



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Solución Atractora de un Plasma en Acreción Alrededor de un Hoyo Negro

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Maestro en ciencias en el área de física

PRESENTA:

Flavio Rosales Infante

TUTOR:

Dr. Francisco Shidarth Guzmán Murillo



Morelia, Michoacán, México.

Agosto 2024

Dedicado a Emilia, con cariño y gratitud.

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas que han sido fundamentales en la realización de esta tesis. En primer lugar, al Dr. Francisco Shidarth Guzmán Murillo, mi asesor, cuya guía, paciencia y dedicación han sido esenciales para que este proyecto llegara a buen puerto. A mis compañeros de oficina, Iván y Curicaveri, quienes con sus valiosas opiniones y sugerencias no solo hicieron más llevadera la rutina diaria, sino que también contribuyeron significativamente a moldear muchas de las ideas presentes en este trabajo. Sin su apoyo y colaboración, esta tesis no sería lo que es hoy.

A mi familia, que ha sido mi mayor fuente de fuerza y motivación. A mi mamá Marcela y mi papá Flavio, por su amor incondicional, por creer en mí siempre, y por estar a mi lado en cada paso del camino. A mis hermanos Ailine, Alma y Axel, por su comprensión, su apoyo constante, y por ser una inspiración diaria. A mis amigos Alfonso y Francisco, por estar siempre presentes, ofreciéndome su apoyo.

Un agradecimiento muy especial a Diana, mi compañera de vida. Gracias por tu paciencia infinita, por tu amor incondicional, y por estar a mi lado en los momentos más desafiantes de este proceso. Tu presencia ha sido un faro de luz que me ha guiado, y sin ti, este logro no habría sido posible. Y, por supuesto, a mis fieles compañeros felinos, Maya y Benito, quienes con su silenciosa pero reconfortante compañía, hicieron más llevaderas las largas horas de trabajo.

Resumen. La tesis investiga la solución atractora de un plasma en acreción alrededor de un agujero negro de Kerr. Se desarrolla un código numérico para resolver las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica Relativista General (GRMHD) en un espacio-tiempo de Kerr fijo. El objetivo es estudiar la evolución y estabilidad de un plasma que entra radialmente en el dominio con densidad y velocidad constantes en la frontera. Se implementan métodos numéricos avanzados para resolver las ecuaciones y se utilizan herramientas de diagnóstico para evaluar la solución obtenida. Los resultados mejoran la comprensión de la dinámica del plasma en entornos relativistas.

Abstract. The thesis investigates the attractor solution of a plasma accreting around a Kerr black hole. A numerical code is developed to solve the equations of General Relativistic Magnetohydrodynamics (GRMHD) in a fixed Kerr spacetime. The aim is to study the evolution and stability of a plasma entering radially into the domain with constant density and velocity at the boundary. Advanced numerical methods are implemented to solve the equations, and diagnostic tools are used to evaluate the obtained solution. The results enhance the understanding of plasma dynamics in relativistic environments.

Palabras clave: GRMHD, Kerr, Acreción, Plasma, Relatividad

CONTENIDO

1. Introducción	1
2. Magnetohidrodinámica en espacio-tiempos curvos	5
2.1. Dinámica del plasma	5
2.2. El espacio-tiempo	10
3. Métodos numéricos	15
3.1. Volúmenes finitos	16
3.2. Reconstrucción de variables	19
3.3. Solucionador de Riemann aproximado HLLE	22
3.4. Transporte de flujos restringidos	25
3.5. Evolución temporal	28
3.6. Condiciones de frontera	29
3.7. Recuperación de las variables primitivas	33
4. Acreción	37
4.1. Condiciones iniciales para el fluido	37
4.1.1. Acreción esférica	37

4.2. Condiciones iniciales para el campo magnético	43
5. Resultados	47
5.1. Acreción esférica hidrodinámica	49
5.1.1. Michel	49
5.1.2. Kerr	51
5.2. Acreción esférica magnetizada	57
6. Conclusiones	69
A. Apéndice	71
REFERENCIAS	73

Capítulo 1

Introducción

La astrofísica moderna enfrenta el desafío de entender los procesos de acreción en objetos compactos como los agujeros negros y las estrellas de neutrones. Estos procesos son esenciales para explicar la formación y evolución de estructuras de plasma, así como la emisión de radiación en los núcleos galácticos activos. Un área particularmente interesante es la acreción de plasma en torno a un hoyo negro, debido a la complejidad de las interacciones entre el plasma, el espacio-tiempo y los campos magnéticos.

El trabajo fundacional en la acreción en objetos compactos es el de Bondi [1], que presenta una solución analítica para un flujo estacionario esféricamente simétrico de gas en un potencial Newtoniano puntual. La generalización de este problema al régimen relativista para un agujero negro de Schwarzschild se logra con la solución semi-analítica de Michel [2]. En décadas recientes, se ha reestudiado el problema añadiendo elementos físicos, como el uso de un hoyo negro de Kerr [3], la consideración de un fluido autogravitante resolviendo las ecuaciones de Euler acopladas a las de Einstein con una aproximación analítica [4] o mediante soluciones numéricas [5], así como la inclusión de un campo magnético externo [6].

La magnetohidrodinámica relativista general (GRMHD, por sus siglas en inglés) se ha establecido como la herramienta teórica fundamental para describir el comportamiento de un plasma sometido a efectos gravitacionales y magnéticos. El estándar en este campo es suponer un plasma de electrones-protones totalmente ionizado con una conductividad eléctrica infinita. Las soluciones analíticas o semi-analíticas de este sistema son escasas y, en su mayoría, limitadas al régimen hidrodinámico, lo que hace que las simulaciones

numéricas sean esenciales para estudiar la evolución temporal, identificar patrones y evaluar la estabilidad de las soluciones.

Existen varios códigos que resuelven las ecuaciones de la GRMHD ideal en un espacio-tiempo de prueba, tales como BHAC [7], Cactus [8], Athena++ [9], KORAL [10] y HARM [11]. Estos códigos han sido probados y comparados para su uso en la colaboración del Event Horizon Telescope (EHT) [12]. La decisión de desarrollar un nuevo código radica en la independencia que proporciona la capacidad de modificar los métodos numéricos empleados, añadir herramientas de diagnóstico, utilizar las coordenadas más adecuadas para el problema y diseñar una paralelización que se ajuste a las resoluciones utilizadas.

Para este trabajo, se desarrolló un código que resuelve las ecuaciones, usando coordenadas esféricas, el esquema de volúmenes finitos con el solucionador de Riemann incompleto HLLE, un reconstructor lineal y el método de Runge-Kutta de tercer orden para la evolución temporal del sistema en una malla exponencialmente espaciada en la dirección radial. El espacio-tiempo se describe en coordenadas de Kerr-Schild, que son penetrantes en el horizonte, y las ecuaciones se formulan bajo la descomposición 3+1. La elección de estas técnicas permite una mayor precisión y eficiencia en la simulación de la dinámica del plasma en entornos relativistas.

El objetivo principal de este estudio es analizar la evolución de un plasma que entra radialmente en el dominio con densidad y velocidad constantes en la frontera, siendo acretado por un hoyo negro de Kerr y cuya dinámica es alterada por la presencia de un campo magnético inicial constante y paralelo al eje de rotación. Esta configuración está diseñada para profundizar en la dinámica de la acreción del plasma y evaluar el impacto de la rotación del agujero negro y la intensidad del campo magnético. Además, las herramientas de diagnóstico se han diseñado para entender las desviaciones del sistema respecto al caso sin rotación ni campo magnético, así como para determinar si la solución alcanza un estado estacionario.

Se explora el caso conocido de la solución de Michel para verificar que el código reproduzca dicha solución, medir el error y verificar el factor de convergencia. Posteriormente, con la misma configuración, se analiza la acreción en torno a un agujero negro de Kerr sin campo magnético, examinando las características del estado estacionario y realizando una prueba de autoconvergencia.

Los resultados de este estudio pueden tener un impacto significativo en varias áreas de la astrofísica. Por un lado, la validación y mejora de los modelos teóricos de acreción pueden contribuir a una mejor interpretación de los datos observacionales de sistemas astrofísicos reales, como los obtenidos por el Event Horizon Telescope. Además, una comprensión más detallada de la dinámica del plasma en entornos relativistas podría informar futuras investigaciones sobre fenómenos de alta energía, como los jets relati-

vistas y las explosiones de rayos gamma.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 2 se construyen las ecuaciones de la GRMHD ideal y se describe el espacio-tiempo de Kerr y las coordenadas utilizadas. En el capítulo 3 se ilustran los métodos utilizados para resolver las ecuaciones, se describe la malla utilizada y las condiciones de frontera. En el capítulo 4 se describen las condiciones iniciales para las variables hidrodinámicas y el campo magnético. En el capítulo 5 se presentan los resultados y las pruebas de convergencia. Finalmente, en el capítulo 6 se exponen las conclusiones y las perspectivas futuras.

Capítulo 2

Magnetohidrodinámica en espacio-tiempos curvos

SECCIÓN 2.1

Dinámica del plasma

La construcción de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica en un espacio-tiempo (GRMHD) están basada en la descomposición 3 + 1 del espacio-tiempo, cuyo elemento de línea se escribe como [13], [14]

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.1)$$

explícitamente, los tensores de métrica son

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_i \beta^i & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^j/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

donde α es el lapso, β^i el vector desplazamiento y γ_{ij} es la 3-métrica de la hipersuperficie tipo espacio Σ_t de tiempo constante t con la que se folia el espacio-tiempo, en forma general se considera que α , β^i y γ_{ij} se encuentran en función de las coordenadas espaciales y temporal, sin embargo en este caso se busca resolver las ecuaciones de la

MHD en un espacio-tiempo fijo, que no cambia en el tiempo, estando así en función únicamente de las coordenadas espaciales.

El vector normal a Σ_t en cada punto del espacio-tiempo está dado por $n^\mu = g^{\mu\nu}n_\nu$ donde $n_\nu = (-\alpha, 0, 0, 0)$. Con esta métrica podemos construir la 4-velocidad de un elemento de fluido $u^\mu = (u^0, u^i)$ con $i = 1, 2, 3$ en términos de las velocidades medidas por un observador euleriano

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{W}{\alpha} = \frac{1}{\alpha\sqrt{1 - v^i v_i}}, \quad (2.3)$$

$$v^i = \frac{u^i}{u^0} = \frac{u^i}{W} + \frac{\beta^i}{\alpha}, \quad (2.4)$$

siendo τ el tiempo propio, v^i las componentes de la 3-velocidad del elemento del fluido y W su factor de Lorentz, que podemos escribir con esta métrica como

$$W = \frac{1}{\sqrt{1 - v^i v_i}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma_{ij} v^i v^j}}. \quad (2.5)$$

La representación 3 + 1 de la MHD ideal se sigue del procedimiento presentado en [15] y [16]. El campo electromagnético está descrito por el tensor de campo de Faraday $F^{\mu\nu}$, que relaciona las componentes de campo eléctrico E y magnético B medidas desde el observador con 4-velocidad n^μ de la siguiente manera

$$F^{\mu\nu} = n^\mu E^\nu - n^\nu E^\mu - \eta^{\mu\nu\lambda\delta} n_\lambda B_\delta, \quad (2.6)$$

donde

$$\eta^{\mu\nu\lambda\delta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} [\mu\nu\lambda\delta], \quad (2.7)$$

se usó la siguiente notación $g = \det(g_{\mu\nu})$ y $[\mu\nu\lambda\delta]$ el símbolo de Levi-Civita totalmente antisimétrico. Por otro lado el dual del tensor de campo electromagnético $*F^{\mu\nu}$ está definido como

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\lambda\delta} F_{\lambda\delta}. \quad (2.8)$$

En términos del campo eléctrico y magnético medidos por el observador Euleriano sus componentes se escriben como

$$*F^{\mu\nu} = n^\mu B^\nu - n^\nu B^\mu + \eta^{\mu\nu\lambda\delta} n_\lambda E_\delta. \quad (2.9)$$

Las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse en términos de estos dos tensores como [17]

$$\nabla_\nu^* F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.10)$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \mathcal{J}^\mu, \quad (2.11)$$

donde ∇_ν es la derivada covariante consistente con la métrica (2.1) y $\mathcal{J}^\mu$ es la 4-corriente eléctrica. De acuerdo a la ley de Ohm podemos expresar la corriente eléctrica de la siguiente manera

$$\mathcal{J}^\mu = \rho_q u^\mu + \sigma F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (2.12)$$

Aquí ρ_q es la densidad de carga eléctrica y σ la conductividad eléctrica. Es posible simplificar las ecuaciones de Maxwell aplicando la condición de la MHD ideal, es decir, tomando en cuenta que el fluido en cuestión es un conductor perfecto. El fluido tendrá una conductividad infinita, y por ello el término $\sigma F^{\mu\nu} u_\nu$ debe desaparecer para mantener la corriente finita. Esto implica que el campo eléctrico medido por un observador en reposo es cero, mientras que el observador con velocidad n^μ mide las componentes del campo E en función del campo magnético

$$E^\mu = F^{\mu\nu} n_\nu = \frac{1}{W} \eta^{\mu\nu\lambda\delta} u_\nu u_\lambda B_\delta, \quad (2.13)$$

de forma explícita

$$E^0 = 0, \quad (2.14)$$

$$E^i = -\alpha \eta^{0ijk} v_j B_k, \quad (2.15)$$

o en términos de los 3-vectores $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$, donde el producto cruz es definido usando el elemento de volumen inducido en un espacio puramente espacial, así para definir este producto cruz en este espacio se utiliza la siguiente expresión como su tensor de Levi-Civita $\alpha \eta^{0ijk}$. Utilizando la expresión de las componentes eléctricas y la elección del observador Euleriano podemos reescribir (2.6) y (2.9) como

$$F^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu\lambda\delta} u_\lambda b_\delta, \quad (2.16)$$

$${}^*F^{\mu\nu} = \frac{u^\mu B^\nu - u^\nu B^\mu}{W}, \quad (2.17)$$

y podemos reducir (2.10), haciendo uso de (2.17), a la condición de divergencia libre del campo magnético y la ecuación de inducción para la evolución del campo magnético

$$\frac{\partial(\sqrt{\gamma} B^i)}{\partial x^i} = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^0} (\sqrt{\gamma} B^i) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{\gamma} [(\alpha v^i - \beta^i) B^j - (\alpha v^j - \beta^j) B^i]), \quad (2.19)$$

reescribiendo (2.18) y (2.19) usando los 3-vectores se tiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \vec{B}) = \vec{\nabla} \times [(\alpha \vec{v} - \vec{\beta}) \times \vec{B}]. \quad (2.21)$$

