



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS
DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ ”
Posgrado en Ciencias en Ingeniería Física

SINCRONIZACIÓN EN LOS OSCILADORES
DUFFING-VAN DER POL Y Φ^6 DUFFING

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:
**MAESTRO EN CIENCIAS EN
INGENIERÍA FÍSICA**

PRESENTA:

Cynthia Ramos Erape

ASESORES:

Dr. Joaquín Estevez Delgado

Dr. Ulises Uriostegui Legorreta

Morelia, Mich. Febrero 2024.



*A mi madre Fidelina,
hasta el cielo,
gracias por la vida.
Una promesa jamás se rompe.*

Agradecimientos

Agradezco a mi madre Fidelina Erape Rojas, por mi vida y sus enseñanzas, que se quedan conmigo por siempre, un abrazo hasta el cielo, donde me miras y me cuidas. Agradezco a mi padre Ing. Rolando Ramos Baltazar, por sus consejos, los regaños, comprensión y apoyarme en todo lo bueno y malo que hago y dejo de hacer.

A mis hermanas Patricia, Erashamann y Marcela, por su apoyo y comprensión, en el camino juntas.

A mi tía, Ing. Magdalena Erape Rojas, por sus consejos, apoyo moral y motivarme a ser una mujer valiente y resiliente .

A mi gran amiga Alicia Rúan, por no dejarme sola, por su apoyo, por escucharme y estar siempre.

A mis asesores: Dr. Joaquín Estévez, por su gran apoyo, comprensión y paciencia en todo el proceso que se llevó acabo para este trabajo.

Dr. Ulises Uriostegui, por creer en mi, por su paciencia, comprensión y por brindarme la oportunidad de trabajar con usted y culminar este trabajo.

M.C. Gabriel Arroyo y Dr. Dagoberto Cardona, por sus observaciones y por ser parte de este trabajo.

Resumen

En este trabajo se estudia una configuración maestro-esclavo para obtener la sincronización entre el oscilador Duffing-van der Pol con potencial asimétrico y el oscilador Φ^6 Duffing. Para esta configuración, comparamos los sistemas cuando se usa el acoplamiento disipativo y uno que combina los acoplamientos elásticos y disipativos. Analizamos la fuerza de acoplamiento para encontrar el rango donde se logra la sincronización entre los osciladores. Encontramos sincronización entre los osciladores para valores grandes de la fuerza de acoplamiento. Los resultados numéricos demuestran que para el acoplamiento disipativo sale la sincronización parcial mientras que para el otro sale la sincronización completa.

Palabras clave: Dinámica no lineal, control del caos, osciladores no lineales, acoplamiento, sincronización.

Abstract

In this work a master-slave configuration is studied to obtain synchronization between the Duffing-van der Pol oscillator with asymmetric potential and the Φ^6 Duffing oscillator. For this configuration, we compare the systems when the dissipative coupling and one that combines the elastic and dissipative couplings are used. We analyze the coupling strength to find the range where synchronization between the oscillators is achieved. We found synchronization between the oscillators for large values of the coupling strength. The numerical results demonstrate that for the dissipative coupling exits partial synchronization while for the other exits complete synchronization.

Keywords: Nonlinear dynamics, control of chaos, nonlinear oscillators, coupling, synchronization.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	IV
Abstract	V
Introducción	3
1. Oscilador forzado: ecuación diferencial	4
1.1. Términos transitorio y estacionario	7
1.2. Oscilador no lineal	9
1.2.1. Oscilador no lineal forzado I	10
1.2.2. Oscilador no lineal forzado II, frecuencias de combinación	14
2. Sistemas dinámicos	17
2.1. Estabilidad del sistema	17
2.2. Caracterización del Espacio Fase	18
2.3. Teorema de Hartman-Grobman	21
2.4. Teorema de Poincaré-Bendixson	22
2.5. Oscilador de van der Pol-Duffing	24
2.6. Oscilador de Φ^6 Duffing	28
3. Control y sincronización de sistemas caóticos	32
3.1. Introducción	32
3.2. Métodos de control caos	33
3.2.1. Control a través de un parámetro accesible del sistema	34
3.2.2. Control por inyección de señales externas	34
3.2.3. Técnicas clásicas de Ingeniería de control	35
3.3. El problema general de la sincronización	35
3.4. Sincronización de sistemas caóticos	36
3.4.1. Métodos de sincronización	37
3.4.2. Tipos de Sincronización	39
3.4.3. Método de Pecora y Carroll (PC)	40
3.4.4. Método de APD.	41
4. Sincronización maestro-esclavo	43
4.1. Sincronización mediante acoplamiento disipativo	43
4.1.1. Análisis analítico	46

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	1
4.2. Sincronización mediante acoplamiento elástico y disipativo	48
4.2.1. Análisis analítico	51
5. Conclusiones	54
Bibliografía	55

Introducción

Desde las últimas décadas, las aplicaciones de la sincronización en sistemas caóticos han sido de gran interés para la ciencia y la tecnología. El artículo fundamental de Pecora y Carroll [1] sobre sincronización ha sido un hito en este tema. De hecho, desde entonces, han surgido varios estudios sobre sincronización entre sistemas caóticos idénticos o diferentes con el fin de mejorar y hacer más eficiente la sincronización. Tres de los osciladores no lineales forzados más estudiados son los de Rayleigh, Duffing, van der Pol y sus variantes, ya que mediante ellos se pueden modelar muchas propiedades físicas [2, 3, 4, 5].

El oscilador de van der Pol-Duffing es un sistema dinámico que combina el término disipativo del oscilador de van der Pol con el potencial del oscilador de Duffing [6]. El potencial en el oscilador de van der Pol-Duffing es del tipo Φ^4 . Bountis et. al, estudió la no integrabilidad de una familia de osciladores van der Pol-Duffing a través de propiedades analíticas en el plano complejo al demostrar que existe una foliación infinita en este sistema [7]. Además, Rajasekar et. al, han demostrado que este sistema con potencial de doble pozo presenta un caos de herradura de Smale cuando se producen intersecciones transversales de las órbitas homoclinicas [8]. Por otro lado, el oscilador de Φ^6 Duffing y sus variantes, se caracterizan por un potencial de tipo Φ^6 , dan dinámicas más complejas que los potenciales Φ^2 y Φ^4 [9, 10]. Si los osciladores Φ^6 no son idénticos, la dinámica resulta más interesante y compleja y entonces aumentan las aplicaciones potenciales de estos sistemas, por ejemplo, en comunicaciones altamente seguras. Los principales estudios sobre estos sistemas están dedicados al análisis de su dinámica, en particular sobre la configuración de potencial de tres pozos [11, 12, 13, 14].

Mencionemos que la dinámica basada en osciladores no lineales idénticos o distintos que presentan diferentes atractores es de interés actual y podría generar información importante. Un modelo de varios osciladores no lineales acoplados, cada uno en su propio régimen caótico, podría ser útil para estudiar fenómenos resonantes o de histéresis basados en sistemas físicos y tecnológicos. La sincronización ocurre en varios sistemas naturales, biológicos y tecnológicos, por ejemplo, en colonias de luciérnagas, células cardíacas, sistemas nerviosos, ciclos circadianos y láseres acoplados [15, 16]. Por lo tanto, comprender las interacciones mutuas entre diferentes osciladores no lineales acoplados y su sincronización resulta un tema de investigación importante.

El control del caos se refiere a la manipulación de los comportamientos caóticos de algunos sistemas no lineales complejos para modificar las características del sistema. Existen varios métodos para controlar el caos, como activo, adaptativo, retroalimentación lineal, bang-bang, óptimo, control de modo deslizante, entre otros [17, 18, 19, 20]. Se han desarrollado varios tipos de sincronización, que juegan un papel muy importante en el estudio de los sistemas caóticos, por ejemplo: sincronización de fase, anticipada,

generalizada, proyectiva, completa, híbrida, anti-, multimodal, forzada, de itinerario y proyectiva híbrida [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27].

En cuanto al acoplamiento entre los osciladores van der Pol y Duffing, se pueden enumerar tres acoplamientos diferentes: acoplamiento elástico, acoplamiento disipativo y acoplamiento giroscópico [28, 29, 30, 31, 32, 33]. Entre las distintas formas de acoplamiento, las más empleadas son las disipativas y elásticas [32, 33, 34, 35]. En un artículo anterior [31], se propuso un enfoque distinto para sincronizar dos osciladores no lineales diferentes, mediante el uso de los acoplamientos antes mencionados. Urióstegui et. al [32, 33] estudió la sincronización entre los osciladores de van der Pol y Duffing utilizando el acoplamiento elástico, disipativo y una combinación de ambos. Se encontró que el acoplamiento elástico no conduce a ninguna sincronización, mientras que, con el acoplamiento disipativo, se alcanza una sincronización parcial. Para la combinación de ambos acoplamientos se encontró que existe una sincronización completa. En este trabajo se estudian y comparan dos acoplamientos diferentes para el oscilador Duffing-van der Pol con potencial asimétrico y el oscilador Duffing Φ^6 , a saber: el acoplamiento disipativo y uno que combina los acoplamientos elástico y disipativo propuesto por Urióstegui [31]. Esto se hace tomando el oscilador Duffing-van der Pol como sistema maestro y el oscilador Φ^6 Duffing como sistema esclavo.

La estructura del trabajo es la siguiente: en el Capítulo 1 se hace una breve introducción de las soluciones de la ecuación del oscilador forzado y del oscilador no lineal forzado. Capítulo 2, se centra en la dinámica y estabilidad de los osciladores van der Pol-Duffing y Φ^6 Duffing. En el Capítulo 3, se estudian algunos métodos de control y sincronización de sistemas caóticos. En el Capítulo 4, analizamos y comparamos dos tipos de acoplamientos utilizando los osciladores van der Pol-Duffing y Φ^6 Duffing en el esquema maestro-esclavo y finalmente en el Capítulo 5 presentamos las conclusiones.

Capítulo 1

Oscilador forzado: ecuación diferencial

Como primer paso en el estudio del comportamiento de un oscilador cuando se encuentra sometido a una fuerza externa, empezamos por analizar las ecuaciones que describen el sistema cuando esta es de tipo armónico. Explícitamente, consideramos la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega_F t) \iff \ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_F t) \quad (1.1)$$

Aquí la ecuación diferencial ya no es homogénea, tiene un término $\frac{F_0}{m} \cos(\omega_F t)$ que es función de t e independiente de x , una *fuerza*. Para subrayar que ω_F es la frecuencia angular de la fuerza externa, i.e., no es una característica propia del sistema, mantendremos el subíndice F en los próximos apartados.

La solución general $x(t)$ de la ecuación de movimiento se obtiene como combinación lineal de una solución general $x_{[h]}(t)$ de la ecuación diferencial homogénea $\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ y una solución particular $x_{[p]}(t)$ de la ecuación completa (inhomogénea) $\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_F t)$, como la ecuación sigue siendo lineal, aquí rige el principio de superposición. Las soluciones de la ecuación homogénea son sencillamente las consideradas al estudiar el sistema amortiguado libre, y son de tres tipos diferentes, según los valores de Γ y ω_0 .

- Para $\omega_0^2 > \Gamma^2$ (oscilaciones amortiguadas), con $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}$, con

$$x_{[h]}(t) = e^{-\Gamma t} [\alpha \cos(\omega_1 t) + \beta \sin(\omega_1 t)].$$

- Para $\omega_0^2 = \Gamma^2$ (amortiguamiento crítico), con

$$x_{[h]}(t) = (\alpha + \beta t)e^{-\Gamma t}.$$

- Para $\omega_0^2 < \Gamma^2$ (sistema sobreamortiguado), con

$$x_{[h]}(t) = e^{-\Gamma t} \left[\alpha e^{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} + \beta e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} \right].$$

En cada caso, las constantes α y β quedarán determinadas por las condiciones iniciales dadas. Nótese que, al tener ahora un segundo término en la solución $x(t)$, el correspondiente a la solución particular $x_{[h]}(t)$, las constantes α y β no van a tener los valores, en función de las condiciones iniciales $\{x(0), \dot{x}(0)\}$, ya calculados en ausencia de fuerza externa: las condiciones iniciales se aplican a la solución completa $x(t) = x_{[h]}(t) + x_{[p]}(t)$, cuestión que abordaremos en detalle más adelante.

Para obtener una solución particular de forma sencilla, sustituimos una función del tipo $A e^{i\omega t}$ (con A y ω constantes, $A \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{R}$) en la ecuación diferencial completa; si existen A y ω tales que la ecuación se cumple, bastará tomar la parte real de $A e^{i\omega t}$ para tener la solución particular deseada, cosa que demostramos a continuación:

si

$$x_{\mathbb{C}}(t) = A e^{i\omega t}$$

donde

$$\operatorname{Re}[x_{\mathbb{C}}] = \operatorname{Re}[A]\operatorname{Re}[e^{i\omega t}] - \operatorname{Im}[A]\operatorname{Im}[e^{i\omega t}]$$

derivando

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Re}[x_{\mathbb{C}}] = -\omega\operatorname{Re}[A]\operatorname{Im}[e^{i\omega t}] - \omega\operatorname{Im}[A]\operatorname{Re}[e^{i\omega t}],$$

entonces

$$\operatorname{Re}\left[\frac{dx_{\mathbb{C}}}{dt}\right] = \operatorname{Re}[i\omega A e^{i\omega t}] = -\omega\operatorname{Re}[A]\operatorname{Im}[e^{i\omega t}] - \omega\operatorname{Im}[A]\operatorname{Re}[e^{i\omega t}] = \frac{d}{dt}\operatorname{Re}[x_{\mathbb{C}}]$$

de aquí que derivar $x_{\mathbb{C}}(t) = A e^{i\omega t}$ con respecto al tiempo y tomar la parte real de $x_{\mathbb{C}}(t)$ son operaciones que conmutan (se puede demostrar de forma análoga la misma propiedad para la parte imaginaria). Ahora bien, si mantenemos una fuente real $\frac{F_0}{m} \cos(\omega_F t)$, no conseguiremos una solución satisfactoria: extendemos también la fuerza al campo complejo de modo que tenga la parte real deseada, es decir, consideramos sencillamente una fuerza externa $\frac{F_0}{m} e^{i\omega_F t}$, puesto que $\operatorname{Re}\left[\frac{F_0}{m} e^{i\omega_F t}\right] = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_F t)$. Una vez obtenidos los valores de A y de ω en la extensión *compleja* de la ecuación diferencial, tomaremos la parte real de $x_{\mathbb{C}}(t) = A e^{i\omega t}$, solución de nuestro problema *real*. Explícitamente,

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega_F t) \iff \ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_F t}$$

y sustituimos $x_{\mathbb{C}} \rightarrow A e^{i\omega t}$, $\dot{x}_{\mathbb{C}} \rightarrow i\omega A e^{i\omega t}$, $\ddot{x}_{\mathbb{C}} \rightarrow -\omega^2 A e^{i\omega t}$, para obtener

$$A(-\omega^2 + i2\Gamma\omega + \omega_0^2) e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_F t}. \quad (1.2)$$

Para que la igualdad anterior se cumpla para todo t (recordemos, con A y ω constantes), es necesario que $\omega = \omega_F$. Sustituyendo $\omega \rightarrow \omega_F$ podemos eliminar las exponenciales complejas de la ecuación anterior y despejar A :

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_F^2) + i2\Gamma\omega_F} = \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega_F^2) - i2\Gamma\omega_F}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2}. \quad (1.3)$$

Hemos obtenido A y ω tales que $x_{\mathbb{C}}(t) = A e^{i\omega t}$ es solución de la Ec. (1.2), $\operatorname{Re}[x_{\mathbb{C}}(t)]$ es por tanto solución de la ecuación (1.1). Resulta útil expresar la amplitud A , compleja

tanto en forma rectangular como en forma polar. Podemos leer la forma rectangular directamente de ecuación (1.3), donde

$$A = \operatorname{Re}[A] + i \operatorname{Im}[A],$$

con

$$\operatorname{Re}[A] = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{(\omega_0^2 - \omega_F^2) + (2\Gamma\omega_F)^2}, \quad \operatorname{Im}[A] = \frac{F_0}{m} \frac{-2\Gamma\omega_F}{(\omega_0^2 - \omega_F^2) + (2\Gamma\omega_F)^2} \quad (1.4)$$

para expresarla en forma polar, donde

$$A = a e^{-i\delta},$$

con $a=|A|$ y $\delta = -\arg A$, donde

$$a = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2}}, \quad \delta = \tan^{-1} \left[\frac{2\Gamma\omega_F}{\omega_0^2 - \omega_F^2} \right]. \quad (1.5)$$

Esto nos permite escribir dos formas equivalentes de la solución particular $x_{[p]}(t) = \operatorname{Re}[Ae^{i\omega t}]$,

$$\begin{aligned} x_{[p]}(t) &= \operatorname{Re}[A]\operatorname{Re}[e^{i\omega_F t}] - \operatorname{Im}[A]\operatorname{Im}[e^{i\omega_F t}], \\ x_{[p]}(t) &= \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega_F^2) \cos(\omega_F t) + 2\Gamma\omega_F \sin(\omega_F t)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2}, \\ x_{[p]}(t) &= \operatorname{Re}[a e^{i(\omega_F t - \delta)}] = a \cos(\omega_F t - \delta), \\ x_{[p]}(t) &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2} \cos \left(\omega_F t - \tan^{-1} \left[\frac{2\Gamma\omega_F}{\omega_0^2 - \omega_F^2} \right] \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Desde un principio podíamos haber buscado soluciones particulares de tipo $\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$ o bien de tipo $\alpha \cos(\omega t + \varphi)$; el resultado final hubiera sido el mismo. Al margen de estas consideraciones, nótese que las constantes $\operatorname{Re}[A]$, $\operatorname{Im}[A]$, a y δ dependen tanto de las características del sistema (ω_0 , m y Γ o equivalentemente k , m y Γ) como de las características de la fuerza externa (F_0 y ω_F).

Por completitud (y para uso posterior), escribimos también de forma explícita la solución estacionaria $y_{[p]}(t)$ cuando la dependencia armónica de la fuente involucra $\sin(\omega_F t)$ en lugar de $\cos(\omega_F t)$:

$$\ddot{y} + 2\Gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_F t). \quad (1.7)$$

Es

$$y_{[p]}(t) = \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega_F^2) \sin(\omega_F t) + 2\Gamma\omega_F \cos(\omega_F t)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2}, \quad (1.8)$$

o, equivalentemente

$$y_{[p]}(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2} \sin \left(\omega_F t - \tan^{-1} \left[\frac{2\Gamma\omega_F}{\omega_0^2 - \omega_F^2} \right] \right). \quad (1.9)$$

1.1. Términos transitorio y estacionario

Según lo expuesto en el apartado anterior, la solución completa $x(t)$ de la ecuación de movimiento con una fuente Ec. (1.1), tiene dos términos:

$$x(t) = x_{[h]}(t) + x_{[p]}(t)$$

- El primero, $x_{[h]}(t)$, solución de la ecuación de movimiento *sin fuente*, corresponde a uno de los tipos de movimiento amortiguado, cuya amplitud decrece a un factor $e^{-\Gamma t}$; al cabo de tiempos $t \gg \Gamma^{-1}$, $x_{[h]}(t)$ será completamente ignorable. El término $x_{[h]}(t)$ es el término *transitorio*. La forma de $x_{[h]}(t)$ varía según nos encontremos en el caso amortiguado, amortiguado críticamente o sobreamortiguado.
- El segundo, $x_{[p]}(t)$, solución particular de la ecuación de movimiento *con fuente* corresponde a un movimiento oscilatorio cuya amplitud *es constante* no decrece con el paso del tiempo. El término $x_{[p]}(t)$ es el término *estacionario*. La forma de $x_{[p]}(t)$ es independiente del caso, en cuanto al amortiguamiento, en que nos encontremos; además, está completamente fijada, no contiene constantes que dependan de condiciones iniciales.

Para especificar la solución completa en términos de unas condiciones iniciales $\{x(0), \dot{x}(0)\}$ basta entender dos aspectos: en primer lugar, las únicas constantes arbitrarias que las condiciones iniciales deben fijar están en el término transitorio $x_{[h]}(t)$; en segundo lugar constatamos que, al aplicar las condiciones iniciales a la solución completa, obtenemos

$$x(0) = x_{[h]}(0) + x_{[p]}(0), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_{[h]}(0) + \dot{x}_{[p]}(0),$$

que reescribimos trivialmente como

$$x(0) - x_{[p]}(0) = x_{[h]}(0), \quad \dot{x}(0) - \dot{x}_{[p]}(0) = \dot{x}_{[h]}(0).$$

¿Qué nos permite este par de ecuaciones? Nos permite fijar las constantes arbitrarias de la solución transitoria, $\{x_{[h]}(0), \dot{x}_{[h]}(0)\}$ en términos de las *condiciones iniciales* $\{x(0), \dot{x}(0)\}$ y de los *valores iniciales de la solución estacionaria* $\{x_{[p]}(0), \dot{x}_{[p]}(0)\}$ (puesto que, como ya hemos señalado, la solución estacionaria ya ha quedado *completamente fijada*). Este par de ecuaciones nos permite “leer” sin esfuerzo que para fijar las constantes del término transitorio basta recuperar las expresiones correspondientes al análisis del tema anterior (oscilador amortiguado en ausencia de una fuerza externa) y aplicar las sustituciones $x(0) \mapsto x_{[h]}(0) = x(0) - x_{[p]}(0)$ y $\dot{x}(0) \mapsto \dot{x}_{[h]}(0) = \dot{x}(0) - \dot{x}_{[p]}(0)$ con

$$x_{[p]}(0) = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{(\omega_0^2 - \omega_F^2) + (2\Gamma\omega_F)^2},$$

$$\dot{x}_{[p]}(0) = \frac{F_0}{m} \frac{-2\Gamma\omega_F}{(\omega_0^2 - \omega_F^2) + (2\Gamma\omega_F)^2},$$

Equivalentemente

$$x_{[p]}(0) = a \cos \delta,$$

$$\dot{x}_{[p]}(0) = a \omega_F \sin \delta,$$

con a y δ dadas por la Ec. (1.5). Escribimos explícitamente cada uno de los casos (empleando las expresiones de $x_{[p]}(0)$ y $\dot{x}_{[p]}(0)$ con la dependencia explícita en las constantes del sistema).

