



Universidad Nacional Autónoma de
México y Universidad Michoacana
de San Nicolás de Hidalgo



Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UMSNH-UNAM

Un teorema de caracterización para grupos hiperbólicos

T E S I S

que para obtener el grado de *Maestra*

en Ciencias Matemáticas presenta

Juanita Claribel Santiago
claribel@matmor.unam.mx

Asesor:
Jesús Hernández Hernández
jhdez@matmor.unam.mx

Morelia, Michoacán, México
marzo, 2024





Universidad Nacional Autónoma de
México y Universidad Michoacana
de San Nicolás de Hidalgo



Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UMSNH-UNAM

Un teorema de caracterización para grupos hiperbólicos

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestra en Ciencias Matemáticas

presenta

Juanita Claribel Santiago

Asesor:

Jesús Hernández Hernández

Morelia, Michoacán, México
marzo, 2024

Después del tiempo transcurrido y los momentos vividos
solo puedo dedicar esta tesis a quienes me motivaron
a ser fuerte y seguir adelante.

A todos y ninguno.

JUANITA CLARIBEL SANTIAGO.

Índice general

Resumen/Abstract	ii
Agradecimientos	iv
Introducción	v
1 Grupos hiperbólicos	1
1.1 Gráficas	1
1.2 Grupos hiperbólicos	3
1.3 Propiedades de los grupos hiperbólicos	5
1.4 Caracterización de los grupos hiperbólicos	6
2 La razón cruzada	8
2.1 Razón cruzada hiperbólica	8
2.2 Razón cruzada en un árbol métrico	10
2.3 La topología de razón cruzada	14
3 De razones cruzadas a cuasimétricas	17
3.1 Cuasimétricas	17
3.2 De razones cruzadas a cuasimétricas	24
3.3 Más sobre razones cruzadas	29
4 Sistemas anulares	32
4.1 De sistemas anulares a razones cruzadas	32
4.2 De grupos de convergencia a sistemas anulares	38
4.3 Caracterización de los grupos hiperbólicos	43
5 Otra caracterización utilizando puntos límite cónicos	47
Índice de símbolos	53
Bibliography	54

Un teorema de caracterización para grupos hiperbólicos

Juanita Claribel Santiago

Resumen

El concepto de grupo hiperbólico fue estudiado por primera vez a detalle por el matemático Gromov en 1987. Sus ideas se convirtieron en un área de investigación muy activa, con resultados que mezclan elementos de la teoría de grupos, la geometría y la topología algebraica, entre otras.

Llamamos a un grupo *hiperbólico* si su gráfica de Cayley (con respecto a algún conjunto generador) es un espacio δ -delgado para alguna $\delta \geq 0$. En la práctica entender el grafo de Cayley de un grupo puede resultar complicado, por lo que saber si un grupo es hiperbólico o no se vuelve una tarea difícil. De ahí que sea importante obtener caracterizaciones para estos grupos. El presente trabajo de tesis tiene como principal objetivo demostrar dos formas topológicas de caracterizar a los grupos hiperbólicos.

Palabras Clave: Grupo hiperbólico, espacio δ -delgado, gráfica de Cayley, caracterización topológica, acción matemática.

Abstract

The concept of a hyperbolic group was first studied in detail by mathematician Gromov in 1987. His ideas became a very active area of research, with results combining elements of group theory, geometry and algebraic topology, among others.

We call a group *hyperbolic* if its Cayley graph (with respect to some generating set) is a δ -slim space for some $\delta \geq 0$. In practice, understanding the Cayley graph of a group can be complicated, so knowing if a group is hyperbolic or not becomes a difficult task. Therefore, it is important to characterize the results for these groups. The main objective of this thesis work is to demonstrate two topological ways of characterizing hyperbolic groups.

Keywords: Hyperbolic group, δ -slim space, cayley graph, topological characterisation, group action.

Agradecimientos

Cada momento es una oportunidad para aprender y mejorar nuestras actitudes frente a la vida, es por ello que debemos aprovechar cada instante y actividad que se nos presente y ser agradecidos, esa gratitud nos permitirá contemplar la importancia de cada persona y lugar en nuestra vida.

Quiero agradecer al PCCM, por haberme permitido continuar con mis estudios y a todos mis maestros que fueron partícipes en este proceso.

Sinceramente, agradezco a mi asesor, el Dr. Jesús Hernández Hernández, por su paciencia y tiempo dedicado en el desarrollo de esta tesis.

Agradezco también a los revisores de esta tesis, por su retroalimentación que contribuyó a la mejora de este escrito.

Sabiendo que jamás existirá la forma de agradecer una vida de lucha, sacrificio y esfuerzo constante agradezco infinitamente a Dios por tenerlos a ustedes, mis padres, llenando de dicha y amor cada día de mi vida. Solo deseo que entiendan que el logro mío es el suyo, que mi esfuerzo es inspirado en ustedes.

Este trabajo se realizó gracias al apoyo de la DGAPA-UNAM a través del financiamiento del proyecto PAPIIT IN114323.

Introducción

El concepto de grupo hiperbólico fue estudiado por primera vez a detalle por el matemático Gromov en 1987 (ver [10]). Sus ideas se convirtieron en un área de investigación muy activa y con resultados que mezclan elementos de la teoría de grupos, la geometría y la topología algebraica, entre otras. Algunas referencias que abordan el estudio de grupos hiperbólicos son [16], [6] y [2].

Decimos que un grupo es *hiperbólico* si su gráfica de Cayley (con respecto a algún conjunto generador) es un espacio δ -delgado para alguna $\delta \geq 0$. En la práctica entender el grafo de Cayley de un grupo puede resultar complicado, por lo que saber si un grupo es hiperbólico o no se vuelve una tarea difícil. De ahí que sea importante obtener caracterizaciones para estos grupos.

Dado un grupo hiperbólico Γ , puede demostrarse que este actúa por homeomorfismos sobre un espacio compactum, perfecto y metrizable, M , tal que la acción inducida en el espacio de configuraciones de tres puntos ordenados, $\text{Conf}_3(M)$, es propiamente discontinua y cocompacta (ver [4]). Más aun, puede demostrarse que el recíproco es cierto:

Teorema 0.1 (Teorema 1.8). *Sea Γ un grupo que actúa por homeomorfismos sobre un espacio compactum, perfecto y metrizable, M , tal que la acción inducida en $\text{Conf}_3(M)$ es propiamente discontinua y cocompacta. Entonces Γ es hiperbólico.*

Además, se ha probado otro resultado para grupos hiperbólicos que involucra a los puntos límite cónicos:

Teorema 0.2 (Teorema 5.1). *Sea M un espacio compactum, metrizable y perfecto y sea Γ un grupo que actúa como un grupo de convergencia sobre M . Si cada punto de M es un punto límite cónico, entonces Γ es un grupo de convergencia uniforme (y por tanto hiperbólico).*

Esto lleva a dos caracterizaciones topológicas para los grupos hiperbólicos. Ambos teoremas fueron demostrados por el matemático británico Brian H. Bowditch. El objetivo de esta tesis es presentar la demostración de los teoremas anteriores. Nos basamos principalmente en el artículo [3] y buscamos completar los detalles de dicho artículo.

Haremos algunos comentarios sobre las hipótesis de los teoremas 1.8 y 5.1. Un *compactum*, M , es un espacio topológico compacto de Hausdorff. Es *perfecto* si no tiene

puntos aislados. Asumiremos que M es metrizable, aunque esta hipótesis se puede eliminar en el Teorema 1.8, reemplazando sucesiones por redes. La hipótesis de que Γ *actúa como grupo de convergencia* es equivalente a la definición de que Γ actúa de forma propiamente discontinua.

Aunque las caracterizaciones que daremos son de gran utilidad, están lejos de resolver el problema de determinar si un grupo es o no hiperbólico, pues verificar que en todo espacio compactum, perfecto y metrizable M no se cumplen las hipótesis del teorema 1.8 se vuelve nuevamente una tarea complicada.

Los teoremas que demostraremos están basados en el siguiente hecho para variedades hiperbólicas cerradas. Consideramos $\mathcal{M}$ una n -variedad hiperbólica (es decir, una variedad que es localmente isométrica al espacio $\mathbb{H}^n$) y cerrada (es decir, compacta y sin frontera), entonces su cubriente universal, $\overline{\mathcal{M}}$, es el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n$. El grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{M})$ actúa en $\overline{\mathcal{M}}$ por isometrías y de forma propiamente discontinua. Además, el cociente $\overline{\mathcal{M}}/\pi_1(\mathcal{M})$ es compacto y sin frontera; en particular, se cumple que la acción del grupo fundamental en el cubriente universal es cocompacta. Así, por el lema de Milnor-Schwarz, $\pi_1(\mathcal{M})$ es finitamente generado y para cada conjunto generador finito S de $\pi_1(\mathcal{M})$ y cada $p \in \overline{\mathcal{M}}$ la función órbita

$$f_p : (\pi_1(\mathcal{M}), d_S) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}, \text{ donde } g \mapsto gp$$

es una cuasiisometría. Luego, $\pi_1(\mathcal{M})$ es cuasiisométrico a $\mathbb{H}^n$ y como $\mathbb{H}^n$ es hiperbólico, entonces el grupo fundamental de toda variedad hiperbólica cerrada es hiperbólico.

Si generalizamos este resultado a espacios que no son compactos (cambiando esta propiedad por espacios con volumen finito), la acción del grupo fundamental en su cubriente universal es propiamente discontinua pero ya no es cocompacta. Sin embargo se comporta de manera similar salvo en los puntos límite cónicos. Tukia nos da una caracterización en este caso particular usando grupos de convergencia y puntos límite cónicos. Es a partir de esta caracterización que se obtiene la definición de grupo relativamente hiperbólico (revisar [16] para más detalles). El criterio del Teorema 5.1 sugiere una forma para describir a los grupos relativamente hiperbólicos. Aún más, muchas de las ideas y técnicas usadas en los grupos hiperbólicos se generalizan a grupos relativamente hiperbólicos.

Entre los principales temas que se abordan aquí, se encuentran las nociones de “estructura cuasiconforme”. No daremos la definición precisa de este concepto. Pero hay varias formas de formular tal idea. Aquí haremos uso de dos, a saber, los “sistemas anulares” y las “razones cruzadas”.

Esta tesis está estructurada de la siguiente manera:
 En el primer capítulo, se define el concepto de grupos hiperbólicos y se mencionan algunas de sus propiedades. En el capítulo dos, se introduce el concepto de razón cruzada hiperbólica, se demuestra que cualquier conjunto finito F se puede encajar en un árbol manteniendo cierta similitud entre sus razones cruzadas correspondientes,

y en la última sección se define la topología de razón cruzada. En el capítulo tres se estudia cómo una razón cruzada hiperbólica en un conjunto induce una cuasimétrica hiperbólica sobre el conjunto de tripletas distintas y a partir de esta cuasimétrica definimos una razón cruzada. En el capítulo cuatro, se definen los sistemas anulares, se ve que la acción (como grupo de convergencia) de un grupo en un espacio compactum induce un sistema anular y este sistema a su vez induce una razón cruzada hiperbólica de caminos. Terminamos el capítulo juntando los resultados de los capítulos anteriores para demostrar el Teorema 1.8. En el quinto capítulo se da una construcción más general de los sistemas anulares para grupos de convergencia y con ello se demuestra el Teorema 5.1.

Capítulo 1

Grupos hiperbólicos

En este capítulo vamos a introducir el concepto de grupo hiperbólico y dar algunas de sus propiedades. También vamos a enunciar el teorema principal de esta tesis que nos da una caracterización topológica de estos grupos (Teorema 1.8).

1.1 Gráficas

Empezaremos dando conceptos y notación de las gráficas. Nos enfocaremos en darle una métrica a las gráficas y en definir la gráfica de Cayley, esta gráfica nos será útil para dar la definición de grupo hiperbólico.

Sea V un conjunto no vacío, decimos que $\mathcal{T} = (V, A)$ es una **gráfica** si

$$A = \{\{u, v\} : u, v \in V\}.$$

Llamamos a v un **vértice** de $\mathcal{T}$ si $v \in V$ y decimos que $a = \{u, v\}$ es una **arista** de $\mathcal{T}$ con **extremos** u y v si $a \in A$. Denotaremos a la arista $\{u, v\}$ por uv . Al conjunto de vértices de $\mathcal{T}$ y al conjunto de aristas de $\mathcal{T}$ lo denotamos por $V(\mathcal{T})$ y $A(\mathcal{T})$ respectivamente. Definimos el **grado** de un vértice v en $\mathcal{T}$ como

$$\delta_{\mathcal{T}}(v) = |\{u \in V(\mathcal{T}) : uv \in A(\mathcal{T})\}|.$$

Diremos que v es un **vértice terminal** si $\delta_{\mathcal{T}}(v) = 1$ y v es un **vértice interno** si no es terminal. Denotamos por $V_T(\mathcal{T})$ al conjunto de vértices terminales y escribimos $V_I(\mathcal{T})$ para denotar al conjunto de vértices internos. Una arista es **terminal** si uno de sus vértices que la conforman es terminal, de lo contrario diremos que es una arista **interna**.

Vamos a asumir que cada vértice interno tiene grado al menos tres. Si u es tal que $a = vu$ y $a' = uv'$ son las únicas aristas con uno de sus extremos igual a u , podemos considerar estas dos aristas como una sola arista $a'' = vv'$ y eliminar de la gráfica a las aristas a, a' y al vértice u .

En toda la tesis consideraremos gráficas finitas (con su conjunto de vértices finito), sin bucles (sin aristas con ambos extremos iguales) y sin aristas múltiples.

Definimos un **camino** en $\mathcal{T}$ como una sucesión de vértices de $\mathcal{T}$, $v_1, v_2, \dots, v_n$, tal que $v_i v_{i+1} \in A(\mathcal{T})$ para todo $i = 1, 2, \dots, n-1$; el camino es **cerrado** si además $v_1 v_n \in A(\mathcal{T})$. Así, definimos un **arco** como un camino donde no se repite ningún vértice y llamamos **ciclo** a un arco que es cerrado. Decimos que una gráfica es **conexa** si entre cada par de vértices existe un camino que los conecta.

Si c es un camino en $\mathcal{T}$ dado por $v_1, v_2, \dots, v_n$, la longitud de c , $\ell(c)$, es igual a $n-1$. Ahora, podemos considerar a una gráfica conexa, $\mathcal{T}$, como un espacio métrico. Si $X = V(\mathcal{T})$ y $v_1, v_n \in V(\mathcal{T})$, definimos la métrica $d : V(\mathcal{T}) \rightarrow [0, \infty)$ donde

$$d(v_1, v_n) = \min\{L \in \mathbb{N} : \text{existe un camino } c \text{ de } v_1 \text{ a } v_n \text{ con } \ell(c) = L\}$$

Definimos un **árbol** $\mathcal{T}$ como una gráfica conexa sin ciclos. Notemos que una gráfica $\mathcal{T}$ es un árbol si y sólo si para todo par de vértices existe un único arco que los conecta. Si $\mathcal{T}$ es un árbol y $x, y \in V(\mathcal{T})$, denotamos por $[x, y]$ al único arco que conecta a x con y . Además, dados $x, y, z \in V(\mathcal{T})$, si $\mathcal{T}$ es un árbol, entonces existe un único punto de intersección entre los arcos $[x, y]$, $[y, z]$ y $[z, x]$, llamamos a este punto la **mediana** de x, y y z y lo denotamos por $med(x, y, z)$ (ver Figura 1.1).

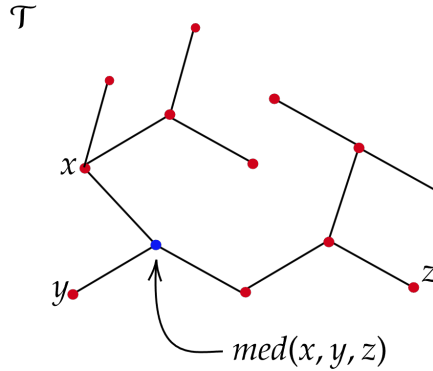


Figura 1.1: $med(x, y, z)$.

Sea $(\mathcal{T}, d)$ un árbol métrico (es decir, un árbol con una métrica asociada) y sean $x, y, z, w \in V(\mathcal{T})$, escribimos

$$(xy|zw)_{\mathcal{T}} = \frac{1}{2} \max\{0, d(x, z) + d(y, w) - d(x, y) - d(z, w)\}.$$

En otras palabras, $(xy|zw)_{\mathcal{T}}$ es la distancia entre los segmentos $[x, y]$ y $[z, w]$. Esta operación define una **razón cruzada** en la que $(xy|zw)_{\mathcal{T}} = (yx|zw)_{\mathcal{T}} = (zw|xy)_{\mathcal{T}}$.

Observación 1.1. Solo las longitudes de las aristas internas de $\mathcal{T}$ son relevantes para la definición de razón cruzada en $\mathcal{T}$. Es decir, si x es un vértice con $\delta_{\mathcal{T}}(x) = 1$ y $[x, y] = x, v_1, \dots, v_n, y$, entonces $(xy|zw)_{\mathcal{T}} = (v_1 y|zw)_{\mathcal{T}}$. Esto se cumple pues como x tiene grado uno, el arco de longitud mínima que conecta a $[x, y]$ con $[z, w]$ no pasa por x (ver Figura 1.2). En general, una razón cruzada se denominará "0-hiperbólica" si su restricción a cada subconjunto finito surge de un árbol métrico de esta manera.

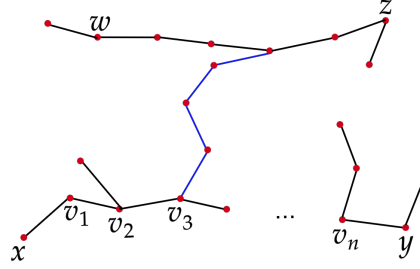


Figura 1.2: $(xy|zw)_T = (v_1y|zw)_T = 4$.

Una forma de estudiar a los grupos de forma geométrica es por medio de su gráfica de Cayley.

Dado un grupo G con conjunto generador finito $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, llamamos **gráfica de Cayley**, $Cay(G, S)$, a la gráfica donde

$$V(Cay(G, S)) = G \quad \text{y} \quad A(Cay(G, S)) = \{\{g, gs_i\} : g \in G \text{ y } s_i \in S \cup S^{-1} \setminus \{e\}\}.$$

Notemos que la gráfica de Cayley depende del conjunto generador del grupo. Además, como S genera a G , entonces la gráfica $Cay(G, S)$ es conexa. Afirmamos que si S es un conjunto generador finito de G , entonces la métrica descrita en las primeras páginas para $Cay(G, S)$ es la misma que la métrica de las palabras en G respecto a S . La afirmación se cumple pues cada palabra en $S \cup S^{-1}$ especifica un camino de aristas en $Cay(G, S)$ que empieza con la identidad del grupo y sigue por las aristas que corresponden a las letras que aparecen en la palabra.

Dados (Q, ρ) y (Q', ρ') espacios métricos, definimos una **cuasiisometría** entre estos espacios como una función $f : Q \rightarrow Q'$ tal que existen constantes $\lambda \geq 1$ y $c \geq 0$ donde para todo $x, y \in Q$

$$\frac{1}{\lambda} \rho(x, y) - c \leq \rho'(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y) + c$$

y $f(Q)$ es cuasidenso en Q' .

Le asociamos a un grupo G (con conjunto generador S), un espacio métrico, $Cay(G, S)$. A pesar de que la definición depende de la elección del conjunto generador, hay una relación entre los grafos de Cayley con respecto al mismo grupo y distintos conjuntos generadores, esta relación es la de cuasiisometría.

1.2 Grupos hiperbólicos

En esta sección definiremos a los grupos hiperbólicos y daremos algunos ejemplos.

Sea (M, d) un espacio métrico, una **geodésica** en M es una función $\gamma : [0, L] \rightarrow M$ tal que es un encaje isométrico, es decir, para todo $x, y \in [0, L]$,

$$|x - y| = d(\gamma(x), \gamma(y)).$$

En $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana, las geodésicas son segmentos de línea recta. En el disco de Poincaré con la métrica hiperbólica, las geodésicas son diámetros o arcos de circunferencia perpendiculares al disco.

Definimos un **triángulo geodésico** como la figura compuesta de tres geodésicas que se intersectan dos a dos en un punto. Dado $\delta \geq 0$, un triángulo geodésico, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, es **δ -delgado** si se cumple que

$$\gamma_i \subseteq N(\gamma_j \cup \gamma_k, \delta) \text{ para } i, j, k \in \{1, 2, 3\} \text{ distintos,}$$

donde $N(A, \delta) = \{x \in M : d(x, y) \leq \delta, y \in A\}$. En las Figuras 1.3 y 1.4 se muestran un triángulo geodésico y un triángulo δ -delgado respectivamente, cuando el espacio métrico es el disco de Poincaré.

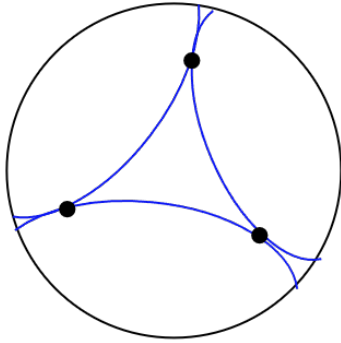


Figura 1.3: Triángulo geodésico.