Una vez establecida la ecuación de evolución para el campo magnético en la MHD ideal, debemos obtener las ecuaciones para la evolución de la materia. Estas ecuaciones pueden obtenerse de la ecuación para la conservación de la masa en reposo del plasma y la divergencia del tensor de energía-momento, que respectivamente son

$$\nabla_\mu(\rho_0 u^\mu) = 0, \quad (2.22)$$

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.23)$$

donde $T^{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento para un fluido en un campo magnético, se obtiene sumando el tensor para el fluido, que asumimos perfecto y el tensor de energía-momento del campo electromagnético

$$T^{\mu\nu} = T_{fluido}^{\mu\nu} + T_{EM}^{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

explícitamente el tensor de energía-momento para el fluido perfecto es

$$T_{fluido}^{\mu\nu} = \rho_0 h u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

donde ρ_0 es la densidad de masa en reposo del elemento de fluido, p su presión y h su entalpía específica, definida por $h = 1 + \epsilon + p/\rho_0$, siendo ϵ la energía interna específica. Podemos obtener $T_{EM}^{\mu\nu}$ en función del tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$

$$T_{EM}^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F_\lambda^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\delta} F_{\lambda\delta}, \quad (2.26)$$

y usando (2.16) es posible reescribir (2.26) como

$$T_{EM}^{\mu\nu} = \left(u^\mu u^\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \right) b^2 - b^\mu b^\nu, \quad (2.27)$$

donde b^μ es el campo magnético medido desde un marco de referencia comóvil $b^\mu = u_\nu {}^*F^{\mu\nu}$ con ${}^*F^{\mu\nu}$ el dual del tensor de Faraday:

$$b^0 = \frac{W B^i v_i}{\alpha}, \quad (2.28)$$

$$b^i = \frac{B^i + \alpha b^0 u^i}{W} = \frac{B^i}{W} + b^0 (\alpha v^i - \beta^i), \quad (2.29)$$

$$b_i = \frac{B_i}{W} + \alpha b^0 v_i, \quad (2.30)$$

$$b^2 = b^\mu b_\mu = \frac{B^2 + \alpha^2 (b^0)^2}{W^2}. \quad (2.31)$$

Sumando (2.25) y (2.27), el tensor de energía momento total es

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 h {}^*u^\mu u^\nu + p {}^*g^{\mu\nu} - b^\mu b^\nu. \quad (2.32)$$

Aquí p^* es la suma de la presión hidrodinámica con la presión magnética $p^* = p + b^2/2$, y observemos que esta notación es consistente con una energía interna y entalpía total $\epsilon^* = \epsilon + b^2/(2\rho)$ y $h^* = 1 + \epsilon^* + p^*/\rho$.

Las ecuaciones (2.19), (2.22) y (2.23) son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que puede ser escrito como un sistema de ecuaciones conservativas. Con la definición del tensor de energía-momento (2.32) podemos dar una expresión general para las ecuaciones fundamentales de la magnetohidrodinámica en un espacio tiempo curvo en forma de balance flujos:

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}} \left(\frac{\partial\sqrt{\gamma}\vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial\sqrt{\gamma}\vec{F}^i}{\partial x^i} \right) = \vec{S} \quad (2.33)$$

donde $\vec{U}$ es el vector de las variables conservativas, $\vec{F}^i$ los flujos del sistema en la dirección i y $\vec{S}$ las fuentes

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} D \\ S_i \\ \tau \\ B^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho W \\ \rho h^* W^2 v_i - \alpha b^0 b_i \\ \rho h^* W^2 - p^* - \alpha^2 (b^0)^2 - \rho W \\ B^j \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

$$\vec{F}^i = \alpha \begin{pmatrix} D(v^i - \beta^i/\alpha) \\ S_j(v^i - \beta^i/\alpha)p^*\delta_j^i - b_j B^i/W \\ \tau(v^i - \beta^i/\alpha) + p^*v^i - \alpha b^0 B^i/W \\ (v^i - \beta^i/\alpha)B^j - (v^j - \beta^j/\alpha)B^i \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu j}^\sigma \\ \alpha(T^{\mu 0} \partial_\mu \alpha - T^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^0) \\ 0^k \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Resolveremos las ecuaciones en un espacio tiempo fijo, por lo que podemos sacar el termino $\sqrt{\gamma}$ de la derivada temporal y suponiendo que conocemos su forma explicita, es posible reescribir el sistema.

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{F}^i}{\partial x^i} = \alpha\vec{S} - \vec{F}^i \frac{\partial}{\partial x^i} (\ln \sqrt{\gamma}). \quad (2.37)$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación (2.37) es tratado como un término

de fuente adicional, se reescribe de esta manera el sistema debido a que se utilizarán métodos numéricos que hacen uso de la estructura de las ecuaciones de balance de flujos. Aunque es posible aplicar el mismo tipo de métodos a la ecuación (2.33) sería necesario realizar ciertas modificaciones en los métodos, añadiendo cálculos adicionales y ocasionando en consecuencia un mayor tiempo de ejecución del programa.

SECCIÓN 2.2

El espacio-tiempo

En 1963 Kerr encontró una solución para las ecuaciones de Einstein que describe un hoyo negro rotante no cargado. Esta solución es estacionaria, axialmente simétrica con respecto del eje de rotación, asintóticamente plana y caracterizada por dos parámetros: la masa M y momento angular J del hoyo negro. La solución de Kerr suele presentarse en coordenadas de Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) , en estas coordenadas el elemento de línea se escribe de la siguiente manera

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma^2} \right) dt^2 - \frac{4Mar}{\Sigma^2} \sin^2 \theta dt d\phi + \frac{\Sigma^2}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.38)$$

donde

$$\Sigma^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2,$$

y $a = J/M$ es una constante llamada parámetro de espín. Esta métrica es invariante bajo las transformaciones simultáneas de inversión temporal $t \rightarrow -t$ y $\phi \rightarrow -\phi$, sin embargo no es invariante bajo inversión temporal, únicamente en el caso de $a = 0$, que es el caso del hoyo negro de Schwarzschild.

Expandiendo (2.38) en torno a a/r y $M/r \ll 1$

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{2aM \cos^2 \theta}{r^3} + \dots \right) dt^2 - \left(\frac{4aM \sin^2 \theta}{r} + \dots \right) dt d\phi \\ &+ \left[1 + \frac{a^2(\cos^2 \theta - 1)}{r^2} + \dots \right] \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ &+ \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 M \sin^2 \theta}{r} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \end{aligned} \quad (2.39)$$

y haciendo $a = 0$ podemos ver que (2.39) se reduce a la métrica de Schwarzschild.

En coordenadas de Boyer-Lindquist existen dos superficies donde la estructura de rayos nulos colapsa, estas superficies se obtienen imponiendo la condición $g_{tt} = 0$ y son conocidas como ergosuperficies

$$r_{s,\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}, \quad (2.40)$$

mientras que los horizontes de eventos se determinan calculando en qué superficies diverge la componente de la métrica g_{rr} , es decir haciendo $\Delta = 0$

$$r_{eh,\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (2.41)$$

Como podemos observar, los horizontes de eventos y las superficies donde la estructura de rayos nulos colapsa no coinciden, a diferencia de lo que sucede en la solución de Schwarzschild. Además para la existencia de los horizontes de eventos es necesario que $|a| \leq M$.

La región entre $r_{s,+}$ y $r_{eh,+}$ es llamada ergosfera, caracterizada porque el efecto llamado *frame dragging*, particularmente fuerte en esta región. Este efecto consiste en la capacidad de un cuerpo masivo rotante para "arrastrar" el espacio-tiempo, es decir incluso teniendo una partícula de prueba con momento angular cero, el arrastre le inyectará una velocidad angular distinta de cero [18]:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{p^\phi}{p^t} = \frac{g^{\theta t}}{g^{tt}} = \frac{2Mar}{(r^2 + a^2)\Sigma + 2Ma^2r \sin^2 \theta}. \quad (2.42)$$

Existen dos tipos de singularidades en las coordenadas de Boyer-Lidquist, las que están dadas por el horizonte de eventos $\Delta = 0$ y las que están dadas por $\Sigma^2 = 0$. Para verificar si estas singularidades son físicas o removibles bajo un cambio de coordenadas debemos evaluar el escalar de Kretschmann $\mathcal{K}$, que divergirá únicamente en las singularidades reales:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \frac{48M^2}{\Sigma^6} (r^6 - 15a^2r^4 \cos^2 \theta + 15a^4r^2 \cos^4 \theta - a^6 \cos^6 \theta). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Sustituyendo $\Sigma^2 = 0$ y $\Delta = 0$ en (2.43) podemos notar que la única singularidad física en el espacio-tiempo de Kerr corresponde a la condición $\Sigma^2 = 0$. De hecho, podemos remover la singularidad cuando $\Delta = 0$ con la siguiente transformación de coordenadas

$$dt' = dt + \frac{2Mr}{\Delta} dr, \quad d\phi = d\phi + \frac{a}{\Delta} dr, \quad (2.44)$$

o de forma explícita

$$t' = t + \int \frac{2Mr}{\Delta} dr, \quad (2.45)$$

$$\phi' = \phi + \int \frac{a}{\Delta} dr. \quad (2.46)$$

Estas nuevas coordenadas (t', r, θ, ϕ') son llamadas coordenadas de Kerr-Schild, para las cuales el elemento del línea del hoyo negro de Kerr se escribe como:

$$ds^2 = -(1 - B)dt'^2 - 2Ba \sin^2 \theta dt' d\phi' + 2Bdt' dr - 2a(1 + B) \sin^2 \theta dr d\phi' + (1 + B)dr^2 + \Sigma^2 d\theta^2 + \frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma^2} d\phi'^2, \quad (2.47)$$

donde

$$B = \frac{2Mr}{\Sigma^2}.$$

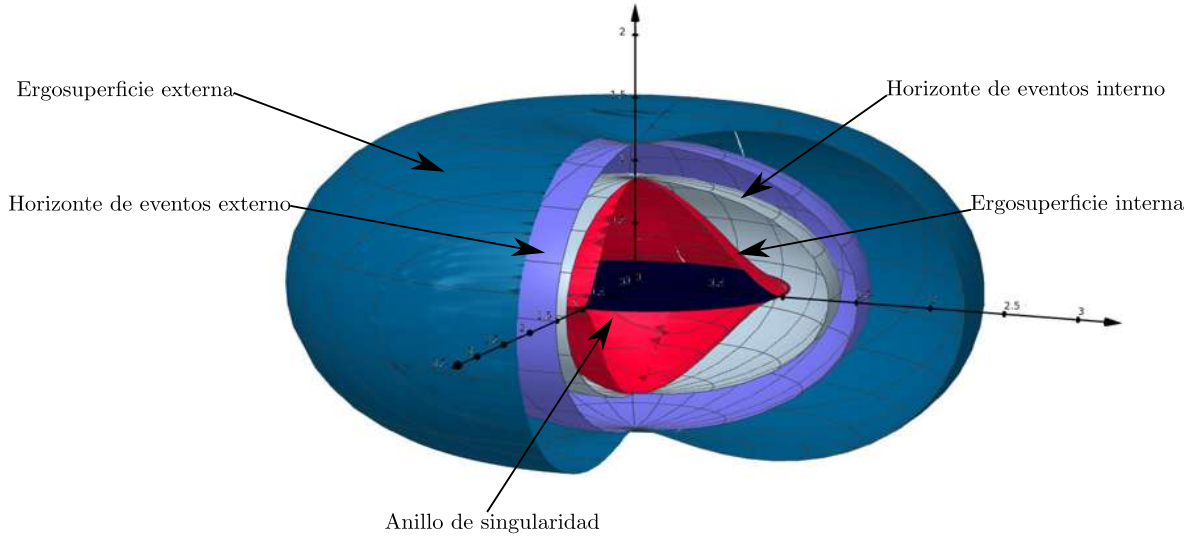


Figura 2.1: Espacio-tiempo de Kerr en coordenadas de Kerr-Schild. Se muestran los horizontes de eventos, ergosuperficies y la singularidad de anillo para un hoyo negro con parámetro de espín $a = 0.99$ y masa $M = 1$.

Para la solución de las ecuaciones (2.37) hemos considerado que el espacio-tiempo no cambia durante la evolución y se trata de la solución de Kerr, descrito por la métrica (2.47). Resulta importante utilizar las coordenadas de Kerr-Schild debido a que de esta manera podemos describir al plasma dentro y sobre los horizontes de eventos, asegurando que todo lo que entre en esta zona no pueda salir, si se utilizaran coordenadas no penetrantes como las coordenadas de Boyer-Lindquist, la dinámica del plasma se estudiaría fuera de los horizontes de eventos para evitar la singularidad en la métrica,

lo que genera inestabilidades en la solución y una eyección de materia del hoyo negro, como se mostró en [19].

Otra parte esencial para el espacio-tiempo es describirlo en la descomposición $3 + 1$, para ello se identifica la métrica (2.47) con la métrica (2.1), obteniendo la función de lapso α , el vector de desplazamiento β^i , las componentes de la 3-métrica espacial γ_{ij} y el determinante de la métrica espacial $\sqrt{\gamma}$

$$\alpha = \sqrt{\frac{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)}{a^2 \cos^2(\theta) + 2Mr + r^2}} \quad (2.48)$$

$$\beta^i = \begin{pmatrix} \frac{2Mr}{a^2 \cos^2(\theta) + 2Mr + r^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_i = \begin{pmatrix} \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \\ 0 \\ -\frac{2aMr \sin^2(\theta)}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \gamma_{rr} & 0 & \gamma_{r\phi} \\ 0 & \gamma_{\theta\theta} & 0 \\ \gamma_{\phi r} & 0 & \gamma_{\phi\phi} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{rr} &= 1 + \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \\ \gamma_{\theta\theta} &= r^2 + a^2 \cos^2(\theta) \\ \gamma_{\phi\phi} &= \frac{((a^2 + r^2)^2 - a^2(a^2 - 2Mr + r^2) \sin^2(\theta)) \sin^2(\theta)}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \\ \gamma_{r\phi} &= \gamma_{\phi r} = -a \sin^2(\theta) \left(1 + \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \right) \end{aligned}$$

$$\gamma^{ij} = \begin{pmatrix} \gamma^{rr} & 0 & \gamma^{r\phi} \\ 0 & \gamma^{\theta\theta} & 0 \\ \gamma^{\phi r} & 0 & \gamma^{\phi\phi} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \gamma^{rr} &= \frac{a^2 (a^2 - 2Mr + r^2) \cos^2(\theta) + 2a^2 Mr + a^2 r^2 + r^4}{(a^2 \cos^2(\theta) + 2Mr + r^2) (r^2 + a^2 \cos^2(\theta))} \\ \gamma^{\theta\theta} &= \frac{1}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \\ \gamma^{\phi\phi} &= \frac{1}{\sin^2(\theta) (r^2 + a^2 \cos^2(\theta))} \\ \gamma^{\phi r} &= \gamma^{r\phi} = \frac{a}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\gamma} = \sqrt{(a^2 \cos^2(\theta) + 2Mr + r^2) (r^2 + a^2 \cos^2(\theta))} \sin(\theta). \quad (2.52)$$

Estas expresiones de la geometría serán esenciales en la construcción detallada de las ecuaciones de evolución del plasma sobre el espacio-tiempo del hoyo negro y las condiciones iniciales para el campo magnético.

