



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ingeniería en Tecnología de la Madera
División de Estudios de Posgrado

**Estudio sobre la posible naturaleza estadística de la ecuación
general de volumen seccional para las geometrías
clásicas de troncos de árbol**

TESIS
que para obtener el Grado de
Maestro en Ciencias y Tecnología de la Madera

PRESENTA:
Margarita Bañuelos Jiménez

DIRECTOR DE TESIS:
M.C. Marco Antonio Herrera Ferreyra

Morelia, Michoacán, febrero de 2012.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES DE MEDICIONES FORESTALES	4
2.1 Teoría de la forma de un tronco de árbol.	4
2.1.1. Teorías Mecánicas	4
2.1.2. Teoría Clásica de la Forma de un Tronco en Mediciones Forestales	5
2.1.3 Teorías Actuales de la Forma de Troncos en Mediciones Forestales	7
2.2 Estimación del volumen de un tronco de árbol	8
2.2.1. Métodos seccionales.	8
2.2.2. Métodos seccionales estándar	9
2.2.3. Notación para diámetros y áreas de sección transversal en segmentos de tipos dendrométricos clásicos	9
2.2.4. Ecuaciones de volumen seccional para truncados de los tipos dendrométricos clásicos.	10
2.3 Diámetros medios para secciones transversales asimétricas	10
CAPÍTULO 3. ANTECEDENTES DE LA ECUACIÓN GENERAL. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA Y OBJETIVO	12
3.1 La media geométrica.	12
3.1.1. La media geométrica básica	14
3.1.2. La media geométrica generalizada	16
3.2 La ecuación general de volumen seccional para las geometrías clásicas de tronco de árbol.	17
3.3 Equivalencia de la ecuación general con otra ecuación reportada en la literatura	20
3.4 Descripción de la estructura matemática de la ecuación general	21
3.5 Definición del problema y objetivo de esta tesis	22
CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA	23
4.1 Análisis e identificación de características de la estructura de la ecuación general de volumen seccional que indican relaciones con métodos o procesos estadísticos.	24
4.1.1. Procesos de Bernoulli	25
4.1.2. La distribución binomial	25
4.2 Análisis e identificación de características de la función generatriz de los tipos dendrométricos clásicos que indican una relación con métodos o procesos estadísticos.	26
4.2.1 La distribución beta	27
4.2.2. Segundo formato para la distribución beta	29
4.3 Análisis e identificación de características de las funciones de distribución beta y binomial que indican una relación entre ellas	29

4.4 Análisis e identificación de características de métodos o procesos estadísticos que indican una relación con la función generatriz de los tipos dendrométricos.	30
CAPÍTULO 5. RESULTADOS	31
5.1 Derivación de las ecuaciones de volumen seccional para los casos de $n=4, 5, 6, 7, 8$ y 9 , a partir de la ecuación general.	31
5.2 Resultados de establecer una analogía con un proceso de Bernoulli	35
5.3 Relación obtenida entre la función generatriz de los tipos dendrométricos clásicos y la función de distribución beta.	37
5.3.1 Normalización de la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos.	37
5.3.2. Identificación de parámetros de la función de distribución beta que la relacionan con la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos normalizada.	38
5.4 Relación obtenida entre la función de distribución beta y la función de distribución binomial	41
5.5 Relación entre la función generatriz de los tipos dendrométricos clásicos normalizada y la función de distribución binomial.	42
CAPÍTULO 6. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	43
6.1 Sobre las ecuaciones de volumen seccional para los casos de $n=4, 5, 6, 7, 8$ y 9 , a partir de la ecuación general.	43
6.2 Sobre los resultados de establecer una analogía con un proceso de Bernoulli.	44
6.3 Sobre la relación obtenida entre la función generatriz de los tipos dendrométricos clásicos normalizada y la función de distribución beta.	44
6.4 Sobre la relación obtenida entre la función de distribución beta y la función de distribución binomial	46
6.5 Relación entre la función generatriz de los tipos dendrométricos clásicos normalizada y la función de distribución binomial.	46
6.6 Demostración de consistencia entre los parámetros de la función de distribución beta que conectan con la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos normalizada y la función de distribución binomial.	47
6.7 Interpretación estadística de la ecuación general de volumen seccional	48
CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	50
APÉNDICE I. SIGNIFICADO DE LA MEDIA GEOMÉTRICA BÁSICA	54
APÉNDICE II. DERIVACIÓN DEL SEGUNDO FORMATO PARA LA MEDIA GEOMÉTRICA GENERALIZADA	57
REFERENCIAS	58

RESUMEN

Este trabajo de tesis, contribuye a darle continuidad a una línea de investigación definida sobre matemáticas aplicadas a las mediciones forestales que se ha desarrollado durante varios años en la Facultad de Ingeniería en Tecnología de la Madera de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Representa la evolución de una serie de trabajos previos, plasmados en tesis de licenciatura, maestría y un par de artículos de investigación publicados. En uno de esos artículos, publicado en 2010 en la revista *Madera y Bosques*, se presenta la derivación de una ecuación general de volumen seccional para las geometrías clásicas de tronco de árbol. Tal ecuación, permite determinar el volumen de un segmento o truncado de los sólidos de revolución que representan a las geometrías referidas. Sin embargo, en dicho trabajo, quedó pendiente una interpretación formal de la ecuación en cuestión. Con base en la estructura matemática de la ecuación, solamente se sugirió una posible interpretación estadística. En la presente tesis, se muestra que dicha interpretación tiene sentido y los resultados obtenidos constituyen un avance importante de la misma. Se logró establecer un vínculo entre la teoría clásica de las mediciones forestales con conceptos estadísticos convencionales. Todos los trabajos previos en la línea de investigación mencionada al inicio, involucran un vínculo entre la teoría clásica de mediciones forestales con matemáticas convencionales, principalmente álgebra y cálculo. De manera similar, en esta tesis se muestra que se puede agregar el vínculo con estadística. Los resultados de la presente tesis aportan nuevos conocimientos a la teoría clásica de las mediciones forestales y se espera que también ayuden a visualizar y definir posteriores investigaciones sobre el tema.

NOTACIÓN

n	Índice que define a los tipos dendrométricos clásicos (representa la potencia en la ecuación generatriz de los mismos).
X	Altura en un tipo dendrométrico clásico (definida convencionalmente en mediciones forestales y dendrometría a partir de la punta).
Y	Diámetro a la altura X .
H	Altura total en un tipo dendrométrico clásico
Y_H	Diámetro a la altura total H (Diámetro en la base del tipo dendrométrico clásico)
x	Altura normalizada (= X/H ; varía entre 0 y 1)
y	Diámetro normalizado (= Y/Y_H ; varía entre 0 y 1)
L	Longitud de troza ó de segmento de tipo dendrométrico clásico.
S	Área de la sección transversal mayor en un segmento de tipo dendrométrico clásico diferente al cilindro.
s	Área de la sección transversal menor en un segmento de tipo dendrométrico clásico diferente al cilindro (en cilindro $S=s$).
\bar{S}	Área media (promedio) de sección transversal
\bar{S}_n	Área media de sección transversal para el tipo dendrométrico clásico n
V	Volumen de segmento de tronco (troza)
V_n	Volumen de segmento del tipo dendrométrico clásico n .
d_m	Mínima longitud sobre una sección transversal asimétrica (diámetro menor).
d_M	Máxima longitud sobre una sección transversal asimétrica (diámetro mayor).

d_A	Diámetro medio aritmético.
d_c	Diámetro medio cuadrático.
d_G	Diámetro medio geométrico.
G	Media geométrica generalizada
$f_{bin}(k)$	Función de distribución binomial
$f_{beta}(x)$	Función de distribución beta
$\Gamma(\alpha)$	Función gamma

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La determinación del volumen de un tronco o segmento del mismo (sección, troza), representa un problema central en el área de las mediciones forestales. Dicho parámetro es función de la geometría o forma del tronco (Brack, 1999). La determinación de su geometría es entonces el problema más fundamental. Se trata de un problema muy complejo que ha dado lugar a lo que se define en este campo como la teoría de la forma de troncos de árbol (Larson, 1963).

La manera más simple de aproximarse o modelar la forma de un tronco de árbol, es mediante sólidos de revolución. Éstos, son figuras simétricas con respecto a un eje de rotación que pasa por su centro. Los sólidos de revolución básicos que se utilizan son el cilindro, el paraboloides, el cono y el neiloide. Estas figuras se pueden obtener mediante una ecuación de potencias conocida como la ecuación generatriz, para las potencias 0, 1, 2, y 3. A todo ello se le conoce en la literatura como la teoría clásica de la forma de troncos de árbol (Diéguez- Aranda *et al.*, 2003).

A todos los sólidos de revolución generados por dicha ecuación (incluyendo potencias mayores a 3) se les denominará, en esta tesis, como tipos dendrométricos clásicos. Por lo tanto , a la ecuación se le llamará ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos.

Una vez definida la forma mediante los tipos dendrométricos clásicos, su volumen se determina mediante cálculo integral. Existen otros métodos de aproximación para determinar el volumen de trozas (Phillip, 1994). Tal es el caso, de métodos que estiman el volumen mediante ecuaciones como función de las áreas de las secciones transversales de sus extremos y en algunos casos de su parte media, y de su longitud. A estos métodos se les denomina métodos seccionales de estimación de volumen. También para los cuatro tipos dendrométricos clásicos mencionados, se conocen sus ecuaciones seccionales de volumen. Las cuales proporcionan el volumen de un segmento de dichas figuras como función de las áreas de sus secciones transversales extremas.

En resumen, se tienen dos formas para estimar el volumen de un segmento de tipo dendrométrico clásico: I) Utilizando la ecuación generatriz que proporciona el diámetro del sólido de revolución como función de la altura. Donde el volumen del segmento se obtiene mediante integración sobre dicha variable y queda en función de las posiciones o alturas de sus extremos con respecto a la figura completa; II) Utilizando la ecuación general de volumen seccional que proporciona directamente el volumen de un segmento del sólido como función de las áreas de las secciones transversales de sus extremos.

Si se deseara obtener el volumen de una troza mediante el primer procedimiento, se necesitarían conocer las posiciones o alturas originales que tuvieron los extremos de la misma en el tronco en pie de donde fue cortada. Sin embargo, esa información difícilmente se tiene. Por esa razón es preferible en la práctica utilizar una ecuación de volumen seccional. En este caso, el volumen está dado como función de las áreas de las secciones transversales de sus extremos y en algunos casos de su parte media. Estas áreas pueden medirse directamente en la troza sin necesidad de información adicional del origen de la misma. En ello radica el enorme éxito de métodos simples de cubicación de trozas como son los conocidos métodos de Huber, Smalian y Newton.

Matemáticamente, en los métodos de cubicación simples se realiza un cambio de variable, se pasa de la variable de altura a la de área de sección transversal. En el caso de los tipos dendrométricos clásicos, se puede pasar de la determinación del volumen como función de alturas al caso como función de áreas de sección transversal mediante procedimientos algebraicos. Este problema algebraico está resuelto en textos convencionales de Dendrometría para las primeras tres potencias enteras positivas de la ecuación generatriz $n=1, 2, 3$ que corresponden a paraboloides, cono y neiloide, respectivamente (Diéguez-Aranda *et al.*, 2003). El caso general, para cualquier potencia entera positiva, fue propuesto por Cruz de León (2010) y contiene como casos particulares a los tres anteriores. A dicho resultado se le denominó en ese trabajo como *ecuación general de volumen seccional para las geometrías clásicas de tronco de árbol*. En esta tesis también se le denominará *ecuación general de volumen seccional para los tipos dendrométricos clásicos*, o bien, simplemente *ecuación general de volumen seccional*.

El trabajo referido se concentra primariamente en la derivación matemática de la ecuación general de volumen seccional, el resultado obtenido es correcto pero no alcanza a proporcionar una interpretación bien fundamentada de la ecuación obtenida. En sus conclusiones, menciona brevemente que la estructura matemática de dicha ecuación, sugiere, una posible interpretación

estadística. De esta forma, se identifica el *problema* de que no existe una interpretación para la ecuación señalada. El presente trabajo de tesis se *justifica* por la necesidad de encontrar una interpretación que tenga un sustento sólido para la ecuación en cuestión, que pueda representar un aporte al conocimiento y comprensión de la teoría clásica de mediciones forestales. En esta tesis se consideró que la *conjetura* (en un trabajo de investigación teórico ésta es el equivalente a la hipótesis de un trabajo experimental) hecha en el trabajo referido tiene sentido y se decidió ponerla a prueba. Por lo tanto, el *objetivo general* de esta tesis fue: *determinar la posible naturaleza o interpretación estadística de la ecuación general de volumen seccional para las geometrías clásicas de tronco de árbol (o para los tipos dendrométricos clásicos)*.

Como se mostrará en los resultados de este trabajo de tesis, se alcanzó satisfactoriamente el objetivo propuesto y la conjetura resultó acertada, encontrándose una interpretación estadística de la ecuación general de volumen seccional. Más aún, se logró establecer una vinculación del tema de los tipos dendrométricos clásicos con temas estadísticos convencionales, en particular, con la función de distribución beta y con la función de distribución binomial.

CAPÍTULO 2

ANTECEDENTES DE MEDICIONES FORESTALES

Los antecedentes en los cuales se basa el presente trabajo consisten esencialmente en conceptos de la teoría clásica de mediciones forestales para modelar la forma de un tronco de árbol y estimar su volumen. En este capítulo se presentan dichos conceptos.

2.1 Teoría de la forma de un tronco de árbol

El estudio de la forma de troncos de árbol es un tema de interés para diferentes disciplinas como ingeniería mecánica, biología y mediciones forestales. Existen diferentes teorías que intentan explicar o modelar la forma de un tronco. Entre ellas destacan las teorías mecánicas y las teorías utilizadas en el área de mediciones forestales.

2.1.1. Teorías Mecánicas

La estimación de volumen de troncos y trozas son algunas de las principales tareas en el campo de las mediciones forestales. Es una labor complicada porque esos volúmenes dependen de su geometría (Brack, 1999).