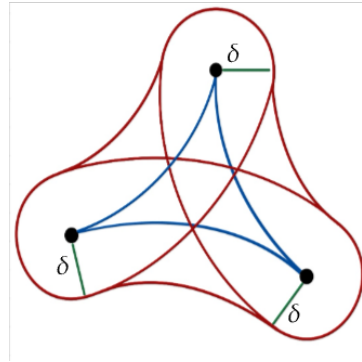


Figura 1.4: Triángulo δ -delgado.

Decimos que un espacio métrico es **hiperbólico** si existe algún $\delta \geq 0$, tal que todo triángulo geodésico es δ -delgado. Lo importante en la definición no es el valor de δ sino su existencia. Notemos que $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana no es hiperbólico, pues en un triángulo rectángulo podemos considerar los catetos opuestos lo suficientemente grandes para que ningún δ funcione.

Ejemplo 1.2 (Espacios hiperbólicos). *Sea X un espacio:*

1. Si X tiene diámetro finito, entonces es δ -hiperbólico con $\delta = \text{diam}(X)$.
2. Si X es un árbol, entonces es 0-hiperbólico (pues sus triángulos están contenidos en trípodes).

Dado un grupo G finitamente generado, decimos que G es un **grupo hiperbólico** si la gráfica $\text{Cay}(G, S)$ es hiperbólica para algún conjunto generador finito S de G .

Ejemplo 1.3. *Algunos ejemplos de grupos hiperbólicos:*

1. Los grupos libres F_n .
2. Todo grupo finito.

La propiedad de ser un grupo hiperbólico es un invariante cuasiisométrico (revisar [6, III.H. Teorema 1.9]). Como $\mathbb{R}^n$ es cuasiisométrico a $\mathbb{Z}^n$, entonces para $n > 1$, $\mathbb{Z}^n$ no es un grupo hiperbólico.

1.3 Propiedades de los grupos hiperbólicos

La importancia de los grupos hiperbólicos se constata en esta sección. Mencionaremos algunas propiedades que satisfacen estos grupos:

Sean S un conjunto y $R \subseteq (S \cup S^{-1} \setminus \{e\})$, definimos al grupo

$$\langle S|R \rangle := F_S / \langle\langle R \rangle\rangle$$

donde F_S es el grupo libre sobre S y $\langle\langle R \rangle\rangle$ es el menor subgrupo normal de F_S que contiene a R . Si G es isomorfo a $\langle S|R \rangle$, entonces decimos que $\langle S|R \rangle$ es una **presentación** de G , llamamos a S conjunto de **generadores** y a R conjunto de **relaciones**. Decimos que un grupo es **finitamente presentado** si tiene una presentación con un número finito de generadores y relaciones. Por ejemplo, $\mathbb{Z}_n \cong \langle a|a^n \rangle$ y $F_S \cong \langle S|\emptyset \rangle$ son finitamente presentados.

Teorema 1.4. *Todo grupo hiperbólico es finitamente presentado.*

Para detalles de la demostración revisar [6, Proposición 2.2].

Teorema 1.5. *Si un grupo finitamente generado es hiperbólico, entonces contiene un número finito de clases de conjugación de subgrupos finitos.*

Una prueba del Teorema anterior se encuentra en [6, Teorema 3.2].

El **problema de conjugación** para un grupo G con presentación $\langle S|R \rangle$, consiste en determinar, si dadas dos palabras en G , representan o no elementos conjugados. Para una prueba del teorema siguiente, revisar [6, Teorema 2.8].

Teorema 1.6. *Todo grupo hiperbólico tiene problema de la conjugación soluble.*

Dada una presentación $\langle S|T \rangle$ de un grupo G , llamamos **problema de la palabra** al problema algorítmico de decidir si dos palabras en S representan el mismo elemento de G . Si un grupo es finitamente presentado, existe un algoritmo llamado el **algoritmo de Dehn** que resuelve el problema de la palabra con complejidad la función de Dehn. Un resultado útil nos da la equivalencia entre los siguientes incisos:

- a) El problema de la palabra es soluble
- b) La función de Dehn es recursiva.
- c) La función de Dehn está acotada por una función de Dehn recursiva.

Además, dado que un grupo es hiperbólico si y sólo si tiene función de Dehn lineal, de los comentarios anteriores se sigue que:

Teorema 1.7. *Todo grupo hiperbólico tiene problema de la palabra soluble con solución lineal.*

Para más detalles de este resultado, revisar [5, Teorema 1.5.8] y [6, Teorema 2.6].

1.4 Caracterización de los grupos hiperbólicos

En esta sección recordaremos algunos conceptos y con ello enunciaremos el teorema principal de esta tesis (Teorema 1.8).

Un **compactum**, (M, τ) , es un espacio topológico compacto de Hausdorff. Es **perfecto** si no tiene puntos aislados. Es **metrizable** si existe una métrica d tal que la topología inducida por d es τ . Vamos a suponer que M es metrizable, aunque esta hipótesis se puede eliminar (en la demostración del Teorema 1.8) reemplazando sucesiones por redes. Sin embargo, este detalle hace más técnica la demostración, por lo que asumiremos que M es metrizable.

Por otro lado, si Γ es un grupo que actúa en M , decimos que la acción es **propia-mente discontinua** si para todo $K \subseteq M$ compacto, el conjunto

$$\{\gamma \in \Gamma : \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$$

es finito. Decimos que la acción es **cocompacta** si el espacio cociente M/Γ es un espacio compacto.

Dados γ_1 y γ_2 rayos geodésicos en un espacio métrico M , definimos la **distancia Hausdorff** entre γ_1 y γ_2 como:

$$d_{Haus}(\gamma_1, \gamma_2) = \inf\{\epsilon : \gamma_1 \subseteq N(\gamma_2, \epsilon) \text{ y } \gamma_2 \subseteq N(\gamma_1, \epsilon)\}.$$

Fijamos un punto $a \in M$, sean γ_1, γ_2 dos rayos geodésicos en el espacio métrico M que empiezan en a , decimos que γ_1 y γ_2 son **rayos paralelos** y escribimos $\gamma_1 \sim \gamma_2$, si $d_{Haus}(\gamma_1, \gamma_2) < \infty$. La definición anterior es una relación de equivalencia, denotamos a la clase del rayo geodésico γ por $[\gamma]$. Para un ejemplo de distancia Hausdorff en el Disco de Poincaré ver Figura 1.5.

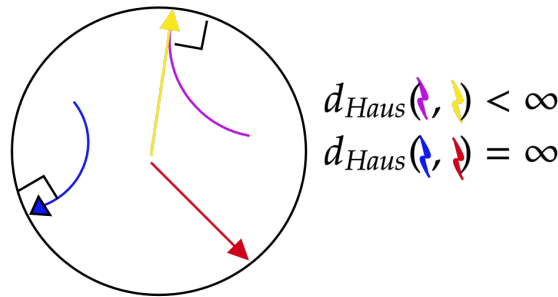


Figura 1.5: Distancia Hausdorff.

Así, la **frontera visual** de un espacio métrico M es

$$\partial M := \{[\gamma] : \gamma \text{ es un rayo geodésico en } M\}.$$

Dado un grupo hiperbólico, Γ , su grafo de Cayley con respecto a algún conjunto generador es un espacio métrico (con la métrica que definimos en la sección 1.1). Así, la **frontera** del grupo Γ , $\partial\Gamma$, es la frontera visual del grafo de Cayley de Γ .

El resultado que enunciaremos a continuación es una caracterización topológica de los grupos hiperbólicos:

Teorema 1.8 (cf. [3] 0.1). *Sea Γ un grupo que actúa por homeomorfismos sobre un espacio compactum, perfecto y metrizable, M , tal que la acción inducida en $\text{Conf}_3(M)$ es propiamente discontinua y cocompacta. Entonces Γ es hiperbólico. Más aún, existe un homeomorfismo Γ -equivariante de M sobre $\partial\Gamma$.*

Aquí, $\text{Conf}_n(M)$ denota el espacio de n -tuplas distintas (ordenadas) de M , es decir, está definido como M^n menos la diagonal grande.

En los siguientes capítulos busquemos demostrar el Teorema 1.8. Usaremos nociones de “estructura cuasiconforme”. Aunque no daremos una definición precisa de este concepto, haremos uso de dos de las formas de formular esta idea, a saber, un “sistema anular” y las “razones cruzadas”.

Capítulo 2

La razón cruzada

En este capítulo consideraremos a un conjunto M y a partir de este definiremos la razón cruzada hiperbólica de caminos. Probaremos que cualquier conjunto finito F se puede encajar en un árbol métrico $\mathcal{T}$ de forma peculiar (ver Teorema 2.2). Finalmente, definiremos a partir de la razón cruzada, una topología para M , a saber, la topología de razón cruzada.

2.1 Razón cruzada hiperbólica

A continuación describiremos la noción de una razón cruzada hiperbólica. Esta es una razón cruzada (definida en $\text{Conf}_4(M)$) que además satisface condiciones sobre los subconjuntos de cuatro y cinco elementos de M .

Otal ha utilizado una noción de razón cruzada similar a la descrita aquí en el caso de variedades con curvatura negativa (ver [15] para más detalles). Ha sido observado por varios autores que una **razón cruzada en el límite de un grupo hiperbólico**, $(xy|zw)$, podría interpretarse, hasta una constante aditiva, como la distancia entre una geodésica bi-infinita que conecta x con y y otra que conecta z con w . Exploraremos las propiedades formales de tal razón cruzada.

En lo que sigue de esta tesis adoptaremos la siguiente convención con respecto a las desigualdades aproximadas:

Convención 2.1. *Dados $p, q \in \mathbb{R}$, las notaciones*

$$p \simeq_k q, \quad p \preceq_k q \quad y \quad p \ll_k q$$

significan, respectivamente

$$|p - q| \leq k, \quad p \leq q + k \quad y \quad p \leq q - k.$$

Usando la desigualdad del triángulo, podemos demostrar que si $p, q, r \in \mathbb{R}$, entonces

$$(p \simeq_k q \wedge q \simeq_k r \Rightarrow p \simeq_{2k} r) \quad y \quad (p \preceq_k q \wedge q \preceq_k r \Rightarrow p \preceq_{2k} r).$$

1. Como es bastante técnico hacer el seguimiento de las constantes aditivas positivas involucradas, con frecuencia eliminaremos los subíndices en las relaciones $\simeq$ y $\preceq$ y asumiremos que son transitivas.
2. En todos los casos, la constante involucrada será un múltiplo fijo de la constante inicial. El factor involucrado, puede determinarse rastreando el argumento. Usaremos la frase “**hasta una constante aditiva**”, para referirnos a que la constante es un múltiplo fijo de la constante introducida en las hipótesis.
3. Algunas veces usaremos la dicotomía $p \preceq q$ o $q \ll p$. No tenemos ninguna razón para considerarlas mutuamente excluyentes o para tomar las constantes como iguales (siempre que se agoten todas las posibilidades). Cuando se introduce la dicotomía se supone que las constantes aditivas iniciales se eligen apropiadamente para el resto del argumento.

Dado M un conjunto, denotamos por $\text{Conf}_n(M)$ al n -ésimo espacio de configuraciones de M . Definimos una **razón cruzada** como una función

$$(\cdot|\cdot) : \text{Conf}_4(M) \rightarrow [0, \infty), \text{ donde } (x, y, z, w) \mapsto (xy|zw)$$

tal que $(xy|zw) = (yx|zw) = (zw|xy)$ para todo $(x, y, z, w) \in \text{Conf}_4(M)$.

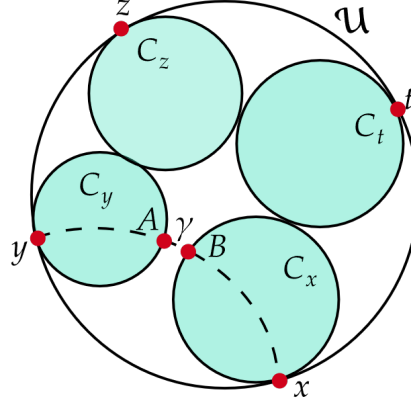
Una razón cruzada es **k -hiperbólica** si satisface los axiomas (C1) y (C2) siguientes:

- (C1): Si $F \subseteq M$ es de cardinalidad cuatro, podemos escribir $F = \{x, y, z, w\}$ con $(xz|yw) \simeq_k 0$ y $(xw|yz) \simeq_k 0$.
- (C2): Si $F \subseteq M$ es de cardinalidad cinco, podemos escribir $F = \{x, y, z, w, u\}$, con
- $$(xy|zu) \simeq_k (xy|wu),$$
- $$(xu|zw) \simeq_k (yu|zw),$$
- $$(xy|zw) \simeq_k (xy|zu) + (xu|zw)$$
- y con $(ab|cd) \simeq_k 0$ en todos los demás casos donde $a, b, c, d \in F$ son distintos (permitiendo las simetrías de la razón cruzada).

Decimos que $(\cdot|\cdot)$ es **hiperbólica** si es k -hiperbólica para algún k .

La definición de razón cruzada en geometría hiperbólica está relacionada con la distancia hiperbólica. Esta relación está dada de la siguiente manera: Consideramos el plano hiperbólico en el modelo del disco de Poincaré, aquí el plano hiperbólico es el disco delimitado por el círculo unitario $\mathcal{U}$ que puede identificarse con la línea proyectiva real. Una horoesfera centrada en un punto x de la línea proyectiva es un círculo en el disco de Poincaré tangente a $\mathcal{U}$ en el punto x . Sea γ la única geodésica que une dos puntos A y B del plano hiperbólico y sean x y y los puntos límites de γ . Sean C_x y C_y con las horoesferas de x y y respectivamente. Entonces definimos el logaritmo de la razón cruzada de x, y, z y t , $(x, y, z, t)_{\text{hip}}$, como la distancia hiperbólica entre A y B como se muestra en la figura 2.1.

La definición de razón cruzada en el disco de Poincaré que acabamos de dar satisface las condiciones para ser una razón cruzada hiperbólica como definimos en esta sección. Para más detalles revisar [13].


 Figura 2.1: Razón cruzada en $\mathbb{D}$.

2.2 Razón cruzada en un árbol métrico

Obtendremos una relación entre la razón cruzada en cualquier subconjunto finito y la razón cruzada definida en un árbol métrico (como en la sección 1.1). Esta relación dependerá de la cardinalidad del conjunto, es el resultado principal de esta sección (Teorema 2.2) y será nuestra herramienta principal para trabajar con las razones cruzadas.

El axioma (C1) (resp. (C2)) de la Sección 2.1 dice que la razón cruzada restringida a cualquier subconjunto de cuatro (resp. cinco) elementos se deriva, hasta una constante aditiva, de algún árbol métrico como lo describimos en la sección 1.1. De hecho, esta afirmación se cumple para todos los subconjuntos finitos:

Teorema 2.2 (cf. [3] 2.1). *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $(..|..)$ una razón cruzada k -hiperbólica definida en un conjunto F de cardinalidad n . Entonces existe una constante $h(n)$ que depende únicamente de n , donde podemos encajar F en un árbol métrico τ tal que $|(xy|zw) - (xy|zw)_\tau| \leq kh(n)$.*

Observemos que podemos suponer que F es precisamente el conjunto de vértices terminales de τ . Además, solo son relevantes las longitudes de las aristas internas de τ . Podemos ver las longitudes de las aristas terminales como indeterminadas. También, notemos que el resultado implica que cada razón cruzada 0-hiperbólica en un conjunto finito, surge de un árbol métrico.

Antes de comenzar con la demostración, introduciremos un poco más de notación:

Notación 2.3. *Dados $x, y, z, w \in M$ distintos, escribimos $(xy : zw)$ para indicar que $(xz|yw) \simeq 0$ y $(xw|yz) \simeq 0$. En otras palabras, hasta una constante aditiva las razones cruzadas que involucran $\{x, y, z, w\}$ surgen de un árbol finito de la forma combinatoria en la Figura 2.2. Dados $x, y, z, w, u \in M$ distintos, escribimos $(xy : u : zw)$ para indicar que se cumplen $(xy : zw)$, $(uy : zw)$, $(xu : zw)$, $(xy : uw)$ y $(xy : zu)$. En otras palabras,*

hasta una constante aditiva las razones cruzadas que involucran $\{x, y, z, w, u\}$ surgen de un árbol finito de la forma combinatoria en la Figura 2.3.

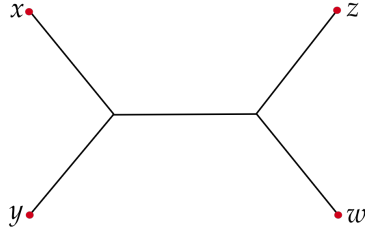


Figura 2.2: $(xy : zw)$.

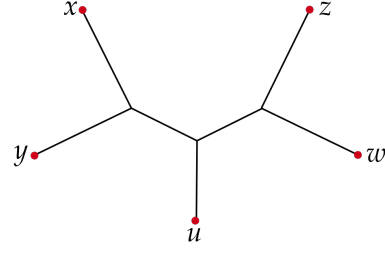


Figura 2.3: $(xy : u : zw)$.

Observación 2.4. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

- a) *Dados $x, y, z, w, u \in M$ distintos, $(xy|zw) \preceq (xu|zw) + (xy|zu)$. En efecto, por el axioma (C2), $(xy|zw) \simeq_k (xy|zu) + (xu|zw)$, es decir,*

$$|(xy|zw) - (xy|zu) - (xu|zw)| \leq k,$$

por definición de valor absoluto $a \leq |a|$, entonces $(xy|zw) - (xy|zu) - (xu|zw) \leq k$ y por lo tanto

$$(xy|zw) \leq (xy|zu) + (xu|zw) + k.$$

- b) *Si $x, y, z, w \in M$ y $0 \ll (xy|zw)$, entonces $(xy : zw)$. Se sigue del axioma (C1).*
- c) *Si $x, y, z, w, u \in M$, $0 \ll (xu|zw)$ y $0 \ll (xy|zu)$, entonces $(xy : u : zw)$. En efecto, por el inciso anterior se cumplen $(xu : zw)$ y $(xy : zu)$, usamos el axioma (C2) (donde $(ab|cd) \simeq 0$ para el resto de los casos) para verificar que se satisface la definición.*

Lema 2.5 (cf. [3] 2.2). *Sea $(..|..)$ una razón cruzada hiperbólica definida en un conjunto finito F . Entonces existen $a, b \in F$ distintos tal que para todo $x, y \in F \setminus \{a, b\}$ distintos, se cumple que $(ab : xy)$.*

Demostración. Vamos a demostrar que $(ax|by) \simeq 0$ y $(ay|bx) \simeq 0$. Como F es finito, elegimos $a, b, c, d \in F$ distintos tal que $(ab|cd)$ es el máximo de todas las razones cruzadas en F . Si $(ab|cd) \simeq 0$, por ser $(ab|cd)$ el máximo, no hay nada que probar. Supongamos que $(ab|cd) \gg 0$. Afirmamos que para todo $x \in F$, $(ax|bc) \simeq 0$. Si $(ax|bc) \gg 0$, como también $(ab|cd) \gg 0$, entonces por la Observación 2.4 inciso c), obtenemos $(ax : b : cd)$ y por el axioma (C2), $(ax|cd) \simeq (ax|bc) + (ab|cd)$, luego $(ax|cd) > (ab|cd)$, pero esto contradice la maximalidad de $(ab|cd)$, así que se cumple la afirmación. Similarmente podemos demostrar que para todo $y \in F$, $(ac|by) \simeq 0$.

Ahora, sean $x, y \in F$, por la Observación 2.4 inciso a)

$$(ax|by) \preceq (ac|by) + (ax|bc) \simeq 0 + 0 \simeq 0,$$

por lo tanto, para todo $x, y \in F$, $(ax|by) \simeq 0$ y $(ay|bx) \simeq 0$. ■

Del lema anterior se sigue que si $x, y, z \in F \setminus \{a, b\}$ distintos, entonces o bien $(ab : x : yz) = (ab : x : zy)$ ó $(ab : y : zx) = (ab : y : xz)$ ó $(ab : z : xy) = (ab : z : yx)$.

Lema 2.6 (cf. [3] 2.3). Sean F, a, b como en el Lema 2.5 y sean $x, y, z \in F \setminus \{a, b\}$ distintos. Entonces $(ax|yz) \simeq (bx|yz)$ y $(ab|xz) + (bz|xy) \simeq (ab|xy) + (by|xz)$.