Capítulo 3

Métodos numéricos

La dinámica de los plasmas presenta una naturaleza no lineal que se intensifica en un contexto relativista, donde las soluciones exactas son escasas y solo se encuentran bajo circunstancias muy específicas. Esta complejidad hace que la exploración de estos sistemas sea predominantemente numérica. No obstante, la aparición de choques y discontinuidades en las soluciones limita el uso de esquemas tradicionales, los cuales suponen la diferenciabilidad y continuidad de las soluciones.

Para abordar este problema, se utilizan métodos numéricos de alta resolución capaces de capturar choques (High Resolution Shock Capturing, HRSC), especialmente cuando el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) puede escribirse en forma conservativa, como es el caso de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD). El teorema de Lax y Wendroff asegura que un esquema numérico conservativo, si converge, lo hará hacia la solución débil del problema. Además, Hou y LeFloch demuestran que si las ecuaciones no están formuladas de manera conservativa, no se logrará la convergencia a la solución correcta en presencia de ondas de choque. Por lo tanto, el uso de métodos que escriben las ecuaciones en forma de balance de flujos garantiza alcanzar la solución correcta siempre y cuando el esquema sea convergente.

Existen dos enfoques principales en la familia HRSC: los métodos de diferencias finitas y los métodos de volúmenes finitos. Los métodos de diferencias finitas definen una malla y evolucionan los puntos de esta malla. En cambio, los métodos de volúmenes finitos evolucionan las variables promediadas dentro de cada celda, definiendo problemas de Riemann locales en las interfaces entre celdas. Aunque los métodos de diferencias finitas

suelen ser más rápidos en mallas regulares y no requieren información sobre la estructura característica del sistema, necesitan añadir términos de disipación para capturar los choques, lo que puede conducir a violaciones de las leyes de conservación debido a errores acumulados. En contraste, los métodos de volúmenes finitos son más flexibles para manejar mallas no regulares, lo que los hace más adecuados para problemas complejos y heterogéneos como los que se abordan en este trabajo.

SECCIÓN 3.1

Volúmenes finitos

Asumimos un problema de valores iniciales para un sistema genérico de ecuaciones cuasi-lineal hiperbólico escrito en forma de balance de flujos:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^i}{\partial x^i} = \mathbf{S} \quad (3.1)$$

Notemos que (2.37) corresponde exactamente a esta forma genérica, considerando a todo el lado derecho de esa ecuación como un único vector de fuentes. Nuestro problema de valores iniciales estará descrito en un dominio definido como $\mathcal{D} = [0, t_f] \times [r_{min}, r_{max}] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Para implementar nuestro método, debemos definir un dominio numérico discreto. Entre todas las maneras en las que podemos discretizar $\mathcal{D}$ se ha elegido la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_d &= \{(t^n, r_i, \theta_j, \phi_k) \mid i = 0, \dots, N_r; j = 0, \dots, N_\theta; k = 0, \dots, N_\phi\} \\ t^n &= n\Delta t \\ r_i &= r_{min} e^{i\Delta r} \\ \theta_j &= -\frac{\Delta\theta}{2} + j\Delta\theta \\ \phi_k &= k\Delta\phi \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde $\Delta r = \ln(r_{max}/r_{min})/N_r$, $\Delta\theta = \pi/N_\theta$, $\Delta\phi = 2\pi/N_\phi$ y $\Delta t = C \min(r_i - r_{i-1}, \Delta\theta, \Delta\phi)$ con C siendo la constante de Courant-Friedrichs-Lewy definida en la sección 3.5. Las razones para utilizar una malla con separación exponencial son que cerca del horizonte, que es donde se necesita una mayor resolución, mientras que cerca de la frontera de

r_{max} se espera que la dinámica sea menos violenta comparada con la que ocurre en las regiones circundantes al horizonte de eventos. La coordenada azimutal se discretiza evitando que existan puntos sobre el eje polar, desplazando todos los puntos en un ángulo de $\Delta\theta/2$. Se evitan los ejes debido a que en esta región las coordenadas esféricas no son invertibles: la componente del tensor de métrica $\gamma^{\phi\phi}$ diverge al igual que los símbolos de Christoffel $\Gamma_{t\theta}^\phi$, $\Gamma_{r\theta}^\phi$ y $\Gamma_{\theta\phi}^\phi$. En la figura 3.1 se muestra una representación del dominio numérico $\mathcal{D}_d$ descrito por (3.2).

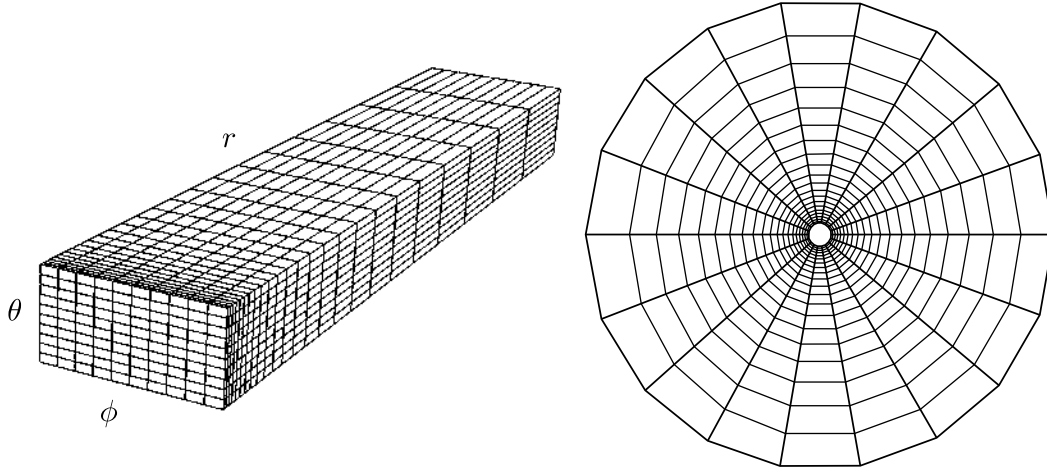


Figura 3.1: Dominio discretizado en la forma de (3.2) y una representación cartesiana de un corte para ϕ constante.

Definimos el volumen de control espacial como $\Sigma_{ijk} := [r_{i+1/2}, r_{i-1/2}] \times [\theta_{j+1/2}, \theta_{j-1/2}] \times [\phi_{k+1/2}, \phi_{k-1/2}]$. Integramos la ecuación (3.1) sobre este volumen:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_{i,j,k}} \mathbf{u} d^3x + \int_{\Sigma_{i,j,k}} \frac{\partial \mathbf{F}^l}{\partial x^l} d^3x = \int_{\Sigma_{i,j,k}} \mathbf{S} d^3x. \quad (3.3)$$

Aplicamos el teorema de la divergencia sobre el segundo término del lado izquierdo:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_{i,j,k}} \mathbf{u} d^3x + \int_{\partial\Sigma_{i,j,k}} \mathbf{F}^l d^3x = \int_{\Sigma_{i,j,k}} \mathbf{S} d^3x, \quad (3.4)$$

donde hemos asumido que el volumen de control $\Sigma_{i,j,k}$ está orientado con la base coordenada de los flujos. Para reescribir la ecuación (3.4) definimos las siguientes cantidades:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta r_i \Delta \theta \Delta \phi} \int_{\Sigma_{i,j,k}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d^3x, \quad (3.5)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta r_i \Delta \theta \Delta \phi} \int_{\Sigma_{i,j,k}} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) d^3x, \quad (3.6)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i\pm 1/2,j,k}^r = \frac{1}{\Delta \theta \Delta \phi} \int_{\theta_{j-1/2}}^{\theta_{j+1/2}} \int_{\phi_{k-1/2}}^{\phi_{k+1/2}} \mathbf{F}^r(\mathbf{u}(r(i \pm 1/2), \theta, \phi, t)) d\theta d\phi, \quad (3.7)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i,j\pm 1/2,k}^\theta = \frac{1}{\Delta r_i \Delta \phi} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{\phi_{k-1/2}}^{\phi_{k+1/2}} \mathbf{F}^\theta(\mathbf{u}(r, \theta(j \pm 1/2), \phi, t)) dr d\phi, \quad (3.8)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i,j,k\pm 1/2}^\phi = \frac{1}{\Delta r_i \Delta \theta} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{\theta_{j-1/2}}^{\theta_{j+1/2}} \mathbf{F}^\phi(\mathbf{u}(r, \theta, \phi(k \pm 1/2), t)) dr d\theta. \quad (3.9)$$

Las cantidades (3.7)-(3.8) son conocidas como flujos numéricos. Se trata de los promedios de los flujos conservados sobre las caras de nuestro volumen de control espacial, por lo que podemos reescribir la segunda integral como:

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Sigma_{i,j,k}} \mathbf{F}^l d^3x &= \Delta \theta \Delta \phi \left(\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2,j,k}^r - \tilde{\mathbf{F}}_{i-1/2,j,k}^r \right) + \Delta r_i \Delta \phi \left(\tilde{\mathbf{F}}_{i,j+1/2,k}^\theta - \tilde{\mathbf{F}}_{i,j-1/2,k}^\theta \right) \\ &+ \Delta r_i \Delta \theta \left(\tilde{\mathbf{F}}_{i,j,k+1/2}^\phi - \tilde{\mathbf{F}}_{i,j,k-1/2}^\phi \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

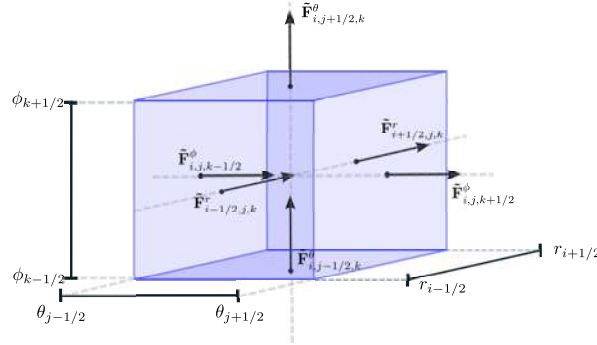


Figura 3.2: Integración de los flujos sobre el volumen de control.

Entonces podemos escribir una versión semidiscreta para las ecuaciones de balance de flujos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k} &= \tilde{\mathbf{S}}_{i,j,k} - \frac{\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2,j,k}^r - \tilde{\mathbf{F}}_{i-1/2,j,k}^r}{\Delta r_i} \\ &- \frac{\tilde{\mathbf{F}}_{i,j+1/2,k}^\theta - \tilde{\mathbf{F}}_{i,j-1/2,k}^\theta}{\Delta \theta} - \frac{\tilde{\mathbf{F}}_{i,j,k+1/2}^\phi - \tilde{\mathbf{F}}_{i,j,k-1/2}^\phi}{\Delta \phi}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como ya se mencionó, los volúmenes finitos nos brindan una mayor flexibilidad cuando definimos una malla y en la elección de condiciones iniciales, debido a que no estamos resolviendo las ecuaciones en cada punto de la malla, sino que estamos resolviendo las ecuaciones para las variables conservativas promediadas. Por lo tanto, debemos suponer que las soluciones sean integrables en cada celda de la malla en todo momento de la evolución.

En este trabajo se utiliza el esquema de volúmenes finitos y una variante de los métodos conocidos como tipo-Godunov. Este tipo de métodos fue propuesto con la observación de que cuando aplicamos volúmenes finitos, cada celda contigua define un problema de Riemann local con la discontinuidad en la intercelda. Estos métodos utilizan versiones aproximadas de la solución de Riemann o, si el problema lo permite, una solución completa.

SECCIÓN 3.2

Reconstrucción de variables

Las ecuaciones (3.11) proporcionan expresiones para la evolución de las variables conservativas, pero desconocemos sus promedios espaciales. Este problema se resuelve mediante métodos de reconstrucción de variables. Los métodos tipo-Godunov originalmente utilizan los valores en los vértices izquierdo y derecho de cada intercelda en la dirección de reconstrucción, asociándolos con el promedio espacial sobre el volumen de control.

Se han desarrollado diversas técnicas para calcular este promedio espacial. Los métodos más comunes son los limitadores de pendiente, que aproximan las variables mediante líneas rectas o polinomios. En este trabajo, se utilizan los limitadores lineales debido a su simplicidad y efectividad en la dirección genérica x . Para las direcciones θ y ϕ , la reconstrucción se aplica directamente con estas definiciones, con sutilezas adicionales en las fronteras.