La manera fundamental de abordar el problema es tratar de determinar la forma de los troncos de árbol a partir de teorías mecánicas. Las más aceptadas son dos. Según Larson (1963) y Dean and Long (1986), la primera fue desarrollada a finales del siglo XIX por Metzger y considera que el principal factor que determina la forma de un tronco, es la resistencia mecánica del árbol a los vientos. Metzger predice una geometría de tronco en donde *el cubo del diámetro debe ser proporcional a la altura*. Por otro lado está la teoría que considera que la forma del tronco está determinada por la resistencia mecánica a su propio peso. En este caso, se predice una geometría para la forma de un tronco en la que *el*

cuadrado del diámetro es proporcional al cubo de la altura (McMahon, 1973). Ambas teorías suponen que la forma está determinada por la adaptabilidad que ha desarrollado el árbol en su medio ambiente para poder subsistir. Se siguen considerando como hipótesis fundamentales y continuamente se están poniendo a prueba en diferentes investigaciones.

2.1.2. Teoría clásica de la forma de un tronco en mediciones forestales

Paralelamente a las anteriores teorías, se han desarrollado disciplinas en donde se modela de manera empírica pero con una alta precisión la forma de los troncos de árbol. Este es el caso más familiar en el campo de las mediciones forestales. Este tipo de estudios se clasifica en diferentes clases. La teoría más antigua de este tipo, considera la geometría de un tronco general, por partes, basada en los sólidos de revolución simples: cilindro, paraboloides, cono y neiloide. Estas figuras se denominarán aquí tipos dendrométricos clásicos. Actualmente, se desarrollan modelos muy precisos de la forma, por especie de árbol, en base a funciones de perfil o ahusamiento (West, 2004).

La forma de un tronco de árbol puede modelarse mediante secciones longitudinales por medio de geometrías elementales de sólidos de revolución generados por la ecuación

$$Y^2 = A_n X^n \quad [2.1]$$

En donde Y es el diámetro a una altura X tomada a partir de la punta de la figura mientras que A_n es una constante que hace referencia al cambio del radio con la altura y n es una constante que determina la geometría, donde $A_n > 0$ y $n \geq 0$ (Graves, 1906). Actualmente, solo a los casos $n=0, 1, 2,$ y 3 , relacionados a cilindro, cono, paraboloides, y neiloide, respectivamente, se les da el nombre de geometrías clásicas de tronco (Diéguez-Aranda *et al.*, 2003).

En este trabajo, la concepción original de la ecuación [2.1], considerando cualquier entero positivo n , (Graves, 1906) representará a las geometrías clásicas de tronco y se les referirá como *tipos dendrométricos clásicos*. A la ecuación [2.1] se le denominará como *ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos* y a la función Y , se le denominará *función generatriz de los tipos dendrométricos clásicos*.

Como ejemplo, en la figura 2.1, se muestra la gráfica de las funciones generatrices para $A_n=1$, $n = 0, 1, 2$ y 3 , y una altura total de 3 unidades. Los cálculos y gráfica se han hecho mediante Excel como parte de esta tesis.

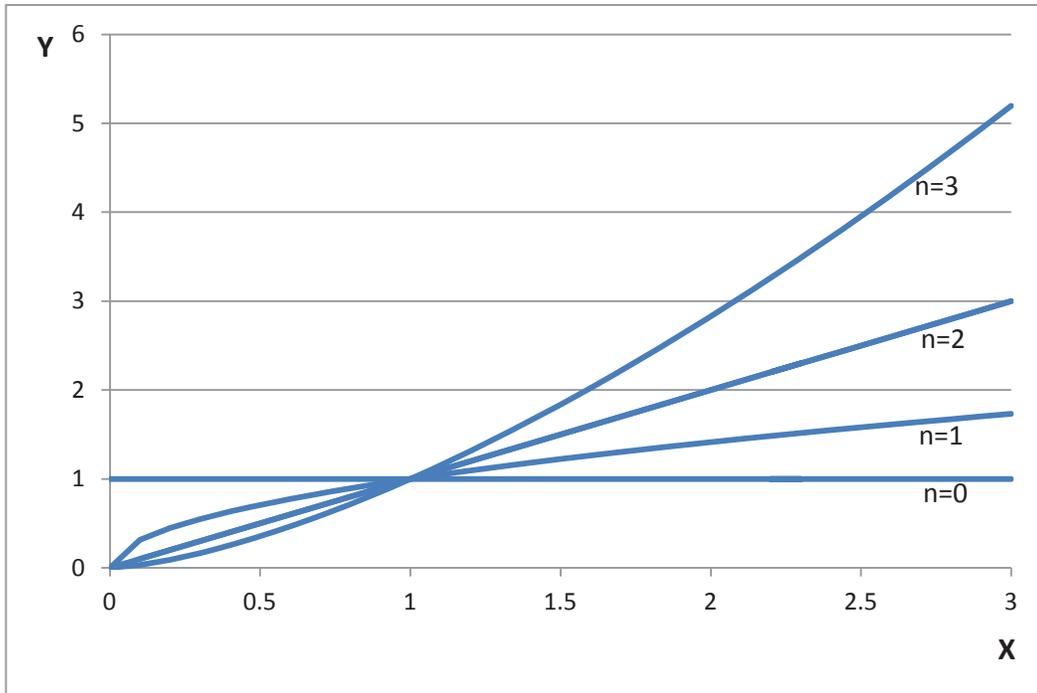


Figura 2.1. Funciones generatrices de los tipos dendrométricos clásicos (Y) como función de la altura (X) obtenidas a partir de la ecuación generatriz [2.1], para una altura total de 3 unidades, $A_n=1$, y $n=0, 1, 2$ y 3 , que corresponden a las funciones generatrices de cilindro, parabolóide, cono y neiloide, respectivamente.

En La figura 2.2, se muestran los sólidos de revolución correspondientes generados al rotar 360° las funciones generatrices alrededor del eje X (considerando que queda lleno o sólido el espacio interno de la figura resultante). Como se señaló previamente, para $n=0, 1, 2$ y 3 , estos corresponden a cilindro, parabolóide, cono y neiloide, respectivamente.

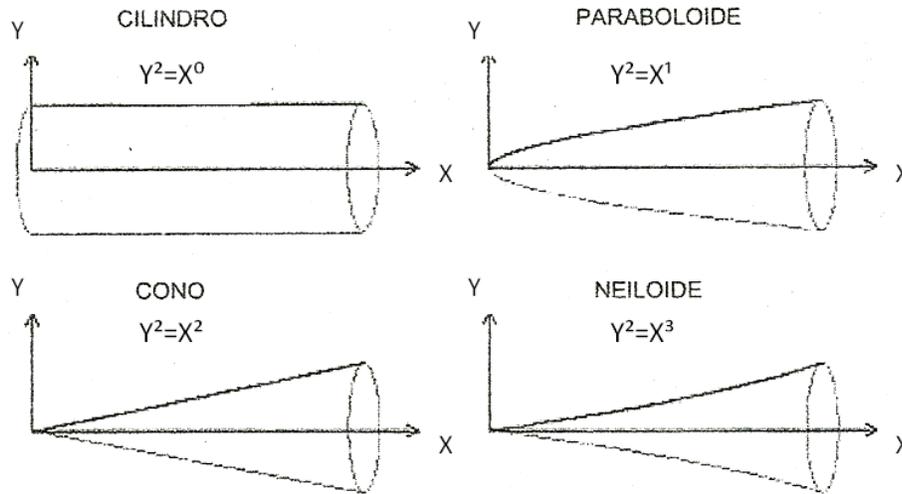


Figura 2.2. Geometrías clásicas de tronco (tipos dendrométricos clásicos) creadas al rotar las funciones generatrices (Y) 360° alrededor del eje X, para $A_n=1$ y $n=0, 1, 2$ y 3 , correspondientes a cilindro, parabolóide, cono y neiloide, respectivamente (Picos-Martín y Cogolludo, 2007).

La teoría clásica de la forma de un tronco, tiene una posición importante en la literatura de mediciones forestales. Al menos durante aproximadamente un siglo, ha sido incluida en libros estándar de ese campo (Graves, 1906; Van Laar y Akça, 2007). La teoría clásica es considerada por algunos como parte de la investigación antigua en mediciones forestales (West, 2004). Sin embargo, aún continúa siendo una referencia muy útil en problemas de investigación relacionados con la forma de un tronco. Por ejemplo, ha sido utilizada para derivar la ecuación para la posición de centroide en el desarrollo del método del mismo nombre para estimar el volumen de un tronco. (Wood *et al*, 1990) y para derivar una relación general entre los factores de forma del volumen y de superficie de tronco, independientemente de la posición (Inoue, 2006).

2.1.3. Teorías actuales de la forma de troncos en mediciones forestales

La teoría clásica de la forma de un tronco en mediciones forestales es una teoría muy simple que presenta diferentes limitaciones. Entre ellas están: i) supone formas generales para un tronco de árbol sin considerar las diferencias que puedan existir entre las diversas

especies, ii) No se puede determinar en que parte del tronco termina una de las geometrías y comienza la otra.

Actualmente, se prefiere el uso de lo que se denomina como funciones de perfil o de ahusamiento. En este caso, se realizan estudios estadísticos por especie para proponer funciones de forma que se ajusten con precisión a los datos tomados en campo. Se puede encontrar una considerable cantidad de funciones de perfil en la literatura de mediciones forestales para diferentes especies de árbol (West, 2004).

2.2 Estimación del volumen de un tronco de árbol

Existen diferentes tipos de métodos para estimar el volumen de un tronco de árbol en el campo de las mediciones forestales. Algunos de estos métodos consisten en: i) se tienen expresiones simples para el diámetro como función de la altura, como es el caso de la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos, el volumen se determina analíticamente mediante cálculo integral, ii) proponer una función de perfil (o ahusamiento) y estimar el volumen mediante métodos numéricos, iii) proponer una ecuación de volumen en donde éste puede ser directamente estimado como una función de una altura de interés, el diámetro a la altura del pecho (1.3 m) y la altura total, se estima estadísticamente; iv) utilizar un método seccional de volumen, en donde éste, puede conocerse para secciones longitudinales como función de áreas de secciones transversales y longitudes (Brack, 1999; West, 2004).

2.2.1. Métodos seccionales

A las secciones longitudinales de un tronco se les denominará aquí segmentos o secciones de tronco. Cuando ya han sido cortadas se les llama simplemente trozas.

Cualquier método seccional para estimar el volumen de un segmento de tronco, de longitud L , se refiere al volumen de un cilindro y puede escribirse como

$$V = \bar{S}L \quad [2.2]$$

En donde \bar{S} es una área promedio de sección transversal (Avery y Burkhart, 2002). Lo que define un método seccional particular es la forma de \bar{S} como función de áreas de secciones transversales seleccionadas.

2.2.2. Métodos seccionales estándar

Los métodos seccionales generalmente aceptados, para la estimación de volumen de segmentos de tronco y trozas en el campo de las mediciones forestales, son los métodos de Huber, Smalian y Newton. Siguiendo la notación de Chapman y Meyer (1949), para un segmento de tronco, de longitud L , áreas de las secciones transversales de los extremos, B en el extremo de mayor diámetro, b en el extremo de menor diámetro, y $B_{1/2}$ a la mitad del segmento, los métodos seccionales estándar pueden ser definidos, respectivamente, como

$$\bar{S}_H = B_{1/2} \quad [2.3]$$

$$\bar{S}_S = \left(\frac{B+b}{2} \right) \quad [2.4]$$

$$\bar{S}_N = \left(\frac{B + 4B_{1/2} + b}{6} \right). \quad [2.5]$$

Entonces, $V_H = \bar{S}_H L$, $V_S = \bar{S}_S L$ y $V_N = \bar{S}_N L$, son los volúmenes seccionales correspondientes, de conformidad con la ecuación [2.2].

2.2.3. Notación para diámetros y áreas de sección transversal en segmentos de tipos dendrométricos clásicos.

Los tipos dendrométricos clásicos son figuras ideales. Si se considera un segmento de un tipo dendrométrico clásico, también denominado truncado o frustado de la figura en cuestión, éste tendrá un par de extremos de los cuales uno tiene diámetro y área de sección transversal menor que el otro, excepto para el cilindro en donde ambos son iguales.

En el presente trabajo, se denotará como d al diámetro de menor tamaño y D al mayor. Similarmente, se denotarán como s y S a sus respectivas áreas de sección transversal. En el caso del cilindro, $s=S$ y $d=D$.

2.2.4. Ecuaciones de volumen seccional para truncados de los tipos dendrométricos clásicos

Adoptando la notación definida en la sub-sección previa, los volúmenes para segmentos (frustrados) de los sólidos de revolución obtenidos mediante la función generatriz de las geometrías clásicas de tronco de árbol, para $n=0, 1, 2$ y 3 , como función de las áreas de sus secciones transversales extremas, s y S , y de su longitud, L , están dados por

$$V_0 = SL = sL \quad [2.6]$$

$$V_1 = \left(\frac{S + s}{2} \right) L \quad [2.7]$$

$$V_2 = \left(\frac{S + \sqrt{Ss} + s}{3} \right) L \quad [2.8]$$

$$V_3 = \left(\frac{S + \sqrt[3]{S^2s} + \sqrt[3]{Ss^2} + s}{4} \right) L \quad [2.9]$$

para cilindro, paraboloides, cono y neiloide, respectivamente (Graves, 1906).

2.3. Diámetros medios para secciones transversales asimétricas

Cuando una sección transversal de un tronco o troza no es circular, sino más bien asimétrica respecto a su eje central, se definen en dendrometría diferentes tipos de diámetro. Si se denotan como d_m y d_M , a la mínima y máxima longitud de una sección

transversal asimétrica, se definen los diámetros: medio aritmético d_A , medio cuadrático d_c y medio geométrico d_G , respectivamente, como

$$d_A = \frac{d_m + d_M}{2} \quad [2.10]$$

$$d_c = \sqrt{\frac{d_m^2 + d_M^2}{2}} \quad [2.11]$$

y

$$d_G = \sqrt{d_m d_M}, \quad [2.12]$$

(Diéguez- Aranda *et al.*, 2003). Frecuentemente, al diámetro aritmético se le llama simplemente diámetro medio. El diámetro medio geométrico será de particular interés en el presente trabajo.

