



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

FÍSICA Y FINANZAS

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

P R E S E N T A :

CARLOS JAVIER SERVIN TOMAS

TUTORES:

DR. AFREDO RAYA MONTAÑO (DIRECTOR)

M.C.N.I. JENNIFER LÓPEZ CHACÓN (CO-DIRECTORA)



MORELIA, MICHOACÁN. DICIEMBRE DE 2023

Agradecimientos

Me gustaría mucho agradecer en esta tesis a todas las personas que contribuyeron directa e indirectamente en la elaboración de este trabajo:

- A mi familia por creer en mi y apoyarme en todo. En especial a mis padres por recibirme siempre con los brazos abiertos en casa y brindarme cariño y alimentos.
- A mi pareja Sarahí, por todo el amor y comprensión que me ha brindado.
- A Gustavo por ser mi amigo incondicional y ayudarme en toda mi estancia del posgrado.
- A mi asesor, el Dr. Alfredo Raya Montaña y a mi co-asesora Jennifer por aceptarme como su estudiante, siendo muy amables en todo momento. Gracias por su confianza y por guiarme durante mi investigación.
- A mis profesores por su esfuerzo y enorme paciencia al tenerme como su estudiante. Gracias por confiar en mi para seguir continuando.
- A los colegas que me ayudaron durante mi trayecto en el IFM. A JJ y las Valerias por ser buenos amigos y excelentes compañeros de cubículo. A Iván por darme asesorías e ideas para mi investigación.
- Al IFM y a la UMSNH por permitirme continuar estudiando y a CONACYT por financiar mis estudios.

Resumen

En esta tesis estudiamos un modelo muy simple del mercado financiero, cuya construcción surge de primeros principios desde la *teoría Gauge* del arbitraje de divisas. Esta teoría tiene como base que la simetría subyacente de los mercados financieros y las teorías fundamentales de la física, llamada simetría de Gauge, es la misma. La simetría de Gauge en el mercado financiero surge de la arbitrariedad en la elección de la denominación de una divisa, que al tratarse como un grado de libertad interno del sistema, conduce de manera natural a la descripción en haces fibrados. En este contexto, tratamos a los valores presentes netos y a la compra-venta de activos como un transporte paralelo de dinero en un espacio curvo, donde los componentes de conexión adecuados son dados por medio de las tasas de interés, los tipos de cambio y los precios de los activos.

De nuestro modelo de juguete obtenemos una ecuación invariante de Gauge que nos da la dinámica de los comerciantes en el mercado financiero cuando se presentan oportunidades de arbitraje. Como aplicación resolvemos esta ecuación de manera numérica proponiendo perfiles para las oportunidades de arbitraje. Primero tratamos el caso unidimensional y después presentamos un bosquejo del caso bidimensional.

Palabras clave: MERCADO FINANCIERO, SIMETRÍA DE GAUGE, ECUACIÓN DE DIFUSIÓN, OPORTUNIDADES DE ARBITRAJE, CAMPO DE GAUGE.

Abstract

In this thesis we study a very simple model of the financial market, whose constructions arose from first principles from the *Gauge theory* of currency arbitrage. This theory is based on the fact that the underlying symmetry of financial markets and fundamental theories of physics, called *Gauge symmetry*, is the same. Gauge symmetry in the financial market arises from the arbitrariness in the choice of a currency denomination, which, when treated as an internal degree of freedom of the system, naturally leads to the description in fibre bundles. In this context, we treat net present values and the purchase and sale of assets as a parallel transport of money in a curved space, where the appropriate connecting components are given by means of interest rates, exchange rates and asset prices.

From our toy model we obtain a Gauge invariant equation that gives us the dynamics of traders in the financial market when arbitrage opportunities arise. As an application we solve this equation numerically by proposing profiles for arbitrage opportunities. First in the one-dimensional case and then we present a sketch of the two-dimensional case.

Keywords: FINANCIAL MARKET, GAUGE SYMMETRY, DIFFUSION EQUATION, ARBITRAGE OPPORTUNITIES, GAUGE FIELD.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	IV
Abstract	V
Índice general	VI
1. Introducción	1
2. Fundamentos	5
2.1. Electromagnetismo clásico	5
2.2. Invarianza de Gauge	7
2.3. Invarianza de Gauge en electrodinámica clásica	8
2.4. Invarianza de Gauge en la teoría cuántica	9
2.5. Derivada covariante	10
2.6. Haces fibrados y Finanzas	11
2.6.1. Geometría diferencial en haces fibrados	12
2.6.2. Curvatura	18
2.6.3. Ejemplo financiero: cambio de divisas	20
2.6.4. Electrodinámica financiera	23
3. Modelo financiero simple	29
3.1. Finanzas Matemáticamente	33
3.1.1. Dinámica de arbitraje	41

3.1.2. Dinámica del comerciante	44
3.1.3. Dinámica de comerciantes y arbitraje	46
4. Aplicaciones	49
4.1. Caso unidimensional	50
4.1.1. Dinámica de un campo constante	51
4.1.2. Dinámica de un campo dependiente del tiempo	57
4.2. Caso bidimensional	61
Conclusiones	65
Bibliografía	67
A. Anexo I: Estudios relacionados	70

Capítulo 1

Introducción

El interés de los físicos en la Economía, y particularmente en tratar de entender y describir los mercados financieros, crece notablemente en la década de los 80 del siglo pasado, cuando aparece la necesidad de analizar enormes cantidades de datos financieros [1]. Fue entonces cuando en *Wall Street* se contrataron suficientes físicos y matemáticos con el objetivo de analizar el mercado. Años después, en los 90, el físico Estadounidense H. E. Stanley introduce el término “Econofísica” para referirse al área interdisciplinaria que intenta combinar Física, Matemáticas y Economía [2], [3]. Sin embargo, los estudios fenomenológicos de la Física y la Economía se han cruzado en numerosas ocasiones desde hace mucho tiempo atrás [4]. Por ejemplo, desde el contexto de finanzas, el matemático Louis Bachelier resolvió el problema del movimiento Browniano antes que Einstein, cuya corroboración experimental fue merecedora de un premio Nobel, dejando en evidencia la naturaleza molecular de la materia. Por otro lado, fue el físico Daniel Bernoulli el primero en introducir el concepto de utilidad para describir las preferencias de la gente.

Con ayuda de herramientas tomadas de las Matemáticas y de la Física se ha podido modelar y describir la dinámica de los mercados financieros, los cuales constituyen sistemas complejos. Éstos sistemas están formados por una cantidad muy grande de componentes individuales, en los cuales pequeñas perturbaciones pueden provocar enormes efectos. Esto se debe a que todos los posibles estados que puede tomar el sistema surgen de fenómenos colectivos entre sus componentes [5].

La influencia de estas “ciencias exactas” en la teoría financiera se debe a su alcance y potencialidad que tienen en la resolución de problemas. No obstante, existe una diferencia notable entre estas ciencias exactas y la economía financiera: El factor humano en juego. Esto presenta una dificultad adicional porque su comportamiento suele ser impredecible. Sin embargo, es común encontrarse con este tipo de complicaciones al intentar describir a los fenómenos naturales, por lo que siempre se suelen hacer suposiciones para simplificar su descripción, lo que resulta es el desarrollo de modelos para describir la naturaleza impredecible, partiendo de un conjunto de reglas o axiomas.

En este trabajo de tesis presentamos una breve revisión de la literatura que introduce al modelado de mercados financieros desde el marco de las teorías de Gauge [6]. La observación clave para esto es que la simetría subyacente de los mercados financieros y las teorías fundamentales de la física, esto es, la simetría de Gauge, es la misma. Con esta consideración, abrimos camino para utilizar algunos métodos físicos y geométricos bien desarrollados para aplicarlos en la teoría de mercados financieros, y en particular, para estudiar la dinámica del mercado en equilibrio, teniendo en mente que se puede extender al estudio del mercado en desequilibrio [7].

Veremos que la simetría con respecto a la elección de las unidades de activos o, dicho de otro modo, al reescalamiento de una moneda, conduce a una formulación de haces fibrados en analogía precisa con las teorías físicas fundamentales. Esta formulación geométrica proporciona objetos matemáticos útiles que pueden usarse en la teoría, y también brinda un escenario general, pero al mismo tiempo casi único, para la construcción de la teoría.

Los especuladores y arbitrajistas son personas que aprovechan los errores de precios en un mercado, obteniendo una ganancia de ello. Para fluctuaciones rentables, se trasladan a activos rentables, alejándose de otros activos comparativamente menos rentables. Así, todos los activos de riesgo similar se vuelven igualmente atractivos, por lo que los arbitrajistas restauran el equilibrio [8]. Se dice que un mercado es eficiente cuando este proceso de equilibrio se lleva a cabo de manera muy rápida. Entonces, el mercado corrige el error de precios al instante. Sin embargo, esto es

una idealización y no se sostiene por tiempos suficientemente pequeños.

Podemos encontrar una analogía entre la restauración del equilibrio de los mercados financieros y el fenómeno de *apantallamiento* o *efecto pantalla* de electrodinámica clásica. Sucede que cuando una distribución de carga positiva se sitúa en una región del espacio, las cargas negativas presentes sienten una fuerza de atracción hacia esa región, mientras que las cargas positivas también sienten una fuerza pero ésta es de naturaleza repulsiva. El resultado es que las cargas terminan en posiciones donde las fuerzas actuantes se anulen, manteniéndose en equilibrio. Para el mercado financiero, podemos visualizar una oportunidad de arbitraje con exceso de rendimiento positivo como un campo eléctrico y a los arbitrajistas como cargas positivas y negativas, los cuales descartan una fluctuación rentable y restablecen el equilibrio, eliminando así la oportunidad de arbitraje. Esta analogía entre el apantallamiento y la restauración del equilibrio de los mercados financieros, surge de manera natural en el marco de la *Teoría Gauge del arbitraje*. Aquí se trata al cálculo de los valores presentes netos y la compra-venta de activos como un transporte paralelo de dinero en un espacio curvo, e interpreta la tasa de interés, las tasas de cambio y los precios de los activos como componentes de conexión adecuados. Esta estructura geométrica es semejante a la estructura de la electrodinámica, donde los componentes del potencial vectorial son componentes de conexión responsables del transporte paralelo de las cargas en el espacio. Los elementos de los tensores de curvatura en electrodinámica son el campo electromagnético, y en la teoría de Gauge del arbitraje es la tasa de retorno en exceso.

En el Capítulo 2 de este trabajo introducimos una breve discusión sobre los elementos teóricos necesarios. Comenzamos con electromagnetismo clásico, en donde enfatizamos la forma de las ecuaciones de Maxwell para los potenciales electromagnéticos, con el fin de abrir pauta para introducir el concepto de invarianza de Gauge posteriormente. Más adelante, se discute brevemente la invarianza de Gauge en la teoría cuántica. Esta parte resulta bastante útil porque es la base teórica de la aplicación de este concepto en la teoría del mercado financiero. En la parte final de este Capítulo hablamos de manera informal sobre el uso del concepto matemático de haz fibrado en el mercado financiero, el cual ofrece una manera natural para estudiar las

simetrías del mismo.

En el tercer Capítulo, replicamos la construcción de un modelo de juguete del mercado financiero de J. Schwichtenberg [9], el cual resulta derivarse de manera informal e intuitiva, a manera de introducción al modelado del mercado financiero mediante la teoría de Gauge del arbitraje. En este modelo no aparece explícitamente el concepto de haz fibrado. Sin embargo, para el ojo entrenado se nota su presencia implícita. Posteriormente, en el Capítulo 4, se presenta la aplicación del modelo sencillo desarrollado para el mercado financiero en una dimensión y se presenta un bosquejo para el tratamiento bidimensional. En ambos casos, se resuelve numéricamente la ecuación dinámica de los comerciantes en el sistema en presencia de oportunidades de arbitraje (campo de Gauge). Para el caso unidimensional, se proponen dos ejemplos para este campo de Gauge, uno estacionario uniforme y otro dependiente del tiempo, los cuales son puramente didácticos debido que no reflejan en todo su detalle el comportamiento real del mercado financiero.

Al final de este trabajo, presentamos algunas conclusiones y el basto trabajo futuro que ofrece esta disertación.

Capítulo 2

Fundamentos

2.1. Electromagnetismo clásico

En esta parte, nuestra intención es presentar los elementos de Electromagnetismo Clásico que necesitamos para temas posteriores, sin dar una discusión rigurosa. Sean \vec{E} y \vec{B} los campos eléctrico y magnético clásicos, \vec{A} y ϕ los potenciales vectorial y escalar asociados a dichos campos, también \vec{J} y ρ la densidad de corriente y la densidad de carga eléctrica que los generan. Podemos escribir los campos en términos de los potenciales como [10]:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (2.2)$$

Las expresiones matemáticas que describen los fenómenos electromagnéticos son las *ecuaciones de Maxwell*, que en el vacío se escriben en la forma [11]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}. \quad (2.6)$$

Al sustituir (2.1), (2.2) en las ecuaciones de Maxwell, obtenemos las siguientes ecuaciones para los potenciales:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (2.7)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}. \quad (2.8)$$

De esta manera, hemos reducido las cuatro ecuaciones de Maxwell para los campos eléctrico y magnético, a dos ecuaciones acopladas para los potenciales asociados [12]. Estas ecuaciones son equivalentes a las de Maxwell para los campos \vec{E} y \vec{B} en todos los sentidos. Más adelante veremos que existe una arbitrariedad en los potenciales que permite desacoplar estas ecuaciones y resolverlas de una manera más simple.

A partir de los potenciales podemos definir un cuadrivector potencial

$$A^\mu = (\phi; \vec{A}) \quad (2.9)$$

y un cuadrivector corriente

$$J^\mu = (\rho; \vec{J}). \quad (2.10)$$

También conviene definir el tensor antisimétrico

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.11)$$

donde $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right)$. Este es llamado tensor electromagnético o tensor de Faraday, cuyas componentes son

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = -E^i, \quad (2.12)$$

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = \epsilon^{ijk} B^k. \quad (2.13)$$

La densidad Lagrangiana convencional para el electromagnetismo es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2) - \rho\phi + \vec{J} \cdot \vec{A}, \quad (2.14)$$

o en notación relativista:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu. \quad (2.15)$$

Se puede corroborar que al tomar las ecuaciones de Euler-Lagrange, obtenemos las ecuaciones de Maxwell. El primer término de (2.15) es la energía cinética y el segundo es el término de interacción.

2.2. Invarianza de Gauge

Las teorías en las que se determina la interacción debido a la invarianza de su acción bajo algunas transformaciones locales se denominan “teorías de Gauge” o “teorías de norma”. Dentro del marco de estas teorías de Gauge, podemos saber en cierto sentido de dónde vienen los Lagrangiano o Hamiltonianos, cómo debería ser una interacción para describir un sistema físico real, y por qué la interacción electromagnética se debe a una partícula de espín uno sin masa (el fotón) que se intercambia entre objetos eléctricamente cargados.

2.3. Invarianza de Gauge en electrodinámica clásica

Recordemos que en electrodinámica clásica podemos escribir los campos eléctrico y magnético en términos de los potenciales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}, \\ \vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Los potenciales ϕ y \vec{A} no están definidos de manera única. Sin embargo, esto no trae consecuencias físicas observables porque los campos \vec{E} y \vec{B} no se ven afectados. Para ver esto, sea $\Lambda(\vec{x}, t)$ una función arbitraria del espacio y del tiempo que llamaremos *función de Gauge*, y consideremos los nuevos potenciales ϕ' y \vec{A}' :

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda.\tag{2.17}$$

Los campos eléctrico y magnético asociados \vec{E}' y \vec{B}' quedan invariantes:

$$\vec{E}' = -\nabla\phi' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{E}\tag{2.18}$$

y

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}.\tag{2.19}$$

A las transformaciones (2.17) se les llama *transformaciones de Gauge*, las cuales pueden ser reescritas con ayuda del cuadrivector potencial (2.9) como

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu\Lambda.\tag{2.20}$$

Decimos entonces que las ecuaciones de Maxwell son invariantes de Gauge porque los campos eléctrico y magnético no dependen de Λ . Esta invarianza de Gauge es la clave para resolver de manera sencilla las ecuaciones para los potenciales (2.7) y (2.8). La idea es elegir una función de Gauge Λ conveniente para resolver dichas ecuaciones. A esto se le conoce como *elección de Gauge* o *elección de norma*. En la práctica

no se realiza una elección de norma explícita, sino de manera implícita, imponiendo una restricción entre los potenciales. Las elecciones de norma que comúnmente se consideran en electromagnetismo clásico son:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{Norma de Coulomb}), \quad (2.21)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{Norma de Lorenz}). \quad (2.22)$$

2.4. Invarianza de Gauge en la teoría cuántica

En mecánica cuántica, la invarianza de Gauge adopta una forma muy diferente que nos lleva a un punto de vista moderno. Dado que los observables dependen de $|\psi|^2$ con ψ una función de onda, podemos exigir que la estructura de la teoría sea invariante ante la transformación

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha} \psi, \quad (2.23)$$

donde α es una constante [13]. A esta transformación se le llama *transformación de Gauge global*, debido a que ψ se transforma de la misma manera en todas partes. No obstante, debería ser posible elegir la fase de ψ en cada punto del espacio tiempo sin afectar a la teoría, lo que nos lleva a que ésta debería ser invariante bajo

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow \psi'(\vec{x}, t) = e^{-i\chi(\vec{x}, t)} \psi(\vec{x}, t), \quad (2.24)$$

a lo que llamamos *transformación de Gauge local*.