- Para $\omega_0^2 > \Gamma^2$ (oscilaciones amortiguadas), con $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}$.

$$\begin{aligned}
 x(t) = e^{-\Gamma t} & \left[x(0) - \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{(\omega_0^2 - \omega_F^2) + (2\Gamma\omega_F)^2} \right] \cos(\omega_1 t) + \\
 e^{-\Gamma t} \frac{1}{\omega_1} & \left[\dot{x}(0) + \Gamma x(0) - \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma(\omega_0^2 + \omega_F^2)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2} \right] \sin(\omega_1 t) + \\
 \frac{F_0}{m} & \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega_F^2) \cos(\omega_F t) + 2\Gamma\omega_F \sin(\omega_F t)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2} \right], \quad (1.10)
 \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
 x(t) = e^{-\Gamma t} & [x(0) - a \cos \delta] \cos(\omega_1 t) + \\
 e^{-\Gamma t} \frac{1}{\omega_1} & [\dot{x}(0) + \Gamma x(0) - a(\Gamma \cos \delta + \omega_F \sin \delta)] \sin(\omega_1 t) + \\
 & + a \cos(\omega_F t - \delta). \quad (1.11)
 \end{aligned}$$

- Para $\omega_0^2 = \Gamma^2$ (amortiguamiento crítico),

$$\begin{aligned}
 x(t) = e^{-\Gamma t} & \left[x(0) - \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{(\omega_0^2 - \omega_F^2) + (2\Gamma\omega_F)^2} \right] + \\
 t e^{-\Gamma t} & \left[\dot{x}(0) + \Gamma x(0) - \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma(\omega_0^2 + \omega_F^2)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2} \right] + \\
 \frac{F_0}{m} & \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega_F^2) \cos(\omega_F t) + 2\Gamma\omega_F \sin(\omega_F t)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2} \right], \quad (1.12)
 \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
 x(t) = e^{-\Gamma t} & [x(0) - a \cos \delta] + \\
 t e^{-\Gamma t} & [\dot{x}(0) + \Gamma x(0) - a(\Gamma \cos \delta + \omega_F \sin \delta)] + \\
 & + a \cos(\omega_F t - \delta). \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

- Para $\omega_0^2 < \Gamma^2$ (sistema sobreamortiguado),

$$\begin{aligned}
x(t) = & \frac{e^{-\Gamma t}}{2} e^{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} \left[x(0) - \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{(\omega_0^2 - \omega_F^2) + (2\Gamma\omega_F)^2} \right] + \\
& \frac{e^{-\Gamma t}}{2\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}} e^{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} \left[\dot{x}(0) + \Gamma x(0) - \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma(\omega_0^2 + \omega_F^2)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2} \right] + \\
& \frac{e^{-\Gamma t}}{2} e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} \left[x(0) - \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{(\omega_0^2 - \omega_F^2) + (2\Gamma\omega_F)^2} \right] - \\
& - \frac{e^{-\Gamma t}}{2\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} \left[\dot{x}(0) + \Gamma x(0) - \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma(\omega_0^2 + \omega_F^2)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2} \right] + \\
& + \frac{F_0}{m} \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega_F^2) \cos(\omega_F t) + 2\Gamma\omega_F \sin(\omega_F t)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2} \right], \tag{1.14}
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
x(t) = & \frac{e^{-\Gamma t}}{2} e^{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} [x(0) - a \cos \delta] + \\
& \frac{e^{-\Gamma t}}{2\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}} e^{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} [\dot{x}(0) + \Gamma x(0) - a(\Gamma \cos \delta + \omega_F \sin \delta)] + \\
& \frac{e^{-\Gamma t}}{2} e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} [x(0) - a \cos \delta] + \\
& - \frac{e^{-\Gamma t}}{2\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} [\dot{x}(0) + \Gamma x(0) - a(\Gamma \cos \delta + \omega_F \sin \delta)] + \\
& + a \cos(\omega_F t - \delta). \tag{1.15}
\end{aligned}$$

1.2. Oscilador no lineal

A lo largo de las secciones anteriores hemos analizado múltiples aspectos del comportamiento de un sistema perturbado alrededor del equilibrio [38]. Un ingrediente fundamental en todo lo desarrollado ha sido la *linealidad* de la ecuación diferencial que controla el movimiento, aun cuando se ha considerado el movimiento con amortiguamiento o el movimiento forzado. En multitud de casos un tratamiento lineal es perfectamente válido y adecuado, no obstante no siempre ha de ser así. En esta sección vamos a estudiar alguna de las consecuencias físicas de alejarnos del régimen lineal. Para ello introduciremos, en la ecuación diferencial que controla el movimiento, un término no lineal sencillo, Ax^2 (corresponde a un término en la fuerza recuperadora sobre el grado de libertad x de tipo Ax^2), de modo que esta resulta,

- En ausencia de una fuerza externa,

$$\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + Ax^2 = 0, \tag{1.16}$$

- En presencia de una fuerza externa armónica,

$$\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + Ax^2 = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t). \quad (1.17)$$

Además de $x = 0$, el sistema puede poseer una segunda posición de equilibrio en $x = -\frac{\omega_0^2}{A}$; ahora bien, es inestable y la ignoramos en lo sucesivo.

Los métodos empleados hasta ahora son a priori inútiles para encontrar una solución analítica exacta al problema. De entrada, la ecuación resultante no es lineal con lo que el principio de superposición no es válido. Para resolver el problema nos contentaremos con construir de forma sistemática soluciones aproximadas. Por razones que quedarán claras a continuación, abordamos primero el segundo caso, cuando el sistema se encuentra sometido a una fuerza externa armónica.

1.2.1. Oscilador no lineal forzado I

Según acabamos de mencionar, la Ec. (1.17) queda fuera de los métodos empleados hasta ahora. De entre las características del problema lineal *sí* que hay una que podemos esperar encontrar de nuevo: la periodicidad de la solución. Nótese que no hablamos ya de solución transitoria ni de solución estacionaria puesto que la ecuación no es lineal. Considerando el periodo de la fuerza externa $T = \frac{2\pi}{\omega}$, si $x(t)$ posee esa misma periodicidad ($x(t+T) = x(t)$), todos los términos de la ecuación resultan invariantes al trasladar $t \rightarrow t+T$. Es más, en el límite $A \rightarrow 0$, deberíamos recuperar la solución estacionaria,

$$\lim_{A \rightarrow 0} x(t) = a \cos(\omega t - \delta). \quad (1.18)$$

Estos dos ingredientes, la periodicidad y un límite no trivial conocido (el problema *lineal* con $A = 0$), pueden resultar suficientes para construir una solución al problema no lineal de forma controlada. Si A es *pequeño*, podemos construir una solución aproximada como una serie de potencias en el parámetro A . El término de orden cero, correspondiente al límite $A = 0$, ya lo conocemos. Escribamos explícitamente $x(t)$ como una serie de potencias en A :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n x_{(n)}(t) = x_{(0)}(t) + Ax_{(1)}(t) + A^2 x_{(2)}(t) + \dots \quad (1.19)$$

$A^n x_{(n)}(t)$ es el orden n del desarrollo de la solución. Si sustituimos este desarrollo en la ecuación de movimiento (1.17),

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} A^n \ddot{x}_{(n)} + 2\Gamma \sum_{n=0}^{\infty} A^n \dot{x}_{(n)} + \omega_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} A^n x_{(n)} + A \left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n x_{(n)} \right)^2 = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \ddot{x}_{(n)} + 2\Gamma \sum_{n=0}^{\infty} A^n \dot{x}_{(n)} + \omega_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} A^n x_{(n)} + \sum_{n,m=0}^{\infty} A^{n+m+1} x_{(n)} x_{(m)} = \\ & = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Para poder apreciar con claridad qué podemos hacer con la ecuación anterior, veamos explícitamente qué resulta de considerar los primeros órdenes en A de forma ordenada:

$$\begin{aligned}
& A^0(\ddot{x}_{(0)} + 2\Gamma\dot{x}_{(0)} + \omega_0^2) + \\
& A^1(\ddot{x}_{(1)} + 2\Gamma\dot{x}_{(1)} + \omega_1^2 + [(x_{(0)})^2]) + \\
& A^2(\ddot{x}_{(2)} + 2\Gamma\dot{x}_{(2)} + \omega_2^2 + [2x_{(0)}x_{(1)}]) + \\
& A^3(\ddot{x}_{(3)} + 2\Gamma\dot{x}_{(3)} + \omega_3^2 + [2x_{(0)}x_{(3)} + (x_{(1)})^2]) + \\
& \dots \\
& = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t).
\end{aligned} \tag{1.21}$$

El término de orden más bajo, con A^0 , tan solo involucra $x_{(0)}$, y lo hace de forma lineal, conforme a la ecuación diferencial lineal que teníamos para $A = 0$: $\ddot{x}_{(0)} + 2\Gamma\dot{x}_{(0)} + \omega_0^2 x_{(0)}$. El término de primer orden, A^1 , involucra tanto el término $x_{(1)}$, de nuevo de forma lineal, $\ddot{x}_{(1)} + 2\Gamma\dot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)}$, como el término $x_{(0)}$, este de forma *no lineal*: $(x_{(0)})^2$. Podemos ver qué ocurre para el término genérico de orden A^n : tendremos una parte $\ddot{x}_{(n)} + 2\Gamma\dot{x}_{(n)} + \omega_0^2 x_{(n)}$ *lineal* en $x_{(n)}$, con una dependencia en $x_{(n)}$ análoga a la de la ecuación diferencial *lineal*, y una parte no lineal $2(x_{(0)}x_{(n-1)} + x_{(1)}x_{(n-2)} + x_{(3)}x_{(n-3)} + \dots)$, además de un término si n es impar; es fundamental subrayar que la parte no lineal tan solo involucra términos $x_{(j)}$ de órdenes inferiores, $j < n$. Esto nos permite calcular los $x_{(n)}$ hasta el orden que deseemos del siguiente modo:

1. Resolvemos $\ddot{x}_{(0)} + 2\Gamma\dot{x}_{(0)} + \omega_0^2 x_{(0)} = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$. Conforme hemos estudiado, se resuelve como suma de un término estacionario

$$x_{(0)[(p)]} = a_{(0)i} \cos(\omega t) + a_{(0)e} \sin(\omega t) \tag{1.22}$$

con

y de un término transitorio $x_{(0)[h]}$ que desaparece con el tiempo (recordemos el factor $e^{-\Gamma t}$). Nos interesa principalmente el régimen estacionario de modo que nos permitimos ignorar el término transitorio (demostraremos que no surge problema alguno al hacerlo y comentaremos algún aspecto adicional de esta cuestión más adelante).

2. Sustituyendo $x_{(0)}$ obtenido en el paso anterior, retomemos, en Ec. (1.21)

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_{(1)} + 2\Gamma\dot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)} &= -(x_{(0)})^2 = \\
a_{(0)e}^2 \cos^2(\omega t) + a_{(0)i}^2 \sin^2(\omega t) - 2a_{(0)e}a_{(0)i} \cos(\omega t) \sin(\omega t).
\end{aligned} \tag{1.23}$$

¿Cómo resolvemos Ec. (1.23)? Reescribimos primero

$$\begin{aligned}
\cos^2(\omega t) &= \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}, & \sin^2(\omega t) &= \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}, \\
2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) &= 2 \sin(\omega t),
\end{aligned} \tag{1.24}$$

con lo que

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{(1)} + 2\Gamma \dot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)} &= -(x_{(0)})^2 = \\ &= -\frac{a_{(0)e}^2 + a_{(0)i}^2}{2} + \frac{a_{(0)i}^2 - a_{(0)e}^2}{2} \cos(2\omega t) - a_{(0)e} a_{(0)i} \sin(2\omega t). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Tenemos por tanto una ecuación diferencial *lineal* para $x_{(1)}$ con una fuente que tiene un término constante y términos armónicos $\cos(2\omega t)$ y $\sin(2\omega t)$ (i.e. con una frecuencia angular que es simplemente *el doble* de la de la fuerza externa $\frac{F_{(0)}}{m} \cos(\omega t)$). La solución $x_{(1)}$ tendrá por tanto un término transitorio que de nuevo ignoramos, y un término estacionario

$$\begin{aligned} x_{(1)[p]}(t) &= -\frac{a_{(0)e}^2 + a_{(0)i}^2}{2\omega_0^2} + \\ &= \frac{\cos(2\omega t)}{(\omega_0^2 - (2\omega)^2)^2 + (2\Gamma)^2(2\omega)^2} \times \\ &= \left((\omega_0^2 - (2\omega)^2) \frac{a_{(0)i}^2 - a_{(0)e}^2}{2} + (2\Gamma)^2 a_{(0)e} a_{(0)i} \right) + \\ &= \frac{\sin(2\omega t)}{(\omega_0^2 - (2\omega)^2)^2 + (2\Gamma)^2(2\omega)^2} \times \\ &= \left(-(\omega_0^2 - (2\omega)^2) a_{(0)e} a_{(0)i} + (2\Gamma) 2\omega \frac{a_{(0)i}^2 - a_{(0)e}^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Sustituyendo $a_{(0)e}$ y $a_{(0)i}$,

$$\begin{aligned} x_{(1)[p]}(t) &= -\frac{F_0^2}{2m^2\omega_0^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - (\omega)^2)^2 + (2\Gamma\omega)^2} + \\ &= \frac{F_0^2}{2m^2} \frac{(2\Gamma\omega)^2 - (\omega_0^2 - (\omega)^2)^2}{[(\omega_0^2 - (\omega)^2)^2 + (2\Gamma\omega)^2]^2} \frac{(\omega_0^2 - (2\omega)^2) \cos(2\omega t) + (2\Gamma)(2\omega) \sin(2\omega t)}{(\omega_0^2 - (2\omega)^2)^2 + (2\Gamma)^2(2\omega)^2} - \\ &= \frac{F_0^2}{m^2} \frac{2\Gamma\omega(\omega_0^2 - (\omega)^2)}{[(\omega_0^2 - (\omega)^2)^2 + (2\Gamma\omega)^2]^2} \frac{(\omega_0^2 - (2\omega)^2) \sin(2\omega t) - (2\Gamma)(2\omega) \cos(2\omega t)}{(\omega_0^2 - (2\omega)^2)^2 + (2\Gamma)^2(2\omega)^2}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Además del primer término, que corresponde a un desplazamiento en la posición de equilibrio, el término no lineal en la ecuación diferencial hace aparecer armónicos de frecuencia *doble* en $x(t)$.

3. Podemos escribir el siguiente orden en Ec. (1.21)

$$\ddot{x}_{(2)} + 2\Gamma \dot{x}_{(2)} + \omega_0^2 x_{(2)} = -2x_{(0)}x_{(1)}. \quad (1.28)$$

Veamos qué estructura, en cuanto a la dependencia en el tiempo t , tiene $x_{(0)}x_{(1)}$:

$$\begin{aligned}
 x_{(0)}x_{(1)} &= \\
 &[(\dots) \cos(\omega t) + (\dots) \sin(\omega t)] \times [(\dots) + (\dots) \cos(2\omega t) + (\dots) \sin(2\omega t)] = \\
 &(\dots) \cos(\omega t) + (\dots) \cos(\omega t) \cos(2\omega t) + (\dots) \cos(\omega t) \sin(2\omega t) + \\
 &(\dots) \sin(\omega t) + (\dots) \sin(\omega t) \cos(2\omega t) + (\dots) \sin(\omega t) \sin(2\omega t)
 \end{aligned}
 \tag{1.29}$$

Reescribiendo los productos de funciones armónicas (empleando por ejemplo Ec., resulta

$$\begin{aligned}
 x_{(0)}x_{(1)} &= \\
 &(\dots) \cos(\omega t) + (\dots) \cos(3\omega t) + (\dots) \sin(\omega t) + (\dots) \sin(3\omega t).
 \end{aligned}$$

La solución $x_{(2)}$ de Ec. (1.28) tendrá un término transitorio (que ignoramos una vez más), y un término estacionario. Con las funciones armónicas de la fuente $-2x_{(0)}x_{(1)}$, el término estacionario también será de tipo

$$x_{(2)[p]}(t) = (\dots) \cos(\omega t) + (\dots) \cos(3\omega t) + (\dots) \sin(\omega t) + (\dots) \sin(3\omega t)$$

Sin entrar a detallar la forma (independiente del tiempo) de cada uno de las coeficientes (\dots) , concluimos en cualquier caso que a este orden, A^2 , aparecen además armónicos de frecuencia *triple*, 3ω .

4. De forma análoga a lo anterior, podemos escribir los siguientes órdenes de Ec. (1.21); para el orden genérico n , tendremos una ecuación diferencial lineal $\ddot{x}_{(n)} + 2\Gamma \dot{x}_{(n)} + \omega_0^2 x_{(n)} = \text{fuente}$, en la que la fuente incluye a priori todos los armónicos (de hecho no serán todos, para n par solo aparecen los impares, para n impar solo los pares) hasta orden $n + 1$. Ignorando el término transitorio de la solución, el término estacionario en $x_{(n)}$ será por tanto una combinación lineal de armónicos (pares o impares según n) de hasta orden $n + 1$.

En los pasos anteriores hemos visto como podemos construir la solución en Ec. (1.19) de forma controlada. A cada orden sucesivo que consideramos se añaden términos armónicos de orden cada vez más alto. Recordemos además que aparece un término constante, desplazamiento neto con respecto a la posición de equilibrio $x = 0$ que tenemos cuando $A = 0$. Recapitulando lo desarrollado: el añadir un término no lineal a la ecuación de movimiento forzado (Ec. (1.17), ha requerido acudir a un nuevo método para resolver de forma controlada (siempre que el nuevo término sea “pequeño”) en términos de aproximaciones sucesivas, la trayectoria del sistema. Para cada uno de los órdenes del desarrollo Ec. (1.19) hemos encontrado una ecuación diferencial lineal y no homogénea en la que el papel de la fuente lo desempeña una suma de productos de órdenes más bajos en el desarrollo de x ; en otras palabras, el problema no lineal se ha convertido en una serie (infinita) de problemas lineales, en cada uno de los cuales la fuerza externa efectiva es una función no lineal de las soluciones de los órdenes más bajos. Más allá de la reflexión general anterior, es interesante subrayar que, con respecto al caso lineal $A = 0$, en la solución del caso no lineal aparecen armónicos (todos) con frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia de la fuerza externa. En todo

el desarrollo anterior quedan varios cabos por atar: los términos transitorios. Hemos empezado despreciando el término transitorio en $x(0)$, cosa perfectamente razonable para $t \gg 1/\Gamma$ si recordamos el factor de la solución transitoria. Ahora bien, al resolver $x(1)$ en el siguiente paso, en la fuente falta ese término. Si tenemos en cuenta ese término, conforme se puede comprobar en el apéndice A, aparecerán en $x(1)$ nuevas contribuciones a la solución particular con el mismo factor $e^{-\Gamma t}$, que podemos despreciar junto al término transitorio propiamente dicho (solución de la ecuación homogénea). De ese modo, orden a orden y de forma consistente, podremos despreciar todos los términos transitorios en $x(t)$ para encontrar la solución estacionaria.