Demostración. Denotamos por $\overline{mn}$ al segmento que conecta los puntos m y n . Dividimos la demostración en tres casos:

Caso 1. Si se cumple $(ab : x : yz)$, nos fijamos en la Figura 2.4 donde por definición

$$(ax|yz) \simeq \overline{st} \simeq (bx|yz) \quad \text{y} \quad (ab|xz) + (bz|xy) \simeq \overline{rs} \simeq (ab|xy) + (by|xz).$$

Caso 2. Si $(ab : y : zx)$, entonces nos fijamos en la Figura 2.5 y por definición

$$(ax|yz) \simeq 0 \simeq (bx|yz) \quad \text{y} \quad (ab|xz) + (bz|xy) \simeq \overline{rt} \simeq (ab|xy) + (by|xz).$$

Caso 3. Si $(ab : z : xy)$, nos fijamos en la Figura 2.6 y por definición

$$(ax|yz) \simeq 0 \simeq (bx|yz) \quad \text{y} \quad (ab|xz) + (bz|xy) \simeq \overline{rt} \simeq (ab|xy) + (by|xz).$$

■

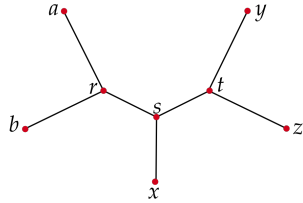


Figura 2.4: Caso 1. $(ab : x : yz)$

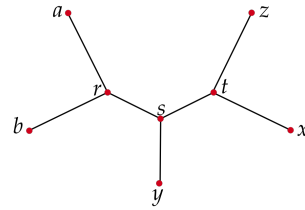


Figura 2.5: Caso 2. $(ab : y : zx)$

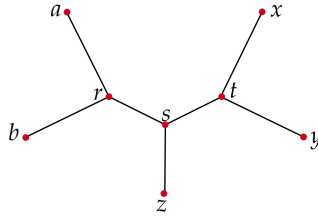


Figura 2.6: Caso 3. $(ab : z : xy)$

Demostración Teorema 2.2. Sea n la cardinalidad de F , procedemos por inducción sobre n . Cuando $n = 1$, podemos encajar a F en el árbol que consta de un solo vértice (y ninguna arista) y se cumple la base de inducción.

Supongamos que el Teorema 2.2 es cierto para todos los conjuntos de cardinalidad n . Sea F un conjunto de cardinalidad $n + 1$, elegimos $a, b \in F$ como en el Lema 2.5, sea

$P = F \setminus \{a\}$, entonces por hipótesis de inducción P se encaja en un árbol σ . Por lo tanto tenemos que para todo $x, y, z, w \in P$, $(xy|zw)_\sigma \simeq (xy|zw)$ (aquí la constante aditiva que define la relación $\simeq$ depende de n así como la constante de hiperbolicidad). Podemos asumir que $P = V_T(\sigma)$ y que todos los vértices interiores de σ tienen grado al menos tres.

Sea $v \in V_I(\sigma)$, un vértice adyacente al vértice b . Entonces el arco $[b, v]$ es una arista terminal pues $b \in V_T(\sigma)$. Elegimos un punto v' en el interior de esta arista, subdividimos $[b, v]$ en dos aristas $[b, v']$ y $[v', v]$ y conectamos a a v' , uniendo así otro vértice terminal $[a, v']$. Así, tenemos un árbol $\tau = \sigma \cup [a, v']$ tal que $V_T(\tau) = F$ (ver figura 2.7).

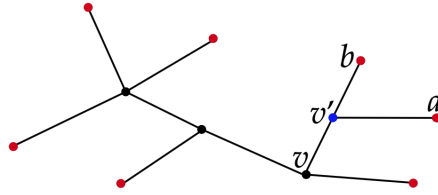


Figura 2.7: Árbol de aproximación de F .

Hasta ahora no hemos asignado ninguna longitud a la arista interna $[v, v']$. Elegimos puntos $c, d \in P \setminus \{b\}$, en diferentes componentes de $\sigma \setminus \{v\}$ (esto es posible ya que en σ v tiene al menos grado 3), así $v \in [c, d]$ pues de lo contrario tendríamos un ciclo. Se sigue que en τ , $[v, v'] = [a, c] \cap [b, d]$, así que asignamos a $[v, v']$ la longitud de $(ab|cd)$. Por lo tanto τ es un árbol métrico con aristas terminales de longitud indeterminada. Falta demostrar que para todo $r, s, t, u \in F$ distintos, $(rs|tu) \simeq (rs|tu)_\tau$. Dividimos la demostración en casos:

Caso 1. Cuando $(rs|tu) = (ab|cd)$, por construcción $(ab|cd)_\tau = (ab|cd)$. Si $(ab|cd) \simeq 0$, tomamos $v = v'$.

Caso 2. Si $r, s, t, u \in F \setminus \{a\}$ distintos, entonces

$$(rs|tu)_\tau = (rs|tu)_\sigma \simeq (rs|tu).$$

En particular, $(bs|tu)_\tau \simeq (bs|tu)$.

Caso 3. Si $r, s \in F \setminus \{a, b\}$, por construcción tenemos que $[a, b] \cap [r, s] = \emptyset$. Por lo tanto si $r, s, t \in F \setminus \{a, b\}$ distintos, las posibles combinaciones para el subárbol de τ inducido por $\{a, b, r, s, t\}$ son las mismas que las consideradas en Lema 2.6, así, usando los mismos argumentos que en la demostración de este lema obtenemos que

$$(ar|st)_\tau = (br|st)_\tau \quad \text{y} \quad (ab|rt)_\tau + (bt|rs)_\tau = (ab|rs)_\tau + (bs|rt)_\tau,$$

luego, aplicando el Lema 2.6 $(ar|st) \simeq (br|st) \simeq (br|st)_\tau = (ar|st)_\tau$.

Caso 4. Si $r, s, t \in F \setminus \{a, b\}$ distintos, $(ab|rs) \simeq (ab|rs)_\tau$, luego $(ab|rt) \simeq (ab|rt)_\tau$. Esto se sigue de las propiedades

$$(bt|rs) \simeq (bt|rs)_\tau \quad \text{y} \quad (bs|rt) \simeq (bs|rt)_\tau,$$

aplicando la segunda propiedad del Lema 2.6 y la identidad correspondiente en τ indicada anteriormente. Aplicando la observación anterior dos veces, obtenemos que para

todo $r, s \in F \setminus \{a, b\}$, tenemos que $(ab|cd) = (ab|cd)_\tau$, entonces $(ab|rd) \simeq (ab|rd)_\tau$, luego $(ab|rs) \simeq (ab|rs)_\tau$. ■

Nos referiremos al τ del Teorema 2.2, como un **árbol de aproximación** de F .

2.3 La topología de razón cruzada

En esta sección veremos cómo una razón cruzada hiperbólica da lugar a una topología natural.

Supongamos que $(\cdot|\cdot)$ es una razón cruzada hiperbólica en un conjunto M y sean $a, b \in M$ distintos, definimos una topología en $M \setminus \{a, b\}$ como sigue:
Dado $x \in M \setminus \{a, b\}$ y $r \geq 0$, sea

$$D_{ab}(x, r) = \{x\} \cup \{y \in M \setminus \{a, b, x\} : (ab|xy) \geq r\},$$

tomamos como base de vecindades de x a la colección $\{D_{ab}(x, r) : r > 0\}$. Así, un subconjunto U de $M \setminus \{a, b\}$ es abierto si para todo $x \in U$, existe un $r > 0$ tal que $x \in D_{ab}(x, r) \subseteq U$.

Afirmamos que si tomamos una constante $\lambda > 1$ suficientemente cercana a uno en relación con la constante de hiperbolicidad, la función $(x, y) \mapsto \lambda^{-(ab|xy)}$ mediante un proceso que cambia la distancia por a lo más una constante multiplicativa, define una métrica. Así que la construcción define una base de vecindades para una topología metrizable (para más detalles ver [9]).

Observación 2.7. Sean $a, b, c \in M$ distintos, entonces las topologías definidas en $M \setminus \{a, b\}$ y $M \setminus \{a, c\}$ coinciden. En efecto, por la Observación 2.4 inciso a), tenemos que

$$(ac|xy) \leq (ab|xy) + p \quad y \quad (ab|xy) \leq (ac|xy) + q,$$

donde $p = (ac|bx) + k$, $q = (ab|cx) + k$ (son fijos) y k es la constante de los axiomas (C1) y (C2), entonces,

$$D_{ac}(x, r) \subseteq D_{ab}(x, r - p) \quad y \quad D_{ab}(x, r) \subseteq D_{ac}(x, r - q).$$

Aplicando dos veces la Observación 2.7, obtenemos que si $a, b, c, d \in M$, con $a \neq b$ y $c \neq d$, entonces las topologías en $M \setminus \{a, b\}$ y $M \setminus \{c, d\}$ coinciden en $M \setminus \{a, b, c, d\}$. Así que obtenemos una topología bien definida, metrizable y Hausdorff en M , la llamamos la **topología de razón cruzada** (revisar [9] para más detalles).

Decimos que una razón cruzada es **perfecta** si la topología de razón cruzada es perfecta. Es decir, si dados $x, y, z \in M$ distintos, podemos encontrar una sucesión $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en $M \setminus \{x, y, z\}$ tal que $(xx_i|yz) \rightarrow \infty$.

Por otro lado, decimos que una razón cruzada hiperbólica es una **razón cruzada de caminos** si dados $x, y, z, w \in M$ distintos y cualquier $p \leq (xy|zw)$, existe $u \in M$ tal que

$$(xy : u : zw) \quad y \quad (xy|zu) \simeq p.$$

Esta definición es relativa a una constante aditiva que podemos suponer igual a la constante de hiperbolicidad (aumentando la constante de hiperbolicidad si es necesario).

Observación 2.8. *Dada una razón cruzada hiperbólica, la hipótesis de ser de caminos es equivalente a lo siguiente afirmación:*

Dados $x, y, z, w \in M$ distintos, hay una sucesión $u_0, u_1, \dots, u_n$ de M tal que para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ con $i < j$

$$u_0 = y, \quad u_n = w \quad y \quad (xu_i|yu_j) \simeq j - i.$$

En efecto, sean $x, y, z, w \in M$ distintos, supongamos que $(xy|zw) = n$:

$\Rightarrow$ Si $(..|..)$ es una razón cruzada hiperbólica de caminos, hasta una constante aditiva podemos construir la sucesión $u_1, u_2, \dots, u_n$ como se muestra en la Figura 2.8.

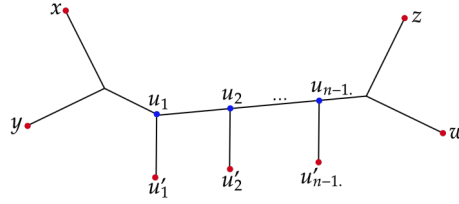


Figura 2.8: Sucesión $u_1, u_2, \dots, u_n$.

$\Leftarrow$) Si $p \leq n$ y hay una sucesión $u_0, u_1, \dots, u_n$ de M tal que para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ con $i < j$,

$$(xu_i|yu_j) \simeq j - i, \quad u_0 = y \quad y \quad u_n = w,$$

consideramos el punto u_p , se cumple $(xy : u_p : zw)$ y $(xy|zu_p) \simeq p$.

Sería más natural tomar $(xu_i|yu_j) \simeq K(j-i)$ para alguna constante K , relacionada con la constante de hiperbolicidad. Así, podríamos insistir, por ejemplo, que $(xu_i : yu_j)$, pero no necesitamos esto. En cualquier caso, siempre podemos reparametrizar para que $K = 1$, y así ahorrarnos la carga de nuestra notación.

Lema 2.9 (cf. [3] 2.8). *Sea $(...|...)$ una razón cruzada hiperbólica de caminos perfecta en un conjunto M y sean $a, b, c \in M$ puntos distintos. Entonces existe una sucesión biinfinita, $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ en $M \setminus \{a, b\}$ tal que para todo $i, j \in \mathbb{Z}$, $(bx_i|ax_j) \simeq j - i$ y $x_0 = c$.*

Demostración. Por hipótesis la razón cruzada es perfecta, como a y b no son puntos aislados, existe una sucesión biinfinita $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que para todo $i > 0$

$$x_i \rightarrow a, \quad x_{-i} \rightarrow b \quad y \quad x_0 = c.$$

Pasando a una subsucesión con $x_0 = c$, podemos suponer que si $0 \leq i < j$, entonces

$$(bx_0|ax_i) \ll (bx_0|ax_j) \quad \text{y} \quad (ax_0|bx_{-i}) \ll (ax_0|bx_{-j})$$

luego, usando la Observación 2.4 inciso a), obtenemos que para cualquier $i < j$

$$0 \ll (bx_0|ax_j) - (bx_0|ax_i) \ll (bx_i|ax_j).$$

Ahora, dado que $0 \ll (bx_i|ax_j)$, podemos tomar $p = j - i \leq (bx_i|ax_j)$ y por definición de razón cruzada hiperbólica de caminos se cumple que $(bx_i|ax_j) \simeq j - i$. ■

Capítulo 3

De razones cruzadas a cuasimétricas

En este capítulo describiremos cómo una razón cruzada hiperbólica en un conjunto induce una cuasimétrica hiperbólica sobre el conjunto de tripletas distintas. Para esto vamos a aproximar árboles para razones cruzadas como hicimos en el Teorema 2.2.

3.1 Cuasimétricas

En esta sección definiremos un espacio cuasimétrico de caminos hiperbólico, (Q, ρ) , y estudiaremos algunas propiedades. Definiremos una topología y una razón cruzada hiperbólica en $Q \cup \partial Q$. Probaremos que si un grupo es localmente finito con una cuasimétrica de caminos hiperbólica, ρ , invariante a la izquierda, entonces es hiperbólico (Lema 3.8). Finalmente, daremos una propiedad sobre cuándo un espacio cuasimétrico de caminos es cuasiisométrico a un espacio localmente finito (Proposición 3.11).

A gran escala, una cuasimétrica es indistinguible de una métrica (la diferencia está en la desigualdad del triángulo, la cuál relajamos con una constante aditiva). Así que todos los resultados estándar sobre cuasiisometrías e hiperbolicidad se cumplen más o menos sin cambios. Sin embargo, perdemos la noción de una topología inducida, por lo que buscamos sustitutos geométricos para las ideas de compacidad local, etc.

Más precisamente, definimos una **k -cuasimétrica**, ρ , en un conjunto, Q , como una función $\rho : Q \times Q \rightarrow [0, \infty)$ tal que para todo $x, y, z \in Q$,

$$\rho(x, x) = 0, \quad \rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \text{y} \quad \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) + k.$$

Una **cuasimétrica**, es una k -cuasimétrica para algún $k \geq 0$. Nos referiremos a k como la **constante cuasimétrica**.

Sean $x \in Q$ y $r \geq 0$, definimos $N_\rho(x, r) = \{y \in Q : \rho(x, y) \leq r\}$ y dado $P \subseteq Q$, decimos que P es **r -cuasidenso** en Q si $Q = N_\rho(P, r)$, donde

$$N_\rho(P, r) = \bigcup_{x \in P} N_\rho(x, r)$$

y decimos que P es **cuasidenso** en Q si es r -cuasidenso para alguna $r \geq 0$.

Un **segmento k -geodésico** (que conecta x_0 a x_n) es una sucesión finita de puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$ tal que para todo $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\rho(x_i, x_j) \simeq_k |i - j|.$$

Decimos que una cuasimétrica es una **cuasimétrica de caminos** si existe algún $k \geq 0$ tal que todo par de puntos puede ser conectado por un segmento k -geodésico. Si Q es un espacio con una cuasimétrica de caminos, consideramos esta k igual a la constante cuasimétrica (lo podemos hacer tomando el máximo entre ambas constantes).

Permitiendo secuencias infinitas y biinfinitas (con dominios en $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ respectivamente), definimos las nociones de **rayo geodésico** y **geodésica biinfinita**.

Dados (Q, ρ) y (Q', ρ') espacios cuasimétricos, definimos una **cuasiisometría** entre estos espacios igual que para los espacios métricos. Es decir, una función $f : Q \rightarrow Q'$ tal que existen constantes $\lambda \geq 1$ y $c \geq 0$ donde para todo $x, y \in Q$

$$\frac{1}{\lambda} \rho(x, y) - c \leq \rho'(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y) + c$$

y $f(Q)$ es cuasidenso en Q' .

Observación 3.1. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

- a) *Ser una cuasimétrica de caminos es invariante bajo cuasiisometrías. Es decir, si $f : (Q, \rho) \rightarrow (Q', \rho')$ es una cuasiisometría entre cuasimétricas y (Q, ρ) es de caminos, entonces (Q', ρ') es de caminos.*
- b) *Si P es cuasidenso en Q , entonces la inclusión $i : (P, \rho) \hookrightarrow (Q, \rho)$ es una cuasiisometría.*

Ahora, probaremos que cada espacio con una cuasimétrica de caminos es cuasiisométrico a un grafo (y por lo tanto, a un espacio métrico de caminos). Consideremos la siguiente construcción:

Sean (Q, ρ) un espacio cuasimétrico de caminos y $r \geq 0$. Definimos $G = G_r(Q)$ como la gráfica tal que

$$V(G) = Q \quad \text{y} \quad xy \in A(G) \iff \rho(x, y) \leq r.$$

Consideramos a la gráfica G como un espacio métrico (G, ω) , donde ω es la métrica definida en la sección 1.1.

Observación 3.2. *Con la definición de (G, ω) anterior:*

- a) *Si tomamos r suficientemente grande en relación con la constante cuasimétrica, entonces $\mathcal{T}$ es conexa. En efecto, sean $x_0, x_n \in V(G) = Q$ y sea k la constante constante cuasimétrica (igual a la constante k de los segmentos k -geodésicos) de (Q, ρ) . Como (Q, ρ) es una cuasimétrica de caminos, existen $x_0, x_1, \dots, x_n \in Q$ tal que para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $|\rho(x_i, x_j) - |i - j|| \leq k$. En particular, para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\rho(x_i, x_{i+1}) \leq k+1$. Tomamos $r=k+1$, entonces $x_0, x_1, \dots, x_n$ es un camino en G que conecta a x_0 con x_n .*

b) La inclusión $i : (Q, \rho) \hookrightarrow (G, \omega)$ es una cuasiisometría. En efecto, $N_\omega(Q, \frac{1}{2}) = G$ así que $i(Q) = Q$ es cuasidenso en G . Ahora, como G es conexo, existe un camino $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ de longitud mínima en G que conecta a x con y , es decir, $\omega(x, y) = n$. Si k es la constante cuasimétrica de Q , como ρ es una cuasimétrica y por definición de $A(G)$

$$\rho(x, y) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1}) \leq n(k+1) + (n-1)k \leq n(k+1) + nk \leq \omega(x, y)(2k+1).$$

Además, como ρ es una cuasimétrica de caminos, existe un segmento k -geodésico $x = x_0, x_1, \dots, x_m = y$ en Q tal que $\rho(x_i, x_j) \simeq_k |i-j|$ para todo $i, j \in \{0, 1, \dots, m\}$. En particular, para todo $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, $\rho(x_i, x_{i+1}) \leq k+1 = r$, así que $x = x_0, x_1, \dots, x_m = y$ es un camino en G , luego $n = \omega(x, y) \leq m$ y también $-k + m \leq \rho(x_0, x_m)$, entonces

$$-k + \omega(x, y) = -k + n \leq -k + m \leq \rho(x, y).$$

Decimos que un espacio cuasimétrico es **localmente finito** si todo subconjunto acotado es finito.

Observemos que si (Q, ρ) es un espacio cuasimétrico de caminos localmente finito, entonces el grafo construido arriba será localmente finito (en el sentido de que cada vértice tiene grado finito). En efecto, si existe $x \in V(G)$ de grado infinito, entonces $A := N_\omega(x, 1) \cap V(G)$ es acotado e infinito, notemos que A consiste de los vértices adyacentes a x y por definición de la gráfica $A = N_\rho(x, r)$, así que A es un conjunto acotado e infinito en (Q, ρ) y esto contradice que (Q, ρ) es localmente finito.

Lema 3.3 (cf. [3] 3.1). *Sea Γ un grupo con una cuasimétrica de caminos, ρ , invariante a la izquierda tal que Γ como espacio es localmente finito. Entonces Γ es finitamente generado.*

Más aún, (Γ, ρ) es cuasiisométrico (a través de la identidad) a Γ con la métrica de la palabra con respecto a algún (y por lo tanto cualquier) conjunto generador finito.

Demostración. Por la observación 3.2, los espacios son cuasiisométricos. Consideramos $G_r(Q) = \text{Cay}(\Gamma, N_\rho(e, r))$ donde e es la identidad del grupo. Como ρ es una cuasimétrica de caminos en Γ , por la Observación 3.1, la métrica de la palabra es una cuasimétrica de caminos en $G_r(Q)$. Además, por la Observación 3.2, tomando r suficientemente grande tenemos que $G_r(Q)$ es conexo y dado que $G_r(Q)$ es localmente finito, entonces $N_\rho(e, r)$ es un conjunto finito que genera a Γ . ■

Para terminar esta sección, consideramos la pregunta general de cuándo un espacio cuasimétrico de caminos es cuasiisométrico a un espacio localmente finito. Para los propósitos de esta tesis no necesitamos preocuparnos formalmente por esto, aunque esta pregunta nos ayuda a aclarar algunos puntos que se siguen de la construcción. Primero, seguimos con más conceptos importantes, como razones cruzadas e hiperbolicidad.

Supongamos que (Q, ρ) es un espacio cuasimétrico (no necesariamente un camino cuasimétrico). Dados $x, y, z, w \in Q$, definimos

$$(xy|zw)_\rho = \frac{1}{2} \left[\max\{\rho(x, y) + \rho(z, w), \rho(x, z) + \rho(y, w), \rho(x, w) + \rho(y, z)\} - (\rho(x, y) + \rho(z, w)) \right].$$

Observemos que se satisface la simetría

$$(xy|zw)_\rho = (yx|zw)_\rho = (zw|xy)_\rho$$

por lo tanto su restricción a $\Theta_4(Q)$ es una razón cruzada de Q y podemos expresar la hiperbolicidad en estos términos:

Decimos que un espacio cuasimétrico, (Q, ρ) , es **hiperbólico** si la razón cruzada inducida en $(\cdot|\cdot)_\rho$, en Q satisface el axioma (C1) de una razón cruzada hiperbólica. Nos referimos a la constante involucrada como la **constante de hiperbolicidad**. Podemos (eligiendo el máximo) considerarla igual a la constante cuasimétrica. En el caso de una métrica, esta propiedad se conoce como la **caracterización estándar de cuatro puntos de la hiperbolicidad**.