CAPÍTULO 3

ANTECEDENTES DE LA ECUACIÓN GENERAL

Y DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

La ecuación general de volumen seccional para los tipos dendrométricos clásicos es el antecedente más inmediato para esta tesis. De manera implícita, se requieren también algunos antecedentes estadísticos para describir la estructura matemática de dicha ecuación. Para mayor claridad, se presenta y discute en este capítulo el material mencionado. Este capítulo también se justifica porque la referencia original (Cruz de León, 2010) es un trabajo de investigación muy condensado que requiere ser explicado de manera más extensa para incorporarlo en una tesis.

3.1 La media geométrica

Existen diferentes parámetros estadísticos para caracterizar la tendencia central de un conjunto de datos. Los parámetros estándar, en textos básicos de estadística, son la media (media aritmética o promedio aritmético) la mediana y la moda (Devore, 1998). Sin embargo existe otro parámetro de este tipo que se describe en textos intermedios y avanzados de estadística y en algunos textos de mediciones forestales. Se trata de la media geométrica (Chapman y Meyer, 1949; Van Laar y Akça, 2007; Vargas-Sabadias, 1996).

La medida de tendencia central más utilizada es la media aritmética. Sin embargo, pueden existir situaciones, de gran relevancia, en las que éste parámetro no sea una medida representativa adecuada. Por ejemplo, cuando unos cuantos datos se separan cuantitativamente demasiado de la mayoría y cuando se tienen distribuciones estadísticas asimétricas o sesgadas. De acuerdo a la situación que se presente, se tienen como

opciones a la mediana, la moda y la media geométrica (Ross, 2000). Como ya se mencionó, las dos primeras son discutidas en textos convencionales de estadística pero la tercera, y más importante para este trabajo, no. Por lo tanto, se concentrará la atención en ella.

El uso de la media geométrica se da en situaciones que involucran riesgos graves. Por ejemplo, cuando se trata del estudio estadístico de problemas financieros y de la salud, en donde el impacto de un mal estudio estadístico puede ser catastrófico.

La media geométrica es una medida de tendencia central que se utiliza en estudios para el control de epidemias y en ciencias financieras para determinar el incremento de porcentaje promedio en ventas de producción u otras actividades económicas de un periodo a otro y para promediar porcentajes, índices y cifras relativas (Kirkwood, 1988; Bortman, 1999).

A continuación se listan algunas de las características más importantes de la media geométrica.

1) La media geométrica se utiliza para distribuciones de valores asimétricos o no normales y está especialmente indicada para distribuciones con valores extremos. En otras palabras, cuando existen valores bajos los extiende y cuando existen valores altos los comprime.

2) La media geométrica se usa cuando la distribución tiene un sesgo positivo, es decir, cuando el histograma tiene una inclinación a la izquierda.

3) La media geométrica es una medida de tendencia central representativa, ya que en su cálculo intervienen todas las variables

4) El empleo más frecuente de la media geométrica es el de promediar variables tales como porcentajes, tasas, números índices, razones, proporciones geométricas y relaciones de variables etc., es decir, en los casos en los que se supone que la variable presenta variaciones acumulativas. Se emplea en matemáticas financieras y finanzas para promediar números índices, tasas de cambio etc. Así como en Ciencias de la Salud para el control de epidemias.

5) La media geométrica presenta algunas desventajas cuando alguna de las variables de tasa, proporciones, razones, número de índices, porcentajes es cero o bien es negativa

pues no podrá ser determinada. Para evitar este problema Kirkwood (1988) sugiere sumar uno a cada una de las variables originales realizar todos los cálculos y finalmente restárselo al resultado final.

6) La media geométrica tiene un significado estadístico menos intuitivo que el de la media aritmética.

7) La media geométrica es la media aritmética de los logaritmos de los valores de la variable.

8) La media geométrica siempre es menor o igual que la media aritmética.

3.1.1. La media geométrica básica

La media geométrica básica de dos variables, x_1 y x_2 , que se denotara aquí como x_G . Está definida como

$$x_G = \sqrt{x_1 x_2} \quad [3.1]$$

Al final del capítulo previo, se definió al diámetro medio geométrico para una sección transversal no circular con d_m y d_M como su mínima y máxima longitud, en la forma

$$d_G = \sqrt{d_m d_M} \quad [3.2]$$

Lo cual no es otra cosa que un caso particular de media geométrica básica (o simplemente media geométrica).

Sean s_m el área de un círculo con diámetro d_m y s_M el área de un círculo con diámetro d_M . En términos de los diámetros, s_m y s_M están dados por

$$s_m = \pi \left(\frac{d_m^2}{4} \right) \quad [3.3]$$

Y

$$s_M = \pi \left(\frac{d_M^2}{4} \right)$$

Se puede definir la media geométrica de s_m y s_M como

$$s_G = \sqrt{s_m s_M} . \quad [3.4]$$

Si se sustituyen las expresiones de s_m y s_M , en términos de sus diámetros, en la expresión para s_G , se tiene que

$$s_G = \frac{\pi}{4} d_m d_M = \frac{\pi}{4} d_G^2 . \quad [3.5]$$

Por lo tanto, al diámetro geométrico medio d_G le corresponde el área media geométrica s_G , de tal forma como si se tratara de una sección circular con diámetro d_G y área de sección transversal s_G . En otras palabras, se reduce un problema de geometría asimétrica a uno con simetría circular.

Todo lo anterior también aplica para un truncado o segmento de sólido de revolución, con diámetros d y D en sus extremos y áreas s y S de sus secciones transversales respectivas (Alfaro-Trujillo, 2008).

En este caso la media geométrica de los diámetros D y d , que se denotará aquí como D_G , está dada por

$$D_G = \sqrt{Dd} \quad [3.6]$$

Similarmente, la media geométrica de sus áreas de sección transversal, respectivas, que se denotará como S_G , está dada por

$$S_G = \sqrt{Ss} = \sqrt{sS} \quad [3.7]$$

Por ejemplo, para un cono truncado, el volumen esta dado por la expresión

$$V = \frac{\pi}{3} \left(\frac{d^2}{4} + \frac{dD}{4} + \frac{D^2}{4} \right) L = \frac{\pi}{3} \left(\frac{d^2}{4} + \frac{D_G^2}{4} + \frac{D^2}{4} \right) . \quad [3.8]$$

En términos de las áreas de las secciones transversales respectivas,

$$V = \frac{1}{3} (s + \sqrt{sS} + S) L = \frac{1}{3} (s + S_G + S) L \quad [3.9]$$

De la cual, se observa que el volumen es el producto de la media aritmética de s , S , y S_G , por la longitud L (Alfaro-Trujillo, 2008; Uranga-Valencia 2008). La interpretación matemática de la media geométrica básica, se realiza en el apéndice I.

3.1.2. La media geométrica generalizada

La media geométrica generalizada, que se denotará aquí como G , es una medida de tendencia central que se define, para un conjunto, x_1, x_2, \dots, x_k , de k variables aleatorias mediante la siguiente expresión (Chapman y Meyer, 1949)

$$G = \left(x_1^{f_1} x_2^{f_2} x_3^{f_3} \dots x_k^{f_k} \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_1^{f_1} x_2^{f_2} x_3^{f_3} \dots x_k^{f_k}} \quad [3.10]$$

en donde las f_i son las frecuencias con que ocurren las variables. Son enteros positivos, o cero, que satisfacen la relación $n=f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k$. Otra forma para G , es

$$G = e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k f_i \ln x_i} \quad [3.11]$$

En la práctica es más fácil trabajar con logaritmos que con raíces n -ésimas, por lo que este último formato de la media geométrica es preferible. En el apéndice II se presenta la derivación de dicho formato para G .

En caso de que las frecuencias sean iguales para todas las variables, $f_i=N$, entonces

$$G = e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k N \ln x_i} \quad [3.12]$$

A continuación se presenta un ejemplo extraído de un texto clásico de Mediciones Forestales (Chapman y Meyer, 1949).

Calcule la media geométrica (G) y la media aritmética (M) de los siguientes diámetros de árbol.

Tabla 3.1 Cálculos para determinar la media geométrica y la media aritmética.

DIAMETRO D _i (in)	FRECUENCIA f _i	D _i *f _i	ln D _i	f _i *(ln D _i)
6	7	42	1.7917	12.5419
9	33	297	2.1972	72.5076
12	49	588	2.4849	121.7601
15	59	885	2.7080	159.772
18	42	756	2.8903	121.3926
21	20	420	3.0445	60.89
24	7	168	3.1780	22.246
27	4	108	3.2958	13.1832
Total	221	3264		584.2934

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k f_i \ln D_i = (584.2934) / (221) = 2.6486$$

$$G = e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k f_i \ln D_i} = e^{2.6486} = 14.0674 \text{ in}$$

La media aritmética para este ejemplo esta dada por

$$M = \sum_{i=1}^n (D_i * f_i) / n = 3264 / 221 = 14.769 \text{ in}$$

Recuérdese que la media geométrica siempre debe ser menor o igual que la media aritmética. En este caso, es menor.

3.2. La ecuación general de volumen seccional para las geometrías clásicas de tronco de árbol

En la referencia (Cruz de León, 2010) se encuentra que para cualquier entero positivo en la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos, la correspondiente ecuación de volumen seccional está dada por

$$V_n = \left(\frac{\sum_{i=0}^n \sqrt[n]{S^{n-i} s^i}}{n+1} \right) L \quad [3.13]$$

Se le denominó originalmente *ecuación general de volumen seccional para las geometrías clásicas de troncos de árbol*. Como se adelantó en la introducción, en esta tesis, se le denominará de forma equivalente como *ecuación general de volumen seccional para los tipos dendrométricos clásicos* o simplemente como *ecuación general de volumen seccional*. En la referencia en cuestión se menciona que, para $n=1, 2$ y 3 , se reproducen fácilmente las ecuaciones ya conocidas en la literatura, mostradas en el capítulo previo, para los volúmenes seccionales o de truncados de paraboloides, cono y neiloide, respectivamente. Sin embargo, como ya se señaló, ese trabajo es muy denso y no se presentan dichas derivaciones. A continuación, se presentan paso a paso tales derivaciones a partir de la ecuación general [3.13].

Si en la ecuación [3.13] se considera el caso para $n=1$ se tiene que

$$V_1 = \left(\frac{\sum_{i=0}^1 \sqrt[1]{S^{1-i} s^i}}{1+1} \right) L. \quad [3.14]$$

Desarrollando la notación sigma, la ecuación anterior queda como

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(\frac{\sum_{i=0}^1 (S^{1-i} s^i)}{1+1} \right) L \\ &= \frac{(S^{1-0} s^0 + S^{1-1} s^1)}{2} L \\ &= \frac{(S s^0 + S^0 s)}{2} L \\ &= \frac{(S + s)}{2} L \end{aligned}$$

el cual es el volumen exacto de un truncado de paraboloides (Graves, 1906; Romahn de la Vega *et al.*, 1994).

Similarmente, si se considera el caso $n=2$ en la ecuación [3.13], se tiene que

$$V_2 = \left(\frac{\sum_{i=0}^2 \sqrt[2]{S^{2-i}S^i}}{2+1} \right) L. \quad [3.15]$$

Desarrollando la notación sigma en la expresión anterior, la ecuación resultante es

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{(\sqrt[2]{S^{2-0}S^0} + \sqrt[2]{S^{2-1}S^1} + \sqrt[2]{S^{2-2}S^2})}{3} L \\ &= \frac{(\sqrt[2]{S^2} + \sqrt[2]{Ss} + \sqrt[2]{S^2})}{3} L \\ &= \frac{(S + \sqrt[2]{Ss} + s)}{3} L \end{aligned}$$

lo que corresponde al volumen exacto de un truncado de cono (Graves, 1906; Romahn de la Vega *et al.*, 1994)).

Finalmente, si se considera el caso $n=3$ en la ecuación [3.13], resulta

$$\begin{aligned} V_3 &= \left(\frac{\sum_{i=0}^3 \sqrt[3]{S^{3-i}S^i}}{3+1} \right) L \quad [3.16] \\ V_3 &= \frac{(\sqrt[3]{S^{3-0}S^0} + \sqrt[3]{S^{3-1}S^1} + \sqrt[3]{S^{3-2}S^2} + \sqrt[3]{S^{3-3}S^3})}{4} L \\ &= \frac{(\sqrt[3]{S^3(1)} + \sqrt[3]{S^2s} + \sqrt[3]{Ss^2} + \sqrt[3]{S^0s^3})}{4} L \\ &= \frac{(\sqrt[3]{S^3} + \sqrt[3]{S^2s} + \sqrt[3]{Ss^2} + \sqrt[3]{s^3})}{4} L \\ &= \frac{(S + \sqrt[3]{S^2s} + \sqrt[3]{Ss^2} + s)}{4} L \end{aligned}$$

Lo que corresponde al volumen exacto de un truncado de neiloide (Graves, 1906; Romahn de la Vega *et al.*, 1994)).

Hasta donde se tiene conocimiento, no se han reportado en la literatura de mediciones forestales y dendrometría, expresiones para enteros n mayores a 3. Como parte de la presente tesis, se mostrarán como ejemplos en el capítulo de resultados, las expresiones de volumen seccional para los casos de $n=4, 5, 6, 7, 8$ y 9 .

3.3 Equivalencia de la ecuación general con otra ecuación reportada en la literatura.

En Goodwin (2009) se cita otra expresión general para el volumen seccional de las geometrias clásicas de tronco de árbol. La ecuación es

$$V_n = \frac{\pi(d_1)^2 \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^{\frac{2}{n}} \right]^{n+1}}{(n+1) \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^{\frac{2}{n}} \right]} (h_2 - h_1) \quad [3.17]$$

en donde, $d_1 > d_2$; d_1 es el diámetro para la altura h_1 , d_2 es el diámetro para la altura h_2 . Para $n=1$, se obtiene el volumen de un truncado de paraboloides, para $n=2$, el de un truncado de cono y para $n=3$, el de un truncado de neiloide.

La referencia original que proporciona Goodwin, para la ecuación [3.20], es Philip (1994), pero es incorrecta ya que no aparece en dicha referencia. Aún cuando se realizó una búsqueda extensa en la literatura al alcance durante el desarrollo de esta tesis, no se pudo determinar su origen.

