rojo z . Como ya mostramos el corrimiento al rojo cosmológico tradicional tiene una interpretación física simple en (2.13), donde z es el cambio en la longitud de onda dividida por la longitud de onda emitida. Por lo cual se propone el siguiente cambio igual de simple [44]

$$y = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_0} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0}, \quad (2.57)$$

donde y sera el cambio en la longitud de onda dividida por la longitud de onda observada. De (2.57) obtenemos

$$1 - y = \frac{\lambda_e}{\lambda_0} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)} = \frac{1}{1 + z}, \quad (2.58)$$

este cambio de variable ha sido propuesto antes en otras ramas distintas a Cosmografía [45], y como podemos ver la relación de la nueva variable y o corrimiento al rojo y (y -redshift) con el corrimiento al rojo z usual es

$$y = \frac{z}{1 + z}; \quad z = \frac{y}{1 - y}, \quad (2.59)$$

en el pasado los corrimientos al rojo abarcan

$$z \in (0, \infty); \quad y \in (0, 1), \quad (2.60)$$

mientras que en el futuro es

$$z \in (-1, 0); \quad y \in (-\infty, 0), \quad (2.61)$$

como vemos hemos compactado el corrimiento al rojo de importancia entre $(0, 1)$. Con ello vemos que el radio de convergencia es

$$1 - y = \frac{a(t)}{a_0} = 1 + H_0[t - t_0] - \frac{1}{2}q_0 H_0^2[t - t_0]^2 + \frac{1}{3!}j_0 H_0^3[t - t_0]^3 + \frac{1}{4!}s_0 H_0^4[t - t_0]^4 + \frac{1}{5!}l_0 H_0^5[t - t_0]^5 + \mathcal{O}([t - t_0]^6), \quad (2.62)$$

el cual ahora no tenemos polos, volviendo a revertir la serie para $T = t_0 - t$ vemos que no hay problemas y $T(y)$ es bien comportada hasta el valor que corresponde a un Big Bang,

$$y = +1 \quad \Leftrightarrow \text{Big Bang}, \quad (2.63)$$

con ello la serie converge para

$$|y| < 1, \quad (2.64)$$

para $y = -1$ corresponde a un universo del doble del tamaño al actual, ver Figura 2.4, aunque el radio de convergencia es el mismo, el rango de observaciones que podemos abarcar es mayor.

En este trabajo consideramos dos distintos cambios de variable propuestos para Cos-

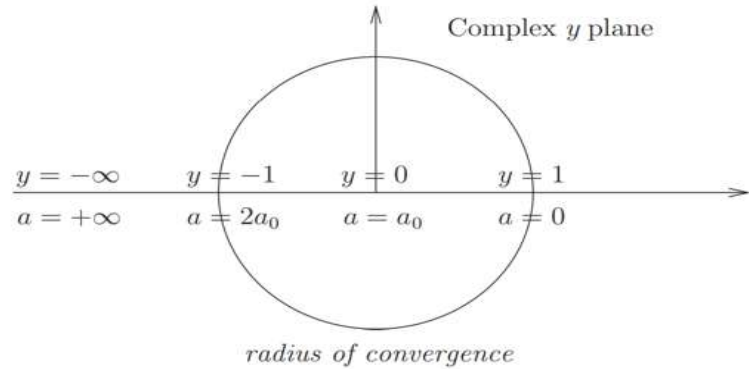


Figura 2.4: Representación del comportamiento del factor de escala y del radio de convergencia de la serie de Taylor usando la variable y [44].

mografía que son

- $y_1 = \frac{z}{1+z}$,
- $y_2 = \arctan(z)$,

la variable y_2 fue propuesta en [46] donde se trabajó para un mejor ajuste con datos observacionales de supernovas y obtuvieron una mejor estadística, $y_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$ y las distancias en términos de y_2 son

$$H(y_2) = H_0 \left(1 + \mathcal{A}_1 y_2 + \mathcal{A}_2 y_2^2 + \mathcal{A}_3 y_2^3 + \mathcal{A}_4 y_2^4 + \mathcal{O}(y_2^5) \right), \quad (2.65)$$

donde

$$\mathcal{A}_1 = 1 + q_0, \quad (2.66)$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}(j_0 - q_0^2), \quad (2.67)$$

$$\mathcal{A}_3 = \frac{1}{6}(2 + 2q_0 + 3q_0^2 + 3q_0^3 - 4q_0j_0 - 3j_0 - s_0), \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4 = & \frac{1}{24}(-20q_0^2 - 24q_0^3 - 15q_0^4 + 32q_0j_0 \\ & + 25q_0^2j_0 + 7q_0s_0 + 20j_0 - 4j_0^2 + 8s_0 + l_0), \end{aligned} \quad (2.69)$$

la distancia de luminosidad es

$$D_L(y_2) = \frac{1}{H_0} \left(y_2 + \mathcal{B}_1 y_2^2 + \mathcal{B}_2 y_2^3 + \mathcal{B}_3 y_2^4 + \mathcal{B}_4 y_2^5 \right), \quad (2.70)$$

donde

$$\mathcal{B}_1 = \frac{1}{2}(1 - q_0), \quad (2.71)$$

$$\mathcal{B}_2 = -\frac{1}{6}(-1 - q_0 + j_0 - 3q_0^2), \quad (2.72)$$

$$\mathcal{B}_3 = \frac{1}{24}(10 - 10q_0 - 15q_0^2 - 15q_0^3 + 10q_0j_0 + 5j_0 + s_0), \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_4 = & \frac{1}{120}(-10 + 26q_0 + 141q_0^2 + 165q_0^3 + 105q_0^4 - 110q_0j_0 \\ & - 105q_0^2j_0 - 15q_0s_0 - 47j_0 + 10j_0^2 - 11s_0 - l_0), \end{aligned} \quad (2.74)$$

y la distancia diámetro angular es

$$D_A(y_2) = \frac{1}{H_0} \left(y_2 + \mathcal{C}_1 y_2^2 + \mathcal{C}_2 y_2^3 + \mathcal{C}_3 y_2^4 + \mathcal{C}_4 y_2^5 \right), \quad (2.75)$$

donde

$$\mathcal{C}_1 = -\frac{1}{2}(3 + q_0), \quad (2.76)$$

$$\mathcal{C}_2 = \frac{1}{6}(13 + 7q_0 - j_0 + 3q_0^2), \quad (2.77)$$

$$\mathcal{C}_3 = -\frac{1}{24}(74 + 54q_0 + 39q_0^2 + 15q_0^3 - 10q_0j_0 - 13j_0 - s_0), \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_4 = & \frac{1}{120}(510 + 466q_0 + 471q_0^2 + 315q_0^3 + 105q_0^4 - 210q_0j_0 \\ & - 105q_0^2j_0 - 15q_0s_0 - 157j_0 + 10j_0^2 - 21s_0 - l_0). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Para las distancias en la variable y_1 revisar el Apéndice A. La elección de cortar la serie hasta el cuarto orden se debe al rango de observaciones que utilizaremos, ya que el rango del corrimiento al rojo es $z > 2$ [41], también la analiticidad de la serie está correctamente definida y bien comportada en dicho orden para su ajuste [41, 46]. Con las distancias en las nuevas variables del corrimiento al rojo y , ya podemos hacer el ajuste de los parámetros cosmográficos con distintas observaciones y datos.

2.3. Cosmografía y Gravedad $f(R)$

Como mencionamos, el ajuste de los parámetros cosmográficos se puede realizar haciendo el análisis bayesiano de los datos observacionales y las distancias en Cosmografía. La Cosmografía puede usarse de dos maneras, la primera es para comparar

modelos de diferentes teorías de gravedad y analizar cuál ajusta mejor los datos, y la segunda podemos usarla para ajustar los parámetros de los modelos a través de los parámetros cosmográficos y con ello restringir valores para dichas variables. En este trabajo realizamos el segundo caso y para ello necesitamos ver cómo ligar los parámetros cosmográficos con las parámetros de los modelos en gravedad $f(R)$.

Primero utilizaremos las dos ecuaciones de Friedmann en gravedad $f(R)$, considerando la densidad de energía de la radiación muy pequeña quedándonos así solo con la contribución de materia de forma relevante, y reescribimos de tal forma que todas las derivadas a la función $f(R)$ sean con respecto al escalar de curvatura de Ricci R . De ahora en adelante usaremos que $8\pi G = 1$ y recordemos que $\rho_m = 3H_0^2\Omega_m a^{-3}$ con ello tenemos

$$3f'H^2 = \frac{1}{2}(f'R - f(R)) - 3H\dot{R}f'' + 3H_0^2\Omega_m a^{-3}, \quad (2.80)$$

$$-2\dot{H}f' = \dot{R}^2 f''' + (\ddot{R} - H\dot{R})f'' + 3H_0^2\Omega_m a^{-3}, \quad (2.81)$$

recordando que $f' = df(R)/dR$, evaluando lo anterior para el tiempo presente $z = 0$ tenemos

$$3f_0'H_0^2 = \frac{1}{2}(f_0'R_0 - f(R_0)) - 3H_0\dot{R}_0f_0'' + 3H_0^2\Omega_{0m}, \quad (2.82)$$

$$-2\dot{H}_0f_0' = \dot{R}_0^2 f_0''' + (\ddot{R}_0 - H_0\dot{R}_0)f_0'' + 3H_0^2\Omega_{0m}, \quad (2.83)$$

donde el valor para f_0' viene dada de los experimentos a nivel sistema solar como ya mostramos, recordemos que $G_{eff} = G/f_0'$. Entonces para $z = 0$ quisiéramos que $G_{eff} \approx G$ con ello $f_0' \approx 1$, como en [47] usaremos $f_0' = \frac{1}{1+\epsilon}$ y con ello $G_{eff} = G(1+\epsilon)$, para este trabajo consideraremos a la G_{eff} al día de hoy como el valor de la constante gravitacional G más su error reportado en CODATA2018¹, con ello obtenemos

$$|f_0' - 1| < 2.2 \times 10^{-5}. \quad (2.84)$$

Para cerrar el sistema de ecuaciones debemos derivar una vez más con respecto del tiempo a la ecuación (2.81) obteniendo

$$\begin{aligned} \ddot{H} = \frac{\dot{R}f''}{2f'^2} \left[3H_0^2\Omega_m a^{-3} + \dot{R}^2 f''' + (\ddot{R} - H\dot{R})f'' \right] - \frac{1}{2f'} \left[-9H_0^2\Omega_m H a^{-3} \right. \\ \left. + (3\dot{R}\ddot{R} - H\dot{R}^2)f''' + (\ddot{R} - \dot{H}\dot{R} - H\ddot{R})f'' + \dot{R}^3 f'''' \right]. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Supondremos que la función $f(R)$ está bien aproximada por su tercer orden en su expansión de Taylor en $R - R_0$ es decir:

$$f(R) = f(R_0) + f'(R_0)(R - R_0) + \frac{1}{2}f''(R_0)(R - R_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(R_0)(R - R_0)^3, \quad (2.86)$$

con ello para $n \geq 4$ tenemos $f^n(R_0) = d^n f/d^n R = 0$ [47], entonces evaluando (2.85) en $z = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \ddot{H}_0 = \frac{\dot{R}_0 f_0''}{2f_0'^2} \left[3H_0^2\Omega_{0m} + \dot{R}_0^2 f_0''' + (\ddot{R}_0 - H_0\dot{R}_0)f_0'' \right] - \frac{1}{2f_0'} \left[-9H_0^3\Omega_{0m} \right. \\ \left. + (3\dot{R}_0\ddot{R}_0 - H_0\dot{R}_0^2)f_0''' + (\ddot{R}_0 - \dot{H}_0\dot{R}_0 - H_0\ddot{R}_0)f_0'' \right], \end{aligned} \quad (2.87)$$

¹<https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?bg>

del sistema de ecuaciones anterior necesitamos las derivadas con respecto del tiempo del escalar de curvatura R , que son

$$R = 6(\dot{H} + 2H^2) \quad (2.88)$$

$$\dot{R} = 6(\ddot{H} + 4H\dot{H}) \quad (2.89)$$

$$\ddot{R} = 6(\dddot{H} + 4H\ddot{H} + 4\dot{H}^2) \quad (2.90)$$

$$\ddot{R} = 6(H^{iv} + 4H\ddot{H} + 12\dot{H}\ddot{H}) \quad (2.91)$$

en términos de los parámetros cosmológicos son

$$R = 6H^2(1 - q) \quad (2.92)$$

$$\dot{R} = 6H^3(-2 + j - q) \quad (2.93)$$

$$\ddot{R} = 6H^4(6 + 8q + q^2 + s) \quad (2.94)$$

$$\ddot{R} = 6H^5(-24 + l - 48q - 18q^2 - 8j - 2jq - s) \quad (2.95)$$

con lo anterior podemos resolver el sistema de ecuaciones para f_0, f_0'' y f_0''' que queda de la siguiente manera

$$\frac{f(R_0)}{6H_0^2} = -\frac{\mathcal{P}_0(q_0, j_0, s_0, l_0, \Omega_{0m}) + f_0' \mathcal{Q}_0(q_0, j_0, s_0, l_0)}{\mathcal{K}(q_0, j_0, s_0, l_0)}, \quad (2.96)$$

$$f'(R_0) \approx 1, \quad (2.97)$$

$$\frac{f''(R_0)}{(6H_0^2)^{-1}} = \frac{\mathcal{P}_1(q_0, j_0, s_0, \Omega_{0m}) + f_0' \mathcal{Q}_1(q_0, j_0, s_0)}{\mathcal{K}(q_0, j_0, s_0, l_0)}, \quad (2.98)$$

$$\frac{f'''(R_0)}{(6H_0^2)^{-2}} = \frac{\mathcal{P}_2(q_0, j_0, s_0, l_0, \Omega_{0m}) + f_0' \mathcal{Q}_2(q_0, j_0, s_0, l_0)}{(j_0 - q_0 - 2)\mathcal{K}(q_0, j_0, s_0, l_0)}, \quad (2.99)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 = & -\Omega_m(20 + 72q_0 + 96q_0^2 + 25q_0^3 + 3q_0^4 + l_0(2 + q_0) + j_0^2(16 + 3q_0) \\ & + 22s_0 + 41q_0s_0 + 6q_0^2s_0 + 3s_0^2 + j_0(12 - l_0 + 64q_0 + 20q_0^2 + 7s_0)), \end{aligned} \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0 = & 2j_0^3 + 28q_0^4 + 3q_0^5 + j_0^2(-6 + 10q_0 + 3q_0^2) - 4(16 + 3s_0) + 2q_0^3(59 + 3s_0) \\ & + q_0^2(72 + l_0 + 44s_0) + q_0(-76 + 2l_0 + 22s_0 + 3s_0^2) + j_0(52q_0^2 + 17q_0^3 \\ & + 6(6 + s_0) + q_0(54 - l_0 + 4s_0)), \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & 104 + 246q_0 + 180q_0^2 + 34q_0^3 + 3q_0^4 + l_0(2 + q_0) + j_0^2(10 + 3q_0) + 40s_0 \\ & + 50q_0s_0 + 6q_0^2s_0 + 3s_0^2 - j_0(18 + l_0 - 4q_0 - 11q_0^2 + 2s_0), \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$\mathcal{P}_1 = -3\Omega_{0m}(14 + 2j_0 + 22q_0 + 3q_0^2 + 3s_0), \quad (2.103)$$

$$\mathcal{Q}_1 = 2(16 + j_0^2 + j_0(-1 + q_0) + 37q_0 + 25q_0^2 + 3q_0^3 + 3s_0 + 3q_0s_0), \quad (2.104)$$

$$\mathcal{P}_2 = 3\Omega_{0m}(-4 + l_0 - 26q_0 - 15q_0^2 - 3j_0(4 + q_0) + s_0), \quad (2.105)$$

$$\mathcal{Q}_2 = 2(12 + j_0^2 + 39q_0 + 42q_0^2 + 15q_0^3 - l_0(1 + q_0) + j_0(3 + 6q_0 + 2q_0^2 - s_0) - q_0s_0), \quad (2.106)$$

así, con lo anterior, podemos restringir los valores de las derivadas en gravedad $f(R)$ a través de los parámetros cosmológicos, si confirmamos que la condición $f''(R_0) > 0$ se cumple podemos pasar al siguiente paso que es ajustar los parámetros de los modelos $f(R)$.

2.3.1. Modelos Viabes en Gravedad $f(R)$ y Cosmografía

En la subsección anterior vimos que podemos determinar el valor de las derivadas de un modelo $f(R)$ arbitrario a través de los parámetros cosmográficos y un valor de Ω_{0m} . Con ello, de los modelos viabes en gravedad $f(R)$ que mostramos en el Capitulo 1, el procedimiento sería derivar con respecto del escalar de curvatura y resolver el sistema de ecuaciones.

Modelo Exponencial

$$\begin{cases} f(R_0) = R_0 - bR_s \left(1 - e^{-R_0/R_c}\right) \\ f'(R_0) = 1 - be^{-R_0/R_s} \\ f''(R_0) = \frac{be^{-R_0/R_s}}{R_s} \\ f'''(R_0) = -\frac{be^{-R_0/R_s}}{R_s^2} \end{cases} \quad (2.107)$$

de lo anterior despejamos los parámetros b y R_c

$$\begin{cases} b = \frac{f_0''(R_0 - f_0)}{1 - f_0'} + 1 - f_0' \\ R_s = \frac{1 - f_0'}{f_0''} \end{cases} \quad (2.108)$$

Modelo de Starobinsky

$$\begin{cases} f(R_0) = R_0 - \lambda R_c \left(1 - (1 + R_0^2/R_c^2)^{-n}\right) \\ f'(R_0) = 1 - 2\lambda R_0 n (1 + R_0^2/R_c^2)^{-1-n} / R_c \\ f''(R_0) = 2\lambda n (1 + R_0^2/R_c^2)^{-n} R_c ((1 + 2n)R_0^2 - R_c^2) / (R_0^2 + R_c^2)^2 \\ f'''(R_0) = -4\lambda n (1 + n) R_0 (1 + R_0^2/R_c^2)^{-n} R_c ((1 + 2n)R_0^2 - 3R_c^2) / (R_0^2 + R_c^2)^3 \end{cases} \quad (2.109)$$

despejamos n , R_c y λ

$$n = \frac{A}{2B}, \quad (2.110)$$

con

$$A = 2(2f_0' - 1) + 6f_0''R_0 - 6f_0'f_0''R_0 - 4f_0''^2R_0^2 + f_0'f_0'''R_0^2 - 2f_0'^3f_0'''R_0^2 - f_0''f_0'''R_0^3, \quad (2.111)$$

$$B = 2 - 4f_0' - 3f_0''R_0 + 3f_0'f_0''R_0 + f_0''^2R_0^2 + f_0'''R_0^2 - f_0'f_0'''R_0^2 + 2f_0'^3f_0'''R_0^2, \quad (2.112)$$

ahora

$$R_c^2 = \frac{C}{B}, \quad (2.113)$$

con

$$C = \frac{(-1 + f_0')R_0^3(3f_0''^2R_0 - f_0'''R_0 + f_0''(-2 + 3f_0' + f_0'''R_0^2))}{-1 + f_0' + f_0''R_0}, \quad (2.114)$$

finalmente

$$\lambda = \frac{2nR_0^2 - 2f_0nR_0 + (1 - f_0')(R_0^2 - R_c^2)}{2nR_0R_c}. \quad (2.115)$$

Modelo Hu-Sawicki

Para el modelo presentado en el Capítulo 1, haremos un cambio y definiremos $\tilde{a} = aR_c^{1-n}$ y $\tilde{b} = bR_c^{-n}$, entonces

$$\begin{cases} f(R_0) = R_0 - \frac{\tilde{a}R_0^n}{1+\tilde{b}R_0^n} \\ f'(R_0) = (R_0 - \tilde{a}nR_0^n + 2\tilde{b}R_0^{1+n} + \tilde{b}^2R_0^{1+2n})/(R_0(1+\tilde{b}R_0^n)^2) \\ f''(R_0) = (\tilde{a}nR_0^{-2+n}(1+\tilde{b}R_0^n + n(-1+\tilde{b}R_0^n)))/(1+\tilde{b}R_0^n)^3 \\ f'''(R_0) = \left(-\tilde{a}nR_0^{-3+n}(2(1+\tilde{b}R_0^n)^2 + 3n(-1+\tilde{b}^2R_0^{2n})) \right. \\ \quad \left. + n^2(1-4\tilde{b}R_0^n + \tilde{b}^2R_0^{2n}) \right)/(1+\tilde{b}R_0^n)^4 \end{cases} \quad (2.116)$$

al resolver el sistema nos encontramos con una ecuación de segundo grado para n

$$\begin{aligned} 3R_0(1-f'_0)n^2 + (-8R_0^2 \frac{(1-f'_0)^2}{(R_0-f_0)} - 5R_0(1-f'_0))n \\ f_0'''R_0^3 + 6R_0^3 \frac{(1-f'_0)^2}{(R_0-f_0)^2} + 2R_0^2 \frac{(1-f'_0)^2}{(R_0-f_0)} + 2R_0(1-f'_0) = 0, \end{aligned} \quad (2.117)$$

con la solución

$$\tilde{a} = \frac{2R_0(1-f'_0)(n(R_0-f_0) - R_0(1-f'_0))}{(R_0-f_0)(R_0^2f_0'' + (n-1)R_0(1-f'_0))}, \quad (2.118)$$

finalmente

$$\tilde{b} = \frac{\tilde{a}}{(R_0-f_0)^2} \left[R_0 - f_0 - \frac{R_0}{n}(1-f'_0) \right]. \quad (2.119)$$

Así conociendo los parámetros cosmográficos podemos conocer las derivadas y finalmente conocer los valores de los parámetros de los modelos que satisfacen el ajuste con los datos observacionales.