1.2.2. Oscilador no lineal forzado II, frecuencias de combinación

En los dos apartados anteriores hemos analizado el oscilador no lineal forzado, obteniendo una solución general para el régimen estacionario mediante aproximaciones sucesivas (términos de orden cada vez más alto en el parámetro A que rompe la linealidad del sistema). Para fuentes periódicas generales podemos combinar lo anterior con un desarrollo en serie de Fourier para resolver el problema. El hecho más sobresaliente ha sido el descubrir que la no linealidad del sistema hace aparecer, en la solución $x(t)$, armónicos con frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia asociada a la fuerza externa. Veamos, de forma esquemática, por qué es esperable que esto ocurra. Olvidemos por un momento todo el análisis anterior y consideremos Ec. (1.17). ¿Qué ocurre si $x(t)$ contiene algún término armónico $\cos(\omega t)$ (sea ω la frecuencia que sea)? Entonces el término no lineal tendrá al menos un término $\cos^2(\omega t)$, que corresponde a un término armónico $\cos(2\omega t)$ y un término constante. Comprendemos de este modo que, para ser solución de la ecuación diferencial no lineal, si $x(t)$ incluye un término armónico, ¡tendrá *necesariamente* que incluir toda la familia de armónicos de orden superior! Este hecho, asociado a la no linealidad del sistema, se pone también de manifiesto en una situación algo más general. Consideremos de nuevo el sistema con un término no lineal, pero sometido ahora a una fuente que tiene *dos componentes armónicas* diferentes:

$$\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + A x^2 = \frac{F_c}{m} \cos(\omega_c t) + \frac{F_d}{m} \cos(\omega_d t). \quad (1.30)$$

En lugar de Ec. (1.21), tendremos ahora

$$\begin{aligned} & A^0(\ddot{x}_{(0)} + 2\Gamma \dot{x}_{(0)} + \omega_0^2 x_{(0)}) + \\ & A^1(\ddot{x}_{(1)} + 2\Gamma \dot{x}_{(1)} + \omega_1^2 + [(x_{(0)})^2]) + \\ & A^2(\ddot{x}_{(2)} + 2\Gamma \dot{x}_{(2)} + \omega_2^2 + [2x_{(0)}x_{(1)}]) + \\ & A^3(\ddot{x}_{(3)} + 2\Gamma \dot{x}_{(3)} + \omega_3^2 + [2x_{(0)}x_{(3)} + (x_{(1)})^2]) + \\ & \dots \\ & = \frac{F_c}{m} \cos(\omega_c t) + \frac{F_d}{m} \cos(\omega_d t). \end{aligned} \quad (1.31)$$

El orden más bajo de la solución será

$$x_{(0)}(t) = a_{e,c}^{(0)} \cos(\omega_c t) + a_{i,c}^{(0)} \sin(\omega_c t) + a_{e,d}^{(0)} \cos(\omega_d t) + a_{i,d}^{(0)} \sin(\omega_d t),$$

con

$$\begin{aligned} a_{e,c}^{(0)} &= \frac{F_c}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega_c^2}{(\omega_0^2 - \omega_c^2)^2 + (2\Gamma\omega_c)^2}, & a_{i,c}^{(0)} &= \frac{F_c}{m} \frac{2\Gamma\omega_c}{(\omega_0^2 - \omega_c^2)^2 + (2\Gamma\omega_c)^2}, \\ a_{e,d}^{(0)} &= \frac{F_c}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega_d^2}{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (2\Gamma\omega_d)^2}, & a_{i,d}^{(0)} &= \frac{F_d}{m} \frac{2\Gamma\omega_d}{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (2\Gamma\omega_d)^2}, \end{aligned}$$

Para obtener el término de primer orden A resolvemos

$$\ddot{x}_{(1)} + 2\Gamma \dot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)} = - (x_{(0)})^2. \quad (1.32)$$

En $(x_{(0)})^2$ tenemos términos con dependencias temporales

$$\begin{aligned} &\cos^2(\omega_c t), \sin^2(\omega_c t), \sin(\omega_c t) \cos(\omega_c t), \\ &\cos^2(\omega_d t), \sin^2(\omega_d t), \sin(\omega_d t) \cos(\omega_d t), \\ &\cos(\omega_c t) \cos(\omega_d t), \sin(\omega_c t) \sin(\omega_d t), \\ &\cos(\omega_c t) \sin(\omega_d t), \sin(\omega_c t) \cos(\omega_d t), \end{aligned}$$

que reescribimos como funciones armónicas simples usando

$$\begin{aligned} \cos(\omega_c t) \cos(\omega_d t) &= \frac{\cos((\omega_c - \omega_d)t) + \cos((\omega_c + \omega_d)t)}{2}, \\ \sin(\omega_c t) \sin(\omega_d t) &= \frac{\cos((\omega_c - \omega_d)t) - \cos((\omega_c + \omega_d)t)}{2}, \\ \sin(\omega_c t) \cos(\omega_d t) &= \frac{\sin((\omega_c + \omega_d)t) + \cos((\omega_c - \omega_d)t)}{2}, \\ \cos(\omega_c t) \sin(\omega_d t) &= \frac{\sin((\omega_c + \omega_d)t) - \cos((\omega_c - \omega_d)t)}{2}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \cos^2(\omega_c t) &= \frac{1 + \cos(2\omega_c t)}{2}, & \sin^2(\omega_c t) &= \frac{1 - \cos(2\omega_c t)}{2}, \\ \cos^2(\omega_d t) &= \frac{1 + \cos(2\omega_d t)}{2}, & \sin^2(\omega_d t) &= \frac{1 - \cos(2\omega_d t)}{2}, \\ \frac{1}{2} \sin(2\omega_c) &= \sin(\omega_c t) \cos(\omega_c t), & \frac{1}{2} \sin(2\omega_d) &= \sin(\omega_d t) \cos(\omega_d t). \end{aligned}$$

Dado el aumento de términos, no escribimos explícitamente $x_{(1)}(t)$; queda claro sin embargo que en $x_{(1)}$, además de términos constantes, tendremos armónicos con frecuencia igual a una combinación de ω_c y ω_d : $2\omega_c, 2\omega_d, \omega_c + \omega_d, \omega_c - \omega_d$. La aparición de estas frecuencias, denominadas *frecuencias de combinación*, es consecuencia de tener tanto el término no lineal Ax^2 como una fuerza externa con dos componentes armónicas. Lo obtenido en los apartados anteriores corresponde sencillamente a la situación particular

en que $\omega_c \rightarrow \omega_d$. De forma análoga, si continuáramos un orden más, obtendríamos que $x_{(2)}$ incluye armónicos con nuevas combinaciones de frecuencias,

$$3\omega_c, 2\omega_c \pm \omega_d, \omega_c \pm 2\omega_d, 3\omega_d,$$

y de forma análoga aparecerán (simple cuestión combinatoria) nuevas frecuencias a cada orden en A . Con este comentario sobre la aparición de *frecuencias de combinación* concluimos el estudio del oscilador no lineal forzado.

Capítulo 2

Sistemas dinámicos

En matemáticas, los sistemas dinámicos permiten analizar y describir el cambio o evolución que experimenta una variable a lo largo del tiempo. Se describen mediante una serie de variables (cuyo valor en un instante determina el estado del sistema), y un conjunto determinista de reglas que establecen cómo será el siguiente estado futuro a partir del actual (por ejemplo, mediante un sistema de ecuaciones diferenciales de las variables que describen el sistema dinámico). Se utiliza software de simulación para simular el comportamiento de sistemas representados por modelos matemáticos. La evolución en el tiempo de un sistema dinámico se simula calculando los valores de los estados del sistema dinámico en cada paso de la simulación mediante el uso de algoritmos de resolución numéricos basados en tiempo o en eventos.

2.1. Estabilidad del sistema

Para encontrar todas las soluciones explícitas para cada ecuación diferencial o sistema de ecuaciones diferenciales es necesario utilizar métodos alternativos para lograr el objetivo, sin embargo, esto no es posible para la mayoría de ellas, entonces buscamos analizar el comportamiento cualitativo en lugar de resolver explícitamente cada una de las ecuaciones diferenciales. Un fenómeno cualitativo interesante es la idea de estabilidad de cierta solución de un sistema de ecuaciones diferenciales.

La forma de visualizar el comportamiento de las variables de estado de un sistema dinámico puede ser en forma de serie de tiempo (gráfica de una variable de estado contra tiempo), o en forma de espacio fase. El *espacio fase* de un sistema de n dimensiones $\dot{X} = F(x)$ es el espacio donde todos los posibles estados de un sistema son representados, cada parámetro del sistema se representa como un eje de un espacio multidimensional y cada punto del espacio representa cada posible estado de las variables de sistema. En este tipo de representación el tiempo se vuelve un parámetro implícito; como por ejemplo se muestra la dinámica del oscilador amortiguado, en las Figs. 2.1 (a) y (b) se observa el espacio fase del sistema y las series de tiempo.

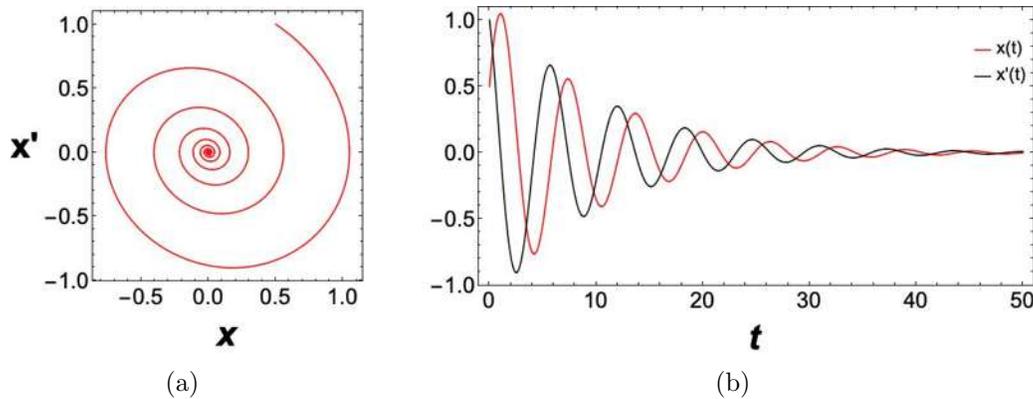


Figura 2.1: En (a) espacio fase del sistema dinámico y (b) las series de tiempo.

El espacio fase está descrito por un campo vectorial F que rige el recorrido de las variables del sistema $x(t)$ en el tiempo, el recorrido de estas variables recibe el nombre de *trayectoria*. Se dice que una singularidad del espacio fase es *estable*, *sumidero* o *atractor* si toda trayectoria que comienza cerca de ella se aproxima a ella conforme el tiempo transcurre, todas las trayectorias se acercan al punto fijo. La importancia de la estabilidad de las singularidades radica en que ésta determina la estabilidad del sistema en el que se presenten las singularidades. En sistemas lineales las singularidades sólo pueden ser puntos, los cuales se conocen como *puntos fijos*; en cambio los sistemas no lineales pueden presentar *puntos fijos*, *ciclos límite* y regiones llamadas *atractores extraños*.

2.2. Caracterización del Espacio Fase

Los puntos x^* para los cuales $x^* = F(x^*) = 0$ son llamados *puntos fijos* o *críticos*; en estos puntos el campo vectorial que determina la dirección de las trayectorias en el espacio fase es *nulo*. Los valores propios λ del sistema guardan una estrecha relación con los puntos fijos ya que determinan la forma en que las trayectorias interactúan con el punto fijo. En base al comportamiento de las trayectorias alrededor de los puntos fijos, se pueden clasificar como se muestra en la Fig. 2.2

- **Nodo:** punto fijo del sistema en el que todas las órbitas entran en él. El nodo es asintóticamente *estable* si las trayectorias están dirigidas hacia el punto, aquí los valores propios del sistema son reales, negativos y distintos entre sí, ver Fig. 2.2 (a). En cambio, si las trayectorias se alejan del punto, se dice que es un nodo *inestable*.
- **Foco (Espiral):** punto fijo del sistema que es asintóticamente *estable* cuando todas las trayectorias en sus alrededores tienden a él pero no entran en él, aquí los valores propios del sistema son complejos conjugados con parte real negativa, ver Fig. 2.2 (b). Los focos *inestables* se producen cuando las trayectorias tienden a él cuando $t \rightarrow -\infty$ y corresponden a un sistema con valores propios complejos conjugados con parte real positiva.

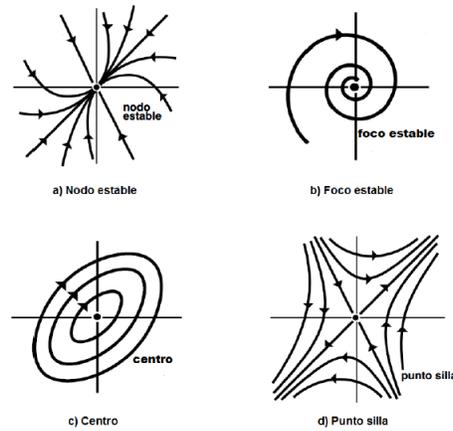


Figura 2.2: Clasificación de los tipos de dinámica respecto a los puntos fijos.

- **Centro**: punto fijo del sistema en el que en sus proximidades todas sus trayectorias son cerradas. Ninguna trayectoria entra y ninguna trayectoria sale. Este punto es neutralmente estable y corresponde cuando los valores propios del sistema son imaginarios puros, ver Fig. 2.2 (c).
- **Punto Silla**: las trayectorias inicialmente tienden al punto pero después se alejan de él. Es un punto *inestable* y corresponde cuando los valores propios del sistema son distintos y de signo opuesto, ver Fig. 2.2 (d).

Dado un sistema dinámico *lineal* $\dot{X} = AX$, es fácil analizar qué tipo de punto crítico presenta dicho sistema; sólo se calculan los valores propios λ a partir de la ecuación característica del sistema $\det(A - \lambda I) = 0$ y se analiza la relación que hay entre los valores propios. Los valores propios de una matriz están dados por su ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$ de dimensión 2, están dados por:

$$\lambda^2 + \lambda \operatorname{Tr}(A) + \det(A) = 0, \quad (2.1)$$

donde

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{Tr}(A) \pm \sqrt{(\operatorname{Tr}(A))^2 - 4 \det(A)}}{2} \quad (2.2)$$

Es posible conocer las soluciones de la ecuación característica mediante un análisis de la traza y el determinante de la matriz A , graficando $\operatorname{Tr}(A)$ vs $\det(A)$, donde se tiene que $\operatorname{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$, $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$,

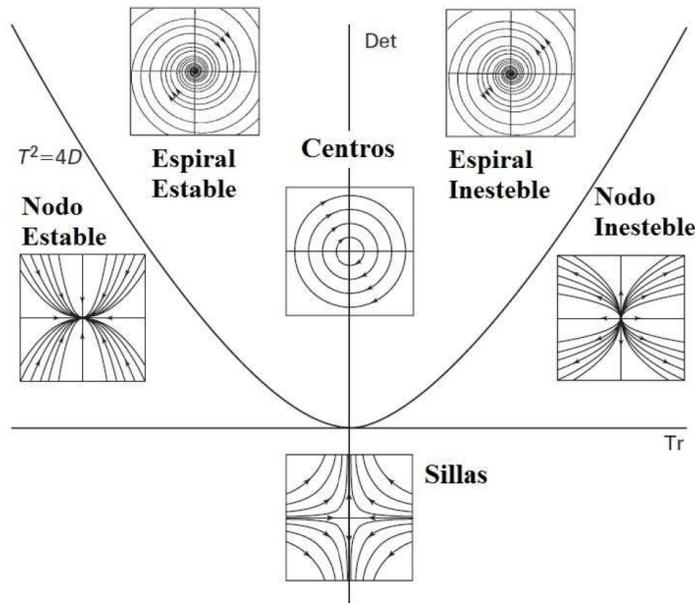


Figura 2.3: Clasificación de puntos fijos.

Sea $\Delta = (\text{Tr}(A))^2 - 4 \det(A)$, tenemos la siguiente clasificación:

1. Si $\Delta > 0$, los valores propios λ_1, λ_2 son reales distintos y diferentes de cero.
 - a) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, el punto fijo es nodo estable.
 - b) Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, el punto fijo es nodo inestable.
 - c) Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, el punto fijo es punto silla.
2. Si $\Delta < 0$, los valores propios son complejos conjugados: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, con $\beta \neq 0$.
 - a) Si $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, el punto fijo es centro.
 - b) Si $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, con $\alpha < 0$, el punto fijo es foco estable.
 - c) Si $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, con $\alpha > 0$, el punto fijo es foco inestable.
3. Si $\Delta = 0$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$.
 - a) Si $\lambda_{1,2} < 0$, el punto fijo es un nodo degenerado estable.
 - b) Si $\lambda_{1,2} > 0$, el punto fijo es un nodo degenerado inestable.

Los nodos satisfacen $\text{Tr}(A)^2 - 4 \det(A) > 0$ y las espirales satisfacen $\text{Tr}(A)^2 - 4 \det(A) < 0$. La parábola $\text{Tr}(A)^2 - 4 \det(A) = 0$ es el borde entre nodos y espirales, los nodos y nodos degenerados viven en esta parábola. La estabilidad de los nodos y las espirales son determinadas por la $\text{Tr}(A)$, cuando $\text{Tr}(A) < 0$, ambos valores propios son negativos y el punto fijo es estable es mayor que cero para puntos inestables. Los centros estables viven en la línea $\text{Tr}(A) = 0$, donde los valores propios son puramente imaginarios.

2.3. Teorema de Hartman-Grobman

En la sección 2.2 hemos analizado las diferentes dinámicas que tienen los sistemas lineales en el espacio fase. Vimos que los valores propios asociados al sistema determinan la estabilidad de los puntos fijos y la dinámica en el espacio fase. Finalmente, clasificamos las formas del espacio fase y los puntos fijos, según la traza y el determinante de la matriz asociada al sistema. Ahora que tenemos esta información, podemos estudiar sistemas de ecuaciones no lineales. Como en el caso lineal, nos enfocaremos en sistemas autónomos, donde la variable independiente no aparece explícitamente en el sistema. Lo primero que haremos será analizar algunos sistemas y sus campos vectoriales asociados, los cuales van a sugerir soluciones que ya no tienen un comportamiento conocido o fácil de interpretar como en los sistemas lineales. Necesitaremos nuevos métodos para conocer el plano fase por completo.

El teorema de Hartman-Grobman nos asegura que los sistemas $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = F(x)$ son localmente topológicamente conjugados (en entornos de 0 y x^*) si x^* es un punto de equilibrio de F y $A = J_F(x^*)$ es hiperbólico. El teorema de Hartman-Grobman indica que para estudiar la estabilidad de un punto de equilibrio de sistemas autónomos mediante un método que es comúnmente usado en las ciencias experimentales, el método de linealización. Un sistema autónomo $\dot{x} = F(x)$ puede utilizarse su aproximación lineal en algunos casos. Más en concreto: sea x^* un punto de equilibrio tal que $F(x^*) = 0$ y su matriz Jacobiana $J = J_F(x^*)$ no tiene valores propios con parte real nula, entonces x^* es (asintóticamente) estable si y solo si el origen es (asintóticamente) estable para el sistema linealizado dado por $\dot{x} = Jx$.

Por ejemplo consideremos el sistema no lineal:

$$\dot{x} = x^2 + 2x + y^2, \quad (2.3)$$

$$\dot{y} = -2x^3 + 2y. \quad (2.4)$$

El punto fijo del sistema de Ecs. (2.3) y (2.4) es $(0, 0)$. La matriz Jacobiana evaluada en el punto fijo $(0, 0)$ es:

$$\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El sistema linealizado en el punto fijo $(0, 0)$ corresponde

$$\dot{x} = 2x, \quad (2.5)$$

$$\dot{y} = 2y. \quad (2.6)$$

Como se muestra en la Fig. 2.4 ambos sistemas localmente cerca del punto fijo $(0, 0)$ el comportamiento asintótico de ambos sistemas es parecido a un nodo degenerado inestable.

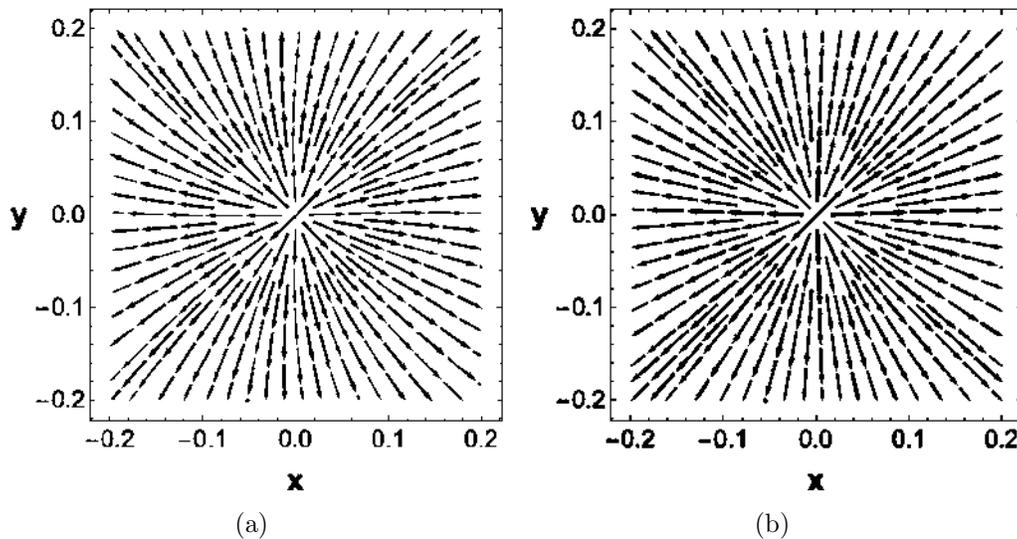


Figura 2.4: En (a) Ecs. (2.3) y (2.4) del sistema dinámico y en (b) Ecs. (2.5) y (2.6) del sistema dinámico linealizado.

2.4. Teorema de Poincaré-Bendixson

En matemática, el teorema de Poincaré-Bendixson es una afirmación sobre el comportamiento a largo plazo de órbitas de sistemas dinámicos continuos en el plano. El teorema de Poincaré-Bendixson es uno de los resultados más importantes que ha surgido en el análisis de sistemas no lineales. En resumidas cuentas este teorema dice que las posibilidades en el plano fase (espacio fase de un sistema bidimensional) son muy limitadas: si una trayectoria está confinada a una región cerrada y limitada que no contiene puntos fijos, entonces la trayectoria debe aproximarse a una órbita cerrada eventualmente (ciclo límite).

Un *ciclo límite* es una trayectoria aislada cerrada, es decir, no existen otras trayectorias cerradas en la vecindad de ésta y por lo tanto las trayectorias vecinas a ésta se mueven en espiral acercándose o alejándose del ciclo límite, ver Fig. 2.5.

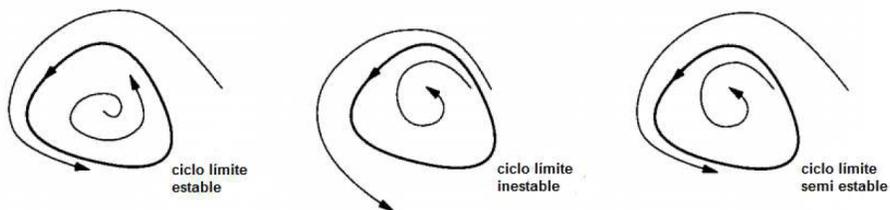


Figura 2.5: Ciclos límite.

Si todas las trayectorias vecinas se acercan al ciclo, entonces éste es *estable*. El ciclo es *inestable* si las trayectorias vecinas se alejan del ciclo; existen casos extraños donde se dice que el ciclo es *semi-estable* y se da cuando algunas trayectorias se alejan del ciclo y otras tienden a él.

El teorema de Poincaré-Bendixson nos dará las condiciones necesarias para asegurar que un sistema no lineal presenta ciclos límites.

Teorema 2.1 (Poincaré-Bendixson). *Supongamos que,*

- *R es un conjunto compacto del plano.*
- *$\dot{x} = f(x)$ es un sistema planar cuyo campo f es continuamente diferenciable y está definido sobre un conjunto abierto contenido en R .*
- *R no contiene puntos de equilibrio del sistema.*
- *Existe una trayectoria C que está confinada en R , es decir que comienza en R ya permanece en R para todo tiempo futuro.*

Entonces o bien C es una órbita cerrada, o bien tiende a una órbita cerrada cuando $t \rightarrow \infty$. En cualquier caso, R contiene una órbita cerrada.

Este teorema no aplica para sistemas tridimensionales o de mayor dimensión, cuyas órbitas pueden vagar sin patrón fijo por siempre dentro de una región limitada sin converger a un punto fijo u órbita cerrada, por lo que el teorema de Poincaré-Bendixson nos dice cuando puede aparecer un ciclo límite en el espacio de fase en 2 dimensiones. Una importante aplicación es que un sistema dinámico bidimensional no puede dar lugar a un atractor extraño. Pero entonces el teorema de Poincaré-Bendixson dice que C no es un atractor extraño, si no un ciclo límite o converge a un ciclo límite. En algunos casos, las trayectorias son atraídas a un atractor extraño: un conjunto fractal cuyo movimiento es aperiódico y sensible a las condiciones iniciales del sistema. A este tipo de comportamiento se le conoce como caos, y se presenta para sistemas de orden $n \geq 3$.