En trabajo aún no reportado en la literatura, el autor mencionado, ha demostrado que la ecuación anterior es equivalente a la ecuación obtenida por Cruz de León (2010) relacionando a los parámetros de ambas ecuaciones de la forma siguiente: $L = (h_2 - h_1)$, $s = \pi(d_2)^2/4$ y $S = \pi(d_1)^2/4$, (Goodwin, 2010).

3.4 Descripción de la estructura matemática de la ecuación general

De acuerdo a la definición de métodos seccionales de volumen, dada en el capítulo previo, se pueden definir áreas promedio de secciones transversales $\bar{S} = \bar{S}_n$, para las ecuaciones de volumen de truncados de las geometrías clásicas. Para cilindro, $\bar{S} = \bar{S}_0 = S = s$. Para truncados de paraboloides, cono y neiloide, sus áreas promedio de sección transversal son,

$$\bar{S}_1 = \left(\frac{S + s}{2} \right) \quad [3.18]$$

$$\bar{S}_2 = \left(\frac{S + \sqrt{Ss} + s}{3} \right) \quad [3.19]$$

$$\bar{S}_3 = \left(\frac{S + \sqrt[3]{S^2s} + \sqrt[3]{Ss^2} + s}{4} \right) \quad [3.20]$$

respectivamente.

De acuerdo con el análisis de la estructura matemática de la ecuación [3.13], que se hace en el trabajo de Cruz de León (2010), la primera característica importante que se señala, es que cumple formalmente con la definición de métodos seccionales (ecuación [2.2]). Para cualquier entero positivo, el área media de sección transversal, para un segmento de longitud L y áreas de sección transversal S y s en los extremos, está dada por

$$\bar{S}_n = \sum_{i=0}^n \frac{\sqrt[n]{S^{n-i} s^i}}{n+1} \quad [3.21]$$

El volumen respectivo es $V = \bar{S}_n L$. La otra característica importante es que la raíz enésima de esta ecuación se puede hacer corresponder con el parámetro estadístico denominado media geométrica generalizada en [3.12]. Esto ocurre si para las n variables aleatorias, x_1, x_2, \dots, x_n , se toman $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-i} = S$ y $x_{n-i+1} = x_{n-i+2} = \dots = x_{n-i+i} = x_n = s$. O bien, la variable S tiene una frecuencia $n-i$ y la s una frecuencia i .

Entonces, la estructura matemática de la ecuación generalizada representa una media

aritmética de medias geométricas (Cruz de León, 2010). Finalmente, el trabajo referido sugiere una relación del problema con estadística, lo cual parecería natural suponer, al observar que intervienen parámetros estadísticos en el mismo.

3.5 Definición del problema y objetivo de esta tesis

De acuerdo a lo descrito en la sección previa, se presenta entonces el *problema* de que *la ecuación general de volumen seccional para los tipos dendrométricos clásicos no tiene hasta este momento una interpretación o significado formal*. Se tomó este problema como el del presente trabajo de tesis.

En caso de considerar que la suposición o conjetura de Cruz de León (2010), descrita en la sección previa, es correcta, el paso siguiente sería comprobarla, encontrando la posible relación o relaciones del tema con estadística. Esto, ayudaría a proponer una interpretación formal de la ecuación general en cuestión. Si por el contrario, se encuentra que no es correcta, se desecharía la misma.

En este trabajo se propuso resolver el problema señalado y se asumió como correcta la conjetura en cuestión. Por lo tanto, se decidió comprobarla. De esta forma, según se adelantó en la introducción, se definió como el *objetivo general de esta tesis*, el *determinar la posible naturaleza o interpretación estadística de la ecuación general de volumen seccional para los tipos dendrométricos clásicos*.

Los resultados obtenidos fueron afirmativos y se presentan en el capítulo 5. Antes, en el capítulo 4, se presenta la metodología utilizada para resolver el problema.

CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA

En el presente trabajo, se desarrolló un proyecto teórico de investigación que representa un trabajo de aplicación de matemáticas al campo de las mediciones forestales. Al igual que cualquier otro proyecto de investigación también involucra una metodología, pero integrada por procedimientos teóricos.

Cuando se trabaja con matemáticas aplicadas a un campo específico, es común utilizar procedimientos de análisis e identificación de conceptos y propiedades generales similares en ambas disciplinas que permitan descubrir o determinar relaciones entre ellas. Estas relaciones son formalmente establecidas mediante métodos matemáticos y quedan por lo tanto expresadas mediante relaciones matemáticas, que se refieren a variables y parámetros del campo en el que se han aplicado.

En general, la metodología para resolver el problema propuesto para esta tesis, consistió en el análisis e identificación de características de la ecuación general de volumen seccional que condujo a establecer relaciones con procesos estadísticos conocidos y viceversa, mediante identificación y revisión de material estadístico con propiedades posibles de vinculación, en general, con la teoría clásica sobre mediciones forestales, considerada en este trabajo, y en particular, con la ecuación referida. Esquemáticamente, esto se podría indicar de la siguiente forma

Mediciones Forestales \Leftrightarrow Estadística

Se incluyen en el presente capítulo, los conceptos y métodos estadísticos que, como resultado del ejercicio discutido en el párrafo previo, se han identificado como posibles de vincular con los antecedentes de mediciones forestales mostrados en los dos capítulos precedentes. Principalmente, se trata de procesos de Bernoulli, la función de distribución binomial y la función de distribución beta.

La derivación de las relaciones mencionadas fue realizada principalmente mediante métodos algebraicos. Los cálculos y gráficas correspondientes fueron realizados mediante Excel. En particular, se utilizó en los cálculos, la función beta definida en las funciones estadísticas de Excel.

4.1 Análisis e identificación de características de la estructura de la ecuación general de volumen seccional que indican relaciones con métodos o procesos estadísticos.

En este caso, se define una relación del tipo

Mediciones Forestales → Estadística.

La estructura de las medias generalizadas que intervienen en la ecuación general de volumen seccional está dada por

$$\sqrt[n]{S^{n-i}s^i}. \quad [4.1]$$

Según Cruz de León (2010), de acuerdo a la definición de media geométrica generalizada, esto correspondería a un problema que involucra solamente a dos variables aleatorias, S y s , en donde la frecuencia de S es $(n-i)$ y la de s es i .

Partiendo de las características anteriores, mediante un análisis realizado durante el desarrollo de esta tesis, se percibió que posiblemente se puedan relacionar los términos anteriores con un problema estadístico de dos salidas, s y S . En caso afirmativo, el problema podría ser análogo al lanzamiento de una moneda un número determinado de veces, lo que en estadística, representa un proceso de Bernoulli. A su vez, este proceso está asociado con la denominada distribución binomial (Devore, 1988). A continuación se describen ambos conceptos.

4.1.1. Procesos de Bernoulli

Cuando un solo ensayo de algún proceso o experimento puede conducir solo a uno de dos resultados mutuamente excluyentes como muerto ó vivo, enfermo ó sano, masculino ó femenino, encendido ó apagado, águila ó sol, positivo ó negativo, etc., el ensayo se conoce como ensayo de Bernoulli.

Una sucesión de N ensayos de Bernoulli forma un proceso de Bernoulli si cumple con las siguientes condiciones:

1. El proceso consiste de **N ensayos idénticos** (ensayos de Bernoulli).
2. Cada uno de los ensayos es un ensayo de Bernoulli. Uno de los posibles resultados se denota como *éxito* y el otro como *fracaso*.
3. La probabilidad de un éxito, que se denota por p , es constante de ensayo a ensayo (la misma para cada ensayo). La probabilidad de fracaso se denota como $q (=1-p)$.
4. Los ensayos son independientes, es decir, la ocurrencia de cualquier ensayo particular no afecta la ocurrencia de cualquier otro ensayo.

4.1.2. La distribución binomial

La función de distribución binomial, utilizada para calcular probabilidades en procesos de Bernoulli, está dada por

$$f_{bin}(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k q^{N-k}; \quad k=0, 1, 2, \dots, N \quad [4.2]$$

$$\sum_{k=0}^n f_{bin}(k) = \sum_{k=0}^n \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k q^{N-k} \quad [4.3]$$

$$= (q + p)^N = 1^N = 1$$

En la figura 4.1 se muestran formas típicas de la distribución binomial.

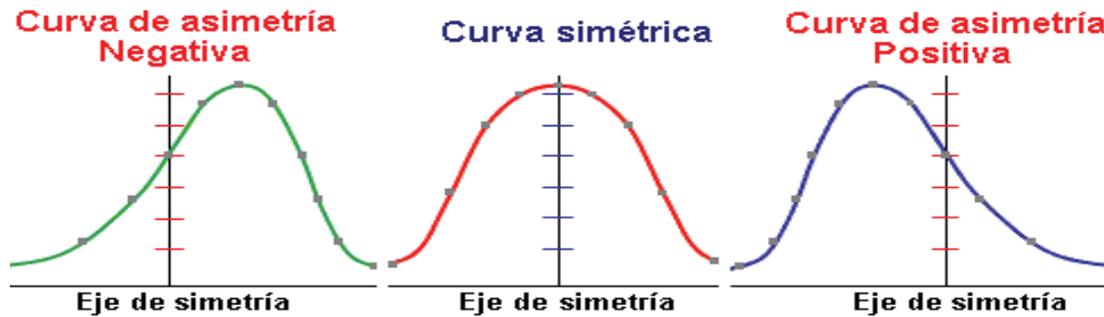


Figura 4.1. Función de distribución binomial. Asimetría Negativa (Promedio<Mediana), Simétrica (Promedio=Mediana), Asimetría Positiva (Promedio>Mediana) (Ruiz-Muñoz, 2004).

Ejemplo ¿Cuál es la probabilidad de que en 8 lanzamientos de una moneda salga águila en 3 ocasiones? (Este problema es equivalente a determinar la probabilidad de que en una familia de 8 hijos se tengan 3 mujeres o, viceversa, 3 hombres).

Este caso corresponde a una distribución binomial con $N=8$, $k=3$, $p=0.5$ y $q=1-p= 0.5$. Probar que existe aproximadamente un 22% de probabilidad.

$$f_{bin}(3) = \frac{8!}{3!5!} \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{56}{2^8} = \frac{56}{256} = 0.21875$$

En este ejemplo, la probabilidad, es el cociente entre el número de formas posibles en que pueden salir 3 águilas en 8 lanzamientos (56) y el número total de resultados posibles en 8 lanzamientos (2^8). O bien, es la *fracción de resultados en donde se obtienen 3 águilas con respecto al total de resultados que se obtienen de 8 lanzamientos*}

4.2 Análisis e identificación de características de la función generatriz de los tipos dendrométricos clásicos que indican una relación con métodos o procesos estadísticos.

En este caso, la relación también es del tipo

Mediciones Forestales → Estadística.

Realizando una revisión de material estadístico se lograron identificar algunas similitudes con el material de la teoría clásica de mediciones forestales expuesto en los antecedentes de esta tesis.

En particular, se encontró una distribución de probabilidad, denominada función beta, que tiene una estructura matemática en forma de potencias de la variable con un factor que, a su vez, es función de dichas potencias. Se observó que asignando parámetros convenientes a dichas potencias, se podía obtener una función beta que resultaba proporcional a la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos. La relación resultante, así como los detalles técnicos que conducen a ella, se presentan como resultados en el siguiente capítulo. A continuación se presenta la distribución beta.

4.2.1. La función de distribución beta

En probabilidad y estadística, la distribución beta es una familia de distribuciones de probabilidad continua definida en el intervalo $0 < x < 1$ con dos parámetros de forma α y β . Una variable aleatoria x tiene una distribución beta y se conoce como una variable aleatoria beta si y solo si su densidad de probabilidad está dada, por

$$f_{beta}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & \text{para } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad [4.4]$$

en donde, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, (Freund, J. et al., 2000). A la función $\Gamma(\alpha)$ se le llama función gamma y se define como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Si n es un entero,

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) \quad \text{y} \quad \Gamma(1) = 1$$

De donde

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

Esto muestra la relación de esta función con el factorial de un número entero.

La distribución beta es flexible, proporciona variedad de formas diferentes, como se muestra en la figura 4.2.

Algunas aplicaciones de la distribución beta son: estadística Bayesiana; modelos para determinar el tiempo duración de una prueba; proyectos de manejo; modelos para determinar fracciones , tal como la fracción de impurezas en un producto químico o la fracción de tiempo que una máquina esta en reparación.

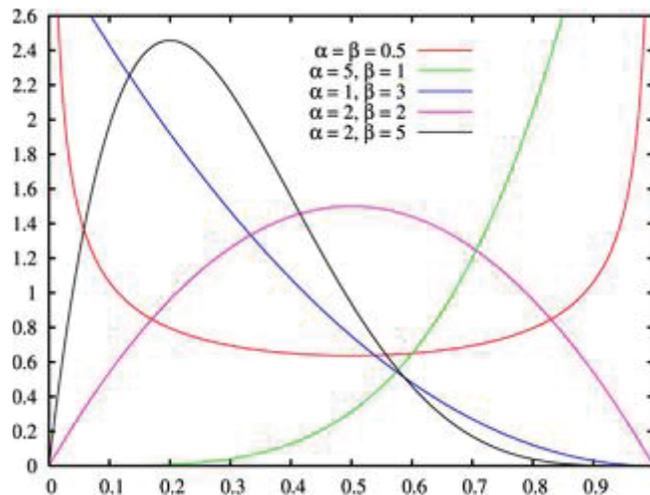


Figura 4.2. Función de distribución beta para algunos pares de parámetros de forma α y β . Como puede observarse se trata de una función muy flexible en su forma (Borghers y Wessa, 2011).

En la práctica, los parámetros de forma, α y β , para la función beta, se determinan mediante expresiones que son función de la media y la varianza de los mismos (Van Laar y Akça, 2007).