Capítulo 3

Cosmoestadística

En este Capítulo mostraremos la estadística utilizada en la cosmología, enfocado más en la parte de la Cosmografía en el cual se realiza una estimación de los mejores valores de los parámetros cosmográficos utilizando/proponiendo distancias que se ajusten a los datos astronómicos.

Para empezar debemos decir que la cosmología es una rama de la física que ha logrado tomar terreno en la investigación científica en los últimos años gracias a un gran numero de observaciones/datos que se han detectado en el universo gracias a programas espaciales u observatorios en tierra. La cosmología es una ciencia ligada a los datos, es decir necesitamos observaciones astrofísicas para desarrollar esta ciencia, ya que a diferencia de otras ramas de la física no puede llevar a cabo experimentos en laboratorios para comprobar su teoría. Debido a que los cosmólogos están interesados en estudiar el origen y evolución del universo y, a menos que se puedan recrear universos de bolsillo, los únicos datos que tenemos se encuentran en el espacio exterior. En los últimos años ha habido una gran recolección de datos en el universo pero estos no nos serían útiles si no tenemos una manera de analizarlos, de conocer que nos quieren decir. Por lo cual la cosmología se ha tomado la tarea de descifrar estos datos de una forma en la que podemos relacionarlos con lo que ya conocemos.

Debido a esta necesidad de analizar datos los cosmólogos han desarrollado sofisticadas herramientas estadísticas a lo largo de los años, para ello se tiene que tener un buen conocimiento en las barras de error que nos proporcionan los datos así como el error técnico en la medición. Para este trabajo de tesis estamos enfocados en usar la estadística para ajustar parámetros en la teoría de gravedad modificada a través de la Cosmografía y que esta teoría sea consistente con los datos, además de confrontar los resultados obtenidos con los valores utilizados en la literatura.

3.1. Estadística Bayesiana

En cosmología estadística se usa lo que se conoce como estadística bayesiana para comprobar sus hipótesis, a diferencia de la estadística frecuentista donde la probabilidad depende de la cantidad de sucesos y el número de intentos, la estadística bayesiana ve la probabilidad como el grado de exactitud de una hipótesis. Por lo que la estadística frecuentista considera solo la distribución de probabilidad de los eventos mientras que en la estadística bayesiana se consideran a los eventos como hipótesis [48].

Las reglas de probabilidad que siguen se aplican tanto para la estadística bayesiana como frecuentista, donde $\mathcal{P}(x)$ es la probabilidad de un evento

- 1.- $\mathcal{P}(x) \geq 0$,

- 2.- $\mathcal{P}(x)$ esta normalizado, $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(x) = 1$ En el caso discreto $\int \rightarrow \sum$,
- 3.- Para eventos independientes $\mathcal{P}(x_1 \cup x_2) = \mathcal{P}(x_1) + \mathcal{P}(x_2)$,
- 4.- $\mathcal{P}(x_1, x_2) = \mathcal{P}(x_1)\mathcal{P}(x_2|x_1)$, quiere decir que la probabilidad de que el evento 1 y 2 ocurran es igual a la probabilidad de que ocurra el evento 1 tantas veces ocurra el evento 2 dado el evento 1,

Es lógico que $\mathcal{P}(x_1, x_2) = \mathcal{P}(x_2, x_1)$ con ello usando la regla 4 y si denotamos $x_1 = \text{Hipótesis}$ y $x_2 = \text{Datos}$, entonces podemos definir el teorema de Bayes como

$$\mathcal{P}(\text{Hipótesis}|\text{Datos}) = \frac{\mathcal{P}(\text{Hipótesis})\mathcal{P}(\text{Datos}|\text{Hipótesis})}{\mathcal{P}(\text{Datos})}, \quad (3.1)$$

donde $\mathcal{P}(\text{Hipótesis}|\text{Datos})$ se le conoce como la función posterior, la función de verosimilitud (likelihood) es $\mathcal{P}(\text{Datos}|\text{Hipótesis})$ y $\mathcal{P}(\text{Hipótesis})$ como la función a priori, por lo tanto el teorema de Bayes nos dice que la probabilidad de que la hipótesis sea cierta según los datos es proporcional a la probabilidad de la hipótesis por la probabilidad de los datos según la hipótesis e inversamente proporcional a la probabilidad de los datos.

El teorema de Bayes es la base de la estadística en cosmología para poder inferir que tan bueno es un modelo, sean los Datos un conjunto de datos de diferentes experimentos para un tipo de observación, y sea la Hipótesis un modelo el cual tiene ciertos parámetros por definir, entonces el teorema de Bayes nos ayuda a entender cuál es la distribución de probabilidad de los parámetros de ese modelo según los datos.

3.2. Sobre la función χ^2

Como mencionamos antes tenemos un modelo con parámetros que queremos ajustar para que concuerde con nuestros datos, para ello necesitamos una función que nos cuantifique un valor el cual nos diga si el modelo se ajusta a los datos para poder saber si el modelo es bueno o no, esta función es la chi cuadrada y según la cantidad de datos que tengamos el valor de esta chi cuadrada debe acercarse lo mejor posible a la cantidad de datos, está definida como

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(M_i(\theta) - D_i)^2}{\sigma_i^2}, \quad (3.2)$$

donde $M_i(\theta)$ es el modelo con los parámetros por ajustar, D_i son los datos y σ_i es el error reportado de los datos. Notemos que la chi cuadrada viene siendo como la función de verosimilitud en nuestro teorema de Bayes que confronta los datos según el modelo. Para encontrar el mejor ajuste de parámetros tenemos que minimizar la función chi cuadrada para maximizar la función de probabilidad que es

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}. \quad (3.3)$$

3.3. Estadística χ^2 Reducida

En estadística cuando se realizan ajuste de parámetros se busca conocer cuando el ajuste del modelo se ajustó de la mejor manera posible con las observaciones. Para ello

se han desarrollado diferentes pruebas, a una de ellas se le conoce como la χ^2 reducida (chi-cuadrada reducida), que se define como la chi-cuadrada por grado de libertad

$$\chi_\nu^2 = \frac{\chi^2}{\nu}, \quad (3.4)$$

donde χ^2 es la ecuación mostrada en (3.2) y ν es el grado de libertad definido por $\nu = n - m$ donde n es el numero de datos y m es el numero de parámetros ajustados.

La prueba establece que cuando el resultado da un valor $\chi_\nu^2 \gg 1$ indica un ajuste muy pobre con el modelo. Cuando $\chi_\nu^2 > 1$ significa que el ajuste no logró capturar de forma adecuada los datos o que los errores han sido subestimados. Un valor alrededor de uno, $\chi_\nu^2 \approx 1$ indica que el ajuste entre los datos y el modelo está acorde con el error. Y si $\chi_\nu^2 < 1$ indica que el modelo ha sobre-ajustado los datos es decir que puede que el modelo está ajustando de forma incorrecta o que el error ha sido sobreestimado.

3.4. Criterio de Información Bayesiano (BIC)

El criterio de información bayesiano (BIC) es una herramienta estadística en la selección de modelos, dado cierto conjunto de datos [49]. Se define como

$$BIC = -2\ln\mathcal{L}_{max} + k\ln N, \quad (3.5)$$

donde N es el número de datos utilizados en el ajuste, k es el número de parámetros del modelo y $\mathcal{L}$ es la función de verosimilitud, en términos de la χ_{min}^2 tenemos

$$BIC = \chi_{min}^2 + k\ln N. \quad (3.6)$$

Como se puede observar de la ecuación (3.6) este criterio penaliza más a los modelos que utilizan más parámetros libres al contrario de otros criterios de selección de modelos como el criterio de información Aikake (AIC) que se define como

$$AIC = \chi_{min}^2 + 2k. \quad (3.7)$$

Esto último es importante ya que es común que para aumentar el valor obtenido de la función de verosimilitud se lleguen a usar más parámetros libres en los modelos que puede llegar a resultar en una sobre-estimación del ajuste o en parámetros que no tienen valor físico.

Podemos interpretar al BIC como una medida de la evidencia estadística a favor o en contra de cada modelo, para así poder elegir el más adecuado para los datos. Esto último haciendo uso del factor de Bayes al comparar el valor del BIC entre dos modelos, $\Delta BIC_{ij} = BIC_i - BIC_j$, donde el BIC_i será el BIC de valor más alto, debido a que al modelo con menor valor de BIC es el que se prefiere. Entonces la evidencia en contra del modelo con mayor valor de BIC se puede resumir como se muestra en la tabla 3.1. Usando lo anterior evaluaremos el BIC del modelo $f(R)$ usando los parámetros

ΔBIC	Evidencia contra un BIC alto
[0, 2]	No vale más que una simple mención
[2, 6]	Positiva
[6, 10]	Fuerte
> 10	Decisiva

Cuadro 3.1: Tabla del Factor de Bayes

cosmográficos contra el modelo LCDM, para así elegir el modelo que presenta una mejor evidencia estadística.

3.5. Método de Montecarlo Usando Cadenas de Markov

Método de Montecarlo

La idea de una simulación de Montecarlo es el de trazar un conjunto de muestras que son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.), $x^{(i)}_{i=1}^N$ de una densidad objetivo $p(x)$ definida en un espacio de muchas dimensiones $\mathcal{Y}$. Estas N muestras se pueden usar para aproximar la densidad objetivo a través de la siguiente función empírica

$$p_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x^{(i)}}(x), \quad (3.8)$$

donde $\delta_{x^{(i)}}(x)$ es una delta de Dirac localizada en $x^{(i)}$. Con ello podemos aproximar las integrales $I(f)$ con sumas manejables $I_N(f)$ que convergen como

$$I_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x^{(i)}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} I(f) = \int_{\mathcal{Y}} f(x)p(x)dx. \quad (3.9)$$

La estimación $I_N(f)$ es imparcial y por la ley de los grandes números convergerá a $I(f)$. $I(f)$ representa nuestra función de probabilidad posterior y por tanto podemos acercar la integral en una suma si el muestreo es lo suficientemente grande. Si la varianza de $f(x)$ satisface $\sigma_f^2 = \mathcal{E}_{p(x)}(f^2(x)) - I^2(f) < \infty$, entonces el estimador de la varianza de $I_N(f)$ es igual a $\text{var}(I_N(f)) = \frac{\sigma_f^2}{N}$ y por el teorema del límite central hay convergencia en una distribución de error

$$\sqrt{N}(I_N(f) - I(f)) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma_f^2), \quad (3.10)$$

donde $\Rightarrow$ denota convergencia en la distribución [50].

Entonces una cadena de Montecarlo nos proporcionará una distribución posterior de probabilidad a partir de una media μ y una función de probabilidad propuesta para el muestreo con variables aleatorias, $\theta_t \sim p(\mu, \sigma)$, ver Figura 3.1. Como podemos ver

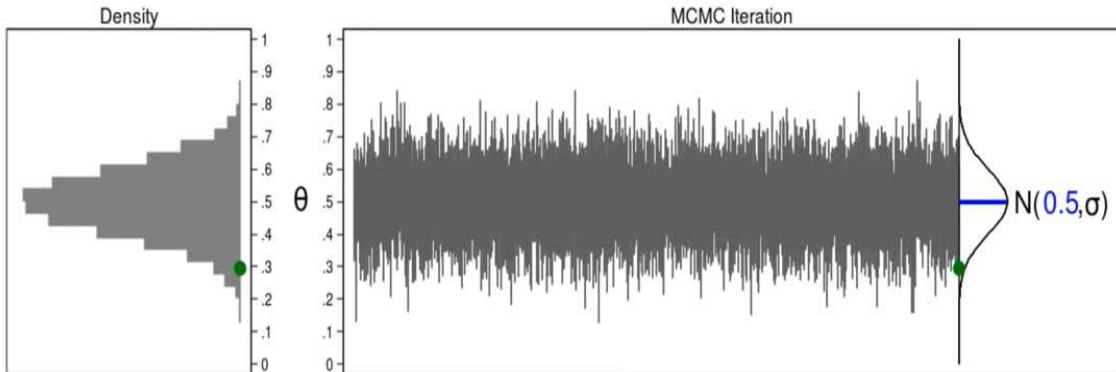


Figura 3.1: El método de Montecarlo [51].

en el gráfico con Montecarlo la función de distribución resultante no difiere mucho de la función propuesta que es una función normal.

Cadenas de Markov

En una cadena de Markov la elección de un elemento de la muestra depende de la elección anterior para generar el muestreo aleatorio. En un espacio continuo

$$\int p(x)K(x^{(i+1)}|x^{(i)})dx^{(i)} = p(x^{(i+1)}), \quad (3.11)$$

donde el kernel K es la densidad condicional de $x^{(i+1)}$ dado el valor $x^{(i)}$. Ver figura 3.2, el nuevo valor de la distribución depende del valor anterior $\theta_t \sim p(\theta_{t-1}, \sigma)$ y la función de distribución resultante no se parece en su mayoría a la función de probabilidad propuesta.

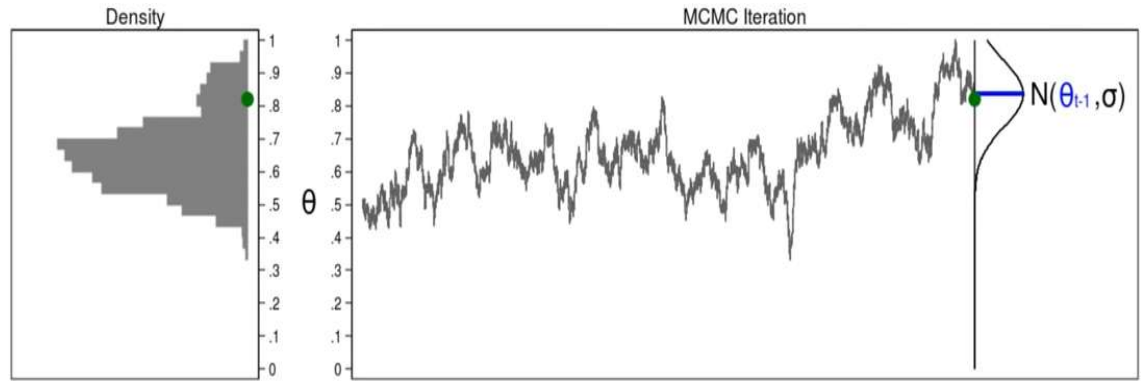


Figura 3.2: Gráfico de un muestreo usando MCMC [51].

Algoritmo Metropolis-Hastings

Existen diferentes algoritmos que utilizan el método de Montecarlo y Cadenas de Markov para hacer muestreos y ajustar parámetros en modelos estadísticos. El más popular es el algoritmo Metropolis-Hastings, se usa para determinar cuando un resultado de la muestra se toma en consideración para el siguiente valor de la muestra o se rechaza. Esto lo hacemos a través del radio de las probabilidades posteriores de los valores θ_t y θ_{t-1} que son el valor valor de la muestra resultante y previa de la muestra respectivamente y se pasa a través de una distribución invariante $p(\theta)$ y una distribución propuesta $q(\theta_t|\theta_{t-1})$ [50]

$$r(\theta_t, \theta_{t-1}) = \frac{p(\theta_t)q(\theta_{t-1})}{p(\theta_{t-1})q(\theta_t)}, \quad (3.12)$$

la aceptación del nuevo valor de la muestra está dada por

$$\mathcal{A} = \alpha(\theta_t, \theta_{t-1}) = \min[r(\theta_t, \theta_{t-1}), 1], \quad (3.13)$$

si $\mathcal{A} > 1$ nos quedamos con el nuevo valor y seguimos el método, si $\mathcal{A} < 1$ no necesariamente rechazamos el nuevo valor, usamos el valor de $\mathcal{A}$ y lo comparamos con un valor de una distribución uniforme aleatoria $u \sim U(0, 1)$, si el nuevo valor de la distribución nos otorga un valor $u < \mathcal{A}$ ahora si rechazamos el nuevo valor y regresamos al valor previo θ_{t-1} .

Este proceso nos otorga una cadena de Markov con una función de probabilidad posterior como

$$\mathcal{P}(\theta_t|\theta_{t-1}) = \mathcal{A}q(\theta_t|\theta_{t-1}). \quad (3.14)$$

3.5.1. Criterio Gelman-Rubin

Cuando se trabajan con varias cadenas de Markov al mismo tiempo que están correlacionadas entre si es importante saber cuando una cadena o todas ellas lograron converger. Para conocer esto se utiliza el llamado criterio de Gelman-Rubin.