Sea una partícula que es descrita por una función de onda ψ que satisface la ecuación de Schrödinger:

$$-\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t) = i \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t}. \quad (2.25)$$

Si intentamos introducir la transformación (2.24) nos damos cuenta de que la ecuación de Schrödinger no es invariante. Por otro lado, para partículas cargadas eléctricamente

en presencia de campos electromagnéticos, la ecuación de Schrödinger se vuelve

$$\frac{1}{2m} \left(-i\nabla + e\vec{A} \right)^2 \psi = \left(i\frac{\partial}{\partial t} + e\phi \right) \psi. \quad (2.26)$$

Aquí, e es la carga eléctrica del electrón. Se deduce que bajo las transformaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, t) &\rightarrow \psi'(\vec{x}, t) = e^{-i\chi(\vec{x}, t)} \psi(\vec{x}, t), \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \frac{1}{e} \nabla \chi(\vec{x}, t), \\ \phi &\rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{e} \frac{\partial \chi(\vec{x}, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

la ecuación (2.26) permanece invariante, o de forma más elegante, podemos mantener la notación relativista mediante

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \frac{1}{e} \partial^\mu \chi. \quad (2.28)$$

Interpretamos estos resultados para decir que la invarianza de Gauge local de la teoría cuántica requiere de la presencia de un campo $A^\mu = (\phi; \vec{A})$. Asimismo, debe existir una partícula de espín uno (fotón) y una interacción electromagnética. Sin embargo, el valor numérico de e es desconocido. Dicho de otra forma, si una partícula lleva una carga eléctrica y la teoría es invariante ante ciertas transformaciones de fase denominadas transformaciones de Gauge, entonces deben existir campos asociados llamados *campos de Gauge* y partículas asociadas con espín uno llamadas *bosones de Gauge*. Esto nos permite escribir los Lagrangianos de interacción asociados.

2.5. Derivada covariante

Definamos

$$\vec{D} \equiv -\vec{\nabla} - ie\vec{A} \quad (2.29)$$

y

$$D^0 \equiv \frac{\partial}{\partial t} - ie\phi. \quad (2.30)$$

Con esto podemos reescribir la ecuación (2.26) en la forma

$$\frac{1}{2m} \left(i\vec{D} \right)^2 \psi = iD^0 \psi. \quad (2.31)$$

Aplicando una transformación de Gauge local a $\vec{D}\psi$:

$$\begin{aligned} -i\vec{D}'\psi' &= -i \left(-\vec{\nabla} - ie\vec{A} - i\nabla\chi \right) e^{-i\chi}\psi \\ &= -e^{-i\chi} \left(-\vec{\nabla} - ie\vec{A} \right) \psi \\ &= e^{-i\chi} \left(-i\vec{D}\psi \right), \end{aligned} \quad (2.32)$$

y, análogamente,

$$\begin{aligned} -iD'^0\psi' &= -i \left(\frac{\partial}{\partial t} - ie\phi + i\frac{\partial\chi}{\partial t} \right) e^{-i\chi}\psi \\ &= e^{-i\chi} \left(-iD^0\psi \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ahora combinamos a \vec{D} y D^0 en un cuádrivector:

$$D^\mu \equiv \left(D^0; \vec{D} \right) = \partial^\mu - ieA^\mu. \quad (2.34)$$

A D^μ se le conoce como la *derivada covariante Gauge*. Combinando las ecuaciones (2.32) y (2.33) observamos que $D^\mu\psi$ transforma como una función de onda si ψ lo hace, y que cualquier ecuación escrita en términos de la derivada covariante automáticamente será invariante de Gauge.

2.6. Haces fibrados y Finanzas

Las finanzas son un área de la Economía que se relaciona con las decisiones de asignación de recursos en el tiempo, bajo condiciones de riesgo (incertidumbre). En

particular, podemos mencionar la descripción de las actividades que se desarrollan en los mercados donde se compran y venden instrumentos financieros como acciones y bonos, instrumentos derivados como opciones, futuros y swaps, o los mercados de divisas [1].

Por otro lado, la Física es una ciencia natural que trata de explicar fenómenos naturales con exactitud, utilizando el lenguaje de las matemáticas. El alcance la Física es tan extraordinariamente amplio, que no es sorpresa que sus métodos y técnicas puedan ser aplicadas a otras áreas de la ciencia como lo es la Economía.

En esta sección, nuestra intención es introducir el concepto de haces fibrados de manera informal para demostrar que este lenguaje matemático ofrece una manera natural para estudiar las simetrías del mercado financiero. Basamos esta discusión en el libro “*Physics of Finance. Gauge modelling in Non-equilibrium Pricing*” de K. Ilinski [7].

Cuando los humanos aprendemos cosas nuevas, inconscientemente buscamos simetrías en ellas y descomponemos los objetos en componentes más pequeños para crear vínculos entre ellos. La simetría nos permite reducir un objeto complejo a una serie de componentes simples, mientras que los elementos fundamentales simples forman la base para formular la simetría. Podemos decir que la simetría y su geometría relacionada están unidas. En este contexto, postularemos la simetría de Gauge para construir un modelo financiero y exploraremos cómo esta simetría está relacionada con una geometría particular: La geometría de los haces fibrados.

El mercado financiero, las fuerzas fundamentales de la Física, los sistemas de organismos vivos y organizaciones de sociedades humanas, tienen algo en común; estos fenómenos pueden ser estudiados matemáticamente por medio de la *dinámica invariante de Gauge en haces fibrados*.

2.6.1. Geometría diferencial en haces fibrados

Cuando estudiamos problemas físicos clásicos, normalmente conviene localizar la posición de un objeto por medio de coordenadas en el espacio. El menor número de coordenadas que permiten localizar un objeto en un espacio lo llamamos dimensión

espacial. El concepto de haces fibrados surge con el objetivo de ver de manera más general a los espacios. Intuitiva e informalmente, un haz fibrado consta de subespacios idénticos que se unen o se “pegan” para formar el espacio completo. Un ejemplo trivial es el plano bidimensional cartesiano $x - y$, el cual se puede visualizar como una colección de líneas rectas colocadas en una superficie y que luego se “pegan” de forma paralela (Figura 2.1). Visualmente, cada línea es idéntica a las demás. Sin embargo, geoméricamente son distintas en su posición en el eje x . Los subespacios idénticos se denominan *fibras* y el subespacio que las “pega” se denomina *base*. En general, cualquier haz fibrado E consta de una base B y fibras F idénticas que se sujetan a cada punto de la base.

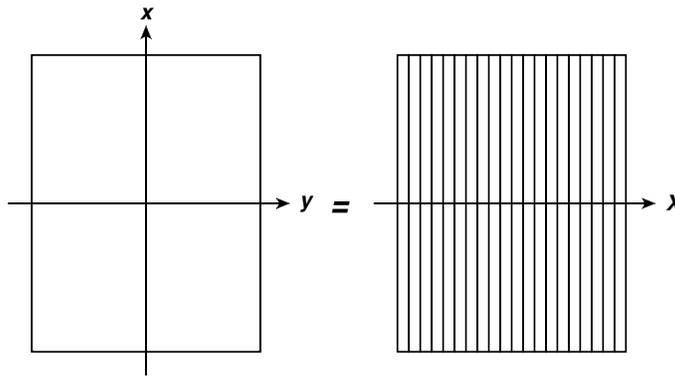


Figura 2.1: El plano visto como un haz fibrado trivial.

Ahora, para definir un punto en el espacio, se necesita otorgar una posición en la base y luego en la fibra. De esta manera, la dimensión del haz fibrado se vuelve la suma de las dimensiones de la base y de las fibras:

$$\dim(E) = \dim(B) + \dim(F). \tag{2.35}$$

Es claro que para el ejemplo del plano, esta afirmación se satisface, ya que tanto la base (eje x) como las fibras (líneas rectas) tienen dimensión 1. En general, una posición en el haz fibrado se define mediante un par de coordenadas (b, f) donde b da la ubicación de la fibra y f da la posición en la fibra.

El por qué introducir una nueva estructura en el espacio se debe a que normalmente

la base y las fibras son de distinta naturaleza y conviene separarlas en la descripción. Por ejemplo, si consideramos el tubo de la Figura 2.2, vemos que las fibras siguen siendo líneas rectas pero la base ahora es un círculo.

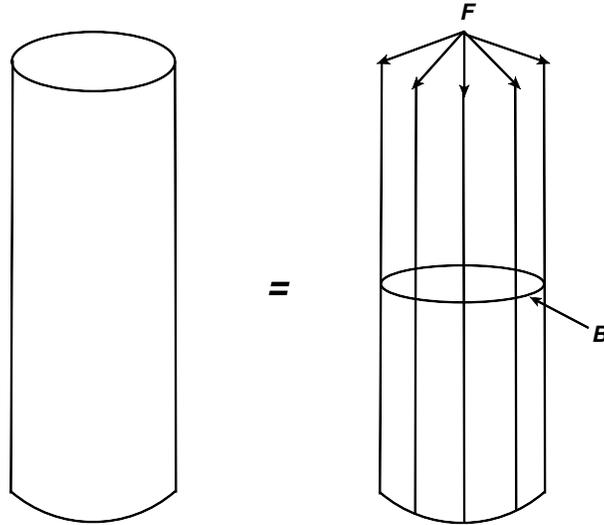


Figura 2.2: Un tubo visto como un haz fibrado trivial.

Las coordenadas en las fibras van de menos infinito a infinito, mientras que para la base van de 0 a 2π , donde 0 se identifica con 2π . La separación suele estar dictada por las características particulares del problema. Un ejemplo de ello es una ciudad ideal, donde existen edificios en una red cuadrada bidimensional. Para escribir una dirección se necesita poner el nombre de las calles entre las cuales está ubicado el edificio y luego agregar el número del departamento. Este departamento está escondido dentro del edificio y juega el papel del grado de libertad interno.

Es importante destacar que en los ejemplos de haces fibrados que hemos revisado anteriormente, hemos trabajado con haces fibrados triviales que permiten utilizar un sistema de coordenadas globales para identificar cualquier punto en el espacio. Sin embargo, en la mayoría de los casos, los haces fibrados no son triviales y son precisamente estos los que resultan más interesantes para su estudio. En este tipo de haces fibrados, no es posible cubrirlos con un único sistema de coordenadas global, por lo que es necesario emplear múltiples sistemas de coordenadas locales que se superpongan en regiones específicas. Para ello, es necesario contar con una regla que

nos permita realizar la conversión entre los diferentes sistemas de coordenadas locales en las regiones donde se superponen.

Transporte paralelo

Hasta el momento, hemos considerado los haces fibrados como construcciones geométricas globales. Si queremos analizar cantidades locales, necesitamos introducir un nuevo concepto llamado *conexión*, que juega un papel muy importante en la geometría diferencial local.

Supongamos que una partícula se mueve en un haz fibrado E . Dado que la partícula puede moverse dentro de las fibras y entre las fibras, su posición está determinada por las coordenadas (b, f) . Podría surgir la situación de que las coordenadas entre las fibras no se ajusten entre sí y esto, en realidad, no dice nada sobre el cambio “real” en la posición de la partícula.

Para visualizar mejor esta situación, retomemos el ejemplo de la ciudad perfecta. Supongamos que todos los edificios tienen 10 pisos (departamentos), y el dueño de uno de ellos decide enumerar los pisos de su edificio del 11 al 20. Esto no causa cambio alguno a la estructura del edificio, pero puede causar problemas a cualquier persona que asista al mismo, ya que el primer piso tendrá el nombre del piso 11, el segundo del 12 y así sucesivamente. Para poder saber a qué piso se debe dirigir, se tiene que ajustar el sistema de coordenadas local y el que normalmente se usa (enumeración del 1 al 10). Sin este ajuste, nadie sabe si el piso 15 de dicho edificio es en realidad más alto que el piso 3 de otro. Esta regla de comparación se llama *conexión*.

Una partícula no puede saltar de un punto a otro muy distante. De hecho, se mueve a través del espacio dando una serie de pasos infinitesimales. Esto significa que es suficiente definir la regla de comparación para puntos cercanos y luego sumar las diferencias si se tienen que considerar puntos distantes. Esto nos permite definir el *campo de conexión local*. Este campo de conexión, también conocido como *campo de Gauge*, se define para todos los puntos de la base y da la amplitud del aparente desacuerdo entre los sistemas de coordenadas de fibras “pegadas” para cerrar infinitesimalmente puntos de la base.

El campo de Gauge es un campo vectorial y tiene tantos componentes como el número de coordenadas independientes en la base. Más aún, para cada dirección independiente en la base, se tiene que especificar una regla de comparación independiente para los sistemas de coordenadas de dos puntos cercanos a lo largo de esa dirección. Dado que queremos comparar sistemas de coordenadas de fibras en puntos muy cercanos, el ajuste del sistema puede considerarse como una composición de ajustes del marco a lo largo de las direcciones independientes (Fig. 2.3). Si las direcciones están marcadas por $i = 1, \dots, \dim(B)$ y los puntos en la base están parametrizados por coordenadas b^i , decimos que la transición del punto b al punto $b + db$ se puede lograr mediante una serie de transiciones a lo largo de las direcciones independientes.

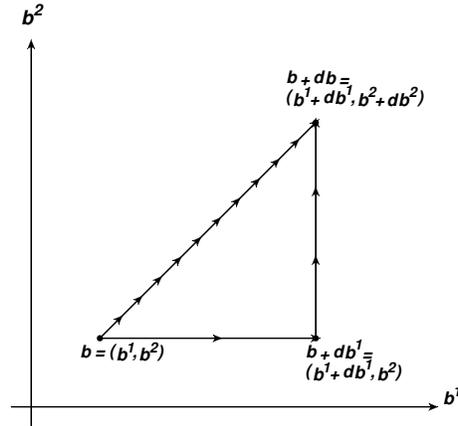


Figura 2.3: Cada uno de los transportes paralelos locales es aproximadamente un resultado del transporte paralelo a lo largo de las direcciones principales en la base.

Dicho de otro modo, para encontrar el ajuste $\Delta F(b)$ entre los sistemas de coordenadas de las fibras $F(b)$ y $F(b + db)$, hay que calcular el producto escalar de la diferencia entre los puntos de la base, db , y el campo de Gauge A :

$$\Delta F(b) = db \cdot AF = \sum_{i=1}^{\dim B} A^i F(b) \cdot db^i. \quad (2.36)$$

Aquí el componente A^i es una transformación del sistema de coordenadas que hace que los sistemas de coordenadas de $F(b)$ y $F(b + db^i)$ se ajusten. Para el ejemplo que vimos donde una persona cambia el número de los pisos de su edificio, la transformación

será la suma del número 10, de modo que $\Delta F(b) = 10$.

Una curva y el campo de conexión a lo largo de la curva juntos producen un *transporte paralelo* a lo largo de la curva. Si se consideran las coordenadas de dos elementos de las fibras pegadas a dos puntos distantes, se comparan por medio del campo de conexión y alguna curva, y si no se encuentra diferencia, entonces se dice que el segundo elemento es resultado del transporte paralelo del primer elemento a lo largo de esa curva. Esto significa que la diferencia en las coordenadas es puramente el resultado de un desajuste de los marcos de coordenadas y la *diferencia covariante a lo largo de la curva* es cero. Sin embargo, si los objetos no están conectados por transporte paralelo a lo largo de una curva, existe una diferencia covariante distinta de cero a lo largo de la curva.

Consideremos un ejemplo. Tomemos una esfera como el haz fibrado y definamos las reglas de transporte paralelo. Sean las fibras planos bidimensionales tangentes pegados a cada punto de la esfera. Las reglas del transporte paralelo a lo largo de círculos son (Fig. 2.4):

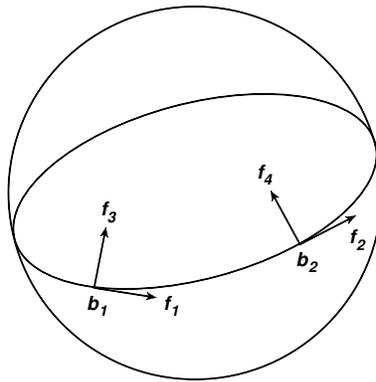


Figura 2.4: Reglas para el transporte paralelo sobre la esfera.

1. El vector f_1 es tangente a la circunferencia en el punto b_1 , y se transporta al vector f_2 tangente a la circunferencia en el punto b_2 .
2. El vector f_3 es ortogonal a la circunferencia en el punto b_1 , y se transporta al vector f_4 ortogonal a la circunferencia en el punto b_2 .

Cualquier trayectoria en la esfera se puede descomponer en una serie de fragmentos muy pequeños de círculos. Entonces, el transporte paralelo a lo largo de grandes círculos define el transporte paralelo a lo largo de todas las curvas posibles. Si el vector original no es exactamente paralelo u ortogonal al círculo, primero debe presentarse como una suma de componentes paralelos y ortogonales, de modo que el resultado final sea una suma de los componentes después del transporte paralelo.

En la Figura 2.5 se presenta un ejemplo de transporte paralelo a lo largo de una trayectoria cerrada compuesto por tres segmentos de grandes círculos.

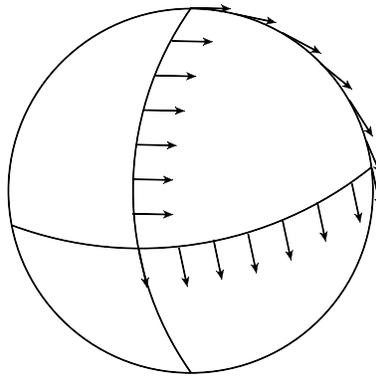


Figura 2.5: Transporte paralelo a lo largo de un triángulo esférico.