El limitador Godunov utiliza el valor constante del centro de la celda para la reconstrucción:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2},j,k}^L &= \mathbf{u}_{i,j,k}, \\ \tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2},j,k}^R &= \mathbf{u}_{i+1,j,k}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Los limitadores como Minmod, MC y Superbee siguen una lógica similar, pero permi-

ten variaciones lineales de la pendiente entre celdas adyacentes. La elección de estos limitadores depende de la precisión y la capacidad de captura de discontinuidades deseada. Minmod, por ejemplo, elige la menor pendiente entre las interceldas, mientras que MC permite una mayor flexibilidad para elegir pendientes intermedias, reduciendo la disipación de los choques. A continuación se muestran los esquemas explícitos para cada uno de estos:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2},j,k}^L &= \mathbf{u}_{i,j,k} + \sigma_i(x_{i+\frac{1}{2}} - x_i), \\ \tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2},j,k}^R &= \mathbf{u}_{i+1,j,k} + \sigma_{i+1}(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+1}),\end{aligned}\tag{3.13}$$

- Minmod [20]:

$$\sigma_i = \minmod\left(\frac{\mathbf{u}_{i,j,k} - \mathbf{u}_{i-1,j,k}}{\Delta x}, \frac{\mathbf{u}_{i+1,j,k} - \mathbf{u}_{i,j,k}}{\Delta x}\right),\tag{3.14}$$

donde

$$\minmod(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| < |b| \text{ y } ab > 0 \\ b & \text{si } |a| > |b| \text{ y } ab > 0 \\ 0 & \text{si } ab \leq 0 \end{cases}.\tag{3.15}$$

- Diferencias centrales monotinizadas (MC) [21]:

$$\sigma_i = \minmod\left(\frac{\mathbf{u}_{i+1,j,k} - \mathbf{u}_{i-1,j,k}}{2\Delta x}, 2\frac{\mathbf{u}_{i,j,k} - \mathbf{u}_{i-1,j,k}}{\Delta x}, 2\frac{\mathbf{u}_{i+1,j,k} - \mathbf{u}_{i,j,k}}{\Delta x}\right),\tag{3.16}$$

donde

$$\minmod(a, b, c) = \begin{cases} \min(a, b, c) & \text{si } a, b, c > 0 \\ \max(a, b, c) & \text{si } a, b, c < 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.\tag{3.17}$$

- Superbee [22]:

$$\sigma_i = \maxmod(\sigma_i^{\mathbf{I}}, \sigma_i^{\mathbf{II}}),\tag{3.18}$$

donde

$$\sigma_i^{\mathbf{I}} = \minmod\left(2\frac{\mathbf{u}_{i,j,k} - \mathbf{u}_{i-1,j,k}}{\Delta x}, \frac{\mathbf{u}_{i+1,j,k} - \mathbf{u}_{i,j,k}}{\Delta x}\right),\tag{3.19}$$

$$\sigma_i^{\mathbf{II}} = \minmod\left(\frac{\mathbf{u}_{i,j,k} - \mathbf{u}_{i-1,j,k}}{\Delta x}, 2\frac{\mathbf{u}_{i+1,j,k} - \mathbf{u}_{i,j,k}}{\Delta x}\right),\tag{3.20}$$

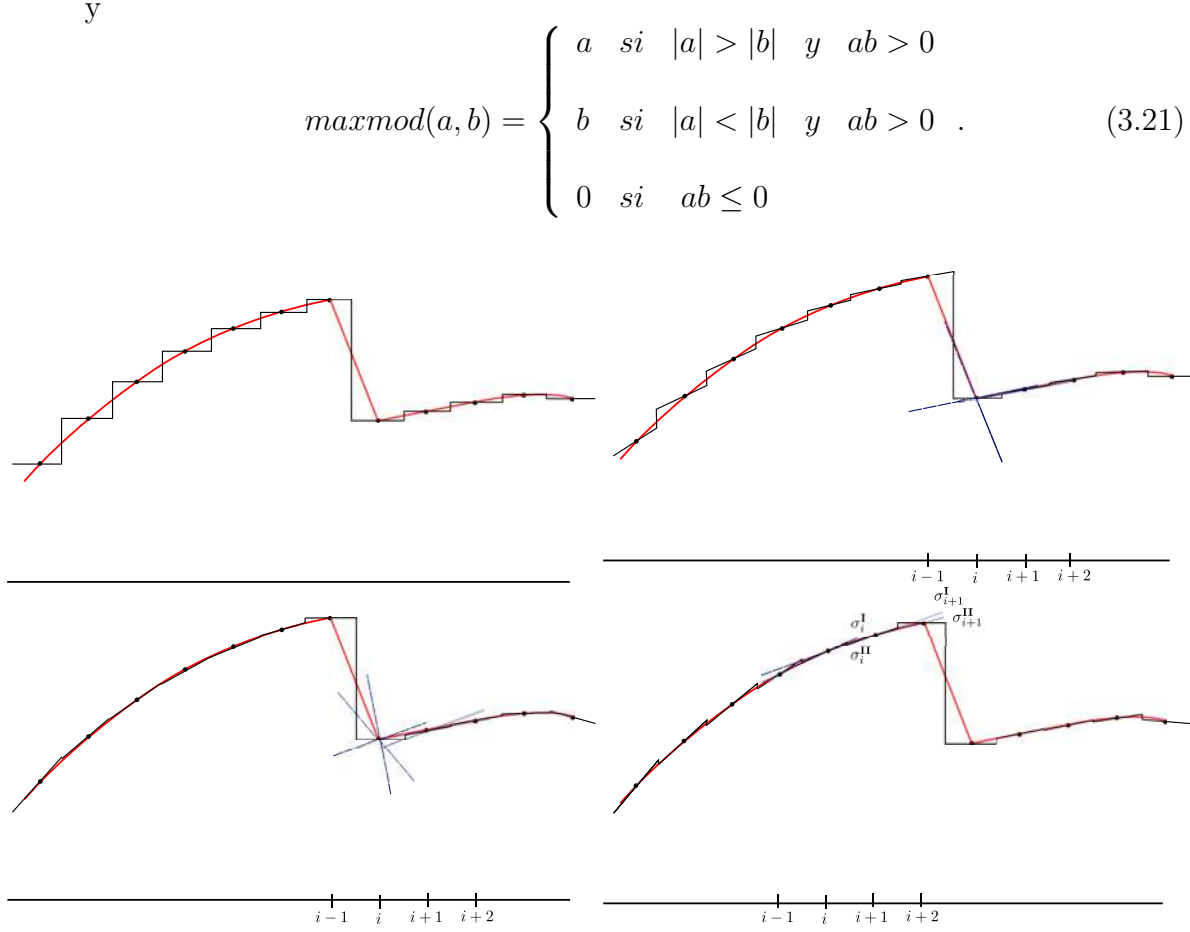


Figura 3.3: De izquierda a derecha y de arriba a abajo, se muestra el limitador Godunov, minmod, MC y superbee. En cada una de las imágenes se muestra un esquema de la reconstrucción lineal para cada limitador así como un ejemplo donde se muestran las pendientes necesarias para la reconstrucción. Las líneas punteadas sirven para la reconstrucción de $\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2},j,k}^R$ y las segmentadas para $\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2},j,k}^L$.

Se deben realizar ciertos cambios sobre la reconstrucción en las fronteras de la dirección θ y ϕ , aunque los métodos tipo-Godunov no necesitan las variables reconstruidas en estos puntos son muy importantes para el cálculo de las ecuaciones de evolución con el método de transporte restringido descrito en la sección 3.4. En general cuando se utilizan métodos de reconstrucción lineales y es necesario calcular estos puntos se utiliza el método Godunov con una consecuente pérdida de precisión en estos puntos, sin embargo la topología de nuestras coordenadas nos permite hacer uso de la periodicidad de las coordenadas angulares θ y ϕ , es decir, cuando calculamos $\tilde{\mathbf{u}}_{i,j,N_\phi+\frac{1}{2}}^R$ utilizamos los puntos $(i, j, 0)$, $(i, j, 1)$, $(i, j, 2)$ para completar el cálculo, de forma similar para la coordenada θ pero tomando en cuenta las consideraciones especiales que se deben tomar en cuenta debido a que estamos desplazando los puntos de los polos, estas consideraciones pueden encontrarse en la sección 3.6.

Para la dirección r , donde la malla no está equiespaciada, los métodos de reconstrucción deben adaptarse. Las derivadas se calculan con respecto a las diferencias de distancia h_1 y h_2 entre los puntos de la malla, como se muestra en las ecuaciones (3.22), (3.23) y (3.24).

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\mathbf{u}_{i,j,k} - \mathbf{u}_{i-1,j,k}}{r_i - r_{i-1}}, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\mathbf{u}_{i-1,j,k} - \mathbf{u}_{i,j,k}}{r_{i-1} - r_i}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{h_1 + h_2} \left(\frac{h_2}{h_1} (\mathbf{u}_{i,j,k} - \mathbf{u}_{i-1,j,k}) + \frac{h_1}{h_2} (\mathbf{u}_{i+1,j,k} - \mathbf{u}_{i,j,k}) \right). \quad (3.24)$$

En resumen, aunque el limitador Godunov es el más sencillo de implementar, puede introducir una disipación excesiva en la captura de discontinuidades. Los limitadores más avanzados como MC ofrecen una mejor precisión con una complejidad computacional razonable, adaptándose a las necesidades específicas de cada dirección en una simulación.

SECCIÓN 3.3

Solucionador de Riemann aproximado HLLE

No se puede encontrar una solución analítica general para los problemas de Riemann, excepto en los casos unidimensionales, y el trabajo computacional de calcularlos de forma numérica para cada problema en las interfases resulta incosteable en múltiples dimensiones. Bajo estas circunstancias, surgen los solucionadores de Riemann aproximados HLL, que nos proporcionan una solución basada en la propagación de las discontinuidades como ondas a las velocidades características del sistema. Específicamente, estamos utilizando el solucionador de Riemann HLLE (Harten-Lax-van Leer-Einfeldt), que considera únicamente la propagación de dos ondas características.

Los solucionadores de Riemann aproximados se basan en la estructura de eigenvalores de la matriz Jacobiana asociada a un sistema de ecuaciones tipo ley de balance de flujos. En nuestro caso, se dice que el solucionador es incompleto debido a que considera solo dos eigenvalores y no la descomposición característica completa. La idea central es suponer que, después del decaimiento de la discontinuidad inicial, solo dos ondas se propagan en direcciones opuestas con velocidades λ^- y λ^+ , generando así un estado

constante entre los valores $\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^L$ y $\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^R$ de la siguiente forma:

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}^L & \text{si } \lambda < \lambda^- \\ \tilde{\mathbf{u}}^{HLL E} & \text{si } \lambda^- < \lambda < \lambda^+ \\ \tilde{\mathbf{u}}^R & \text{si } \lambda > \lambda^+ \end{cases}, \quad (3.25)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{u}}^{HLL E} = \frac{\lambda^+ \tilde{\mathbf{u}}^R - \lambda^- \tilde{\mathbf{u}}^L + \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^L) - \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^R)}{\lambda^+ - \lambda^-}. \quad (3.26)$$

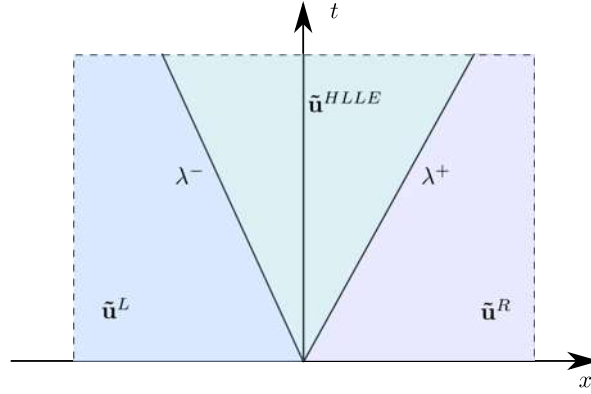


Figura 3.4: Se muestran los eigenvalores más rápidos λ^- y λ^+ , que corresponden a las velocidades con las que se propagan las ondas a la izquierda y derecha, respectivamente, en el plano $x-t$.

El objetivo de utilizar estos solucionadores es construir los flujos numéricos para las ecuaciones de evolución (3.11). Los flujos en la interfaz $x_{i+\frac{1}{2}}$ están dados por

$$\bar{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^{HLL E} = \frac{\lambda^+ \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^L) - \lambda^- \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^R) + \lambda^+ \lambda^- (\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^R - \tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^L)}{\lambda^+ - \lambda^-}, \quad (3.27)$$

donde λ^+ y λ^- se definen como:

$$\lambda^+ = \max(0, \lambda_j^L, \lambda_j^R), \quad \lambda^- = \min(0, \lambda_j^L, \lambda_j^R),$$

para el caso del sistema de ecuaciones de la MHD ideal (2.34)-(2.37), $j = 1, 2, \dots, 8$. La estructura característica de la MHD ideal en espacio-tiempos curvos se analiza en [23]. En este caso, requerimos los valores propios para la implementación del solucionador HLLE. Las velocidades características relacionadas con la propagación de perturbaciones de la densidad de materia tienen un valor propio comúnmente conocido como velocidad entrópica, y para cada dirección está dado por:

$$\lambda = \alpha v^i - \beta^i, \quad (3.28)$$

mientras que para las ondas de Alfvén:

$$\lambda = \frac{b^i \pm \sqrt{\rho_0 h + b^2 u^i}}{b^0 \pm \sqrt{\rho_0 h + b^2 u^0}}, \quad (3.29)$$

y las cuatro velocidades asociadas con las ondas magnetosónicas lentas y rápidas se obtienen de la solución de la siguiente ecuación de cuarto orden para λ :

$$\rho_0 h \left(\frac{1}{C_s^2} - 1 \right) a^4 - \left(\rho_0 h \frac{b^2}{C_s^2} \right) a^2 G + (b^i - b^0 \lambda)^2 G = 0, \quad (3.30)$$

donde

$$a \equiv \frac{W}{\alpha} (-\lambda + \alpha v^i - \beta^i), \quad G \equiv \frac{1}{\alpha^2} (-(\lambda + \beta^i)^2 + \alpha^2 \gamma^{ii}), \quad (3.31)$$

y C_s es la velocidad del sonido. Notemos que en el término γ^{ii} se omite la convención de suma de Einstein. No se ha encontrado una expresión práctica para las soluciones de la ecuación (3.30); sin embargo, podemos encontrar sus valores con el algoritmo de Newton-Raphson. En este algoritmo es muy importante proporcionar un buen valor inicial para asegurar la convergencia a la solución física. Para ello, consideremos que cualquier onda propagándose en el espacio-tiempo debe tener una velocidad máxima. Consideremos un frente de onda propagándose en el espacio en la dirección de $\hat{r}$ con velocidad constante λ . La 1-forma normal al frente de onda se puede escribir como $\phi_\mu = (-\lambda, 1, 0, 0)$. Esta 1-forma debe ser tipo-tiempo para conservar la estructura causal de nuestro sistema, es decir, que $\phi^\mu \phi_\mu < 0$. Contrayendo con la métrica (2.2), tenemos que:

$$\begin{aligned} \phi^\mu \phi_\mu &= g^{\mu\nu} \phi_\mu \phi_\nu = \lambda^2 + 2\beta^r \lambda - \alpha^2 \gamma^{rr} + (\beta^r)^2 < 0 \\ \implies & -\beta^r - \alpha \sqrt{\gamma^{rr}} < \lambda < -\beta^r + \alpha \sqrt{\gamma^{rr}}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

de forma análoga se cumple para las direcciones θ y ϕ . Las cotas de la ecuación (3.32) representan un buen valor inicial para buscar las raíces de la ecuación (3.30), ya que estas ondas tienden a tener una mayor velocidad característica en comparación con las ondas de Alfvén y las ondas entrópicas.