Supongamos que tenemos M cadenas, cada una de longitud N . Para un parámetro del modelo sea θ , sea $\theta_{m,t=1}^N$ la m -ésima cadena simulada, y sea la media posterior de la muestra general $\hat{\theta} = (1/M) \sum_{m=1}^M \hat{\theta}_m$. La varianza entre las cadenas está dada por [52]

$$B = \frac{N}{M-1} \sum_{m=1}^M (\hat{\theta}_m - \hat{\theta})^2, \quad (3.15)$$

y la varianza dentro de cada una de las cadenas es

$$W = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \hat{\sigma}_m^2, \quad (3.16)$$

en este diagnóstico se basa en la asunción que la distribución objetivo es una normal, con ello la varianza total o general está dada por

$$\hat{V} = \frac{N-1}{N} W + \frac{M+1}{MN} B, \quad (3.17)$$

que es un estimador imparcial de la varianza posterior marginal de θ . Los grados de libertad estimados de una distribución t está dada por

$$d = \frac{2\hat{V}^2}{\text{Var}(\hat{V})}, \quad (3.18)$$

el factor de reducción de escalar potencial (PSRF) se define como el ratio entre $\hat{V}$ y W . Si las M cadenas han convergido a la distribución posterior objetivo, entonces el PSRF debería ser cercano a 1. La corrección al PSRF original fue dada en [53] y se considera la volatilidad del muestreo como

$$R_c = \sqrt{\frac{d+3}{d+1} \frac{\hat{V}}{W}}. \quad (3.19)$$

El PSRF estima el potencial de decrecimiento en la variabilidad entre las cadenas B con respecto a la variabilidad dentro de la cadena W . Si R_c es grande, entonces se estima que son necesarias secuencias de simulaciones más grandes para decrecer B o incrementar W debido a que las simulaciones todavía no han explorado la distribución posterior completamente.

Como se propone en [53], si $R_c < 1.2$ para todos los parámetros del modelo, uno puede estar confiado que la convergencia se ha alcanzado. De otra forma cadenas más largas serán necesarias. En los últimos años se considera una restricción más fuerte a la anterior para asegurar la convergencia y es $R_c < 1.1$, puede no parecer distinto pero en cadenas largas y de muchos parámetros es una gran diferencia entre una buena convergencia o una sobreestimación.

3.5.2. Códigos Computacionales en Cosmología

Como mencionamos la Cosmología está ligada a los datos y debido a la cantidad que han llegado a ser es necesario el desarrollo de métodos más eficaces de análisis computacionales por lo que año con año los códigos computacionales enfocados en Cosmología se han ido mejorando. En este trabajo de tesis usamos dos códigos computacionales uno de ellos es el programa CLASS y el otro es el programa MontePython.

CLASS

CLASS [54] es un código público de Boltzmann, sus siglas vienen de “Cosmic Linear Anisotropy Solving Sistem”. Un código de Boltzmann es un software que se usa para calcular el espectro de potencias teórico dado los parámetros cosmológicos. En este sentido CLASS simula la evolución de perturbaciones lineales en el Universo y estima al CMB y otros observables de estructuras de gran escala. Está escrito en el lenguaje de programación C y escrito en similitud con la paquetería de programación Classes. El programa usa el modelo Λ CDM como modelo de fondo para simular el Universo.

El uso de CLASS se enfocó en modificar las distancias del código que estaban escritas en Cosmología estándar y las pasamos a las distancias en Cosmografía que ya mostramos, todo en los módulos `background.c` y `background.h`. La implementación de los parámetros cosmográficos se dio también en este programa, los módulos donde se implementaron fueron los módulos `background.c`, `background.h` e `input.c`, el único parámetro cosmográfico restringido en el programa fue H_0 por el modulo `thermodynamics.c`, esto para que los valores de la densidad de bariones sea la correcta en la época de nucleosíntesis. Para la correcta comunicación con el programa MontePython se implementaron las nuevas distancias y parámetros cosmográficos en los módulos `cclassy.pxd` y `classy.pyx`.

MontePython

MontePython [55] es un programa de inferencia de parámetros, enfocado especialmente en Cosmología. Es un programa escrito en Python que utiliza MCMC. El código puede enlazarse fácilmente con el código de Boltzmann CLASS. MontePython contiene diferentes algoritmos de muestreo para generar cadenas de Markov. El algoritmo que utilizamos se basa en el Metropolis-Hastings pero con una estrategia nueva propuesta en [55] que llaman “muestreo rápido”.

El programa MontePython tiene incluido entre su documentación la función “Likelihood” de distintas observaciones cosmológicas más recientes. La inferencia de parámetros cosmográficos se realiza aquí con una comunicación constante con el código Boltzmann CLASS para las restricciones de los parámetros.

3.6. Datos Observacionales Cosmológicos

Para elegir objetos en el espacio para poder analizar deben de ser objetos que cumplan características que no cambien con el tiempo para poder utilizar esas características a nuestro favor y poder medir o calcular propiedades. Por ello se siguen estos tres pasos:

- 1.- Elegir un objeto que tenga una propiedad intrínseca y que sepamos cual es,
- 2.- Poder medir la propiedad aparente del objeto
- 3.- Medir con los pasos 1 y 2 la recesión o corrimiento al rojo del objeto

3.6.1. Cronómetros Cósmicos

Los Cronómetros Cósmicos son un método para medir con precisión la tasa de expansión como función del tiempo cósmico [56], el cual usa el hecho que la tasa de expansión puede representarse como

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}, \quad (3.20)$$

z	$H(z)$ (km/sec/Mpc)	σ (km/sec/Mpc)	Ref.
0.07	69	19.6	[56]
0.09	69	12	[57]
0.12	68.6	26.2	[56]
0.17	83	8	[57]
0.179	75	4	[58]
0.199	75	5	[58]
0.2	72.9	29.6	[56]
0.27	77	14	[57]
0.28	88.8	36.6	[56]
0.352	83	14	[58]
0.3802	83	13.5	[59]
0.4	95	17	[57]
0.4004	77	10.2	[59]
0.4247	87.1	11.2	[59]
0.4497	92.8	12.9	[59]
0.47	89	34	[60]
0.4783	80.9	9	[59]
0.48	97	62	[61]
0.593	104	13	[58]
0.68	92	8	[58]
0.781	105	12	[58]
0.875	125	17	[58]
0.88	90	40	[61]
0.9	117	23	[57]
1.037	154	20	[58]
1.3	168	17	[57]
1.363	160	33.6	[62]
1.43	177	18	[57]
1.53	140	14	[57]
1.75	202	40	[57]
1.965	186.5	50.4	[62]

Cuadro 3.2: Tabla de 31 datos de $H(z)$ de Cronómetros C3smicos

ya que la cantidad dz puede ser obtenida de cat3logos espectrosc3picos con alta precisi3n, la 3nica cantidad que tiene que medirse es el diferencial de tiempo en la evoluci3n del Universo (dt) en un intervalo del corrimiento al rojo (dz). Por lo tanto, una medida de dt corresponde a una medida cosmol3gica independiente del par3metro de Hubble.

Los mejores cron3metros c3smicos son galaxias que evolucionan pasivamente en una escala de tiempo mucho mayor que su diferencial de edad. La parte importante de este m3todo es que recae 3nicamente en un acercamiento tipo diferencial. Actualmente, el cat3logo de cron3metros c3smicos consta de 31 puntos presentados en la tabla 3.2 y abarca un rango del corrimiento al rojo de 0.07 a 1.965.

La funci3n χ^2 a minimizar en este caso es

$$\chi^2 = \frac{(H(y, \Theta_0) - H_{obs})^2}{\sigma^2} \quad (3.21)$$

donde Θ_0 son los par3metros cosmogr3ficos (H_0, q_0, j_0, s_0, l_0).

3.6.2. Oscilaciones Ac3sticas Bari3nicas

A inicios del universo antes de la 3poca de la recombinaci3n los fotones y la materia exist3an en un plasma mayormente conocido como plasma primordial, este plasma con

gran densidad de fotones y bariones se mantuvo comprimido por la gravedad hasta que la presión fue tan grande que volvió a expandirse. Esta acción de contracción y expansión dio lugar a vibraciones en este plasma que son muy análogos a las ondas de sonido que conocemos, estas ondas se conocen como oscilaciones acústicas bariónicas o BAO por sus siglas en inglés.

La distancia de estas reglas estándar está dada por la distancia máxima de las ondas acústicas que pudieron viajar en el plasma primordial antes de que este plasma primordial se enfriara, esta puede ser medida como función del tiempo cósmico. Usando el parámetro de Hubble $H(z)$ y la distancia angular $d_A(z)$ como función del corrimiento al rojo, podemos medir el ángulo subtendido $\Delta\theta$ de la longitud actual de la regla estándar $\Delta\chi$ como sigue

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\chi}{D_A(z)}, \quad (3.22)$$

Los datos que se usaran en este trabajo corresponden al catálogo conocido como BAO angular.

Una forma para caracterizar los clústeres de galaxias o cuásares es a través de la función de correlación de 2 puntos (2PCF). El 2PCF se basa en contar los pares de puntos de objetos cósmicos en un conjunto de datos $DD(s)$ en una distancia 3D comovil dada s y compararla con el numero de pares $RR(s)$ de un conjunto aleatorio. Este método 3D asume un modelo cosmológico de fondo, por ello el método BAO angular reduce este trabajo a una visión 2D a través de la contribución transversal de BAO, seleccionando una muestra de datos en un cascarón del corrimiento al rojo lo suficientemente delgado. Así la expresión del estimador 2PCF en una media $\tilde{z}$ es [66]

$$\omega(\theta) \equiv \frac{DD(\theta) - 2DR(\theta) + RR(\theta)}{RR(\theta)}, \quad (3.23)$$

con θ , la separación angular entre cualquier par de objetos cósmicos, la cantidad $\omega(\theta)$ da el exceso de probabilidad de encontrar dos puntos de un conjunto de datos en una separación θ dada cuando se comparan con una distribución completamente homogénea. Si hay un exceso de probabilidad alrededor de una escala característica, como en el caso de una escala acústica, esta aparecerá como un pico en el gráfico $\omega(\theta)$ vs θ . La localización del pico indica una preferencia estadística de distancia entre los pares de la muestra estudiada. Con ello, la relación en BAO angular con respecto del corrimiento al rojo es

$$\theta = \frac{r_s}{(1+z)D_A(z)}, \quad (3.24)$$

donde r_s es el horizonte del sonido que se expresa como

$$r_s(z_r, \Omega_b, \Omega_r) = \int_0^{t_r} c_s dt, \quad (3.25)$$

donde $z_r = 1100$ es el corrimiento al rojo en la época de recombinación, Ω_b la densidad de bariones, Ω_r la densidad de fotones y c_s es la velocidad del sonido en el fluido fotón-barion. Como en esta época el modelo $f(R)$ se aproxima al modelo estándar, en este trabajo usamos el horizonte de sonido calculado por el programa CLASS. En términos de cosmografía tenemos para la variable y_1

$$\theta(y_1, \Theta_0) = \frac{r_s(1-y_1)}{D_A(y_1)}, \quad (3.26)$$

y para la variable y_2

$$\theta(y_2, \Theta_0) = \frac{r_s}{(1+y_2)D_A(y_2)} \quad (3.27)$$

z	θ	σ	Ref.
0.110	19.8	1.05	[63]
0.235	9.06	0.23	[64]
0.365	6.33	0.22	[64]
0.450	4.77	0.17	[65]
0.470	5.02	0.25	[65]
0.490	4.99	0.21	[65]
0.510	4.81	0.17	[65]
0.530	4.29	0.30	[65]
0.550	4.25	0.25	[65]
0.570	4.59	0.36	[66]
0.590	4.39	0.33	[66]
0.610	3.85	0.31	[66]
0.630	3.90	0.43	[66]
0.650	3.55	0.16	[66]
2.225	1.77	0.31	[67]

Cuadro 3.3: Tabla de 15 datos de BAO angular.

Actualmente existen 15 puntos del catálogo BAO angular que se muestran en la Tabla 3.3 y abarcan un rango del corrimiento al rojo de 0.11 a 2.225.

La función χ^2 a minimizar es

$$\chi^2 = \frac{(\theta(y, \Theta_0) - \theta_{obs})^2}{\sigma^2} \quad (3.28)$$

3.6.3. Supernovas Tipo Ia

Las supernovas tipo Ia resultan ser buenas candelas estándar para medir su brillo y con ello inferir distancias. El modulo de la distancia observada de una supernova está dado por [68]

$$\mu = m_B^* - M, \quad (3.29)$$

donde M es la magnitud absoluta y con

$$m_B^* = m_B + \tilde{\alpha}X_1 - \beta C + \Delta_M + \Delta_B, \quad (3.30)$$

donde m_B^* es la magnitud aparente corregida de la supernova, X_1 describe el tiempo extendido de la curva de luz, C es el color en su brillo máximo, $\tilde{\alpha}$, β , Δ_M , Δ_B y M son parámetros molestos (nuisance parameters), que son parámetros de no interés pero que deben considerarse en el testeo de los parámetros de interés.

El módulo de la distancia a través de un modelo se calcula como

$$\mu(z) = 5 \log \left[\frac{D_L(z)}{10pc} \right], \quad (3.31)$$

donde $D_L(z)$ es la distancia de luminosidad que ya mostramos y que en nuestro caso es la determinada en cosmografía. Los datos que usaremos vienen del catálogo más completo de supernovas que corresponde al catálogo Pantheon [69] y contiene un total de 1048 supernovas, ver Figura 3.3.

La función χ^2 a minimizar en este caso es

$$\chi^2 = [\mu_{obs} - \mu(y, \Theta_0)]^T C_{SNe}^{-1} [\mu_{obs} - \mu(y, \Theta_0)], \quad (3.32)$$

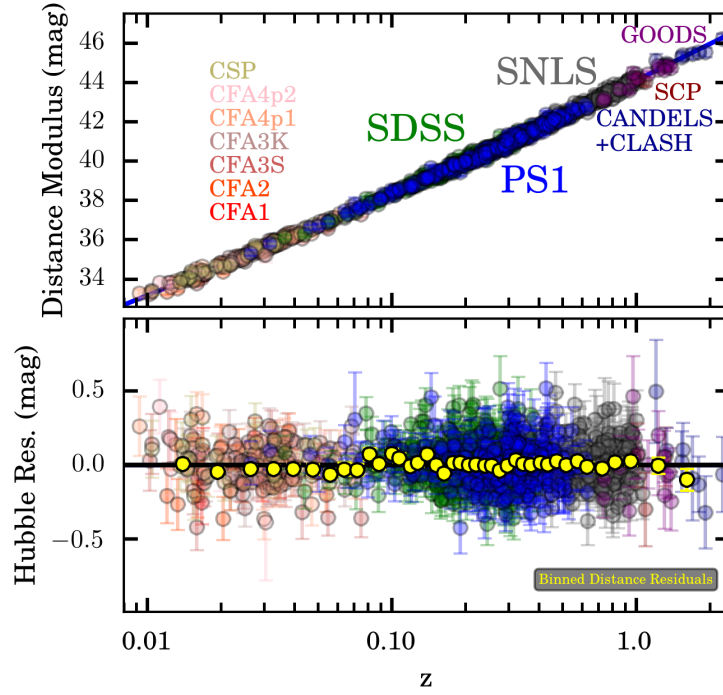


Figura 3.3: Gráfica de los 1048 supernovas del catálogo Panteón, donde se confrontan el corrimiento al rojo vs el módulo de la distancia [69].

donde C_{SNe}^{-1} es la matriz de covarianza de las supernovas. Como se ha mostrado en varios artículos [68], no se puede ajustar al parámetro H_0 solamente con datos de Supernovas tipo Ia debido a que el parámetro H_0 y la magnitud absoluta están altamente degenerados. Para ello necesitamos combinarlo con otros experimentos.

3.6.4. Cefeidas

La colaboración SH0ES [70] ha determinado el valor de H_0 de las supernovas, haciendo uso de Cefeidas que son estrellas que presentan modulaciones periódicas de luminosidad y que se encuentran en un rango del corrimiento al rojo muy bajo $z < 0.01$, el catálogo de Cefeidas es de 70 puntos observados por el telescopio espacial Hubble (HST) observando la región del Gran Cúmulo de Magallanes, el parámetro de Hubble al día de hoy reportado es $H_0^{CPH} = 73.04 \pm 1.04 \text{ km/s/Mpc}$ [11]. Usando este dato en conjunto con Pantheon podemos tener un correcto ajuste del parámetro H_0 para datos de tiempos tardíos. La función χ^2 a minimizar es

$$\chi^2 = \frac{(H_0^{CPH} - H_0)^2}{\sigma_{CPH}^2}. \quad (3.33)$$

3.6.5. H0LICOW

H0LICOW [71] es un catálogo que incluye seis lentes de cuásares y que mide el valor al día de hoy de la constante de Hubble. Los lentes gravitacionales fuertes nos permiten medir distancias a través del tiempo retardado entre las imágenes múltiples de la fuente de la lente. Para una lente a un corrimiento al rojo z_d y una fuente a un

corrimiento al rojo z_s , la distancia del tiempo retardado está dada por [68]

$$D_{\Delta t} = (1 + z_d) \frac{D_d D_s}{D_{ds}}, \quad (3.34)$$

donde D_d y D_s son la distancia diámetro angular a la lente y a la fuente respectivamente por un observador en tierra, y D_{ds} es la distancia diámetro angular de la lente a la fuente. Para medir el tiempo de retardo entre dos imágenes i y j tenemos

$$\Delta t_{ij} = t(\theta_i, \beta) - t(\theta_j, \beta) = \frac{D_{\Delta t}}{c} \Delta \phi_{ij}, \quad (3.35)$$

donde θ_i y θ_j son la posición de las imágenes, β es la posición de la fuente, c es la velocidad de la luz y ϕ es el potencial de Fermat. Una vez conocido el potencial de Fermat, modelando la distribución de masa de la lente, y con Δt medida, es posible inferir el valor de la distancia de tiempo retardado $D_{\Delta t}$.

La función χ^2 a minimizar en este caso es

$$\chi^2 = [D_{\Delta t}^{obs} - D_{\Delta t}(y, \Theta_0)]^T C_{QSR}^{-1} [D_{\Delta t}^{obs} - D_{\Delta t}(y, \Theta_0)], \quad (3.36)$$

donde C_{QSR} es la matriz de covarianza de los cuásares.

Finalmente la función χ^2 para el conjunto de datos de tiempo tardío sería

$$\chi^2 = \chi_{CC}^2 + \chi_{BAO}^2 + \chi_{SNe}^2 + \chi_{CPH}^2 + \chi_{QSR}^2. \quad (3.37)$$

Con toda la Cosmoestadística ya presentada podemos realizar el ajuste de los parámetros cosmológicos, y analizar los resultados en gravedad $f(R)$.

Capítulo 4

Resultados

En este Capítulo mostraremos los ajustes de los parámetros cosmográficos mostrados en el Capítulo 2 usando la estadística mostrada en el Capítulo 3, la evaluación de los criterios de viabilidad en gravedad $f(R)$ mostrados en el Capítulo 1 usando lo mostrado en el Capítulo 2 con Cosmografía y si se cumplen las condiciones de viabilidad los valores de los parámetros de los modelos para cada caso.

Para los parámetros cosmográficos logramos convergencia en 4 diferentes conjuntos de datos, esto significa que en los 4 casos obtuvimos un valor del criterio de Gelman-Rubin <1.1 para las cadenas de Markov. Los 4 conjuntos de datos fueron Cronómetros Cósmicos (CC)+Pantheon+Cefeidas, CC+Pantheon+BAO Angular+Cefeidas, CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas y con todos los conjuntos de datos. Los rangos usados para el ajuste se encuentran en la tabla 4.1, donde $h = H_0/100$. Donde estos

Parámetro	Prior
h	$[0.6, 0.8]$
q_0	$[-2, 2]$
$\dot{q}_0$	$[-4, 4]$
s_0	$[-30, 30]$
l_0	$[-20, 100]$

Cuadro 4.1: Priors de los parámetros cosmográficos

rangos se encontraron partiendo de lo propuesto en [41] y buscando un buen ajuste de el criterio de Gelman-Rubin para los parámetros cosmográficos.