2.5. Oscilador de van der Pol-Duffing

La dinámica del oscilador de van der Pol-Duffing está gobernada por

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \frac{dV_1(x)}{dx} = A_1 \cos(\omega_1 t), \quad (2.7)$$

donde $\mu > 0$ es un parámetro que controla la amortiguación y la no linealidad del oscilador, y A_1 es la amplitud del forzamiento externo, siendo ω_1 su frecuencia. Observe que este sistema es una generalización del oscilador clásico de van der Pol-Duffing. De hecho, el potencial asimétrico $V_1(x)$ es de tipo Φ^4 [42], dado por

$$V_1(x) = \frac{1}{2}\gamma x^2 + \frac{1}{3}\eta x^3 + \frac{1}{4}\varepsilon x^4. \quad (2.8)$$

Para realizar el análisis consideramos los siguientes casos: (i) pozo simple ($\gamma > 0, \eta > 0, \varepsilon > 0$), (ii) pozo doble simétrico ($\gamma < 0, \eta = 0, \varepsilon > 0$) y (iii) joroba doble simétrica ($\gamma > 0, \eta = 0, \varepsilon < 0$), (iv) joroba doble asimétrica ($\gamma < 0, \eta \neq 0, \varepsilon > 0$). Estos casos exhiben una rica variedad de movimientos regulares y caóticos. Para el análisis, consideramos la configuración asimétrica de doble pozo. Calculemos primero los puntos fijos de la Ec. (2.7), considerando el sistema como autónomo (estableciendo $A_1 = 0$) Por lo tanto, el sistema puede expresarse como un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= \mu(1 - x^2)u - \gamma x - \eta x^2 - \varepsilon x^3, \end{aligned} \quad (2.9)$$

En el caso de la Ec. (2.9), se tienen tres puntos fijos: $(x = 0, u = 0)$, $(x = p_1, u = 0)$ y $(x = p_2, u = 0)$. En la Fig. 2.6 (a) se muestra el potencial $V_1(x)$ tomando $\gamma = -1, \varepsilon = 1$ y cuatro diferentes valores de η ($\eta = -0.2, \eta = -0.6, \eta = 0.2$ and $\eta = -0.6$), siendo

$$p_1 = \frac{-\eta - \sqrt{\eta^2 - 4\gamma\varepsilon}}{2\varepsilon}, \quad (2.10)$$

y

$$p_2 = \frac{-\eta + \sqrt{\eta^2 - 4\gamma\varepsilon}}{2\varepsilon}. \quad (2.11)$$

Cuando $\eta^2 = 4\gamma\varepsilon$ se tienen dos puntos fijos $(x = 0, u = 0)$ y $(x = -\frac{\eta}{2\varepsilon}, u = 0)$. Otro caso interesante se muestra en la Fig. 2.6 (b), donde se muestra el potencial $V_1(x)$, para $\gamma = 0.5, \varepsilon = 0.5$ y dos diferentes valores de η ($\eta = -1$ and $\eta = 1$).

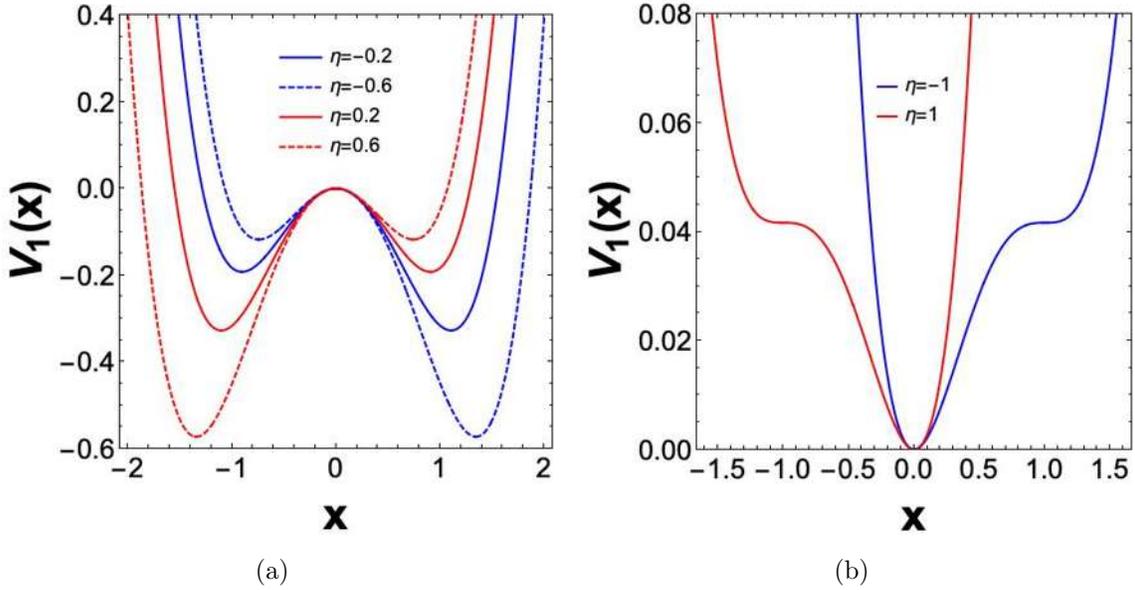


Figura 2.6: El potencial asimétrico $V_1(x)$. (a) El potencial para cuatro diferentes valores de η . (b) El potencial para dos diferentes valores de η .

Aplicando el Teorema de Hartman-Grobman a la Ec. (2.9) obtenemos la matriz jacobiana A_J del sistema linealizado, alrededor de los puntos fijos. Calculamos la matriz jacobiana evaluada en cualquier punto fijo $(x_0, u_0)^T$, que se puede expresar como

$$A_J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu x_0 u_0 - \gamma - 2\eta x_0 - 3\epsilon x_0^2 & \mu(1 - x_0^2) \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Por tanto, la estabilidad del punto fijo $(x_0, u_0)^T$ se determina a partir de las raíces de la ecuación característica $\text{Det}(A_J - \lambda I) = 0$. De este modo

$$\lambda^2 - \mu(1 - x_0^2)\lambda + (2\mu x_0 u_0 + \gamma + 2\eta x_0 + 3\epsilon x_0^2) = 0. \quad (2.13)$$

Para los valores $\mu = 0.6$, $\gamma = -1$, $\eta = -0.8$ y $\epsilon = 1$, hay tres puntos fijos ($P_i, i = 0, 1, 2$). Para el punto $P_0 = (0, 0)$ se obtienen los valores propios -0.744031 y 1.34403 . Para $P_1 = (1.47703, 0)$ obteniendo los valores propios $-0.354486 \pm 1.74812i$, mientras que en el caso $P_2 = (-0.677033, 0)$, se obtienen los valores propios $0.162488 \pm 1.19665i$, donde P_0 corresponde a una silla de montar, P_1 a una espiral estable y P_2 a un punto de espiral inestable, como se muestra en la Fig. 2.7(a). En el caso de dos puntos fijos, con $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.5$, $\eta = -1$ y $\epsilon = 0.5$, el sistema cumple con la propiedad de $\eta^2 = 4\gamma\epsilon$. Para este caso existen dos puntos fijos: en primer lugar el punto $P_0 = (0, 0)$, cuyos valores propios son $0.3 \pm 0.640312i$ correspondiendo a una espiral inestable y, segundo el punto $P_1 = (1, 0)$ con valores propios nulos ($\text{Det}(A_J) = 0$ y $\text{Tr}(A_J) = 0$), que es un punto crítico degenerado (ver Fig. 2.7 (b)). En la Fig. 2.8 (a), se muestran las trayectorias respectivas en el espacio fase. Los valores de los parámetros para las simulaciones numéricas son las siguientes: $\mu = 0.6$, $\gamma = -1$, $\eta = -0.8$, $\epsilon = 1$, $A_1 = 1$ and $\omega_1 = 1.5$, con condiciones iniciales $x(0) = 0.8$ y $u(0) = 1$. La simulación numérica fue obtenida usando el método de Runge-Kutta. En lugar de considerar las trayectorias del espacio fase, lo que da una curva continua, el comportamiento caótico se puede

analizar mediante las secciones de Poincaré. Para los casos en estudio, la sección de Poincaré (PS) da como resultado un conjunto discreto de puntos del espacio fase de la partícula en cada período del forzamiento externo, es decir, en $T = 2\pi/\omega_1$, $4\pi/\omega_1$, $6\pi/\omega_1$, etc. Claramente para una órbita periódica la PS es un solo punto, cuando el período se ha duplicado consta de dos puntos, y así sucesivamente. Si el sistema es caótico, el PS consistirá en un patrón de puntos llamado atractor extraño. En la Fig. 2.8 (b) se muestra el PS del oscilador de van der Pol-Duffing.

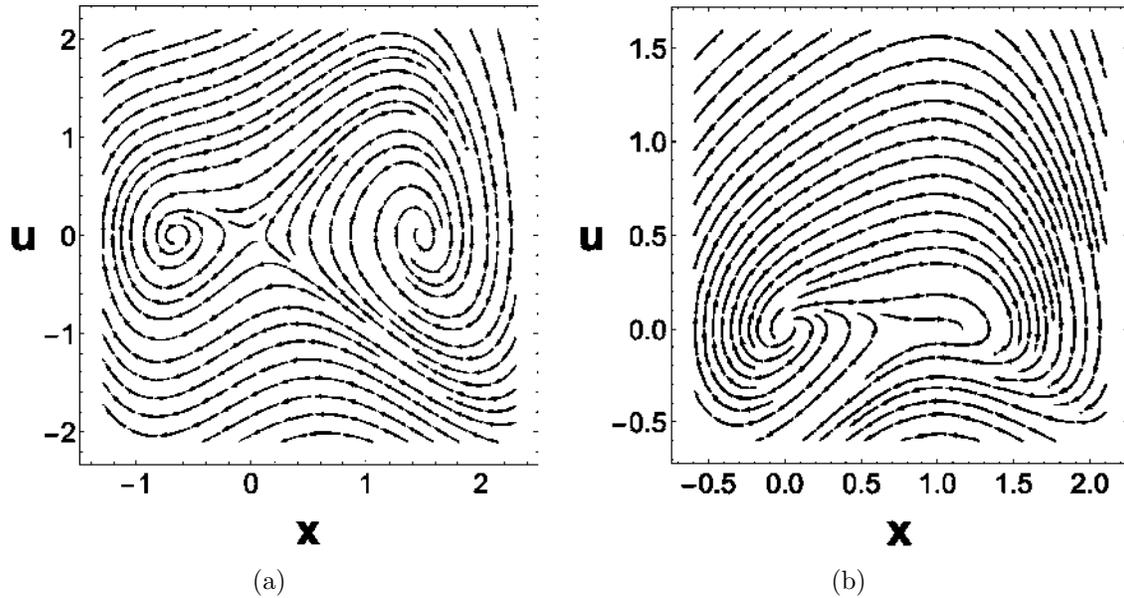


Figura 2.7: Espacio fase del oscilador de van der Pol-Duffing. (a) Para valores $\mu = 0.6$, $\gamma = -1$, $\eta = -0.8$ $\varepsilon = 1$. (b) Para valores $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.5$, $\eta = -1$ y $\varepsilon = 0.5$.

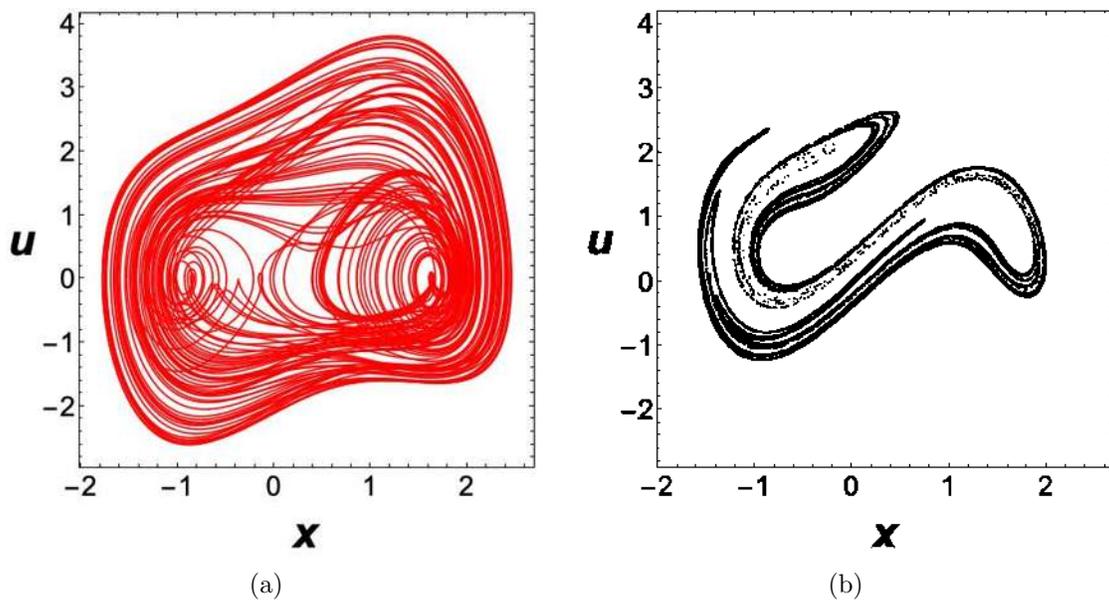


Figura 2.8: (a) Oscilador de van der Pol-Duffing descrito por Ec. (2.7). (b) Respectiva sección de Poincaré.

Naturalmente, diferentes valores de los parámetros conducen al sistema a diferentes estados, como el movimiento periódico y el movimiento caótico. Para observar el comportamiento dinámico del oscilador de van der Pol-Duffing en la Ec. (2.7), fijamos todos los parámetros excepto A_1 de la fuerza externa. Por lo tanto, el diagrama de bifurcación con respecto a A_1 se muestra en la Fig. 2.9 (a), y el correspondiente espectro del exponente de Lyapunov en función de A_1 se muestra en la Fig. 2.9 (b). El diagrama de bifurcación se obtiene trazando los máximos de $x(t)$ en términos del parámetro de control A_1 que varía en pequeños pasos, en un rango de 0.6 a 1.3. Para caracterizar el grado de caos, calculamos el mayor exponente numérico de Lyapunov (λ_{max}), $\lambda_{max} > 0$ para estados caóticos. De manera similar, el parámetro ω_1 varía en un rango de 0 a 2, y los demás parámetros se mantienen fijos en el sistema. El diagrama de bifurcación con respecto al parámetro ω_1 y el correspondiente espectro del exponente de Lyapunov se muestran en la Fig. 2.10 ; las gráficas de series de tiempo correspondientes $x(t)$ y $u(t)$ se muestran en Fig. 2.11

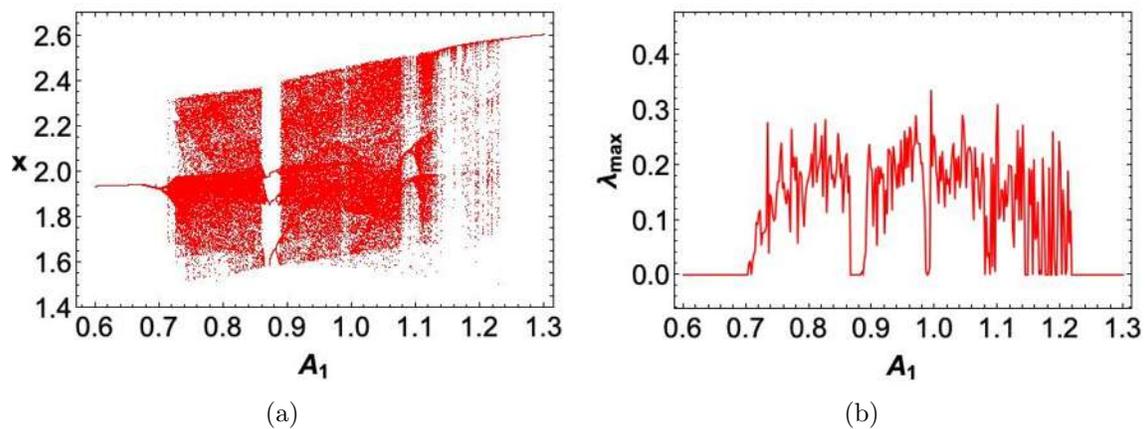


Figura 2.9: En (a) diagrama de Bifurcación y (b) el exponente de Lyapunov (λ_{max}) para el oscilador de van der Pol-Duffing, variando $0.6 \leq A_1 \leq 1.3$.

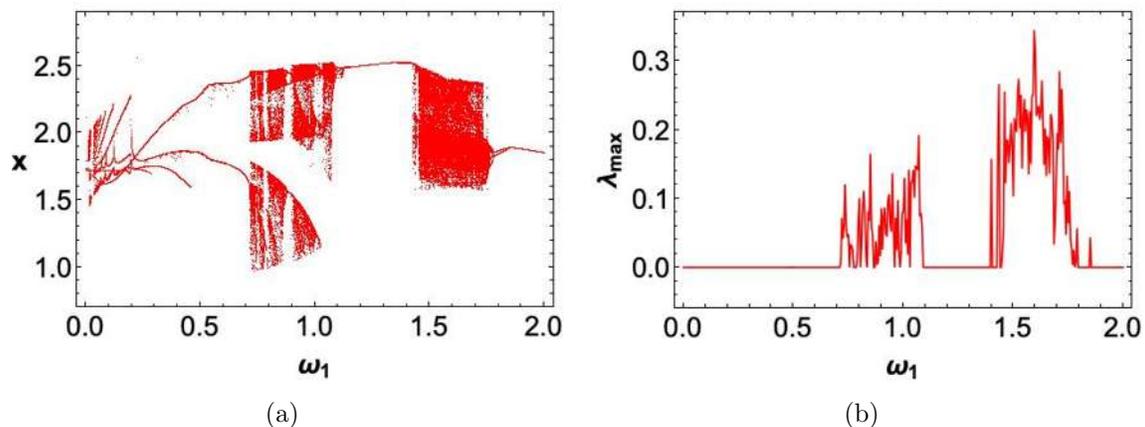


Figura 2.10: En (a) diagrama de Bifurcación (b) el exponente de Lyapunov (λ_{max}) para el oscilador de van der Pol-Duffing, variando $0 \leq \omega_1 \leq 2$.

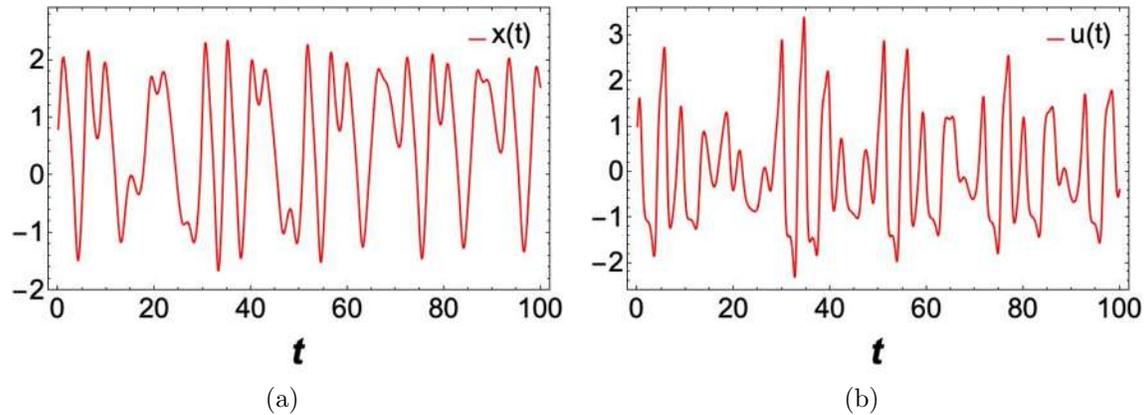


Figura 2.11: Gráficas de series de tiempo. En (a) $x(t)$, y en (b) $u(t)$, con condiciones iniciales en $x(0) = 0.8$ y $u(0) = 1$, respectivamente.

2.6. Oscilador de Φ^6 Duffing

El oscilador de Φ^6 Duffing es un sistema dinámico no lineal descrito por la ecuación diferencial:

$$\ddot{y} + \sigma \dot{y} + \frac{dV_2(y)}{dy} = A_2 \cos(\omega_2 t), \quad (2.14)$$

donde A_2 y ω_2 son la amplitud y la frecuencia de la fuerza externa, respectivamente, y $\sigma > 0$ es el parámetro de amortiguamiento. El potencial $V_2(y)$ es del tipo Φ^6 [43], que se define por

$$V_2(y) = \frac{1}{2}\alpha y^2 + \frac{1}{4}\beta y^4 + \frac{1}{6}\delta y^6. \quad (2.15)$$

El sistema en la Ec. (2.14) es autónomo cuando $A_2 = 0$. Para este caso, la dinámica está gobernada por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= v, \\ \dot{v} &= -\sigma v - \alpha y - \beta y^3 - \delta y^5. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Calculemos los puntos fijos y analicemos la estabilidad del sistema en la Ec. (2.16) usando las siguientes condiciones de los parámetros:

1. $\beta^2 < 4\alpha\delta$ y $\sigma > 0$. El sistema tiene un sólo punto fijo en $(0, 0)$. Para valores $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, la solución es una espiral estable ($V_2(y)$ es un pozo simple). Para valores $\alpha < 0$ y $\beta < 0$ el potencial $V_2(y)$ es una joroba simple y $(0, 0)$ resulta un punto silla.
2. $\beta^2 > 4\alpha\delta$ y $\sigma > 0$. El sistema tiene cinco puntos fijos para valores $\alpha > 0$, $\beta < 0$ y $\delta > 0$, donde $(0, 0)$ y $(\pm y_1, 0)$ corresponden a espirales estables y $(\pm y_2, 0)$ corresponden a puntos silla.
3. $\beta^2 = 4\alpha\delta$ y $\sigma > 0$. El sistema tiene tres puntos fijos para valores $\alpha > 0$, $\beta < 0$ y $\delta > 0$, con $(0, 0)$ siendo un punto espiral estable y $(\pm y_1, 0)$ correspondientes a puntos críticos degenerados.