Sean (X, d) un espacio métrico y $x \in X$, el **producto de Gromov** de $y, z \in X$ con respecto a x se define como

$$(y \cdot z)_x = \frac{1}{2} [d(y, x) + d(z, x) - d(y, z)],$$

decimos que un espacio métrico X es **δ -hiperbólico** si para todo $x, y, z, w \in X$

$$(x \cdot y)_w \geq \min\{(x \cdot z)_w, (y \cdot z)_w\} - \delta$$

y es **hiperbólico** si es δ -hiperbólico para algún $\delta \geq 0$. La caracterización hiperbólica de cuatro puntos nos dice que esta definición de espacio hiperbólico y la definición que dimos en el Capítulo 1 son equivalentes.

Usaremos libremente argumentos o resultados de [9] o [1], donde generalizan, sin ningún cambio esencial, a cuasimétricas. Por ejemplo, se puede encontrar el siguiente análogo del Teorema 2.2 (para espacios métricos) en cualquiera de las referencias anteriores:

Proposición 3.4 (cf. [3] 3.2). *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea (F, ρ) un espacio k -cuasimétrico k -hiperbólico de cardinalidad n . Entonces existe una constante, $h(n)$, (que depende únicamente de n) donde podemos encajar F en un árbol métrico, (τ, d) , tal que para todo $x, y \in F$, $|\rho(x, y) - d(x, y)| \leq kh(n)$.*

Notemos que la definición de hiperbolicidad equivale a la conclusión de la Proposición 3.4 para todos los subconjuntos de 4 elementos.

Ahora, supongamos que (Q, ρ) es hiperbólico. Aplicando la Proposición 3.4 a cada subconjunto de 5 elementos de Q , obtenemos que $(\cdot|\cdot)_\rho$ es una razón cruzada hiperbólica. En otras palabras, el axioma (C1) implica automáticamente el axioma (C2) en el caso en que la razón cruzada se deriva de un espacio cuasimétrico.

Observación 3.5. Una cuasimétrica hiperbólica es una cuasimétrica de caminos si y sólo si se cumple lo siguiente:

Si $x, y \in Q$ y $p \leq \rho(x, y)$, entonces existe algún $z \in Q$ con

$$\rho(x, z) \simeq p \quad y \quad \rho(y, z) \simeq \rho(x, y) - p.$$

En efecto, sean $x, y \in Q$ y supongamos que $\rho(x, y) = n$:

$\Leftrightarrow$ Si $n \leq 1$, terminamos (pues x, y es un segmento k -geodésico). Si $n > 1$, entonces existe $x_1 \in Q$ tal que

$$\rho(x, x_1) \simeq 1 \quad y \quad \rho(x_1, y) \simeq n - 1;$$

si $1 \leq n - 1$, entonces existe $x_2 \in Q$ con

$$\rho(x_1, x_2) \simeq 1 \quad y \quad \rho(x_2, y) \simeq n - 2;$$

continuando con este proceso encontramos un segmento k -geodésico $x, x_1, \dots, x_{n-1}, y$.

$\Rightarrow$ Como (Q, ρ) es una cuasimétrica de caminos, entonces existe un segmento geodésico $x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$ tal que para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\rho(x_i, x_j) \simeq |i - j|$, así que dado $p \leq n$, $x_p \in Q$ es tal que

$$\rho(x, x_p) \simeq p \quad y \quad \rho(x_p, x_n) \simeq n - p.$$

Ahora, supongamos que (Q, ρ) es un espacio cuasimétrico de caminos hiperbólico. Dados $x, y, z \in Q$, decimos que w es un **centro** para (x, y, z) , como un punto $w \in Q$ tal que

$$(xy|ww)_\rho \simeq 0, \quad (yz|ww)_\rho \simeq 0 \quad y \quad (zx|ww)_\rho \simeq 0.$$

Además, se cumple que si w' es otro centro de (x, y, z) , entonces $\rho(w, w') \simeq 0$.

Dado un espacio métrico Q , definimos su frontera, ∂Q (en el capítulo uno). Fijamos un punto base, $a \in Q$ y ∂Q es el conjunto de clases paralelas de rayos geodésicos que empiezan en a . Definimos una **topología en ∂Q** mediante la convergencia de sucesiones en ∂Q a un punto en ∂Q :

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \partial Q$ y sea $x \in \partial Q$, decimos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** a x si existen rayos geodésicos $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y γ representando $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y x respectivamente, de modo que cada sucesión de $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión que converge (uniformemente en subconjuntos compactos de $[0, \infty)$) a γ .

Observación 3.6. Teniendo la noción de convergencia de sucesiones queda definida la topología. Diremos que $A \subseteq \partial Q$ es abierto si y sólo si para todo $x \in A$, todas las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que convergen a x (en nuestra noción de convergencia) son tales que existe $N \in \mathbb{N}$ donde para todo $n \geq N$, se cumple que $x_n \in A$.

Fijamos $r \geq 0$, entonces dado $x \in \partial Q$, elegimos un rayo, (x_n) , en la clase de x . Dado $N \in \mathbb{N}$, sea

$$D(N) = \{y \in Q \cup \partial Q : \text{existe una geodésica de } a \text{ a } y \text{ que intersecta a } N_\rho(x_N, r)\}.$$

La colección $\{D(N) : N \in \mathbb{N}\}$ define una base de vecindades de x en $Q \cup \partial Q$. Para mayor precisión, tomamos la topología de Q como discreta y obtenemos una topología bien definida en $Q \cup \partial Q$. La topología en $Q \cup \partial Q$ descrita, es independiente de la elección de punto base, esta topología es metrizable (para más detalles sobre esta topología revisar [6]).

Ahora supongamos que $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Theta_4(\partial Q)$. Encontramos abiertos disjuntos a pares U_1, U_2, U_3, U_4 en $Q \cup \partial Q$, con $x_i \in U_i$, tales que si $y_i, z_i \in Q \cap U_i$, entonces $(y_1 y_2 | y_3 y_4)_\rho \simeq (z_1 z_2 | z_3 z_4)_\rho$. Definimos

$$(U_1 U_2 | U_3 U_4)_\rho = \sup\{(y_1 y_2 | y_3 y_4)_\rho : y_i \in Q \cap U_i\}$$

y sea $(x_1 x_2 | x_3 x_4)_\rho$ el límite de $(U_1 U_2 | U_3 U_4)_\rho$. Como cada conjunto U_i se contrae hasta el punto x_i , entonces esto define una razón cruzada hiperbólica, $(..|..)_\rho$, en ∂Q . Además, la topología en ∂Q coincide con la topología de razón cruzada.

De hecho, podemos mantener fijo cualquiera de los puntos de la construcción anterior y de esta manera obtener definiciones de

$$(ab|cx)_\rho, \quad (ab|xy)_\rho \quad \text{y} \quad (ax|yz)_\rho,$$

donde $a, b, c \in Q$ y $x, y, z \in \partial Q$ son puntos distintos. Así, obtenemos una razón cruzada hiperbólica en $Q \cup \partial Q$.

Además, si $(x, y, z) \in \Theta_3(\partial Q)$, entonces podemos definir un **centro** (x, y, z) como un punto $w \in Q$, para el cual

$$(xy|ww)_\rho \simeq 0, \quad (yz|ww)_\rho \simeq 0 \quad \text{y} \quad (zx|ww)_\rho \simeq 0.$$

Al igual que con los espacios con una cuasimétrica de caminos, la propiedad de ser hiperbólico es un invariante cuasiisométrico. De hecho, se cumple lo siguiente:

Proposición 3.7. *Una cuasiisometría $f : Q \rightarrow Q'$ entre espacios cuasimétricos de caminos e hiperbólicos da lugar naturalmente a un homeomorfismo $f_\partial : \partial Q \rightarrow \partial Q'$.*

Una demostración de la proposición anterior, la podemos encontrar en [6]. Utilizando la Proposición 3.7 y el Lema 3.3, obtenemos el siguiente lema:

Lema 3.8 (cf. [3] 3.3). *Si Γ admite una cuasimétrica de caminos, ρ , hiperbólica, localmente finita e invariante a la izquierda, entonces Γ es hiperbólico.*

Más aún, la frontera $\partial\Gamma$, es naturalmente (y por tanto Γ -equivariantemente) homeomorfa a la frontera de (Γ, ρ) .

Para aclarar un par de puntos, notemos que la frontera de un espacio cuasimétrico de caminos, hiperbólico, y localmente finito es necesariamente compacto. Por lo tanto, esto también es válido para un espacio cuasiisométrico. Resulta que hay un cierto recíproco con esta observación, lo veremos en la Proposición 3.11.

Decimos que un espacio cuasimétrico de caminos es **casi localmente finito** si es cuasiisométrico a un espacio cuasimétrico localmente finito.

Observación 3.9. *Un espacio cuasimétrico es casi localmente finito si y sólo si contiene un subconjunto cuasidenso localmente finito. Notemos que esto se cumple pues la imagen de un espacio cuasimétrico localmente finito bajo una cuasiisometría es, en sí misma, localmente finita.*

Decimos que un espacio cuasimétrico, (P, ρ) , es **r -separado** si para todo par de puntos $x, y \in P$ distintos, $\rho(x, y) \geq r$.

Lema 3.10 (cf. [3] 3.4). *Sea (Q, ρ) un espacio cuasimétrico de caminos. Entonces (Q, ρ) es casi localmente finito si y sólo si existe algún $r \geq 0$ tal que todo subconjunto de Q acotado y separado por r es finito.*

Demostración. Sea (Q, ρ) un espacio cuasimétrico de caminos.

Supongamos que (Q, ρ) es casi localmente finito, entonces existe una (λ, c) -cuasiisometría $f : (Q, \rho) \rightarrow (M, \omega)$, donde (M, ω) es un espacio cuasimétrico localmente finito. Ahora, dado $r \geq 0$, si $Q' \subseteq Q$ es un subconjunto acotado y separado por r , entonces existe $L \geq 0$ tal que para todo $x, y \in Q'$

$$r \leq \rho(x, y) \leq L,$$

luego para todo $x, y \in Q'$

$$\frac{1}{\lambda}r - c \leq \omega(f(x), f(y)) \leq \lambda L + c.$$

Como $f(Q')$ es acotado y M es localmente finito, entonces $f(Q')$ es finito. Supongamos $f(Q') = \{y_1, \dots, y_n\}$, si Q' es infinito, entonces para algún $i \in \{1, \dots, n\}$ la imagen inversa de $\{y_i\}$ es infinita, pero como Q' es r -separado, esto contradice que Q' es acotado y por lo tanto la propiedad se cumple para todo $r \geq 0$.

Por otro lado, supongamos que existe algún $r \geq 0$ tal que todo subconjunto de Q acotado y separado por r es finito. Sea P un subconjunto de Q maximal que es acotado y separado por r , entonces P es localmente finito y P es $(2r)$ -cuasidenso en Q . Consideramos la inclusión $i : (P, \rho) \hookrightarrow (Q, \rho)$, entonces i es una cuasiisometría y por lo tanto (Q, ρ) es casi localmente finito. ■

Proposición 3.11 (cf. [3] 3.5). *Sea (Q, ρ) un espacio cuasimétrico de caminos hiperbólico, con frontera, ∂Q , compacta y donde todo punto de Q se encuentra a una distancia acotada b , del centro de alguna tripleta en $\text{Conf}_3(\partial Q)$. Entonces Q es casi localmente finito.*

Demostración. Elegimos $r > 0$, grande en relación con la constante de hiperbolicidad y en relación con la b de la hipótesis. Supongamos que Q no es casi localmente finito, entonces por el Lema 3.10 para todo $r > 0$, existe un subconjunto U_r infinito, acotado y separado por r , así que podemos encontrar una sucesión infinita acotada, $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$, de puntos en Q tales que $\rho(w_i, w_j) \geq r$ siempre que $i \neq j$. Como w_i está a una distancia acotada desde el centro de una tripleta de puntos distintos, $x_i, y_i, z_i \in \partial Q$ y ∂Q es compacto, pasando a una subsucesión podemos suponer que $x_i \rightarrow x$, $y_i \rightarrow y$ y $z_i \rightarrow z$. Además, si x, y y z no son todos distintos sin pérdida de generalidad asumimos que

$x = y$, entonces la sucesión $(y_i)_i$ converge a x , luego las sucesiones $(x_i)_i$ y $(y_i)_i$ se van acercando, pero esto implica que los centros w_i tienden a infinito y dado que el conjunto de los w_i es acotado esto no es posible, entonces x, y y z son todos distintos. Sea $w \in Q$ un centro para (x, y, z) , para i grande, $\rho(w, w_i)$ está acotada por alguna constante que depende de alguna constante que podemos suponer que es menor que $r/2$, pero esto contradice que $\rho(w_i, w_j) \geq r$ para $i \neq j$. ■

3.2 De razones cruzadas a cuasimétricas

En esta sección, veremos cómo una razón cruzada hiperbólica en un conjunto induce un espacio cuasimétrico hiperbólico en el conjunto de tripletas distintas. Para esto usaremos árboles de aproximación para razones cruzadas como en el Teorema 2.2.

Convención 3.12. Sea $(..|..)$ una razón cruzada hiperbólica en un conjunto M . Adoptaremos la convención natural de que para todo $x, y, z \in M$ distintos

$$(xy|xy) = (xy|xz) = 0.$$

En el resto del capítulo denotaremos por Q , a $\text{Conf}_3(M)$, es decir, al conjunto de ternas distintas de M .

Sea $\rho : Q \times Q \rightarrow [0, \infty)$, donde si $X = (x_1, x_2, x_3)$ y $Y = (y_1, y_2, y_3)$, entonces

$$\rho(X, Y) = \max\{(x_i x_j | y_k y_l) : i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}, i \neq j, k \neq l\}$$

Observación 3.13. La función ρ definida antes, cumple que para todo $X, Y \in Q$

$$\rho(X, X) = 0 \quad \text{y} \quad \rho(X, Y) = \rho(Y, X).$$

Además, $\rho(X, Y) = 0$ si $\{x_1, x_2, x_3\} = \{y_1, y_2, y_3\}$.

Una interpretación más geométrica de la definición de ρ , es la siguiente:

Lema 3.14 (cf. [3] 4.1). Sean $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3) \in Q$, elegimos un árbol de aproximación (τ, d) para el conjunto $\{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$ (como en la demostración del Teorema 2.2) y sean

$$x = \text{med}(x_1, x_2, x_3) \quad \text{y} \quad y = \text{med}(y_1, y_2, y_3).$$

Entonces $\rho(X, Y) \simeq d(x, y)$.

Demostración. Si $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ con $i \neq j$ y $k \neq l$, como x (resp. y) es la intersección de los segmentos $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ y $[x_1, x_3]$ (resp. $[y_1, y_2], [y_2, y_3]$ y $[y_1, y_3]$), entonces $[x_i, x_j]$ y $[y_k, y_l]$ contienen los puntos x e y respectivamente. Así,

$$(x_i x_j | y_k y_l) \simeq (x_i x_j | y_k y_l)_\tau \leq d(x, y)$$

y por lo tanto $\rho(X, Y) \preceq d(x, y)$.

Por otro lado, podemos encontrar i, j para que x_i, x_j e y estén en diferentes componentes de $\tau \setminus \{x\}$; en otras palabras, $x = \text{med}(x_i, x_j, y)$. De manera similar podemos encontrar k, l tales que $y = \text{med}(y_k, y_l, x)$. Así,

$$d(x, y) = (x_i x_j | y_k y_l)_\tau \simeq (x_i x_j | y_k y_l)$$

y por lo tanto $d(x, y) \preceq \rho(X, Y)$. ■

Proposición 3.15 (cf. [3] 4.2). *(Q, ρ) es un espacio cuasimétrico hiperbólico.*

Demostración. Por la observación 3.13, para demostrar que ρ es un espacio cuasimétrico nos falta verificar que se cumple la desigualdad del triángulo (con una constante aditiva). Sean $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ y $Z = (z_1, z_2, z_3)$ en Q , consideramos (τ, d) un árbol de aproximación del conjunto $\{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3\}$ y sean $x, y, z \in \tau$ la medianas de las ternas X, Y y Z respectivamente.

Por el Lema 3.14, tenemos que

$$\rho(X, Y) \simeq d(x, y), \quad \rho(Y, Z) \simeq d(y, z) \quad \text{y} \quad \rho(X, Z) \simeq d(x, z)$$

y como $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ tenemos que $\rho(X, Z) \simeq \rho(X, Y) + \rho(Y, Z)$.

Para demostrar que ρ es hiperbólica consideramos otro $W = (w_1, w_2, w_3) \in Q$ y sea (τ, d) un árbol de aproximación para el conjunto $\bigcup_{i=1}^3 \{x_i, y_i, z_i, w_i\}$. Notemos que (τ, d) es 0-hiperbólico (pues es un árbol), luego, usamos la caracterización de hiperbolicidad de cuatro puntos (como se describe en la sección anterior) para concluir que (Q, ρ) es hiperbólico. ■

Lema 3.16 (cf. [3] 4.3). *Sea $(\dots | \dots)$ una razón cruzada de caminos. Entonces ρ es una cuasimétrica de caminos.*

Demostración. Sean $X = (x_1, x_2, x_3)$ y $Z = (z_1, z_2, z_3)$ elementos de Q . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\rho(X, Z) = (x_1 x_2 | z_1 z_2)$ queremos encontrar un segmento k -geodésico entre X y Z , asumimos que $\rho(X, Z) \gg 0$ (de lo contrario X, Z es un segmento k -geodésico). Como $(\dots | \dots)$ es una razón cruzada hiperbólica de caminos, por definición dado cualquier $p \leq \rho(X, Z)$, existe $u \in M$ tal que

$$(x_1 x_2 : u : z_1 z_2) \quad \text{y} \quad (x_1 x_2 | z_1 u) \simeq p.$$

Del axioma (C2) se sigue que $(x_1 u | z_1 z_2) \simeq \rho(Z, Y) - p$. En nuestro caso de interés, podemos suponer que $0 \ll p \ll \rho(X, Z)$. Sea $Y = (x_1, z_1, u)$ y sean (τ, d) un árbol de aproximación para $\{x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3, u\}$ y sean $x, y, z \in \tau$ las medianas de X, Y y Z respectivamente (ver Figura 3.1), entonces $y \in [x, z]$, luego

$$\rho(X, Y) \simeq d(x, y) \simeq p \quad \text{y} \quad \rho(Y, Z) \simeq d(y, z) \simeq \rho(X, Z) - p$$

y por la Observación 3.5 terminamos. ■

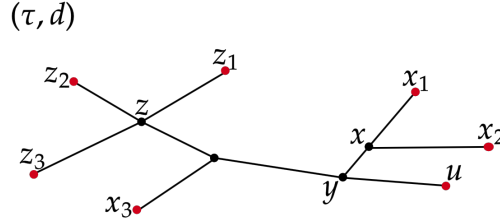


Figura 3.1: Árbol (τ, d) .

De lo anterior, se deduce que Q tiene una frontera bien definida, ∂Q , como se describe en el Capítulo 1, que a su vez admite una razón cruzada $(..|..)_\rho$ inducida por la cuasimétrica ρ .

Ahora vamos a asumir que $(..|..)_\rho$ es perfecta y construiremos un encaje natural de M en ∂Q , respetando esta razón cruzada hasta una constante aditiva. Más específicamente, demostraremos que:

Proposición 3.17 (cf. [3] 4.4). *Sea $(...|...)$ una razón cruzada hiperbólica de caminos y perfecta en un conjunto M y sea ρ una cuasimétrica de caminos hiperbólica definida sobre el conjunto Q como se definió antes. Entonces hay un encaje natural de M en la frontera, ∂Q , tal que para todo $x, y, z, w \in M$, $(xy|zw) \simeq (xy|zw)_\rho$.*

Más aún, M es denso en ∂Q .

De la sección anterior tenemos que la topología estándar en ∂Q concuerda con la topología de razón cruzada inducida por la razón cruzada $(..|..)_\rho$ y como el encaje de M en ∂Q es continuo, entonces la topología de subespacio restringida a M concuerda con la topología inducida por la razón cruzada $(..|..)$.

El procedimiento para construir el encaje es el siguiente: Sean $a, b \in M$ y $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en $M \setminus \{a, b\}$. Nos referimos a $(b, (x_i))$ como un **rayo límite** que tiende a a si $(bx_i|ax_j) \simeq j - i$ siempre que $i < j$.

Sea $X_i = (b, a, x_i)$ y sean $i, j \in \mathbb{N}$, entonces $\rho(X_i, X_j) \simeq |i - j|$ (notemos que si $x, y, z, w \in M$ distintos, entonces $\rho((x, y, z), (x, y, w)) \simeq \max\{(xz|yw), (xw|yz)\}$). En otras palabras, $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es un rayo geodésico en (Q, ρ) . Por el Lema 2.9, tales rayos existen para cualquier $a \in M$.