4.2.2. Segundo formato para la distribución beta

La forma matemática de la ecuación beta estándar, según la literatura revisada, es la dada por la ecuación [4.4]. Sin embargo, si se cambia el parámetro α por $\alpha+1$, la función beta quedaría definida como

$$f_{beta}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)} x^\alpha(1-x)^{\beta-1} & \text{para } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad [4.5]$$

Si se normaliza la función anterior por el factor de las funciones gamma, queda la la función beta normalizada, $\bar{f}_{beta2}(x)$,

$$\bar{f}_{beta2}(x) = \begin{cases} x^\alpha(1-x)^{\beta-1} & \text{para } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad [4.6]$$

En los cálculos realizados en el presente trabajo, se ha comprobado que esta es precisamente la función de distribución beta que contiene la librería de funciones estadísticas de Excel. Esto no presenta ningún problema, solamente hay que tener en cuenta que la función $f_{beta}(x)$, para α , normalizada, corresponde a la función $\bar{f}_{beta2}(x)$, proporcionada por Excel para $\alpha+1$. Lo anterior solo se considera para efectos de cálculo.

4.3 Análisis e identificación de características de las funciones de distribución beta y binomial que indican una relación entre ellas

En este caso, se trata de una relación dentro de la misma estadística. Lynch (2006) menciona que la distribución beta es muy similar a la distribución binomial, que la diferencia es que la variable es x y el parámetro es p en la distribución binomial, mientras que en la distribución beta p es la variable y α y β los parámetros. Sin embargo no deriva explícitamente una relación entre ellas. De manera independiente durante el desarrollo de esta tesis también se realizó dicha observación. Una revisión de la estructura matemática de ambas distribuciones indica que, mediante identificación de los parámetros adecuados, se puede establecer una relación entre ellas. Esta tarea, se presenta también como parte de los resultados en el siguiente capítulo.

4.4 Análisis e identificación de características de métodos o procesos estadísticos que indican una relación con la función generatriz de los tipos dendrométricos.

El material correspondiente a la sección previa, representa un paso intermedio para obtener una relación del tipo

Mediciones Forestales ← Estadística.

Como se encuentra una relación entre la función generatriz y la función beta, y a su vez se encuentra que la función beta está relacionada a la función binomial, se concluirá finalmente que la función binomial está también relacionada a la función generatriz. Con este caso se cierra el ciclo de las posibles relaciones buscadas. La relación resultante para este caso se muestra también en el capítulo 5.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS

5.1 Derivación de las ecuaciones de volumen seccional para los casos de $n=4, 5, 6, 7, 8$ y 9 , a partir de la ecuación general.

A continuación, se presentan los desarrollos algebraicos completos para el volumen seccional de los sólidos de revolución correspondientes a $n=4$ y 5 . Por simplicidad, únicamente se presentan los resultados finales para $n= 6, 7, 8$ y 9 . Hasta donde se tiene conocimiento, las expresiones resultantes no se habían derivado explícitamente antes del presente trabajo. De igual forma, solo se muestran las funciones generatrices de las geometrías correspondientes a $n=1, 2, 3, 4$ y 5 .

Para $n=4$, la ecuación general de volumen seccional (ecuación [3.13]), queda como

$$V_4 = \left(\frac{\sum_{i=0}^4 \sqrt[4]{S^{4-i}S^i}}{4+1} \right) L. \quad [5.1]$$

Desarrollando la notación sigma en la ecuación anterior, queda como

$$\begin{aligned} V_4 &= \frac{(\sqrt[4]{S^{4-0}S^0} + \sqrt[4]{S^{4-1}S^1} + \sqrt[4]{S^{4-2}S^2} + \sqrt[4]{S^{4-3}S^3} + \sqrt[4]{S^{4-4}S^4})}{5} L \\ &= \frac{(\sqrt[4]{S^4(1)} + \sqrt[4]{S^3s} + \sqrt[4]{S^2s^2} + \sqrt[4]{Ss^3} + \sqrt[4]{S^0s^4})}{5} L \\ &= \frac{(\sqrt[4]{S^4} + \sqrt[4]{S^3s} + \sqrt[4]{S^2s^2} + \sqrt[4]{Ss^3} + \sqrt[4]{(1)s^4})}{5} L \\ &= \frac{(S + \sqrt[4]{S^3s} + \sqrt[4]{S^2s^2} + \sqrt[4]{Ss^3} + s)}{5} L \end{aligned}$$

Para n=5,

$$V_5 = \left(\frac{\sum_{i=0}^5 \sqrt[5]{S^{5-i}S^i}}{5+1} \right) L \quad [5.2]$$

$$V_5 = \frac{(\sqrt[5]{S^5-0S^0} + \sqrt[5]{S^5-1S^1} + \sqrt[5]{S^5-2S^2} + \sqrt[5]{S^5-3S^3} + \sqrt[5]{S^5-4S^4} + \sqrt[5]{S^5-5S^5})}{6} L$$

$$V_5 = \frac{(\sqrt[5]{S^5} + \sqrt[5]{S^4s} + \sqrt[5]{S^3s^2} + \sqrt[5]{S^2s^3} + \sqrt[5]{Ss^4} + \sqrt[5]{s^5})}{6} L$$

$$V_5 = \frac{(S + \sqrt[5]{S^4s} + \sqrt[5]{S^3s^2} + \sqrt[5]{S^2s^3} + \sqrt[5]{Ss^4} + s)}{6} L$$

Para n=6,

$$V_6 = \left(\frac{\sum_{i=0}^6 \sqrt[6]{S^{6-i}S^i}}{6+1} \right) L \quad [5.3]$$

$$V_6 = \frac{(S + \sqrt[6]{S^5s} + \sqrt[6]{S^4s^2} + \sqrt[6]{S^3s^3} + \sqrt[6]{S^2s^4} + \sqrt[6]{Ss^5} + s)}{7} L$$

Para n=7,

$$V_7 = \left(\frac{\sum_{i=0}^7 \sqrt[7]{S^{7-i}S^i}}{7+1} \right) L \quad [5.4]$$

$$V_7 = \frac{(S + \sqrt[7]{S^6s^1} + \sqrt[7]{S^5s^2} + \sqrt[7]{S^4s^3} + \sqrt[7]{S^3s^4} + \sqrt[7]{S^2s^5} + \sqrt[7]{Ss^6} + s)}{8} L$$

Para n=8,

$$V_8 = \left(\frac{\sum_{i=0}^8 \sqrt[8]{S^{8-i}s^i}}{8+1} \right) L \quad [5.5]$$

$$V_8 = \frac{(S + \sqrt[8]{S^7s^1} + \sqrt[8]{S^6s^2} + \sqrt[8]{S^5s^3} + \sqrt[8]{S^4s^4} + \sqrt[8]{S^3s^5} + \sqrt[8]{S^2s^6} + \sqrt[8]{Ss^7} + s)}{9}$$

Para n=9,

$$V_9 = \left(\frac{\sum_{i=0}^9 \sqrt[9]{S^{9-i}s^i}}{9+1} \right) L \quad [5.6]$$

$$V_9 = \frac{(S + \sqrt[9]{S^8s} + \sqrt[9]{S^7s^2} + \sqrt[9]{S^6s^3} + \sqrt[9]{S^5s^4} + \sqrt[9]{S^4s^5} + \sqrt[9]{S^3s^6} + \sqrt[9]{S^2s^7} + \sqrt[9]{Ss^8} + s)}{10} L$$

Para ilustrar la geometría de los sólidos de revolución correspondientes a $n=4$ y 5 , con respecto a las conocidas para $n=1, 2$ y 3 , en la gráfica de la figura 5.1, se muestran las funciones generatrices (Y) respectivas, como función de la altura (X) para el caso de $A_n=1$ y una altura total de dos unidades.

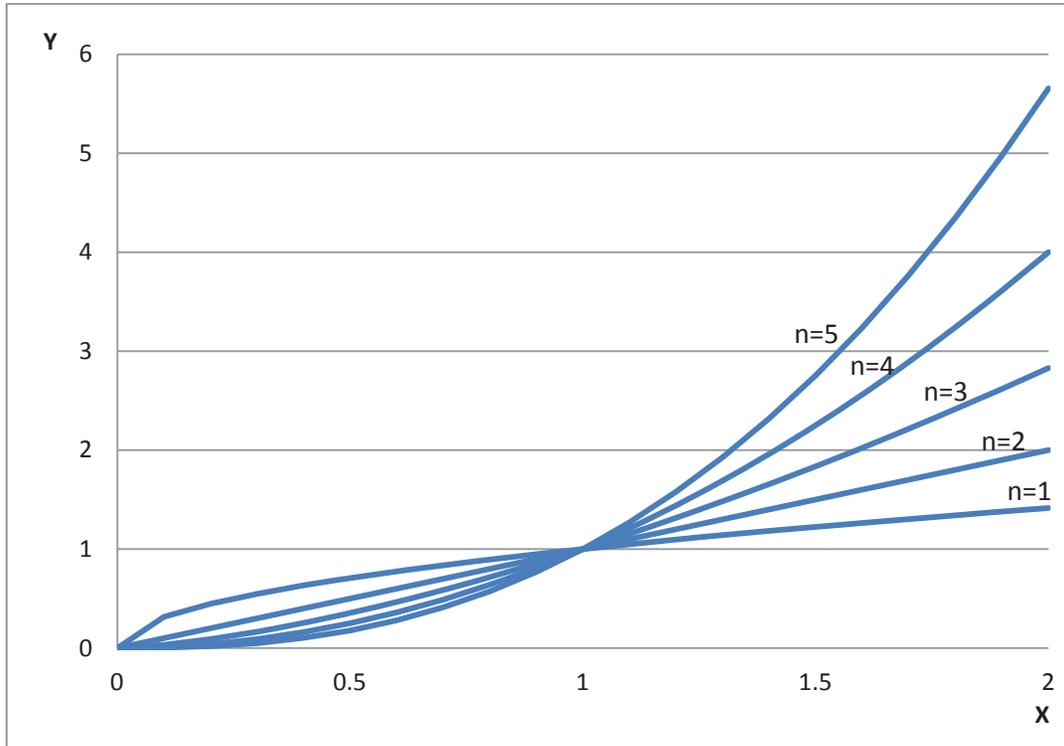


Figura 5.1. Funciones generatrices para los tipos dendrométricos clásicos (Y) como función de la altura (X) para una altura total de 2 unidades y correspondientes, en forma ascendente, a $n=1, 2, 3, 4$ y 5 , de la ecuación generatriz respectiva.

5.2 Resultados de establecer una analogía con un proceso de Bernoulli

De acuerdo a la definición de una media geométrica generalizada, esto correspondería a un problema que involucra solamente dos variables aleatorias, S y s , en donde la frecuencia de S es $(n-i)$ y la de s es i .

En esta tesis se propone, de manera original, que posiblemente se puedan relacionar este problema con un problema estadístico de dos salidas, s y S . En caso afirmativo, el problema podría ser análogo al lanzamiento de una moneda un número determinado de veces lo que corresponde a un proceso de Bernoulli.

Por ejemplo, de acuerdo con la ecuación [3.13], las medias geométricas que se pueden definir, para las áreas de secciones transversales, S y s , para $n=3$ (truncado de neiloide), son

$$\sqrt[3]{S^{3-i}S^i}, \quad i = 0, 1, 2 \text{ y } 3$$

o bien,

$$\{\sqrt[3]{S^3} = S, \sqrt[3]{S^2S}, \sqrt[3]{SS^2}, \sqrt[3]{S^3} = s\}$$

Las cuales también pueden escribirse como

$$\{\sqrt[3]{SSS} = S, \sqrt[3]{SSs}, \sqrt[3]{Sss}, \sqrt[3]{sss} = s\}$$

Sin embargo otra propiedad de la ecuación [3.13], señalada en el trabajo de Cruz de León (2010), es que es simétrica con respecto a s y S . Es decir, el resultado no cambia si se intercambian las variables. Realizando dicho intercambio, se tendría la expresión

$$\sqrt[3]{s^{3-i}S^i}, \quad i = 0, 1, 2 \text{ y } 3$$

A la cual le corresponderían las medias geométricas

$$\{\sqrt[3]{s^3} = s, \sqrt[3]{s^2S}, \sqrt[3]{sS^2}, \sqrt[3]{s^3} = S\}$$

Las cuales también se pueden escribir como

$$\{\sqrt[3]{sss} = s, \sqrt[3]{ssS}, \sqrt[3]{sSS}, \sqrt[3]{SSS} = S\}$$

De esta forma, todas las posibilidades que se tienen para definir medias geométricas (aún cuando algunas sean iguales entre sí, por ejemplo $\sqrt[3]{Sss} = \sqrt[3]{ssS}$) son

$$\{\sqrt[3]{SSS} = S, \sqrt[3]{SSs}, \sqrt[3]{Sss}, \sqrt[3]{sSS}, \sqrt[3]{ssS}, \sqrt[3]{sss} = s\}$$

Por otro lado, en el experimento de lanzar una moneda tres veces, denotando como s y S a las dos posibles salidas de cada una de ellas, el espacio muestral (todos los resultados posibles) sería

$$\{(S, S, S); (S, s, s)\}.$$

En el problema estadístico, es muy importante el orden de aparición de s y S . En el caso de las medias geométricas no es así porque es una simple operación matemática. Sin

embargo, tomando en cuenta la propiedad de simetría entre s y S en la ecuación [3.13], es casi posible establecer una relación uno a uno entre el espacio muestral de las posibles salidas del problema estadístico de lanzar una moneda tres veces y el espacio de las medias geométricas posibles, según la misma ecuación, en el problema de volumen seccional, para áreas de sección transversal S y s , para $n=3$.

Lo anterior, hace suponer, que para establecer estrictamente la analogía mencionada, también se debe considerar el orden de aparición de s y S en la definición de las medias geométricas para $n=3$. Si se hace esto, entonces únicamente haría falta definir el par adicional de medias geométricas

$$\sqrt[3]{SsS} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{sSs}.$$

Con estas últimas, se completarían todas las medias geométricas posibles para este caso. De esta forma, se establecería la correspondencia buscada según se muestra en la tabla 5.1.

Tabla 5.1. Correspondencia uno a uno entre todas las posibles salidas en un proceso de tres ensayos de Bernoulli con las posibles definiciones de medias geométricas para $n=3$.

Resultados posibles del lanzamiento de una moneda tres veces, con salidas Individuales s y S .	Medias geométricas generalizadas posibles de definir para las variables s y S , para $n=3$.
(S, S, S)	$\sqrt[3]{SSS} = S$
(S, S, s)	$\sqrt[3]{SSs}$
(S, s, s)	$\sqrt[3]{Sss}$
(s, s, s)	$\sqrt[3]{sss} = s$
(s, s, S)	$\sqrt[3]{ssS}$

5.3 Relación obtenida entre la función generatriz de los tipos dendrométricos clásicos y la función de distribución beta.