4.1. Cronómetros Cósmicos+Pantheon+Cefeidas

Los valores de los parámetros cosmográficos obtenidos se pueden observar en la tabla 4.2, obtuvimos en este caso un $H_0 = 72.15$ Km/s/Mpc y un valor del parámetro de desaceleración de $q_0 = -0.7312$, un valor elevado comparado al valor estándar que se usa en proyectos como SH0ES con un valor de $q_0 = -0.55$.

El valor mínimo de la función χ^2 fue 1043, el total de datos en este conjunto es de 1080, con 6 parámetros por ajustar, eso nos da una χ^2 reducida con valor de $\chi^2_\nu = 0.971$ bastante cercano a 1, por lo cual podemos decir que la estadística entre los datos y los parámetros cosmográficos fue buena. En la Figura 4.1 se muestran los contornos de confianza a 1σ y 2σ obtenidos con este conjunto de datos.

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
h	0.7218	$0.7215^{+0.0093}_{-0.0097}$	0.7029	0.7404
q	-0.7569	$-0.7312^{+0.12}_{-0.094}$	-0.9426	-0.5292
j	3.22	$3.085^{+0.63}_{-0.72}$	1.726	4.519
s	9.897	$10.83^{+2.5}_{-3}$	5.157	16.6
l	17.06	$15.78^{+8.3}_{-11}$	-3.971	37.83
M	-19.3	$-19.3^{+0.031}_{-0.031}$	-19.36	-19.24

$$-\ln \mathcal{L}_{\min} = 521.553, \text{ minimum } \chi^2 = 1043$$

Cuadro 4.2: Parámetros cosmológicos evaluados al tiempo presente para Cronómetros Cósmicos, Pantheon y Cefeidas.

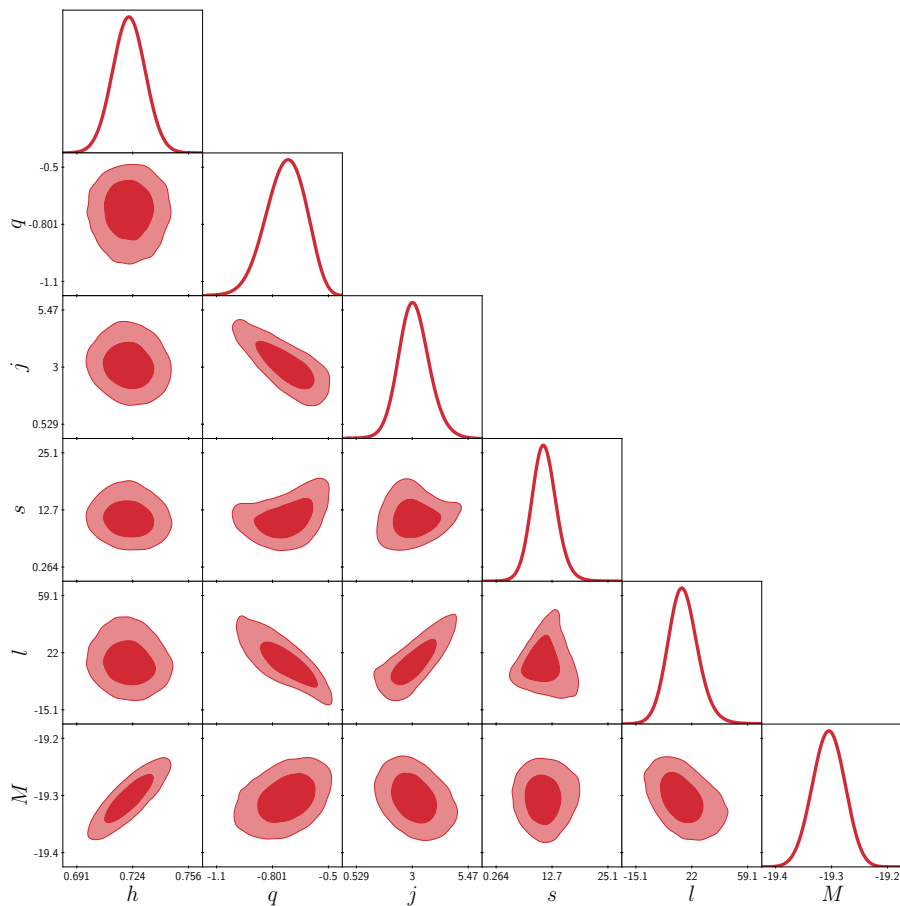


Figura 4.1: Gráfica de los contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos para Cronómetros Cósmicos, Pantheon y Cefeidas, en orden de arriba a abajo son h, q, j, s, l y M .

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
h	0.7242	$0.7247^{+0.0094}_{-0.0094}$	0.7064	0.7431
q	-0.6014	$-0.599^{+0.092}_{-0.072}$	-0.7638	-0.4423
j	2.68	$2.712^{+0.56}_{-0.5}$	1.595	3.821
s	11.4	11.76^{+3}_{-4}	4.826	19.34
l	3.829	$2.853^{+9.3}_{-8.4}$	-16.01	21.53
M	-19.27	$-19.27^{+0.028}_{-0.028}$	-19.32	-19.21

$$-\ln \mathcal{L}_{\min} = 540.686, \text{ minimum } \chi^2 = 1081$$

Cuadro 4.3: Parámetros cosmográficos evaluados al tiempo presente para Cronómetros Cósmicos, Pantheon, BAO Angular y Cefeidas.

4.2. Cronómetros Cósmicos+Pantheon+BAO+Cefeidas

Los valores de los parámetros cosmográficos obtenidos se pueden observar en la tabla 4.3, obtuvimos en este caso un $H_0 = 72.47$ Km/s/Mpc, un valor un poco mayor al encontrado en con el conjunto sin BAO y un valor del parámetro de desaceleración de $q_0 = -0.599$ que es menor al valor del conjunto sin BAO y más cercano al valor estándar de $q_0 = -0.55$.

El valor mínimo de la función χ^2 fue 1081, el total de datos en este conjunto es de 1095, con 6 parámetros por ajustar, eso nos da una χ^2 reducida con valor de $\chi^2_{\nu} = 0.992$ bastante cercano a 1, por lo cual podemos decir que la estadística entre los datos y los parámetros cosmográficos fue excelente. En la Figura 4.2 se muestran los contornos de confianza a 1σ y 2σ obtenidos con este conjunto de datos.

4.3. Cronómetros Cósmicos+Pantheon+H0licow+Cefeidas

Para estos datos, los valores de los parámetros cosmográficos obtenidos se pueden observar en la tabla 4.4, obtuvimos en este caso un $H_0 = 70.57$ Km/s/Mpc un valor menor al encontrado en el conjunto sin H0licow y un valor del parámetro de desaceleración de $q_0 = -0.6237$ que es menor al valor del conjunto sin H0licow. Esto indica que al incluir los datos de H0licow, los parámetros disminuyen a valores de datos de tiempos tempranos.

El valor mínimo de la función χ^2 fue 1155, el total de datos en este conjunto es de 1086, con 6 parámetros por ajustar, eso nos da una χ^2 reducida con valor de $\chi^2_{\nu} = 1.069$ bastante cercano a 1, pero a diferencia de los casos anteriores parece que la inclusión de H0licow tiende a sobreestimar los errores. En la Figura 4.3 se muestran los contornos de confianza a 1σ y 2σ obtenidos con este conjunto de datos.

4.4. Cronómetros Cósmicos+Pantheon+H0licow+BAO+Cefeidas (Todos los Datos)

Usando todos los datos, los valores de los parámetros cosmográficos obtenidos se pueden observar en la tabla 4.5, obtuvimos en este caso un $H_0 = 70.53$ Km/s/Mpc, un

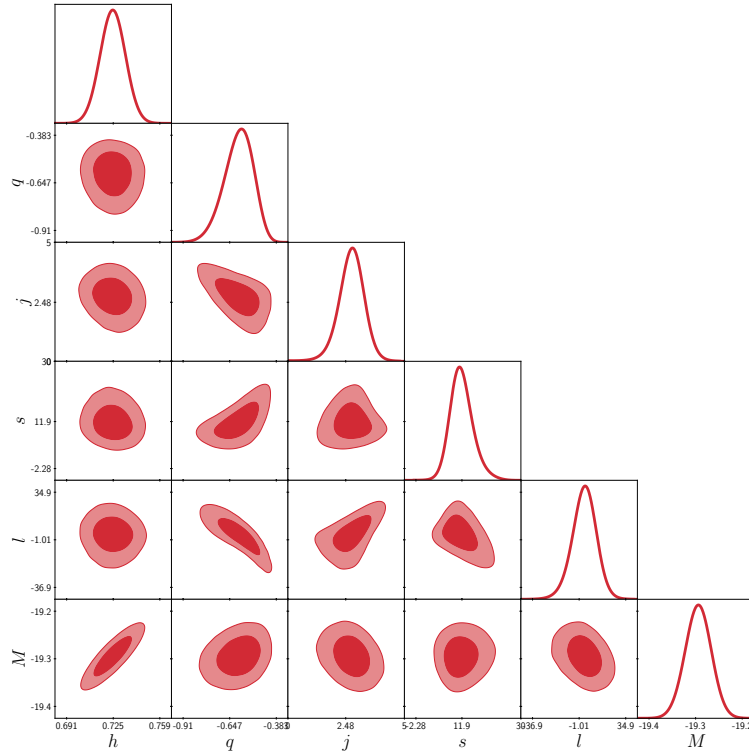


Figura 4.2: Gráfica de los contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos para Cronómetros Cósmicos, Pantheon, BAO Angular y Cefeidas, en orden de arriba a abajo son h , q , j , s , l y M .

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
h	0.7083	$0.7057^{+0.0086}_{-0.0086}$	0.6888	0.7227
q	-0.681	$-0.6237^{+0.12}_{-0.088}$	-0.8522	-0.4191
j	1.036	$0.3672^{+1.1}_{-1.3}$	-1.675	2.475
s	1.041	$-1.692^{+8.5}_{-4.8}$	-17.07	10.79
l	15.92	$26.46^{+7.4}_{-19}$	2.649	61.03
M	-19.35	$-19.35^{+0.027}_{-0.025}$	-19.4	-19.3

$$-\ln \mathcal{L}_{\min} = 577.301, \text{ minimum } \chi^2 = 1155$$

Cuadro 4.4: Parámetros cosmológicos evaluados al tiempo presente para Cronómetros Cósmicos, Pantheon, H0licow y Cefeidas.

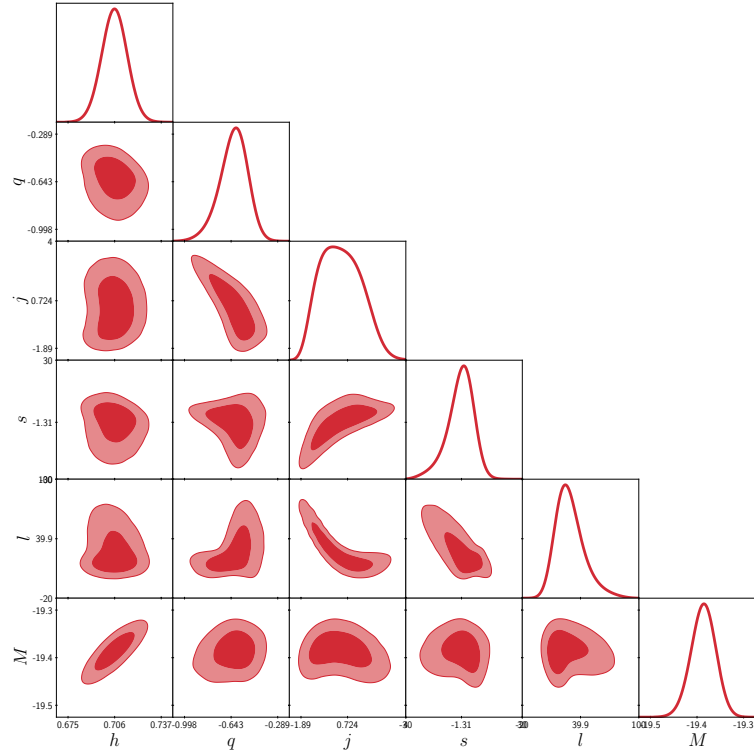


Figura 4.3: Gráfica de los contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos para Cronómetros Cósmicos, Pantheon, H0licow y Cefeidas, en orden de arriba a abajo son h, q, j, s, l y M .

valor menor a todos los casos anteriores y un valor del parámetro de desaceleración de $q_0 = -0.4707$ que es mayor a todos los casos anteriores. Como mencionamos en el caso anterior, todo indica que al incluir los datos de H0licow, los parámetros disminuyen a valores similares a los ajustes de datos de tiempos tempranos y junto con BAO, aunque no hubo mucho cambio en la constante de Hubble, el parámetro de desaceleración si se vio más afectado.

El valor mínimo de la función χ^2 fue 1199, el total de datos en este conjunto es de 1101, con 6 parámetros por ajustar, eso nos da una χ^2 reducida con valor de $\chi^2_\nu = 1.094$ empezándose a alejar de 1, refiriéndonos al caso anterior con la inclusión de H0licow que aumentó el valor de la χ^2_ν todo indica que, con además la inclusión de BAO, esto aumenta un poco más. En la Figura 4.4 se muestran los contornos de confianza a 1σ y 2σ obtenidos con este conjunto de datos.

4.5. Cosmografía y Condiciones de Viabilidad

Usando los resultados de los parámetros cosmológicos mostrados anteriormente y haciendo uso de las ecuaciones (2.96-2.99) podemos verificar que se cumplen las condiciones de viabilidad (i) y (ii) presentadas en el Capítulo 1, para la condición (i) y para que cumpla las pruebas a nivel sistema solar existe una restricción a los valores de $f'(R_0)$, usaremos el valor que propusimos a través de la constante gravitacional que es $|f'(R_0) - 1| < 2.2 \times 10^{-5}$. Para la condición (ii) debemos ver que se obtenga $f''(R_0) = f_2 > 0$ si esto no se cumple no usaremos esos resultados para ajustar los parámetros de los modelos viables de gravedad modificada. En las ecuaciones (2.96-2.99) tenemos como parámetro libre Ω_{m0} , por lo que usaremos 2 valores de Ω_{m0} presentados en

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
h	0.7056	$0.7053^{+0.0079}_{-0.0078}$	0.6899	0.7206
q	-0.4839	$-0.4707^{+0.095}_{-0.09}$	-0.6562	-0.2892
j	0.09917	$0.1454^{+0.7}_{-0.86}$	-1.222	1.575
s	2.201	$3.1^{+6.9}_{-6.5}$	-10.55	16.34
l	18.97	17.19^{+13}_{-16}	-12.19	50.08
M	-19.33	$-19.33^{+0.024}_{-0.023}$	-19.37	-19.28

$$-\ln \mathcal{L}_{\min} = 599.671, \text{ minimum } \chi^2 = 1199$$

Cuadro 4.5: Parámetros cosmológicos evaluados al tiempo presente para Cronómetros Cósmicos, Pantheon, H0licow, BAO Angular y Cefeidas.

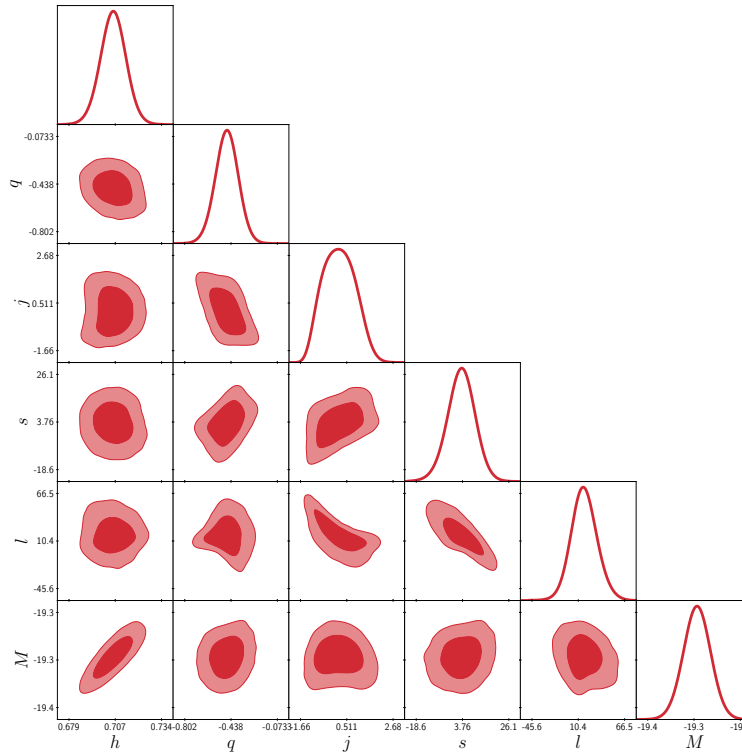


Figura 4.4: Gráfica de los contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos para Cronómetros Cósmicos, Pantheon, H0licow, BAO Angular y Cefeidas, en orden de arriba a abajo son h, q, j, s, l y M .

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
f_2	-0.001377	$-0.0009182^{+0.0021}_{-0.0015}$	-0.004841	0.002589
f_0	6.26	$6.076^{+0.62}_{-0.82}$	4.709	7.52
w_{eff}	-1.136	$-1.111^{+0.087}_{-0.081}$	-1.276	-0.9484

Cuadro 4.6: Valores de las derivadas de un modelo $f(R)$ arbitrario con la condición $|f'(R_0) - 1| < 2 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{m0} = 0.27$ y derivados usando los parámetros cosmográficos por datos de CC+Pantheon+Cefeidas.

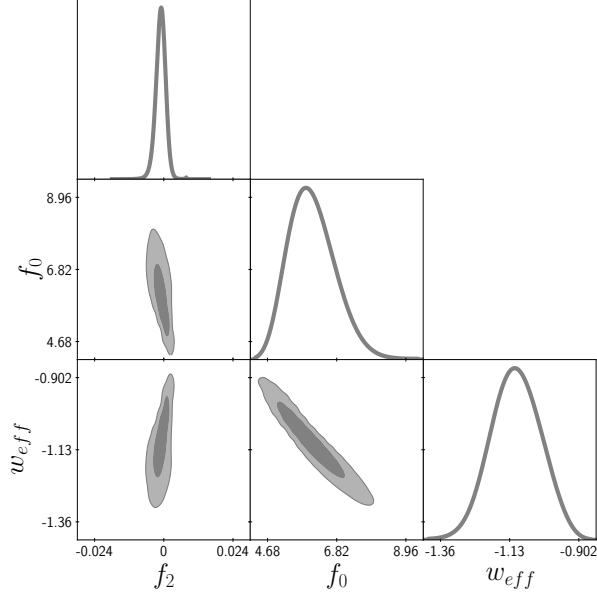


Figura 4.5: Contornos de confianza de las derivadas de un modelo $f(R)$ arbitrario con la condición $|f'(R_0) - 1| < 2 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{m0} = 0.27$ y derivados usando los parámetros cosmográficos por datos de CC+Pantheon+Cefeidas, en orden de arriba a abajo son $f''(R_0)$, $f'''(R_0)$, $f(R_0)$ y w_{eff} .

otros experimentos, $\Omega_{m0} = 0.315$, que proviene de los resultados de Planck 2018 [9], y $\Omega_{m0} = 0.27$ antiguo valor usado de los resultados de WMAP 5-year [72], para analizar el comportamiento de las derivadas y también de la constante w_{eff} evaluada al tiempo presente que viene de la ecuación (1.66) mostrada en el Capítulo 1.