Lema 3.18 (cf. [3] 4.5). *Sean $(b, (x_i))$ y $(c, (y_i))$ rayos límite que tienden al punto $a \in M$ y definimos $X_i = (b, a, x_i)$ y $Y_i = (c, a, y_i)$ (de modo que (X_i) y (Y_i) sean rayos en (Q, ρ)). Entonces para todo $i \in \mathbb{N}$, $\rho(X_i, Y_i) \leq \rho(X_0, Y_0)$.*

Demostración. Podemos suponer que i es lo suficientemente grande de tal modo que $(ax_i|bx_0) \gg 0$ y $(ay_i|cy_0) \gg 0$. Sea (τ, d) un árbol de aproximación del conjunto $\{a, b, c, x_0, y_0, x_i, y_i\}$ y sean $x'_0, x'_i, y'_0, y'_i \in \tau$ las medianas de X_0, X_i, Y_0, Y_i respectivamente. Como $(ax_i|bx_0) \gg 0$, entonces $(ax_i|bx_0) \geq 0$, luego $x'_i \in [a, x'_0]$ y de manera similar, $y'_i \in [c, y'_0]$. Ahora, por el Lema 3.14 $d(x'_i, x'_0) \simeq \rho(X_i, X_0)$ y también $\rho(Y_0, Y_i) \simeq d(y'_0, y'_i)$, además $\rho(X_i, X_0) \simeq i \simeq \rho(Y_i, Y_0)$, entonces

$$d(x'_i, x'_0) \simeq \rho(X_i, X_0) \simeq i \simeq \rho(Y_i, Y_0) \simeq d(y'_i, y'_0).$$

Usamos la desigualdad del triángulo y obtenemos que $d(x'_i, y'_i) \preceq d(x'_0, y'_0)$ y por lo tanto $\rho(X_i, Y_i) \preceq \rho(X_0, Y_0)$. ■

Demostración de la Proposición 3.17. Por el Lema anterior los rayos (X_i) y (Y_i) son paralelos. Así que definimos la función

$$f : M \rightarrow \partial Q,$$

tal que dado $a \in M$, $f(a)$ es el punto final ideal de un rayo de este tipo .

Además, si consideramos dos puntos $a, b \in M$ distintos, el Lema 2.9 nos da una geodésica biinfinita, $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, tal que $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(X_{-i})_{i \in \mathbb{N}}$ son cada uno rayos de este tipo, correspondientes a a y b respectivamente, así que $f(a) \neq f(b)$ y f es inyectiva.

Vamos a verificar la afirmación sobre las razones cruzadas, consideramos puntos distintos $x, y, z, w \in M$ y las sucesiones $x_i \rightarrow x, y_i \rightarrow y, z_i \rightarrow z, w_i \rightarrow w$ de modo que $(y, (x_i)), (x, (y_i)), (w, (z_i))$ y $(z, (w_i))$ son rayos límite. Sean

$$X_i = (y, x, x_i), \quad Y_i = (x, y, y_i), \quad Z_i = (w, z, z_i) \quad \text{y} \quad W_i = (z, w, w_i),$$

por definición $(X_i), (Y_i), (Z_i)$ y (W_i) son rayos geodésicos tendiendo a $f(x), f(y), f(z)$ y $f(w)$ respectivamente. Sea (τ, d) un árbol de aproximación para el conjunto

$$\{x, y, w, z, x_i, y_i, z_i, w_i\},$$

entonces para i suficientemente grande tenemos que

$$(xx_i|yz) \gg 0, \quad (xx_i|zw) \gg 0 \quad \text{y} \quad (xx_i|wy) \gg 0,$$

así que podemos suponer que $[x, x_i]$ no se intersecta con $[y, z] \cup [z, w] \cup [w, y]$. Similarmente, podemos asumir que $[y, y_i]$ no se intersecta con $[x, z] \cup [z, w] \cup [w, x]$; que $[z, z_i]$ no se intersecta con $[y, x] \cup [x, w] \cup [w, y]$ y que $[w, w_i]$ no se intersecta con $[y, z] \cup [z, x] \cup [x, y]$.

Sean $x', y', z', w' \in \tau$ las medianas de X_i, Y_i, Z_i y W_i respectivamente. Vemos que x' es el único vértice interno de τ que se encuentra en el segmento $[x, x_i]$ y de manera similar para y', z' y w' , entonces $(x', y'|z'w')_\tau = (xy|zw)_\tau$.

Por el Lema 3.14, $\rho(X_i, Y_i) \simeq d(x', y')$ (y lo mismo se cumple si intercambiamos x', y' por dos puntos diferentes en el conjunto $\{x', y', z', w'\}$ con sus respectivos puntos en $\{X_i, Y_i, Z_i, W_i\}$), entonces

$$(X_i Y_i | Z_i W_i)_\rho \simeq (x' y' | z' w')_\tau = (xy|zw)_\tau \simeq (xy|zw).$$

En otras palabras, obtenemos que para todo i suficientemente grande $(X_i Y_i | Z_i W_i)_\rho = (xy|zw)$. De la definición de $(\dots)_\rho$ en ∂Q como se describió en la Sección 3.1

$$(f(x)f(y)|f(z)f(w))_\rho \simeq (xy|zw)$$

Ahora vamos a demostrar que $f(M)$ es densa en ∂Q . Si $W = (x, y, z) \in Q$, entonces por el Lema 2.9 hay una sucesión biinfinita $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que $x_0 = z$, $X_i \rightarrow f(x)$ y $X_{-i} \rightarrow f(y)$, donde $X_i = (x, y, x_i)$ (de modo que $X_0 = W$). Además,

$$\rho(X_i, X_{-i}) \simeq 2i \simeq \rho(W, X_i) + \rho(W, X_{-i}).$$

En otras palabras, $(X_i X_{-i} | WW)_\rho \simeq 0$, luego, $(f(x)f(y) | WW)_\rho \simeq 0$. De manera similar, podemos obtener que $(f(y)f(z) | WW)_\rho \simeq 0$ y $(f(z)f(x) | WW)_\rho \simeq 0$. Y por definición W es un centro de la tripleta $(f(x), f(y), f(z))$. Con lo anterior demostramos que:

Lema 3.19 (cf. [3] 4.6). *Si $x, y, z \in M$ son puntos distintos, entonces la tripleta (x, y, z) es un centro en Q de la tripleta de puntos ideales $(f(x), f(y), f(z))$.*

Ahora podemos demostrar que $f(M)$ es densa en ∂Q . Para esto, supongamos que $w \in \partial Q$ y elegimos cualquier sucesión de puntos $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en Q que tiende a w . Entonces por el Lema 3.19, cada W_i es el centro de alguna tripleta, digamos (a_i, b_i, c_i) , de puntos de $f(M)$. Así, sin pérdida de generalidad, $a_i \rightarrow w$. ■

Centraremos nuestra atención en los espacios compactos. Supongamos que M es un compactum, metrizable y que $(..|..)$ es una razón cruzada en M .

Decimos que una razón cruzada $(..|..)$ es **compatible** con la topología en M si dados $x, y, z \in M$ distintos y una sucesión $x_i \rightarrow x$, tenemos $(xx_i | yz) \rightarrow \infty$. Como suponemos que M es metrizable, esto es lo mismo que decir que la topología de razón cruzada es más gruesa que la topología dada. Y dado que la topología dada es compacta y la topología de razón cruzada es Hausdorff, se deduce que las dos topologías de hecho, deben coincidir.

Supongamos ahora que M es perfecto y que $(..|..)$ es una razón cruzada de caminos hiperbólica, entonces $(..|..)$ también es perfecto. Sea (Q, ρ) el conjunto de ternas distintas con cuasimétrica inducida ρ y con M encajado como un subconjunto denso de ∂Q . Como M es compacto, entonces $M = \partial Q$. En resumen, hemos demostrado la siguiente proposición:

Proposición 3.20 (cf. [3] 4.7). *Sea M es un espacio compactum, metrizable, perfecto, con una razón cruzada de caminos hiperbólica que es compatible con $(..|..)$. Entonces al espacio de ternas distintas de M , Q , se le puede dar una cuasimétrica ρ de caminos hiperbólica de tal forma que M se identifica naturalmente por un homeomorfismo con la frontera de Q , ∂Q .*

Más aún, las razones cruzadas $(..|..)$ y $(..|..)_{\rho}$ en ∂Q difieren como máximo en una constante aditiva.

Esto es todo lo que necesitamos saber para demostrar el Teorema 1.8, aunque haremos algunos comentarios:

Observamos que, dado que Q no es localmente finito, no existe ninguna razón a priori para esperar que ∂Q sea compacto, como resulta ser el caso. De hecho, Q es necesariamente casi localmente finito (es decir, es cuasiisométrico a un espacio cuasi-métrico localmente finito). En retrospectiva, por el Lema 3.19 y la Proposición 3.11, tenemos que ∂Q es compacto. De hecho, vemos que Q contiene un subconjunto cuasidenso localmente finito y obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.21 (cf. [3] 4.8). *Sea M es espacio compactum, metrizable, perfecto, con una razón cruzada de caminos hiperbólica y compatible $(\cdot|\cdot)$. Entonces hay un espacio cuasimétrico, (P, ρ) , de caminos hiperbólico localmente finito y un homeomorfismo de M sobre ∂P , tal que $(\cdot|\cdot)$ concuerda con $(\cdot|\cdot)_\rho$ en ∂P hasta como máximo una constante aditiva.*

3.3 Más sobre razones cruzadas

En esta sección, daremos una formulación alternativa de una razón cruzada hiperbólica.

Supongamos que $(\cdot|\cdot)$ es una razón cruzada en un conjunto M . Dados cinco puntos $a, b, x, y, z \in M$ distintos, definimos

$$(ab|xyz) = \min\{(ab|xy), (ab|yz), (ab|zx)\}.$$

esta definición es simétrica bajo cualquier permutación de $\{a, b\}$ o $\{x, y, z\}$, así que escribimos $(xyz|ab) = (ab|xyz)$.

Si $(\cdot|\cdot)$ es hiperbólico, por el axioma (C2) para cualquier $(x, y, z, w, a) \in \text{Conf}_5(M)$

$$(xy|zw) \simeq (xya|zw) + (xy|zwa).$$

Resulta que esto se puede utilizar para caracterizar la hiperbolicidad de las razones cruzadas.

Como $(\cdot|\cdot)$ es una razón cruzada en M , la función

$$(\cdot|\cdot) : \text{Conf}_4(M) \rightarrow [0, \infty) \text{ dada por } (a, b, c, d) \mapsto (ab|cd)$$

satisface que para todo $(x, y, z, w) \in \text{Conf}_4(M)$, $(xy|zw) = (yx|zw) = (zw|xy)$. Supongamos que también tenemos una función

$$(\cdot|\cdot|\cdot) : \text{Conf}_5(M) \rightarrow [0, \infty) \text{ dada por } (a, b, x, y, z) \mapsto (ab|xyz)$$

con $(ab|xyz) = (ba|xyz) = (ab|yxz) = (ab|xzy)$ para todo $(a, b, x, y, z) \in \text{Conf}_5(M)$.

Supongamos que existe algún $k \geq 0$ tal que se cumplen los siguientes axiomas:

(c1): Si $(x, y, z, w) \in \text{Conf}_4(M)$, entonces al menos dos de las tres cantidades $(xy|zw)$, $(xz|yw)$ y $(xw|yz)$ son como máximo k .

(c2'): Si $(x, y, z, w, a) \in \text{Conf}_5(M)$, entonces

$$(xy|zw) \simeq_k (xya|zw) + (xy|zwa).$$

Observación 3.22. *El axioma (c2') implica que*

$$(xya|zw) \preceq (xy|zw) \quad y \quad (xy|zwa) \preceq (xy|zw).$$

Proposición 3.23 (cf. [3] 5.1). *Sea $(\cdot|\cdot)$ una razón cruzada que satisface (c1) y (c2'). Entonces $(\cdot|\cdot)$ es hiperbólica.*

Demostración. Necesitamos verificar que se satisfacen los axiomas (C1) y (C2) de la definición de razón cruzada hiperbólica (dada en el Capítulo 2).

El axioma (c1) implica que se cumple (C1) (quizás necesitemos intercambiar y por w o y por z). Probaremos que se cumple (C2). Sean $x, y, z, w, a \in M$ distintos. Podemos suponer que $(xy|zw)$ es el máximo entre los valores de la razón cruzada restringida al conjunto $\{x, y, z, w, a\}$.

Afirmamos que $(xy : a : zw)$ se cumple. Sean $p = (xy|zwa)$ y $q = (xya|zw)$, por (c2')

$$(xy|zw) \simeq p + q.$$

Si $p, q \simeq 0$, entonces $(xy|zw) \simeq 0$ y por ser $(xy|zw)$ el máximo, todas las razones cruzadas en este conjunto de cinco puntos son $\simeq 0$ y no hay nada que probar.

Supongamos que $p \gg 0$. Ahora, por la observación 3.22, $p = (xy|zwa) \preceq (xy|az)$, así que $(xy|az) \gg 0$, luego por (c1), $(ax|yz) \simeq 0$ y por la observación 3.22, $(ax|zwy) \simeq 0$. Así, obtenemos de (c2') que

$$(ax|zw) \simeq (axy|zw) + (ax|zwy) \simeq (axy|zw) = q.$$

Intercambiando x e y , obtenemos que también

$$(ay|zw) \simeq (axy|zw) = q$$

y de nuevo, como $(xy|az) \gg 0$, obtenemos por (c1), que

$$(xa|yz) \simeq 0 \quad \text{y} \quad (ya|xz) \simeq 0.$$

De manera similar, intercambiando z y w , obtenemos

$$(xa|yw) \simeq 0 \quad \text{y} \quad (ya|xw) \simeq 0.$$

También, como $0 \ll p \preceq (xy|zw)$, obtenemos

$$(xz|yw) \simeq 0 \quad \text{y} \quad (xw|yz) \simeq 0.$$

Para las desigualdades restantes (de la definición de la afirmación), consideramos dos casos, a saber, $q \gg 0$ y $q \simeq 0$.

Si $q \gg 0$, entonces todas las desigualdades restantes siguen por simetría, intercambiando $\{x, y\}$ con $\{z, w\}$ y p con q .

Si $q \simeq 0$, entonces $(xy|zw) \simeq p + 0 = (xy|zwa)$, luego, por la maximalidad de $(xy|zw)$ y la observación 3.22, tenemos

$$(xy|zw) \geq (xy|aw) \simeq (xyz|aw) + (xy|awz) \simeq (xyz|aw) + (xy|zw),$$

por lo que $(xyz|aw) \simeq 0$ y se deduce que

$$(xy|aw) \simeq (xyz|aw) + (xy|awz) \simeq 0 + p = p.$$

De manera similar, intercambiando z por w , obtenemos que $(xy|az) \simeq p$. Ya sabemos que $(xa|yw) \simeq 0$, por la observación 3.22 tenemos $(xa|zwy) \simeq 0$. Por lo tanto, $(xa|zw) \simeq (xay|zw) + (xa|zwy) \simeq 0$. De manera similar, intercambiando x por y , obtenemos $(ya|zw) \simeq 0$. Además, sabemos que $(ya|xz) \simeq 0$, por la observación 3.22, $(way|xz) \simeq 0$. Ya demostramos que $(xyz|aw) \simeq 0$. Por lo tanto,

$$(wa|xz) \simeq (way|xz) + (wa|xzy) \simeq 0.$$

De manera similar (intercambiando x con y y z con w) obtenemos

$$(wa|yz) \simeq 0, \quad (za|xw) \simeq 0 \quad \text{y} \quad (wa|yz) \simeq 0.$$

Con lo anterior deducimos que por definición $(xy : a : zw)$ y por lo tanto se cumple el axioma (C2). ■

Recordemos la definición de una razón cruzada hiperbólica de caminos (que dimos en la Sección 2.3) y notemos que una consecuencia de la proposición anterior es la siguiente:

Lema 3.24 (cf. [3] 5.2). *Sea $(..|..)$ una razón cruzada que satisface (c1) y (c2') tal que para todo $(x, y, z, w) \in \text{Conf}_4(M)$ y cualquier $p \leq (xy|zw)$ existe $a \in M$ donde $(xy|zwa) \simeq p$. Entonces $(..|..)$ es una razón cruzada hiperbólica de caminos.*

Capítulo 4

Sistemas anulares

En este capítulo veremos que la acción de un grupo Γ en un compactum M (como grupo de convergencia), induce un sistema anular, $\mathfrak{A}$; y este a su vez nos da una razón cruzada hiperbólica de caminos. Concluiremos este capítulo juntando todos los resultados obtenidos en los capítulos anteriores para demostrar el Teorema 1.8.

4.1 De sistemas anulares a razones cruzadas

A continuación vamos a definir los sistemas anulares y un orden parcial entre sus elementos y los cerrados del espacio M . Luego, describiremos como un sistema anular induce una razón cruzada hiperbólica de caminos, $(..|..)$. Finalmente, probaremos que la razón cruzada $(..|..)$ es compatible con la topología en M .

Existen otras direcciones que se podrían estudiar con respecto a las relaciones entre estas nociones, pero no serán directamente relevantes para los resultados de este trabajo. Por ejemplo, las nociones de estructura cuasiconforme para espacios de medida métricos y conexos han sido estudiadas en [11], sin embargo queda por explorar hasta qué punto estas ideas podrían ser aplicables a grupos hiperbólicos.

Sea M un compacto, definimos un **anillo**, A , como un par ordenado (A^-, A^+) de subconjuntos cerrados disjuntos de M tal que $M \setminus (A^- \cup A^+) \neq \emptyset$ (ver figura 4.1, donde se ilustra un anillo cuando M es la esfera de Riemann).

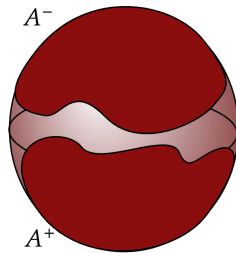


Figura 4.1: Anillo (A^-, A^+)

Llamamos **sistema anular**, $\mathfrak{A}$, a un conjunto de tales anillos. Dado un anillo, $A = (A^-, A^+)$, denotamos por $-A$ al anillo (A^+, A^-) . Diremos que el sistema anular $\mathfrak{A}$ es **simétrico** si para todo $A \in \mathfrak{A}$, se cumple que $-A \in \mathfrak{A}$.

Dado un conjunto cerrado, $K \subseteq M$, y un anillo, $A \in \mathfrak{A}$, escribiremos $K < A$ cuando $K \subseteq \text{int}(A^-)$. Escribimos $A < K$ cuando $K \subseteq \text{int}(A^+)$ (ver figuras 4.2 y 4.3, donde se ilustran estas definiciones cuando M es la esfera de Riemann).

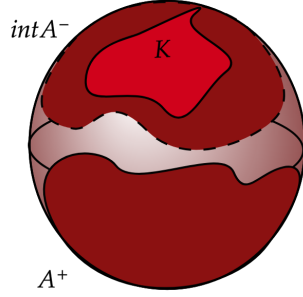


Figura 4.2: $K < A$

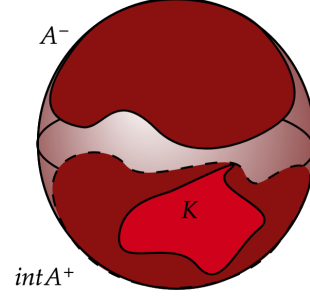


Figura 4.3: $A < K$

Por otra lado, dados $A, B \in \mathfrak{A}$, escribimos $A < B$ cuando $M = \text{int}(A^-) \cup \text{int}(B^+)$ (ver figura 4.4, donde se ilustran estas definiciones cuando M es la esfera de Riemann).

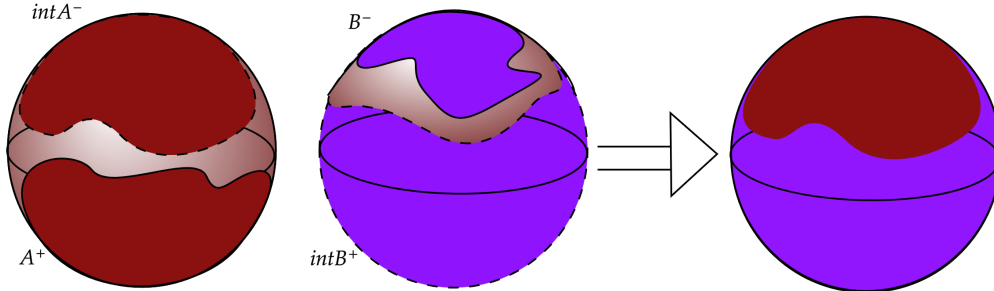


Figura 4.4: $A < B$

Observación 4.1. Sean $K \subseteq M$ un compacto y $A, B \in \mathfrak{A}$. Entonces

- a) $K < -A$ si y sólo si $A < K$. En efecto, $-A = (A^+, A^-)$, entonces $K < -A$ si y sólo si $K \subseteq \text{int}(A^+)$ si y sólo si $A < K$.
- b) $A < B$ si y sólo si $M \setminus \text{int}(A^+) < B$. En efecto, $M \setminus \text{int}(A^+) < B$ si y sólo si $M \setminus \text{int}(A^+) \subseteq \text{int}(B^-)$ si y sólo si

$$M = M \setminus \text{int}(A^+) \cup \text{int}(A^+) \subseteq \text{int}(B^-) \cup \text{int}(A^+)$$

si y sólo si $A < B$.

c) $A < B$ si y sólo si $M \setminus \text{int}(B^-) > A$. La demostración es análoga al inciso anterior.

d) $A < B$ si y sólo si $-B < -A$. En efecto, como

$$\text{int}(-B^-) = \text{int}(B^+) \quad \text{y} \quad \text{int}(-A^+) = \text{int}(A^-),$$

entonces $A < B$ si y sólo si $M = \text{int}(A^-) \cup \text{int}(B^+) = \text{int}(-B^-) \cup \text{int}(-A^+)$ si y sólo si $-B < -A$.