Observamos que el transporte paralelo de un vector a lo largo de la trayectoria gira el vector 90° . Este resultado sorprendente y quizá extraño es el resultado estricto de nuestra definición de transporte paralelo. O más formal, esto es una consecuencia de la definición de transporte paralelo y la geometría del haz fibrado subyacente. En breve veremos que las mismas reglas aplicadas al caso donde la base es un plano en lugar de una esfera no dará ninguna rotación. Así, por el momento podemos conjeturar que la curvatura tiene algo que ver con el comportamiento sorprendente.

2.6.2. Curvatura

Anteriormente, al definir las reglas generales para el transporte paralelo, no nos importó si los resultados del transporte paralelo a lo largo de dos curvas diferentes con los mismos puntos finales son diferentes. Incluso si quisiéramos encontrar una

conexión suave de modo que los transportes paralelos a lo largo de las dos curvas den el mismo resultado, suele ser una tarea imposible. Esto radica en la geometría del haz fibrado.

Retomemos el ejemplo del transporte paralelo a través de la esfera, pero ahora en lugar de considerar un triángulo esférico, dibujamos un rectángulo esférico como en la Figura 2.6.

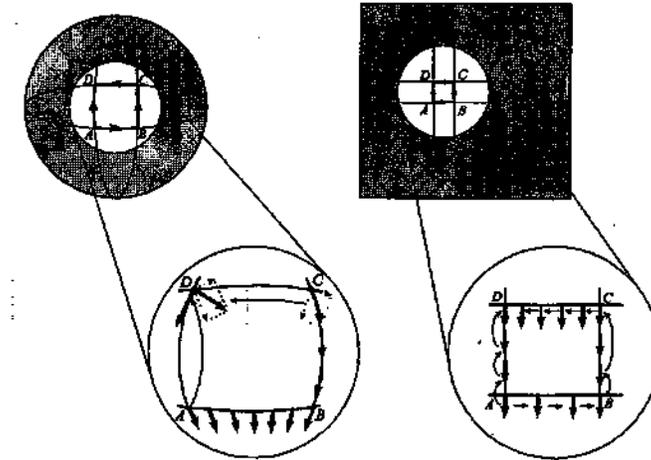


Figura 2.6: Las mismas reglas de transporte paralelo producen diferentes resultados en la esfera y en el plano. La curvatura del espacio es la responsable del transporte paralelo no trivial. Figura tomada de *Physics of finance: Gauge modelling in non-equilibrium pricing* (p. 28), por Kirill Ilinski, 2001, Wiley.

De la Figura 2.6 observamos que los resultados son diferentes. A simple vista, los responsables de la diferencia covariante distinta de cero son los bordes curvos del rectángulo. Notemos que mientras hagamos más grande al radio de la esfera, la diferencia covariante se hará cada vez más pequeña. Más precisamente, la diferencia covariante disminuirá cuando R^{-2} multiplique al área de la superficie limitada por las curvas. Aplicado a nuestro ejemplo anterior, la superficie del triángulo esférico es igual a $4\pi R^2/8$, lo que da una diferencia covariante de $\pi/2$, resultado encontramos anteriormente de manera gráfica. A R^{-2} se le conoce como la curvatura Gaussiana \mathcal{R} de la esfera.

La diferencia Δ entre dos transportes paralelos a lo largo de dos curvas con los mismos extremos sobre una base de algún haz fibrado con alguna conexión, se define

como el producto del área S encerrada por las curvas y la curvatura \mathcal{R} de la haz fibrado asociado con la conexión:

$$\Delta = S\mathcal{R}. \tag{2.37}$$

La curvatura de un haz fibrado caracteriza su geometría y, por lo tanto, es un objeto muy útil para el estudio y las aplicaciones.

2.6.3. Ejemplo financiero: cambio de divisas

El objetivo de este apartado es ver la relación que existe entre el mercado financiero y las construcciones abstractas que hemos descrito. Veremos que las nociones de haces fibrados, conexión y la curvatura correspondiente encuentran su lugar en un escenario financiero como si hubieran surgido especialmente para ello. Quizá esto sorprenda a cualquiera pero no debería, ya que se mencionó anteriormente cómo los haces fibrados son muy adecuados para describir sistemas con dos conjuntos de coordenadas con naturaleza considerablemente diferente.

Por ejemplo, si se quiere caracterizar una cartera de inversiones, el valor de la cartera se puede considerar como una coordenada adicional al conjunto de coordenadas que dan su composición en términos de participación de la riqueza en cada componente de la cartera. Así, el espacio de las carteras puede ser considerado como un haz fibrado, donde la base está compuesta por todas las estructuras posibles de una cartera que cuestan, digamos un dólar, y las fibras semilíneas siendo todos los valores monetarios posibles de la cartera.

Supongamos que alguien nos dice que el rendimiento actual es mayor que hace 20 años. Esto no dice mucho hasta que se especifica la inflación y se calcula la tasa de rendimiento real por medio de la ecuación de Fisher¹. Dicho de otro modo, necesitamos ajustar los sistemas de coordenadas. Algo análogo sucede con el cambio de divisas. No podemos comparar directamente una divisa por otra. Se necesita un tipo de cambio que diga cómo se comparan realmente, y de la experiencia que hemos

¹La ecuación se puede escribir

$$i = r + \pi,$$

donde i es el tipo de interés nominal, r el tipo de interés real y π la tasa de inflación [14].

adquirido, sabemos que esto significa introducir una conexión. En este caso, la conexión está completamente definida por el tipo de cambio. De esta manera, el cambio de divisas debería evocar inmediatamente en nosotros pensamientos sobre haces fibrados y conexiones.

Veamos un ejemplo sencillo, definamos la base como cinco puntos etiquetados como P (pesos mexicanos), D (dólares), E (euros), L (libras esterlinas) y F (francos suizos) (Figura 2.7) y las fibras como semilíneas con una coordenada $f \in [0, \infty)$. Cualquier cantidad de dinero se caracteriza entonces por el tipo de moneda y la cantidad de ellas. Este haz fibrado es el *espacio de dinero*.

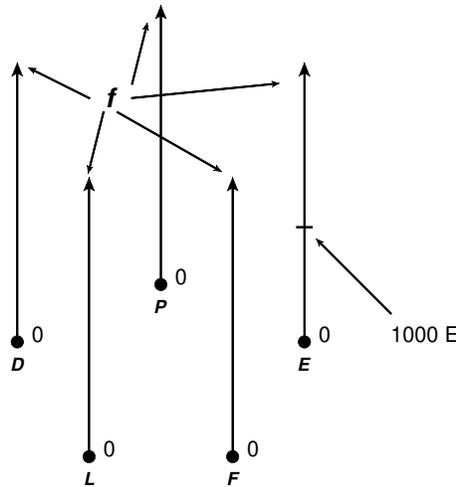


Figura 2.7: Espacio de haz fibrado para el cambio de divisas.

Si suponemos que cualquier moneda puede intercambiarse con cualquier otra moneda, las “curvas” en la base consisten en todos los saltos posibles de un punto de la base a otro. El transporte paralelo asociado a cada una de estas curvas es simplemente el cambio de moneda. Los tipos de cambio constituyen la conexión sobre esta curiosa base discreta. Supongamos que tenemos dos monedas: Pesos mexicanos y euros, y queremos comparar cinco pesos y un euro. Dicho de otro modo, queremos comparar los números 5 y 1 en los sistemas de coordenadas de fibras correspondientes a los puntos “P” y “E” en la base. A primera impresión, cinco monedas parecen más atractivas que una. Sin embargo, la realidad es que es preferible tener un euro porque normalmente el tipo de cambio de un euro a pesos es mayor a 20. Vemos entonces

que cuando los activos se transforman de cinco pesos a un euro, el cambio real fue igual a +15 pesos en lugar del valor aparente inicial -4 .

En términos matemáticos: la diferencia covariante entre 5 pesos y 1 euro a lo largo de la curva de intercambio directo es igual a +15, aunque alguien ingenuo pensaría en -4 . En este caso, el valor real de cinco pesos es $5/20 = 1/4$ euros. Esto significa que 0.25 euros son el resultado del transporte paralelo de 5 pesos mexicanos por el camino que une pesos y euros en la base.

Vemos entonces que todo lo que necesitamos para definir las reglas de transporte paralelo es el hecho de que los activos se pueden intercambiar. Esto significa que podemos construir un haz fibrado para cualquier mercado que trate con cualquier tipo de activos. Una forma de hacerlo es etiquetar los activos, colocar puntos con estas etiquetas en un plano, conectar puntos que representen activos directamente intercambiables y pegar semilíneas en cada punto. En la Figura 2.8 se muestra un ejemplo de la construcción para el caso de dólares DL, oro O, bronce BR y plata P.

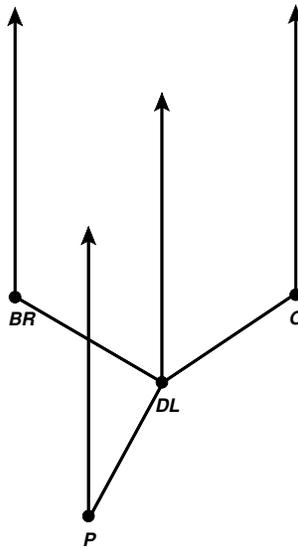


Figura 2.8: Haz fibrado para el cambio de otros activos: dólares, oro, plata y bronce.

En este caso, se pueden cambiar cualquier material por dólares pero no cambiar directamente materiales entre sí. Para cambiarse indirectamente, primero deben cambiarse por dólares y después por el activo deseado.

Lo siguiente que interesa es agregar el tiempo en el haz fibrado para la descripción

de un entorno dinámico. Para ello, tenemos que formar una nueva base para describir los movimientos del dinero en el mercado y el movimiento en el tiempo que permanece en el mismo activo. La nueva base consiste entonces en ejes de tiempo que perforan el plano en puntos etiquetados con los nombres de los activos existentes en el mercado (Fig. 2.9).

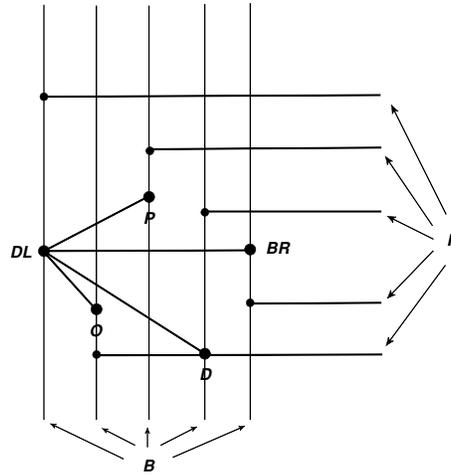


Figura 2.9: Haz fibrado generalizado para incluir el tiempo.

El nuevo haz fibrado está dado por fibras semilíneas pegadas a cada punto de la nueva base. Las coordenadas en las semilíneas dan cuenta del número de billetes en las monedas correspondientes en el momento correspondiente. Este haz fibrado ya permite comparar dinero en diferentes activos y diferentes momentos de tiempo.

En resumen, todo mercado cambiario posee la estructura de un haz fibrado provisto de reglas de transporte paralelo en su interior, lo que significa que no depende de la naturaleza de los activos intercambiables, las preferencias de los participantes del mercado o cualquier otro detalle del mercado.

2.6.4. Electrodinámica financiera

Denotemos el tipo de cambio de dólares a pesos mexicanos por $F(t)$ en el momento t y sus respectivas tasas de interés por r_1 y r_2 . Supongamos que toda la información relevante que puede afectar las tasas de cambio entre t y $t + dt$ se encuentra en estas

tasas. Una cuestión de interés es saber cómo se relacionan $F(t)$ y $F(t + dt)$. Se puede demostrar que la relación buscada está dada por la siguiente expresión:

$$F(t)(1 + r_2) = F(t + dt)(1 + r_1) \quad (2.38)$$

Analicemos esta expresión. Si por alguna razón el lado derecho de la relación es mayor que el lado izquierdo, esto resultará inmediatamente en una respuesta del *dinero inteligente*, que tomará prestados pesos en el momento t , los cambiará inmediatamente por dólares, depositará los dólares hasta el momento $t + dt$ a la tasa de interés r_1 y luego los volverá a cambiar por pesos. Por tanto, esta situación en la que el lado derecho de (2.38) es mayor que el lado izquierdo asegurará una ganancia de la transacción de arbitraje descrita anteriormente. Esta situación no durará mucho tiempo; pocos vendedores elegirán vender dólares en el momento t y pocos compradores elegirán comprar dólares en el momento $t + dt$ a precios iniciales. Así, los tipos de cambio cambiarán hasta que se redima la igualdad (2.38). Análogamente, se puede asegurar de que el lado izquierdo de (2.38) no pueda permanecer más grande que el lado derecho durante mucho tiempo. De esta manera, la ecuación expresa la condición de ausencia de arbitraje. No obstante, es de mayor interés el proceso de restauración de la ecuación (2.38) que en la misma ecuación.

El tiempo que tomará el proceso de restauración (o relajación) está determinado por factores como la liquidez del mercado, imperfecciones del mercado, costos de transacción y el diferencial entre oferta y demanda. Los mismos factores definirán la velocidad del ajuste de precios. Por ejemplo, si la relajación es más rápida cuando la desviación de un precio equilibrado es grande, esto atrae a un gran número de arbitrajistas a pesar de los costos de transacción, en comparación con los casos en que las desviaciones son pequeñas y el costo de transacción hace que las transacciones sean rentables solo para grandes arbitrajistas. Vemos entonces que un *mercado financiero perfecto* tiene un tiempo de relajación muy pequeño (casi instantáneo).

Arbitraje como curvatura

Los rendimientos de arbitraje obtenidos por la manipulación de precios siempre están asociados con el flujo de activos a lo largo de dos rutas diferentes que tienen un comienzo y un final comunes. En el ejemplo del tema anterior, hemos comparado el camino *I* con el camino *II* (Fig. 2.10).

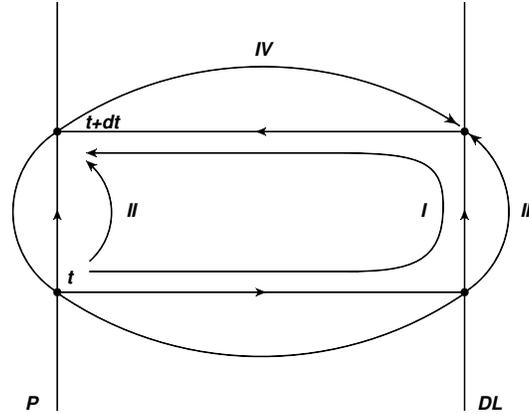


Figura 2.10: Dos caminos de pesos mexicanos en el tiempo t a pesos mexicanos en el tiempo $t + dt$. Los diferentes resultados del transporte paralelo a lo largo de las curvas dan lugar a oportunidades de arbitraje.

Los rendimientos obtenidos de estos dos caminos de transacciones se expresan mediante la ecuación (2.38), asumiendo que no hay arbitraje. Análogamente, se pueden usar los caminos *III* y *IV* que comiencen y terminen en dólares.

Se puede estudiar un camino cerrado del flujo de activos en lugar de dos caminos: se sigue el primer camino desde el punto de inicio hasta el final, y luego el segundo camino desde el final hasta el punto de inicio. En nuestro caso, será una trayectoria cíclica (c). Asignamos a cada segmento de este camino un respectivo factor de cambio o de interés para ajustar sistemas de coordenadas, y al multiplicar estos factores a lo largo del camino y restado uno, conseguimos

$$R(c) = F^{-1}(t)(1 + r_2)^{-1}F(t + dt)(1 + r_1) - 1 \quad (2.39)$$

que es igual a la ganancia descontada de una transacción de arbitraje cuando *efectivo* sigue la ruta 1 y *deudas* sigue la ruta 2. Llamemos a este valor *exceso de rentabilidad*

de la operación de arbitraje. Es claro que el valor $R(c)$ del exceso de rendimiento de la operación de arbitraje representa la curvatura asociada con la conexión definida por los tipos de cambio y las tasas de interés.

Apartir del camino cíclico (c), podemos derivar otro camino cíclico ($-c$) cambiando la dirección del flujo, el cual puede ser descrito por la ecuación

$$R(-c) = F(t)(1 + r_2)F^{-1}(t + dt)(1 + r_1), \quad (2.40)$$

la cual nos da el rendimiento descontado en una operación de arbitraje cuando *efectivo* sigue la ruta 3 y *deudas* sigue la ruta 4. Combinando las ecuaciones (2.39) y (2.40) podemos definir:

$$R = R(c) + R(-c) \quad (2.41)$$

que representa una oportunidad para llevar a cabo una operación de arbitraje rentable. La cantidad R es no negativa y es igual a cero solo si no hay arbitraje. Así, (2.38) es equivalente a la ecuación $R = 0$. Por lo tanto, la cantidad R caracteriza la existencia de arbitraje sin especificar una operación de arbitraje particular. Asimismo, esta cantidad está directamente relacionada con la curvatura del haz fibrado financiero. En electrodinámica, R es igual a la energía del campo electromagnético.

Cargas, fuerzas y simetría de Gauge

Del apartado anterior podemos concluir que el *efectivo* fluye hacia activos infravalorados desde activos sobrevalorados y las *deudas* fluyen hacia atrás, por lo que si el *efectivo* fluye como partículas cargadas que experimentan una fuerza, entonces las *deudas* se comportan como partículas con carga opuesta. Es más, los activos que fluyen de esa manera hacen que esta fuerza cambie, disminuyendo su valor y reduciendo la manipulación de precios. En física, este efecto se conoce como *apantallamiento*. Por lo tanto, podemos afirmar que un sistema financiero se comporta de la misma manera que un sistema de cargas en un campo de fuerza creado y modificado por estas cargas. Vemos entonces una analogía entre un sistema financiero que consta de *efectivo*, *deudas* y un campo de arbitraje, con un sistema electrodinámico clásico, que

trata con cargas positivas, cargas negativas y el campo electromagnético. Sin embargo, notemos que la *electrodinámica financiera* no vive en un espacio tridimensional convencional o espacio-tiempo tetradimensional, sino en un espacio discreto extraño (espacio-tiempo cuasi-unidimensional). En el ejemplo con dólares y pesos mexicanos, el espacio financiero consta de dos puntos solamente: un punto dólares y un punto pesos mexicanos, donde los activos se mueven de un punto a otro.