4.5.1. CC+Pantheon+Cefeidas

$$|f'(R_0) - 1| < 2.2 \times 10^{-5} \text{ y } \Omega_{m0} = 0.27$$

Los valores de las derivadas para este caso se pueden ver en la Tabla 4.6, son valores adimensionales. Como podemos ver $f''(R_0) < 0$ y por lo tanto la condición (ii) no se cumple. El valor de $w_{eff} < -1$ por lo tanto nos da el comportamiento de un fluido fantasma.

$$|f'(R_0) - 1| < 2.2 \times 10^{-5} \text{ y } \Omega_{m0} = 0.315$$

Los valores de las derivadas para este caso se pueden ver en la Tabla 4.7, son valores adimensionales. Como podemos ver $f''(R_0) < 0$ y por lo tanto la condición (ii) no se

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
f_2	-0.003873	$-0.003333^{+0.0028}_{-0.002}$	-0.008222	0.001499
f_0	6.707	$6.513^{+0.67}_{-0.95}$	4.988	8.137
w_{eff}	-1.205	$-1.179^{+0.091}_{-0.083}$	-1.35	-1.009

Cuadro 4.7: Valores de las derivadas de un modelo $f(R)$ arbitrario con la condición $|f'(R_0) - 1| < 2 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{m0} = 0.315$ y derivados usando los parámetros cosmológicos por datos de CC+Pantheon+Cefeidas.

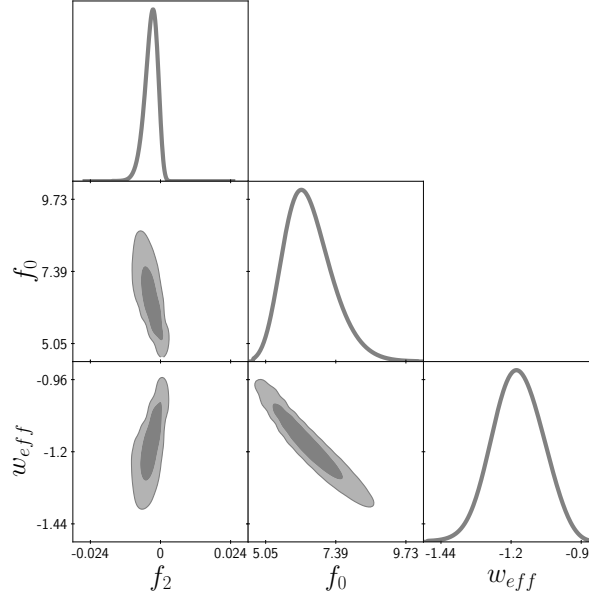


Figura 4.6: Contornos de confianza de las derivadas de un modelo $f(R)$ arbitrario con la condición $|f'(R_0) - 1| < 2 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{m0} = 0.315$ y derivados usando los parámetros cosmológicos por datos de CC+Pantheon+Cefeidas, en orden de arriba a abajo son $f''(R_0)$, $f'''(R_0)$, $f(R_0)$ y ω_{eff} .

cumple. El valor de $\omega_{eff} < -1$ por lo tanto nos da el comportamiento de un fluido fantasma.

4.5.2. CC+Pantheon+BAO+Cefeidas

$|f'(R_0) - 1| < 2.2 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{m0} = 0.27$

Los valores de las derivadas para este caso se pueden ver en la Tabla 4.8, son valores adimensionales. Como podemos ver $f''(R_0) > 0$ y por lo tanto la condición (ii) se cumple. El valor de $\omega_{eff} \approx -1$ por lo tanto nos da el comportamiento aproximado de una constante cosmológica.

$|f'(R_0) - 1| < 2.2 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{m0} = 0.315$

Los valores de las derivadas para este caso se pueden ver en la Tabla 4.9, son valores adimensionales. Como podemos ver $f''(R_0) < 0$ y por lo tanto la condición (ii) no se cumple. El valor de $\omega_{eff} < -1$ por lo tanto nos da el comportamiento de un fluido fantasma.

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
f_2	0.001227	$0.001478^{+0.0014}_{-0.0013}$	-0.001319	0.004193
f_0	5.172	$5.148^{+0.43}_{-0.57}$	4.205	6.163
w_{eff}	-1.006	$-1.001^{+0.076}_{-0.066}$	-1.14	-0.868

Cuadro 4.8: Valores de las derivadas de un modelo $f(R)$ arbitrario con la condición $|f'(R_0) - 1| < 2 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{m0} = 0.27$ y derivados usando los parámetros cosmográficos por datos de CC+Pantheon+BAO+Cefeidas.

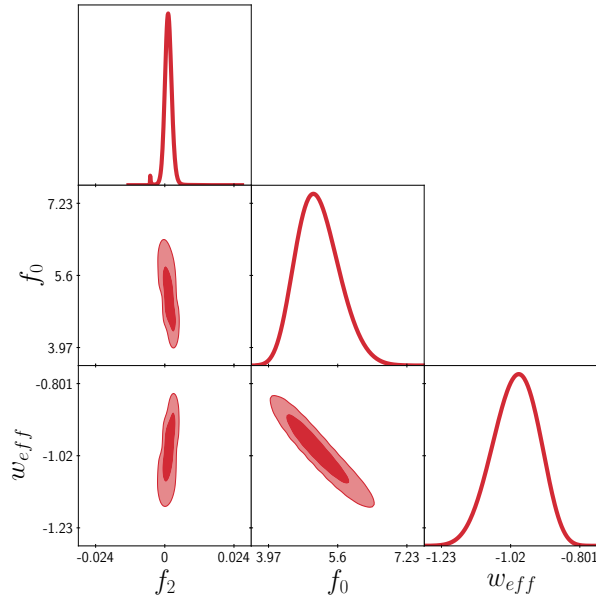


Figura 4.7: Contornos de confianza de las derivadas de un modelo $f(R)$ arbitrario con la condición $|f'(R_0) - 1| < 2 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{m0} = 0.27$ y derivados usando los parámetros cosmográficos por datos de CC+Pantheon+BAO+Cefeidas, en orden de arriba a abajo son $f''(R_0)$, $f'''(R_0)$, $f(R_0)$ y w_{eff} .

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
f_2	-0.0005919	$-0.000452^{+0.002}_{-0.0015}$	-0.003891	0.002855
f_0	5.526	$5.513^{+0.46}_{-0.65}$	4.486	6.639
w_{eff}	-1.069	$-1.064^{+0.078}_{-0.07}$	-1.208	-0.9245

Cuadro 4.9: Valores de las derivadas de un modelo $f(R)$ arbitrario con la condición $|f'(R_0) - 1| < 2 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{m0} = 0.315$ y derivados usando los parámetros cosmográficos por datos de CC+Pantheon+BAO+Cefeidas.

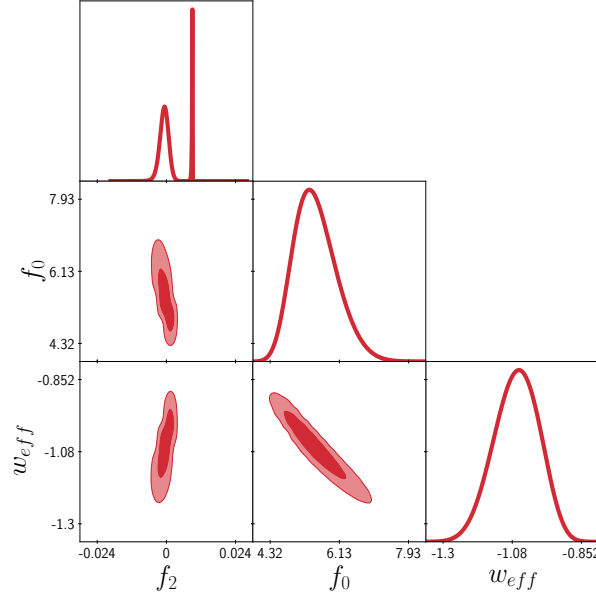


Figura 4.8: Contornos de confianza de las derivadas de un modelo $f(R)$ arbitrario con la condición $|f'(R_0) - 1| < 2 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{m0} = 0.315$ y derivados usando los parámetros cosmográficos por datos de CC+Pantheon+BAO+Cefeidas, en orden de arriba a abajo son $f''(R_0)$, $f'''(R_0)$, $f(R_0)$ y w_{eff} .

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
f_2	-0.006511	$0.00284^{+0.0097}_{-0.0045}$	-0.01217	0.01559
f_0	5.639	$5.644^{+0.41}_{-0.63}$	4.503	6.928
w_{eff}	-1.053	$-1.007^{+0.074}_{-0.081}$	-1.16	-0.8446

Cuadro 4.10: Valores de las derivadas de un modelo $f(R)$ arbitrario con la condición $|f'(R_0) - 1| < 2 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{m0} = 0.27$ y derivados usando los parámetros cosmográficos por datos de CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas.

4.5.3. CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas

$$|f'(R_0) - 1| < 2.2 \times 10^{-5} \text{ y } \Omega_{m0} = 0.27$$

Los valores de las derivadas para este caso se pueden ver en la Tabla 4.10, son valores adimensionales. Como podemos ver $f''(R_0) > 0$ en el valor promedio pero negativo en el mejor valor encontrado, por lo tanto la condición (ii) se cumple en el valor promedio. El valor de $w_{eff} < -1$ por lo tanto nos da el comportamiento de un fluido fantasma.

$$|f'(R_0) - 1| < 2.2 \times 10^{-5} \text{ y } \Omega_{m0} = 0.315$$

Los valores de las derivadas para este caso se pueden ver en la Tabla 4.11, son valores adimensionales. Como podemos ver $f''(R_0) > 0$ en el valor promedio pero negativo en el mejor valor, por lo tanto la condición (ii) se cumple para el valor promedio. El valor de $w_{eff} < -1$ por lo tanto nos da el comportamiento de un fluido fantasma.

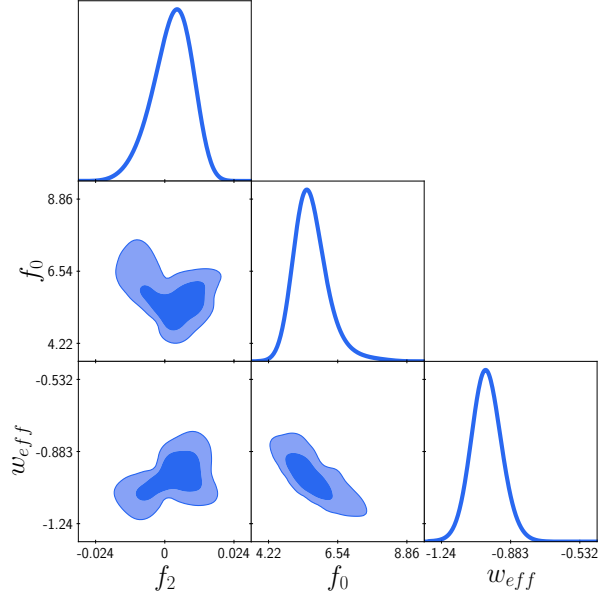


Figura 4.9: Contornos de confianza de las derivadas de un modelo $f(R)$ arbitrario con la condición $|f'(R_0) - 1| < 2 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{m0} = 0.27$ y derivados usando los parámetros cosmológicos por datos de CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas, en orden de arriba a abajo son $f''(R_0)$, $f'''(R_0)$, $f(R_0)$ y w_{eff} .

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
f_2	-0.01152	$0.002443^{+0.013}_{-0.0079}$	-0.01889	0.01998
f_0	5.858	$5.996^{+0.47}_{-0.68}$	4.705	7.398
w_{eff}	-1.1	$-1.065^{+0.077}_{-0.081}$	-1.227	-0.9002

Cuadro 4.11: Valores de las derivadas de un modelo $f(R)$ arbitrario con la condición $|f'(R_0) - 1| < 2 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{m0} = 0.315$ y derivados usando los parámetros cosmológicos por datos de CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas.

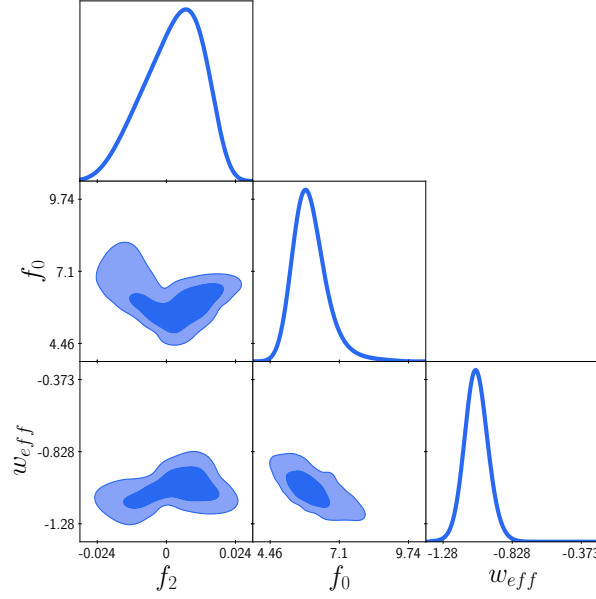


Figura 4.10: Contornos de confianza de las derivadas de un modelo $f(R)$ arbitrario con la condición $|f'(R_0) - 1| < 2 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{m0} = 0.315$ y derivados usando los parámetros cosmográficos por datos de CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas, en orden de arriba a abajo son $f''(R_0)$, $f'''(R_0)$, $f(R_0)$ y w_{eff} .

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
f_2	0.008157	$0.006176^{+0.0044}_{-0.0045}$	-0.001638	0.01511
f_0	4.94	$4.826^{+0.51}_{-0.43}$	3.903	5.653
w_{eff}	-0.8994	$-0.8844^{+0.085}_{-0.087}$	-1.046	-0.7263

Cuadro 4.12: Valores de las derivadas de un modelo $f(R)$ arbitrario con la condición $|f'(R_0) - 1| < 2 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{m0} = 0.27$ y derivados usando los parámetros cosmográficos por datos de CC+Pantheon+BAO+H0licow+Cefeidas.

4.5.4. Todos los datos

$$|f'(R_0) - 1| < 2.2 \times 10^{-5} \text{ y } \Omega_{m0} = 0.27$$

Los valores de las derivadas para este caso se pueden ver en la Tabla 4.12, son valores adimensionales. Como podemos ver $f''(R_0) > 0$ y por lo tanto la condición (ii) se cumple. El valor de $w_{eff} > -1$ por lo tanto nos da el comportamiento de un fluido quintaesencia.

$$|f'(R_0) - 1| < 2.2 \times 10^{-5} \text{ y } \Omega_{m0} = 0.315$$

Los valores de las derivadas para este caso se pueden ver en la Tabla 4.13, son valores adimensionales. Como podemos ver $f''(R_0) > 0$ y por lo tanto la condición (ii) se cumple. El valor de $w_{eff} > -1$ por lo tanto nos da el comportamiento de un fluido quintaesencia.

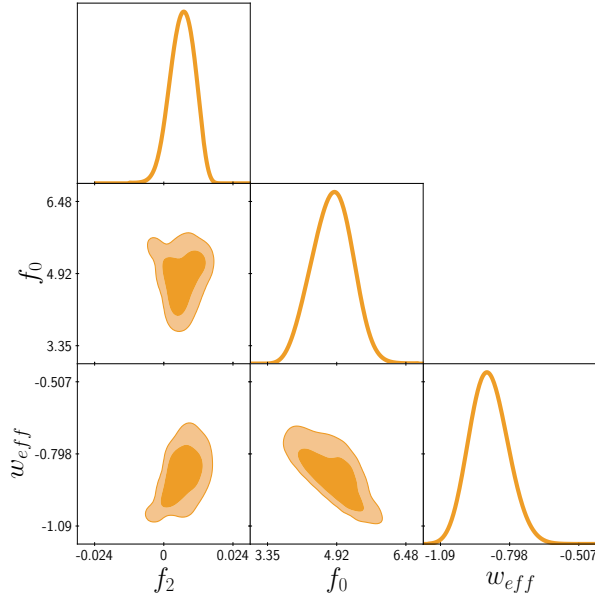


Figura 4.11: Contornos de confianza de las derivadas de un modelo $f(R)$ arbitrario con la condición $|f'(R_0) - 1| < 2 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{m0} = 0.27$ y derivados usando los parámetros cosmográficos por datos de CC+Pantheon+BAO+H0licow+Cefeidas, en orden de arriba a abajo son $f''(R_0)$, $f'''(R_0)$, $f(R_0)$ y w_{eff} .

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
f_2	0.005749	$0.005389^{+0.0059}_{-0.0058}$	-0.004629	0.01694
f_0	5.087	$5.082^{+0.53}_{-0.55}$	4.103	6.053
w_{eff}	-0.9579	$-0.9406^{+0.079}_{-0.096}$	-1.102	-0.776

Cuadro 4.13: Valores de las derivadas de un modelo $f(R)$ arbitrario con la condición $|f'(R_0) - 1| < 2 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{m0} = 0.315$ y derivados usando los parámetros cosmográficos por datos de CC+Pantheon+BAO+H0licow+Cefeidas.

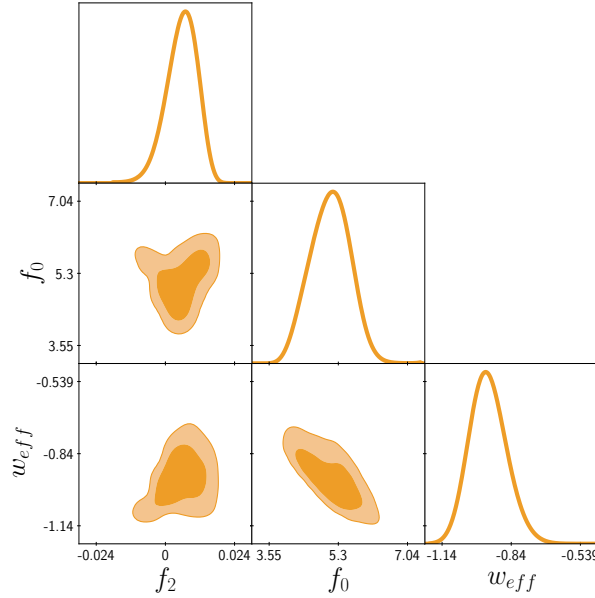


Figura 4.12: Contornos de confianza de las derivadas de un modelo $f(R)$ arbitrario con la condición $|f'(R_0) - 1| < 2 \times 10^{-5}$ y $\Omega_{m0} = 0.315$ y derivados usando los parámetros cosmológicos por datos de CC+Pantheon+BAO+H0licow+Cefeidas, en orden de arriba a abajo son $f''(R_0)$, $f'''(R_0)$, $f(R_0)$ y ω_{eff} .