Lema 4.2. Definimos $A \leq B$ cuando $M = \text{int}(A^-) \cup \text{int}(B^+)$ o $A = B$. Entonces “ $\leq$ ” es un orden parcial en el conjunto de anillos.

Demostración. Sean $A, B, C \in \mathfrak{A}$, entonces:

Reflexividad. Como $A = A$, entonces $A \leq A$.

Asimetría. Supongamos que $A \leq B$ y $B \leq A$. Si $A = B$ terminamos. Supongamos que $A < B$ y $B < A$, entonces $M = \text{int}(A^-) \cup \text{int}(B^+) = \text{int}(B^-) \cup \text{int}(A^+)$. Como B^- y B^+ son disjuntos, entonces $B^- \subseteq A^-$ y $B^+ \subseteq A^+$. Como A^- y A^+ son ajenos, entonces $A^- \subseteq B^-$ y $A^+ \subseteq B^+$. Luego, $A^- = B^-$ y $A^+ = B^+$, así que $A = B$.

Transitividad. Supongamos que $A \leq B$ y $B \leq C$. Si $A = B$ o $B = C$ terminamos. Supongamos que $A < B$ y $B < C$, entonces

$$M = \text{int}(A^-) \cup \text{int}(B^+) = \text{int}(B^-) \cup \text{int}(C^+),$$

como $B^- \cap B^+ = \emptyset$, entonces $\text{int}(B^+) \subseteq \text{int}(C^+)$, luego $M = \text{int}(A^-) \cup \text{int}(B^+) = \text{int}(A^-) \cup \text{int}(C^+)$, por lo tanto $A \leq C$. ■

Ahora, fijamos un sistema anular simétrico, $\mathfrak{A}$. Dados los subconjuntos cerrados, $K, L \subseteq M$, definimos $(K|L)$ como el número máximo $n \in \mathbb{N}$, tal que podemos encontrar $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ donde

$$K < A_1 < A_2 < \dots < A_n < L \quad (4.1.1)$$

$(K|L) = 0$ si no hay ningún anillo que satisfaga 4.1.1 y $(K|L) = \infty$ si no existe un número finito de anillos tales que 4.1.1.

Nos referimos a $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ como una **secuencia de anillos anidados que separan K y L** .

Podríamos tomar el enfoque alternativo de simplemente definir $(K|L)$ como el número de anillos de $\mathfrak{A}$ que separan individualmente a K de L . Sin embargo, la definición que dimos parece más intuitiva, técnicamente más simple, y se relaciona mejor con [2].

Observación 4.3. Sean $K, L \subseteq M$ cerrados. Entonces

a) $(K|L) = (L|K)$. Si $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ tales que,

$$K < A_1 < A_2 < \dots < A_n < L \quad (4.1.2)$$

entonces por la simetría de $\mathfrak{A}$, $-A_1, -A_2, \dots, -A_n \in \mathfrak{A}$ y por la Observación 4.1, se cumple 4.1.2 si y sólo si

$$L < -A_n < \dots < -A_2 < -A_1 < K. \quad (4.1.3)$$

b) Si $K_0 \subseteq K$, entonces $(K|L) \leq (K_0|L)$. Supongamos que $(K|L) = n$, entonces existen $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ tales que 4.1.2, como $K < A_1$, entonces $K \subseteq \text{int}(A_1^-)$, dado que $K_0 \subseteq K$, tenemos que $K_0 \subseteq \text{int}(A_1^-)$ y por lo tanto

$$K_0 < A_1 < A_2 < \dots < A_n < L. \quad (4.1.4)$$

c) Si $(K|L) > 0$, entonces $K \cap L = \emptyset$. En efecto, supongamos que $(K|L) > 0$, entonces existe $A \in \mathfrak{A}$ tal que $K < A < L$, luego por definición $K \subseteq \text{int}(A^-)$ y $L \subseteq \text{int}(A^+)$, como A^- y A^+ son disjuntos, entonces $K \cap L = \emptyset$.

Lema 4.4 (cf. [3] 6.1). Sean $K, L \subseteq M$ cerrados y sea $a \in M$. Entonces

$$(K|L) \leq (K \cup \{a\}|L) + (K|L \cup \{a\}) + 1.$$

Demostración. Supongamos que $(K|L) = n \in \mathbb{N}$, entonces existen $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ con $K < A_1 < \dots < A_n < L$. Sea

$$m = \max\{i \in \mathbb{N} | A_i < \{a\}\},$$

entonces

$$K < A_1 < \dots < A_m < L \cup \{a\}, \text{ luego } (K|L \cup \{a\}) \geq m.$$

Si $m \geq n - 1$, entonces

$$(K|L) = n \leq m + 1 \leq (K|L \cup \{a\}) + 1 \leq (K \cup \{a\}|L) + (K|L \cup \{a\}) + 1$$

y terminamos.

Si $m + 1 < n$, por definición de m , no se cumple que $A_{m+1} < \{a\}$, así que $a \notin \text{int}A_{m+1}^+$; como $A_{m+1} < A_{m+2}$, usando la Observación 4.1 inciso b) obtenemos que $a \in \text{int}A_{m+2}^-$, así que,

$$K \cup \{a\} < A_{m+2} < \dots < A_n < L,$$

luego $(K \cup \{a\}|L) \geq n - m - 1$ y por lo tanto

$$(K|L) = n \leq (K \cup \{a\}|L) + m + 1 \leq (K \cup \{a\}|L) + (K|L \cup \{a\}) + 1$$

y concluimos que el lema se cumple cuando $(K|L)$ es finito.

Si $(K|L) = \infty$, usamos el mismo argumento para demostrar que $(K \cup \{a\}|L) = \infty$ o $(K|L \cup \{a\}) = \infty$. ■

Si $K = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, abreviaremos $(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}|L)$ como $(x_1 x_2 \dots x_n | L)$, y de manera similar para L . En particular, $(xy|zw) := (\{x, y\}|\{z, w\})$.

Lema 4.5. Sea $(\dots) : \Theta_4(M) \rightarrow [0, \infty)$ la función definida por $(x, y, z, w) \rightarrow (xy|zw)$. Entonces $(\dots)$ es una razón cruzada en M .

Demostración. Vamos a demostrar que para todo $(x, y, z, w) \in \Theta_4(M)$,

$$(xy|zw) = (yx|zw) = (zw|xy).$$

Como xy y yx representan el mismo cerrado en M , entonces $(xy|zw) = (yx|zw)$, luego por la Observación 4.3 inciso a), $(yx|zw) = (zw|xy)$ ■

Asumiremos que siempre se cumplen los siguientes axiomas:

(A1): Si $x \neq y$ y $z \neq w$, entonces $(xy|zw) < \infty$.

(A2): Hay algún $k \geq 0$ tal que no hay cuatro puntos, $x, y, z, w \in M$, con $(xz|yw) > k$ y $(xw|yz) > k$.

Notemos que el axioma (A2) es solo una reformulación del axioma (c1) para razones cruzadas hiperbólicas.

Lema 4.6 (cf. [3] 6.2). *Sea $\mathfrak{A}$ un sistema anular simétrico que satisface los axiomas (A1) y (A2). Si $K, L \subseteq M$ son cerrados no vacíos y $a \in M$, entonces*

$$(K \cup \{a\}|L) + (K|L \cup \{a\}) \leq (K|L) + 2k + 2.$$

Demostración. Sean $(K|L \cup \{a\}) = p$, $(K \cup \{a\}|L) = q$ y $(K|L) = n$, usamos la Observación 4.3 inciso b), entonces $p, q \leq n$.

Supongamos, por contradicción que $p + q > n + 2k + 2$. Como $p, q \leq n$, entonces $p, q > k + 2$.

Sean $r = p - k - 1$ y $s = q - k - 1$, entonces $r, s \geq 1$. Por definición de p y q , existen anillos $A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_q \in \mathfrak{A}$ tales que

$$K < A_1 < \dots < A_p < L \cup \{a\} \quad \text{y} \quad L < B_1 < \dots < B_q < K \cup \{a\}.$$

Ahora, probaremos que $A_r < -B_s$. Supongamos que no se cumple que $A_r < -B_s$, entonces $M \neq \text{int}A_r^+ \cup \text{int}B_s^+$, luego existe $b \in M \setminus (\text{int}A_r^+ \cap \text{int}B_s^+)$.

Como $A_r < A_{r+1}$ y $B_s < B_{s+1}$, usando la Observación 4.1 inciso b), obtenemos que $b \in \text{int}A_{r+1}^- \cap \text{int}B_{s+1}^+$, así $b < A_{r+1}$ y $b < B_{s+1}$ y por lo tanto

$$K \cup \{b\} < A_{r+1} < \dots < A_p < L \cup \{a\} \quad \text{y} \quad L \cup \{b\} < B_{s+1} < \dots < B_q < K \cup \{a\}.$$

Entonces $(K \cup \{b\}|L \cup \{a\}) \geq k + 1$ y $(L \cup \{b\}|K \cup \{a\}) \geq k + 1$ y eligiendo cualquier $y \in L$ y $x \in K$, obtenemos $(xb|ya) > k$ y $(yb|xa) > k$, esto contradice el axioma (A2), por lo tanto $A_r < -B_s$.

Así,

$$K < A_1 < A_2 < \dots < A_r < -B_s < \dots < -B_2 < -B_1 < L,$$

y concluimos que $n = (K|L) \geq r + s = p + q - 2k - 2$. ■

Lema 4.7 (cf. [3] 6.3). *Sean $K, L \subseteq M$ subconjuntos cerrados no vacíos y sea $a \in M$. Entonces*

$$(K|L) \simeq (K \cup \{a\}|L) + (K|L \cup \{a\}).$$

Demostración. Vamos a demostrar que existe $C \geq 0$ tal que

$$-C \leq (K|L) - (K \cup \{a\}|L) - (K|L \cup \{a\}) \leq C.$$

Por el lema 4.4

$$(K|L) - (K \cup \{a\}|L) - (K|L \cup \{a\}) \leq 1$$

y por el lema 4.6

$$-2k - 2 \leq (K|L) - (K \cup \{a\}|L) - (K|L \cup \{a\}),$$

donde k es el del axioma (A2). Así que, tomando $C = \max\{1, 2k + 2\} = 2k + 2$ concluimos la prueba. ■

En particular, tenemos que si $(x, y, z, w, a) \in \Theta_5(M)$, entonces

$$(xy|zw) \simeq (xya|zw) + (xy|zwa),$$

esto es exactamente el axioma (c2') (de la Sección 3.3). Así que de la Proposición 3.23, deducimos que $(..|..)$ es una razón cruzada hiperbólica.

Lema 4.8 (cf. [3] 6.4). *Sean $K, L \subseteq M$ cerrados no vacíos y sea $p \leq (K|L)$. Entonces existe algún $a \in M$ tal que $(K|L \cup \{a\}) \simeq p$.*

Demostración. Sean $n = (K|L)$ y $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ tales que

$$K < A_1 < \dots < A_n < L.$$

Por definición de anillo $M \neq A_p^+ \cup A_p^-$, entonces existe $a \in M \setminus (intA_p^- \cup intA_p^+)$. Como $A_{p-1} < A_p$ y $a \in M \setminus intA_p^-$, entonces $a \in intA_{p-1}^+$, es decir, $a > A_{p-1}$. Luego,

$$K < A_1 < \dots < A_{p-1} < L \cup \{a\},$$

por lo tanto $(K|L \cup \{a\}) \geq p - 1$.

Similarmente, obtenemos $(K \cup \{a\}|L) \geq n - p$ y por el Lema 4.7,

$$n \simeq (K \cup \{a\}|L) + (K|L \cup \{a\}),$$

así, concluimos que $(K|L \cup \{a\}) \simeq p$. ■

Hasta ahora, hemos visto que se cumplen las hipótesis del Lema 3.24, por lo tanto $(..|..)$ es una razón cruzada hiperbólica de caminos.

En resumen, hemos demostrado la siguiente proposición:

Proposición 4.9 (cf. [3] 6.5). *Sean M un compacto y $\mathfrak{A}$ un sistema anular simétrico en M que satisface los axiomas (A1) y (A2). Entonces la función*

$$(..|..) : \Theta_4(M) \rightarrow [0, \infty) \text{ dada por } (x, y, z, w) \mapsto (xy|zw),$$

donde $(xy|zw)$ es el máximo número de anillos anidados de $\mathfrak{A}$ que separan $\{x, y\}$ de $\{z, w\}$, es una razón cruzada hiperbólica de caminos en M .

Esto nos da una cuasimétrica de caminos hiperbólica en el conjunto de tripletas distintas descrito como en el capítulo anterior (ver sección 3.2). A partir de ahora, supondremos que M es perfecto y asumiremos que se cumple el siguiente axioma:

(A3): Dados $x, y, z \in M$ distintos, entonces $(x|yz) = \infty$.

Lema 4.10 (cf. [3] 6.6). *Sea $\mathfrak{A}$ un sistema anular que satisface el axioma (A3). Entonces la razón cruzada $(\cdot|\cdot)$ es compatible con la topología en M .*

Demostración. Sean $x, y, z \in M$ distintos, y $x_i \in M \setminus \{x, y, z\}$ una sucesión que converge a x . Queremos demostrar por definición (la definición la dimos en la sección 3.2) que $(xx_i|yz) \rightarrow \infty$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, por el axioma (A3) existen $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ con

$$\{y, z\} < A_1 < \dots < A_n < \{x\}.$$

Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \in \text{int}A_n^+$, luego para i suficientemente grande obtenemos que $x_i \in \text{int}A_n^+$ y entonces $(xx_i|yz) \geq n$. ■

Ahora, si el sistema anular $\mathfrak{A}$ satisface los axiomas (A1), (A2) y (A3), se cumplen los resultados de la sección 3.2. En particular, por la Proposición 3.20 existe una cuasi-métrica de caminos hiperbólica, ρ , en el conjunto Q de ternas distintas de M , de modo que M se identifica naturalmente por un homeomorfismo con la frontera de Q , ∂Q .

Ahora consideremos el siguiente axioma:

(A3') Si $K \subseteq M$ es cerrado y $x \in M \setminus K$, entonces $(K|x) > 0$.

Observación 4.11. *Si se satisface el axioma (A3'), entonces se cumple el axioma (A3). En efecto, sean $x, y, z \in M$ distintos y $K = \{y, z\}$, probaremos que $(x|K) = \infty$. Por (A3') existe $A_1 \in \mathfrak{A}$, con $K < A_1 < x$. Así, $x \in \text{int}A_1^+$, aplicamos (A3') de nuevo ahora con $K = M \setminus \text{int}A_1^+$ y existe otro anillo $A_2 \in \mathfrak{A}$, con $M \setminus \text{int}A_1^+ < A_2 < x$. En otras palabras, $K < A_1 < A_2 < x$. Continuando inductivamente de esta manera, obtenemos una secuencia infinita de anillos anidados que separan K de x y por lo tanto $(K|x) = (x|yz) = \infty$.*

4.2 De grupos de convergencia a sistemas anulares

En esta sección mostraremos como obtener un sistema anular a partir de la acción de un grupo en un compactum, donde el grupo actúa como grupo de convergencia. Y por la sección anterior el sistema anular a su vez nos da una razón cruzada.

En este contexto, el conjunto de ternas distintas de M aparecerá en dos roles ligeramente diferentes:

1. Como el espacio topológico que aparece en la hipótesis (donde conservaremos la notación $\text{Conf}_3(M)$).
2. Como el conjunto (que denotaremos por Q) sobre el cual construiremos una cuasi-métrica hiperbólica.

A partir de ahora M denotará un compactum, metrizable; Γ denotará un grupo que actúa por homeomorfismo sobre M ; y $\text{Conf}_3(M)$ el espacio de ternas distintas de M (con topología inducida a partir de la topología producto en M^3).

Observación 4.12. Como M es metrizable y compacto, entonces $\text{Conf}_3(M)$ es metrizable y localmente compacto.

La acción de Γ en M induce una acción de Γ en $\text{Conf}_3(M)$. Decimos que Γ **actúa como un grupo de convergencia** en $\text{Conf}_3(M)$, si la acción es propiamente discontinua. Es decir, para todo subconjunto compacto $K \subseteq \text{Conf}_3(M)$, el conjunto $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$ es finito.

Asumiremos que la siguiente proposición se cumple (para detalles de una demostración revisar [4]):

Proposición 4.13 (cf. [3] 7.1). *El grupo Γ actúa como un grupo de convergencia en M si y sólo si se cumple la siguiente condición:*

Si $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión infinita de elementos distintos de Γ , entonces existen $a, b \in M$ y una subsucesión $(\gamma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$, tal que los morfismos $\gamma_j|_{M \setminus \{a\}}$ convergen de forma localmente uniforme a b .

El resultado de la Proposición 4.13 es la formulación original de la noción de grupo de convergencia como se describe en [8].

Ahora, asumiremos que Γ actúa como un grupo de convergencia en M y que $\mathfrak{A}$ es un sistema anular simétrico, Γ -invariante, con $\mathfrak{A}/\Gamma$ finito (es decir, $\mathfrak{A}$ es la unión de las Γ -órbitas de un conjunto finito de anillos).

Lema 4.14 (cf. [3] 7.2). *Sean $x, y, z, w \in M$ y sean $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sucesiones en M que convergen a x , y , z y w respectivamente. Si existe una sucesión de anillos, $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$, tal que el conjunto $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ es infinito y para todo $i \in \mathbb{N}$,*

$$\{x_i, y_i\} < A_i < \{z_i, w_i\},$$

entonces $x = y$ ó $z = w$.

Demostración. Afirmamos que después de pasar a una subsucesión, existe un anillo fijo, $A \in \mathfrak{A}$, y una sucesión de elementos distintos, $(\gamma_j)_{j \in \mathbb{N}}$, de Γ , tal que $A_j = \gamma_j A$. En efecto, como $\mathfrak{A}/\Gamma$ es finito, existen $B_1, B_2, \dots, B_r \in \mathfrak{A}$ tales que

$$\mathfrak{A}/\Gamma = O_{B_1} \cup O_{B_2} \cup \dots \cup O_{B_r}.$$

Además, $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ es infinito, así que por el principio de casillas existe $j \in \{1, \dots, r\}$ tal que O_{B_j} contiene una cantidad infinita de los elementos de la sucesión $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Definimos $A := B_j$ y consideramos la subsucesión $(A_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ que consiste de todos los anillos contenidos en la órbita de A , O_A . Así,

$$(A_j)_{j \in \mathbb{N}} := (A_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq O_A$$

y se cumple la afirmación.

Por otro lado, como Γ actúa como un grupo de convergencia en M , usando la Proposición 4.13, podemos asumir (pasando a otra subsucesión) que existen puntos $a, b \in M$ tales que la sucesión $\gamma_j|_{M \setminus \{a\}}$ converge de forma localmente uniforme a b .

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a \notin \text{int}(A^+)$ (si $a \in \text{int}(A^+)$, entonces intercambiamos $\{x, y\}$ con $\{z, w\}$ y A con $-A$) luego, $\gamma_i|_{\text{int}(A^+)}$ converge de forma localmente uniforme a b . Además, como A^+ es la cerradura de su interior y cada γ_i es continua en A^+ , entonces $\gamma_i|_{A^+}$ converge uniformemente a b . En otras palabras, dada cualquier vecindad abierta, U_b , de b , tenemos $A_i^+ = \gamma_i A^+ \subseteq U_b$ para todo i suficientemente grande. Pero $A_i < \{z_i, w_i\}$, entonces $z_i, w_i \in A_i^+ \subseteq U_b$. Por tanto, $z_i \rightarrow b$ y $w_i \rightarrow b$, lo que demuestra que $z = w = b$.

Si $a \in \text{int}(A^+)$, procedemos de forma análoga y demostramos que $x = y$. ■

Con la notación de $(xy|zw)$ introducida en la sección 4.1 (como la longitud máxima de una cadena anidada de anillos que separan $\{x, y\}$ de $\{z, w\}$), tenemos que $(..|..)$ es Γ -invariante.