Los puntos fijos y_1 y y_2 son

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{-\frac{1}{2\delta}(\beta - \sqrt{\Delta})}, \\ y_2 &= \sqrt{-\frac{1}{2\delta}(\beta + \sqrt{\Delta})}, \\ \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\delta. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Como estamos interesados en el caso de un potencial de tres pozos, que corresponde al caso $\beta^2 > 4\alpha\delta$, por simplicidad tomamos los valores de los parámetros $\alpha = 1$, $\beta = -0.6$ and $\delta = 0.06$ (ver Fig. 2.12 (a)) para el resto de este trabajo. Aplicando el Teorema de Hartman-Grobman a la Ec. (2.16). La matriz jacobiana evaluada en el punto fijo $(y_0, v_0)^T$, se puede calcular fácilmente de la siguiente manera:

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - 3\beta y_0^2 - 5\delta y_0^4 & -\sigma \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Por tanto, la estabilidad del punto fijo $(y_0, v_0)^T$ se determina según las raíces de la ecuación $\text{Det}(B_J - \lambda I) = 0$. De este modo

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + (\alpha + 3\beta y_0^2 + 5\delta y_0^4) = 0. \quad (2.19)$$

Para los valores $\sigma = 0.05$, $\alpha = 1$, $\beta = -0.6$ y $\delta = 0.06$, se tienen cinco puntos fijos $(P_i, i = 0, 1, \dots, 4)$. Para $P_0 = (0, 0)$, obtenemos los valores propios $-0.025 \pm 0.999687i$. Para $P_1 = (1.4537, 0)$, obtenemos los valores propios -1.23526 y 1.18526 . En $P_2 = (-1.4537, 0)$, obtenemos los valores propios -1.23526 y 1.18526 . En el caso de $P_3 = (2.80834, 0)$ se obtienen los valores propios $-0.025 \pm 2.33742i$. Finalmente, para $P_4 = (-2.80834, 0)$, obtenemos los valores propios $-0.025 \pm 2.33742i$. Aquí, P_0 , P_3 y P_4 corresponden a una espiral estable mientras que P_1 y P_2 corresponden a una silla de montar, como se muestra en Fig. 2.12 (b).

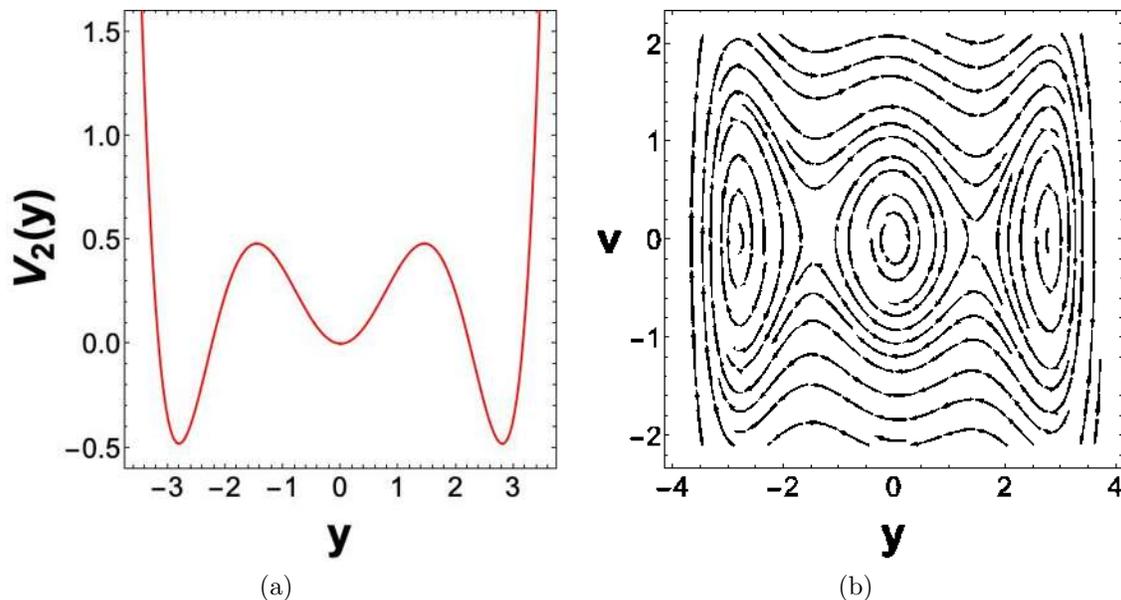


Figura 2.12: (a) El potencial $V_2(y)$ corresponde al oscilador de Φ^6 Duffing. (b) El espacio fase del oscilador de Φ^6 Duffing.

En la Fig. 2.13 (a) se muestran las trayectorias en el espacio fase para el oscilador de Φ^6 Duffing. Los valores de los parámetros para las simulaciones numéricas son las siguientes: $\sigma = 0.05$, $\alpha = 1$, $\beta = -0.6$, $\delta = 0.06$, $A_2 = 4$ y $\omega_2 = 0.5$, con las condiciones iniciales $y(0) = 2$ y $v(0) = -1$. En la Fig. 2.13 (b) se muestra la sección de Poincaré del oscilador de Φ^6 Duffing. De manera similar, consideramos el diagrama de bifurcación con respecto al parámetro A_2 que se muestra en la Fig. 2.14 (a). El espectro del exponente de Lyapunov con respecto al parámetro A_2 se observa en la Fig. 2.14 (b). El diagrama de bifurcación se obtiene trazando los máximos de $y(t)$ en términos del parámetro de control A_2 que varía en un rango de 0 a 4. De manera similar, el diagrama de bifurcación con respecto al parámetro ω_2 y el espectro del exponente de Lyapunov correspondiente se muestra en la Fig. 2.15, variando $0 \leq \omega_2 \leq 1$. Las gráficas de series de tiempo de $y(t)$ y $v(t)$ se muestran en la Fig. 2.16.

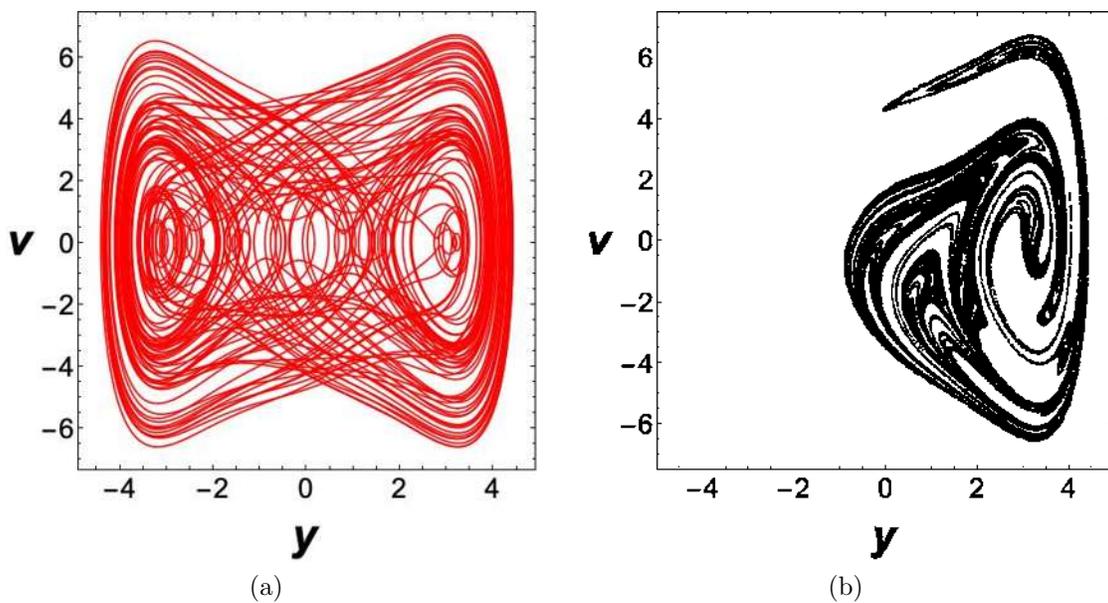


Figura 2.13: (a) Oscilador de Φ^6 Duffing descrito por Ec. (2.14). (b) Sección de Poincaré.

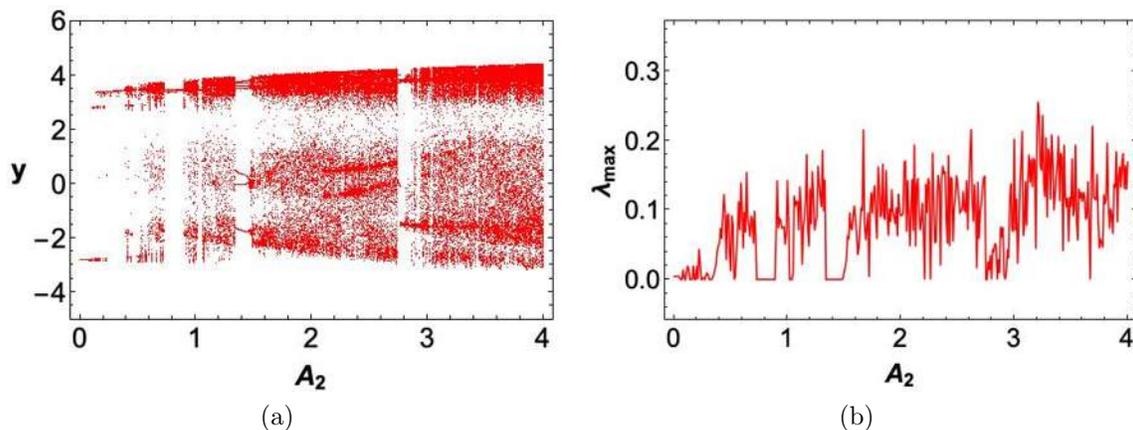


Figura 2.14: En (a) diagrama de bifurcación y (b) exponente de Lyapunov (λ_{max}) para el oscilador de Φ^6 Duffing, variando $0 \leq A_2 \leq 4$.

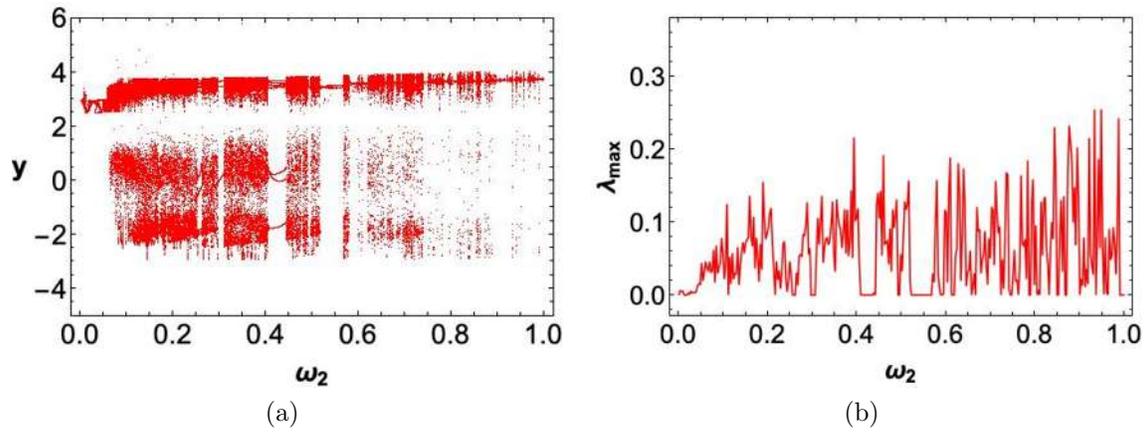


Figura 2.15: En (a) diagrama de bifurcación y (b) exponente de Lyapunov (λ_{max}) para el oscilador de Φ^6 Duffing, variando $0 \leq \omega_2 \leq 1$.

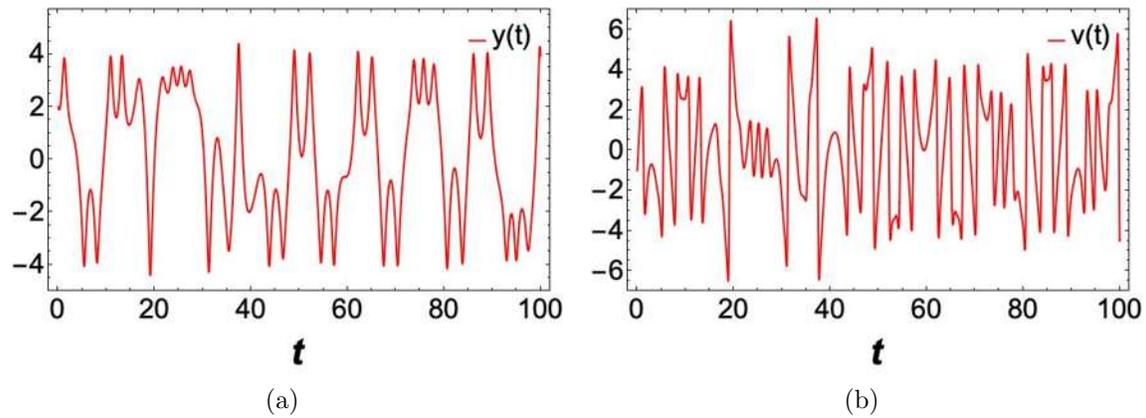


Figura 2.16: Gráficas de series de tiempo. En (a) $y(t)$, y en (b) $v(t)$, con condiciones iniciales $y(0) = 2$ y $v(0) = -1$, respectivamente.

Capítulo 3

Control y sincronización de sistemas caóticos

3.1. Introducción

El comportamiento caótico de un sistema dinámico puede ser indeseable, como en el caso de las fibrilaciones cardíacas, en la predicción de fenómenos climáticos, o en problemas ocasionados por la desincronización, etc, aunque también puede ser deseable, como en los procesos de mezclado o de transferencia de calor. Por ese motivo el “control del caos” ha sido uno de los tópicos de interés en los últimos años. Obviamente siempre es posible controlar el caos utilizando grandes perturbaciones, pero el punto importante es obtener una técnica de control eficiente, que requiera una energía de control mínima. Es decir debe constituir sólo una pequeña perturbación del sistema dinámico.

Otro tópico de gran importancia, en función de sus aplicaciones, y estrechamente relacionado al “control del caos” es la “sincronización de sistemas caóticos”. La posibilidad que dos o más sistemas caóticos oscilen de manera sincronizada y coherente no es obvia, debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales. Sin embargo, Pecora y Carroll demostraron que es posible acoplar dos sistemas caóticos, que parten de estados iniciales distintos, de modo tal que sus oscilaciones se sincronicen. El estudio de la sincronización ha dado origen al surgimiento de nuevos métodos para controlar un sistema caótico. En este sentido se han obtenido logros importantes en lo referente a estrategias para controlar arritmias cardíacas, reacciones químicas industriales de tipo oscilatorio y sistemas electrónicos.

El presente capítulo tiene como finalidad describir métodos de control y sincronización de sistemas caóticos ya que constituye uno de los métodos principales para la obtención de un sistema de comunicaciones analógicas seguras. Sin embargo, por razones de complejidad, se hará referencia en este capítulo, a algunos de los métodos más utilizados para el control de sistemas caóticos.

3.2. Métodos de control caos

Durante las últimas dos décadas, el control y la sincronización de sistemas caóticos han sido ampliamente investigados. El control del caos se refiere a la manipulación de los comportamientos dinámicos caóticos de algunos sistemas no lineales complejos con el fin de modificar las características del sistema. El objetivo básico del control de un sistema caótico es forzarlo a seguir una determinada trayectoria. Obviamente el objetivo específico varía en función de cada aplicación particular, aunque el más común es lograr que el movimiento caótico se transforme en periódico. No obstante, recientemente se han presentado aplicaciones donde el estado final deseado del sistema es también de características caóticas; es decir el problema de control, en ese caso, consiste en transformar un comportamiento caótico indeseado, en otro comportamiento también caótico, pero cuyas propiedades pueden fijarse de alguna manera. De hecho la sincronización caótica utilizada en los sistemas de comunicaciones puede pensarse como un método de control de este tipo. También es importante el estudio del proceso inverso, donde se trata que un sistema que inicialmente es periódico cambie su comportamiento a caótico. En este caso el método de control se conoce como de *anti-control* del caos.

Sea un sistema dinámico n – dimensional de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, u). \quad (3.1)$$

donde las componentes del vector $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ son las n variables de estado, en tanto que u es un parámetro externo o de control cuyo propósito es modificar la dinámica del sistema mediante la mínima perturbación posible. En lo que sigue se supone que para el valor elegido de este parámetro, $x(t)$ es una solución caótica de la Ec. (3.1).

Los métodos de control del caos generalmente utilizan dos propiedades fundamentales de los sistemas caóticos: la sensibilidad a las condiciones iniciales, y la existencia de infinitas órbitas periódicas inestables embebidas en el atractor (estable).

Si $x(t)$ es la trayectoria del sistema, sin aplicar el control u , y $g(t)$ es la trayectoria deseada, el propósito del control puede expresarse matemáticamente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{x}(t) - g(t)| = 0. \quad (3.2)$$

en donde $\tilde{x}(t)$ es la trayectoria modificada por el control u .

La Ec. (3.2) puede entenderse como un problema de seguimiento de trayectoria, trata de encontrar un control u que fuerce la trayectoria del sistema dinámico a seguir una trayectoria deseada $g(t)$, de manera que la función de error converga a cero. Según la aplicación particular $g(t)$ puede ser una de las soluciones inestables existente en el propio sistema, o bien una señal externa que se desea imponer. Existen varios métodos para controlar el caos, como el control de retroalimentación lineal, el control adaptativo, el control activo, el control bang-bang, el control de modo deslizante o el control óptimo, entre otros. En base a los distintos métodos de control para modificar la dinámica del sistema, describiremos a continuación tres métodos.

3.2.1. Control a través de un parámetro accesible del sistema

El estudio de la influencia de las variaciones de los parámetros en el comportamiento asintótico del sistema es el objeto de la teoría de bifurcaciones. Si el propósito del control es suprimir oscilaciones caóticas y obtener comportamiento regular, éste es el método más simple. En efecto, en el caso de los circuitos electrónicos, basta con modificar el valor de uno de los componentes pasivos (resistencias o capacitores). La principal desventaja del método es que pueden requerirse variaciones grandes en los valores de los parámetros, para lograr el comportamiento deseado. Por otro lado, el método es difícil de aplicar en la etapa de diseño, donde existen pocas herramientas de simulación que cuenten con la posibilidad de realizar un análisis de bifurcaciones, y aún existiendo esa posibilidad, se requiere una descripción del problema en una forma matemática cerrada (ecuaciones diferenciales o en diferencias) que no siempre se puede obtener en forma simple.

Otra alternativa es hacer variable el parámetro de control aplicando una pequeña perturbación de una frecuencia adecuada. Es decir se sustituye en la Ec. (3.2) al control u por un nuevo control de la forma $u + A \cos \omega t$. Merece mencionarse especialmente el método Ott-Grebogi-Yorke (OGY), propuesto en 1990, que se basa en aprovechar la existencia de un número infinito de órbitas periódicas inestables, embebidas en el atractor caótico [45]. Aplicando pequeñas perturbaciones temporales al parámetro u (Ec. (3.2)), se busca estabilizar la trayectoria caótica haciendo que el sistema siga la órbita periódica seleccionada. Para determinar los valores de las perturbaciones se necesitan conocer los autovalores y autovectores de la órbita inestable; información que no está disponible si no se cuenta con el modelo matemático del sistema. Pero los datos necesarios pueden obtenerse a partir de las órbitas reconstruidas en el espacio de fases por el método “embebimiento por retraso temporal”, que transforma una serie temporal de las mediciones de una variable del sistema, en una trayectoria (vectorial) en el espacio de estados. Una ventaja adicional del método OGY es la flexibilidad de poder elegir la órbita periódica que se va a controlar.

El método OGY se ha utilizado para controlar sistemas dinámicos, sistemas Hamiltonianos (conservativos), transitorios caóticos y dispersiones (scattering) caóticas. Cuando esta técnica se aplica a un circuito físico real, el principal problema se encuentra en los errores introducidos por el ruido, la cuantificación de los conversores (A/D y D/A) y los efectos de redondeo en los cálculos. Se encontró que el método es muy sensible al nivel de ruido, ya que las señales de control pequeñas pueden quedar enmascaradas por el mismo, imposibilitando cualquier intento para modificar el comportamiento en la forma deseada.

3.2.2. Control por inyección de señales externas

Ejemplos de estos métodos son la estimulación resonante que consiste en la perturbación con señales que pueden ser periódicas, cuasi-periódicas o caóticas. Se inyecta una señal $u(t)$ al sistema dinámico que puede verse como una fuerza externa. Un ejemplo sencillo de este método de control es la ecuación de un oscilador amortiguado con forzamiento $u(t)$.

$$\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = u(t) \quad (3.3)$$

La solución a la Ec. (3.3) está formada por dos términos: la solución general del sistema homogéneo más una solución particular. Por tanto, la solución está formada por dos partes, una parte transitoria (que se anula pasado cierto tiempo), más una parte estacionaria o estable. La solución estacionaria esta relacionada con la señal de control $u(t)$, esta señal es la encargada de controlar al sistema dinámico a tiempos largos y que se mantenga en una trayectoria deseada.

Otro método es el control por retroalimentación de estados, este método consiste en retroalimentar una de las variables del vector de estados del sistema, utilizando una señal de control proporcional a la diferencia entre esa variable y la señal de control. La ecuación diferencial para la variable elegida resulta:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) + K(x_i(t) - u(t)). \quad (3.4)$$

3.2.3. Técnicas clásicas de Ingeniería de control

Se ha trabajado mucho en técnicas de control clásico: proporcional integral (PI), proporcional integral derivativo (PID), lineal, alineal, estocástico, etc. Huberman y Lumer, por ejemplo, propusieron llevar un sistema de un estado x a un estado deseado x_s , modificando dinámicamente el valor del parámetro de control u , por medio de la ecuación:

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon G(x - x_s) \quad \varepsilon \ll 1. \quad (3.5)$$

donde ε es un parámetro que ajusta la dureza del control y G es una función lineal o no lineal de la diferencia entre ambos estados. Este método, conocido como Algoritmo de Control Adaptativo (Adaptive Control Algorithm - ACA), no requiere señales externas ni el acceso a los parámetros internos y la acción de control es inmune a pequeñas variaciones en los valores de los parámetros. Su principal desventaja es que no se conoce a priori cuál es la meta que se debe alcanzar, sino que se trabaja por “prueba y error”.