La elección del solucionador HLLE es una práctica común en la MHD en espacios-tiempos curvos, debido a que la precisión obtenida es comparable con solucionadores que utilizan una descomposición completa de la estructura característica, aunque estos últimos tienen una implementación más complicada [24].

SECCIÓN 3.4

Transporte de flujos restringidos

La MHD tiene una ecuación extra (2.18), que no es de evolución, sino una constricción, esta ecuación describe la ausencia de monopolos magnéticos. Una de las principales dificultades en la solución numérica en las simulaciones de la MHD ideal es la aparición de errores numéricos, que al acumularse durante la evolución llevan a la violación de la constricción $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Uno de los métodos para combatir este problema es el algoritmo de transporte de flujos restringidos, que introduce una viscosidad artificial [25]. En el desarrollo de esta tesis se utilizó un esquema simplificado conocido como flux-CT basado en los flujos numéricos calculados sobre las aristas del dominio numérico, descrito en [26] y [8].

Partimos de reescribir la versión de (2.18) integrado sobre el volumen de control Σ y aplicando el teorema de la divergencia

$$\int_{\Sigma} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \int_{\partial\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \sum_{l=1}^6 \int_{A_l} \vec{B} \cdot d\vec{A}_l = 0, \quad (3.33)$$

donde identificamos las áreas A_l con las caras de la Figura 3.5 como $A_1 = A_{i+\frac{1}{2},j,k}$, $A_2 = A_{i-\frac{1}{2},j,k}$, $A_3 = A_{i,j+\frac{1}{2},k}$, $A_4 = A_{i,j-\frac{1}{2},k}$, $A_5 = A_{i,j,k+\frac{1}{2}}$ y $A_6 = A_{i,j,k-\frac{1}{2}}$. Este esquema busca evolucionar las componentes de la intensidad de campo magnético $\vec{B}$ en función de los promedios sobre las caras del dominio numérico, al reescribir la ecuación de inducción (2.19) en su forma integral sobre dichas caras, notemos que puede ser escrita para un espacio-tiempo fijo como:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{\Omega}, \quad (3.34)$$

donde $\vec{\Omega} = (\alpha \vec{v} - \vec{\beta}) \times \vec{B}$. Este vector representa los flujos conservados para el campo magnético descritos en (2.35), por lo que $\Omega^i = F^{ij}$, donde F^{ij} es el flujo conservado en la dirección $i = r, \theta, \phi$ para la componente del campo magnético en la dirección $j = r, \theta, \phi$. Tomando una de las caras mostradas en la Figura 3.5, a la cual denominamos A a un tiempo t

$$\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{\Omega}) \cdot d\vec{A}, \quad (3.35)$$

aplicando el teorema de Stokes y teniendo en cuenta que podemos sacar la derivada de la integral debido a que estamos integrando a un tiempo fijo

$$\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{\partial A} \vec{\Omega} \cdot d\vec{l}. \quad (3.36)$$

Haciendo la integración para las caras A_1 , A_2 y A_3

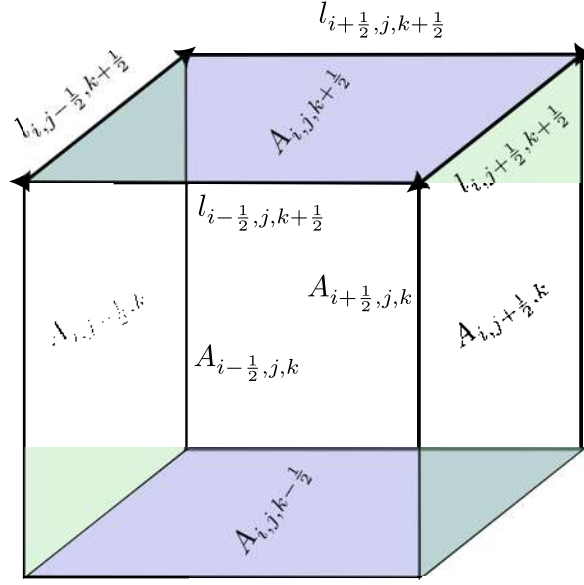


Figura 3.5: Representación de un volumen de control espacial $\Sigma_{i,j,k}$ marcando las caras del dominio y las aristas que conforman el perímetro de la cara $A_{i,j,k+\frac{1}{2}}$.

$$\frac{d}{dt} B_{i+\frac{1}{2},j,k}^r = \frac{\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^\phi - \Omega_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^\phi}{\Delta\theta} - \frac{\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^\theta - \Omega_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^\theta}{\Delta\phi}, \quad (3.37)$$

$$\frac{d}{dt} B_{i,j+\frac{1}{2},k}^\theta = \frac{\Omega_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^r - \Omega_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^r}{\Delta\phi} - \frac{\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^\phi - \Omega_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^\phi}{\Delta r_i}, \quad (3.38)$$

$$\frac{d}{dt} B_{i,j,k+\frac{1}{2}}^\phi = \frac{\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^\theta - \Omega_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^\theta}{\Delta r_i} - \frac{\Omega_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^r - \Omega_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^r}{\Delta\theta}, \quad (3.39)$$

donde

$$\Omega_{i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2},k}^\phi = \int_{\phi(k-\frac{1}{2})}^{\phi(k+\frac{1}{2})} \Omega^\phi \left(r(i+\frac{1}{2}), \theta(j\pm\frac{1}{2}), \phi \right) d\phi, \quad (3.40)$$

$$\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k\pm\frac{1}{2}}^\theta = \int_{\theta(j-\frac{1}{2})}^{\theta(j+\frac{1}{2})} \Omega^\theta \left(r(i+\frac{1}{2}), \theta, \phi(k\pm\frac{1}{2}) \right) d\theta, \quad (3.41)$$

$$\Omega_{i,j+\frac{1}{2},k\pm\frac{1}{2}}^r = \int_{r(i-\frac{1}{2})}^{r(i+\frac{1}{2})} \Omega^r \left(r, \theta(j+\frac{1}{2}), \phi(k\pm\frac{1}{2}) \right) dr. \quad (3.42)$$

Los cantidades (3.40)-(3.42) se calculan como el promedio aritmético de los flujos numéricos de las caras adyacentes a la arista donde se está calculando la integral.

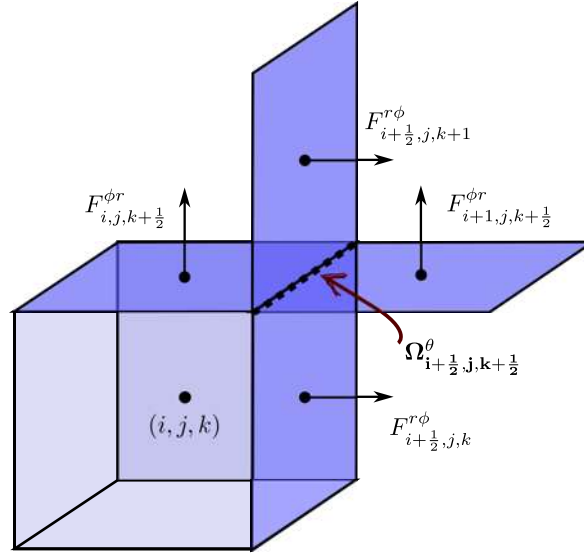


Figura 3.6: Se muestran los flujos numéricos necesarios para el calculo de $\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}$.

En la Figura 3.6 se muestra un ejemplo del cálculo de $\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}$. Es importante notar que $F^{ij} = -F^{ji}$, por lo que podemos escribir

$$\Omega_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^r = \frac{1}{4} \left(F_{i,j+\frac{1}{2},k}^{\theta\phi} + F_{i,j+\frac{1}{2},k+1}^{\theta\phi} - F_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{\phi\theta} - F_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}^{\phi\theta} \right), \quad (3.43)$$

$$\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^\theta = \frac{1}{4} \left(F_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{r\phi} + F_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}^{r\phi} - F_{i+\frac{1}{2},j,k}^{r\phi} - F_{i+\frac{1}{2},j,k+1}^{r\phi} \right), \quad (3.44)$$

$$\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^\phi = \frac{1}{4} \left(F_{i+\frac{1}{2},j,k}^{r\theta} + F_{i+\frac{1}{2},j+1,k}^{r\theta} - F_{i,j+\frac{1}{2},k}^{r\theta} - F_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^{r\theta} \right). \quad (3.45)$$

Los flujos involucrados en las ecuaciones (3.43)-(3.45), son calculados con (3.27). Para calcular la evolución en un esquema centrado en la celda como es el que se está utilizando, calculamos el promedio aritmético en cada dirección

$$B_{i,j,k}^r = \frac{1}{2} \left(B_{i-\frac{1}{2},j,k}^r + B_{i+\frac{1}{2},j,k}^r \right), \quad (3.46)$$

$$B_{i,j,k}^\theta = \frac{1}{2} \left(B_{i,j-\frac{1}{2},k}^\theta + B_{i,j+\frac{1}{2},k}^\theta \right), \quad (3.47)$$

$$B_{i,j,k}^\phi = \frac{1}{2} \left(B_{i,j,k-\frac{1}{2}}^\phi + B_{i,j,k+\frac{1}{2}}^\phi \right). \quad (3.48)$$

Para verificar que no existen violaciones en la restricción se monitorea (3.33), ésta debe de permanecer dentro de el error numérico.

SECCIÓN 3.5

Evolución temporal

Para resolver las ecuaciones de la MHD se hace uso del método de líneas (MoL), que consiste en escribir al sistema de ecuaciones diferenciales parciales como un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en el tiempo, para lo que se asume que el sistema se puede escribir de forma semidiscreta. Utilizando (3.11) podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = & - \frac{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{r}}_{i+\frac{1}{2},j,k}^{\text{HLL E}} - \tilde{\mathbf{F}}^{\text{r}}_{i-\frac{1}{2},j,k}^{\text{HLL E}}}{\Delta r_i} - \frac{\tilde{\mathbf{F}}^{\theta}_{i,j+\frac{1}{2},k}^{\text{HLL E}} - \tilde{\mathbf{F}}^{\theta}_{i,j-\frac{1}{2},k}^{\text{HLL E}}}{\Delta \theta} \\ & - \frac{\tilde{\mathbf{F}}^{\phi}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{\text{HLL E}} - \tilde{\mathbf{F}}^{\phi}_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{\text{HLL E}}}{\Delta \phi} + \tilde{S}_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} = [\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}})]_{i,j,k}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

$[\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}})]_{i,j,k}$ es un operador que contiene las derivadas numéricas espaciales de los flujos numéricos y las fuentes en forma discreta. Los flujos numéricos se calculan utilizando el resolutor de Riemann HLL E, (3.49) se integra de t^n a t^{n+1} y se repite para todo i, j y k para tener al final la solución en todo el espacio tetradimensional. Existen diversas maneras de integrar la versión semidiscreta, entre los que están los métodos Runge-Kutta de m-etapas, y que de forma recursiva podemos escribirlos como

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}^{(0)} &= \bar{\mathbf{u}}^n, \\ \bar{\mathbf{u}}^{(p)} &= \sum_{q=0}^{p-1} (\alpha_{pq} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} + \Delta t \beta_{pq} [\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}^{(q)})]_{i,j,k}), \\ \bar{\mathbf{u}}^{n+1} &= \bar{\mathbf{u}}^{(m)}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde α_{pq} y β_{pq} son constantes. Sin embargo los métodos Runge-Kutta de segundo y tercer orden son los más usados debido a que satisfacen las condiciones para cumplir la propiedad TVD (*total variation diminishing*) [27]

$$\alpha_{pq} \geq 0, \quad \beta_{pq} \geq 0, \quad \sum_{q=0}^{p-1} \alpha_{pq} = 1, \quad (3.51)$$

y la condición para un máximo de la constante de Courant-Friedrichs-Lewy definida como $C_{CFL} = \Delta t \lambda_{\max}^n / \Delta x$, donde $\lambda_{\max}^n$ es la velocidad característica del sistema en el paso temporal n

$$C_{CFL, \max} = \min_{pq} \left(\frac{\alpha_{pq}}{\beta_{pq}} \right), \quad (3.52)$$

para los métodos Runge-Kutta de segundo y tercer orden $C_{CFL,max} = 1$. La propiedad TVD nos asegura el amortiguamiento de oscilaciones de alta frecuencia en la solución cuando se integre en el tiempo, en el caso de haber una discontinuidad este tipo de métodos pueden suavizarla durante la evolución. A continuación se presenta el método de Runge-Kutta de tercer orden

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{u}}^{(0)} &= \bar{\mathbf{u}}^n, \\
 \bar{\mathbf{u}}^{(1)} &= \bar{\mathbf{u}}^{(0)} + \Delta t [\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}^{(0)})]_{i,j,k}, \\
 \bar{\mathbf{u}}^{(2)} &= \frac{1}{4} (3\bar{\mathbf{u}}^{(0)} + \bar{\mathbf{u}}^{(1)} + \Delta t [\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}^{(1)})]_{i,j,k}), \\
 \bar{\mathbf{u}}^{n+1} &= \frac{1}{3} (\bar{\mathbf{u}}^{(0)} + 2\bar{\mathbf{u}}^{(2)} + 2\Delta t [\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}^{(2)})]_{i,j,k}).
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

En la practica la constante de Courant se considera constante para poder establecer el paso temporal como $\Delta t = C_{CFL} \min(\Delta r_i, \Delta \theta, \Delta \phi)$.

SECCIÓN 3.6

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera son un ingrediente esencial en la solución de ecuaciones diferenciales parciales. Junto con las ecuaciones y las condiciones iniciales, determinan la evolución del sistema. Cuando estas condiciones corresponden a superficies que delimitan el espacio de búsqueda de soluciones, nos permiten modificar el comportamiento del sistema. Sin embargo, cuando no delimitan el espacio, están completamente determinadas por la topología del dominio.

En el contexto de coordenadas esféricas, las únicas fronteras que representan superficies que delimitan el espacio son el cascarón esférico de radio r_{max} y la frontera de la escisión, que corresponde a otro cascarón de radio r_{min} .