Lema 4.15 (cf. [3] 7.3). *Sean $x, y, z, w \in M$ y sean $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sucesiones en M que convergen a x, y, z y w respectivamente. Si $(x_i y_i | z_i w_i) \rightarrow \infty$, entonces $x = y$ ó $z = w$.*

Demostración. Como $(x_i y_i | z_i w_i) \rightarrow \infty$, entonces por definición de $(..|..)$, existe una sucesión de anillos $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (con todos los anillos distintos) tal que para todo $i \in \mathbb{N}$, $\{x_i, y_i\} < A_i < \{z_i, w_i\}$ y aplicamos el Lema 4.14. ■

Observación 4.16. *Se cumple que $(xy|zw) < \infty$ para todo $(x, y, z, w) \in \Theta_4(M)$. En efecto, tenemos $x, y, z, w \in M$, como $x \neq z$, $y \neq w$ y M es perfecto, entonces existen sucesiones $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en M que convergen a x, y, z y w respectivamente. Supongamos que $(xy|zw) \rightarrow \infty$, dado $L \in \mathbb{N}$ existen $A_1, A_2, \dots, A_L \in \mathfrak{A}$ tales que*

$$\{x, y\} < A_1 < A_2 < \dots < A_L < \{z, w\}$$

luego $\{x, y\} \subseteq \text{int}(A_1^-)$ y $\{z, w\} \subseteq \text{int}(A_L^+)$, por la convergencia de las sucesiones existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $\{x_n, y_n\} \subseteq \text{int}(A_1^-)$ y $\{z_n, w_n\} \subseteq \text{int}(A_L^+)$, así que para todo $n \geq N$,

$$\{x_n, y_n\} < A_1 \text{ y } A_L < \{z_n, w_n\},$$

luego $(x_i y_i | z_i w_i)$ converge a un número mayor o igual a L . El número L que consideramos fue arbitrario, así que esto contradice el Lema 4.15 y por lo tanto concluimos que $(xy|zw) < \infty$.

Lema 4.17 (cf. [3] 7.4). *Existe un número $k \geq 0$ tal que si $(x, y, z, w) \in \Theta_4(M)$ con $(xy|zw) \geq k$, entonces $(xz|yw) = 0$.*

Demostración. Procedemos por contradicción. Si no se cumple el lema, entonces podemos encontrar una sucesión $((x_i, y_i, z_i, w_i))_{i \in \mathbb{N}}$ en $\Theta_4(M)$ tal que $(x_i y_i | z_i w_i) \rightarrow \infty$ y para todo $i \in \mathbb{N}$, $(x_i z_i | y_i w_i) > 0$, luego para cada $i \in \mathbb{N}$ existe un anillo $A_i \in \mathfrak{A}$ tal que

$$\{x_i, z_i\} < A_i < \{y_i, w_i\}.$$

Como $\mathfrak{A}/\Gamma$ es finito, podemos suponer (al igual que en la demostración del Lema 4.14) que cada A_i es la imagen bajo Γ de algún anillo fijo $A \in \mathfrak{A}$.

Ahora, como $(..|..)$ es Γ -invariante, podemos suponer (después de hacer una traslación bajo Γ) que para todo $i \in \mathbb{N}$

$$\{x_i, z_i\} < A < \{y_i, w_i\}.$$

Por otro lado, como M es compacto (después de pasar a una subsucesión) podemos asumir que las sucesiones $(x_i)_i, (y_i)_i, (z_i)_i$ y $(w_i)_i$ convergen a puntos en M , a saber, x, y, z y w respectivamente.

Ahora, $x, z \in \text{int}(A^-) \subseteq A^-$ y también $y, w \in \text{int}(A^+) \subseteq A^+$ y $A^- \cap A^+ = \emptyset$, entonces $x \neq y$ y $z \neq w$. Pero como $(x_i y_i | z_i w_i) \rightarrow \infty$, esto contradice el Lema 4.15. ■

En lo que sigue, vamos a asumir que M es perfecto y la acción de Γ en $\text{Conf}_3(M)$ es cocompacta. Es decir, $Y := \text{Conf}_3(M)/\Gamma$ es compacto. Afirmamos que lo anterior es equivalente a afirmar que hay un compacto $\Theta_0 \subseteq \text{Conf}_3(M)$ tal que

$$\text{Conf}_3(M) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \Theta_0.$$

En efecto,

$\Rightarrow$) Si $X := \text{Conf}_3(M)$ es localmente compacto, para cada $y \in Y$ elegimos (arbitrariamente) un punto $y' \in X := \text{Conf}_3(M)$ tal que se proyecta a y . Luego, para cada y' escogemos una vecindad abierta $U_{y'}$ tal que su cerradura en X es compacta. Como la proyección es abierta, si proyectamos los conjuntos abiertos $U_{y'}$ a Y , obtenemos una cubierta abierta por los conjuntos U_y (imágenes de los $U_{y'}$ bajo la proyección). Como Y es compacto, hay un conjunto finito $\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq Y$ tal que $\{U_{y_i}\}_{i=1}^n$ es una cubierta finita de Y .

Dado $y' \in X$, este se proyecta en un punto $y \in Y$, luego $y \in U_{y_i}$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces $y' \in \gamma U_{y_i'}$ para algún $\gamma \in \Gamma$. Así, si consideramos $\Theta_0 = \overline{U_{y_1'}} \cup \dots \cup \overline{U_{y_n'}}$, se cumple que Θ_0 es compacto y $\text{Conf}_3(M) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \Theta_0$.

$\Leftarrow$) Por otro lado, como la proyección es continua y Θ_0 es compacto, la imagen de Θ_0 bajo la proyección es compacta. Como $\text{Conf}_3(M) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \Theta_0$, entonces la imagen de Θ_0 bajo la proyección es $\text{Conf}_3(M)/\Gamma$ y por lo tanto el cociente es compacto.

Para nuestro propósito seguiremos [2] y construiremos un sistema anular para M , $\mathfrak{A}$, como sigue:

Sea $\omega = (x, y, z) \in \text{Conf}_3(M)$, elegimos subconjuntos abiertos de M , $U(\omega), V(\omega)$ y $W(\omega)$ tales que contienen a x, y y z respectivamente y sus cerraduras son disjuntas dos a dos (esto es posible pues M es metrizable). Sea $\Theta(\omega) = U(\omega) \times V(\omega) \times W(\omega)$, entonces $\Theta(\omega) \subseteq \text{Conf}_3(M)$ y es abierto. La colección $\{\Theta(\omega)\}_{\omega \in \text{Conf}_3(M)}$ es una cubierta abierta de $\text{Conf}_3(M)$. Como Θ_0 es compacto, existen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in \Theta_0$, tales que

$$\Theta_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^n \Theta(\omega_i).$$

Sea A_i el anillo $(\overline{U(\omega_i)}, \overline{V(\omega_i)})$. Definimos el sistema anular

$$\mathfrak{A} = \{\gamma A_i, -\gamma A_i : \gamma \in \Gamma, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Entonces $\mathfrak{A}$ es simétrico, Γ -invariante y $\mathfrak{A}/\Gamma$ es finita.

El siguiente Lema se demuestra en [2], aunque describiremos el argumento abajo.

Lema 4.18 (cf. [3] 7.6). *Sean $K \subseteq M$ un cerrado y un punto $x \in M \setminus K$. Entonces existe algún $A \in \mathfrak{A}$ tal que $K < A < x$.*

Demostración. Sea $y \in M \setminus \{x\}$, como M es perfecto existe una sucesión $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en $M \setminus \{x, y\}$ que converge a x .

Afirmamos que existe una sucesión $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en Γ , tal que las tripletas $\gamma_i(x, y, x_i)$ se encuentran en un subconjunto compacto de $\text{Conf}_3(M)$, y por lo tanto (después de pasar a una subsucesión) convergen en algún $(a, b, c) \in \text{Conf}_3(M)$. En efecto, por como tomamos la sucesión $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, la colección $\{(x, y, x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ está contenida en $\text{Conf}_3(M)$. Como $\text{Conf}_3(M)$ es igual a la unión de todos los trasladados de Θ_0 por los elementos de Γ , entonces para todo $i \in \mathbb{N}$, existe $\delta_i \in \Gamma$ tal que $(x, y, x_i) \in \delta_i \Theta_0$, luego para todo $i \in \mathbb{N}$ definimos $\gamma_i := \delta_i^{-1}$ y se cumple la afirmación.

Como $(a, b, c) \in \Theta_0$, para algún $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$(a, b, c) \in \Theta(\omega_j) = (U(\omega_j), V(\omega_j), W(\omega_j)),$$

y de la construcción de $\mathfrak{A}$,

$$B = (\overline{U(\omega_j)}, \overline{V(\omega_j)}) \in \mathfrak{A} \quad \text{es tal que} \quad b < B < a.$$

Además, como el punto $y \in M \setminus \{x\}$ era arbitrario y $\gamma_i(x, y, x_i)$ converge a (a, b, c) después de pasar a una subsucesión encontramos que $\gamma_i|_{M \setminus \{x\}}$ converge localmente uniformemente a b . Por lo tanto, para i suficientemente grande, $\gamma_i K < B < \gamma_i x$, entonces $K < A < x$, donde $A = \gamma_i^{-1} B \in \mathfrak{A}$ ■

La conclusión del Lema 4.18 es precisamente el axioma (A3') de la sección 4.1 y por la Observación 4.11, el axioma (A3) se cumple.

Ahora, aplicando el Lema 4.10, la topología en M concuerda con la topología de razón cruzada. Consideramos ρ la cuasimétrica definida en el conjunto $Q = \text{Conf}_3(M)$, como se construyó en la Sección 3.2, entonces es Γ -invariante. Aplicando la Proposición 3.20, concluimos que (Q, ρ) es un espacio cuasimétrico de caminos hiperbólico, con la frontera, ∂Q , identificada naturalmente con M . Por naturalidad, la acción de Γ conmuta con esta identificación.

Elegimos cualquier $\theta \in Q$, y definimos la función Γ -equivariante, $f : \Gamma \rightarrow Q$, estableciendo que $f(\gamma) = \gamma\theta$, usamos la órbita de θ para obtener una cuasimétrica invariante a la izquierda en Γ , que también denotaremos por ρ .

Lema 4.19 (cf. [3] 7.7.). *(Γ, ρ) es localmente finito.*

Demostración. Necesitamos demostrar que todo conjunto acotado es finito, demostraremos que todo subconjunto infinito de Γ no es acotado.

Recordemos que $\theta \in Q$ es el centro de tres puntos distintos, $x, y, z \in M$ (ver Lema 3.19) y sea $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos distintos de Γ , el conjunto $A = \{\gamma_i : i \in \mathbb{N}\}$

es infinito. Como Γ actúa como grupo de convergencia en M , por la Proposición 4.13, después de pasar a una subsucesión podemos encontrar $a, b \in M$ tal que $\gamma_i|_{M \setminus \{a\}}$ converge de forma localmente uniforme a b . Además, podemos suponer que $x, y \neq a$, por lo que $\gamma_i x \rightarrow b$ y $\gamma_i y \rightarrow b$. Como x, y y z son todos distintos, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\gamma_i x$, $\gamma_i y$ y $\gamma_i z$ son puntos distintos, entonces $\gamma_i \theta$ es el centro de $(\gamma_i x, \gamma_i y, \gamma_i z)$. Como $(\gamma_i x)_i$ y $(\gamma_i y)_i$ se van acercando, los centros tienden a infinito, luego $\rho(\theta, \gamma_i \theta) \rightarrow \infty$ y por lo tanto A no es acotado. ■

Lema 4.20 (cf. [3] 7.8). *Todo punto de Q se encuentra a una distancia acotada de algún punto en la Γ -órbita de θ , O_θ .*

Demostración. Por contradicción, si no se cumple el lema, entonces existe una sucesión, $(\theta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en Q , con $\rho(\theta_i, O_\theta) \rightarrow \infty$, entonces la sucesión es infinita. Sabemos (por el Lema 3.19) que θ_i es el centro de alguna tripleta (x_i, y_i, z_i) de puntos de M . Como la acción de Γ en Q es cocompacta, podemos suponer que las ternas (x_i, y_i, z_i) se encuentran en una subconjunto compacto de $\Theta_3(M)$. Ahora, el conjunto $\{\theta_i | i \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto acotado de Q , y esto contradice el hecho de que $\rho(\theta_i, O_\theta) \rightarrow \infty$. ■

Notemos que por el Lema 3.3, el grupo Γ es finitamente generado y la Proposición 3.11 nos dice que Q es casi localmente finito.

Observación 4.21. *La función $f : Q \rightarrow \Gamma$ definida antes es una cuasiisometría. En efecto, por como definimos la cuasimétrica en Γ , tenemos que de hecho, f es un encaje isométrico. Además, dado que*

$$Im(f) = \{\omega \in Q : \omega = \gamma \theta \text{ para algún } \gamma \in \Gamma\} = O_\theta,$$

por el Lema 4.20, todo punto de Q está a una distancia acotada de $Im(f)$, entonces f tiene imagen cuasidensa.

4.3 Caracterización de los grupos hiperbólicos

El Teorema 1.8 fue demostrado por el matemático Brian H. Bowditch. Concluiremos este capítulo con dicha demostración.

Teorema 4.22 (Teorema 1.8). *Sea Γ un grupo que actúa por homeomorfismos sobre un espacio compactum, perfecto y metrizable, M , tal que la acción inducida en $Conf_3(M)$ es propiamente discontinua y cocompacta. Entonces Γ es hiperbólico. Más aún, existe un homeomorfismo Γ -equivariante de M sobre $\partial\Gamma$.*

Demostración. Supongamos que Γ es un grupo que actúa por homeomorfismos sobre un espacio compactum, perfecto y metrizable, M , tal que la acción inducida en $Conf_3(M)$ es propiamente discontinua y cocompacta:

1. Como M es perfecto y la acción de Γ en $Q = \text{Conf}_3(M)$ es cocompacta, entonces hay un compacto $\Theta_0 \subseteq \text{Conf}_3(M)$ tal que

$$\text{Conf}_3(M) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \Theta_0.$$

Consideramos la construcción del sistema anular $\mathfrak{A}$ para M como en la sección anterior:

Dado $\omega = (x, y, z) \in \text{Conf}_3(M)$, elegimos abiertos de M , $U(\omega)$, $V(\omega)$ y $W(\omega)$ tales que contienen a x , y y z respectivamente y sus clausuras son disjuntas dos a dos. Sea $\Theta(\omega) = U(\omega) \times V(\omega) \times W(\omega)$, entonces $\Theta(\omega) \subseteq \text{Conf}_3(M)$. Como Θ_0 es compacto, existen $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Theta_0$, tales que

$$\Theta_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^n \Theta(\omega_i).$$

Definimos el sistema anular

$$\mathfrak{A} = \{\gamma A_i, -\gamma A_i : \gamma \in \Gamma, i \in \{1, \dots, n\}\}, \text{ donde } A_i = (\overline{U(\omega_i)}, \overline{V(\omega_i)}).$$

Entonces $\mathfrak{A}$ es simétrico, Γ -invariante y $\mathfrak{A}/\Gamma$ es finito.

2. Consideramos la función

$$(..|..) : \text{Conf}_4(M) \rightarrow [0, \infty), \text{ dada por } (x, y, z, w) \mapsto (xy|zw)$$

donde $(xy|zw)$ es el máximo número de anillos en $\mathfrak{A}$ anidados entre $\{x, y\}$ y $\{z, w\}$. Como Γ actúa como un grupo de convergencia en un espacio metrizable, compactum, M y $\mathfrak{A}$ es un sistema anular simétrico Γ -invariante tal que $\mathfrak{A}/\Gamma$ es finito

- La observación 4.16 nos dice que se cumple el axioma (A1) de la sección 4.1.
- Por el lema 4.17 se cumple el axioma (A2) de la Sección 4.1.

Por lo tanto, según la Proposición 4.9, obtenemos que $(..|..)$ es una razón cruzada hiperbólica de caminos en M . En resumen, demostramos que:

Proposición 4.23 (cf. [3] 7.5). *Sea Γ un grupo que actúa como un grupo de convergencia en un espacio metrizable, compactum, M , y sea $\mathfrak{A}$ es un sistema anular simétrico Γ -invariante tal que $\mathfrak{A}/\Gamma$ es finito. Entonces $(..|..)$ es una razón cruzada hiperbólica de caminos en M .*

3. La conclusión del Lema 4.18 es precisamente el axioma (A3') de la Sección 4.1. Por la Observación 4.11, el axioma (A3) se cumple y por el Lema 4.10, concluimos que la topología en M concuerda con la topología de la razón cruzada.
4. Consideramos la cuasimétrica ρ definida como en la sección 3.2. Por la Proposición 3.20, al espacio Q se le puede dar la cuasimétrica ρ de caminos hiperbólica de tal forma que ∂Q se identifica naturalmente por un homeomorfismo con M .

5. En la sección anterior (Observación 4.21), probamos que la función

$$f : \Gamma \rightarrow Q \text{ donde } f(\gamma) = \gamma\theta$$

es una cuasiisometría de (Γ, ρ) a (Q, ρ) , así que (Γ, ρ) es un espacio cuasimétrico de caminos hiperbólico, y su frontera es naturalmente (y por lo tanto Γ -equivariante), identificada con ∂Q y por lo tanto con M . Luego, por el Lema 3.8 concluimos que Γ es hiperbólico y su frontera de Gromov, $\partial\Gamma$ es naturalmente identificada con la frontera de (Γ, ρ) . Esto prueba el Teorema 1.8. ■

Falta demostrar el recíproco del Teorema 1.8, es decir, que la acción de un grupo hiperbólico, Γ , en $F(\partial\Gamma, 3)$ es propiamente discontinua y cocompacta. Una prueba de esto se encuentra, por ejemplo, en [4]. Pruebas directas de que la acción de Γ sobre $\partial\Gamma$ satisface la hipótesis de convergencia formulada en [8] (es decir, la conclusión de la Proposición 4.13) se pueden encontrar en [7].

Apliquemos el Teorema 1.8 en un ejemplo:

Ejemplo 4.24 (Teorema 1.8). *Sea M el plano hiperbólico en el modelo del disco de Poincaré. Entonces M es un espacio compactum, perfecto y metrizable.*

Sea Γ un grupo Fuchsiano (es decir, un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$), que actúa por isometrías en M mediante transformaciones de Moebius.

El grupo Γ actúa de forma propiamente discontinua en M . Entonces Γ actúa de forma propiamente discontinua en $Conf_3(M)$.

Más aún, Γ actúa de forma cocompacta en $Conf_3(M)$. Entonces el Teorema 1.8 nos garantiza que Γ es hiperbólico.

Para más detalles del ejemplo anterior revisar [12].

Ejemplo 4.25 (Teorema 1.8). *Consideramos $\mathcal{M}$ una n -variedad hiperbólica (es decir, una variedad que es localmente isométrica al espacio $\mathbb{H}^n$) y cerrada (es decir, compacta y sin frontera), entonces M (y por lo tanto $\overline{\mathcal{M}}$) es un espacio cocompactum, perfecto y metrizable.*

El grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{M})$ actúa en $\overline{\mathcal{M}}$ de forma propiamente discontinua. En efecto, supongamos por contradicción que existe una sucesión de elementos distintos $(g_i)_{i=1}^\infty$ tal que $g_i K \cap K \neq \emptyset$. Entonces para todo g_i existe algún k_i (distinto) tal que $k_i \in g_i K \cap K$. Luego, todo k_i es un elemento de K , y es un conjunto infinito. Como K es compacto hay un punto límite k en K . Sea U una vecindad abierta de k tal que $\bigcup_g gU$ es la cubierta uniforme de $p(U)$ (podemos considerar un disco cubierto uniformemente alrededor de $p(k)$, entonces su preimagen es un disco alrededor de cada punto de la órbita de k). Por la construcción de k hay infinitos $k_i \in U$, luego $g_i k_i \in g_i U \cap K$ para infinitos g_i . Entonces el conjunto $\{g_i k_i\} \cap K$ es discreto, infinito y compacto (pues es un cerrado en K) y esto es una contradicción.

Además, el cociente $\overline{\mathcal{M}}/\pi_1(\mathcal{M})$ es isométrico a $\mathcal{M}$, por lo tanto la acción del grupo fundamental en el cubriente universal es cocompacta.

Nos fijamos en la acción del grupo fundamental de $\mathcal{M}$ en el espacio $Conf_3(\mathcal{M})$, esta acción es propiamente discontinua y cocompacta.

Así que, por el Teorema 1.8, $\pi_1(\mathcal{M})$ es un grupo hiperbólico.

El lema de Milnor-Schwarz nos da otra forma de demostrar que el grupo fundamental de una n -variedad hiperbólica cerrada, es un grupo hiperbólico.

Capítulo 5

Otra caracterización utilizando puntos límite cónicos

En este capítulo daremos una caracterización alternativa de grupos hiperbólicos, este resultado podría considerarse como un resultado más fuerte al del Teorema 1.8. Daremos una construcción general de sistemas anulares para grupos de convergencia, las cuáles podrían tener aplicaciones en otros lugares.

Sea M un espacio compactum, metrizable, perfecto y Γ un grupo de convergencia que actúa en M . Demostraremos que si todo punto de M es un punto límite cónico, entonces Γ es un grupo de convergencia uniforme. Tukia da otra prueba usando un argumento que se basa directamente en la hipótesis de que Γ es un grupo de convergencia (ver [16] para más detalles). Aquí, daremos otro argumento basado en las construcciones de los capítulos anteriores. Cabe mencionar, que las demostraciones de Tukia inspiraron a Bowditch a considerar si tales ideas podrían expresarse en términos más geométricos.

Usaremos fuertemente la hipótesis de que M es metrizable, lo haremos de una manera mucho más explícita que en el resto del documento. No está claro si esta suposición puede descartarse o no (necesitaríamos modificar la definición de punto límite cónico para usar redes en lugar de sucesiones).

El concepto de puntos límite cónicos fue introducido originalmente por Heglund (en la teoría de grupos kleinianos) y ha sido utilizada por muchos autores desde entonces. En el contexto particular de los grupos de convergencia, ha sido estudiada por Martín y Tukia (ver [14]).