Al analizar más de cerca a las ecuaciones (2.39) y (2.40), nos percatamos de que tienen unas propiedades interesantes: no cambian cuando se modifican las unidades monetarias y sus respectivas tasas de cambio y de interés. Supongamos ahora que estamos tratando de construir una teoría que tiene la propiedad de no cambiar cuando las unidades de medida se eligen arbitrariamente, es decir, no depende de la elección de las unidades de los activos financieros, los valores nominales de la moneda, el lote tamaño, etc., lo cual tiene mucho sentido debido a que, hasta cierto punto, el mundo real tiene esta propiedad. Al construir esta teoría, solo se pueden usar aquellos objetos matemáticos que permanecen sin cambios cuando se cambian las unidades de medida, por ejemplo, cantidades definidas por (2.39)-(2.41). Resulta que la teoría no trivial más simple será casi equivalente al electromagnetismo clásico.

Al construir un modelo, es natural comenzar observando las simetrías de la teoría. El mercado financiero puede ser descrito por medio de una teoría de Gauge. Más adelante veremos que al construir esta teoría, aparece un campo de fuerza que permite preservar su simetría de Gauge. El papel de la fuerza que mueve los flujos de dinero lo juega el exceso de rendimiento en la operación de arbitraje, exactamente de la misma manera que el campo electromagnético es un campo de fuerza en la electrodinámica. Desde un punto de vista matemático, la teoría financiera se parece mucho a la electrodinámica, con la diferencia de que en lugar de un grupo de Gauge de rotación de fase cuántica, se debe usar un grupo de Gauge de dilataciones de unidades de activos financieros.

En el siguiente capítulo presentaremos un modelo de juguete para el mercado financiero, el cual no utiliza la descripción en haces fibrados por simplicidad, sin embargo, en la geometría del modelo yace implícitamente. Podemos ver a este modelo

como el primer paso para construir la teoría del mercado financiero como una teoría de Gauge.

Capítulo 3

Modelo financiero simple

En este Capítulo nos proponemos a construir un modelo simple del mercado financiero tomando como base el libro “*Physics from finance*” de Jakob Schwichtenberg [9].

En general, definimos a una *simetría* como una transformación que nos lleva a nuestro sistema de un estado a otro diferente que pasa a tener las mismas propiedades físicas [15]. Una simetría muy importante en el mercado financiero que nos permite introducir el concepto de espacio interno de nuestro modelo simple, es el cambio en la denominación de una moneda o reescalamiento de una moneda [16]. Esta simetría es una *simetría de Gauge*. Esto quiere decir que cambiar el valor de una moneda no tiene efecto alguno siempre y cuando se ajusten los precios automáticamente, que por supuesto, no sucede en la vida real, pero que supondremos que así sucede en nuestro modelo. Veremos posteriormente que esta simetría nos conducirá a describir de manera matemáticamente correcta nuestro modelo simplificado del mercado financiero.

Para continuar, a partir de ahora tomaremos un bien como ejemplo, digamos el aguacate, e imaginemos que todos los posibles precios de éste se encuentran en un espacio interno, el *espacio del dinero*, así cada punto de este espacio corresponde a un precio específico del aguacate.

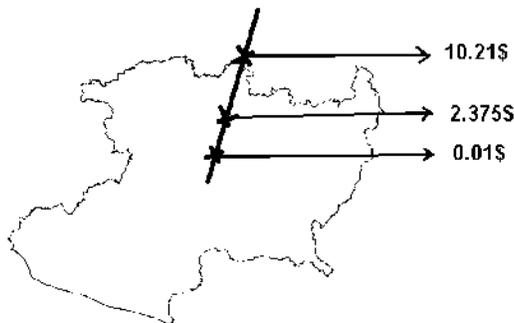


Figura 3.1: La semilínea sobre el estado indica el espacio interno del dinero, donde cada punto indica cada posible valor del aguacate.

Como se observa en la Figura 3.1, imaginamos que una semilínea abstracta representa nuestro espacio del dinero y cada punto de ella corresponde a un precio del aguacate. Además, los desplazamientos de un punto a otro de esta semilínea corresponden a las simetrías de nuestro sistema.

Ahora, consideremos que cada país le otorga diferente precio al aguacate de acuerdo a su moneda local. Entonces conviene imaginar que existe una semilínea en cada país. Todas las semilíneas junto con todas las posibles ubicaciones (países) forman el escenario que necesitamos para describir lo que sucede en nuestro modelo.

Veamos ahora qué sucede cuando permitimos que los países usen diferente moneda. Un precio grande para el aguacate en un país no significa que el aguacate sea costoso en ese lugar. Lo mismo sucede si se le otorga una cifra pequeña en algún otro país. El determinar si el aguacate es barato o costoso en un país comparado con otro depende del tipo de cambio entre las monedas de los países.

Geométricamente, esto significa que cuando los países usan monedas diferentes no sólo necesitamos una semilínea en cada país, sino también algo que las una. Los tipos de cambio son el pegamento que nos permite unir nuestras semilíneas y nos permite calcular cuánto vale una moneda en términos de otra moneda (Fig. 3.2).



Figura 3.2: Los tipos de cambio entre las monedas de distintos países nos permiten conectar todos los espacios del dinero.

Por otro lado, para describir lo que sucede en un sistema dado se requiere de una ecuación de movimiento. Aún sin tener una ecuación explícita podemos afirmar ciertas cosas que ésta debería cumplir. Por ejemplo, nuestra ecuación no puede depender directamente de los precios del aguacate, porque vimos anteriormente que el reescalamiento de una moneda no tiene efecto físico alguno. Algo que sí podría tener efecto sobre la dinámica es ciertamente las oportunidades de arbitraje. Sin embargo, detectar este tipo de oportunidades resulta una tarea no trivial porque distintos países suelen tener monedas diferentes. Para estar totalmente seguros de si una oportunidad es lucrativa, tenemos que regresar a la moneda inicial después de vender nuestros aguacates en algún país y comparar el dinero obtenido.

Una observación crucial es que las oportunidades de ganar dinero no dependen de las convenciones locales, porque suponemos que el tipo de cambio entre divisas se ajusta inmediatamente después de haber algún reescalamiento de la moneda. De esta manera, el factor que cuantifica la oportunidad de ganancia es buen candidato para aparecer en la ecuación que describe al sistema.

Aunque hasta el momento hemos hablado de las posibilidades de ganar dinero comerciando bienes como el aguacate, resulta que también podemos ganar dinero

simplemente intercambiando una divisa por otra. A esto se le conoce como *arbitraje de divisas*. Veamos un ejemplo, supongamos que tenemos los siguientes tipos de cambio:

$$\frac{D}{E} = 1, \quad \frac{E}{F} = 2, \quad \frac{F}{P} = 10 \quad y \quad \frac{D}{P} = 10, \quad (3.1)$$

donde D denota dólar, F franco, P pesos mexicanos y E euros. Un comerciante puede comenzar con $1D$, cambiarlo por $1E$, luego cambiar el euro por $2F$, luego cambiarlos por $20P$ y finalmente cambiarlos por $2D$. Vemos entonces que el comerciante ha terminado con el doble de dinero que con el que comenzó. Además dicha posibilidad de ganar dinero es una característica del sistema que no depende de las convenciones locales.

Anteriormente mencionamos que en nuestra interpretación geométrica los tipos de cambio entre divisas son el *pegamento* que une las líneas que representan los espacios de dinero de los diferentes países. Definimos nuestro espacio interno total como la unión de todas las semilíneas pegadas.

Intuitivamente, cada vez que nos movemos en una trayectoria cerrada y terminamos en un estado diferente al que comenzamos, decimos que el espacio en el que nos movemos es curvo. Cada vez que un comerciante realiza una transacción financiera, además de moverse a través del espacio tiempo, se mueve a través de nuestro espacio interno total, por lo que su comportamiento está totalmente influenciado por la curvatura del espacio.

En el mercado financiero, específicamente en el mercado de divisas, además de comerciantes, también existen bancos que regulan los tipos de cambio y permiten a los comerciantes intercambiar una moneda por otra. Estos juegan un rol importante en la dinámica del sistema, porque ajustan los tipos de cambio para deshacerse de las oportunidades de arbitraje. Vemos entonces que hay una interacción continua entre los comerciantes y los bancos; los primeros se mueven bajo la influencia de los patrones de las oportunidades de arbitraje del sistema, y los segundos modifican los tipos de cambio dependiendo del comportamiento de los comerciantes.

Matemáticamente, los factores de ganancia que describen las oportunidades de

arbitraje representan la curvatura de nuestro espacio interno. En este trabajo identificamos a la curvatura con un *campo de Gauge*.

A continuación hacemos la transición de las ideas y conceptos que hemos introducido para crear nuestro modelo simple del mercado financiero en términos matemáticos.

3.1. Finanzas Matemáticamente

Una forma sencilla de representar a nuestros países es imaginar que se encuentran en una red bidimensional (Fig. 3.3). Así, cada país puede ser etiquetado por medio de un vector $\vec{n} = (n_1, n_2)$ que apunta a su ubicación. Conviene introducir una base de vectores $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ para desplazarnos entre países vecinos. Por simplicidad, usamos $\vec{e}_1 = (1, 0)$ y $\vec{e}_2 = (0, 1)$.

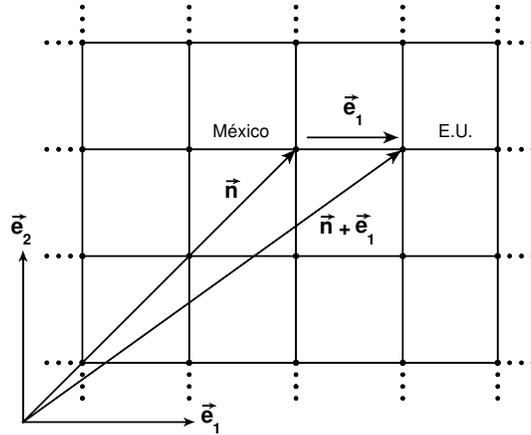


Figura 3.3: Países en una red bidimensional.

Denotemos por $R_i(\vec{n})$ a la tasa de cambio entre las monedas de los países ubicados en \vec{n} y $\vec{n} + \vec{e}_i$. Por ejemplo, supongamos que el país ubicado en \vec{n} usa dólares como moneda y el país vecino en la dirección \vec{e}_1 usa Euros; $R_1(\vec{n})$ nos dice cuántos Euros obtenemos por cada dólar.

A partir de $R_i(\vec{n})$, definamos la cantidad $A_i(\vec{n})$ de la siguiente manera:

$$R_i(\vec{n}) \equiv e^{A_i(\vec{n})}; \quad A_i(\vec{n}) \equiv \ln(R_i(\vec{n})). \quad (3.2)$$

En nuestro modelo, una transformación de Gauge es un reescalamiento de una moneda local, que impacta directamente en las tasas de cambio. Usemos la notación $f(\vec{n})$ para denotar un reescalamiento de la moneda en el país en \vec{n} por un factor f , como se muestra en la Figura 3.4.

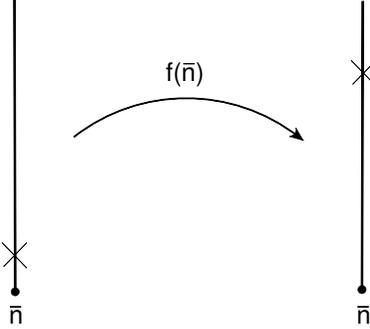


Figura 3.4: Reescalamiento de la moneda en el país \vec{n} .

Usando logaritmos:

$$f(\vec{n}) \equiv e^{\epsilon(\vec{n})}, \quad (3.3)$$

donde $\epsilon(\vec{n}) \equiv \ln(f(\vec{n}))$.

Es sencillo verificar que cuando se realizan las transformaciones de Gauge $f(\vec{n})$ y $f(\vec{n} + \vec{e}_i)$, la tasa de cambio entre los países en \vec{n} y $\vec{n} + \vec{e}_i$ se modifica como

$$R_i(\vec{n}) \longrightarrow \frac{f(\vec{n} + \vec{e}_i)}{f(\vec{n})} R_i(\vec{n}). \quad (3.4)$$

En términos de logaritmos tenemos

$$\begin{aligned} R_i(\vec{n}) \equiv e^{A_i(\vec{n})} &\longrightarrow \frac{f(\vec{n} + \vec{e}_i)}{f(\vec{n})} R_i(\vec{n}) \\ &= \frac{e^{\epsilon(\vec{n} + \vec{e}_i)}}{e^{\epsilon(\vec{n})}} e^{A_i(\vec{n})} \\ &= e^{A_i(\vec{n}) + \epsilon(\vec{n} + \vec{e}_i) - \epsilon(\vec{n})}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Por tanto,

$$A_i(\vec{n}) \longrightarrow A_i(\vec{n}) + \epsilon(\vec{n} + \vec{e}_i) - \epsilon(\vec{n}). \quad (3.6)$$

Recordemos que un aspecto importante del sistema es si existen oportunidades de arbitraje, esto es, la posibilidad de operar con divisas y obtener ganancias. Para ello, se requiere intercambiar monedas en un ciclo, porque de esa manera podemos comparar la cantidad de dinero inicial y la cantidad final.

Definimos el *factor de ganancia* como la razón de la cantidad final de dinero y la cantidad inicial cuando seguimos un ciclo específico como

$$G(\vec{n}) = R_i(\vec{n})R_j(\vec{n} + \vec{e}_i) \frac{1}{R_i(\vec{n} + \vec{e}_j)} \frac{1}{R_j(\vec{n})}. \quad (3.7)$$

Recordemos que cuando este factor es mayor que uno, podemos ganar dinero siguiendo ese ciclo específico. Si es menor que uno, perdemos dinero.

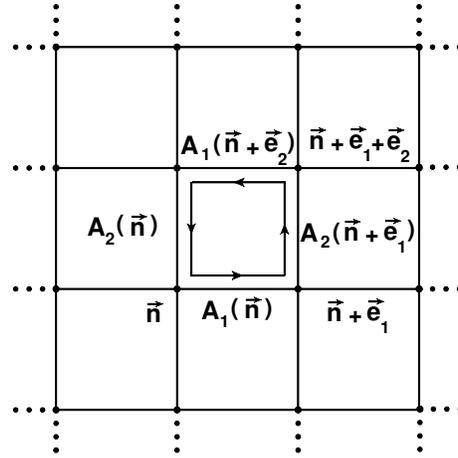


Figura 3.5: Camino cerrado arbitrario.

Reescribamos (3.7) en términos de A_i :

$$\begin{aligned} G(\vec{n}) &\equiv e^{F_{ij}(\vec{n})} \\ &= R_i(\vec{n})R_j(\vec{n} + \vec{e}_i) \frac{1}{R_i(\vec{n} + \vec{e}_j)} \frac{1}{R_j(\vec{n})} \\ &= e^{A_i(\vec{n})} e^{A_j(\vec{n} + \vec{e}_i)} e^{-A_i(\vec{n} + \vec{e}_j)} e^{-A_j(\vec{n})} \\ &= e^{A_i(\vec{n}) + A_j(\vec{n} + \vec{e}_i) - A_i(\vec{n} + \vec{e}_j) - A_j(\vec{n})}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Concluimos que

$$F_{ij}(\vec{n}) = A_j(\vec{n} + \vec{e}_i) - A_j(\vec{n}) - [A_i(\vec{n} + \vec{e}_j) - A_i(\vec{n})]. \quad (3.9)$$

G y F_{ij} son cantidades físicas en la estructura de las tasas de cambio y no dependen de las elecciones del sistema monetario interno. Es decir, estas cantidades son *invariantes de Gauge*. Una observación importante es que F_{ij} es antisimétrica: $F_{ij} = -F_{ji}$.

Además de tipos de cambio espaciales, también existen tipos de cambio temporales (tasas de interés). Una forma elegante de incluir el tiempo es hacerlo como una coordenada extra así como en relatividad especial. Entonces, además de tener países, tenemos copias de éstas en diferentes momentos (véase Fig. 3.6).

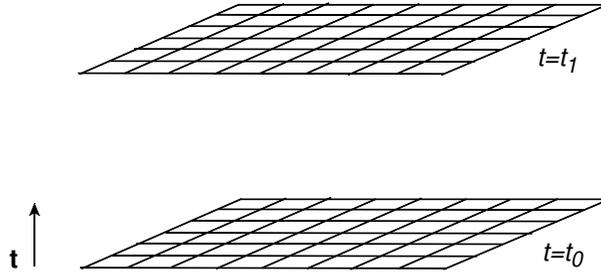


Figura 3.6: Una manera conveniente de introducir las tasas de interés es crear copias de nuestra red bidimensional, donde cada copia denota un tiempo distinto.

Así, cada punto de esta red de espacio-tiempo está especificado por un vector con 3 coordenadas $\vec{n} = (n_0, n_1, n_2)$ donde la coordenada cero denota el tiempo. La ecuación (3.9) se vuelve

$$F_{\mu\nu}(\vec{n}) = A_\nu(\vec{n} + \vec{e}_\mu) - A_\nu(\vec{n}) - [A_\mu(\vec{n} + \vec{e}_\nu) - A_\mu(\vec{n})], \quad (3.10)$$

donde $\mu, \nu \in \{0, 1, 2\}$.