Para la frontera de la escisión, es crucial asegurar que el plasma siga la misma tendencia de comportamiento que en los demás puntos dentro del horizonte de eventos, evitando así posibles reflexiones sobre la escisión. Debido a la naturaleza no lineal del comportamiento del plasma y las significativas contribuciones geométricas en estos puntos, no es suficiente utilizar las condiciones de frontera de flujo saliente convencionales. Por ello, recurrimos a una interpolación de Lagrange de tercer orden sobre las variables como

función de la coordenada radial:

$$\begin{aligned}
 \vec{U}_{0,j,k}^n &= L_1 \vec{U}_{1,j,k}^n + L_2 \vec{U}_{2,j,k}^n + L_3 \vec{U}_{3,j,k}^n, \\
 L_1 &= e^{-2\Delta r} + e^{-\Delta r} + 1, \\
 L_2 &= -e^{-3\Delta r} (e^{2\Delta r} + e^{\Delta r} + 1), \\
 L_3 &= e^{-3\Delta r},
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

donde los coeficientes L_1 , L_2 y L_3 han sido calculados teniendo en cuenta la no uniformidad en la discretización de la coordenada radial. Por otro lado, para la frontera de r_{max} , debemos considerar el problema específico que se está modelando y elegir si necesitamos condiciones entrantes, salientes o una combinación de ambas:

$$\vec{U}_{N_r,j,k}^n = \vec{U}_{N_r,j,k}^{n-1}, \quad \text{Flujo entrante,} \tag{3.55}$$

$$\vec{U}_{N_r,j,k}^n = \vec{U}_{N_r-1,j,k}^n, \quad \text{Flujo saliente.} \tag{3.56}$$

Para simular un proceso de acreción esférica, es adecuado imponer condiciones de flujo entrante en toda la superficie de r_{max} , simulando una entrada de materia con velocidad constante. En otros casos, como la acreción de Bondi-Hoyle, se define una zona del cascarón de donde proviene el viento y se imponen condiciones de frontera entrante en esa zona específica, mientras que en el resto de la superficie se aplican condiciones de flujo saliente para evitar efectos de rebote.

Existen dos estrategias principales para tratar la frontera del ángulo polar, la elección de una depende de si estamos considerando al eje polar como nodos del dominio o si estamos desplazando los nodos para evitar esta zona. Cuando consideramos el eje polar basta con realizar una extrapolación con los datos adyacentes de esta misma coordenada, sin embargo esta estrategia conlleva ciertos problemas adicionales derivados de que en este lugar geométrico las coordenadas no son invertibles, así el determinante de la métrica se anula y algunas cantidades geométricas divergen, dificultando la recuperación de las variables primitivas. Aunque podemos tener soluciones satisfactorias usando esta técnica mediante aproximaciones como se realizó en [28], no podemos librarnos de los errores numéricos de dichas aproximaciones que se acentúan cuando la dinámica es especialmente fuerte en esta zona.

Por otro lado, cuando desplazamos el dominio evitando los ejes polares podemos utilizar las propiedades geométricas de nuestro dominio para determinar de forma exacta los valores en las fronteras del ángulo polar. Lo primero que debemos de notar es que todos los puntos de la malla $(r, \theta(N_\theta), \phi)$, $(r, \theta(0), \phi)$ se encuentran duplicados en los puntos $(r, \theta(N_\theta - 1), \phi + \pi)$, $(r, \theta(1), \phi + \pi)$, es decir, las superficies de $\phi = cte.$ y $\phi = \pi + cte.$ se encuentran solapadas, como se muestra en la Figura 3.7, para asegurar el correcto solape se añade la restricción de que el número de puntos en la coordenada

axial N_ϕ debe ser impar. Por otro lado, cuando desplazamos el dominio para evitar los ejes polares, podemos utilizar las propiedades geométricas de nuestro dominio para determinar de manera exacta los valores en las fronteras del ángulo polar. Es importante notar que todos los puntos de la malla $(r, \theta(N_\theta), \phi)$ y $(r, \theta(0), \phi)$ están duplicados en los puntos $(r, \theta(N_\theta - 1), \phi + \pi)$ y $(r, \theta(1), \phi + \pi)$, respectivamente. Es decir, las superficies $\phi = cte.$ y $\phi = \pi + cte.$ están superpuestas, como se muestra en la Figura 3.7. Para asegurar el correcto solapamiento, se añade la restricción de que el número de puntos en la coordenada axial N_ϕ debe ser impar. Se copia la información de las variables en los

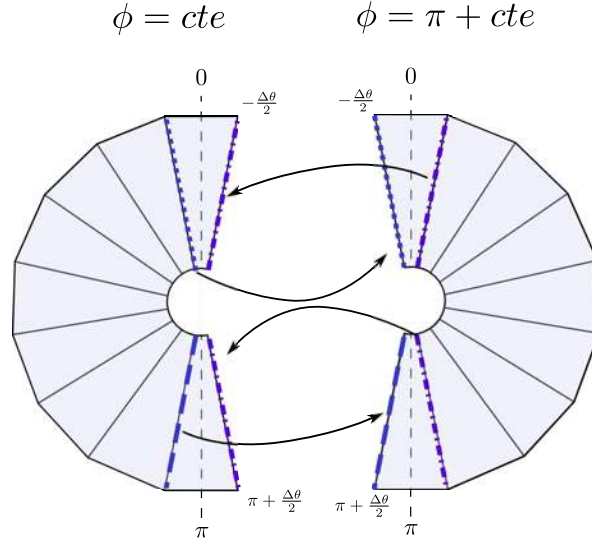


Figura 3.7: Estrategia para identificar las fronteras numéricas de θ .

puntos $(r, \theta(N_\theta - 1), \phi + \pi)$, $(r, \theta(1), \phi + \pi)$ debido a que no se tratan de fronteras en el dominio numérico y por lo tanto han sido calculados de forma correcta a diferencia de sus copias en su superficie correspondiente. Aunque de hecho los puntos de la malla en estas posiciones representan el mismo lugar geométrico, la orientación de la base coordenada no es la misma, cumplen simetría por reflexión respecto al eje polar, como se muestra en la Figura 3.8. Las fronteras son definidas con la información de los puntos $(r, \theta(N_\theta - 1), \phi + \pi)$ y $(r, \theta(1), \phi + \pi)$ porque no son fronteras en el dominio numérico y, por lo tanto, han sido calculadas correctamente, a diferencia de sus copias en su superficie correspondiente. Aunque estos puntos de la malla representan el mismo lugar geométrico, la orientación de la base coordenada no es la misma, cumpliendo simetría por reflexión respecto al eje polar, como se muestra en la Figura 3.8. En resumen, los factores de paridad con los que copiamos los datos de su superficie correspondiente se pueden ver en la Tabla 3.1, adaptada de [29].

En la práctica es necesario añadir puntos fantasma a la coordenada θ para poder utilizar los reconstructores descritos en la sección 3.2, además de ser necesarios para la correcta evolución del método de líneas. La estrategia no cambia cuando añadimos estos puntos, la forma específica de copiado puede entenderse de forma visual en la Figura 3.9.

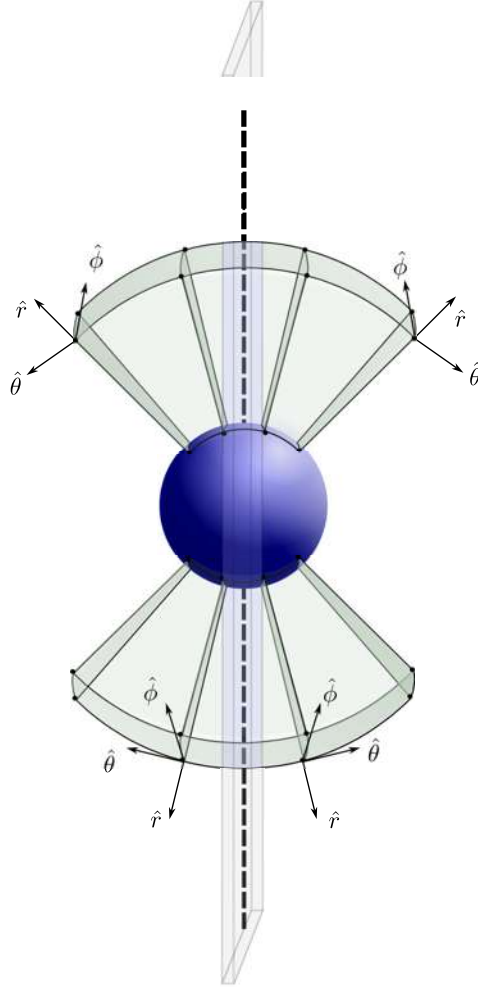


Figura 3.8: Representación de la simetría que cumplen la base coordinada cuando pasamos de una superficie de $\phi = cte.$ a una de $\phi = cte + \pi$

Finalmente, la frontera de la coordenada axial se llena imponiendo periodicidad sobre las variables. Para la definición de nuestro dominio, las condiciones de periodicidad específicas son:

$$\vec{U}_{i,j,N_\phi}^n = \vec{U}_{i,j,1}^n, \quad (3.57)$$

$$\vec{U}_{i,j,0}^n = \vec{U}_{i,j,N_\phi-1}^n. \quad (3.58)$$

Tensor de rango 0	Paridad
ρ	+
Tensores de rango 1	Paridad
V_r	+
V_θ	-
V_ϕ	+
Tensores de rango 2	Paridad
T_{rr}	+
$T_{r\theta}$	-
$T_{r\phi}$	+
$T_{\theta\theta}$	+
$T_{\theta\phi}$	-
$T_{\phi\phi}$	+

Cuadro 3.1: Factores de paridad para las componentes de los tensores respecto a una reflexión sobre el eje polar. Las componentes covariantes y contravariantes de cada tensor tienen el mismo factor de paridad.

SECCIÓN 3.7

Recuperación de las variables primitivas

Una vez que hemos evolucionado el sistema, tenemos la información de las variables conservativas en el tiempo t^{n+1} , pero desconocemos las variables primitivas en este instante. Las variables primitivas no son solo necesarias para interpretar la información física del sistema, sino que también los flujos numéricos se expresan en términos de estas variables. Para determinar cómo han cambiado en este tiempo, es necesario invertir el sistema de ecuaciones (2.34). No se ha logrado invertir este sistema de forma analítica para un espacio-tiempo general y alguna ecuación de estado específica. Incluso en el caso del espacio-tiempo de Minkowski y una ecuación de estado de gas ideal, es necesario utilizar métodos numéricos para recuperar las variables primitivas a partir de las variables conservativas, como se muestra en [30].

Se han desarrollado diferentes estrategias para pasar de las variables conservativas a las primitivas. La elección de una u otra depende principalmente de la ecuación de estado con la que se esté trabajando, ya que en los casos donde hay ecuaciones de estado tabuladas, se requiere un mayor tiempo computacional para invertir dicha ecuación. Algunos métodos disminuyen esta cantidad de inversiones y otros ofrecen mayor estabilidad en la recuperación de variables. Algunos de estos métodos se recopilan en [31]. En nuestro caso, estamos trabajando con un esquema adaptado de [32], donde se resuelve

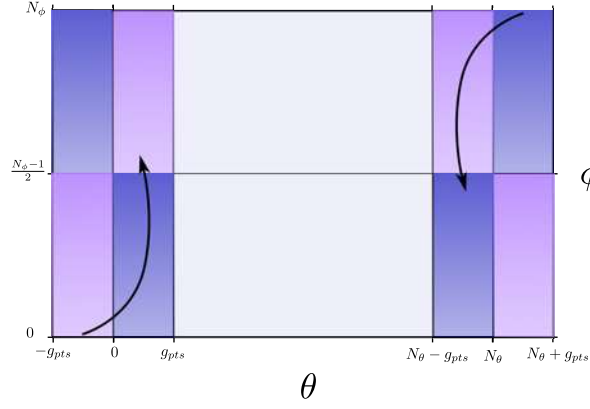


Figura 3.9: Copiado de datos cuando tenemos puntos fantasma.

un sistema de dos ecuaciones acopladas, pero que en el caso de una ecuación de estado de gas ideal se reduce a una sola ecuación que puede ser resuelta con métodos usuales para encontrar raíces.

Primero escribimos el módulo de los momentos conservados y la energía conservada τ como:

$$\begin{aligned} S^2 &= S^i S_i = \gamma^{ij} S_i S_j \\ &= (\rho h W^2 + b^2 W^2) v^2 + (\alpha b^0)^2 (b^2 (1 - 2W^2) - 2\rho h W^2 + (\alpha b^0)^2), \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\tau = -D + \rho h W^2 + B^2 \left(1 - \frac{1}{2W}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{B^i S_i}{\rho h W^2}\right)^2 - p, \quad (3.60)$$

donde v^2 es la norma de la velocidad calculada como $v^2 = \gamma_{ij} v^i v^j$. Para obtener la ecuación (3.60) utilizamos la identidad $B^i S_i = \rho h W^2 \alpha b^0$, que puede verificarse realizando la contracción y reduciendo con las definiciones para b^μ . Definimos la variable auxiliar $Z := \rho h W^2$ y reescribimos la ecuación (3.59) en términos de esta nueva variable y v^2 :

$$v^2 (B^2 + Z)^2 - \frac{(B^i S_i)^2 (B^2 + 2Z)}{Z^2} - S^2 = 0, \quad (3.61)$$

$$\tau + D - \frac{B^2}{2} (1 + v^2) + \frac{(B^i S_i)^2}{2Z^2} - Z + p = 0. \quad (3.62)$$

Podemos notar que de la ecuación (3.61) se puede obtener una expresión para v^2 como función de Z , S^2 , $B^i S_i$ y B^2 . Estas tres últimas cantidades se obtienen con la información

de las variables conservativas y elementos del tensor de métrica espacial. Por otro lado, considerando que el plasma obedece una ecuación de estado de gas ideal, la presión se puede escribir como función de Z y v^2 :

$$v^2 = \frac{S^2 Z^2 + (B^i S_i)^2 (2Z + B^2)}{Z^2 (Z + B^2)^2}, \quad (3.63)$$

$$p = \left(1 - \frac{1}{\Gamma}\right) \left(Z (1 - v^2) - D \sqrt{1 - v^2}\right). \quad (3.64)$$

Entonces, podemos escribir (3.60) como una función de la variable auxiliar Z y de las variables conservativas:

$$f(Z) := \tau + D - \frac{B^2}{2} (1 + (v(Z))^2) + \frac{(B^i S_i)^2}{2Z^2} - Z + p(Z) = 0. \quad (3.65)$$

Aunque se trata de una ecuación algebraica, no se han encontrado sus raíces de forma analítica, por lo que se recurrió a un algoritmo numérico iterativo para resolverla. El algoritmo escogido es una combinación de Newton-Raphson (NR) y bisección, debido a que NR ofrece rapidez y la bisección ayuda en casos donde estamos cerca de extremos locales de la función.