5.3.1. Normalización de la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos

La ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos esta dada por la ecuación [2.1] la cual, por conveniencia, se presenta nuevamente a continuación

$$Y^2 = A_n X^n$$

Para intentar establecer una conexión con estadística, se requiere normalizar a dicha ecuación para evitar el problema de unidades, es decir, la ecuación que obtengamos será adimensional; además, se requiere que la función se defina en el dominio de (0,1). Tomando en cuenta que si H es la altura total del tipo dendrométrico y Y_H su diámetro correspondiente, la ecuación anterior queda como

$$Y_H^2 = A_n H^n \quad [5.7]$$

Dividiendo la ecuación [2.1] entre la ecuación [5.7], resulta que

$$\left(\frac{Y}{Y_H}\right)^2 = \left(\frac{X}{H}\right)^n \quad [5.8]$$

Considérese a las nuevas variables $y = (Y/Y_H)$, $x = (X/H)$. Éstas son variables normalizadas que van de 0 a 1, es decir, $0 \leq y \leq 1$ y $0 \leq x \leq 1$, y serán esenciales en lo que resta de esta tesis. En términos de estas variables normalizadas se tiene la *ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos normalizada*

$$y^2 = x^n \quad [5.9]$$

5.3.2. Identificación de parámetros de la función de distribución beta que la relacionan con la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos normalizada.

En particular si $\alpha = n + 1$ y $\beta = 1$, se tiene que la función de distribución beta definida en la ecuación [4.4], queda como

$$f_{beta}(\alpha = n + 1, \beta = 1, x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1)} x^{n+1-1}(1-x)^{1-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad [5.10]$$

$$f_{beta}(\alpha = n + 1, \beta = 1, x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n + 2)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(1)} x^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Se sabe que $\Gamma(n + 2) = (n + 1)\Gamma(n + 1)$ y $\Gamma(1) = 1$ entonces al sustituirlas en [5.10]. Se obtiene

$$f_{beta}(\alpha = n + 1, \beta = 1, x) = \begin{cases} \frac{(n + 1)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + 1)(1)} x^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$f_{beta}(\alpha = n + 1, \beta = 1, x) = \begin{cases} (n + 1) x^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} . \end{cases} \quad [5.11]$$

La ecuación generatriz de los diferentes tipos dendrométricos normalizada es $y^2 = x^n$, si se despeja de ella x^n y se sustituye en la ecuación [5.11], se tiene que

[5.12]

$$f_{beta}(\alpha = n + 1, \beta = 1, x) = \begin{cases} (n + 1)y^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

o bien,

$$f_{beta}(\alpha = n + 1, \beta = 1, x) = (n + 1) y^2 \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1 \quad [5.13]$$

Despejando y^2 se obtiene

$$y^2 = \left(\frac{1}{n+1}\right) f_{beta}(\alpha = n + 1, \beta = 1, x), \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1. \quad [5.14]$$

En este caso, la función beta dividida por $n+1$, corresponde a la función beta normalizada porque $(1/n+1)$ corresponde al inverso del factor que contiene a las funciones gama de la definición de función beta en la ecuación [4.4]). Por lo tanto, la y^2 de la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos normalizada es igual a una función de distribución beta normalizada particular.

En la figura 5.2, se presenta la gráfica del cuadrado de la función generatriz, y^2 , obtenida utilizando la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos, para $n= 1, 2, 3, 4$ y 5 , obtenida con Excel. Por otro lado, en la figura 5.3 se muestra la gráfica de los resultados de los cálculos de la función beta normalizada de la librería estadística de Excel, para $\alpha = 2, 3, 4, 5$ y 6 , y $\beta = 1$. De acuerdo a la ecuación [5.14], $\alpha = n+1$, por lo que las graficas corresponden a $n=1, 2, 3, 4$ y 5 . Como puede verse, se trata exactamente de las mismas gráficas. Por lo tanto, las figuras 5.2 y 5.3, constituyen la demostración gráfica de relación establecida por la ecuación [5.14].

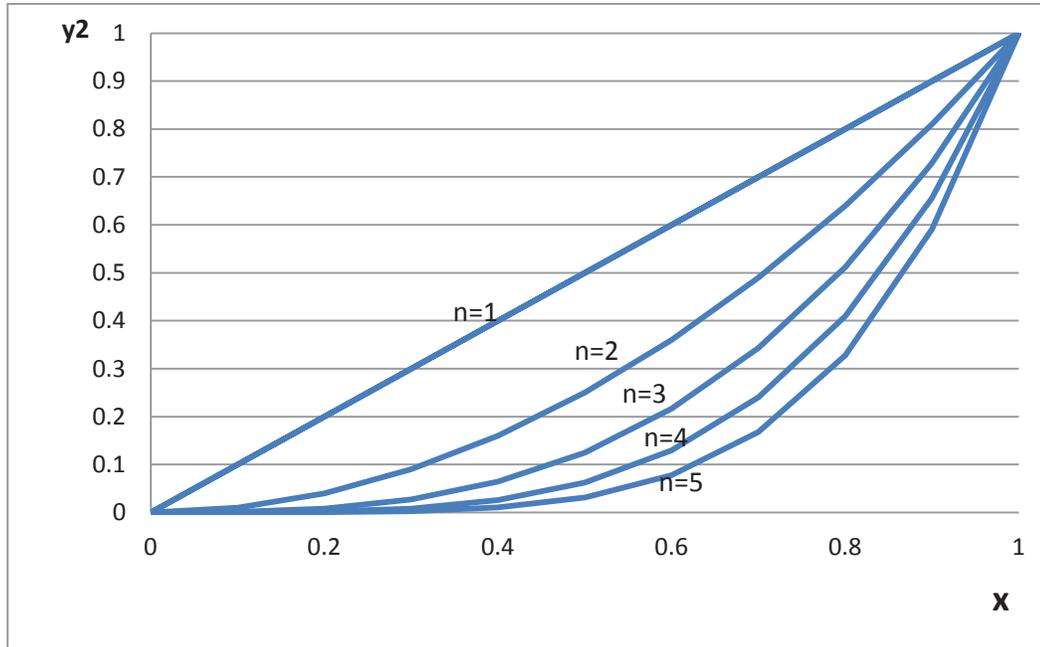


Figura 5.2. Cuadrado de la función generatriz normalizada, y^2 , como función de la altura normalizada, x , obtenidas mediante la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos, para $n=1, 2, 3, 4$ y 5 .

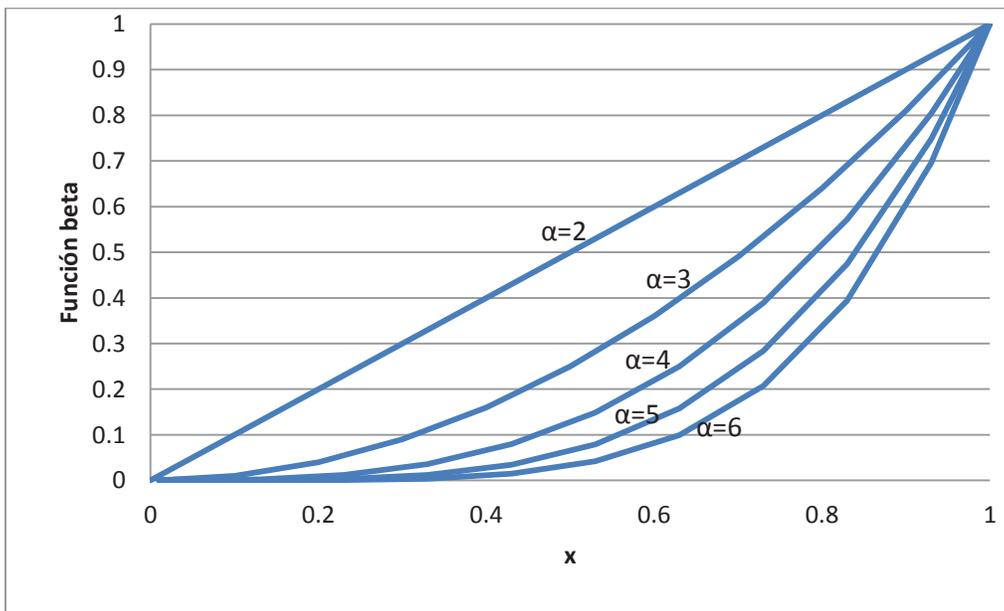


Figura 5.3. Función beta normalizada, como función de x , para los parámetros $\alpha = 2, 3, 4, 5$ y 6 , y $\beta = 1$, calculada por la función beta de Excel.

5.4 Relación obtenida entre la función de distribución beta y la función de distribución binomial

Para valores enteros de sus parámetros, la función beta está dada por

$$f_{beta}(x) = \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} . \quad [5.15]$$

Por su parte, la función binomial es

$$f_{bin}(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k(1-p)^{N-k}. \quad [5.16]$$

Si se relacionan los parámetros de la función beta con los de la binomial de la forma siguiente $x = p$, $\alpha - 1 = k$, $\beta - 1 = N - k$ y $\alpha + \beta - 1 = N + 1$, y se sustituyen en la ecuación [5.12], se obtiene que

$$\begin{aligned} f_{beta}(\alpha - 1 = k, \beta - 1 = N - k, p) &= \frac{(N + 1)!}{k!(N - k)!} p^k(1 - p)^{N - k} \\ &= \frac{(N + 1) N!}{k!(N - k)!} p^k(1 - p)^{N - k} \\ &= (N + 1) \frac{N!}{k!(N - k)!} p^k(1 - p)^{N - k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f_{beta}(\alpha - 1 = k, \beta - 1 = N - k, p) = (N + 1)f_{bin}(k) \quad [5.17]$$

o bien,

$$f_{bin}(k) = \frac{1}{N+1} f_{beta}(\alpha - 1 = k, \beta - 1 = N - k, p). \quad [5.18]$$

5.5 Relación entre la función generatriz de los tipos dendrométricos clásicos normalizada y la función de distribución binomial.

Mediciones forestales ← Estadística

El siguiente análisis se hace con base en la función de distribución binomial y la ecuación generatriz cuyas expresiones son,

$$f_{bin}(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}; \quad y^2 = x^n \quad .$$

Si $k = N$ en la función de distribución binomial se obtiene

$$f_{bin}(k = N, p) = \frac{N!}{N!(N-N)!} p^N (1-p)^{N-N} = p^N$$

Si se hace también el cambio de variable $p=x$, se obtiene la expresión

$$f_{bin}(k = N, p = x) = x^N.$$

Se puede observar que *la única forma de relacionar a la función binomial con la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos normalizada, es que $N=n$* . Por lo tanto,

$$f_{bin}(k = N = n, p = x) = x^n = y^2 \quad [5.19]$$

La relación [5.19], establece que y^2 corresponde a una función de distribución binomial particular. Nótese que la probabilidad de un ensayo individual de la función binomial corresponde a la altura normalizada de la ecuación generatriz normalizada ($p=x$).

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

6.1 Sobre las ecuaciones de volumen seccional para los casos de $n=4, 5, 6, 7, 8$ y 9 , a partir de la ecuación general.

Aún para el caso de $n=3$, puede observarse en la literatura que la ecuación de volumen seccional respectiva, se obtiene mediante un procedimiento algebraico extenso y laborioso (Romhan de la Vega *et al.*, 1994). Con el uso de la ecuación generalizada [3.13], se evitan esos procesos y se obtienen directamente las expresiones para cualquier entero positivo.

En este caso, como ha podido observarse, desarrollando las expresiones correspondientes a la notación algebraica sigma, se pueden obtener directamente de la ecuación general de volumen seccional, los volúmenes particulares para cualquier entero positivo n . No son necesarios los extensos procedimientos algebraicos que se encuentran en los textos de dendrometría como puede observarse para $n=3$ (neiloide) en las referencias (Graves 1906; Romhan de la Vega *et al.*, 1994). Conforme aumenta n , aún una unidad, el trabajo algebraico se vuelve considerablemente más complejo que el caso previo.

Se han obtenido como ejercicio, las ecuaciones de volumen seccional para geometrías de la función generatriz correspondientes a $n= 4, 5, 6, 7, 8$ y 9 . Hasta donde se tiene conocimiento estas ecuaciones aparecen explícitamente por vez primera en esta tesis. Se pueden obtener como ejercicio académico las ecuaciones correspondientes a cualquier otra $n>9$, pero no tienen interés de aplicación en el campo forestal. En algunas referencias (Picos-Martín y Cogolludo, 2007), se menciona que, en ocasiones se obtiene un mejor ajuste, para modelar un tronco de árbol con una geometría que corresponda a una n mayor que 3. Los perfiles correspondientes a $n=4$ y 5 pueden observarse en la figura 5.1,

y compararse con el de caso del neiloide. En tal situación, la presente tesis proporciona explícitamente las ecuaciones de volumen seccional que deberían emplearse.

6.2 Sobre los resultados de establecer una analogía con un proceso de Bernoulli.

En este caso, se observa que si se toma en cuenta la simetría de s y S y el orden de aparición de las mismas, como ocurre con el problema estadístico, a cada posible salida del experimento le corresponde una media geométrica bien definida. Es difícil que esta analogía ocurra solo por casualidad, se intuye que ambos problemas tienen conexión pero no se puede determinar la misma solo a partir de esa información. No se ve cómo se pueda derivar o establecer alguna relación formal que pueda expresarse matemáticamente. Aún así, los resultados en este caso proporcionaron un aliciente más para continuar con la búsqueda.

En el problema estadístico, es muy importante el orden de aparición de s y S . En el caso de las medias geométricas no es así porque es una simple operación matemática. Sin embargo, tomando en cuenta la propiedad de simetría entre s y S en la ecuación [3.13], es casi posible establecer una relación entre el espacio muestral de las posibles salidas del problema estadístico de lanzar una moneda tres veces y el espacio de las medias geométricas posibles, según la misma ecuación, en el problema de volumen seccional, para áreas de sección transversal S y s , para $n=3$. Tomando en cuenta el orden mencionado se puede establecer estrictamente dicha relación.