El siguiente paso para darle más realismo a nuestro modelo es considerar que en lugar de tener una ubicación por país, tenemos infinitas ubicaciones (representando así los comerciantes). Gráficamente, significa que nuestra red tendrá cada vez más puntos como se muestra en la Figura 3.7.

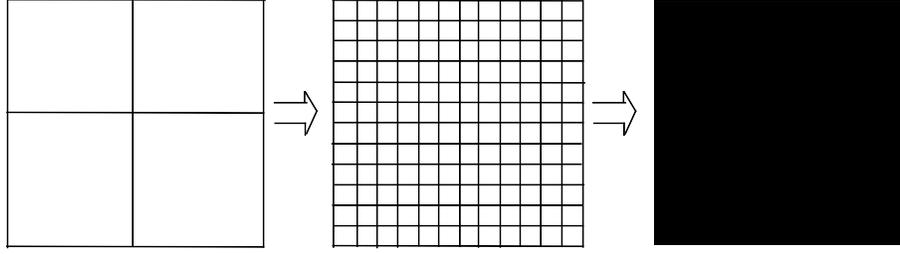


Figura 3.7: Al suponer infinitas ubicaciones para el comercio, pasamos al límite continuo.

Conviene identificar cada punto de la red con un vector $\vec{x} = a\vec{n}$ donde \vec{n} es un vector con componentes enteros $\vec{n} = (n_i, n_j)^T$. Estos enteros se vuelven cada vez más grandes conforme a se vuelve más pequeña, ya que introducimos cada vez más puntos en un intervalo determinado. Es común llamar a a como *espaciado de lattice* y al límite $a \rightarrow 0$ le llamamos el *límite continuo*.

Matemáticamente, en el límite continuo, la distancia entre puntos vecinos de la red tiende a cero $a \rightarrow 0$ mientras que \vec{x} permanece como un vector finito fijo. Más aún, $A_i(\vec{n})$ conecta puntos de una red discreta, por lo que necesitamos hacer el reemplazo $A_i(\vec{n}) \rightarrow a\tilde{A}_i(\vec{x})$. Con esto la transformación (3.5) se vuelve

$$\begin{aligned} a\tilde{A}_i(\vec{x}) \rightarrow a\tilde{A}'_i(\vec{x}) &\equiv a\tilde{A}_i(\vec{x}) + \epsilon(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \epsilon(\vec{x}) \\ &= a \left[\tilde{A}_i(\vec{x}) + \frac{\epsilon(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \epsilon(\vec{x})}{a} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

pero

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\epsilon(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \epsilon(\vec{x})}{a} \equiv \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}. \quad (3.12)$$

Por tanto, en el límite $a \rightarrow 0$ tenemos

$$\tilde{A}_i(\vec{x}) \rightarrow \tilde{A}'_i(\vec{x}) \equiv \tilde{A}_i(\vec{x}) + \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}. \quad (3.13)$$

De manera análoga, el factor de ganancia se vuelve

$$\begin{aligned} F_{ij}(\vec{x}) &= a\tilde{A}_j(\vec{x} + a\vec{e}_i) + a\tilde{A}_j(\vec{x}) - \left[a\tilde{A}_i(\vec{x} + a\vec{e}_j) - a\tilde{A}_i(\vec{x}) \right] \\ &= a^2 \left[\frac{\tilde{A}_j(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \tilde{A}_j(\vec{x})}{a} - \frac{\tilde{A}_i(\vec{x} + a\vec{e}_j) - \tilde{A}_i(\vec{x})}{a} \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Observamos que se requiere realizar el reemplazo $F_{ij} \rightarrow a^2 \tilde{F}_{ij}$ para conseguir una cantidad fija en el límite continuo.

$$a^2 \tilde{F}_{ij} = a^2 \left[\frac{\tilde{A}_j(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \tilde{A}_j(\vec{x})}{a} - \frac{\tilde{A}_i(\vec{x} + a\vec{e}_j) - \tilde{A}_i(\vec{x})}{a} \right]. \quad (3.15)$$

En dicho límite,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \tilde{F}_{ij}(\vec{x}) = \frac{\partial \tilde{A}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial x_j}. \quad (3.16)$$

Para incluir las tasas de cambio temporales, hacemos el reemplazo

$$F_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \quad (3.17)$$

donde hemos omitido la tilde sobre $F_{\mu\nu}$ para simplificar la notación.

Recordemos que, además de poder ganar dinero intercambiando divisas, podemos hacerlo comprando bienes en un país. Retomemos el ejemplo del aguacate. Lo vendemos en un país y posteriormente regresamos al país inicial para comparar el dinero final obtenido con el que comenzamos. El factor de ganancia para este caso se vuelve

$$g_i(\vec{n}) = \frac{p(\vec{n} + \vec{e}_i)}{p(\vec{n})R_i(\vec{n})}, \quad (3.18)$$

con $p(\vec{n})$ denotando el precio del aguacate en el país ubicado en \vec{n} . Para probar la ecuación (3.18), realizamos un procedimiento análogo al que se hizo con la definición de $G(\vec{n})$ en (3.7). Recordemos que un factor de ganancia menor que uno significa que perdemos dinero y un factor mayor a uno significa que ganamos dinero.

Nuevamente introducimos logaritmos:

$$g_i(\vec{n}) \equiv e^{H_i(\vec{n})}, \quad (3.19)$$

$$p(\vec{n}) \equiv e^{\varphi(\vec{n})}, \quad (3.20)$$

y la ecuación (3.18) se vuelve

$$\begin{aligned} e^{H_i(\vec{n})} &= \frac{e^{\varphi(\vec{n} + \vec{e}_i)}}{e^{\varphi(\vec{n})} e^{A_i(\vec{n})}} \\ &= e^{\varphi(\vec{n} + \vec{e}_i) - \varphi(\vec{n}) - A_i(\vec{n})}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

por lo que

$$H_i(\vec{n}) = \varphi(\vec{n} + \vec{e}_i) - \varphi(\vec{n}) - A_i(\vec{n}). \quad (3.22)$$

El factor de ganancia $g_i(\vec{n})$ y su logaritmo $H_i(\vec{n})$ nos dicen qué tan lucrativo resulta comerciar aguacate partiendo de la ubicación \vec{n} y vendiéndolo en el país con sede en $\vec{n} + \vec{e}_i$. Esto motiva a definir la cantidad

$$J_i(\vec{n}) \equiv qH_i(\vec{n}) = q[\varphi(\vec{n} + \vec{e}_i) - \varphi(\vec{n}) - A_i(\vec{n})], \quad (3.23)$$

que llamamos *corriente de aguacate* y donde q es una constante de proporcionalidad que cuantifica la fuerza con la que los comerciantes de un sistema dado reaccionan ante una oportunidad de ganar dinero comerciando aguacate. De manera análoga a fórmulas anteriores, podemos involucrar el tiempo en la definición de $J_i(\vec{n})$ haciendo el reemplazo del índice $i \in \{1, 2\} \rightarrow \mu \in \{0, 1, 2\}$:

$$J_\mu(\vec{n}) = q[\varphi(\vec{n} + \vec{e}_\mu) - \varphi(\vec{n}) - A_\mu(\vec{n})] \quad (3.24)$$

y a su vez en el límite continuo se vuelve

$$J_\mu(t, \vec{x}) = q \left[\frac{\partial \varphi(t, \vec{x})}{\partial x_\mu} - A_\mu(t, \vec{x}) \right]. \quad (3.25)$$

Recordemos que $H_i(\vec{n})$ nos dice qué tan lucrativo es transportar aguacate desde el

la ubicación \vec{n} y venderlo en $\vec{n} + \vec{e}_i$. Entonces, $J_i(\vec{n})$ es una medida de la cantidad de aguacate que fluye entre los dos países. En cambio, $H_0(\vec{n})$ nos dice cuánto dinero podemos ganar comprando aguacate en \vec{n} y vendiéndolo en un momento posterior en el mismo país. Por lo tanto, $J_0(\vec{n})$ nos dice cuánto aguacate existe en el país en \vec{n} . Esta es una idea importante porque hasta el momento no teníamos información sobre la cantidad de aguacate que existe en un lugar o sobre cómo fluye en algún sistema. La cantidad de aguacate en un país debe estar representada por medio de una cantidad independiente de sus precios locales, como lo es $J_0(\vec{n})$, así como su flujo con $J_i(\vec{n})$.

Debemos tener en cuenta que las diferencias de precios del aguacate pueden ser debido a cambios en la moneda. Por ello, en la definición de $H_0(\vec{n})$ existe un término adicional $A_0(\vec{n})$ que ajusta las diferencias de precio.

Con toda esta notación matemática introducida para describir nuestro modelo simple, ya estamos en disposición de aplicar reglas específicas que nos den el comportamiento del sistema. Primero, estamos interesados de establecer reglas que nos digan cómo aparecen y evolucionan las oportunidades de arbitraje a través del tiempo. Posteriormente, necesitamos establecer reglas que describan cómo se comportan nuestros comerciantes, particularmente cómo reaccionan ante oportunidades de arbitraje. La Figura 3.8 muestra esquemáticamente lo que descubriremos posteriormente.

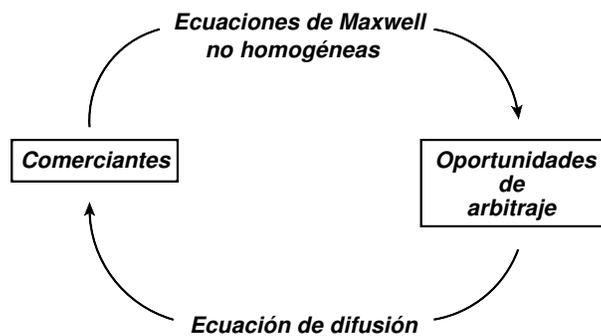


Figura 3.8: Las ecuaciones de Maxwell nos darán la dinámica de las oportunidades de arbitraje, mientras que la ecuación de difusión nos dirá cómo se comportan los comerciantes en el sistema cuando no existen oportunidades de arbitraje.

3.1.1. Dinámica de arbitraje

Para determinar la dinámica dentro de nuestro modelo financiero simple, necesitamos establecer un conjunto de reglas. Trataremos con un conjunto muy específico el cual es llamado *las ecuaciones de Maxwell*.

Comencemos suponiendo que el aguacate se conserva, lo que significa que cuando el aguacate disminuye en un país, debe haberse ido a otro, e inversamente, cuando aumenta en un país entonces el aguacate proviene de otro lugar. Matemáticamente, escribimos

$$\text{cambio de aguacate en el país } \vec{n} = \text{flujo neto total} \quad (3.26)$$

que en nuestra notación se vuelve

$$J_0(\vec{n} + \vec{e}_0) - J_0(\vec{n}) = - \left(\sum_{i=1}^2 J_i(\vec{n}) - \sum_{i=1}^2 J_i(\vec{n} - \vec{e}_i) \right), \quad (3.27)$$

donde sumamos sobre todos los países vecinos. La ecuación (3.27) se puede reescribir equivalentemente como

$$J_0(\vec{n} + \vec{e}_0) - J_0(\vec{n}) + \left(\sum_{i=1}^2 J_i(\vec{n}) - \sum_{i=1}^2 J_i(\vec{n} - \vec{e}_i) \right) = 0. \quad (3.28)$$

La Figura 3.9 muestra el significado de la expresión anterior esquemáticamente.

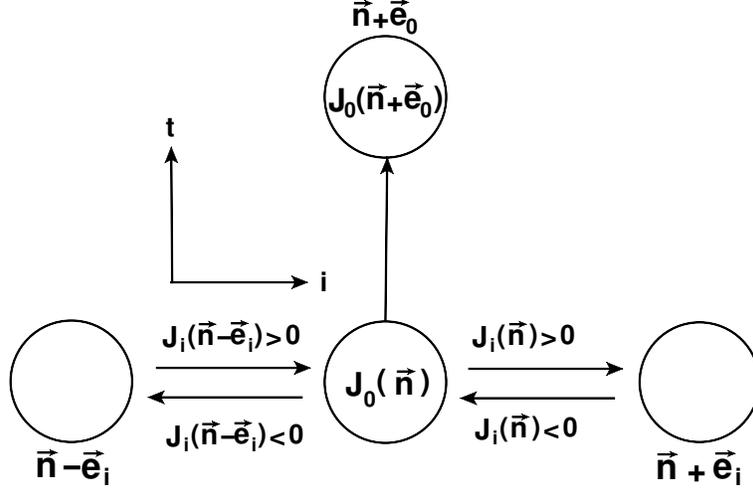


Figura 3.9: Esquema que muestra las convenciones para la conservación del activo en el país \vec{n} .

En el límite continuo, la ecuación (3.28) se vuelve

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial J_i}{\partial x_i} &= 0 \\
 \sum_{\mu=0}^2 \partial_\mu J_\mu &= 0 \\
 \partial_\mu J_\mu &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

donde hemos usado la convención de suma de Einstein en la última igualdad. La ecuación (3.29) es la famosa *ecuación de continuidad*.

Lo siguiente que queremos es construir una ecuación que nos diga cómo se crean y evolucionan dinámicamente las oportunidades de arbitraje. Recordemos que J_μ contiene información sobre la posición y flujo del aguacate y $F_{\mu\nu}$ contiene la información sobre las oportunidades de arbitraje. Además, estas cantidades no dependen de las convenciones locales, así que es de esperarse que sean las candidatas para describir nuestro sistema. Un problema que surge al tratar de introducir estas cantidades en una igualdad es que J_μ tiene un índice mientras que $F_{\mu\nu}$ tiene dos índices. No obstante, la ecuación (3.29) puede ofrecer una solución a este problema.

La clave es usar que

$$\partial_\nu \partial_\mu F_{\mu\nu} = 0, \tag{3.30}$$

debido a que $F_{\mu\nu}$ es antisimétrico pero las derivadas parciales conmutan. Con esta información y con la ecuación de continuidad podemos proponer

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 J_\mu. \quad (3.31)$$

Aquí, μ_0 es una constante de proporcionalidad que nos establece las unidades correctas y que podemos interpretar como la intensidad con la que reacciona el patrón de oportunidades de arbitraje ante la presencia y flujo de aguacate. De esta manera, la ecuación (3.31) tiene un índice libre en cada lado y su derivada es cero:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\nu F_{\mu\nu} &= \partial_\mu \mu_0 J_\mu, \\ 0 &= \mu_0 \partial_\mu J_\mu, \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado la ecuación de continuidad. La ecuación (3.31) es la famosa *ecuación de Maxwell no homogénea*.

Para nuestro sistema discreto, la ecuación anterior se vuelve

$$\sum_{\nu=0}^2 F_{\mu\nu}(\vec{n}) - \sum_{\nu=0}^2 F_{\mu\nu}(\vec{n} - \vec{e}_\nu) = \mu_0 J_\mu. \quad (3.32)$$

Haciendo $\mu = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^2 F_{0\nu}(\vec{n}) - \sum_{\nu=0}^2 F_{0\nu}(\vec{n} - \vec{e}_\nu) &= \mu_0 J_0, \\ \sum_{i=1}^2 F_{0i}(\vec{n}) - \sum_{i=1}^2 F_{0i}(\vec{n} - \vec{e}_i) &= \mu_0 J_0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Asimismo, hemos usado que $F_{00} = 0$ ya que $F_{\mu\nu}$ es antisimétrico. Dado que $\mu_0 J_0$ es proporcional a la cantidad de aguacate ubicado en \vec{n} , para $\mu = 0$ en (3.31) nos da información sobre el patrón de tasas de cambio en un país donde está presente el

aguacate. En el límite continuo (3.33) se vuelve

$$\partial_i F_{0i} = \mu_0 J_0, \quad (3.34)$$

conocida como *ley de Gauss*.

Análogamente, para $\mu \rightarrow i \in \{1, 2\}$ en (3.32) obtenemos ecuaciones que nos dan información sobre el patrón de tasas de cambio que están presentes siempre que fluya el aguacate:

$$\partial_0 F_{i0} + \partial_j F_{ij} = \mu_0 J_i, \quad (3.35)$$

que es conocida como la *ecuación de Ampère-Maxwell*.

De la definición de $F_{\mu\nu}$ a partir de las tasas de cambio A_μ se sigue la siguiente ecuación

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad (3.36)$$

a la que llamamos *ecuación homogénea de Maxwell*.

3.1.2. Dinámica del comerciante

El objetivo de esta sección es comprender cómo reaccionan los comerciantes ante oportunidades de arbitraje. No obstante, como primer paso tenemos que entender cómo reaccionan cuando no las hay. Intentar entender las decisiones de cada comerciante no es una opción viable debido a la cantidad de factores que pueden influir y al número de comerciantes que contiene nuestro sistema (en el límite continuo consideramos infinitos de ellos). Nuestra tarea se vuelve explicar la dinámica de estos dejando pasar por alto tantos detalles individuales.

Esta situación se vuelve parecida al movimiento de granos de polen en el agua; los granos chocan constantemente con las moléculas del agua cambiando rápidamente de dirección, volviendo casi imposible predecir la trayectoria que tomará cada grano. Si nos alejamos un poco más observaremos que las trayectorias de cada grano se vuelven del tipo aleatorias. Con esto en mente, hacer la hipótesis de que los comerciantes se mueven de manera aleatoria es lo mejor que podemos hacer en este punto.