4.6. Parámetros de los modelos viables

En la sección anterior se mostraron que valores de $f(R_0)$, $f''(R_0)$, $f'''(R_0)$ y ω_{eff} se obtuvieron con los diferentes valores obtenidos de los parámetros cosmológicos, vimos que para $\Omega_{m0} = 0.27$ los conjuntos de datos que cumplieron la condición (ii) de viabilidad tanto en su valor promedio como en su mejor valor fueron CC+Pantheon+BAO+Cefeidas y Todos los datos juntos y en el caso de $\Omega_{m0} = 0.315$ los conjuntos de datos que cumplieron la condición (ii) de viabilidad tanto en su mejor valor como en su valor promedio solo el conjunto de Todos los datos. Por lo tanto, solo consideraremos esos casos para el ajuste de los parámetros de los modelos viables.

Para cada modelo fijamos el valor de R_s y R_c para cumplir con la escala característica del universo y satisfacer la condición (iii), ya que usando el despeje para R_s y R_c el valor no es cosmológicamente viable pero es entendible ya que este valor está construido para satisfacer esa condición en cada modelo, entonces para el modelo exponencial usaremos $R_s = 2.5H_0^2$ utilizado en [1], para el modelo de Starobinsky la definición para $R_c = 6\Omega_{\Lambda 0}H_0^2$ en [5], y para el modelo de Hu-Sawicki usaremos que $\frac{a}{b} = \frac{6\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}$ en [6] y por la definición que usamos $\tilde{a} = aR_c^{1-n}$ y $\tilde{b} = bR_c^{-n}$ al despejar tenemos que $R_c = \frac{\Omega_{m0}\tilde{a}}{6\Omega_{\Lambda 0}\tilde{b}}$.

Para los modelos de Starobinsky analizamos los casos populares en la literatura de $n = 1$ y $n = 4$, en el caso de Hu-Sawicki solamente para $n = 1$.

4.6.1. Gravedad Exponencial

CC+Pantheon+BAO+Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.27$

Los mejores valores de las constantes son $R_s = 2.497$ y $b = 1.78$. El valor de b en este caso es $b > 1$ y por lo tanto la condición para el modelo de gravedad exponencial

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
R_s	2.497	$2.501^{+0.064}_{-0.065}$	2.375	2.629
b	1.78	$1.783^{+0.064}_{-0.068}$	1.657	1.922

Cuadro 4.14: Valores de las constantes del modelo de gravedad exponencial con CC+Pantheon +H0licow+Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.27$

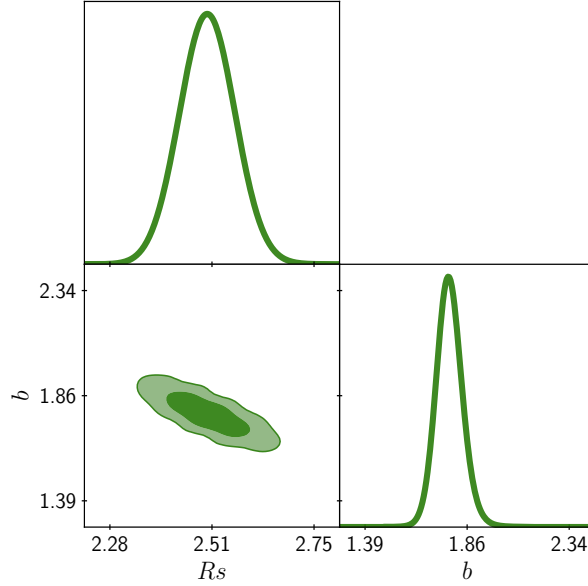


Figura 4.13: Contornos de confianza de los valores de las constantes del modelo de gravedad exponencial con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.27$, en orden de arriba a abajo son R_s y b .

se cumple.

Todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.27$

Los mejores valores de las constantes son $R_s = 2.502$ y $b = 1.605$. El valor de b en este caso es $b > 1$ y por lo tanto la condición para el modelo de gravedad exponencial se cumple.

Todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.315$

Los mejores valores de las constantes son $R_s = 2.502$ y $b = 1.54$. El valor de b en este caso es $b > 1$ y por lo tanto la condición para el modelo de gravedad exponencial se cumple.

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
R_s	2.502	$2.5^{+0.055}_{-0.056}$	2.392	2.609
b	1.605	$1.615^{+0.16}_{-0.088}$	1.349	1.828

Cuadro 4.15: Valores de las constantes del modelo de gravedad exponencial con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.27$

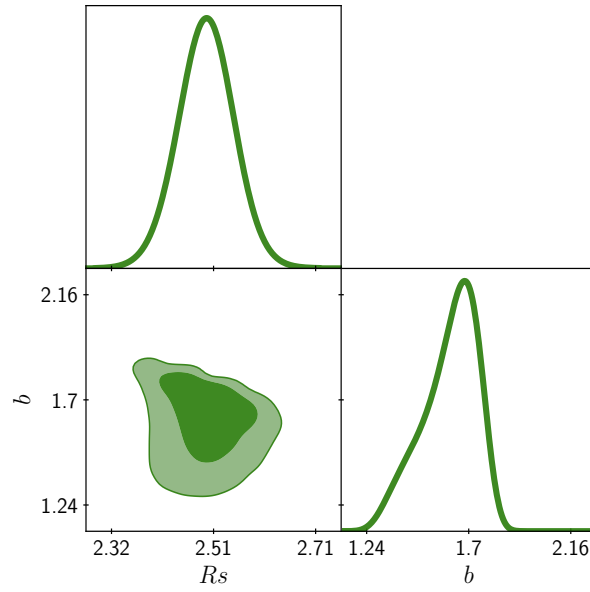


Figura 4.14: Contornos de confianza de los valores de las constantes del modelo de gravedad exponencial con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.27$, en orden de arriba a abajo son R_s y b .

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
R_s	2.502	$2.5^{+0.055}_{-0.056}$	2.392	2.609
b	1.54	$1.511^{+0.17}_{-0.091}$	1.244	1.723

Cuadro 4.16: Valores de las constantes del modelo de gravedad exponencial con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.315$

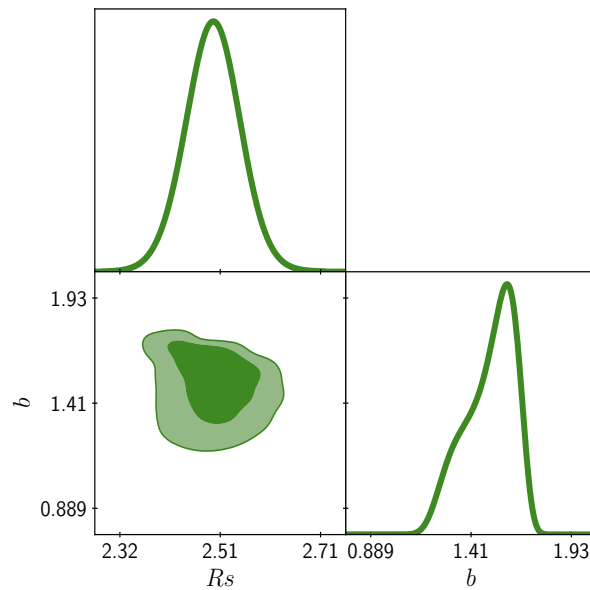


Figura 4.15: Contornos de confianza de los valores de las constantes del modelo de gravedad exponencial con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.315$, en orden de arriba a abajo son R_s y b .

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
n=1				
R_c	4.375	$4.381^{+0.11}_{-0.11}$	4.161	4.605
λ	1.014	$1.016^{+0.034}_{-0.04}$	0.9397	1.089
n=4				
R_c	4.375	$4.381^{+0.11}_{-0.11}$	4.161	4.605
λ	1.014	$1.015^{+0.034}_{-0.04}$	0.9396	1.089

Cuadro 4.17: Valores de las constantes del modelo de Starobinsky con n=1 y n=4, con CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.27$

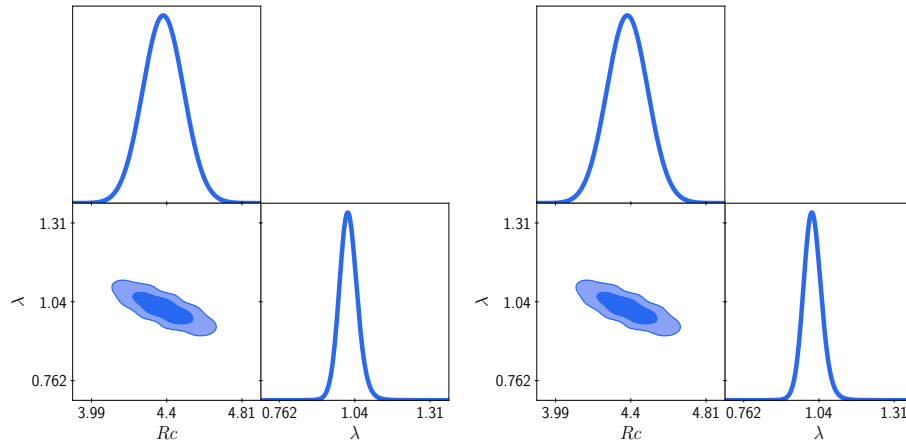


Figura 4.16: Contornos de confianza de los valores de las constantes del modelo de Starobinsky con n=1 (Izquierda) y n=4 (Derecha), con CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.27$, en orden de arriba a abajo son R_c y λ .

4.6.2. Modelo de Starobinsky

CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.27$

Los mejores valores de las constantes para n=1 son $R_c = 4.375$ y $\lambda = 1.014$ y para n=4 son $R_c = 4.375$ y $\lambda = 1.014$. El valor de λ en ambos casos es positivo por lo cual el modelo de Starobinsky se comporta correctamente. Podemos ver que no hay diferencia entre los casos n=1 y n=4.

Todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.27$

Los mejores valores de las constantes para n=1 son $R_c = 4.383$ y $\lambda = 0.9045$ y para n=4 son $R_c = 4.383$ y $\lambda = 0.9043$. El valor de λ en ambos casos es positivo por lo cual el modelo de Starobinsky se comporta correctamente. Podemos ver que la diferencia es mínima entre los casos n=1 y n=4.

Todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.315$

Los mejores valores de las constantes para n=1 son $R_c = 4.113$ y $\lambda = 0.9281$ y para n=4 son $R_c = 4.113$ y $\lambda = 0.9280$. El valor de λ en ambos casos es positivo por lo cual el modelo de Starobinsky se comporta correctamente. Podemos ver que la diferencia es mínima entre los casos n=1 y n=4.

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
n=1				
R_c	4.383	$4.38^{+0.097}_{-0.098}$	4.19	4.571
λ	0.9045	$0.9132^{+0.1}_{-0.054}$	0.752	1.042
n=4				
R_c	4.383	$4.38^{+0.097}_{-0.098}$	4.19	4.571
λ	0.9043	$0.9131^{+0.1}_{-0.054}$	0.7519	1.042

Cuadro 4.18: Valores de las constantes del modelo de Starobinsky con n=1 y n=4, con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.27$

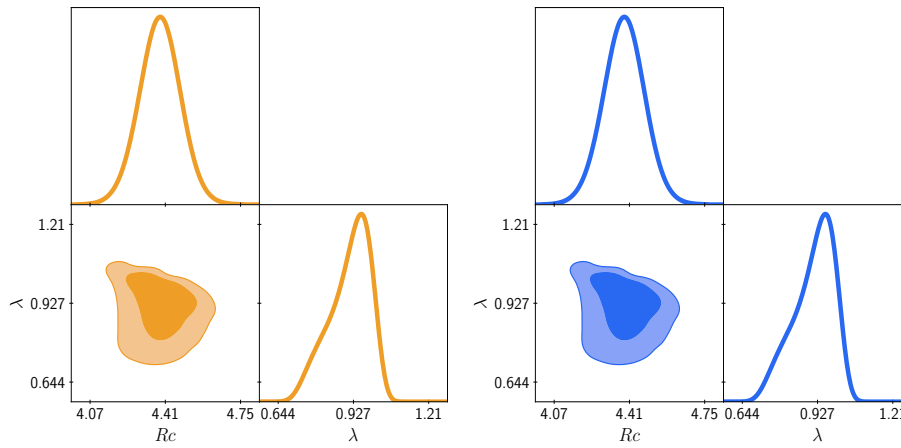


Figura 4.17: Contornos de confianza de los valores de las constantes del modelo de Starobinsky con n=1 (Naranja) y n=4 (Azul), con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.27$, en orden de arriba a abajo son R_c y λ .

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
n=1				
R_c	4.113	$4.11^{+0.091}_{-0.092}$	3.932	4.289
λ	0.9281	$0.9108^{+0.11}_{-0.06}$	0.7359	1.05
n=4				
R_c	4.113	$4.11^{+0.091}_{-0.092}$	3.932	4.289
λ	0.928	$0.9107^{+0.11}_{-0.06}$	0.7358	1.05

Cuadro 4.19: Valores de las constantes del modelo de Starobinsky con n=1 y n=4, con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.315$

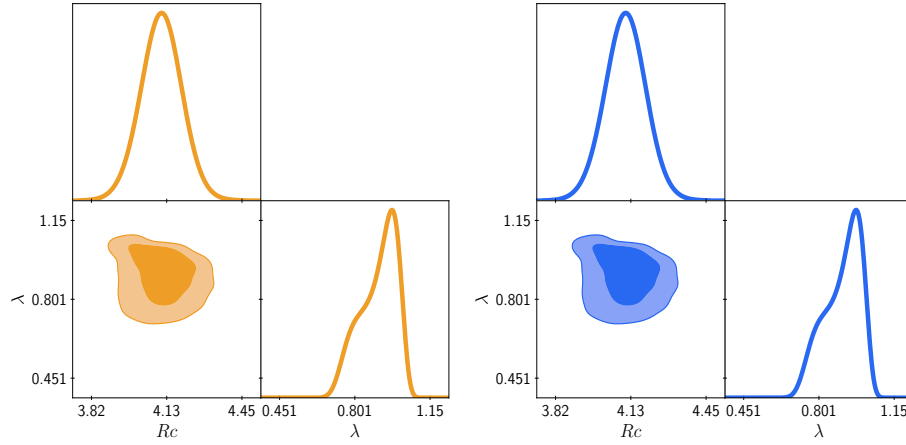


Figura 4.18: Contornos de confianza de los valores de las constantes del modelo de Starobinsky con $n=1$ (Naranja) y $n=4$ (Azul), con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.315$, en orden de arriba a abajo son R_c y λ .

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
R_c	0.2735	$0.2741^{+0.0058}_{-0.0077}$	0.262	0.2862
a	0.003304	$0.003317^{+0.00018}_{-0.00017}$	0.002984	0.003646
b	0.0002037	$0.0002045^{+1.1e-05}_{-1e-05}$	0.0001839	0.0002248

Cuadro 4.20: Valores de las constantes del modelo de Hu-Sawicki con $n=1$, CC+Pantheon+ H0licow+Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.27$

4.6.3. Modelo de Hu-Sawicki

CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.27$

Los mejores valores de las constantes para $n=1$ son $R_c = 0.2735$, $a = 3.304 \times 10^{-3}$ y $b = 2.037 \times 10^{-4}$. Los valores de a y b son positivos por lo cual el modelo de Hu-Sawicki se comporta correctamente.

Todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.27$

Los mejores valores de las constantes para $n=1$ son $R_c = 0.2444$, $a = 6.812 \times 10^{-4}$ y $b = 4.146 \times 10^{-5}$. Los valores de a y b son positivos por lo cual el modelo de Hu-Sawicki se comporta correctamente.

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
R_c	0.2444	$0.2465^{+0.028}_{-0.01}$	0.204	0.2783
a	0.0006725	$0.0006812^{+4e-05}_{-4.6e-05}$	0.000596	0.0007678
b	$4.146e-05$	$4.199e-05^{+2.5e-06}_{-2.8e-06}$	$3.674e-05$	$4.733e-05$

Cuadro 4.21: Valores de las constantes del modelo de Hu-Sawicki con $n=1$, con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.27$

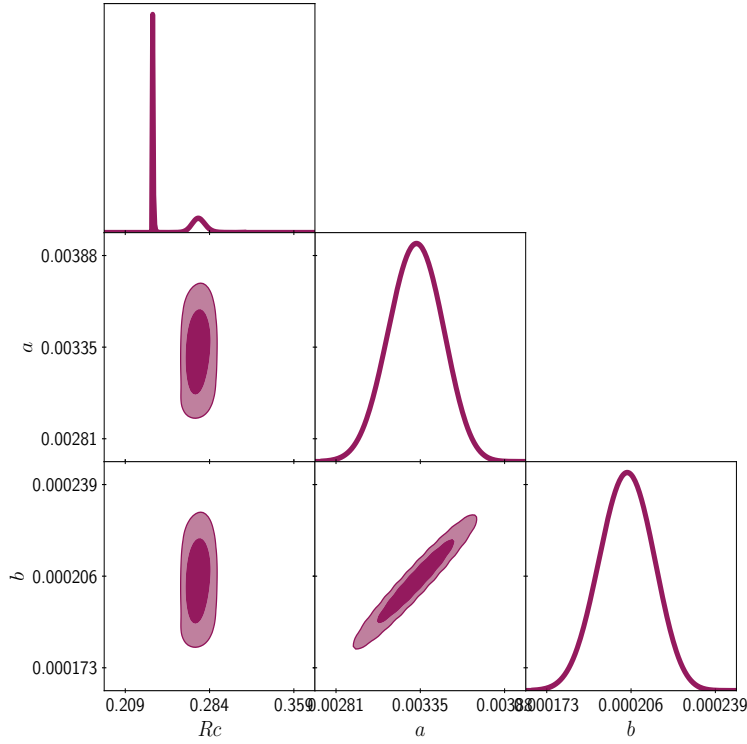


Figura 4.19: Contornos de confianza de los valores de las constantes del modelo de Hu-Sawicki con $n=1$, con CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas y $\Omega_{m0} = 0.27$, en orden de arriba a abajo son R_c , a y b .

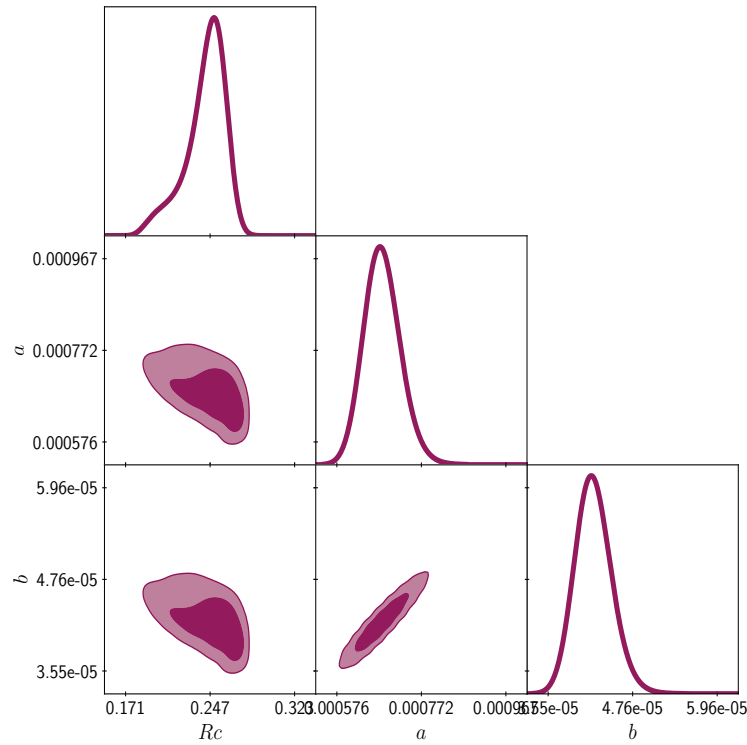


Figura 4.20: Contornos de confianza de los valores de las constantes del modelo de Hu-Sawicki con $n=1$, con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.27$, en orden de arriba a abajo son R_c , a y b .

Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
R_c	0.2925	$0.2868^{+0.034}_{-0.015}$	0.2307	0.324
a	0.0007401	$0.0007496^{+4.4e-05}_{-5.1e-05}$	0.0006559	0.000845
b	$5.672e-05$	$5.745e-05^{+3.4e-06}_{-3.9e-06}$	$5.027e-05$	$6.476e-05$

Cuadro 4.22: Valores de las constantes del modelo de Hu-Sawicki con $n=1$, con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.315$

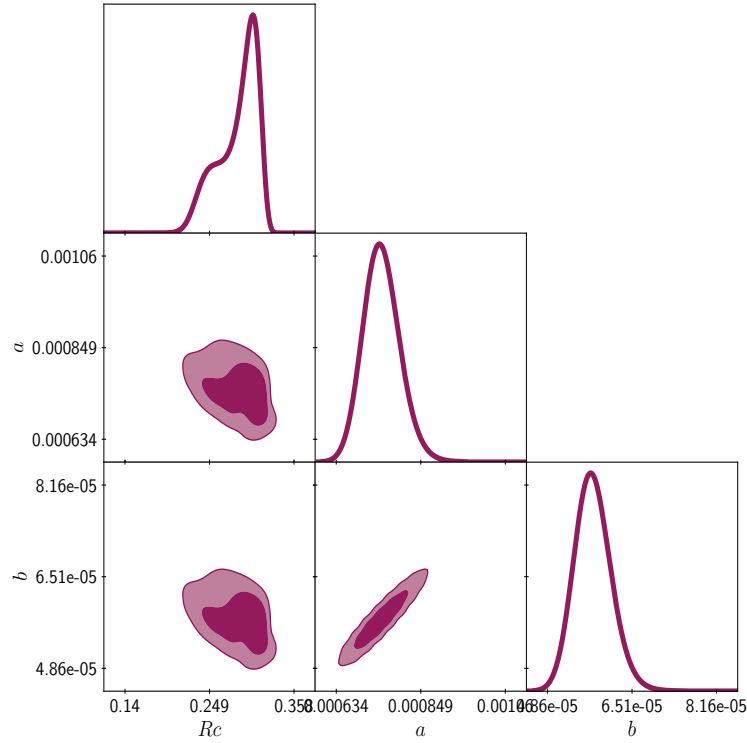


Figura 4.21: Contornos de confianza de los valores de las constantes del modelo de Hu-Sawicki con $n=1$, con todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.315$, en orden de arriba a abajo son R_c , a y b .

Todos los datos y $\Omega_{m0} = 0.315$

Los mejores valores de las constantes para $n=1$ son $R_c = 0.2925$, $a = 7.401 \times 10^{-4}$ y $b = 5.672 \times 10^{-5}$. Los valores de a y b son positivos por lo cual el modelo de Hu-Sawicki se comporta correctamente.

4.6.4. El Criterio de Información Bayesiano y el Modelo Estándar

Como se explicó en el Capítulo 3, el criterio de información bayesiano se utiliza para comparar modelos. En este caso compararemos el modelo estándar cosmológico contra el modelo cosmográfico que utilizamos. En el caso de los parámetros, el modelo estándar utiliza 2+1 parámetros (H_0 , Ω_{m0} y M) y el modelo cosmográfico utiliza 5+1 parámetros (H_0 , q_0 , j_0 , s_0 , l_0 y M). En la tabla 4.23 se muestran los resultados del ajuste del modelo estándar usando los mismo conjuntos de datos usados en el modelo cosmográfico. En la tabla 4.24 se coloca el valor del ΔBIC para cada conjunto de

CC+Pantheon+Cefeidas				
Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
h	0.7206	$0.7206^{+0.0094}_{-0.0093}$	0.7023	0.7388
Ω_m	0.2845	$0.2847^{+0.018}_{-0.019}$	0.2496	0.3203
M	-19.29	$-19.29^{+0.028}_{-0.027}$	-19.35	-19.24
CC+Pantheon+BAO+Cefeidas				
Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
h	0.729	$0.7288^{+0.0087}_{-0.0088}$	0.7117	0.7461
Ω_m	0.2546	$0.2548^{+0.012}_{-0.013}$	0.2298	0.2803
M	-19.28	$-19.28^{+0.027}_{-0.026}$	-19.34	-19.23
CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas				
Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
h	0.7243	$0.724^{+0.0084}_{-0.0084}$	0.7075	0.7406
Ω_m	0.2816	$0.2827^{+0.017}_{-0.018}$	0.2479	0.3181
M	-19.28	$-19.28^{+0.025}_{-0.024}$	-19.33	-19.24
Todos los conjuntos de datos				
Param	best-fit	mean $\pm\sigma$	95 % lower	95 % upper
h	0.7304	$0.7306^{+0.008}_{-0.008}$	0.7149	0.7463
Ω_m	0.2537	$0.2544^{+0.012}_{-0.013}$	0.2297	0.2795
M	-19.28	$-19.28^{+0.024}_{-0.024}$	-19.33	-19.23

Cuadro 4.23: Resultados del ajuste de parámetros del modelo estándar.

datos. Como podemos ver en la tabla, el análisis BIC favorece al modelo estándar y usando el factor de Bayes nos indica que tiene una evidencia demasiado fuerte contra el modelo cosmográfico, pero esto se debe a que este último utiliza más parámetros para el ajuste.

CC+Pantheon+Cefeidas						
Modelo	K	N	χ^2_{min}	χ^2_ν	BIC	Δ BIC
Cosmográfico Λ CDM	5+1	1080	1043	0.9711	1084.90	+19.95
	2+1	1080	1044	0.9693	1064.95	0.0
CC+Pantheon+BAO+Cefeidas						
Modelo	K	N	χ^2_{min}	χ^2_ν	BIC	Δ BIC
Cosmográfico Λ CDM	5+1	1095	1081	0.992	1122.99	+36.99
	2+1	1095	1065	0.9752	1085.99	0.0
CC+Pantheon+H0licow+Cefeidas						
Modelo	K	N	χ^2_{min}	χ^2_ν	BIC	Δ BIC
Cosmográfico Λ CDM	5+1	1086	1155	1.069	1196.24	+51.97
	2+1	1086	1124	1.037	1144.97	0.0
Todos los conjuntos de datos						
Modelo	K	N	χ^2_{min}	χ^2_ν	BIC	Δ BIC
Cosmográfico Λ CDM	5+1	1101	1199	1.094	1241.02	+76.01
	2+1	1101	1144	1.041	1165.01	0.0

Cuadro 4.24: Resultados del BIC para ambos modelos.

Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudiaron modelos de gravedad modificada a través de la Cosmografía, los cuales se ajustaron usando datos observacionales actuales. En el Capítulo 1, se hizo una introducción a la Cosmología estándar y los problemas que sufre esta ciencia actualmente, luego se estudió una teoría que modifica la gravedad en RG y que intenta resolver los problemas en Cosmología Estándar, esta fue la Teoría de gravedad $f(R)$, se calcularon las ecuaciones de campo en esta teoría de gravedad modificada y también las ecuaciones de evolución del universo en dicha teoría, luego se calcularon las condiciones que debe de cumplir la Teoría de gravedad $f(R)$ para pasar las pruebas actuales a nivel sistema solar, finalmente se presentaron los modelos de gravedad aún viables en gravedad $f(R)$. En el Capítulo 2, se estudió a la Cosmografía que es un área de la Cosmología que estudia el universo desde su punto de vista cinemático sin la necesidad de un modelo de fondo, se presentó como se calculan distancias en Cosmografía y la necesidad del cambio de variable en Cosmografía para poder analizar en plenitud todos los datos observacionales de tiempo tardío, finalmente se mostró como relacionar a la Cosmografía con los modelos viables en gravedad $f(R)$ para su análisis. En el Capítulo 3, se presentaron las herramientas estadísticas necesarias para efectuar el estudio de cada uno de los modelos presentados y también los datos observacionales de tiempo tardío que se utilizaron en este trabajo.

En el Capítulo 4 se presentaron todos los resultados obtenidos, en el caso de los parámetros cosmográficos se presentaron solo los obtenidos a través de la variable del corrimiento al rojo $y_2 = \arctan(z)$ ya que con esta variable los ajustes que se obtuvieron proporcionaban valores del criterio de Gelman-Rubin menores a 1.1 que con la variable y_1 no se obtenía en varios casos o que el valor de 2σ no se podía encontrar con y_1 pero sí con y_2 . Los resultados podemos numerarlos de la siguiente manera:

1. Los resultados de los parámetros cosmográficos H_0 y q_0 dieron resultados interesantes cuando incluimos los datos observacionales de los cuásares con H0licow, ya que sin ellos el valor de H_0 es cercano al prior dado por Cefeidas, mientras que usando H0licow sin BAO el valor del parámetro de desaceleración disminuye a diferencia que cuando se usa BAO junto con CC+Pantheon+Cefeidas, pero cuando se integra tanto BAO+H0licow el valor de H_0 disminuye y q_0 aumenta, esto puede deberse a que en Cosmografía al no usar un modelo de fondo todo el peso de los modelos de fondo tanto en BAO (Horizonte del sonido) y H0licow (Potencial de Fermat) recaen en los primeros dos parámetros cosmográficos, esta dependencia del modelo de fondo se ha empezado a considerar en [10] para BAO y en [73] para H0licow, donde en este último se muestra que, dependiendo la consideración del perfil de masa de la lente, el valor de H_0 puede ser menor a 70 km/s/Mpc por lo cual podemos pensar que eso está ocurriendo en este caso.
2. En el aspecto estadístico de los parámetros cosmográficos el conjunto de datos que mejor se ajustó según el criterio de la χ^2 reducida fue CC+Pantheon+BAO+Cefeidas, notamos que al incluir los datos observacionales de cuásares el valor de la χ^2 re-

ducida pasó de menor a 1 a mayor a 1, esto puede significar que la estadística de Holicow en Cosmografía no logra ajustarse correctamente con la estadística de los demás datos o el modelo en cosmografía al no tener un perfil de materia no es compatible correctamente o simplemente los errores de los datos observacionales están sobre-estimados, será interesante analizar más a fondo este aspecto estadístico de Holicow con modelos independientes de perfiles de materia en un futuro.

3. En los resultados estadísticos de los valores de las derivadas de las teorías $f(R)$ derivados a través de los parámetros cosmográficos podemos decir que debido a la amplia variedad de valores que toman los parámetros cosmográficos existen casos donde encontramos divergencias al momento de derivar los valores, por lo cual tuvimos que recorrer los valores para evitar ese problema, pero podemos asegurar que la diferencia del valor promedio y el mejor valor no se vio reducido a más del 0.1 %.
4. Usando los mejores valores y los valores promedios de los derivados vimos que las condiciones de los modelos $f(R)$ se cumplen para 3 conjuntos, que es en el caso $\Omega_{m0} = 0.27$ para CC+Pantheon+BAO+Cefeidas y para el conjunto con todos los datos y para el caso $\Omega_{m0} = 0.315$ con todos los datos, notamos que existe entonces una relación entre q_0 y $f''(R_0) > 0$ con Ω_{m0} , esto último lo sugerimos a partir de la relación cosmográfica en el modelo estándar donde $q_0 = -1 + (3/2)\Omega_{m0}$, entonces para $\Omega_{m0} = 0.27$ el valor es $q_0 = -0.595$ y para $\Omega_{m0} = 0.315$ el valor es $q_0 = -0.5275$, entonces vemos que en el caso de $\Omega_{m0} = 0.315$ el único conjunto de datos con valor mayor a -0.5275 es el conjunto con todos los datos y en el caso de $\Omega_{m0} = 0.27$ el conjunto con todos los datos tiene un valor q_0 mayor a -0.595 y el conjunto con CC+Pantheon+BAO+Cefeidas es aproximadamente igual tanto el valor promedio así como su mejor valor son un poco menores pero dan un $f''(R_0) > 0$, por lo último consideramos que la condición (ii) de viabilidad para gravedad $f(R)$ está relacionada con q_0 y Ω_{m0} , pero esto podría analizarse más a fondo en el futuro. Con respecto a ω_{eff} y lo anterior, vemos que por ello el conjunto de CC+Pantheon+BAO+Cefeidas reportan un valor de constante cosmológica, mientras que con todos los datos cae en una región de quintaesencia.
5. En el caso de los valores obtenidos para los modelos viables, los mejores valores no dieron ningún valor fuera de lugar, en el caso del modelo exponencial necesitábamos $b > 1$, comparado con lo reportado en [1] ellos usaron $R_s = 2.5H_0^2$ y $b = 2$ para el análisis numérico, en nuestro caso el ajuste dice que solo es necesario $b > 1.54$ para pasar las pruebas a nivel sistema solar. Para el modelo de Starobinsky obtuvimos algo similar al modelo exponencial con los resultados al compararlos con [1], los valores R_c y λ se parecen ya que en este caso no fijamos el valor R_c como en [1] sino que usamos el valor dado en el artículo de Starobinsky [5]. Por último, el modelo Hu-Sawicki es el modelo cuyos valores no se asemejan a los propuestos en [1] que utilizaron, pero esto último es claro ya que igualmente no fijamos los valores sino que usamos la definición de la curvatura característica dada en el artículo de Hu-Sawicki [6], por lo tanto aunque no se parezcan, cumplen para satisfacer pruebas a nivel sistema solar, lo que faltaría sería ver si cumplen en épocas tempranas del universo, lo que si se nota es que lo obtenido se comporta correctamente ya que al aumentar el valor de n tanto a y b deben disminuir para mantener un comportamiento Λ CDM en el régimen $R \gg R_0$.

6. Con respecto al BIC era de esperarse que con el uso de más parámetros se vería afectado el modelo cosmológico en esta prueba, declarando como ganador todavía al modelo estándar. Aún así hay que referirnos a la chi reducida reportada en el conjunto de CC+Pantheon+BAO+Cefeidas donde es casi la unidad, ya que como vimos la inclusión de H0licow debe ser mejor estudiada para su inclusión en Cosmografía.

Podemos concluir que los valores de los parámetros de los modelos obtenidos por construcción y selección cumplen pruebas a nivel sistema solar, simplemente como en el caso del modelo de Hu-Sawicki, como mencionamos, sería necesario analizar los resultados en tiempos tempranos del Universo donde habrán más restricciones para aceptar o descartar dichos resultados.

Como comentario final, en la propuesta inicial de trabajo de tesis se mencionó que se analizarían modelos de gravedad modificada $f(R, T)$ a la par con los $f(R)$, estos modelos $f(R, T)$ los descartamos al estudiar los modelos posibles que nos dieran un universo donde el tensor de energía-momento se conserva, considerándolos cosmológicamente inviables para un modelo general del universo, para más explicación ver el Apéndice B.

Bibliografía

- [1] C. Negrelli, L. Kraiselburd, S. J. Landau and M. Salgado, Phys. Rev. D **101**, no.6, 064005 (2020) doi:10.1103/PhysRevD.101.064005 [arXiv:2002.12073 [gr-qc]].
- [2] S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project], Astrophys. J. **517**, 565-586 (1999) doi:10.1086/307221 [arXiv:astro-ph/9812133 [astro-ph]].
- [3] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team], Astron. J. **116**, 1009-1038 (1998) doi:10.1086/300499 [arXiv:astro-ph/9805201 [astro-ph]].
- [4] E. V. Linder, Phys. Rev. D **80**, 123528 (2009) doi:10.1103/PhysRevD.80.123528 [arXiv:0905.2962 [astro-ph.CO]].
- [5] A. A. Starobinsky, JETP Lett. **86**, 157-163 (2007) doi:10.1134/S0021364007150027 [arXiv:0706.2041 [astro-ph]].
- [6] W. Hu and I. Sawicki, Phys. Rev. D **76**, 064004 (2007) doi:10.1103/PhysRevD.76.064004 [arXiv:0705.1158 [astro-ph]].
- [7] Fractal dimension as a measure of the scale of homogeneity, Jaswant K. Yadav, J. S. Bagla, Nishikanta Khandai, Fractal dimension as a measure of the scale of homogeneity, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 405, Issue 3, July 2010, Pages 2009–2015, <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.16612.x>
- [8] Planck 2018 results - I. Overview and the cosmological legacy of Planck Planck Collaboration, N. Aghanim, Y. Akrami, F. Arroja, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini et al. A&A 641 A1 (2020) DOI: 10.1051/0004-6361/201833880
- [9] N. Aghanim *et al.* [Planck], Astron. Astrophys. **641**, A6 (2020) [erratum: Astron. Astrophys. **652**, C4 (2021)] doi:10.1051/0004-6361/201833910 [arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO]].
- [10] E. Abdalla, G. Franco Abellán, A. Aboubrahim, A. Agnello, O. Akarsu, Y. Akrami, G. Alestas, D. Aloni, L. Amendola and L. A. Anchordoqui, *et al.* JHEAp **34**, 49-211 (2022) doi:10.1016/j.jheap.2022.04.002 [arXiv:2203.06142 [astro-ph.CO]].
- [11] A. G. Riess, W. Yuan, L. M. Macri, D. Scolnic, D. Brout, S. Casertano, D. O. Jones, Y. Murakami, L. Breuval and T. G. Brink, *et al.* Astrophys. J. Lett. **934**, no.1, L7 (2022) doi:10.3847/2041-8213/ac5c5b [arXiv:2112.04510 [astro-ph.CO]].
- [12] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla and C. Skordis, Phys. Rept. **513**, 1-189 (2012) doi:10.1016/j.physrep.2012.01.001 [arXiv:1106.2476 [astro-ph.CO]].
- [13] David Lovelock; The Einstein Tensor and Its Generalizations. J. Math. Phys. 12 (3): 498–501. <https://doi.org/10.1063/1.1665613>
- [14] A. De Felice and S. Tsujikawa, Living Rev. Rel. **13**, 3 (2010) doi:10.12942/lrr-2010-3 [arXiv:1002.4928 [gr-qc]].