6.3 Sobre la relación obtenida entre la función generatriz de los tipos dendrométricos clásicos normalizada y la función de distribución beta.

Se ha encontrado una relación entre la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos y una función de distribución beta particular. De acuerdo a la ecuación [5.11], ésta es,

$$y^2 = \left(\frac{1}{n+1} \right) f_{beta}(\alpha = n+1, \beta = 1, x)$$

Por su parte, en mediciones forestales, no es solo de interés la función generatriz (Y), como función de la altura (X) que proporciona la función de perfil de los tipos

dendrométricos clásicos, sino, la integral del producto πY^2 (el área de la sección transversal como función de la altura, $S(X) = \pi Y^2$), con respecto a dicha altura, para un intervalo determinado, lo que representa el volumen de un truncado del tipo dendrométrico clásico correspondiente al intervalo en cuestión.

El volumen V de un truncado de solido de revolución que va de $X=X_1$ a $X=X_2$, está dado por (Dieguez-Aranda, *et al.*, 2003, Romhan de la Vega *et al.*, 1994).

$$V = \int_{X_1}^{X_2} S(X) dX = \pi A \int_{X_1}^{X_2} X^n dx = \pi A \left(\frac{X_2^{n+1}}{n+1} - \frac{X_1^{n+1}}{n+1} \right). \quad [6-1]$$

Si se define a $S(x)$ como $S(x) = \pi y^2 = \pi x^n$, se puede demostrar que en términos de la altura normalizada, x ,

$$\int_{x_1}^{x_2} S(x) dx = \pi \left(\frac{x_2^{n+1}}{n+1} - \frac{x_1^{n+1}}{n+1} \right) = \frac{V}{AH^{n+1}} = \frac{V}{HY_H^2}.$$

Haciendo uso también de la ecuación [5.11], se tiene que

$$\frac{V}{HY_H^2} = \int_{x_1}^{x_2} S(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \pi y^2 dx = \pi \left(\frac{1}{n+1} \right) \int_{x_1}^{x_2} f_{beta}(x) dx \quad [6.2]$$

o bien,

$$V = \pi HY_H^2 \left(\frac{1}{n+1} \right) \int_{x_1}^{x_2} f_{beta}(x) dx . \quad [6.3]$$

Pero la integral de la derecha en [6.3], por definición en estadística, corresponde a la probabilidad de que x este entre x_1 y x_2 . Si se denota dicha probabilidad como $P(x_1 < x < x_2)$, entonces la ecuación [6.3] puede expresarse como

$$V = \pi HY_H^2 \left(\frac{1}{n+1} \right) P(x_1 < x < x_2) \quad [6.4]$$

De esta forma, el volumen de un truncado de tipo dendrométrico clásico, puede expresarse en términos de una probabilidad obtenida mediante la función beta para el intervalo correspondiente. Esto define, una relación e interpretación directa del problema de los tipos dendromáticos clásicos con base en conceptos estadísticos.

6.4 Sobre la relación obtenida entre la función de distribución beta y la función de distribución binomial

La relación encontrada entre las funciones de distribución beta y binomial está dada por

$$f_{beta}(\alpha = N + 1, \beta = 1, x = p) = (N + 1)f_{bin}(N, k, p)$$

o bien,

$$f_{bin}(N, k, p) = \frac{1}{N + 1} f_{beta}(\alpha = N + 1, \beta = 1, x = p)$$

Entonces, la función de distribución binomial resulta ser un caso particular de la función de distribución beta.

6.5 Relación entre la función generatriz de los tipos dendrométricos clásicos normalizada y la función de distribución binomial.

Se ha encontrado una relación entre la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos y la distribución binomial, dada por la ecuación [5.14]

$$f_{bin}(k = N = n, p = x) = x^n = y^2$$

Esta igualdad se visualiza en las figuras 5.2 y 5.3, que constituyen la demostración gráfica de dicha relación.

Esto representa un resultado muy importante, ya que confirma lo que se había intuido en la sección 5.2, *la potencia n de la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos*

debe corresponder con un proceso de n ensayos de Bernoulli. Por lo tanto, debe ser el mismo parámetro n , el que debe aparecer en la distribución binomial correspondiente. La probabilidad de un evento individual, p , corresponde a la altura normalizada, x , de la ecuación generatriz respectiva.

La función

$$f_{bin}(k = N = n, p = x) = x^n$$

Representa la probabilidad de que en un proceso o experimento que consista de n lanzamientos con probabilidades individuales $p=x=(X/H)$, resulten n éxitos.

6.6 Demostración de consistencia entre los parámetros de la función de distribución beta que conectan con la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos normalizada y la función de distribución binomial.

En esta sección, de una forma alternativa, se demostrarán nuevamente los resultados discutidos en la sección previa, a través del análisis de los parámetros de forma que conectan a la función beta tanto a la ecuación generatriz mencionada como a la función binomial.

Los parámetros de forma de la función beta que la conectan con la función generatriz están dados por

$$\alpha = n + 1, \quad \beta = 1.$$

Por su parte, los parámetros de forma de la función beta que la conectan con la función de distribución binomial, están dados por

$$\alpha - 1 = k, \quad \beta - 1 = N - k \quad \text{ó} \quad \alpha = k + 1, \quad \beta = N - k + 1$$

Además, en este último caso $x=p$.

Si se desea que el problema sea consistente, en general, entonces los parámetros de forma de la función de distribución beta, deben ser los mismos en ambos casos. Es decir,

$$n + 1 = k + 1$$

y

$$1 = N - k + 1$$

De donde se obtiene que $n=k$ y $N=k$. Por lo tanto, $N=k=n$, que confirma lo que se encontró al asociar a la ecuación generatriz con la distribución binomial, según se discutió en la sección previa.

6.7 Interpretación estadística de la ecuación general de volumen seccional

El volumen de un truncado de los tipos dendrométricos clásicos está dado por la ecuación general de volumen seccional [3.13],

$$V = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^n \sqrt[n]{S^{n-i} s^i} \right) L$$

en donde $S = \pi Y_2^2 = \pi A X_2^n$, $s = \pi Y_1^2 = \pi A X_1^n$ y $L = X_2 - X_1$.

Haciendo uso de la ecuación [6.3] para V , se obtiene la siguiente relación

$$\pi H Y_H^2 \left(\frac{1}{n+1} \right) \int_{x_1}^{x_2} f_{beta}(x) dx = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^n \sqrt[n]{S^{n-i} s^i} \right) L. \quad [6.5]$$

Eliminando el factor $(1/n+1)$ en ambos lados de la ecuación [6.5], resulta

$$\pi H Y_H^2 \int_{x_1}^{x_2} f_{beta}(x) dx = \left(\sum_{i=0}^n \sqrt[n]{S^{n-i} s^i} \right) L. \quad [6.6]$$

Si se definen áreas de sección transversal para las variables normalizadas, como $S_1 = \pi y_1^2 = \pi x_1^n$ y $S_2 = \pi y_2^2 = \pi x_2^n$, se puede demostrar que

$$\pi \int_{x_1}^{x_2} f_{beta}(x) dx = \left(\sum_{i=0}^n \sqrt[n]{S_1^{n-i} S_2^i} \right) l \quad [6.7]$$

en donde $l = x_2 - x_1$, o bien,

$$\int_{x_1}^{x_2} f_{beta}(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\sum_{i=0}^n \sqrt[n]{S_1^{n-i} S_2^i} \right) l. \quad [6.8]$$

De esta forma, se observa que las medias geométricas generalizadas de las secciones transversales S_1 y S_2 , también permiten obtener la misma probabilidad que se obtiene

mediante la función de distribución beta en este caso. Esto representa una interpretación para las medias geométricas generalizadas dentro de la misma estadística.

En lenguaje de probabilidades, la ecuación [6.7] queda como

$$\left(\sum_{i=0}^n \sqrt[n]{S_1^{n-i} S_2^i} \right) l = \pi P(x_1 < x < x_2). \quad [6.9]$$

Pero el lado izquierdo se refiere a áreas de sección transversal y el derecho a alturas. Sin embargo, cuando $x = x_1$, $S(x) = S_1 = \pi y_1^2 = \pi x_1^n$. Similarmente, cuando $x = x_2$, $S(x) = S_2 = \pi y_2^2 = \pi x_2^n$. Por lo tanto, la probabilidad de que x este entre x_1 y x_2 , $P(x_1 < x < x_2)$, debe corresponder a la probabilidad de que $S(x)$ este entre S_1 y S_2 . Si se denota como $P(S_1 < S(x) < S_2)$ a esta última, entonces, la ecuación [6.10], se puede escribir como

$$\left(\sum_{i=0}^n \sqrt[n]{S_1^{n-i} S_2^i} \right) l = \pi P(S_1 < S(x) < S_2). \quad [6.10]$$

Utilizando la expresión [6.10] en la ecuación general de volumen seccional, se tiene que

$$V = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^n \sqrt[n]{S_1^{n-i} S_2^i} \right) l = \left(\frac{1}{n+1} \right) \pi P(S_1 < S(x) < S_2) \quad [6.11]$$

Por lo tanto, excepto por un factor, la ecuación general de volumen seccional representa también una probabilidad, pero con relación a áreas de sección transversal. Esta es finalmente la relación e interpretación que se estaba buscando en este trabajo de tesis y con ello se consigue el objetivo general propuesto en la misma.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

De acuerdo con los resultados de la presente tesis, se ha logrado confirmar la idea de interpretar a la ecuación general de volumen seccional (ecuación [3.13]) desde un punto de vista estadístico (Cruz de León, 2010). Se ha demostrado en esta tesis, la conjetura propuesta por dicho autor, que basándose en la estructura matemática de la ecuación en cuestión, sugiere una relación e interpretación con bases estadísticas.

En esta tesis se han encontrado relaciones específicas con estadística, no solo de la ecuación general de volumen seccional, sino del tema completo de la teoría clásica de la forma de un tronco con temas estadísticos bien conocidos en la literatura.

Se ha identificado a la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos, normalizada, con un caso particular de la función de distribución beta en estadística. Lo anterior conduce a darle un sentido e interpretación estadística en términos de una probabilidad, al volumen de un segmento de sólido de revolución correspondiente a las geometrías clásicas.

Por otro lado, se encuentra que la función de distribución binomial es a su vez un caso particular de la función beta. De esta forma, se encuentra también una relación entre la función generatriz de los tipos dendrométricos clásicos normalizada con una función binomial.

El parámetro n que aparece en la notación estándar de una distribución binomial, resulta corresponder precisamente con la potencia de la ecuación generatriz que define a los tipos dendrométricos clásicos. Lo anterior, se demostró explícitamente en esta tesis. Con este resultado se confirma la relación que al inicio de este trabajo se percibía entre ambos problemas cuando se pensó asociar el tema con un problema estadístico de dos salidas,

Se asociaron las posibles salidas de un proceso de n ensayos de Bernoulli con las medias geométricas generalizadas posibles de definir para n con dos variables aleatorias.

Las relaciones entre la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos, la función de distribución beta y la función de distribución binomial, pueden resumirse en la siguiente expresión

$$y^2 = f_{bin}(k = N = n, p = x) = \frac{1}{n+1} f_{beta}(\alpha = n + 1, \beta = 1, x) = x^n .$$

Como puede verse, la probabilidad de un ensayo individual, p , corresponde a la altura normalizada de la ecuación generatriz de los tipos dendrométricos clásicos normalizada, $x=(X/H)$, en donde X es la altura común y H la altura total del tipo dendrométrico correspondiente. Por lo tanto, x representa una variable aleatoria para el caso estadístico. Por su parte, el volumen de un truncado de sólido de revolución cuyos extremos están en $X=X_1$ y $X=X_2$ corresponde precisamente con la probabilidad de que la variable aleatoria x este entre $x=x_1=(X_1/H)$ y $x=x_2=(X_2/H)$.

Finalmente, como la ecuación general de volumen seccional también representa el volumen de un segmento de tipo dendrométrico y este está relacionado con probabilidad, con respecto a alturas, se deduce que la ecuación general también debe representar una probabilidad, pero en relación con las áreas transversales correspondientes.

Lo anterior tiene sentido, ya que, como se ha mencionado, el problema del volumen de un sólido de revolución de las geometrías clásicas puede resolverse en función de las alturas de los extremos que definen al segmento. Sin embargo esa solución no conviene para fines prácticos, en donde es preferible contar con una expresión para dicho volumen, pero en función de las áreas transversales de sus extremos. Por esa razón se han derivado ecuaciones para volúmenes seccionales. Si la primer solución tiene una interpretación probabilística en términos de las alturas de los extremos del segmento, entonces la segunda solución debe tener una interpretación probabilística en términos de las áreas de las secciones transversales de los extremos del segmento. En resumen, así como existen dos caminos posibles para obtener el volumen de un segmento de sólido de revolución de las geometrías clásicas, existen sus correspondientes dos interpretaciones estadísticas.

Con los resultados mostrados en este trabajo, se ha conseguido el objetivo general propuesto al inicio del mismo, que era encontrar una relación e interpretación de la ecuación general de volumen seccional en base a conceptos estadísticos.

Las mediciones forestales siempre han estado conectadas con estadística en relación con el muestreo y manejo de datos, así como con la propuesta de ecuaciones empíricas para determinar funciones de perfil y ecuaciones de volumen. Sin embargo, esto es muy diferente a encontrarle a esos problemas una naturaleza o interpretación estadística por sí mismos, como se ha hecho en esta tesis.

Aún cuando es poco común, la idea de conectar a las mediciones forestales con estadística, en el sentido de esta tesis, no es nueva. Existe en la literatura sobre investigación en mediciones forestales, una línea que aborda el problema de estimaciones de volumen desde un punto de vista estadístico. También, se busca desde un inicio asociar a conceptos de mediciones forestales conceptos estadísticos (Gregoire *et al.*, 1986). Esta línea de investigación fue desarrollada por matemáticos estadísticos profesionales. Se trata de literatura muy especializada sobre investigación en mediciones forestales que no fue posible revisar con detalle en la presente tesis. A primera vista, no se observa una relación directa con lo expuesto en esta tesis, pero queda pendiente ese tema. De esa teoría original se derivó posteriormente como un caso particular el conocido método del centroide en mediciones forestales (West, 2004). Cabe mencionar, que el método del centroide ha sido muy utilizado en investigación (Wood *et al.*, 1990; Wiant *et al.*, 1991; Wiant *et al.*, 1992; Wiant *et al.*, 1996, Wiant *et al.*, 2002), y también toma como geometrías de referencia a los tipos dendrométricos clásicos. Este método representa una alternativa diferente a la actual tendencia más común que es la de proponer funciones de perfil para troncos de árbol por especie.