El problema se reduce a encontrar una ecuación que nos describa el movimiento aleatorio de nuestros comerciantes de manera análoga al polen en el agua, ya que hasta el momento no hemos hecho alguna suposición adicional. La ecuación que describe el comportamiento de objetos en movimiento aleatorio se le conoce como *ecuación de difusión*:

$$\frac{\partial \rho(t, \vec{x})}{\partial t} = \delta \nabla^2 \rho(t, \vec{x}), \quad (3.37)$$

o en una dimensión espacial:

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 \rho(t, x)}{\partial x^2}, \quad (3.38)$$

donde ρ es la densidad de probabilidad de la cantidad que se quiere describir y δ es una constante llamada constante de difusión.

Al suponer que nuestros comerciantes mueven el aguacate al azar significa que tenemos que describir nuestro modelo en términos probabilísticos. Esto significa que, imaginemos que tenemos un solo aguacate, el objetivo se vuelve describir cómo se mueve este aguacate usando una densidad de probabilidad. Veamos un ejemplo, supongamos que tenemos la función de densidad de probabilidad $\rho(t, x)$ tal que

$$\rho(t_0, x_0) = 1 \quad \text{y cero en otro caso,} \quad (3.39)$$

esto significa que estamos 100% seguros de encontrar nuestro aguacate al tiempo t_0 en la posición x_0 .

Ahora bien, en un tiempo posterior t_1 la función de densidad se ve de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \rho(t_1, x_0) &= 0.1, \\ \rho(t_1, x_1) &= 0.2, \\ \rho(t_1, x_2) &= 0.7, \\ \rho(t_1, x) &= 0 \quad \text{para } x \text{ en otras posiciones,} \end{aligned} \quad (3.40)$$

que se traduce en que estamos 70 % seguros de encontrar el aguacate en x_2 , 20 % seguros de encontrarlo en x_1 , 10 % seguros de encontrarlo en x_0 y hay total certeza de no encontrarlo en otra posición. De manera más general, si existen muchas unidades de aguacate en nuestro sistema, $\rho(t, x)$ nos dice cómo esperamos que se distribuyan.

Entonces, hemos visto previamente que J_0 nos dice la cantidad de aguacate que se encuentra en un lugar, pero al suponer que los comerciantes mueven el aguacate al azar cuando no se presentan oportunidades de arbitraje, usamos ρ para describir cuánto aguacate podemos esperar encontrar en algún lugar particular si repetimos varias veces nuestro experimento, por lo que solo nos queda hacer predicciones probabilísticas.

3.1.3. Dinámica de comerciantes y arbitraje

Cuando no se presentan oportunidades de arbitraje en nuestro sistema financiero, hemos supuesto que los comerciantes mueven aleatoriamente el aguacate que existe y la ecuación de difusión describe de manera probabilística su distribución. Pero cuando aparecen oportunidades de arbitraje, los comerciantes cambiarán el flujo del aguacate para ganar dinero. Entonces la siguiente tarea es involucrar este efecto a la ecuación de difusión.

La idea para atacar este problema es una muy simple y elegante, además es considerada como una de las ideas más fundamentales en la Física moderna. El truco es poner especial cuidado al calcular derivadas cuando existen oportunidades de arbitraje, ya que estamos comparando los valores de una función en dos lugares diferentes. Recordemos la definición de la derivada de una función unidimensional

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (3.41)$$

pero cuando hay una oportunidad de arbitraje, existe una tasa de cambio no trivial A_μ en alguna parte. Esto trae como consecuencia que comparar los valores de una función en distintos sitios se complique. Se requiere tomar en cuenta la tasa de cambio A_μ entre las dos ubicaciones. Sin embargo, ya hemos hecho esto anteriormente cuando

deseamos comparar el precio del aguacate en dos lugares diferentes y llegamos a la ecuación

$$J_\mu(\vec{n}) = q [\varphi(\vec{n} + \vec{e}_\mu) - \varphi(\vec{n}) - A_\mu(\vec{n})], \quad (3.42)$$

que en el límite continuo se escribe

$$J_\mu(\vec{x}) = q [\partial_\mu \varphi(\vec{x}) - A_\mu(\vec{x})]. \quad (3.43)$$

Identificamos a los dos términos entre corchetes como la *derivada covariante* D_μ :

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - A_\mu(\vec{x}). \quad (3.44)$$

En general, así es como se ve la derivada de una función en presencia de tasas de cambio no triviales $A_\mu(\vec{x})$. Dicho de otro modo, necesitamos ajustar los valores de la función usando las tasas de cambio apropiadas. En electrodinámica clásica llamamos a este proceso *el acoplamiento mínimo*.

Entonces para obtener la ecuación correcta que describe a los comerciantes en presencia de tasas de cambio no triviales (oportunidades de arbitraje) tenemos que reemplazar la derivada ∂_μ por la derivada covariante D_μ en la ecuación de difusión. La ecuación dinámica correcta queda

$$D_t J_0(t, \vec{x}) = \delta(D_x^2 + D_y^2) J_0(t, \vec{x}). \quad (3.45)$$

En una dimensión se vuelve

$$\begin{aligned} D_t J_0(t, x) &= \delta D_x^2 J_0(t, x), \\ (\partial_t - A_t(t, x)) J_0(t, x) &= \delta(\partial_x - A_x(t, x))(\partial_x - A_x(t, x)) J_0(t, x). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Los términos extra en la ecuación de difusión nos dicen que existe una fuerza que empuja a nuestros comerciantes hacia una dirección particular.

En el siguiente Capítulo nos proponemos a resolver la ecuación dinámica (3.45) proponiendo perfiles para la cantidad A_μ , es decir, propondremos tipos de cambio no

triviales en nuestro sistema para obtener la distribución del activo J_0 . Comenzaremos tratando a nuestro sistema de manera unidimensional y al final daremos un bosquejo del caso bidimensional.

Capítulo 4

Aplicaciones

Hemos visto hasta el momento que la dinámica del arbitraje está descrita por medio de la ecuación de Maxwell no homogénea

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 J_\mu \quad (4.1)$$

y la ecuación de Maxwell homogénea

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0, \quad (4.2)$$

donde hemos supuesto que el aguacate se conserva, lo que nos llevó a la ecuación de continuidad.

Posteriormente, para conocer la dinámica del comerciante, argumentamos que la manera más sencilla de hacerlo (y a la vez la más adecuada) es suponiendo que los comerciantes mueven el aguacate al azar cuando no detectan oportunidades de arbitraje, lo que nos llevó a una descripción probabilística de nuestro modelo simple por medio de la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial J_0(t, \vec{x})}{\partial t} = \delta \nabla^2 J_0(t, \vec{x}), \quad (4.3)$$

donde $J_0(t, \vec{x})$ es la densidad de probabilidad del aguacate.

Finalmente encontramos que para “casar” las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3), basta con

reemplazar la derivada parcial ∂_μ por la derivada covariante D_μ en la ecuación de difusión. Obteniendo así

$$D_t J_0(t, \vec{x}) = \delta (D_x^2 + D_y^2) J_0(t, \vec{x}), \quad (4.4)$$

o más explícitamente

$$(\partial_t - A_t(t, \vec{x})) J_0(t, \vec{x}) = \delta [(\partial_x - A_x(t, \vec{x}))^2 + (\partial_y - A_y(t, \vec{x}))^2] J_0(t, \vec{x}). \quad (4.5)$$

Nos proponemos ahora resolver numéricamente la ecuación (4.5), primero para el caso unidimensional y después para el bidimensional, donde proponemos una forma específica para la cantidad A_μ y con ella obtenemos la cantidad J_0 asociada, que nos permitirá conocer la distribución del aguacate en el espacio-tiempo.

4.1. Caso unidimensional

Para este caso los elementos de $F_{\mu\nu}$ son:

$$F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \equiv E_x, \quad (4.6)$$

$$F_{10} = -F_{01} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -E_x, \quad (4.7)$$

donde hemos definido $\phi(t, x) \equiv A_0(t, x)$, $E_x(t, x) \equiv \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x}$. En forma matricial

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x \\ -E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Notemos que hemos definido las cantidades $\phi(t, x)$ y $E_x(t, x)$ de la misma manera que en electromagnetismo, donde se define a la primer componente del cuadrivector potencial A_μ como el potencial eléctrico y al campo eléctrico en términos del potencial eléctrico y magnético. En este contexto, E_x está relacionado con las oportunidades de arbitraje en nuestro sistema para un comerciante que desea comprar aguacates en un

lugar y venderlos en otro. Luego, el comerciante debe regresar a su moneda inicial y de esta manera comparar la ganancia o pérdida de la transacción por medio del factor de ganancia. Por ello, en lo que sigue nos referiremos a E_x como *campo de ganancia*.

La ecuación (4.5) toma la forma

$$(\partial_t - \phi(t, x))J_0(t, x) = \delta(\partial_x - A_x(t, x))(\partial_x - A_x(t, x))J_0(t, x). \quad (4.9)$$

Recordemos que $F_{\mu\nu}$ es una cantidad invariante de Gauge, por lo que A_x y ϕ no pueden ser independientes y están sujetos a una condición de Gauge. Nosotros tomaremos $A_x(t, x) = 0$, lo que significa que en esta Gauge los tipos de cambio espaciales no juegan un papel en la dinámica del arbitraje del sistema, los comerciantes sólo tomarán en cuenta las tasas de interés de cada lugar.

La ecuación (4.9) se reescribe

$$\frac{\partial J_0(t, x)}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 J_0(t, x)}{\partial x^2} + \phi(t, x)J_0(t, x). \quad (4.10)$$

Como se mencionó anteriormente, lo siguiente que nos interesa es proponer diferentes formas para el “potencial” $\phi(t, x)$ y ver el comportamiento de la función J_0 , que como sabemos, representa la densidad de probabilidad de algún activo (aguacate en nuestros ejemplos). Proponer diferentes perfiles para la función ϕ significa que estamos introduciendo tasas de interés en nuestro mercado financiero unidimensional, las cuales harán el efecto de empujar a los comerciantes hacia alguna dirección.

4.1.1. Dinámica de un campo constante

Consideremos las tasas de interés $A_t(t, x) = \phi(x) = qx$. Esto es, proponemos un sistema donde la tasa de interés aumenta linealmente conforme nos alejamos del origen del sistema de coordenadas. Con esto, el campo de ganancia propuesto se vuelve constante:

$$E_x(t, x) = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -q, \quad (4.11)$$

debido a que hemos usado la Gauge $A_x(t, x) = 0$. Para este sistema tenemos que para cada instante de tiempo, exigimos que los comerciantes obtengan la misma ganancia al comerciar aguacates en cualquier punto de la longitud del mercado. La ecuación (4.10) se vuelve

$$\frac{\partial J_0(t, x)}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 J_0(t, x)}{\partial x^2} + qxJ_0(t, x). \quad (4.12)$$

Una vez obtenido el valor numérico de J_0 , podemos obtener el flujo de aguacate J_x por medio de la ecuación de continuidad (3.29):

$$\frac{\partial J_0}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = 0. \quad (4.13)$$

Para resolver la ecuación (4.12), podemos proponer condiciones de frontera de Dirichlet, Neumann o una mezcla de ambas. Comencemos con las de Dirichlet:

$$J_0(t, 0) = e^{-10t}, \quad t > 0, \quad (4.14)$$

$$J_0(t, L) = 0, \quad t > 0, \quad (4.15)$$

con la condición inicial

$$J_0(0, x) = e^{-x^2}, \quad x \in [0, L]. \quad (4.16)$$

En la resolución numérica utilizamos una técnica de diferencias finitas. A continuación mostramos el código implementado.

```

1 # Importamos los paquetes necesarios
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
5 %matplotlib notebook
6
7 def I(x):
8     return np.exp(-x**2)
9

```

```

10 def f(x,t):
11     return q*x
12
13 def H(t):
14     return np.exp(-10*t)
15
16 # Fijando parametros
17 q=0.1 # intensidad del campo de ganancia
18 delta=0.1 # Coeficiente de difusion
19 L=5 # Longitud espacial
20 T=5 # Magnitud temporal
21 F=0.5 # Coeficiente de estabilidad del metodo numerico
22 dx=0.05 # Paso espacial
23 dt=(F*dx**2)/delta # Paso temporal
24
25 # Se asegura que dx y dt sean compatibles con x y t
26 Nt = int(round(T/float(dt))) # Numero de puntos temporales
27 t=np.linspace(0,dt*Nt,Nt+1) # Arreglo de puntos malla temporales
28 dx = np.sqrt(delta*dt/F) # Longitud del espacio entre los puntos malla
    espaciales
29 Nx = int(round(L/dx)) # Numero de puntos espaciales
30 x = np.linspace(0, L, Nx+1) # Arreglo de puntos malla espaciales
31 dx = x[1] - x[0] # Paso espacial
32 dt = t[1] - t[0] # Paso temporal
33 J_0=np.empty((Nt+1,Nx+1)) # Matriz de solucion
34
35 # Fijando la condicion inicial
36 J_0[0,:]=I(x[:])
37
38 # Fijando las condiciones de frontera
39 J_0[:,0]=H(t[:])
40 J_0[:,Nx]=0
41
42 #Aplicando el algoritmo de iteracion para calcular la solucion numerica
    en los puntos internos de la malla:
43 for n in range(0,Nt):

```

```

44     J_0[n+1,1:Nx]=J_0[n,1:Nx]+F*(J_0[n,0:Nx-1]-2*J_0[n,1:Nx]+J_0[n,2:Nx
+1])+\
45     dt*f(x[1:Nx],t[n])*J_0[n,1:Nx]
46
47 # Creamos una funcion que nos grafique los resultados
48 def grafica(M,funcion):
49     fig=plt.figure(figsize=(6,6))
50     ax=Axes3D(fig)
51     X,T=np.meshgrid(x,t)
52     ax.plot_surface(X,T,M,cmap='Spectral')
53     ax.set_xlabel('x (posicion)')
54     ax.set_ylabel('t (tiempo)')
55     ax.set_zlabel(funcion)
56     plt.show()
57
58 # Graficando J_0(x,t)
59 grafica(J_0,'J_0(x,t)')

```

En este ejemplo, planteamos que inicialmente la función de densidad del activo sea gaussiana, así, el activo tiene mayor probabilidad de encontrarse en uno de los extremos del intervalo. Sin embargo, conforme transcurre el tiempo esta probabilidad disminuye de manera exponencial en ese extremo, de acuerdo a las condiciones de frontera que establecemos. A diferencia de la otra frontera, donde exigimos que la distribución se anule en cualquier momento.

Obtenemos las gráficas que aparecen en la Figura 4.1. En la descripción de las gráficas, el par ordenado de números (a, b) denota el valor de δ y q respectivamente. En las gráficas observamos que dependiendo de los parámetros (δ, q) , J_0 se comporta de tres maneras:

1. Se vuelve homogénea al transcurrir cierto tiempo. Esto es, J_0 se distribuye casi uniformemente a lo largo del intervalo.
2. Toma forma de campana en el centro del intervalo espacial.

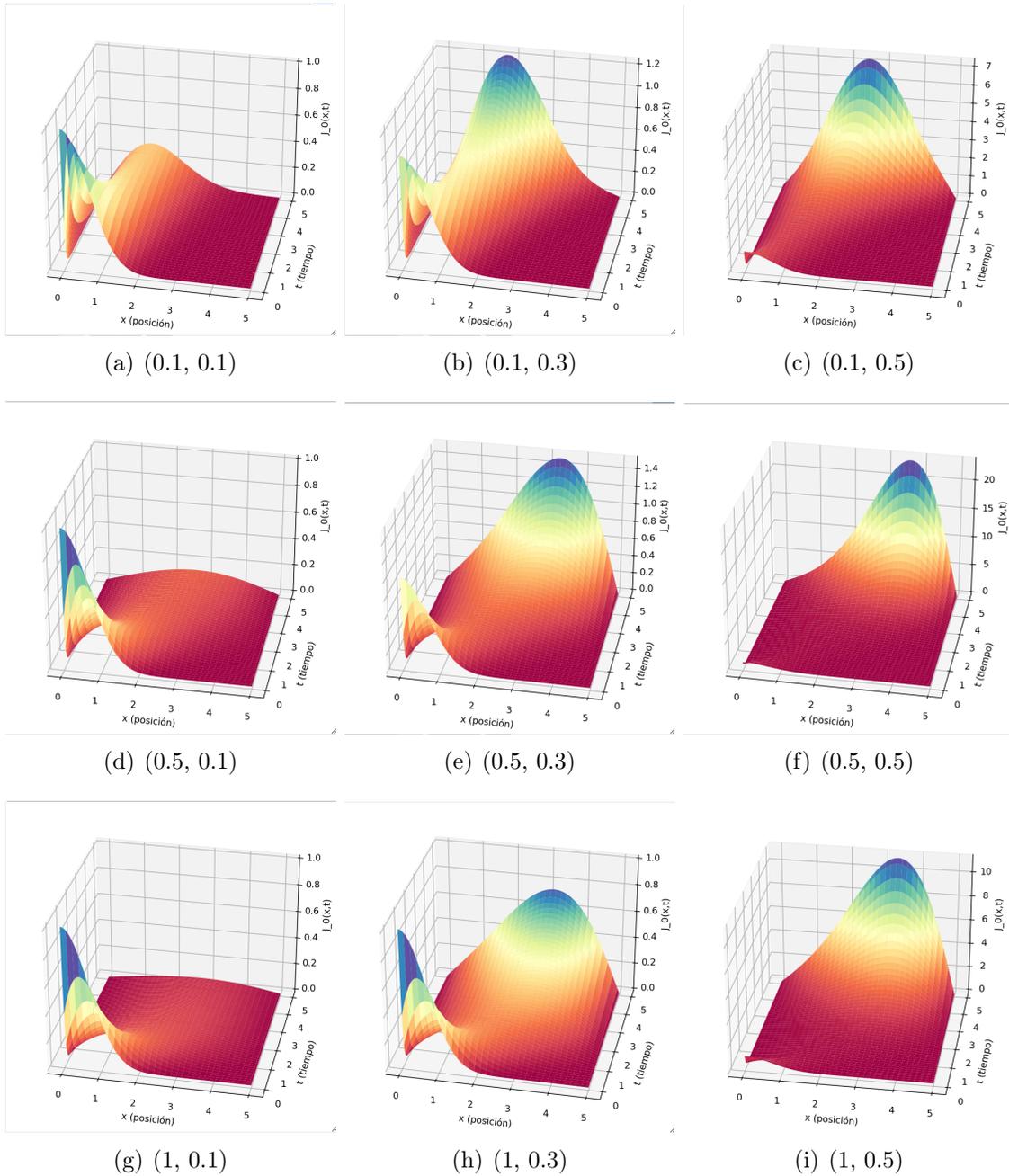


Figura 4.1: Distribución de aguacate debido a un campo de fondo constante.