3.3. El problema general de la sincronización

La sincronización es de fundamental importancia en sistemas físicos y biológicos, por ejemplo, en sistemas nerviosos, células cardíacas, colonias de luciérnagas, ciclos circadianos y láseres acoplados. Por lo tanto, la comprensión de las interacciones mutuas entre diferentes sistemas no lineales acoplados y su sincronización representa un tema de investigación interesante. La sincronización de señales periódicas es un fenómeno bien conocido en Física, Ingeniería y muchas otras disciplinas científicas. En su aceptación tradicional, se dice que dos señales periódicas están sincronizadas cuando sus períodos son conmensurables. Una de las formas de lograr esta sincronización es mediante el empleo de fuerzas externas, como sucede en el caso de las comunicaciones electrónicas, donde se utiliza un oscilador patrón, de frecuencia muy estable (oscilador a cristal), pero de baja potencia como sincronismo de varios osciladores de inferior calidad y de

mayor potencia.

La sincronización de osciladores, desacoplados entre sí, resulta, en esencia, más simple que el alterar el sincronismo natural que se establece cuando osciladores casi idénticos se acoplan entre sí, constituyendo un sistema más robusto. Pero aún el problema más sencillo de varios osciladores independientes entre sí, sincronizados por una única señal periódica externa, presenta una estructura de resonancias múltiples muy compleja.

La posibilidad de que dos o más sistemas caóticos oscilen de manera sincronizada y coherente no es obvia debido a la conocida dependencia sensible con las condiciones iniciales. Sin embargo Pecora y Carroll demostraron que es posible acoplar dos sistemas caóticos, que parten de estados iniciales distintos, de modo tal que sus oscilaciones (que no tiene por qué ser periódicas) se sincronicen. Esta sincronización puede ser idéntica (las señales correspondientes en ambos sistemas coinciden exactamente) o bien generalizada (existe una relación funcional fija entre las variables de uno y otro sistema). En ambos casos, la sincronización es un proceso asintótico. También es posible lograr una sincronización de fase, que es una noción más débil y de alguna forma equivalente a la sincronización usual en señales periódicas.

La sincronización y el control son temas estrechamente vinculados. A partir de técnicas de sincronización se han podido inferir nuevos métodos para controlar sistemas caóticos y se han obtenido logros importantes en el control de arritmias cardíacas, reacciones químicas industriales de tipo oscilatorio y sistemas electrónicos. Ha habido un amplio desarrollo en la aplicación de técnicas de sincronización a sistemas de comunicaciones. Algunas de las más utilizadas se describen a continuación.

3.4. Sincronización de sistemas caóticos

Los fenómenos caóticos se presentan en muchos sistemas naturales y en dispositivos artificiales. Muchos trabajos de investigación se han centrado principalmente en el descubrimiento y caracterización del caos. Recientemente, se han propuesto varias ideas y técnicas para utilizar las características del caos para alcanzar ciertos objetivos. La sincronía de caos se ha empleado para incrementar la potencia de láseres, sincronizar circuitos electrónicos, controlar oscilaciones en reacciones químicas, estabilizar el ritmo cardíaco en animales y para seguridad en las comunicaciones mediante la codificación de información. Las aplicaciones del caos en diferentes campos de la ciencia y tecnología tienen su base en dos problemas, que son el control del caos y la sincronización de sistemas caóticos.

La sincronización de sistemas caóticos es el problema que se abordará en este trabajo de tesis; por tanto, se tratará de proporcionar una explicación más detallada del mismo.

La posibilidad de que dos o más sistemas caóticos oscilen de manera coherente y sincronizada no es obvia. Una de las principales características asociadas al comportamiento caótico, es la sensibilidad a condiciones iniciales. De lo anterior se pudiera concluir que la sincronización de sistemas caóticos no es factible, porque en sistemas

reales no es posible reproducir exactamente condiciones iniciales idénticas. Así, incluso una desviación infinitesimal en los parámetros o de las condiciones iniciales eventualmente dará lugar a la divergencia de trayectorias. En este contexto, el hecho de alcanzar sincronía de sistemas caóticos, pueden considerarse como un problema fascinante e importante.

3.4.1. Métodos de sincronización

La sincronización, que puede ser entendida como el ajuste de ritmos entre dos o más osciladores debido a sus interacciones, es un fenómeno presente tanto en sistemas naturales como artificiales y es un típico ejemplo de auto-organización. El análisis del fenómeno de sincronización de sistemas dinámicos ha sido objeto de un área de investigación muy activa desde su primera observación por el científico holandés Christian Huygens en 1673 quien observó sincronización en dos péndulos acoplados.

El estudio sistemático moderno, tanto experimental como teórico, de este fenómeno fue iniciado por Appleton, van der Pol y Andronov y Vitt que observaron sincronización en generadores eléctricos. Cobra popularidad hace aproximadamente 40 años, tiempo en el cual se produjeron diversidad de artículos y libros que tratan de una u otra manera sobre la sincronización en sistemas que van desde los biológicos tales como luciérnagas, grillos, cigarras, hormigas, sistemas ecológicos, diferentes comportamientos en poblaciones humanas, células cardíacas, neuronas en el sistema nervioso y en la relación fisiológica entre el corazón y pulmones, pasando por sistemas químicos (osciladores bioquímicos) y llegando a sistemas artificiales como circuitos electrónicos, etc.

Los grandes trabajos sobre la sincronización del caos se atribuyen a Fujisaka, Picovsky, Afraimovich, Pecora y Carroll quienes presentaron los primeros ejemplos sobre la sincronización unidireccional de sistemas caóticos acoplados. Sin embargo, tras el trabajo de Pecora y Carroll, se ha mostrado que dos comportamientos caóticos imprevisibles, que inicialmente evolucionan sobre trayectorias diferentes, pueden fundirse en una única trayectoria común si se acoplan adecuadamente. El desarrollo de los sistemas de comunicaciones utilizando caos nació a partir de esa idea y se ha afianzado, a través de trabajos fundamentales de un número importante de investigadores.

Los circuitos se presentan como una herramienta de una gran utilidad para estudiar una gran variedad de procesos, actuando como complemento entre el experimento en sí y la simulación numérica por computadora. Entre las ventajas que ofrece la simulación con circuitos se encuentran tanto el alto grado de desarrollo de componentes electrónicos como el bajo costo de los dispositivos. Y son varios los ejemplos de circuitos electrónicos utilizados para el estudio de Caos: el sistema de Lorenz, Rössler y Chua, por mencionar solo algunos.

El significado de sincronización de caos se refiere al proceso en el que se involucran dos o varios sistemas dinámicos que pueden ser iguales o distintos, ajustando sus propiedades para que tiendan a un comportamiento común (periódico o caótico). Este fenómeno de sincronización inicialmente hace que los sistemas evolucionen sobre atrac-

tores diferentes para que finalmente puedan lograr empatar, acoplarse y coincidir en una misma trayectoria. Es sorprendente que la sincronización entre dos sistemas caóticos aparece cuando se considera la dependencia de la dinámica caótica en las condiciones iniciales del sistema.

Hay que destacar que hay una gran variedad de esquemas de acoplamiento que conducen al régimen de sincronización. Dependiendo de la configuración particular del acoplamiento, podemos distinguir dos casos principales: acoplamiento unidireccional y acoplamiento bidireccional.

1. Acoplamiento unidireccional.

El sistema global está formado por dos subsistemas acoplados según una configuración de tipo maestro-esclavo Fig. 3.1. Eso implica que el comportamiento del sistema esclavo depende del comportamiento del sistema maestro, mientras que este último no se ve influido por el comportamiento del sistema esclavo. Como resultado, el sistema esclavo se encuentra forzado a seguir la dinámica del maestro. Dicho de otro modo, cuando la evolución de uno de los dos sistemas no es alterada por el acoplamiento la configuración resultante es un acoplamiento unidireccional.



Figura 3.1: Acoplamiento unidireccional.

2. Acoplamiento bidireccional.

Aquí ambos subsistemas son acoplados con otro, o cuando los dos subsistemas son conectados de tal forma que sus trayectorias están mutuamente influenciadas por el comportamiento del otro, con este tipo de acoplamiento no se puede hablar de un sistema maestro o esclavo Fig. 3.2. Esta situación ocurre en fisiología, entre el sistema cardiaco y el respiratorio, también se da en láseres con retroalimentación.



Figura 3.2: Acoplamiento bidireccional.

En telecomunicaciones la sincronización brinda comunicaciones seguras. Existen dos formas principales de acoplamiento, de forma unidireccional la cual consiste en sistemas maestro-esclavo donde el maestro es el sistema guía o de referencia y el esclavo es el sistema guiado el cual es dependiente del maestro. En el caso de ser bidireccional ambos sistemas interactúan entre sí y están acoplados uno con el otro creando una sincronización mutua. La sincronización entre dos sistemas, se consigue cuando uno de los sistemas modifica su comportamiento y sigue la trayectoria del otro sistema, o ambos oscilan en una nueva trayectoria en común.

Es sorprendente que la sincronización entre dos sistemas caóticos aparece cuando se considera la dependencia de la dinámica caótica en las condiciones iniciales del sistema. Cuando las condiciones iniciales en los sistemas caóticos, al tener la más mínima variación en el sistema, provoca que se obtengan resultados y evolucione en un sistema más complejo que al que originalmente se tenía, esto hace que a simple vista sea difícil la sincronización en sistemas caóticos reales, ya que en la práctica no es posible igualar las condiciones iniciales o hacer dos sistemas totalmente idénticos, para poder lograr la sincronización; se pueden crear sistemas muy parecidos pero siempre existirá un margen de error.

En el contexto de sistemas caóticos acoplados, diferentes tipos de sincronización han sido estudiadas recientemente, por ejemplo: sincronización completa, sincronización en fase, sincronización de retardo, sincronización generalizada, sincronización híbrida, sincronización proyectiva, sincronización practical, sincronización parcial y sincronización de desplazamiento vertical.

3.4.2. Tipos de Sincronización

Cuando uno trata con sistemas acoplados, la sincronización aparece como la igualdad de las variables de estado, mientras que evoluciona en el tiempo. Para el acoplamiento, debemos distinguir entre dos diferentes situaciones. Cuando la evolución de uno de los sistemas acoplados es inalterada por el acoplamiento, tenemos como resultado el acoplamiento unidireccional o maestro-esclavo. Por el contrario nos referimos a un acoplamiento bidireccional cuando ambos sistemas son conectados de manera tal que influyen mutuamente en su comportamiento.

En primer lugar, para establecer con la mayor claridad posible el análisis posterior, introduzcamos primero las siguientes definiciones para dos sistemas dinámicos de dos dimensiones con espacio de fase (x, u) y (y, v) , respectivamente:

Definición 1. Dos sistemas caóticos están en sincronización completa si las funciones de error convergen a cero, para un t suficientemente grande:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - v(t)| = 0. \quad (3.6)$$

Lo que significa que cada estado en el sistema esclavo es idéntico o está muy cerca de su estado correspondiente en el sistema maestro, en el límite del tiempo que va

al infinito. La sincronización puede entenderse como un problema de estabilización o como un problema de seguimiento de trayectoria. La estabilización consiste en obtener un control que lleve a las trayectorias de un sistema dinámico que representa el error de sincronización a converger a cero. El problema de seguimiento de trayectorias consiste en encontrar un control que haga que las trayectorias del sistema esclavo sigan las trayectorias del sistema maestro.

Definición 2. Dos sistemas caóticos están en sincronización práctica si las funciones de error satisfacen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| \leq \kappa \quad (3.7)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - v(t)| \leq \phi \quad (3.8)$$

para valores dados positivos $\kappa, \phi > 0$.

Esta definición es necesaria porque, en muchos casos, las funciones de error no convergen precisamente a cero con la evolución del tiempo, pero en la práctica, aún podemos considerar los sistemas como sincronizados. Sin embargo, en la implementación de circuitos analógicos, los componentes electrónicos tienen tolerancias, lo que hace imposible reproducir las condiciones iniciales de las simulaciones numéricas.

Definición 3. Dos sistemas caóticos están en sincronización de desplazamiento vertical si las funciones de error satisfacen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - (y(t) + \Lambda)| = 0 \quad (3.9)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - (v(t) + \Pi)| = 0 \quad (3.10)$$

Es decir, las funciones de error convergen a cero para ciertos valores de Λ y Π (lo que hemos llamado constantes de desplazamiento vertical de Λ y Π).

Definición 4. Dos sistemas caóticos son de sincronización parcial cuando solo una parte de las variables de estado se sincronizan y las demás no.

En ciertos casos se puede lograr una sincronización completa en un solo estado del sistema esclavo mientras que en el otro se puede lograr una sincronización práctica o nula.

3.4.3. Método de Pecora y Carroll (PC)

Iniciamos considerando un sistema caótico cuya evolución temporal está dada por la siguiente ecuación:

$$\dot{z} = F(z), \quad (3.11)$$

Aquí $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ es un vector de estado n -dimensional. El esquema PC consiste al suponer un sistema dinámico de Ec. (3.11), y descomponerlo en tres subsistemas.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u, w), \\ \dot{w} &= g(u, w), \quad \text{Maestro} \\ \dot{w}' &= h(u, w'). \quad \text{Esclavo} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Donde $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_k)$, $w' = (w'_1, w'_2, \dots, w'_l)$ y $n = m + k + l$. El segundo subsistema de Ec. (3.12) define el sistema maestro, considerando el tercer subsistema de Ec. (3.12) que representa el sistema esclavo, su evolución es guiada por la trayectoria del maestro por medio de una señal de control u (Fig. 3.3).

Así la sincronización completa es definida como una identidad entre las trayectorias del sistema respuesta w y una réplica w' de esta $w' = h(u, w')$ para la misma señal de control caótica $u(t)$. La existencia de la sincronización completa implica que la respuesta del sistema es asintóticamente estable ($\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, siendo $e(t)$ el error de sincronización dado por $e(t) = |w(t) - w'(t)|$). En otras palabras, el sistema olvida sus condiciones iniciales, evolucionando en un atractor caótico. Este tipo de sincronización se puede lograr siempre que los exponentes de Lyapunov del sistema esclavo bajo las órdenes del maestro (los exponentes condicionales de Lyapunov) sean negativas, es decir el sistema es conservativo. Como condición se cumple solo si u es una señal de sincronización.

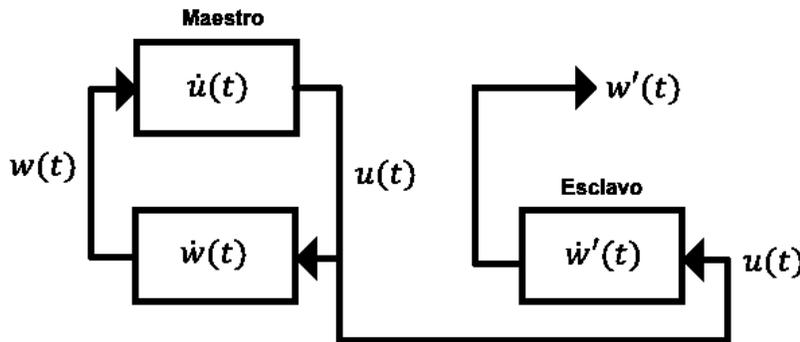


Figura 3.3: Método de Pecora y Carroll.

3.4.4. Método de APD.

El método de descomposición activa-pasiva (APD) nos proporciona un esquema maestro-esclavo mucho más general que el PC para la sincronización de sistemas caóticos idénticos. El método APD considera un sistema caótico autónomo y lo reescribe como un sistema no autónomo de la siguiente forma:

$$\dot{x} = f(x, u(t)). \quad (3.13)$$

donde $u(t)$ es la señal de control $u = h(x)$ o $\dot{u} = h(x, u)$. La sincronización completa se refiere a la relación entre el sistema Ec. (3.13) y una réplica (el sistema de esclavo) que es controlado por la misma señal $u(t)$. Cabe mencionar que esta última afirmación no

excluye un comportamiento caótico de $x(t)$, ya que es controlado por una señal caótica $u(t)$.

Para poder ilustrar mejor esta configuración, L. Kocarev y U. Parlitz analizaron el sistema propuesto por Lorenz.

$$\text{Maestro : } \begin{cases} \dot{x}_1 = 10(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = 28x_1 - y_1 - x_1z_1, \\ \dot{z}_1 = x_1y_1 - \frac{8}{3}z_1. \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\text{Esclavo : } \begin{cases} \dot{x}_2 = -10x_2 + u(t), \\ \dot{y}_2 = 28x_2 - y_2 - x_2z_2, \\ \dot{z}_2 = x_2y_2 - \frac{8}{3}z_2. \end{cases} \quad (3.15)$$

Controlado por $u(t) = \alpha y_1(t)$, se puede comprobar mediante el uso de los exponentes de Lyapunov que el sistema se sincroniza con el sistema esclavo, al variar el parámetro α considerado en la señal de control $u(t)$.

Mientras el esquema PC permite para un sistema caótico dado sólo un número finito de posibles descomposiciones para producir la sincronización, aquí la libertad para elegir la señal de control $u(t)$, hace el esquema APC muy poderoso y general extrema flexibilidad en aplicaciones. Esta cualidad puede ser útil en la aplicación a comunicaciones. Por ejemplo, sean dos sistemas, uno emisor y el otro receptor, los cuales tienen un comportamiento caótico, pero sincronizados entre ellos a través de una señal de control $u(t)$.

Capítulo 4

Sincronización maestro-esclavo

4.1. Sincronización mediante acoplamiento disipativo

Analizamos el acoplamiento disipativo utilizando los osciladores van der Pol-Duffing y Φ^6 Duffing en la configuración maestro-esclavo. En la configuración maestro-esclavo, el oscilador de van der Pol-Duffing actúa como sistema maestro y el oscilador de Φ^6 Duffing como sistema esclavo. Los valores de los parámetros para las simulaciones numéricas son los siguientes: $\mu = 0.6$, $\gamma = -1$, $\eta = -0.8$, $\varepsilon = 1$, $A_1 = 1$, $\omega_1 = 1.5$, $\sigma = 0.05$, $\alpha = 1$, $\beta = -0.6$, $\delta = 0.06$, $A_2 = 4$ y $\omega_2 = 0.5$, con condiciones iniciales $x(0) = 0.8$, $u(0) = 1$, $y(0) = 2$ y $v(0) = -1$. Para este caso tenemos

$$\text{Maestro} : \begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = \mu(1 - x^2)u - \gamma x - \eta x^2 - \varepsilon x^3 + \mathbf{A}_1 \cos(\omega_1 t), \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\text{Esclavo} : \begin{cases} \dot{y} = v, \\ \dot{v} = -\sigma v - \alpha y - \beta y^3 - \delta y^5 + \mathbf{A}_2 \cos(\omega_2 t) + \mathbf{K}(u - v). \end{cases} \quad (4.2)$$

En este caso, $\mathbf{K}(u - v)$ representa el acoplamiento disipativo, siendo \mathbf{K} utilizado como parámetro de control. Para $\mathbf{K} = 0$ los osciladores están desacoplados. El acoplamiento disipativo es una realimentación lineal que puede interpretarse como una perturbación para cada oscilador por una señal proporcional a la diferencia de sus velocidades, introducido en la parte de la aceleración del sistema esclavo. Nos interesa estudiar la evolución del sistema en función de la constante de acoplamiento \mathbf{K} . Físicamente, el acoplamiento disipativo $\mathbf{K}(u - v)$ lleva a los dos sistemas que interactúen en un régimen más homogéneo donde sus estados correspondientes coinciden. Como resultado, este acoplamiento favorece la sincronización entre los osciladores.

Las funciones de error $|x(t) - y(t)|$ y $|u(t) - v(t)|$ se obtienen en función del parámetro de control \mathbf{K} , que va variando en pequeños pasos, de 0 a 200. Una forma de corroborar si dos sistemas están sincronizados o no es a través de las funciones de error a medida que el tiempo tiende a infinito. Para nuestro caso, las funciones de error $|x(t) - y(t)|$ y $|u(t) - v(t)|$, nos permiten encontrar el rango de valores para el cual se alcanza la sincronización en las proyecciones sobre los planos (x, y) y (u, v) (ver Figs. 4.1 (a) y (b)).

Observe que en la función de error $|x(t) - y(t)|$ no existe una sincronización completa, ya que la función de error no converge a cero.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| \rightarrow \text{constante} \neq 0.$$

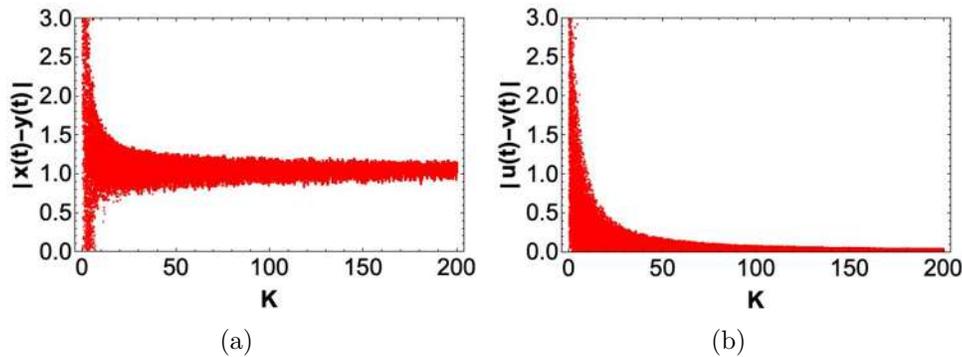


Figura 4.1: Las funciones de error: En (a) se representa $|x(t) - y(t)|$ y en (b) $|u(t) - v(t)|$, ambos en función del parámetro \mathbf{K} .

Para la proyección sobre el plano (u, v) , se podría lograr una sincronización completa para valores bastante grandes de \mathbf{K} . Para el acoplamiento disipativo, los errores $e_1 = x - y$ y $e_2 = u - v$ se determinan restando las Ecs. (4.1) y (4.2), dados

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x} - \dot{y} = e_2, \\ \dot{e}_2 &= \mu(1 - x^2)u - \gamma x - \eta x^2 - \varepsilon x^3 + \mathbf{A}_1 \cos(\omega_1 t) \\ &\quad + \sigma v + \alpha y + \beta y^3 + \delta y^5 - \mathbf{A}_2 \cos(\omega_2 t) - \mathbf{K} \dot{e}_1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

El comportamiento de las funciones de error se muestra en la Fig. 4.2 en función de t , para un valor de $\mathbf{K} = 150$. Observe que $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| \approx 1.3$. En la Fig. 4.3 (a) se puede apreciar a partir de las soluciones de $x(t)$ y $y(t)$ que las señales oscilan sincrónicamente con un desplazamiento vertical, en la Fig. 4.3 (b) las soluciones de $u(t)$ y $v(t)$, muestran que las señales están en sincronización completa. Por tanto, el acoplamiento disipativo produce una sincronización parcial en el sistema esclavo.