- [15] S. Nojiri, S. D. Odintsov and V. K. Oikonomou, Phys. Rept. **692**, 1-104 (2017) doi:10.1016/j.physrep.2017.06.001 [arXiv:1705.11098 [gr-qc]].
- [16] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, Rev. Mod. Phys. **82**, 451-497 (2010) doi:10.1103/RevModPhys.82.451 [arXiv:0805.1726 [gr-qc]].
- [17] A. Alho, S. Carloni and C. Uggla, JCAP **08**, 064 (2016) doi:10.1088/1475-7516/2016/08/064 [arXiv:1607.05715 [gr-qc]].
- [18] A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B **91**, 99-102 (1980) doi:10.1016/0370-2693(80)90670-X
- [19] R. M. Wald, Chicago Univ. Pr., 1984, doi:10.7208/chicago/9780226870373.001.0001
- [20] T. Koivisto, Class. Quant. Grav. **23**, 4289-4296 (2006) doi:10.1088/0264-9381/23/12/N01 [arXiv:gr-qc/0505128 [gr-qc]].
- [21] S. Capozziello, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 483-492 (2002) doi:10.1142/S0218271802002025 [arXiv:gr-qc/0201033 [gr-qc]].
- [22] L. Amendola, D. Polarski and S. Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. D **16**, 1555-1561 (2007) doi:10.1142/S0218271807010936 [arXiv:astro-ph/0605384 [astro-ph]].
- [23] S. Capozziello and S. Vignolo, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **9**, 1250006 (2012) doi:10.1142/S0219887812500065 [arXiv:1103.2302 [gr-qc]].
- [24] P. G. LeFloch and Y. Ma, [arXiv:1412.8151 [math.AP]].
- [25] I. Navarro and K. Van Acoleyen, JCAP **02**, 022 (2007) doi:10.1088/1475-7516/2007/02/022 [arXiv:gr-qc/0611127 [gr-qc]].
- [26] G. J. Olmo, Phys. Rev. D **72**, 083505 (2005) doi:10.1103/PhysRevD.72.083505 [arXiv:gr-qc/0505135 [gr-qc]].
- [27] S. M. Carroll, I. Sawicki, A. Silvestri and M. Trodden, New J. Phys. **8**, 323 (2006) doi:10.1088/1367-2630/8/12/323 [arXiv:astro-ph/0607458 [astro-ph]].
- [28] Bertotti, B., Iess, L., and Tortora, P. (2003). A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. Nature, 425(6956), 374–376. <https://doi.org/10.1038/nature01997>
- [29] T. Faulkner, M. Tegmark, E. F. Bunn and Y. Mao, Phys. Rev. D **76**, 063505 (2007) doi:10.1103/PhysRevD.76.063505 [arXiv:astro-ph/0612569 [astro-ph]].
- [30] J. Khoury and A. Weltman, Phys. Rev. Lett. **93**, 171104 (2004) doi:10.1103/PhysRevLett.93.171104 [arXiv:astro-ph/0309300 [astro-ph]].
- [31] C. Burrage and J. Sakstein, Living Rev. Rel. **21**, no.1, 1 (2018) doi:10.1007/s41114-018-0011-x [arXiv:1709.09071 [astro-ph.CO]].
- [32] A. C. Davis, E. A. Lim, J. Sakstein and D. Shaw, Phys. Rev. D **85**, 123006 (2012) doi:10.1103/PhysRevD.85.123006 [arXiv:1102.5278 [astro-ph.CO]].
- [33] C. Burrage and J. Sakstein, JCAP **11**, 045 (2016) doi:10.1088/1475-7516/2016/11/045 [arXiv:1609.01192 [astro-ph.CO]].
- [34] L. Yang, C. C. Lee and C. Q. Geng, JCAP **08**, 029 (2011) doi:10.1088/1475-7516/2011/08/029 [arXiv:1106.5582 [astro-ph.CO]].

- [35] Müller, V. and Schmidt, Hans-Jürgen and Starobinsky, Alexei. (1988). The stability of the de Sitter space-time in fourth order gravity. *Physics Letters B.* 202. 198-200. 10.1016/0370-2693(88)90007-X.
- [36] V. Faraoni, *Phys. Rev. D* **70**, 044037 (2004) doi:10.1103/PhysRevD.70.044037 [arXiv:gr-qc/0407021 [gr-qc]].
- [37] L. Jaime, M. Salgado and L. Patino, *Springer Proc. Phys.* **157**, 363-371 (2014) doi:10.1007/978-3-319-06761-2_51 [arXiv:1211.0015 [gr-qc]].
- [38] S. Capozziello and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **77**, 107501 (2008) doi:10.1103/PhysRevD.77.107501 [arXiv:0712.2268 [gr-qc]].
- [39] N. M. Jiménez Cruz and C. Escamilla-Rivera, *Eur. Phys. J. Plus* **136**, no.1, 51 (2021) doi:10.1140/epjp/s13360-020-00950-3 [arXiv:2011.09623 [gr-qc]].
- [40] E. Aver, K. A. Olive and E. D. Skillman, *JCAP* **07**, 011 (2015) doi:10.1088/1475-7516/2015/07/011 [arXiv:1503.08146 [astro-ph.CO]].
- [41] P. K. S. Dunsby and O. Luongo, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **13**, no.03, 1630002 (2016) doi:10.1142/S0219887816300026 [arXiv:1511.06532 [gr-qc]].
- [42] Scott Dodelson, Fabian Schmidt, 1 - The concordance model of cosmology, Editor(s): Scott Dodelson, Fabian Schmidt, *Modern Cosmology (Second Edition)*, Academic Press, 2021, Pages 1-19, ISBN 9780128159484, <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-815948-4.00007-3>.
- [43] Big Bang Cosmology John D. Norton Department of History and Philosophy of Science University of Pittsburgh https://sites.pitt.edu/~jdnorton/teaching/HPS_0410/chapters_May_30_2021/big_bang_FRW_spacetimes/index.html
- [44] C. Cattoen and M. Visser, *Class. Quant. Grav.* **24**, 5985-5998 (2007) doi:10.1088/0264-9381/24/23/018 [arXiv:0710.1887 [gr-qc]].
- [45] M. Chevallier and D. Polarski, *Int. J. Mod. Phys. D* **10**, 213-224 (2001) doi:10.1142/S0218271801000822 [arXiv:gr-qc/0009008 [gr-qc]].
- [46] A. Aviles, C. Gruber, O. Luongo and H. Quevedo, *Phys. Rev. D* **86**, 123516 (2012) doi:10.1103/PhysRevD.86.123516 [arXiv:1204.2007 [astro-ph.CO]].
- [47] S. Capozziello, V. F. Cardone and V. Salzano, *Phys. Rev. D* **78**, 063504 (2008) doi:10.1103/PhysRevD.78.063504 [arXiv:0802.1583 [astro-ph]].
- [48] L. Verde, *Lect. Notes Phys.* **800**, 147-177 (2010) doi:10.1007/978-3-642-10598-2_4 [arXiv:0911.3105 [astro-ph.CO]].
- [49] A. R. Liddle, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **351**, L49-L53 (2004) doi:10.1111/j.1365-2966.2004.08033.x [arXiv:astro-ph/0401198 [astro-ph]].
- [50] Andrieu, Christophe and Freitas, Nando and Doucet, Arnaud and Jordan, Michael. (2003). *An Introduction to MCMC for Machine Learning*. Machine Learning. 50. 5-43. 10.1023/A:1020281327116.
- [51] Introduction to Bayesian statistics, part 2: MCMC and the Metropolis–Hastings algorithm, Fuente: <https://www.youtube.com/watch?v=OT01DygELpY>

- [52] Gelman, A., and Rubin, D. B. (1992). Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences. *Statistical Science*, 7(4), 457–472. <http://www.jstor.org/stable/2246093>
- [53] Brooks, Stephen and Gelman, Andrew. (1998). General Methods for Monitoring Convergence of Iterative Simulations. *J. Comput. Graphi. Stat.* 7. 434-455. 10.1080/10618600.1998.10474787.
- [54] Blas, D., Lesgourgues, J., and Tram, T. (2011). The cosmic linear anisotropy solving system (CLASS). Part II: approximation schemes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(07), 034.
- [55] T. Brinckmann and J. Lesgourgues, *Phys. Dark Univ.* **24**, 100260 (2019) doi:10.1016/j.dark.2018.100260 [arXiv:1804.07261 [astro-ph.CO]].
- [56] C. Zhang, H. Zhang, S. Yuan, T. J. Zhang and Y. C. Sun, *Res. Astron. Astrophys.* **14**, no.10, 1221-1233 (2014) doi:10.1088/1674-4527/14/10/002 [arXiv:1207.4541 [astro-ph.CO]].
- [57] J. Simon, L. Verde and R. Jimenez, *Phys. Rev. D* **71**, 123001 (2005) doi:10.1103/PhysRevD.71.123001 [arXiv:astro-ph/0412269 [astro-ph]].
- [58] M. Moresco, R. Jimenez, A. Cimatti and L. Pozzetti, *JCAP* **03**, 045 (2011) doi:10.1088/1475-7516/2011/03/045 [arXiv:1010.0831 [astro-ph.CO]].
- [59] M. Moresco, R. Jimenez, L. Verde, A. Cimatti, L. Pozzetti, C. Maraston and D. Thomas, *JCAP* **12**, 039 (2016) doi:10.1088/1475-7516/2016/12/039 [arXiv:1604.00183 [astro-ph.CO]].
- [60] A. L. Ratsimbazafy, S. I. Loubser, S. M. Crawford, C. M. Cress, B. A. Bassett, R. C. Nichol and P. Väisänen, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **467**, no.3, 3239-3254 (2017) doi:10.1093/mnras/stx301 [arXiv:1702.00418 [astro-ph.CO]].
- [61] D. Stern, R. Jimenez, L. Verde, M. Kamionkowski and S. A. Stanford, *JCAP* **02**, 008 (2010) doi:10.1088/1475-7516/2010/02/008 [arXiv:0907.3149 [astro-ph.CO]].
- [62] M. Moresco, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **450**, no.1, L16-L20 (2015) doi:10.1093/mnras/slv037 [arXiv:1503.01116 [astro-ph.CO]].
- [63] E. de Carvalho, A. Bernui, F. Avila, C. P. Novaes and J. P. Nogueira-Cavalcante, *Astron. Astrophys.* **649**, A20 (2021) doi:10.1051/0004-6361/202039936 [arXiv:2103.14121 [astro-ph.CO]].
- [64] J. S. Alcaniz, G. C. Carvalho, A. Bernui, J. C. Carvalho and M. Benetti, *Fundam. Theor. Phys.* **187**, 11-19 (2017) doi:10.1007/978-3-319-51700-1_2 [arXiv:1611.08458 [astro-ph.CO]].
- [65] G. C. Carvalho, A. Bernui, M. Benetti, J. C. Carvalho and J. S. Alcaniz, *Phys. Rev. D* **93**, no.2, 023530 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.023530 [arXiv:1507.08972 [astro-ph.CO]].
- [66] G. C. Carvalho, A. Bernui, M. Benetti, J. C. Carvalho, E. de Carvalho and J. S. Alcaniz, *Astropart. Phys.* **119**, 102432 (2020) doi:10.1016/j.astropartphys.2020.102432 [arXiv:1709.00271 [astro-ph.CO]].

- [67] E. de Carvalho, A. Bernui, G. C. Carvalho, C. P. Novaes and H. S. Xavier, *JCAP* **04**, 064 (2018) doi:10.1088/1475-7516/2018/04/064 [arXiv:1709.00113 [astro-ph.CO]].
- [68] F. X. Linares Cedeño and U. Nucamendi, *Phys. Dark Univ.* **32**, 100807 (2021) doi:10.1016/j.dark.2021.100807 [arXiv:2009.10268 [astro-ph.CO]].
- [69] D. M. Scolnic *et al.* [Pan-STARRS1], *Astrophys. J.* **859**, no.2, 101 (2018) doi:10.3847/1538-4357/aab9bb [arXiv:1710.00845 [astro-ph.CO]].
- [70] A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. M. Macri and D. Scolnic, *Astrophys. J.* **876**, no.1, 85 (2019) doi:10.3847/1538-4357/ab1422 [arXiv:1903.07603 [astro-ph.CO]].
- [71] K. C. Wong, S. H. Suyu, G. C. F. Chen, C. E. Rusu, M. Millon, D. Sluse, V. Bonvin, C. D. Fassnacht, S. Taubenberger and M. W. Auger, *et al.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **498**, no.1, 1420-1439 (2020) doi:10.1093/mnras/stz3094 [arXiv:1907.04869 [astro-ph.CO]].
- [72] E. Komatsu *et al.* [WMAP], *Astrophys. J. Suppl.* **180**, 330-376 (2009) doi:10.1088/0067-0049/180/2/330 [arXiv:0803.0547 [astro-ph]].
- [73] S. Birrer, A. J. Shajib, A. Galan, M. Millon, T. Treu, A. Agnello, M. Auger, G. C. F. Chen, L. Christensen and T. Collett, *et al.* *Astron. Astrophys.* **643**, A165 (2020) doi:10.1051/0004-6361/202038861 [arXiv:2007.02941 [astro-ph.CO]].
- [74] T. Harko, F. S. N. Lobo, S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **84**, 024020 (2011) doi:10.1103/PhysRevD.84.024020 [arXiv:1104.2669 [gr-qc]].
- [75] Alvarenga, F., Cruz-Dombriz, A., Houndjo, Mahouton, Rodrigues, M., Sáez-Gómez, Diego. (2013). Dynamics of scalar perturbations in $f(R,T)$ gravity. *Physical Review D.* 87. 10.1103/PhysRevD.87.103526.
- [76] S. Chakraborty, *Gen. Rel. Grav.* **45**, 2039-2052 (2013) doi:10.1007/s10714-013-1577-y [arXiv:1212.3050 [physics.gen-ph]].
- [77] H. Velten and T. R. P. Caramês, *Phys. Rev. D* **95**, no.12, 123536 (2017) doi:10.1103/PhysRevD.95.123536 [arXiv:1702.07710 [gr-qc]].

Distancias Cosmográficas para la variable y_1

Las distancias cosmográficas en términos de y_1 son

$$H(y_1) = H_0 \left(1 + \mathcal{A}_1 y_1 + \mathcal{A}_2 y_1^2 + \mathcal{A}_3 y_1^3 + \mathcal{A}_4 y_1^4 + \mathcal{O}(z^5) \right), \quad (4.1)$$

donde

$$\mathcal{A}_1 = 1 + q_0, \quad (4.2)$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}(2 + 2q_0 + j_0 - q_0^2), \quad (4.3)$$

$$\mathcal{A}_3 = \frac{1}{6}(6 + 6q_0 - 3q_0^2 + 3q_0^3 - 4q_0 j_0 + 3j_0 - s_0), \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4 = & \frac{1}{24}(24 + 24q_0 - 12q_0^2 + 12q_0^3 - 15q_0^4 - 16q_0 j_0 \\ & + 25q_0^2 j_0 + 7q_0 s_0 + 12j_0 - 4j_0^2 - 4s_0 + l_0), \end{aligned} \quad (4.5)$$

la distancia de luminosidad es

$$D_L(y_1) = \frac{1}{H_0} \left(y_1 + \mathcal{B}_1 y_1^2 + \mathcal{B}_2 y_1^3 + \mathcal{B}_3 y_1^4 + \mathcal{B}_4 y_1^5 \right), \quad (4.6)$$

donde

$$\mathcal{B}_1 = \frac{1}{2}(3 - q_0), \quad (4.7)$$

$$\mathcal{B}_2 = \frac{1}{6}(11 - 5q_0 - j_0 - 3q_0^2), \quad (4.8)$$

$$\mathcal{B}_3 = \frac{1}{24}(50 - 26q_0 + 21q_0^2 - 15q_0^3 + 10q_0 j_0 - 7j_0 + s_0), \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_4 = & \frac{1}{120}(274 - 154q_0 + 141q_0^2 - 135q_0^3 + 105q_0^4 + 90q_0 j_0 \\ & - 105q_0^2 j_0 - 15q_0 s_0 - 47j_0 + 10j_0^2 + 9s_0 - l_0), \end{aligned} \quad (4.10)$$

y la distancia diámetro angular es

$$D_A(y_1) = \frac{1}{H_0} \left(y_1 + \mathcal{C}_1 y_1^2 + \mathcal{C}_2 y_1^3 + \mathcal{C}_3 y_1^4 + \mathcal{C}_4 y_1^5 \right), \quad (4.11)$$

donde

$$\mathcal{C}_1 = -\frac{1}{2}(1 + q_0), \quad (4.12)$$

$$\mathcal{C}_2 = \frac{1}{6}(-1 + q_0 - j_0 + 3q_0^2), \quad (4.13)$$

$$\mathcal{C}_3 = -\frac{1}{24}(2 - 2q_0 + 3q_0^2 + 15q_0^3 - 10q_0j_0 - j_0 - s_0), \quad (4.14)$$

$$\mathcal{C}_4 = \frac{1}{120}(-5 + 5q_0 - 9q_0^2 + 15q_0^3 + 105q_0^4 - 10q_0j_0 - 105q_0^2j_0 - 15q_0s_0 + 3j_0 + 10j_0^2 - s_0 - l_0). \quad (4.15)$$

Teorías $f(R, T)$

En teorías $f(R, T)$ partimos de la siguiente acción [74]

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R, T) + \int d^4x \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \Phi_M), \quad (4.16)$$

donde $f(R, T)$ es una función arbitraria que depende del escalar de curvatura de Ricci R y la traza del tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$. Como sabemos

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (4.17)$$

en este caso se considera que la densidad lagrangiana de materia $\mathcal{L}_m$ depende solamente de la métrica y no de sus derivadas y con ello tenemos

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (4.18)$$

variando la acción (4.16) con respecto a $g_{\mu\nu}$ se obtienen las siguientes ecuaciones de campo

$$f_R(R, T) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R, T) g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R(R, T) = 8\pi T_{\mu\nu} - f_T(R, T) (T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}), \quad (4.19)$$

donde

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta} \frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = -2T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m + 2g^{\alpha\beta} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}}. \quad (4.20)$$

En este trabajo de tesis estábamos interesados en trabajar con modelos $f(R, T) = f(R) + f(T)$, donde consideraríamos modelos $f(R)$ viables y veríamos que pasaba con agregar términos $f(T)$, con ello las ecuaciones de campo (4.19) quedan

$$\begin{aligned} f_R(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R(R) &= 8\pi T_{\mu\nu} \\ &- f_T(T) (T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} f(T) g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

considerando un fluido perfecto, el tensor $\Theta_{\mu\nu}$ tiene la forma

$$\Theta_{\mu\nu} = -2T_{\mu\nu} - P g_{\mu\nu}, \quad (4.22)$$

con P la presión del fluido perfecto. Con ello tenemos

$$\begin{aligned} f_R(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R(R) &= 8\pi T_{\mu\nu} \\ &+ f_T(T) T_{\mu\nu} + (f_T(T) P + \frac{1}{2} f(T)) g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

buscábamos que el tensor de energía-momento se conservara y por ello imponemos $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, vemos que de lo anterior solo falta conocer que forma $f(T)$ nos proporciona

dicha condición. De [75,76] para el caso $f(R, T)=f(R)+f(T)$ y fluido perfecto, la forma para $f(T)$ es

$$f(T) = \alpha T^{\frac{1+3\omega}{2(1+\omega)}} + \beta, \quad (4.24)$$

donde α y β son constantes de integración y ω es la constante del fluido barotrópico. Notamos que sin considerar una energía oscura o curvatura, tenemos para polvo $\omega = 0$ y para radiación $\omega = 1/3$ y con ello podemos tener

$$f_1(T) = \alpha T^{\frac{1}{2}} + \beta; \quad f_2(T) = \alpha T^{\frac{3}{4}} + \beta. \quad (4.25)$$

Las Teorías $f(R, T)$ justifican la elección del argumento de la traza T para el lagrangiano por consideración de fluidos exóticos imperfectos o incluso efectos cuánticos, pero debido al acoplamiento entre la materia y la geometría estos los modelos dependen del termino de fuente, siendo esta la variación del tensor de energía momento. Como vimos de (4.24), el modelo necesario para poder conservar el tensor de energía-momento no es único lo cual nos hace considerar que estos modelos no son cosmológicamente viables para su estudio, ya que el modelo que describe el universo no debería depender de una fuente en particular. Para otras inviabilidades cosmológicas de estos modelos $f(R, T)$ ver [77].