3. Toma forma de campana con sesgo positivo.

Este comportamiento de J_0 es de esperarse dada la estructura de la ecuación (4.12), ya que el término no homogéneo de la ecuación actúa como una fuente. Los tres comportamientos escritos arriba los obtuvimos fijando un valor para δ y aumentando gradualmente los valores de q a partir de cero.

Ahora, contrastamos los resultados anteriores usando las siguientes condiciones de frontera del tipo mixto:

$$J_0(t, 0) = e^{-10t}, \quad t > 0, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial J_0(t, L)}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad (4.18)$$

y la misma condición inicial (4.16). Obtenemos las gráficas de la figura 4.2.

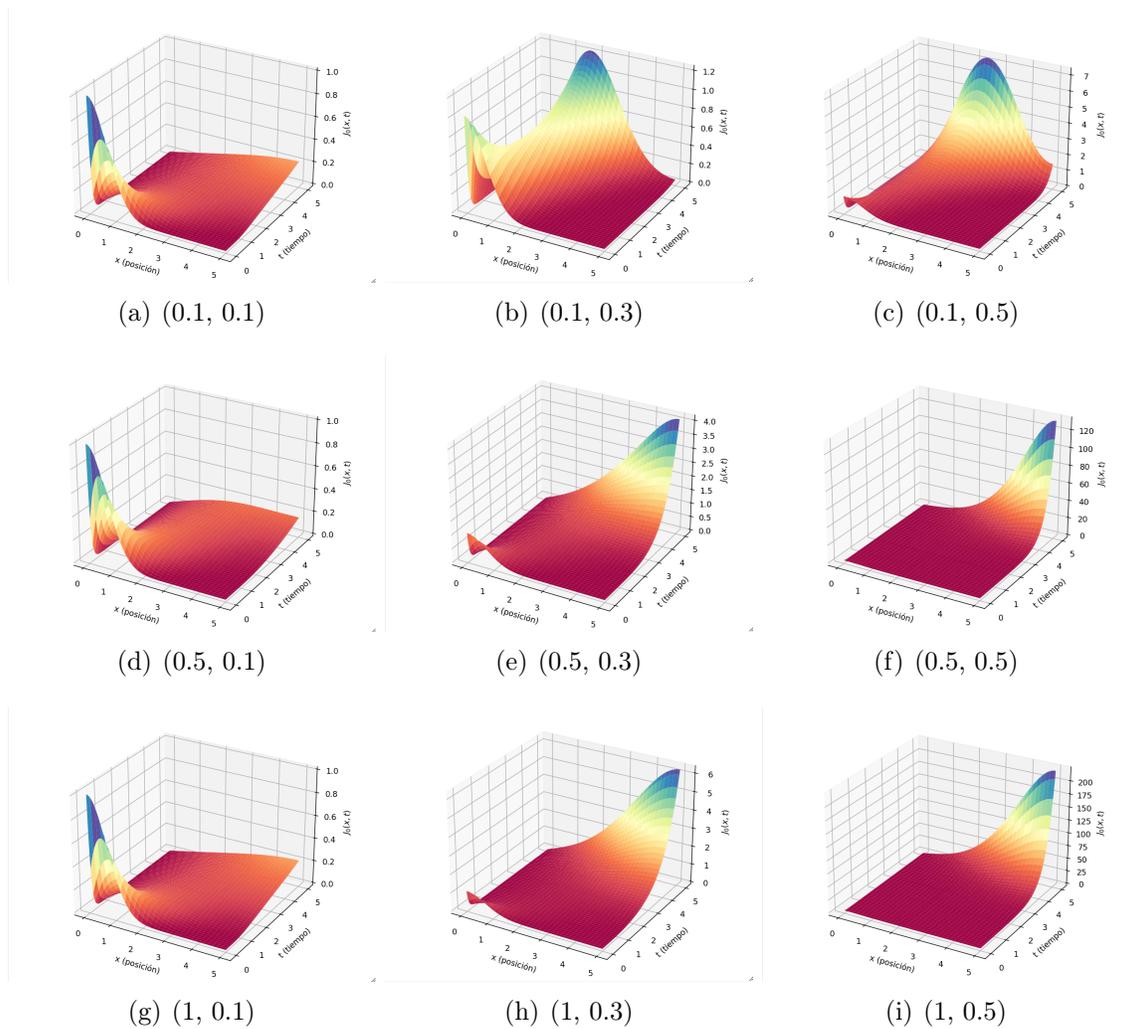


Figura 4.2: Distribución de aguacate debido a un campo de fondo constante con condiciones de frontera del tipo mixto.

En este caso planteamos un mercado financiero unidimensional “aislado” por una frontera, lo que trae como consecuencia que no puedan fluir aguacates por ese lado.

Además, usamos los mismos valores para los parámetros (δ, q) para realizar la comparación directa con las condiciones de frontera de Dirichlet. Se observa que en la primer fila de las Figuras 4.2 y 4.1, el comportamiento de J_0 es muy parecido, pero en las filas restantes el comportamiento cambia debido a la ausencia restrictiva de anular la distribución de aguacates en una frontera. Ahora, las probabilidades de encontrar el aguacate se incrementan en la frontera derecha del intervalo.

Vemos entonces que al elegir tasas de interés con incremento lineal en nuestro mercado financiero, una cierta unidad de aguacates mantendrá el mismo precio a través del tiempo en un extremo del rango de nuestro mercado. A medida que nos alejamos de este punto, el precio de los aguacates se incrementa.

Si la intensidad del campo de ganancia adquiere valores significativamente altos en comparación con la constante de difusión, los comerciantes se verán motivados a adquirir aguacates en zonas donde las tasas de interés permanecen bajas y posteriormente venderlos en regiones con tasas más elevadas. En contraste, si la intensidad del campo de ganancia es pequeña en relación con la constante de difusión, los comerciantes tomarán decisiones de manera aleatoria al negociar el activo, pasando por alto las pequeñas oportunidades de arbitraje.

4.1.2. Dinámica de un campo dependiente del tiempo

Para este caso unidimensional, proponemos la forma para el potencial:

$$\phi(t, x) = E x e^{-t^2}, \quad (4.19)$$

con ello el campo de ganancia se vuelve

$$E_x = -E e^{-t^2}. \quad (4.20)$$

Esto es, proponemos una ganancia que decae exponencialmente con el tiempo. La ecuación por resolver numéricamente es

$$\frac{\partial J_0(t, x)}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 J_0(t, x)}{\partial x^2} + E x e^{-t^2} J_0(t, x). \quad (4.21)$$

Utilizando el código presentado previamente, abordamos la resolución de esta nueva ecuación. Resulta intrigante establecer las mismas condiciones de frontera y la condición inicial como en el ejemplo anterior, con el propósito de efectuar una comparación directa de la dinámica del sistema bajo un campo de ganancia diferente.

Análogamente, comenzamos con las condiciones de frontera de Dirichlet y posteriormente las de Robin o tipo mixto. Obtenemos los resultados mostrados en la Figura 4.3. Nuevamente, en estas gráficas los pares (δ, E) denotan la intensidad del campo de fondo y la constante de difusión, respectivamente.

En las gráficas de la primer fila de la Figura, se observa que es muy probable encontrar al activo en una parte del intervalo y casi al finalizar el periodo elegido, comienza a notarse una difusión. Este comportamiento se debe a la pequeña magnitud de la constante de difusión, que ralentiza el proceso de difusión. En consecuencia, el impacto de las tasas de interés cobra gran relevancia en este caso, dando lugar a las formas de campana que crecen progresivamente hasta alcanzar un máximo.

Las gráficas de la segunda y tercer fila son bastante parecidas. En la primera columna, se observa una difusión de J_0 hasta volverse casi cero en todo el mercado, lo que implica que los tipos de cambio temporales carecen de relevancia para los comerciantes. Por otro lado, en la segunda y tercera columna, se percibe que J_0 empieza a difundirse, pero después tiende a tomar forma de campana que crece conforme transcurre el tiempo hasta alcanzar una altura máxima, a partir de ahí comienza a decrecer su tamaño y a la vez se vuelve más ancha de tal forma que al finalizar el periodo, su altura toma valores cercanos a cero. Esto nos sugiere que en esta etapa final los comerciantes ya no detectan oportunidades de arbitraje.

Por otro lado, al resolver la ecuación dinámica (4.21) con las condiciones de frontera de Robin empleadas anteriormente, obtenemos los resultados en la Figura 4.4.

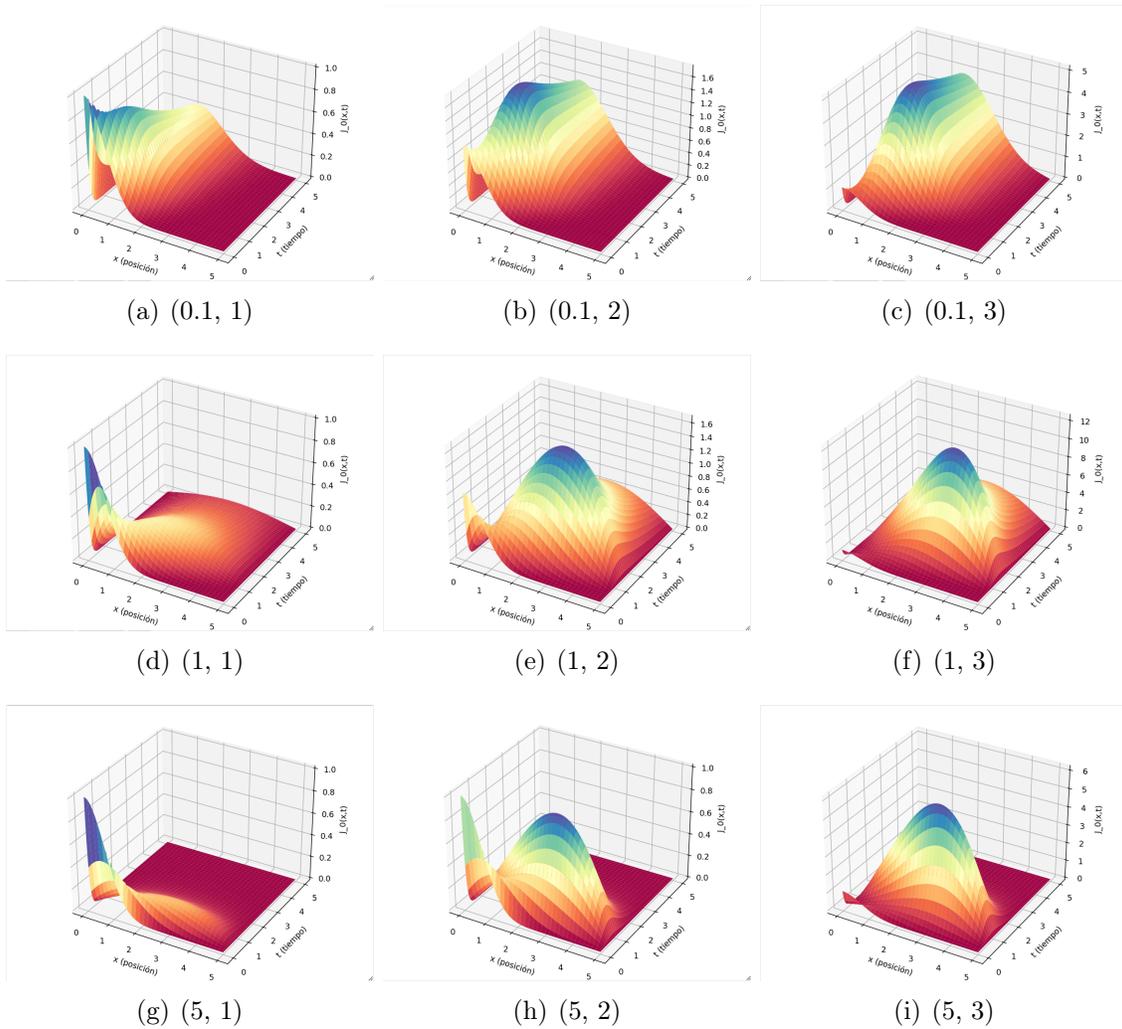


Figura 4.3: Densidad de probabilidad del aguacate bajo tasas de interés dependientes del tiempo.

Nuevamente, observamos que la primera fila de gráficas tienen un comportamiento similar cuando utilizamos condiciones de frontera de Dirichlet. Asimismo, las gráficas de la segunda y tercer fila presentan mucha similitud entre sí. En la primer columna se observa que la difusión de J_0 se realiza rápido y las tasas de interés dependientes del tiempo no toman mucha relevancia en la dinámica, mientras que en la segunda y tercer columna sí lo hacen. En éstas, la densidad de probabilidad de aguacates toma valores mayores en el extremo derecho del intervalo, debido a que las tasas de interés son mayores en esos puntos. Y dado que el campo de ganancia actúa sólo en tiempos cortos, después de la acumulación de aguacates, la dinámica finaliza con una

tendencia a la difusión.

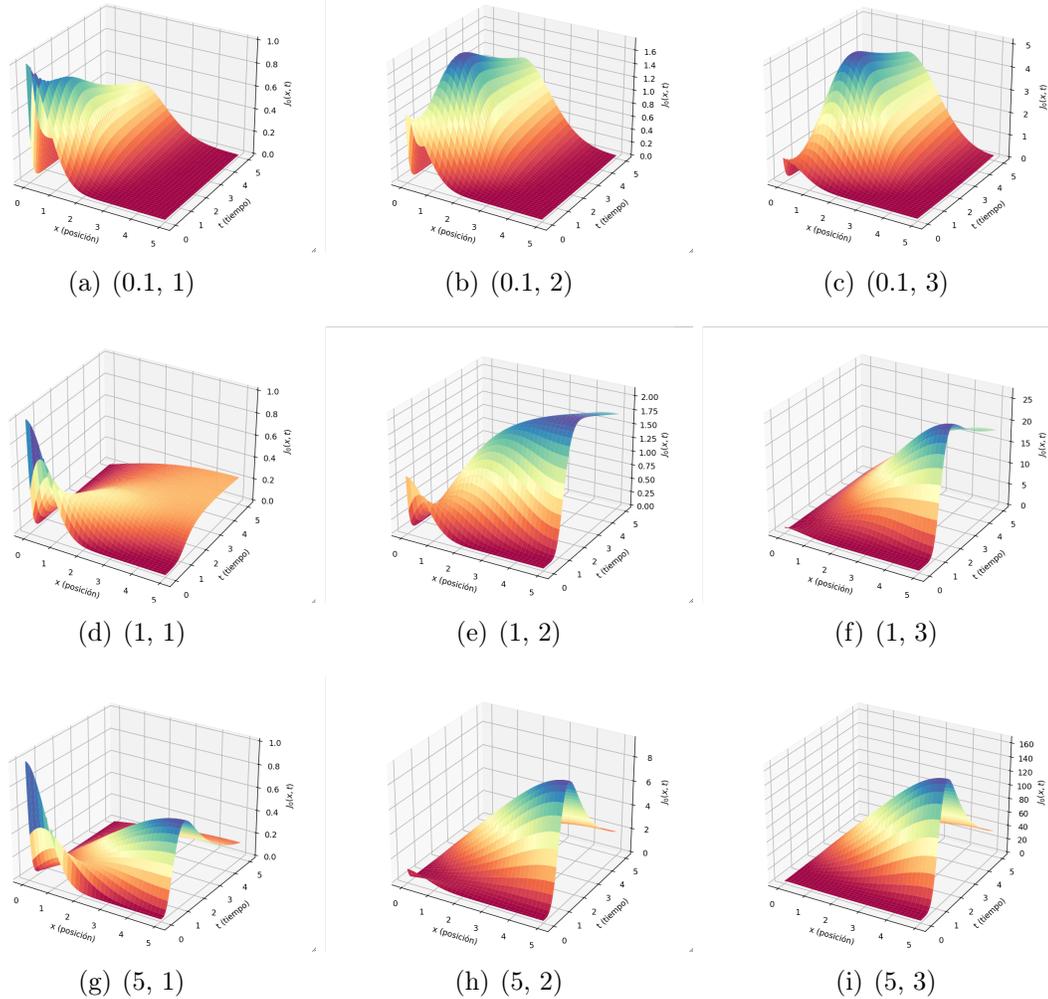


Figura 4.4: Distribución del aguacate alcanzado bajo tasas de interés dependientes del tiempo con condiciones de frontera de Robin.

Vemos entonces que el campo de ganancia propuesto en este ejemplo produce una dinámica un poco parecida a la del ejemplo anterior: en ambos, las tasas de interés se incrementan de forma lineal conforme nos alejamos de un extremo del intervalo que abarca nuestro mercado, pero la diferencia radica en que en el segundo ejemplo estas tasas sólo duran periodos muy cortos. Esto ocasiona que los comerciantes aprovechen estos lapsos para comerciar aguacates y obtener las máximas ganancias antes de que se “apague” el campo de ganancia y vuelvan a su dinámica aleatoria.