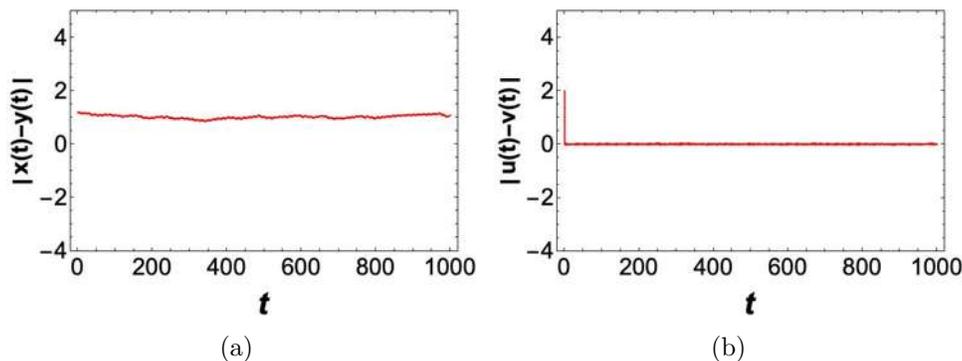


Figura 4.2: Funciones de error en (a) $|x(t) - y(t)|$ y en (b) $|u(t) - v(t)|$ como función de t , para un valor de $\mathbf{K} = 150$.

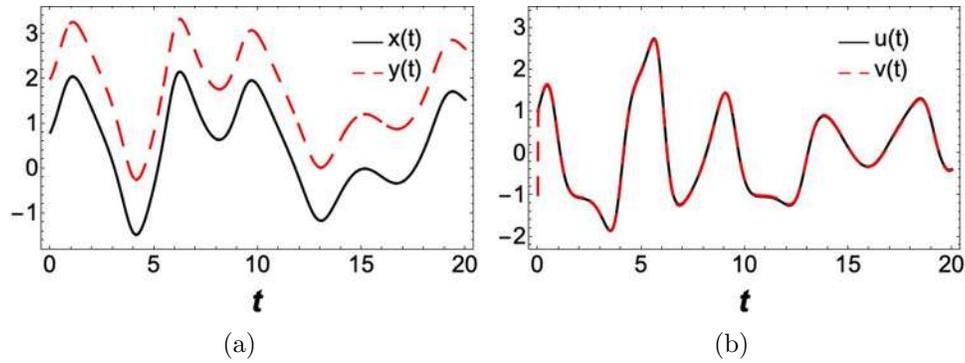


Figura 4.3: Soluciones: en (a) $x(t)$ y $y(t)$. En (b) $u(t)$ y $v(t)$, para un valor de $\mathbf{K} = 150$.

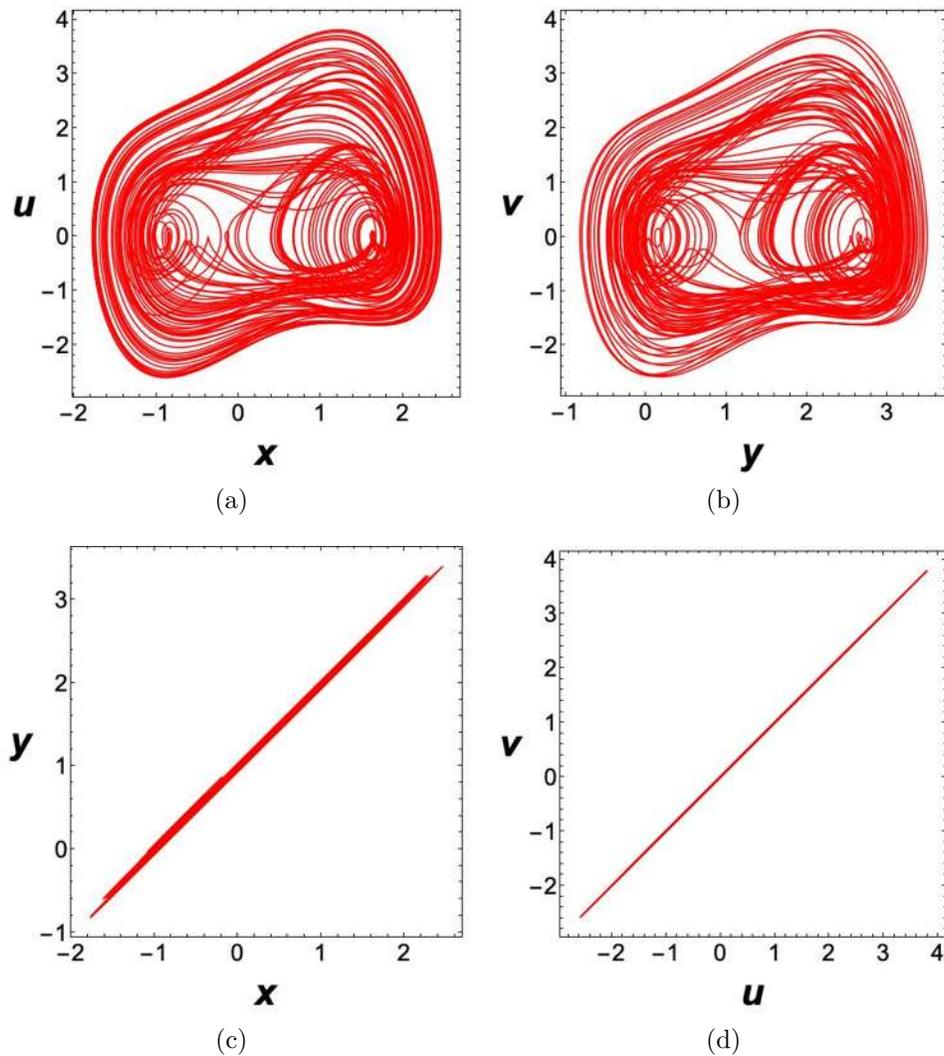


Figura 4.4: Acoplamiento disipativo, para un valor de $\mathbf{K} = 150$. En (a) el oscilador Duffing-van der Pol. En (b) el oscilador Duffing Φ^6 . En (c) y (d) proyecciones sobre los planos (x, y) y (u, v) respectivamente.

Analicemos las proyecciones sobre los planos (x, y) y (u, v) para un valor específico de $\mathbf{K} = 150$. En este caso, el oscilador de van der Pol-Duffing se encuentra en un régimen caótico. En la Fig. 4.4 (a) se muestra el comportamiento del oscilador de van der Pol-Duffing (sistema maestro) y en la Fig. 4.4 (b) el oscilador de Φ^6 Duffing (sistema esclavo). En la Fig. 4.4 (c) podemos apreciar que en la proyección sobre el plano (x, y) hay sincronización de desplazamiento vertical, mientras que en la proyección sobre el plano (u, v) sí hay sincronización completa (Fig. 4.4 (d)).

4.1.1. Análisis analítico

Para comprender el comportamiento numérico de la sincronización del desplazamiento vertical que presenta el caso de acoplamiento disipativo en el oscilador Duffing-van der Pol acoplado al oscilador Duffing Φ^6 , utilizamos el método de perturbación para resolver el sistema. En este caso, el oscilador Duffing-van der Pol se utiliza como sistema maestro y el oscilador Duffing Φ^6 desempeña el papel del sistema esclavo. El comportamiento del sistema maestro representado por la función $u = \dot{x}$ se inyecta en el sistema esclavo a través de la función lineal $\mathbf{K}(u - v)$. De esta forma, solo necesitamos concentrarnos en la solución del sistema esclavo, con una fuerza externa provista por el sistema maestro (\dot{x}):

$$\ddot{y} + (\mathbf{K} + \lambda)\dot{y} + \alpha y + \beta y^3 + \delta y^5 = \mathbf{A}_2 \cos(\omega_2 t) + \mathbf{K}\dot{x}. \quad (4.4)$$

Aunque \dot{x} es, en general, una función cuasi-periódica con un comportamiento caótico, por simplicidad y para demostrar cómo ocurre tal sincronización, consideremos por ejemplo la función armónica $\dot{x} = \mathbf{A} \cos(\omega t)$.

$$\ddot{y} + (\mathbf{K} + \lambda)\dot{y} + \alpha y + \beta y^3 + \delta y^5 = \mathbf{A}_2 \cos(\omega_2 t) + \mathbf{K} \mathbf{A} \cos(\omega t). \quad (4.5)$$

Como indican los resultados numéricos, esa sincronización se alcanza para valores bastante grandes de \mathbf{K} . Así, asumimos que $\mathbf{K} \mathbf{A} \gg \mathbf{A}_2, \beta, \delta$ y λ . Entonces la Ec. 4.4 se puede escribir como

$$\ddot{y} + 2\Gamma\dot{y} + \omega_0^2 y + \beta y^3 + \delta y^5 = \mathbf{K} \mathbf{A} \cos(\omega t), \quad (4.6)$$

donde $\omega_0^2 = \alpha$ y $2\Gamma = \mathbf{K} + \lambda$. De acuerdo con el método de perturbación, proponemos la solución perturbativa como

$$\begin{aligned} y &= y^{(0)} + \epsilon y^{(1)} + \epsilon^2 y^{(2)} + \dots, \\ \beta &= \epsilon \beta^{(0)} + \epsilon^2 \beta^{(1)} + \dots, \\ \delta &= \epsilon \delta^{(0)} + \epsilon^2 \delta^{(1)} + \dots, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde, como siempre, $y^{(n)}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) es la solución de orden n , $\beta^{(n)}$ y $\delta^{(n)}$ son respectivamente los términos n de la expansión perturbativa de los parámetros β y α . Sustituimos 4.7 en la Ec. 4.6 y mantenemos los términos de y hasta orden 1, y a orden 0 en β y α para obtener:

$$\ddot{y}^{(0)} + 2\Gamma\dot{y}^{(0)} + \omega_0^2 y^{(0)} = \mathbf{K} \mathbf{A} \cos(\omega t), \quad (4.8)$$

$$\ddot{y}^{(1)} + 2\Gamma\dot{y}^{(1)} + \omega_0^2 y^{(1)} = -\beta^{(0)} [y^{(0)}]^3 - \delta^{(0)} [y^{(0)}]^5. \quad (4.9)$$

Como podemos ver, la Ec. 4.8 representa un oscilador amortiguado con fuerza externa $\mathbf{K} \mathbf{A} \cos(\omega t)$, cuya solución general es

$$y^{(0)}(t) = y_h^{(0)}(t) + y_p^{(0)}(t), \quad (4.10)$$

Como $\Gamma^2 > \Omega^2$, donde la solución transitoria es

$$y_h^{(0)}(t) = e^{-\Gamma t} \left[C_1 e^{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} \right], \quad (4.11)$$

La solución estable (estacionaria) se puede expresar como:

$$y_p^{(0)}(t) = a \cos(\omega t - \phi), \quad (4.12)$$

donde

$$a = \frac{\mathbf{K} \mathbf{A}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma\omega)^2}}, \quad \phi = \arctan \left[\frac{2\Gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]. \quad (4.13)$$

Nótese también que para este caso $\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} \approx \Gamma$, donde $\omega_0^2/\Gamma^2 \ll 1$. En estado estacionario y para \mathbf{K} suficientemente grande, $a \rightarrow \mathbf{A}/w$ y $\phi \rightarrow \pi/2$. Por tanto la solución resulta ser $y_p^{(0)}(t) = (\mathbf{A}/w) \sin(\omega t)$, cuya derivada es precisamente la función inyectada en la Ec. (4.6). Analicemos ahora la solución de primer orden $y^{(1)}$ de la Ec. (4.9). La solución transitoria es similar a la Ec. (4.8), pero en principio, con diferentes constantes. Para la solución estacionaria es conveniente expresar la función $\sin^n(\omega t)$, $n = 3, 5$, en términos de funciones trigonométricas linealmente independientes, por ejemplo: $\sin^3(\omega t) = \frac{1}{4}(3 \sin(\omega t) - \sin 3(\omega t))$. Entonces, la solución estable se puede expresar como

$$y_p^{(1)}(t) = \sum_{n=1}^5 (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)), \quad (4.14)$$

que sustituyendo en Ec. 4.9, encontramos los diferentes coeficientes a_n y b_n . Para \mathbf{K} suficientemente grande, $a_n \sim -1/\mathbf{K}$ y $b_n \sim -1/\mathbf{K}^2$. Así la contribución $y_p^{(1)}(t)$ es pequeña comparada con respecto a $y_p^{(0)}(t)$ y la contribución dominante $y_p(t)$ viene de $y_p^{(0)}(t)$, como se esperaba. Podemos establecer la solución general como

$$y(t) = \mathbf{C} + \frac{\mathbf{A}}{\omega} \sin(\omega t). \quad (4.15)$$

De esta forma, obtenemos el comportamiento anunciado, para t y \mathbf{K} grandes, obtenemos: $\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{x}(t) - \dot{y}(t)| = 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - (y(t) - \mathbf{C})| = 0$, donde la constante \mathbf{C} depende de las condiciones iniciales. Para el caso de una solución proporcionada por el sistema maestro, que en general es una función cuasi-periódica y se inyecta en el sistema esclavo, podemos seguir un método similar. Ahora bien, una complicación proviene de la elección adecuada de la función cuasi-periódica. Sin embargo, podemos por ejemplo proponer una solución de la forma $\dot{x} = \mathbf{A}(t) \cos(\omega(t)t)$, donde la amplitud y la frecuencia son de variación lenta en el tiempo.

Para mostrar de manera numérica el comportamiento de desplazamiento vertical cuando se inyecta una función armónica $\dot{x} = \cos(t)$ con una constante de acoplamiento

$\mathbf{K} = 150$, los valores de los parámetros para las simulaciones numéricas son los siguientes: $\sigma = 0.05$, $\alpha = 1$, $\beta = -0.6$, $\delta = 0.06$, $A_2 = 4$ y $\omega_2 = 0.5$, con condiciones iniciales $y(0) = 2$ y $\dot{y}(0) = -1$. La Ec. (4.6) se puede escribir de la siguiente manera

$$\ddot{y} + 150.05\dot{y} + y - 0.6y^3 + 0.06y^5 = 150 \cos(t). \quad (4.16)$$

La solución de la Ec. (4.16) a $y^{(0)}(t)$ es

$$y^{(0)}(t) = 0.013e^{-150t} - 0.0067 \cos(t) + 2 + \sin(t). \quad (4.17)$$

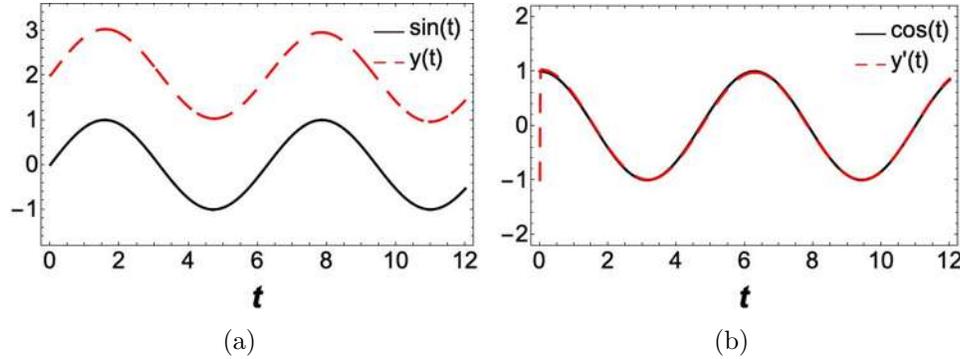


Figura 4.5: Soluciones: En (a) $\sin(t)$ y $y(t)$. En (b) $\cos(t)$ y $\dot{y}(t)$, para un valor de $\mathbf{K} = 150$.

En la Fig. (4.5) (a) se muestra que la solución $y(t) \approx 2 + \sin(t)$, mientras que en la Fig. (4.5) (b) se logra la sincronización completa. Para el acoplamiento disipativo se puede obtener una sincronización completa en ambos estados del sistema esclavo solo si las condiciones iniales del sistema esclavo y maestro cumplen $x(0) = y(0)$, cuando $x(0) \neq y(0)$ se tendrá una sincronización de desplazamiento vertical.

4.2. Sincronización mediante acoplamiento elástico y disipativo

En el esquema clásico maestro-esclavo para ciertos sistemas caóticos con diferentes dinámicas, no es posible alcanzar la sincronización. Específicamente, hay casos en los que es imposible encontrar a \mathbf{K} tal que los sistemas se sincronicen. En algunos casos, los sistemas alcanzan una sincronización práctica o completa en un sólo estado del sistema esclavo, dependiendo de la fuerza de acoplamiento \mathbf{K} . Se han propuesto variaciones al esquema maestro-esclavo para resolver los problemas que aparecen cuando se utilizan dos sistemas caóticos con diferentes dinámicas [47, 48, 49, 50]. En particular, Uriostegui et. al, propusó un esquema maestro-esclavo modificado que conduce a una sincronización completa incluso en sistemas donde falla el esquema clásico maestro-esclavo. Para los osciladores van der Pol-Duffing y Φ^6 Duffing, consideramos los acoplamientos elástico y disipativo previamente reportados por Uriostegui et. al. El acoplamiento elástico puede verse como una perturbación para cada oscilador proporcional a la diferencia de la posición $K_1(x - y)$, que se introduce en la velocidad del sistema esclavo. El acoplamiento disipativo también utiliza otra retroalimentación lineal, que puede verse como

perturbación para cada oscilador proporcional a la diferencia de la velocidad, $K_2(u-v)$, introducida en la aceleración del sistema esclavo.

Para los osciladores van der Pol-Duffing y Φ^6 Duffing, las ecuaciones que gobiernan la evolución son

$$\text{Maestro : } \begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = \mu(1-x^2)u - \gamma x - \eta x^2 - \varepsilon x^3 + \mathbf{A}_1 \cos(\omega_1 t), \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\text{Esclavo : } \begin{cases} \dot{y} = v + K_1(x-y), \\ \dot{v} = -\sigma v - \alpha y - \beta y^3 - \delta y^5 + \mathbf{A}_2 \cos(\omega_2 t) + K_2(u-v). \end{cases} \quad (4.19)$$

Los errores $e_3 = x - y$ y $e_4 = u - v$, se determinan restando las Ecs. (4.18) y (4.19), obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{e}_3 &= \dot{x} - \dot{y} = u - v - K_1 e_3, \\ e_4 &= u - v = \dot{e}_3 + K_1 e_3, \\ \dot{e}_4 &= \mu(1-x^2)u - \gamma x - \eta x^2 - \varepsilon x^3 + \mathbf{A}_1 \cos(\omega_1 t) \\ &\quad + \sigma v + \alpha y + \beta y^3 + \delta y^5 - \mathbf{A}_2 \cos(\omega_2 t) - K_2 e_4. \end{aligned} \quad (4.20)$$

La constante K_1 corresponde al acoplamiento elástico y K_2 al acoplamiento disipativo. Por lo tanto, $K_1(x-y) = K_1 e_3$ y $K_2(u-v) = K_2(\dot{e}_3 + K_1 e_3)$. Como antes, para el caso $K_1 = K_2 = 0$, los osciladores están desacoplados. Para estudiar la dinámica del sistema, variamos los acoplamientos K_1 o K_2 manteniendo el otro constante. Estudiamos las funciones de error $|x(t) - y(t)|$ y $|u(t) - v(t)|$. Calculamos $|x(t) - y(t)|$ manteniendo $K_2 = 100$ y variando K_1 en un rango de 0 a 10. De manera similar, obtenemos la función de error $|u(t) - v(t)|$ con $K_1 = 5$ y variando K_2 en un rango de 0 a 200. Como se puede apreciar en las Figs. 4.6 (a) y (b), obtenemos una sincronización completa en las proyecciones sobre los planos (x, y) y (u, v) , ya que las funciones de error se anulan a medida que aumentan los valores de K_1 y K_2 . Los gráficos de las funciones de error $|x(t) - y(t)|$ y $|u(t) - v(t)|$ en función de t , para los valores de $K_1 = 2$ y $K_2 = 150$, se muestran en la Fig. 4.7.

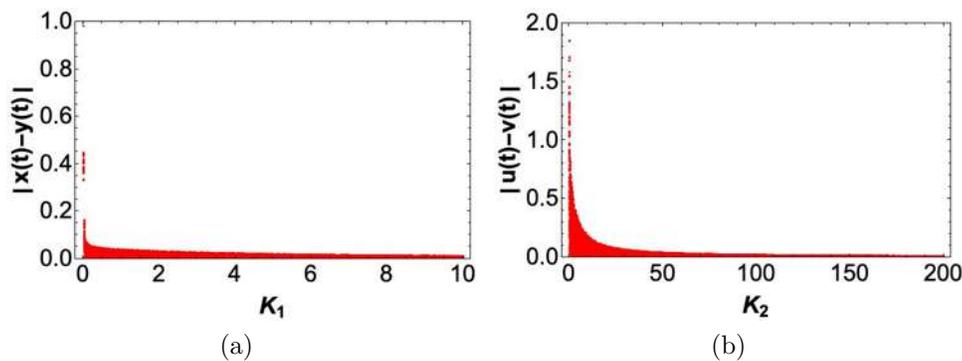


Figura 4.6: Funciones de error. En (a) se representa $|x(t) - y(t)|$, con $K_2 = 100$ y variando K_1 . En (b) $|u(t) - v(t)|$, con $K_1 = 5$ y variando K_2

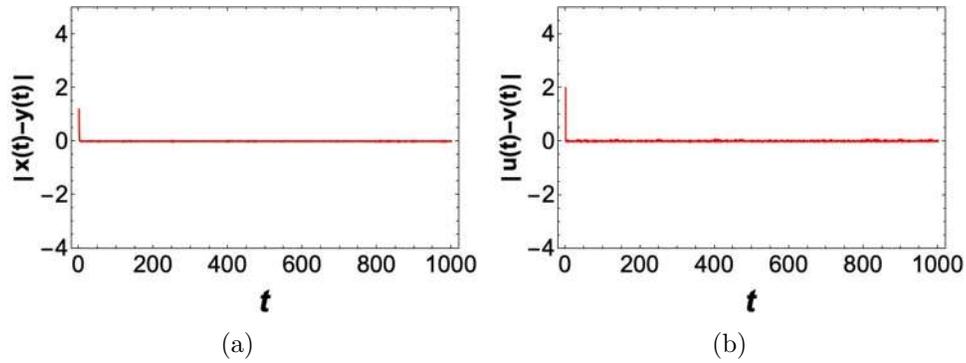


Figura 4.7: Funciones de error para $|x(t) - y(t)|$ y $|u(t) - v(t)|$ como una función de (t) , con respectivos valores de $K_1 = 2$ y $K_2 = 150$.