Por otro lado, la ecuación general de volumen seccional para los tipos dendrométricos clásicos, referida en Goodwin (2009), equivalente a la de Cruz de León (2010) es utilizada como referencia para evaluar otros métodos de estimación de volumen. El trabajo de Inoue (2006) en donde determina un resultado general que relaciona los factores de forma y de superficie independientemente de la posición también toma como referencia a las geometrías clásicas. Al parecer, esto es una constante. Los tipos dendrométricos clásicos proporcionan expresiones o resultados exactos y se tomarán como sistemas de referencia cuando se intenten obtener propiedades generales o

comparar métodos en el campo de las mediciones forestales, razón por la cual han estado y estarán presentes en dicho campo, aún cuando aparezcan nuevos métodos o teorías.

En forma similar al trabajo de Cruz de León (2010), el presente trabajo de tesis se ha limitado a establecer relaciones principalmente a través de análisis y vinculación de estructuras matemáticas. Esto representa un avance en la interpretación de la ecuación general de volumen seccional. Sin embargo, de acuerdo a lo discutido en el párrafo previo, al igual que la teoría clásica de la forma en mediciones forestales, los temas estadísticos aquí involucrados, representados a través de las funciones de distribución beta y binomial, corresponden a temas de estudio muy amplios, con aplicaciones muy importantes en diversos campos. Por lo anterior, es muy probable que en este momento todavía no se alcance a tener una visión más amplia del propio significado de las relaciones encontradas, lo cual se espera sea dilucidado y ampliado en futuros trabajos de investigación.

APÉNDICE I

SIGNIFICADO DE LA MEDIA GEOMÉTRICA BÁSICA

Con la intención de entender el significado de la media geométrica básica, en el siguiente ejercicio, se hace la demostración de que el área de una elipse corresponde a un área media geométrica de dos áreas cuyos diámetros corresponden a las longitudes de sus ejes mayor y menor, respectivamente. Considérese la elipse de la figura A.1.

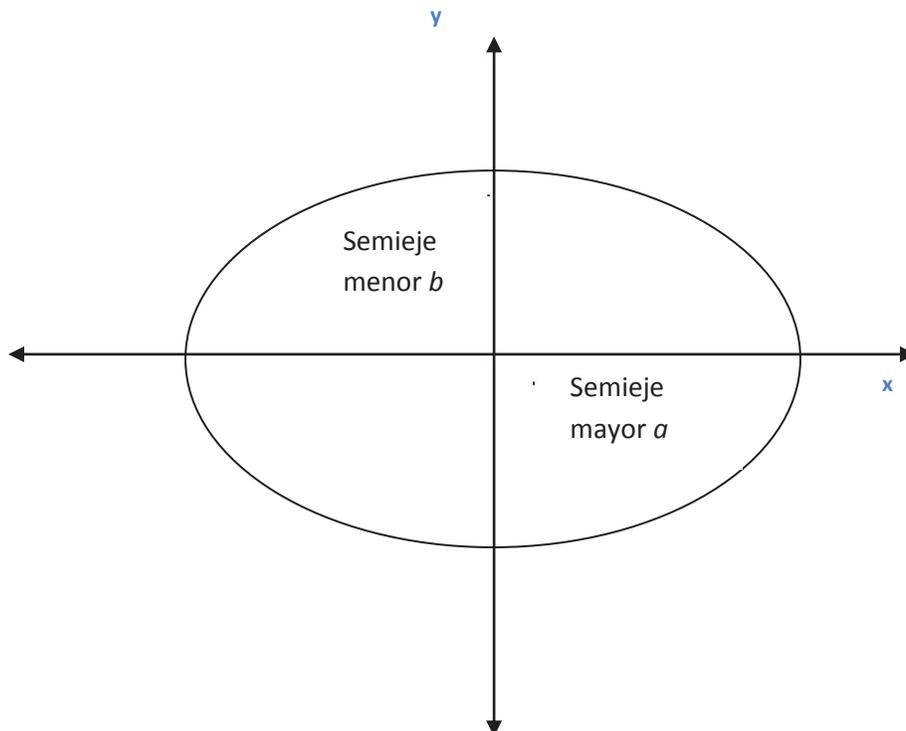


Figura A.1. Esquema estándar para representar una elipse.

En notación estándar, la ecuación de una elipse con semieje mayor a y el semieje menor b está dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

El área bajo una curva $y(x)$, de $x=x_0$ a $x=x_1$, está dada por la integral definida

$$A = \int_{x_0}^{x_1} y \, dx$$

Para determinar el área contenida en la elipse se despeja y en función de x

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Sustituyendo esta expresión en la integral, e integrando de 0 a a se tiene el área del primer cuadrante. Si se multiplica dicha integral por cuatro, se tiene el área total de la elipse como

$$A = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$$

Haciendo el cambio de variable

$$x = a \sin v$$

$$dx = a \cos v \, dv$$

y sustituyendo en la integral,

$$A = \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 (\cos v)^2 \, dv = \frac{4b}{a} a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos v)^2 \, dv$$

Si se utiliza la identidad trigonométrica $\cos^2 v = \frac{\cos 2v + 1}{2}$, entonces

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{4b}{a} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v dv = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2v + 1}{2} dv = 4ab \left(\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2v \cdot 2 dv + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \right) \\
 &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2v \cdot 2 dv + 2abv \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= ab \int_0^{\pi} \cos m dm + 2ab \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = ab \operatorname{sen} m \Big|_0^{\pi} + ab\pi = ab(0 - 0) + ab\pi \\
 &= \pi ab
 \end{aligned}$$

Si se unifica la notación estándar para una elipse con el material previamente expuesto en la definición de la media geométrica, se debe hacer el cambio de variables $a = d_M/2$ y $b = d_m/2$. Por lo tanto,

$$A = \pi ab = \pi \frac{d_m d_M}{4} = \frac{\pi d_G^2}{4} = s_G = \sqrt{s_m s_M}$$

Por lo tanto, el área media geométrica definida en la ecuación [3.4] para las áreas s_m , s_M , corresponde precisamente al área de la elipse cuyos ejes tienen longitudes d_m y d_M , respectivamente. En otras palabras, el uso de la media geométrica en mediciones forestales proporcionaría el área exacta en el caso de una elipse y sería recomendable en casos en que la sección transversal se aproxime a dicha figura.

APÉNDICE II

DERIVACIÓN DEL SEGUNDO FORMATO PARA LA MEDIA GEOMÉTRICA GENERALIZADA

A continuación se presenta la demostración de la equivalencia entre ambas expresiones para G . No se encontró dicha demostración en la literatura sobre el tema con que se cuenta actualmente, pero no representa problema su derivación. El formato original de la media geométrica generalizada es

$$G = \left(x_1^{f_1} x_2^{f_2} x_3^{f_3} \dots \dots x_k^{f_k} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Si se saca el logaritmo natural a ambos lados de la ecuación anterior, y utilizando propiedades de logaritmo, se tiene que

$$\begin{aligned} \ln G &= \ln \left(x_1^{f_1} x_2^{f_2} x_3^{f_3} \dots \dots x_k^{f_k} \right)^{\frac{1}{n}} \\ \ln G &= \frac{1}{n} \ln \left(x_1^{f_1} x_2^{f_2} x_3^{f_3} \dots \dots x_k^{f_k} \right) \\ \ln G &= \frac{1}{n} \left(\ln x_1^{f_1} + \ln x_2^{f_2} + \ln x_3^{f_3} + \dots + \ln x_k^{f_k} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(f_1 \ln x_1 + f_2 \ln x_2 + f_3 \ln x_3 + \dots + f_k \ln x_k \right) = \\ \ln G &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k f_i \ln x_i. \end{aligned}$$

Aplicando la función exponencial a ambos lados de la ecuación previa, resulta que

$$G = e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k f_i \ln x_i}$$

con lo que se completa la demostración. En el caso particular en que las frecuencias sean iguales para las todas las variables, $f_i=N$, entonces

$$G = e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k N \ln x_i}.$$

REFERENCIAS

- Alfaro-Trujillo, I. 2008. Unificación entre los métodos de aproximación del cálculo y los métodos de cubicación forestal. Tesis de Licenciatura. Facultad de Ingeniería en Tecnología de la Madera. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, Mich., México.
- Avery, T.E. and Burkhart, H.E. 2002. Forest Measurements. Mc Graw Hill. USA.
- Borghers, E. and Wessa, P. 2011. Statistics-Econometrics-Forestcasting. Office for Reserch Development and Education. Disponible en <http://www.xycoon.com>.
- Bortman, M. 1999. Elaboración de corredores o canales endémicos mediante planillas de cálculo. Rev Panam Salud Pública/Pan Am J Public Healt 5(1):1-8, 1999. Disponible en www.scielosp.org/pdf/rpsp/v5n1/5n1a1.pdf.
- Brack, C. 1999. Forest Measurement and Modeling. Disponible en sres-associated.anu.edu.au/mensuration/volume.htm.
- Bruce, D. 1982. Butt Log Volume Estimators. Forest Sci. 28(3):489-503.
- Chapman, H.H. and Meyer, W.H. 1949. Forest Mensuration. McGraw-Hill. USA. Edition. USA.
- Cruz de León, G. (2010). A general sectional volume equation for the classical geometries of tree stem. Madera y Bosques.
- Dean, T.J. and Long, J.N. 1986. Validity of Constant-stress and Elastic-instability Principles of Stem Formation in *Pinus contorta* and *Trifolium pratense*. Annals of Botany. 58:833-840.
- Devore, J. L. 1998. Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias. International Thompson Editores. México.
- Diéguez-Aranda, U., Barrio-Anta, M., Castedo-Dorado, F., Ruíz-González, A.D., Álvarez-Taboada, M.F., Álvarez-González, J.G. y Rojo-Albarea, A. 2003. Dendrometría. Mundi-Prensa. Madrid, España.

Freund, J.E., Miller, I., Miller, M. 2000. Estadística matemática con aplicaciones. Sexta Edición. Pearson-Prentice Hall. México.

Goodwin, A. 2009. A cubic tree taper model. *Australian Forestry*, **72**(2): 87-98.

Goodwin, A. 2011. Comunicación personal. La demostración de la equivalencia entre la ecuación general de volumen seccional que aparece en Goodwin (2009) y la de Cruz de León (2010) fue comunicada personalmente al Dr. Cruz de León por el profesor Goodwin en 2010. A su vez, el Dr. Cruz de León proporcionó esta información para la presente tesis.

Graves, H.S. 1906. *Forest Mensuration*. John Wiley & Sons. USA.

Gregoire, T.G., ValIntine, H. T. and Furnival, G. M. 1986. Estimation of bole volume by importance sampling. *Can. J. For. Res.* **16**: 554-557.

Inoue, A. 2006. A model for the relationship between form-factors for stem volume and those for stem surface area in coniferous species. *J. For. Res.* 11:289-294.

Kirkwood, B. 1988. *Essentials of medical statistics*. Blackwell Science. Oxford.

Larson, P.R. 1963. Stem Form Development of Forest Trees. *For. Sci. Mon.* 5.

Lynch, S.M. 2006. *Introduction to applied Bayesian statistics and estimation for social scientists*. Springer.

McMahon, T. 1973. Size and Shape in Biology. *Science*. 179: 1201-1204.

Philip, M. S. 1994. *Measuring Trees and Forests*. Second Edition. CABI Publishing. London, UK.

Picos-Martín, J. y Cogolludo, M.A. 2007. *Apuntes de Dasometría*. Escola Universitaria de Enxeñaría Técnica Forestal. Universidad de Vigo- España.

Romahn de la Vega, C.F., Ramírez-Maldonado, H. y Treviño-García, J.L. 1994. *Dendrometría*. Universidad Autónoma Chapingo. México.

Ross, S. M. 2000. *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*. Segunda Edición. McGraw-Hill. México.

Ruiz-Muñoz, D. 2004. Manual de estadística. Editado por eumed-net. Disponible en <http://www.bibliotecavirtual.lasalleurubamba.edu.pe/...medidasdeforma.htm>.

Uranga-Valencia, L.P. 2008. Aplicación del Modelo Cónico Segmentado a los Tipos Dendrométricos Clásicos como Función del Número de Segmentos. Tesis de Maestría. Facultad de Ingeniería en Tecnología de la Madera, Universidad Michoacána de San Nicolás de Hidalgo, Morelia Michoacán, México.

Van Laar, A. and Akça, A. 2007. Forest Mensuration. Springer. Netherlands.

Vargas-Sabadias, A. 1996. Estadística descriptiva e inferencial. Compobell S.L., Murcia, España.

West, P.W. 2004. Tree and Forest Measurement. Springer-Verlag. Berlín.

Wiant, H.V., Wood, G. B. and Forslund, R.R. 1991. Comparison of centroid and paracone estimates of tree volume. Can. J. For. Res. **21**: 714-717.

Wiant, H.V., Wood, G.B. and Gregore, T.G. 1992. a) Practical guide for estimating the volume of saqmples tree using either importance or centroid sampling. For. Ecol. Manage. **49**: 333-339. b) Wiant, H.V., Wood, G.B. and Furnival, G.M. 1992. Estimating log volume using the centroid position. For. Sci. **38**(1):187-191.

Wiant, H.V., Wood, G.B. and Williams, M. 1996. Comparison of three modern methods for estimating volume of sample trees using one or two diameter measurements. For. Ecol. Manage. **83**: 13-16

Wiant, H.V., Spangler, M.L. and Baumgras, J. E. 2002. Comparison of estimates of hardwood bole volume using importance sampling, the centroid method, and some taper equations. NJAF **19**(3):141-142.

Wood, G.B., Wiant, H. V. Jr., Loy, R.J. and Miles, J.A. 1990. Centroid Sampling: A variant of importance sampling for estimating the volume of sample trees of radiate pine. Forest Ecology and Management. **36**:233-243.