4.2. Caso bidimensional

En esta sección se aborda la dinámica más general de los comerciantes desarrollada en nuestro modelo simple. Ahora, los comerciantes pueden realizar transacciones en una región del plano, mientras que el transcurso del tiempo lo visualizamos como copias paralelas de la región (Figura 3.6).

Si definimos $E_y(t, \vec{x}) = \frac{\partial A_y(t, \vec{x})}{\partial t} - \frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial y}$ y $B_z(t, \vec{x}) = \frac{\partial A_x(t, \vec{x})}{\partial y} - \frac{\partial A_y(t, \vec{x})}{\partial x}$, los elementos de $F_{\mu\nu}$ quedan:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y \\ -E_x & 0 & -B_z \\ -E_y & B_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

donde nuevamente hemos usado el reemplazo $A_0 = \phi$. Recordemos que A_x y A_y denotan los tipos de cambio entre los puntos en las direcciones 1 y 2, que por simplicidad hemos identificado con las direcciones x y y respectivamente, en un sistema de coordenadas (Figura 3.3).

La cantidad $B_z(t, \vec{x})$ también está relacionada con las oportunidades de arbitraje del sistema, la diferencia con las cantidades E_x y E_y es que el primero sólo toma en cuenta los patrones de los tipos de cambio espaciales.

La ecuación a resolver es:

$$[\partial_t - \phi(t, x, y)] J_0(t, x, y) = \delta [(\partial_x - A_x(t, x, y))^2 + (\partial_y - A_y(t, x, y))^2] J_0(t, x, y), \quad (4.23)$$

Una forma de simplificar la ecuación anterior es aprovechando la libertad para elegir una Gauge. En el caso unidimensional realizamos la elección $A_x(t, x) = 0$. Ahora, podemos generalizar esta elección de la forma $A_x(t, \vec{x}) = A_y(t, \vec{x}) = 0$. De esta forma, perdemos información sobre la cantidad B_z , que como mencionamos anteriormente, también está relacionada con las oportunidades de arbitraje del sistema cuando no se toman en cuenta las variaciones temporales de las tasas de interés. Con esto, la

ecuación a resolver se vuelve

$$\frac{\partial}{\partial t} J_0(t, x, y) = \delta \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} J_0(t, x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} J_0(t, x, y) \right] + \phi(t, x, y) J_0(t, x, y). \quad (4.24)$$

Como ejemplo, resulta sencillo considerar tasas de interés independientes del tiempo, así como lo hicimos para el caso unidimensional. Esto es,

$$\phi(t, x, y) = \phi(x, y) = E(x + y). \quad (4.25)$$

Como antes, E es una constante positiva. Con esta elección obtenemos $E_x = E_y = -E$, esto implica que demandamos que los comerciantes obtengan idénticas ganancias al negociar aguacates en la dirección x o en la dirección y del sistema de coordenadas.

Para resolver numéricamente la ecuación (4.24), generalizamos el código mostrado anteriormente. Ahora, como dominio utilizamos un cuadrado de longitud $l = 5$ y consideramos la condición inicial:

$$J_0(0, x, y) = e^{-(x^2+y^2)}, \quad x, y \in [0, l]. \quad (4.26)$$

con las condiciones de frontera de Dirichlet:

$$J_0(t, x, 0) = 0 = J_0(t, x, l), \quad x \in [0, l], t > 0, \quad (4.27)$$

$$J_0(t, 0, y) = 0 = J_0(t, l, y), \quad y \in [0, l], t > 0. \quad (4.28)$$

Obtenemos el comportamiento de J_0 mostrado en la Figura 4.5.

Dado que estamos en el caso bidimensional, las gráficas que aparecen en la Figura pertenecen al uso de los parámetros (δ, E) a diferente tiempo. Hemos usado los valores $t = T/3, 2T/6, t = T$ para mostrar el comportamiento más relevante de J_0 durante el tiempo que dura la evolución T . En el enlace <https://youtu.be/-dXm7m10-L8> se encuentra una animación de la evolución de J_0 para los parámetros $(0.1, 2)$.

En las gráficas observamos un comportamiento de J_0 bastante esperado, ya que se trata de una generalización directa de un ejemplo unidimensional mostrado an-

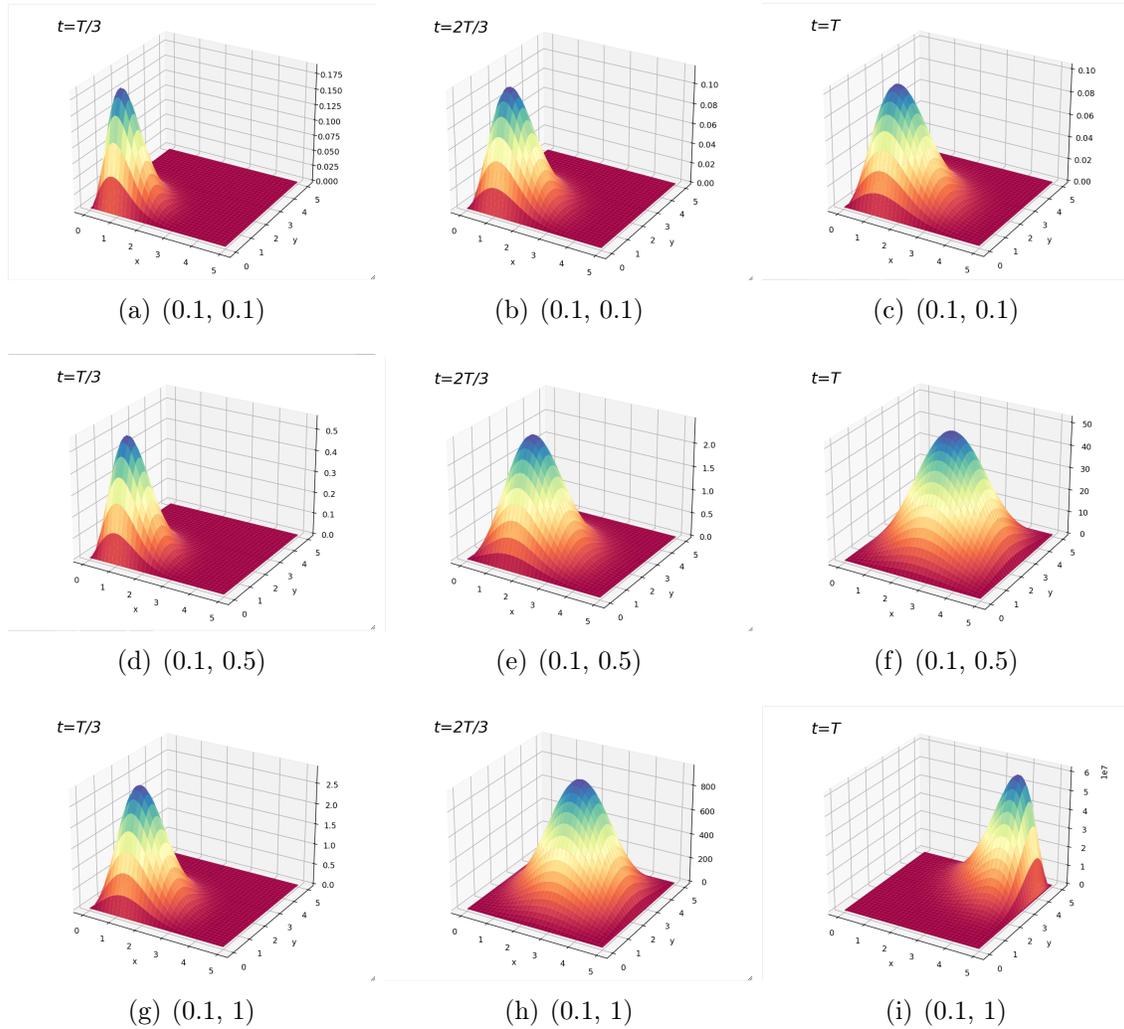


Figura 4.5: Distribución de aguacate en el plano debido a tasas de interés independientes del tiempo.

teriormente, donde las tasas de interés se incrementan de forma lineal conforme nos alejamos del origen del sistema de coordenadas en las direcciones x y y .

Vemos entonces que en este ejemplo, debido a la Gague elegida, los comerciantes sólo se sienten atraídos a negociar aguacates impulsados por los patrones de los tipos de cambio temporales. Por ello, cuando el parámetro E es relativamente grande comparado con la constante de difusión, el aguacate fluye hacia las regiones donde su valor se incrementará con el transcurso del tiempo. En caso contrario, el flujo del aguacate permanecerá casi aleatorio hasta difundirse a través del dominio, respetando las condiciones de frontera.

Conclusiones

La conclusión más importante de esta tesis es que se puede modelar el mercado financiero desde el marco de las teorías de Gauge, partiendo del postulado de que los mercados financieros tienen una simetría de Gauge. Por medio de este tipo de simetrías, aprendemos qué cantidades son independientes de las convenciones locales.

Utilizando las ideas de que debemos describir nuestro sistema financiero por medio de cantidades invariantes de norma (además de los supuestos de que el aguacate se conserva y que los comerciantes se mueven al azar si no hay oportunidades de arbitraje), logramos derivar la ecuación correcta que describe la interacción entre el flujo de bienes (aguacate en nuestro ejemplo) y las oportunidades de arbitraje.

Aunque nuestro trabajo se enfocó en un modelo de juguete, es posible generalizarlo utilizando herramientas matemáticas como variedades diferenciables y estudiar las simetrías del mercado por medio de haces fibrados, lo que llevaría a una descripción más formal y realista del mercado financiero. Asimismo, en el modelo estudiado se hicieron muchas simplificaciones, no obstante, éste cumple su objetivo principal de demostrar que la física y la economía son ciencias que comparten problemas aparentemente de naturaleza muy distinta, pero que en su resolución tienen mucho en común. Con esto, se pueden explotar los conocimientos y métodos de la física para aplicarse en muchas otras áreas.

Al estudiar las simetrías del mercado financiero e intentar encontrar su dinámica invariante de Gauge, encontramos una analogía directa con la estructura del electromagnetismo clásico. No obstante, el elemento humano jugó un papel muy importante en la dinámica del mercado que nos obligó a optar una descripción probabilística, debido a su naturaleza estocástica.

Por otro lado, los perfiles para el campo de ganancia utilizados en nuestras aplicaciones no son realistas, pero nos dan un bosquejo de la dinámica de los comerciantes en presencia de oportunidades de arbitraje.

El trabajo presentado ofrece muchas tareas directas por realizar, las más importantes que podemos mencionar son las siguientes:

- Enriquecer el modelo con matemáticas más rigurosas utilizando técnicas de la teoría cuántica de campos [17] o de teorías de lattice [18].
- Considerar otras elecciones de Gauge para resolver la ecuación dinámica de los comerciantes, ya que por simplicidad nosotros solo consideramos una, a la que llamamos *versión apagada del sistema*.
- Modelar campos de ganancia más realistas tomando datos reales de los mercados financieros (por ejemplo de divisas).

Bibliografía

- [1] O. Miramontes and K. Volke. *Fronteras de la física en el siglo XXI*. CopIt arXives, Mexico, 2013.
- [2] R. Mansilla. *Una Breve Introducción a la Econofísica*. Colección Qué, Cómo, Cuándo? Series. EQUIPO SIRIUS, S.A., 2003.
- [3] Rosario Mantegna and H. Stanley. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*, volume 53. 12 2000.
- [4] B. Sharma, Sadhana Agrawal, Malti Sharma, D.P. Bisen, and Ravi Sharma. Econophysics: A brief review of historical development, present status and future trends. 08 2011.
- [5] N. Deus Rodrigues. *Application of Gauge Theory to Finance: A systematic literature review [Tesis de doctorado no publicada]*. Universidad de Algarve, 2019.
- [6] Kirill Ilinski. Physics of Finance. 10 1997.
- [7] Kirill Ilinski. Physics of finance: Gauge modelling in non-equilibrium pricing. *Wiley*, page 352, 2001.
- [8] Kirill Ilinski. Gauge geometry of financial markets. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33(1):L5, jan 2000.
- [9] J. Schwichtenberg. *Physics from Finance*. No-Nonsense Books, 2019.
- [10] Gordon L. Kane. *MODERN ELEMENTARY PARTICLE PHYSICS*. Cambridge University Press, 2 2017.

- [11] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, New York, NY, 3rd ed. edition, 1999.
- [12] Andrew Zangwill. *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Press, 2012.
- [13] F. Halzen and Alan D. Martin. *QUARKS AND LEPTONS: AN INTRODUCTORY COURSE IN MODERN PARTICLE PHYSICS*. 1984.
- [14] N.G. Mankiw. *Macroeconomics, 7th Edition*. Worth Publishers, 2010. The Intermediate-Level Textbook Also available as *Macroeconomics and the Financial System*, with Laurence Ball.
- [15] L. A. Ramos Llanos. *Oportunidades de arbitraje desde la perspectiva de teorías de norma [Tesis de Licenciatura no publicada]*. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2022.
- [16] Juan Maldacena. The symmetry and simplicity of the laws of physics and the Higgs boson. *Eur. J. Phys.*, 37(1):015802, 2016.
- [17] Belal Ehsan Baaquie. *Quantum Field Theory for Economics and Finance*. Cambridge University Press, 2018.
- [18] Kenneth Young. Foreign exchange market as a lattice gauge theory. *American Journal of Physics*, 67:862–868, 10 1999.
- [19] Didier Sornette. Gauge theory of finance? *International Journal of Modern Physics C*, 09(03):505–508, may 1998.
- [20] Kirill N Ilinski. Gauge Physics of Finance: simple introduction. *arXiv e-prints*, pages cond-mat/9811197, November 1998.
- [21] Lee Smolin. Time and symmetry in models of economic markets. 2 2009.
- [22] B. Dupoyet, H.R. Fiebig, and D.P. Musgrove. Gauge invariant lattice quantum field theory: Implications for statistical properties of high frequency financial markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(1):107–116, 2010.

- [23] Shipeng Zhou and Liuqing Xiao. An application of symmetry approach to finance: Gauge symmetry in finance. *Symmetry*, 2(4):1763–1775, 2010.
- [24] Simone Farinelli. Geometric arbitrage theory and market dynamics reloaded. *The Journal of Geometric Mechanics*, Vol. 7, 07 2021.

Apéndice A

Anexo I: Estudios relacionados

A continuación presentamos algunos trabajos relevantes relacionados con la aplicación de las teorías de Gauge en el ámbito económico, específicamente en los mercados financieros.

1. En el año 1998, Didier Sornette publicó un trabajo titulado *Gauge theory of Finance?* en el cual expuso algunos de los problemas que surgen al tratar de formular la “teoría Gauge de Finanzas”, siendo Kirill Ilinski el principal precursor al publicar su trabajo *Physics of Finance* un año antes. En el trabajo se menciona por ejemplo, que la derivación de la distribución logarítmica normal es equivalente en información y contenido matemático a la derivación que se remonta a Bachelier y Samuelson [19].
2. En 1998, como continuación de sus trabajos, Ilinski publica su artículo *Gauge Physics of Finance: simple introduction*, donde establece los principios fundamentales del enfoque de Gauge para la economía financiera, así como algunas formas de su aplicación. Particularmente, consideró el modelado de procesos de fijación de precios reales para un ejemplo del índice de mercado S&P500 [20].
3. En el trabajo *Time and symmetry in models of economic markets*, L. Smolin discute algunos temas fundamentales en el modelado de mercados económicos. Entre ellos, revisa brevemente el modelo básico de equilibrio general de

Arrow-Debreu y presenta una evaluación de fortalezas y debilidades del modelo. Asimismo, propone extensiones para incluir el tiempo y la contingencia.

Por otro lado, argumenta que temas como el significado fundamental de los precios y la cuestión relacionada de cuáles deberían ser los observables de un modelo dinámico de no equilibrio de un mercado económico, pueden ser abordados mediante el marco de una teoría de Gauge [21].

4. “*Gauge Invariant Lattice Quantum Field Theory: Implications for Statistical Properties of High Frequency Financial Markets*” del año 2009, es un trabajo de Dupoyet, Fiebig y Musgrove, donde presentan sus estudios sobre una teoría cuántica de campos definida en un *lattice* con geometría de escaleras múltiples y el grupo de dilatación como una simetría de Gauge local. Además, muestran su implementación numérica y comparan sus resultados con los datos históricos del índice bursátil NASDAQ [22].
5. S. Zhou y L. Xiao en 2010, presentan un trabajo titulado “*An Application of Symmetry Approach to Finance: Gauge Symmetry in Finance*”, donde continúan las ideas del enfoque de simetrías de las teorías de Gauge, aplicadas a finanzas. Revisan el modelo de fijación de precios de los derivados financieros en un mercado financiero invariante de Gauge, y lo reescriben como una ecuación diferencial parcial en un haz fibrado en forma diferencial covariante para tener invariancia en la forma [23].
6. S. Farinelli en 2021, publica una nueva versión de su artículo “*Geometric Arbitrage Theory and Market Dynamics*”, publicado en 2015. En su nuevo trabajo integra la teoría clásica de las finanzas estocásticas en un marco geométrico diferencial llamado *Teoría del Arbitraje Geométrico*. Muestra, entre otras cosas: Que se puede escribir el arbitraje como la curvatura de un haz fibrado, dar al Teorema Fundamental de la Valoración de Activos una caracterización homotópica diferencial y caracterizar la Teoría del Arbitraje Geométrico por cinco principios, demostrando que son consistentes con la teoría clásica de las finanzas estocásticas [24].