Supongamos entonces que Γ actúa como un grupo de convergencia sobre M . Hay varias formas equivalentes de definir un **punto límite cónico**. Algunas son:

1. Un punto $x \in M$ es un punto límite cónico si existen puntos $b, c \in M$ distintos y una sucesión $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en Γ , tal que $\gamma_i x \rightarrow b$ y para todo $y \in M \setminus \{x\}$, $\gamma_i y \rightarrow c$ (se puede asumir la convergencia de las funciones $\gamma_i|_{M \setminus \{x\}}$ al punto c de forma localmente uniforme).

2. Un punto $x \in M$ es un punto límite cónico si hay algún $a \in M \setminus \{x\}$, una sucesión $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en $M \setminus \{x\}$ y un conjunto compacto $\Theta_0 \subseteq \text{Conf}_3(M)$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$(a, x, x_i) \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \Theta_0$$

ver [4] y [16] para una discusión más detallada sobre puntos límite cónicos en este contexto.

3. Los puntos límite cónicos juegan un papel importante en la teoría de grupos kleinianos. En este contexto se les conoce como “puntos límite radiales” o como “puntos de aproximación”.

El principal resultado de esta sección es el siguiente Teorema:

Teorema 5.1 (cf [3] 8.1). *Sea M un espacio compactum, metrizable y perfecto y sea Γ un grupo que actúa como un grupo de convergencia sobre M . Si cada punto de M es un punto límite cónico, entonces Γ es un grupo de convergencia uniforme (y por tanto hiperbólico).*

Comenzamos en un contexto bastante general:

Sea M un espacio compactum, metrizable y perfecto. Fijamos alguna métrica, d , en M (que induce la topología dada). Dado un subconjunto $K \subseteq M$, escribimos $\text{diam}(K)$ para su diámetro en esta métrica. Si $A = (A^-, A^+)$ es un anillo, definimos

$$\lambda(A) := \min\{\text{diam}(A^-), \text{diam}(A^+)\} \quad \text{y} \quad \mu(A) := d(A^-, A^+).$$

Observación 5.2. *Asumiendo que Γ actúa como un grupo de convergencia en M , y que $\mathfrak{B}$ es un sistema anular Γ -invariante con $\mathfrak{B}/\Gamma$ finito. Usando la propiedad de convergencia, obtenemos que para todo $\epsilon > 0$, los conjuntos*

$$\mathcal{X} = \{A \in \mathfrak{B} \mid \lambda(A) \geq \epsilon\} \quad \text{y} \quad \mathcal{Y} = \{A \in \mathfrak{B} \mid \mu(A) \geq \epsilon, \lambda(A) > 0\}$$

son finitos. En efecto, si $\mathcal{X}$ es infinito, entonces hay infinitos anillos $(A_i)_i$ tales que $\text{diam}(A_i^-) \geq \epsilon$ y como también $\mathfrak{B}/\Gamma$ es finito podemos asumir que son tales que para todo i y algún $A \in \mathfrak{B}$, $\gamma_i A_i = A$, luego para todo i , tenemos que $\gamma_i A_i^- = A^-$. Cada A_i^- es compacto (pues es un cerrado y M es compacto), pero esto contradice que la acción de Γ en M es como grupo de convergencia.

Por otro lado, si $\mathcal{Y}$ es infinito, como (M, d) es métrico y compacto, entonces hay un número infinito de anillos $(A_i)_i$ que se intersectan y esto contradice que Γ actúa como grupo de convergencia en M .

Ahora, dado un sistema anular simétrico, $\mathfrak{A}$, y $K, L \subseteq M$ cerrados, definimos (como en la Sección 4.1) $(K|L)$ como el número máximo de anillos anidados que separan K de L . Escribiremos $(K|L)_{\mathfrak{A}}$ si hay alguna ambigüedad.

En la Sección 4.1, definimos los axiomas (A1) y (A2) y probamos que juntos implican que $(\dots)$ es una razón cruzada hiperbólica de caminos en M (ver Proposición 4.9). A continuación vamos a introducir un axioma más débil que el axioma (A3), a saber:

(A4): Si $x, y \in M$ son distintos, entonces $(x|y) > 0$.

La demostración del Teorema 5.1 se basará en el siguiente resultado general:

Proposición 5.3 (cf. [3] 8.2). *Si un grupo Γ actúa como grupo de convergencia en un espacio perfecto, compactum y metrizable, M , entonces existe un sistema anular simétrico Γ -invariante, $\mathfrak{A}$, tal que si $(x, y, z, w) \in \text{Conf}_4(M)$, entonces las tres cantidades $(xy|zw)$, $(xz|yw)$ y $(xw|yz)$ son todas finitas y al menos dos de ellas son iguales a 0. Más aún, dados $x, y \in M$ distintos, se cumple que $(x|y) > 0$.*

En otras palabras, la proposición anterior dice que siempre podemos construir un sistema anular que satisfaga los axiomas (A1), (A2) con $k = 0$ y (A4).

En la demostración haremos uso del espacio, $\Pi = \text{Conf}_2(M)$, de pares (ordenados) distintos de M . Como M es un espacio compacto y metrizable, Π es localmente compacto y metrizable. Dado $n \in \mathbb{N}$, con la métrica d en M , definimos el conjunto

$$\Pi(n) = \{(x, y) \in \Pi : d(x, y) \geq 1/n\},$$

entonces $(\Pi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ nos da una **saturación por conjuntos compactos** de Π , es decir, una secuencia anidada de subconjuntos compactos (son cerrados en un compacto) tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, $\Pi(n) \subseteq \text{int}(\Pi(n+1))$ y $\Pi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi(n)$.

Demostración de la Proposición 5.3. Construimos inductivamente una secuencia de sistemas anulares simétricos, Γ -invariantes $\mathfrak{A}(n)$ con $\mathfrak{A}(n)/\Gamma$ finito. Comenzamos con $\mathfrak{A}(0) = \emptyset$ y por vacuidad se cumple la base de inducción. Definimos

$$(K|L)_n := (K|L)_{\mathfrak{A}(n)}.$$

Por hipótesis de inducción, suponemos que para todo $(x, y, z, w) \in \text{Conf}_4(M)$, al menos dos de las cantidades $(xy|zw)_n$, $(xz|yw)_n$ y $(xw|yz)_n$ son iguales a 0, y que para todo $(x, y) \in \Pi(n)$, $(x|y)_n > 0$.

Como M es metrizable, podemos suponer que para todos $A \in \mathfrak{A}(n)$, $\lambda(A) > 0$. Sea μ el valor mínimo de $\max\{\mu(\gamma A) | \gamma \in \Gamma\}$, ya que A se extiende sobre $\mathfrak{A}(n)$ y $\mathfrak{A}(n)/\Gamma$ es finito, entonces $\mu > 0$. Ahora, dado $\pi = (x, y) \in \Pi(n+1)$, elegimos un anillo,

$$A(\pi) = (A^-(\pi), A^+(\pi)), \text{ con } x < A(\pi) < y$$

y con $A^-(\pi)$ y $A^+(\pi)$ lo suficientemente pequeños como para que $\mu(A(\pi)) > 1/(n+2)$ (observando que $d(x, y) > 1/(n+1)$) y que $\lambda(\gamma A(\pi)) < \min\{\mu, 1/(n+2)\}$ para todo $\gamma \in \Gamma$ (observando que, solo necesitamos considerar un número finito de γ 's). Elegimos ahora un conjunto finito, $\{\pi_1, \dots, \pi_p\} \subseteq \Pi(n+1)$, de modo que

$$\Pi(n+1) \subseteq \bigcup_{i=1}^p (\text{int}(A^-(\pi_i)) \times \text{int}(A^+(\pi_i))).$$

Sea

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{i=1}^p \{\gamma A(\pi_i), -\gamma A(\pi_i) : \gamma \in \Gamma\}.$$

Por la construcción, tenemos que para todo $A \in \mathfrak{B}$, $\lambda(A) < \min\{\mu, 1/(n+2)\}$ y definimos

$$\mathfrak{A}(n+1) := \mathfrak{A}(n) \cup \mathfrak{B}.$$

Nuevamente por construcción, tenemos $(x|y)_{n+1} > 0$ para todo $(x, y) \in \Pi(n+1)$. Supongamos, por contradicción, que existe algún $(x, y, z, w) \in \text{Conf}_4(M)$ con $(xy|zw)_{n+1} > 0$ y $(xz|yw)_{n+1} > 0$. En otras palabras, hay anillos $A, B \in \mathfrak{A}(n+1)$ con

$$\{x, y\} < A < \{z, w\} \quad \text{y} \quad \{x, z\} < B < \{y, w\}.$$

Por la hipótesis de inducción, estos no pueden estar ambos en $\mathfrak{A}(n)$, por lo que sin pérdida de generalidad, tenemos $A \in \mathfrak{B}$. Además, después de trasladar por algún elemento de Γ , podemos suponer que $\mu(B)$ es maximal en la Γ -órbita de B , O_B . Entonces, $\mu(B) > \min\{\mu, 1/(n+2)\}$ (dependiendo de si $B \in \mathfrak{A}(n)$ o si $B \in \mathfrak{B}$). Además, como $A \in \mathfrak{B}$, tenemos que $\lambda(A) < \mu(B)$. Así, sin pérdida de generalidad, tenemos $d(x, y) \leq \lambda(A) < \mu(B)$, contradiciendo el hecho de que $x < B < y$. Así, hemos demostrado que el resultado se cumple para $n+1$.

Sea $\mathfrak{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}(n)$, y escribimos $(K|L) = (K|L)_{\mathfrak{A}}$. Dado que $\Pi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi(n)$, vemos que $(x|y) > 0$ para todo $(x, y) \in \Pi$.

Queda por verificar que si $(x, y, z, w) \in \Theta_4(M)$, entonces $(xy|zw) < \infty$. Definimos $\lambda := \min\{d(x, y), d(z, w)\}$ y escogemos algún $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1/\lambda$. Observemos que si $\{x, y\} < A < \{z, w\}$, entonces $\lambda(A) \geq \lambda > 1/n$ y entonces $A \in \mathfrak{A}(n)$. Dado que $\mathfrak{A}(n)/\Gamma$ es finito el Lema 4.14 nos dice que sólo hay un número finito de anillos de este tipo. ■

Lema 5.4 (cf. [3] 8.3). *Supongamos que Γ actúa como un grupo de convergencia en M y que $\mathfrak{A}$ es un sistema anular simétrico Γ -invariante que satisface el axioma (A4). Si $x \in M$ es un punto límite cónico y $K \subseteq M \setminus \{x\}$ es compacto, entonces $(K|x) = \infty$.*

Demostración. Sean $(\gamma_i), b$ y c como en la definición de un punto límite cónico. Ahora, $b \neq c$, entonces, según el axioma (A4), existe $A \in \mathfrak{A}$ con $c < A < b$. Ahora, $\gamma_i|_{M \setminus \{x\}}$ se puede suponer que converge localmente uniformemente a c . Por lo tanto, para i suficientemente grande, tenemos $\gamma_i K < A < \gamma_i x$, por lo que $K < \gamma_i^{-1} A < x$. Así, $(K|x) > 0$ y por el proceso inductivo descrito en la Observación 4.11, obtenemos que de hecho, $(K|x) = \infty$. ■

Por el lema anterior, si todo punto de M es un punto límite cónico, entonces en cualquier sistema anular simétrico y Γ -invariante, el axioma (A4) implica el axioma (A3).

Supongamos ahora que Γ satisface las hipótesis del Teorema 5.1. Sea $\mathfrak{A}$ el sistema anular dado por la Proposición 5.3. Tenemos que $\mathfrak{A}$ satisface los axiomas (A1), (A2) y (A3). Así, por la Proposición 4.9 y el Lema 4.10, deducimos:

Lema 5.5 (cf. [3] 8.4). *La razón cruzada $(\cdot|\cdot)$ es una razón cruzada hiperbólica de caminos en M , compatible con la topología dada en M .*

Para demostrar el Teorema 5.1 seguimos los mismos pasos que en la demostración del Teorema 1.8:

Observemos que las construcciones de la Sección 3.2 nos dan una cuasimétrica, ρ , de caminos, Γ -invariante en $Q = \text{Conf}_3(M)$, de modo que la frontera, ∂Q , se identifica naturalmente con M en tal manera que las razones cruzadas $(..|..)$ y $(..|..)_{\rho}$ concuerden como máximo en una constante aditiva.

Además, si $x, y, z \in M$ son distintos, entonces $(x, y, z) \in Q$ es un centro de los puntos x, y, z . Si fijamos algún $\theta \in \text{Conf}_3(M)$, obtenemos la función $f : \Gamma \rightarrow Q$ definida por $f(\gamma) = \gamma\theta$. Por el Lema 4.19, (Γ, ρ) es localmente finito. Así que solo falta demostrar que la Γ -órbita de un punto en Q es cuasidensa. Pero para ello, necesitaremos un argumento diferente al del Lema 4.20.

Antes de empezar a demostrar esto, debemos aclarar algunos puntos que surgen del doble papel de $\text{Conf}_3(M)$, como el espacio topológico localmente compacto que aparece en la hipótesis y como el conjunto (que hemos denotado por Q) en el que hemos definido nuestra cuasimétrica hiperbólica:

1. El espacio $\text{Conf}_3(M)$ se puede compactar naturalmente adjuntando una copia de M . Esto se puede describir considerando $\text{Conf}_3(M) \cup M$ como un cociente de $M \times M \times M$, donde el mapa cociente es la identidad en $\text{Conf}_3(M)$, y envía una tripleta (x, y, z) a $a \in M$ si al menos dos de las entradas x, y, z son iguales a a . A partir de esta descripción, vemos que si $((x_i, y_i, z_i))_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\text{Conf}_3(M)$, con $x_i \rightarrow a$ y $y_i \rightarrow a$ en M , entonces $(x_i, y_i, z_i) \rightarrow a$ en $\text{Conf}_3(M) \cup M$. Además, lo contrario se cumple siempre que permítanos permutar las entradas de una tripleta.
2. Si ρ es la cuasimétrica de caminos hiperbólica en Q (como la que hemos construido en la Sección 3.2) con la propiedad de que ∂Q se identifica con M de tal manera que para $x, y, z \in M \equiv \partial Q$ todos distintos, el punto $(x, y, z) \in Q$ es un centro de la tripleta de puntos ideales, x, y, z , con respecto a la métrica ρ . Como fue discutido en la Sección 3.1, $\text{Conf}_3(M) \cup M \equiv Q \cup \partial Q$ admite una topología definida geoméricamente (donde Q es discreto).
3. Una sucesión, $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$, de tripletas distintas, converge en la topología (compacta) en $\text{Conf}_3(M) \cup M$ si y sólo si lo hace en la topología geométrica. Así podemos hablar inequívocamente de una sucesión convergente. Una consecuencia del hecho anterior es el siguiente:
Supongamos que $R \subseteq Q \equiv \text{Conf}_3(M)$. Si decimos que R es **relativamente compacto**, queremos decir que su cerradura en $\text{Conf}_3(M)$ es compacta (o equivalentemente, que su cerradura en $\text{Conf}_3(M) \cup M$ no intersecta a M). Si decimos que es **acotado**, queremos decir que con la cuasimétrica ρ tiene diámetro finito. De hecho, las nociones son equivalentes, esto se basa en las dos observaciones siguientes

En primer lugar, cualquier sucesión en $\text{Conf}_3(M)$ que converge a un punto de M

es infinita. En segundo lugar, cualquier sucesión no acotada en $\text{Conf}_3(M)$ tiene una subsucesión que converge a un punto de M .

Volvamos ahora a la cuestión de demostrar que, en nuestra situación particular, la órbita de un punto es cuasidensa.

Existe un argumento bastante estándar a favor de espacios métricos de caminos hiperbólicos, que podemos atravesar en esta situación más general, dada la observación hecha anteriormente de que un subconjunto de $\text{Conf}_3(M)$ es relativamente compacto si y sólo si está acotado.

Lema 5.6 (cf. [3] 8.5). *Si $\theta \in Q$, entonces la Γ -órbita de θ , O_θ , es cuasidensa en Q .*

Demostración. Supongamos que no es cuasidensa. Entonces hay una sucesión, $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$, en Q con $\rho(u_i, O_\theta) \rightarrow \infty$. Dado que ρ es Γ -invariante, podemos suponer que θ es el punto más cercano de O_θ a u_i para todo i . Ahora bien, $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es infinito, por lo que (después de pasar a una subsucesión) podemos suponer que converge en algún punto $x \in M$. Si $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es otra sucesión en Q que converge a x y permanece a una distancia acotada de algún rayo geodésico, entonces $\rho(v_i, O_\theta) \rightarrow \infty$. Por hipótesis, x es un punto límite cónico. Así, podemos encontrar un conjunto compacto, $\Theta_0 \subseteq \text{Conf}_3(M)$, un punto $y \in M \setminus \{x\}$, y una secuencia $x_i \rightarrow x$ en M , tal que $v_i = (y, x, x_i) \in \cup \Gamma \Theta_0$ para todo i . Pero ahora, Θ_0 está acotado, por lo que $\rho(v_i, O_\Theta)$ es acotado. Sin embargo, todos los puntos v_i se encuentran a una distancia acotada de cualquier geodésica biinfinita que conecta y con x , contradiciendo una afirmación anterior. ■

Ahora vemos que Γ es hiperbólico como antes (en el capítulo anterior). De hecho, tenemos un subconjunto acotado, $R \subseteq Q$, con $Q = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma R$. Sea Θ_0 la clausura de R en $\text{Conf}_3(M)$. Resulta que Θ_0 es compacto. Ahora, $\text{Conf}_3(M) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \Theta_0$, mostrando que Γ es una grupo de convergencia uniforme. Esto prueba el teorema 5.1.

Índice de símbolos

$[x, y]$	arco que conecta a x con y
$p \simeq_k q$	$ p - q \leq k$
$p \preceq_k q$	$p \leq q + k$
$p \ll_k q$	$p \leq q - k$
$A(\mathcal{T})$	aristas de la gráfica $\mathcal{T}$
$\delta_{\mathcal{T}}(v)$	grado del vértice v en la gráfica $\mathcal{T}$
$diam(X)$	diámetro del espacio X
$\mathbb{N}_{>n}$	$\{x \in \mathbb{N} : x > n\}$
$\mathbb{N}_{\geq n}$	$\{x \in \mathbb{N} : x \geq n\}$
$med(x, y, z)$	mediana de x, y y z
$\text{Conf}_n(M)$	enésimo espacio de configuraciones de M
$V(\mathcal{T})$	vértices de la gráfica $\mathcal{T}$

Bibliografía

- [1] Brian H Bowditch. Notes on gromov's hyperbolicity criterion for path-metric spaces. In *Group theory from a geometrical viewpoint*. 1991. URL: <http://homepages.warwick.ac.uk/~masgak/papers/bhb-hypnotes1.pdf>. 20
- [2] Brian H Bowditch. Cut points and canonical splittings of hyperbolic groups. *Acta Mathematica*, 180:145–186, 1998. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121148668>. v, 34, 41, 42
- [3] Brian H Bowditch. A topological characterisation of hyperbolic groups. *Journal of the American Mathematical Society*, 11(3):643–667, 1998. URL: <https://www.ams.org/jams/1998-11-03/S0894-0347-98-00264-1/S0894-0347-98-00264-1.pdf>. v, 7, 10, 11, 12, 15, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 48, 49, 50, 52
- [4] Brian H. Bowditch. Convergence groups and configuration spaces. In *Geometric Group Theory Down Under: Proceedings of a Special Year in Geometric Group Theory, Canberra, Australia, 1996*, pages 23–54. Walter De Gruyter, 1999. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:117939921>. v, 39, 45, 48
- [5] Noel Brady, Tim Riley, and Hamish Short. *The geometry of the word problem for finitely generated groups*. Springer Science & Business Media, 2007. 5
- [6] Martin R Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319. Springer Science & Business Media, 2013. v, 4, 5, 22
- [7] Eric M Freden. *Negatively curved groups have the convergence property*. Brigham Young University, 1994. 45
- [8] Frederick W. Gehring and Gaven J. Martin. Discrete quasiconformal groups i. *Proceedings of The London Mathematical Society*, pages 331–358, 1987. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:51825265>. 39, 45
- [9] Etienne Ghys and Pierre de la Harpe. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83. Springer Science & Business Media, 2013. 14, 20
- [10] Mikhael Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, pages 75–263. Springer, 1987. URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4613-9586-7_3. v

- [11] Juha Heinonen and Pekka Koskela. Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry. 181:1–61, 1998. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:59366197>. 32
- [12] S. Katok. *Fuchsian groups*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press., 1992. 45
- [13] François Labourie. What is ... a cross ratio? *Notices of the American Mathematical Society*, 55, 11 2008. 9
- [14] Gaven J Martin and Pekka Tukia. Convergence groups with an invariant component pair. *American Journal of Mathematics*, 114(5):1049–1077, 1992. 47
- [15] Jean Pierre Otal. Sur la géometrie symplectique de l’espace des géodésiques d’une variété à courbure négative. *Revista Matemática Iberoamericana*, 8:441–456, 1992. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:122240464>. 8
- [16] Pekka Tukia. Conical limit points and uniform convergence groups. *Crelle’s Journal*, 1998:71–98, 1998. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:122629900>. v, vi, 47, 48