Para implementar este método, lo primero que se debe hacer es encontrar un intervalo que contenga una raíz. Este es uno de los pasos cruciales no solo para su convergencia, sino para asegurar que el valor encontrado sea una solución aceptable físicamente. Para esto, suponemos que Z en el paso temporal t^{n+1} es cercano al valor de Z en el paso temporal inmediato anterior, es decir:

$$Z^n - \delta < Z^{n+1} < Z^n + \delta, \quad (3.66)$$

la elección de δ es heurística. En el código, se eligió δ como un 30 % del valor de Z^n .

Una vez que conocemos el valor de Z , calculamos W con la ecuación (3.63), ρ y h directamente de la definición de la variable auxiliar, p con la ecuación (3.64), y las componentes de la velocidad escribiendo la definición de momentos conservados en función de las variables conservativas. El orden de la reescritura y las fórmulas específicas es el siguiente:

$$W = \frac{Z(Z + B^2)}{\sqrt{Z^2(Z + B^2)^2 - (S^2 Z^2 + (B^i S_i)^2(2Z + B^2))}}, \quad (3.67)$$

$$\rho = \frac{D}{W}, \quad (3.68)$$

$$h = \frac{Z}{DW}, \quad (3.69)$$

$$p = \left(1 - \frac{1}{\Gamma}\right) \left(\frac{Z - DW}{W^2}\right), \quad (3.70)$$

$$v^i = \frac{\gamma^{ij} S_j + B^j S_j B^i / Z}{Z + B^2}. \quad (3.71)$$

Existen otros métodos para la recuperación de variables primitivas, como el método de Newman-Hamlin [33]. Sin embargo, al realizar la misma simulación con idéntica configuración numérica, resulta en un leve retraso en cada paso temporal comparado con el esquema descrito en esta sección, lo que se traduce en decenas de horas de cómputo adicionales por simulación. Por otro lado, el método de Newman-Hamlin tampoco representa una mejora en la estabilidad, ya que no asegura llegar a una solución. En contraste, el método de NR combinado con bisección asegura una solución siempre que se encuentre en el intervalo inicial.

Capítulo 4

Acreción

SECCIÓN 4.1

Condiciones iniciales para el fluido

4.1.1 Acreción esférica

Las condiciones iniciales para las variables hidrodinámicas se construyen a partir de la solución para un flujo radial estacionario de un fluido perfecto en un agujero negro de Schwarzschild, conocida como acreción de Michel, establecida en [2]. Para el cálculo de estas soluciones en coordenadas de Eddington-Finkelstein (EF), se sigue el procedimiento presentado en [34]. Las condiciones iniciales están inspiradas en las utilizadas en [5], donde se resuelven las ecuaciones de la hidrodinámica en un espacio-tiempo curvo con simetría esférica de forma numérica, partiendo de condiciones iniciales con densidad constante y llegando a las soluciones estacionarias de Michel.

El propósito de iniciar con esta distribución del fluido es buscar soluciones que cumplan con la condición de tener una entrada regular de materia en todas las direcciones. La **hipótesis** es que esta configuración evolucionada sobre un espacio tiempo de Kerr llegará a una distribución de materia estacionaria y atractora.

Las coordenadas de EF, al igual que las coordenadas de Kerr-Schild, son penetrantes en el horizonte y equivalentes cuando el parámetro de espín es $a = 0$. Además, cuando $r \rightarrow \infty$, para ambos espacios-tiempos la métrica tiende al espacio-tiempo de Minkowski. El elemento de línea para un agujero negro de Schwarzschild en coordenadas de EF se escribe como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{4M}{r} dt dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.1)$$

Identificando (4.1) con (2.1), obtenemos la función lapso, el vector de corrimiento y la 3-métrica tipo espacio para estas coordenadas:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}}, \quad (4.2)$$

$$\beta^i = \left(\frac{2M}{r} \frac{1}{1 + \frac{2M}{r}}, 0, 0, 0 \right), \quad (4.3)$$

$$\gamma_{ij} = \text{diag} \left(\frac{2M}{r} \frac{1}{1 + \frac{2M}{r}}, r^2, r^2 \sin^2 \theta \right). \quad (4.4)$$

La idea original de Michel es integrar la ecuación para la conservación de la masa (2.22) y la divergencia del tensor de energía-momento (2.22) suponiendo simetría esférica, de donde se obtiene:

$$\frac{d(\sqrt{-g})\rho_0 u^r}{dr} = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{d(\sqrt{-g})T_t^r}{dr} = 0, \quad (4.6)$$

donde g es el determinante del tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Para el caso del agujero negro de Schwarzschild en coordenadas de EF se cumple que $\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{\gamma} = r^2 \sin \theta$. Para un fluido perfecto el tensor de energía-momento está definido por (2.25), entonces las ecuaciones (4.5) y (4.6) toman la forma:

$$r^2 \rho_0 u^r = C_1, \quad (4.7)$$

$$r^2 \rho_0 h u^r u_t = C_2, \quad (4.8)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. Tomando los diferenciales totales de las expresiones (4.7) y (4.8) se obtiene:

$$\frac{d\rho_0}{\rho_0} + \frac{du^r}{u^r} + 2\frac{dr}{r} = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{d(\rho_0 h)}{\rho_0 h} + 2\frac{dr}{r} + \frac{du^r}{u^r} + \frac{du_t}{u_t} = 0, \quad (4.10)$$

restando ambas expresiones se obtiene:

$$\frac{d(\rho_0 h)}{\rho_0 h} - \frac{d\rho_0}{\rho_0} + \frac{du_t}{u_t} = 0, \quad (4.11)$$

y podemos reescribir los primeros dos términos de la ecuación anterior como:

$$\frac{d(\rho_0 h)}{\rho_0 h} = d, \ln(\rho_0 h) = \frac{d, \ln(\rho_0 h)}{d, \ln \rho_0} d, \ln \rho_0, \quad (4.12)$$

$$\frac{d\rho_0}{\rho_0} = d, \ln \rho_0, \quad (4.13)$$

así obtenemos la siguiente condición:

$$\left[\frac{d, \ln(\rho_0 h)}{d, \ln \rho_0} - 1 \right] d, \ln \rho_0 + \frac{du_t}{u_t} = 0. \quad (4.14)$$

A partir de la condición de normalización $u^\mu u_\mu = -1$, se puede encontrar una expresión para u_t :

$$(u_t)^2 = -g_{tt} + (u^r)^2, \quad (4.15)$$

y con ayuda de (4.15) se obtiene el siguiente desarrollo:

$$\frac{du_t}{u_t} = \frac{u^r}{(u_t)^2} du^r + \frac{M}{r^2 (u_t)^2} dr. \quad (4.16)$$

Finalmente, se sustituye (4.16) en (4.14) y haciendo uso de (4.9) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{du^r}{u^r} \left[V^2 - \left(\frac{u^r}{u_t} \right)^2 \right] + \frac{dr}{r} \left[2V^2 - \frac{M}{r(u_t)^2} \right] = 0, \quad (4.17)$$

donde $V^2 = d, \ln(\rho_0 h)/d, \ln \rho_0 - 1$. Esta ecuación es conocida como ecuación de viento. Si cualquiera de los dos paréntesis se hace cero, corresponde a un punto de retorno. Sin embargo, las soluciones que pasan por los puntos críticos donde ambos paréntesis se anulan representan una solución donde el material está cayendo al agujero negro [28]. Los valores críticos de u^r o V se obtienen de las siguientes relaciones:

$$(u_c^r)^2 = \frac{M}{2r_c}, \quad V_c^2 = \frac{(u_c^r)^2}{(u_c^r)^2 + 1 - \frac{2M}{r_c}}. \quad (4.18)$$

Las cantidades quedan determinadas una vez conocido el valor del radio crítico r_c . Por otro lado, se considera que el fluido obedece la ecuación de estado para un gas politrópico $p = K\rho_0^\Gamma$, porque se cumple la condición de isentroía. Dado el valor de la densidad crítica ρ_c y la constante adiabática, es posible determinar la constante politrópica con el procedimiento presentado por Michel, definiendo la función $T = p/\rho_0$ y escribiendo a V_c^2 en términos de esta nueva función:

$$V_c^2 = \frac{(1+n)T_c}{n(1+(1+n)T_c)}, \quad (4.19)$$

donde n es el índice politrópico definido por $n = 1/(\Gamma - 1)$. De esta última ecuación se obtiene una expresión para la constante politrópica:

$$K = T_c \rho_c^{1-\Gamma} = -\frac{nV_c^2}{(1+n)(nV_c^2 - 1)} \rho_c^{1-\Gamma}. \quad (4.20)$$

Una vez conocida la constante politrópica, se calculan las constantes de integración C_1 y C_2 , y finalmente se resuelven conjuntamente (4.7) y (4.8). De forma explícita, la ecuación a resolver es:

$$\left(1 + (n+1)K\rho_0^{\frac{1}{\Gamma}} \right)^2 \left(\frac{C_1^2}{\rho_0^2 r^4} + 1 - \frac{2M}{r} \right) - \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 = 0. \quad (4.21)$$

No se conoce una solución exacta para (4.21), debe ser encontrada de forma numérica. En el desarrollo de este trabajo, se utiliza el método de Newton-Raphson para hacerlo.

Una vez conocido el perfil de densidad, podemos escribir la velocidad y presión en función de este perfil. La presión se escribe directamente con ayuda de la ecuación de estado politrópica, mientras que para la velocidad primero debemos escribir u^r , u_t y u^t con ayuda de las ecuaciones (4.7) y (4.8). Entonces, podemos escribir v^r con (2.3) y (2.4):

$$u^r = \frac{C_1}{r^2 \rho_0}, \quad (4.22)$$

$$u_t = \sqrt{(u^r)^2 + 1 + \frac{2M}{r}}, \quad (4.23)$$

$$u^t = -\frac{1 + (1 + \frac{2M}{r})(u^r)^2}{u_t + g_{rr}\beta u^r}, \quad (4.24)$$

$$v^r = \frac{u^r}{\alpha u^t} + \frac{\beta^r}{\alpha}. \quad (4.25)$$

Se utilizaron dos tipos de condiciones iniciales basadas en la solución de Michel. El primero consiste en tomar la solución en la frontera r_{max} y copiarla en todo el dominio tridimensional. El segundo tipo utiliza la solución completa. Esto se hace para determinar si la solución encontrada es atractora, ya que, de serlo, esta solo dependerá del tipo de frontera numérica escogida para r_{max} y los valores de las variables primitivas en esta región. Otra de nuestras **hipótesis** es que se espera que, al ejecutar dos simulaciones con estos tipos de condiciones iniciales para el fluido, se llegue a una misma distribución estacionaria.

Por otro lado, las soluciones de Michel permiten la libertad de escoger ρ_c y r_c , dos magnitudes críticas que determinan completamente las soluciones de Michel. En la Figura 4.1 se muestran dos ejemplos de elecciones de parámetros críticos. El primer conjunto ($\rho_c = 0.1, r_c = 100$) muestra una menor densidad de materia cerca del agujero negro con una mayor velocidad, comparado con la segunda elección ($\rho_c = 1, r_c = 30$). Esto es importante porque, con una menor densidad y mayor velocidad, la dinámica del sistema estará dominada por los efectos del campo magnético sobre el plasma. Podemos aumentar o disminuir este efecto modificando el parámetro ρ_c . Por otro lado, modificando r_c , podemos aumentar o disminuir el radio de acreción efectivo, de manera que, a menor r_c , la velocidad radial tenderá a cero más rápidamente.

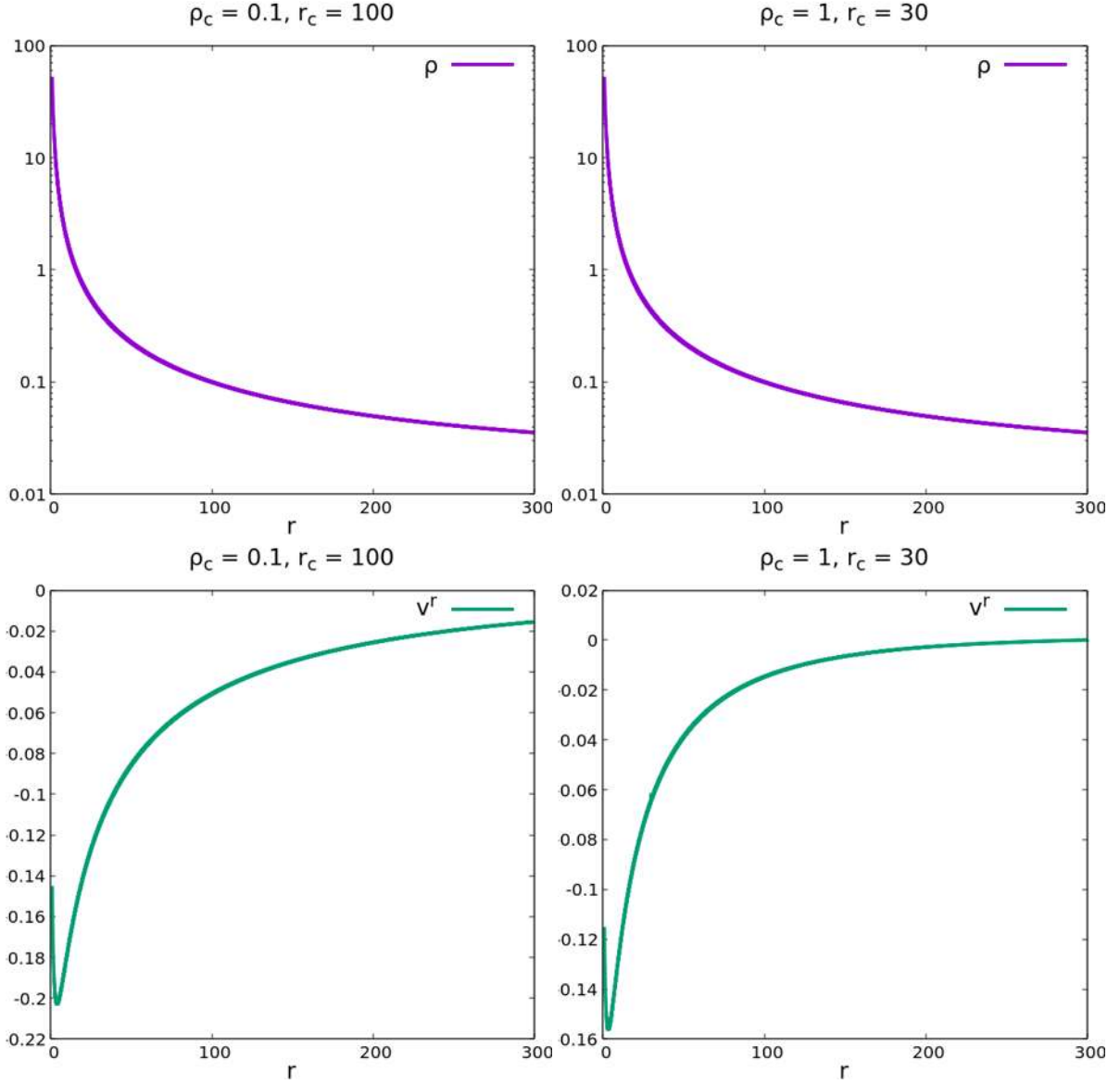


Figura 4.1: Distribuciones de densidad y velocidad radial para soluciones de Michel, a la izquierda con parámetros $(\rho_c = 0.1, r_c = 100)$ y la derecha con $(\rho_c = 1, r_c = 30)$. Los perfiles de densidad se encuentra graficada en una escala.