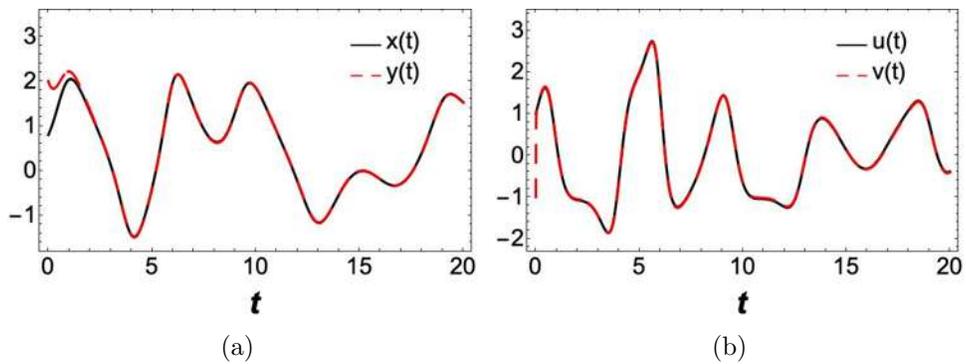


Figura 4.8: Soluciones: En (a) $x(t)$ y $y(t)$. En (b) $u(t)$ y $v(t)$ con respectivos valores de $K_1 = 2$ y $K_2 = 150$.

Como se puede observar en las Figs. 4.8 (a) y (b), las soluciones de $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, $v(t)$ muestran que las señales están en sincronización completa. Ahora analizamos las proyecciones sobre los planos (x, y) y (u, v) , para valores de $K_1 = 2$ y $K_2 = 150$. En las Figs. 4.9 (a) y (b) se muestra el comportamiento de los osciladores van der Pol-Duffing y Φ^6 Duffing, respectivamente. En las Figs. 4.9 (c) y (d) podemos ver que se logra una sincronización completa, ya que las funciones de error en las proyecciones sobre los planos (x, y) y (u, v) se traza como una línea recta a 45° en ambos casos.

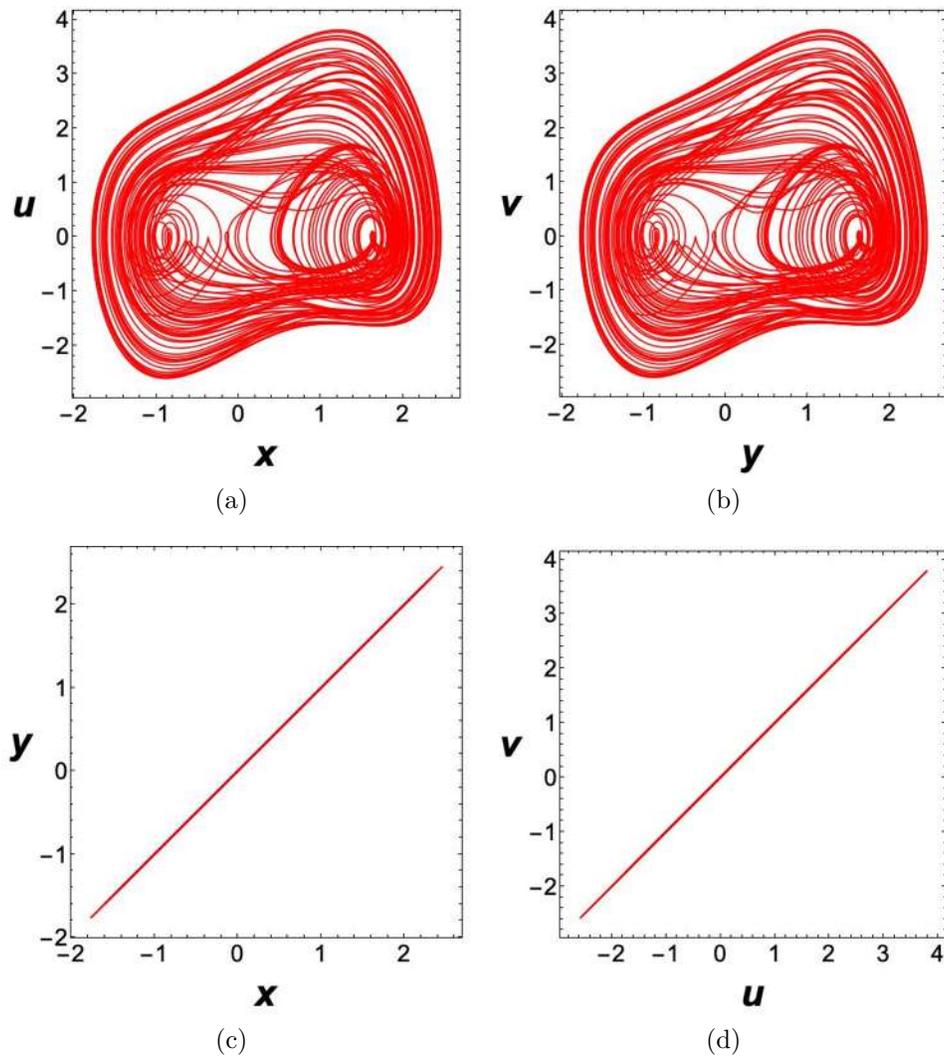


Figura 4.9: Acoplamiento elástico y disipativo, para un valores de $K_1 = 2$ y $K_2 = 150$. En (a) el oscilador de van der Pol-Duffing. En (b) el oscilador de Φ^6 Duffing. En (c) y (d) proyecciones sobre los planos (x, y) y (u, v) respectivamente.

4.2.1. Análisis analítico

Realicemos ahora un análisis similar presentado en la sección 4.1.1 anterior. Nuevamente nos concentramos sólo en el sistema esclavo en Ec. 4.19, que se puede expresar como

$$\ddot{y} + (K_1 + K_2 + \sigma)\dot{y} + (K_1(K_2 + \sigma) + \alpha)y + \beta y^3 + \delta y^5 = A_2 \cos(\omega_2 t) + (K_1 + K_2)\dot{x} + K_1(K_2 + \sigma)x. \quad (4.21)$$

Una vez más estudiamos el caso de una función periódica insertada en el sistema esclavo. Proponemos la función $\dot{x} = A \cos(\omega t)$ y $x = (A/\omega) \sin(\omega t)$. Para el caso de $(K_1 + K_2)A \gg A_2$, las funciones dominantes son $(K_1 + K_2)\dot{x}$ y $(K_1(K_2 + \sigma))x$, y la Ec. (4.21) se reduce a

$$\ddot{y} + 2\Gamma\dot{y} + \Omega^2 y + \beta y^3 + \delta y^5 = (K_1 + K_2)A \cos(\omega t) + \frac{K_1(K_2 + \sigma)}{\omega} A \sin(\omega t), \quad (4.22)$$

donde $\Omega^2 = K_1(K_2 + \sigma) + \alpha$ y $2\Gamma = K_1 + K_2 + \sigma$. Aplicando el método de perturbación, la solución general $Y(t) = y^{(0)}(t) + \epsilon y^{(1)}(t) + \dots$ y considerando $\beta = \epsilon\beta^{(0)} + \dots$ y $\delta = \epsilon\delta^{(0)} + \dots$ como parámetros perturbativos, obtenemos, la solución hasta primer orden

$$\ddot{y}^{(0)} + 2\Gamma\dot{y}^{(0)} + \Omega^2 y^{(0)} = (K_1 + K_2)A \cos(\omega t) + \frac{K_1(K_2 + \sigma)}{\omega} A \sin(\omega t), \quad (4.23)$$

$$\ddot{y}^{(1)} + 2\Gamma\dot{y}^{(1)} + \Omega^2 y^{(1)} = -\beta^{(0)}[y^{(0)}]^3 - \delta^{(0)}[y^{(0)}]^5. \quad (4.24)$$

Como $\Gamma^2 > \Omega^2$, la solución transitoria de 4.23 es

$$y_h^{(0)}(t) = e^{-\Gamma t} \left[C_3 e^{\sqrt{\Gamma^2 - \Omega^2} t} + C_4 e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \Omega^2} t} \right], \quad (4.25)$$

La solución estable se puede expresar como:

$$y_p^{(0)}(t) = a_e \cos(\omega t) + a_i \sin(\omega t) = a \cos(\omega t - \phi), \quad (4.26)$$

donde

$$a_e = \frac{(\Omega^2 - \omega^2)(K_1 + K_2)A - 2\Gamma K_1(K_2 + \sigma)A}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma\omega)^2} \quad (4.27)$$

$$a_i = \frac{K_1(K_2 + \sigma)A}{\omega(\Omega^2 - \omega^2)} + \frac{(2\Gamma\omega)(K_1 + K_2)A - 2\Gamma K_1(K_2 + \sigma)A}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma\omega)^2} \quad (4.28)$$

y

$$a = \sqrt{a_e^2 + a_i^2}, \quad \tan \phi = \frac{a_i}{a_e}. \quad (4.29)$$

En este caso, podemos hacer las siguientes aproximaciones

$$\Gamma \approx \frac{K_2 + K_1}{2}, \quad \Omega^2 \approx K_1 K_2, \quad \sqrt{\Gamma^2 - \Omega^2} \approx \frac{K_2 - K_1}{2}, \quad (4.30)$$

que permiten establecer la solución en orden 0 como

$$y^{(0)}(t) \approx (C_3 e^{-K_1 t} + C_4 e^{-K_2 t}) + a \cos(\omega t - \phi). \quad (4.31)$$

De manera similar a la discusión del acoplamiento disipativo, para K_2 suficientemente grande, $a \rightarrow A$ y $\phi \rightarrow \pi/2$. Así $y_p^{(0)}(t) \approx (A/\omega) \sin(\omega t)$, que se inserta en Ec. 4.24. Una vez más, encontramos que las contribuciones $y_p^{(1)}(t) \sim 1/K_2$ en el mejor de los casos y, en consecuencia, pueden despreciarse. Así la contribución $y_p^{(1)}(t)$ es pequeña comparada con respecto a $y_p^{(0)}(t)$. Note que, para $t \rightarrow \infty$ la solución es independiente de la condición inicial, entonces:

$$y(t) \approx \frac{A}{\omega} \sin(\omega t), \quad (4.32)$$

que demuestran la sincronización completa, ya que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{x}(t) - \dot{y}(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0.$$

Para mostrar de manera numérica el comportamiento de este acoplamiento cuando se inyectan dos funciones armónicas $\dot{x} = \cos(t)$ y $x = \sin(t)$ con constante de acoplamiento $K_1 = 5$ y $K_2 = 150$, los valores de los parámetros para las simulaciones numéricas son los siguientes: $\sigma = 0.05$, $\alpha = 1$, $\beta = -0.6$, $\delta = 0.06$, $A_2 = 4$ y $\omega_2 = 0.5$, con condiciones iniciales $y(0) = 2$ y $\dot{y}(0) = -1$. La Ec. (4.22) se puede escribir de la siguiente manera

$$\ddot{y} + 155.05\dot{y} + 751.25y - 0.6y^3 + 0.06y^5 = 155 \cos(t) + 750.25 \sin(t). \quad (4.33)$$

La solución de la Ec. (4.33) a $y^{(0)}(t)$ es

$$y^{(0)}(t) = -0.00002e^{-150t} + 2e^{-5t} + \sin(t). \quad (4.34)$$

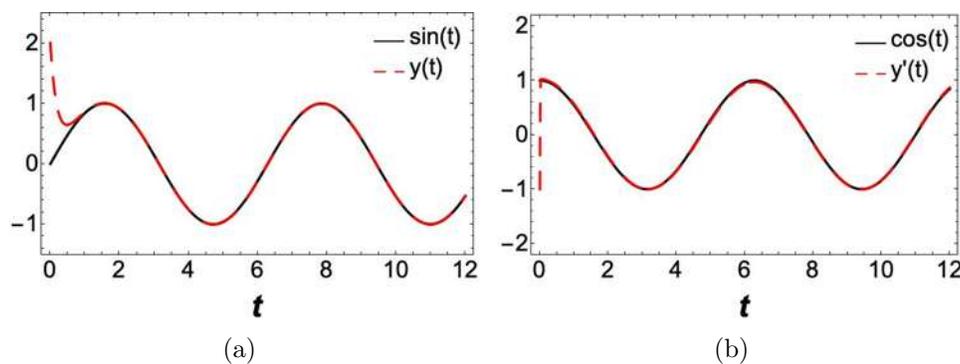


Figura 4.10: Soluciones: En (a) $\sin(t)$ y $y(t)$. En (b) $\cos(t)$ y $\dot{y}(t)$, para valores de $K_1 = 5$ y $K_2 = 150$.

En la Fig. 4.10 (a) y (b) se muestra que se logra la sincronización completa en ambos estados del sistema esclavo. La solución estable a $y^{(0)}(t) \approx \sin(t)$ para un tiempo $t \rightarrow \infty$.

Capítulo 5

Conclusiones

Los osciladores de van der Pol-Duffing y Φ^6 Duffing son sistemas caóticos no autónomos que han sido bien estudiados en la literatura. Aquí, hemos analizado la sincronización entre los osciladores van der Pol-Duffing y Φ^6 Duffing tomando dos acoplamientos diferentes: el disipativo y una combinación de acoplamientos elástico y disipativo. A través de los parámetros de control \mathbf{K} , \mathbf{K}_1 y \mathbf{K}_2 , conseguimos el rango donde se puede alcanzar la sincronización. Encontramos que la sincronización se obtiene para valores grandes del parámetro de control. Para este sistema, cuando se usa el acoplamiento disipativo, existe sincronización completa solo en la proyección sobre el plano (u, v) y sincronización de desplazamiento vertical en la proyección del plano (x, y) . Este comportamiento se puede entender si recurrimos al método de perturbación. De hecho, pudimos encontrar soluciones perturbativas al sistema (Φ^6 Duffing) para valores grandes del acoplamiento disipativo encontrado que, para funciones armónicas, siempre habrá sincronización de desplazamiento vertical. Este comportamiento fue corroborado numéricamente. También dimos argumentos por los cuales este mismo comportamiento de sincronización de desplazamiento vertical ocurre en el caso de funciones cuasi-periódicas. Sin embargo, cuando se utilizan dos acoplamientos, K_1 (elástico) y K_2 (disipativo), con $K_1 \ll K_2$, obtenemos sincronización completa en las proyecciones sobre los planos (x, y) y (u, v) . Lo cual también se puede explicar recurriendo al método de perturbación. Observamos que las soluciones transitorias resultantes, de hecho, tiende a cero a medida que el tiempo tiende a infinito, mientras que en el caso del acoplamiento disipativo, la solución transitoria tiende a una constante que depende de las condiciones iniciales para valores de \mathbf{K} lo suficientemente grandes (en realidad, $\mathbf{K} \rightarrow \infty$). Sea K_2 pequeño y comparable con K_1 , el sistema presenta sincronización práctica en la proyección sobre el plano (u, v) y sincronización completa en la proyección sobre el plano (x, y) , que también se puede entender en términos del método de perturbación. La elección de utilizar dos constantes de acoplamiento, podría dar lugar a una dinámica más interesante y a un mayor intervalo para los parámetros de control. La sincronización en los sistemas de comunicación podría requerir un amplio rango del parámetro de control, como el utilizado en este trabajo para los sistemas van der Pol-Duffing y Φ^6 Duffing. En particular, nuestro enfoque parece prometedor para estas aplicaciones. El acoplamiento analizado en este trabajo será aplicado en otros osciladores no lineales que no presenten sincronización completa mediante el esquema clásico maestro-esclavo.

Bibliografía

- [1] L M Pecora and T L Carroll *Phys. Rev. Lett.* **64** 821 (1990)
- [2] T P Chang *Mathematical Problems in Engineering* **Vol. 2017** 3769870 (2017)
- [3] J Giné and C Valls *Nonlinear Analysis: Real World Applications* **45** 309 (2019)
- [4] N A Kudryashov *Regul. Chaot. Dyn.* **23** 471 (2018)
- [5] J Kyziot and A Okniński *International Journal of Non-Linear Mechanics* **116** 102 (2019)
- [6] Y Ueda and N Akamatsu *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **28** 217 (1981)
- [7] T C Bountis, L B Drossos, M Lakshmanan and S Parthasarathy *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** 6927 (1993)
- [8] S Rajasekar, S Parthasarathy and M Lakshmanan *Chaos, Solitons and Fractals* **2** 271 (1992)
- [9] C H Miwadinou, L A Hinvi, A V Monwanou and J B Chabi *Nonlinear Dynamics* **88** 97 (2017)
- [10] C H Miwadinou, A V Monwanou, L A Hinvi, A A Koukpededji, C Ainamonand and J B Chabi *International Journal of Bifurcation and Chaos* **26** 1650085 (2016)
- [11] D Chen, N Wang, Z Chen and Y Yu *J. Vib. Eng. Technol.* **10** 781 (2022)
- [12] K Ding *Complexity* **Vol. 2019** 3637902 (2019)
- [13] K Ojo, S Ogunjo and A Olagundoye *International Journal of Nonlinear Science* **24** 76 (2017)
- [14] Q Yao *Chaos, Solitons and Fractals* **142** 110372 (2021)
- [15] D Pazó and E Montbrió *Phys. Rev. X* **4** 011009 (2014)
- [16] M Zhang, G S Wiederhecker, S Manipatruni, A Barnard, P McEuen and M Lipson *Phys. Rev. Lett.* **109** 233906 (2012)
- [17] C Huang and J Cao *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **473** 262 (2017)

- [18] Q Ye, Z Jiang and T Chen *Complexity* **Vol. 2018** 5431987 (2018)
- [19] J A Chekan, M A Nojournian, K Merat and H Salarieh *J. Vib. Control* **23** 103 (2017)
- [20] M C Pai *ASME: J. Dyn. Sys. Meas. Control* **142** 101003 (2020)
- [21] L Lin *Int. J. Dynam. Control* **10** 879 (2022)
- [22] Z Wang, C Song, A Yan and G Wang *Symmetry* **14** 517 (2022)
- [23] A Ouannas, A T Azar and S Vaidyanathan *Int. J. Comput. Appl. Technol* **55** 112 (2017)
- [24] P Bonzon *Front. Neurorobot.* **14** 570358 (2020)
- [25] I A Korneev, A V Slepnev, V V Semenov and T E Vadivasova *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **229** 2215 (2020)
- [26] A Anzo-Hernández, E Campos-Cantón and M Nicol *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* **70** 102 (2019)
- [27] A Khan and Shikha *Int. J. Dynam. Control* **5** 1114 (2017)
- [28] J Ramadoss, J Kengne, S T Tanekou, K Rajagopal and G D Kenmoe *Chaos, Solitons and Fractals* **159** 112157 (2022)
- [29] I A Korneev, V V Semenov, A V Slepnev and T E Vadivasova *Chaos, Solitons and Fractals* **142** 110459 (2021)
- [30] J Kyziot and A Okniński *International Journal of Non-Linear Mechanics* **123** 103495 (2020)
- [31] U Uriostegui, E S Tututi and G Arroyo *Rev. Mex. Fis.* **67** 334 (2021)
- [32] U Uriostegui and E S Tututi *Rev. Mex. Fis.* **68** 011402 (2022)
- [33] U Uriostegui-Legorreta and E S Tututi *Journal of Applied Research and Technology* **21** 227 (2023)
- [34] U Uriostegui-Legorreta and E S Tututi-Hernández *Rev. Ci. Tec.* **5** 151 (2022)
- [35] U Uriostegui-Legorreta and E S Tututi *International Journal of Modern Physics C* (2023) <https://doi.org/10.1142/S012918312350122X>
- [36] B Diprima *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, **4a. ed.**, Limusa Wiley, México DF, (2001)
- [37] R L Borreci, C S Coleman *Ecuaciones Diferenciales Una Perspectiva de Modelación*, Oxford University Press, México DF, (2002)
- [38] D G Zill *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelación*, **7a. ed.**, Thomson, México DF, (2002)

- [39] M W Hirsch y S Smale *Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos y Álgebra Lineal*, Alianza Editorial, (1983)
- [40] R C Hilborn *Chaos and Nonlinear Dynamics*, **2a. ed.**, Oxford, (2000)
- [41] E Ott *Chaos and Dynamics Systems*, **2a. ed.**, Cambridge, (2002)
- [42] U Uriostegui-Legorreta and E S Tututi *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation* (2023) <https://doi.org/10.1515/ijnsns-2022-0465>
- [43] U Uriostegui-Legorreta and E S Tututi *Indian Journal of Physics* (2023) <https://doi.org/10.1007/s12648-023-02765-1>
- [44] U Uriostegui Legorreta *Control y sincronización del sistema Van Der Pol-Duffing*, UMSNH (2015)
- [45] M Lakshmanan, K Murali *Chaos in Nonlinear Oscillators; Controlling and Synchronization*, World Scientific, Singapore (1996)
- [46] S Boccalettu et. al. *Physics Reports*, **366** (2002)
- [47] J Kengne, J C Chedjou, G Kenne, K Kyamakya and G H Kom *Nonlinear Dyn* **70** 2163 (2012)
- [48] A Buscarino, L Fortuna and L Patane *Phys. Rev. E* **100** 032215 (2019)
- [49] F Aydogmus and E Tosyali *International Journal of Control* **95** 620 (2022)
- [50] J P Ramirez E Garcia and J Alvarez *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* **80** 104977 (2020)