SECCIÓN 4.2**Condiciones iniciales para el campo magnético**

Se utilizó un campo magnético uniforme y paralelo al eje polar, en nuestra elección de coordenadas se puede escribir como

$$B^r = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{rr}}} B_0 \cos(\theta), \quad (4.26)$$

$$B^\theta = -\frac{1}{\sqrt{\gamma_{\theta\theta}}} B_0 \sin(\theta), \quad (4.27)$$

$$B^\phi = 0. \quad (4.28)$$

El campo magnético al tiempo inicial se inspira en la solución de Wald [35] que describe una solución en el vacío de un campo magnético alrededor de un hoyo negro de Kerr que cumple con las propiedades de ser estacionario, axialmente simétrico y que asintóticamente uniforme y paralelo al eje de rotación del hoyo negro. El 4-potencial electromagnético del campo de Wald se escribe como:

$$A_\mu = \frac{B_0}{2} (m_\mu + 2a k_\mu) \quad (4.29)$$

donde $m^\mu = \delta^\mu_\phi$ y $k_\mu = \delta^\mu_t$ son los vectores de Killing para un espacio-tiempo estacionario y axialmente simétrico, en coordenadas de Kerr-Schild en el marco de la descomposición $3 + 1$ el 4-potencial se escribe explícitamente como

$$A_\mu = \frac{B_0}{2} \begin{pmatrix} \beta_\phi + 2a(-\alpha^2 + \beta^i \beta_i) \\ \gamma_{r\phi} + 2a\beta_r \\ 0 \\ \gamma_{\phi\phi} + 2a\beta_\phi \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

y entonces podemos escribir las componentes del campo magnético como

$$B^r = \frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}} \frac{B_0}{2} \partial_\theta (\gamma_{\phi\phi} + 2a\beta_\phi), \quad (4.31)$$

$$B^\theta = -\frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}} \frac{B_0}{2} \partial_r (\gamma_{\phi\phi} + 2a\beta_\phi), \quad (4.32)$$

$$B^\phi = -\frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}} \frac{B_0}{2} \partial_\theta (\gamma_{r\phi} + 2a\beta_r). \quad (4.33)$$

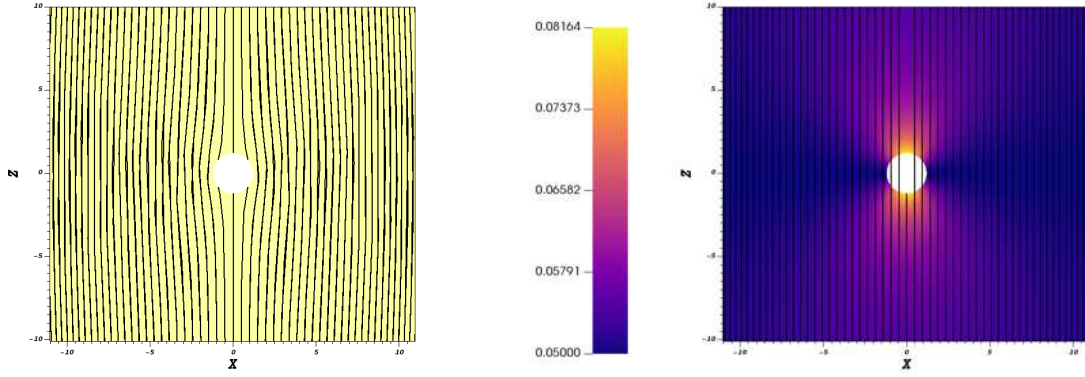


Figura 4.2: A la izquierda un campo magnético Uniforme y a la derecha la solución de Wald para un hoyo negro de Schwarzschild, ambos con $B_0 = 0.05$. En el mapa de color se muestra la magnitud del campo magnético $|B|$.

Es claro que el campo magnético descrito por (4.26)-(4.28) difiere de la solución de Wald incluso en el caso de $a = 0$, como se muestra en la Figura 4.2, difieren tanto en la magnitud del campo magnético como en la morfología de sus líneas de campo, sin embargo la solución de Wald asintóticamente es igual al campo uniforme. La razón de escoger el campo magnético uniforme frente a la solución de Wald es que nos interesa buscar soluciones atractoras, es decir, saber si hay una configuración **natural** de campo magnético, entonces el comportamiento asintótico del campo es el que determinará la dinámica y el estado final del sistema.

Por otro lado en [35] se postula que en un medio ionizado se acretarán de forma "selectiva" partículas cargadas positivamente mientras que las partículas cargadas negativamente se verán repelidas y viceversa si es que invertimos el sentido de rotación del hoyo negro. Dando lugar a una carga neta acretada que modificará al campo magnético descrito por (4.29), añadiendo una perturbación a la solución sin carga:

$$A_\mu = \frac{B_0}{2} (m_\mu + 2ak_\mu) - \frac{q}{2} k_\mu. \quad (4.34)$$

Esta expresión escrita con los vectores de Killing del hoyo negro de Kerr de hecho corresponde a la solución en el vacío para el campo magnético alrededor de un hoyo negro de Kerr-Newman. El cuatro potencial escrito con la métrica (2.47) con la descomposición $3 + 1$ está dado por

$$A_\mu = \begin{pmatrix} \frac{B_0}{2} \beta_\phi + \left(B_0 a - \frac{q}{2}\right) (-\alpha^2 + \beta^i \beta_i) \\ \frac{B_0}{2} \gamma_{r\phi} + \left(B_0 a - \frac{q}{2}\right) \beta_r \\ 0 \\ \frac{B_0}{2} \gamma_{\phi\phi} + \left(B_0 a - \frac{q}{2}\right) \beta_\phi \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

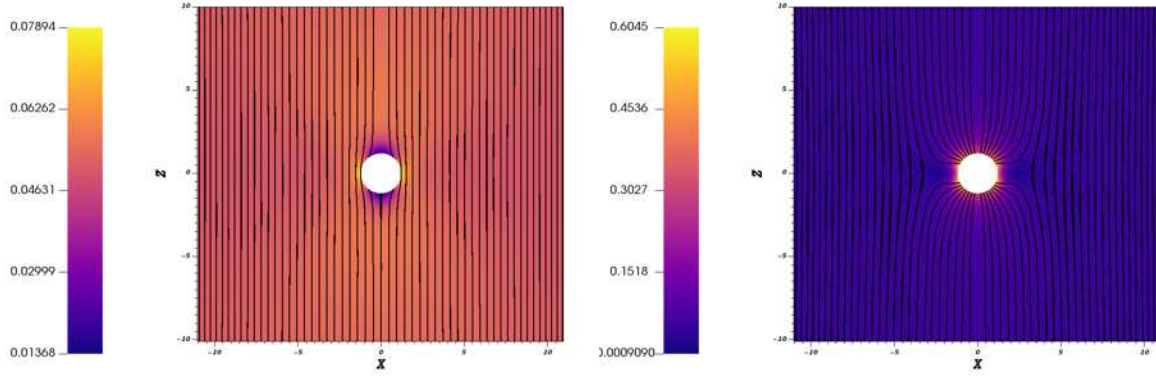


Figura 4.3: Soluciones de Wald con parámetro de espín $a = 0.9999$ e intensidad de campo magnético $B_0 = 0.05$, a la izquierda sin carga eléctrica y a la derecha con $q = 8aB_0$.

y explícitamente las componentes del campo magnético son:

$$B^r = \frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}}\partial_\theta \left(\frac{B_0}{2}\gamma_{\phi\phi} + \left(B_0a - \frac{q}{2}\right)\beta_\phi \right) \quad (4.36)$$

$$B^\theta = -\frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}}\partial_r \left(\frac{B_0}{2}\gamma_{\phi\phi} + \left(B_0a - \frac{q}{2}\right)\beta_\phi \right) \quad (4.37)$$

$$B^\phi = -\frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}}\partial_\theta \left(\frac{B_0}{2}\gamma_{r\phi} + \left(B_0a - \frac{q}{2}\right)\beta_r \right) \quad (4.38)$$

En la figura 4.3 podemos encontrar una comparación en los efectos de añadir una carga a la solución de Wald, ambos campos magnéticos cuentan con un parámetro de espín de $a = 0.9999$ sin embargo cuando añadimos una carga que se encuentra que en el ecuador, una disminución de $|B|$ y las líneas de campo recuerdan a las obtenidas en [36] y [6] bajo circunstancias similares a las configuraciones usadas en este trabajo. Por lo que se presume una correlación entre la solución de Wald descrita por (4.36)-(4.38) y la acreción de plasma cuyo flujo lejos del hoyo negro es radial y constante en el tiempo.

Capítulo 5

Resultados

Antes de adentrarnos en la presentación de los resultados, es necesario explicar las herramientas de diagnóstico empleadas, estas nos permiten interpretar de forma precisa los fenómenos físicos observados. En el capítulo anterior se ha discutido el proceso de acreción y las condiciones iniciales utilizadas en este capítulo, ahora nos enfocaremos en como estas configuraciones impactan en los resultados para diferentes escenarios.

Una de las cantidades más importantes que es necesario calcular en cualquier proceso de acreción es la tasa de masa acretada $\dot{M}$. Esta se calcula como el flujo de materia en una esfera de radio r_d , es decir, es la integral de la componente del flujo conservado F_r^r de (2.35). Explícitamente, se calcula como:

$$\dot{M} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) \sqrt{\gamma} D d\theta d\phi \Big|_{r_d}. \quad (5.1)$$

Otro indicador para nuestro sistema es el flujo magnético Φ debido a que la evolución temporal del flujo magnético está relacionada con cómo cambia el campo magnético a medida que el plasma y el campo magnético se mueven y se deforman debido a la gravedad. Φ es calculado de la siguiente manera:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |B^r| \alpha \sqrt{\gamma} d\theta d\phi \Big|_{r_d}. \quad (5.2)$$

Cuando simulamos la acreción de un plasma, no solamente estamos acrecentando masa, sino que, aunque el plasma es eléctricamente neutro, pueden ocurrir procesos de acreción "selectiva". La forma que tenemos para medir estos procesos es calcular la tasa de acreción de carga. Partimos de calcular la integral de flujo sobre una esfera de radio r_d de la 4-corriente eléctrica:

$$\dot{Q} = \oint_{S^2(r_d)} \mathcal{J}^\mu dS_\mu = \int_{S^2(r_d)} \mathcal{J}^r \alpha \sqrt{\gamma} dS^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho_q u^r \alpha \sqrt{\gamma} d\theta d\phi \Big|_{r_d}, \quad (5.3)$$

donde ρ_q es la densidad de carga. Para llegar a esta ecuación hemos utilizado la ley de Ohm con la condición de la MHD ideal (2.12). En principio, no conocemos ρ_q , por lo que no podemos integrar directamente con la expresión de la última igualdad. Sin embargo, es importante notar que dicha expresión es la misma que en el caso de $\dot{M}$, cambiando únicamente la densidad de materia por la densidad de carga. Para poder calcular $\dot{q}$ recurrimos a (2.11) y a la expresión del tensor de Faraday de la MHD ideal para un observador Euleriano (2.16), obteniendo así una expresión para $\mathcal{J}^\mu$ usando variables conocidas:

$$\mathcal{J}^\mu = \nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha \sqrt{\gamma}} \partial_\nu (\alpha \sqrt{\gamma} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{\alpha \sqrt{\gamma}} \partial_\mu ([\mu\nu\lambda\delta] u_\lambda b_\delta), \quad (5.4)$$

necesitamos únicamente la componente radial $\mathcal{J}^r$ que puede ser escrita explícitamente como:

$$\alpha \sqrt{\gamma} \mathcal{J}^r = \partial_\theta (u_\phi b_0 - u_0 b_\phi) + \partial_\phi (u_0 b_\theta - u_\theta b_0). \quad (5.5)$$

Integrando sobre el cascarón esférico tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \int_0^{2\pi} \left[(u_\phi b_0 - u_0 b_\phi)|_{r=r_d, \theta=\pi} - (u_\phi b_0 - u_0 b_\phi)|_{r=r_d, \theta=0} \right] d\phi \\ &+ \int_0^\pi \left[(u_0 b_\theta - u_\theta b_0)|_{r=r_d, \phi=2\pi} - (u_0 b_\theta - u_\theta b_0)|_{r=r_d, \phi=0} \right] d\theta, \end{aligned} \quad (5.6)$$

También es posible calcular otras cantidades para medir los efectos globales del espacio-tiempo sobre la dinámica del plasma, por ejemplo, los promedios de las velocidades en un marco de referencia Lagrangiano:

$$\bar{v}^i = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi v^i \alpha \sqrt{\gamma} d\theta d\phi \big|_{r_d}}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \alpha \sqrt{\gamma} d\theta d\phi \big|_{r_d}}, \quad (5.7)$$

que además de darnos una visión más clara de las perturbaciones que sufre el sistema respecto de las condiciones iniciales, pueden interpretarse como un indicador del tiempo de relajación para llegar a un estado estacionario, en conjunto con $\dot{M}$ y $\dot{q}$.

SECCIÓN 5.1

Acreción esférica hidrodinámica

5.1.1 Michel

Una de las pocas soluciones semi-analíticas en el ámbito de la hidrodinámica relativista es la solución de Michel, que describe un fluido ideal isentrópico en acreción esférica alrededor de un hoyo negro de Schwarzschild. La derivación de esta solución se encuentra en la sección 4.1.1. Además, la solución ha sido derivada en coordenadas de Eddington-Finkelstein (4.1), que son equivalentes a las coordenadas de Kerr-Schild (2.47) cuando el parámetro de espín $a = 0$. Por lo tanto, recuperar esta solución resulta en un experimento numérico necesario para la validación del código desarrollado durante esta tesis.

Utilizamos una ecuación de estado de un gas ideal para evolucionar nuestro sistema debido a que la ecuación de estado politrópica no puede violar la condición de isentropía y, en consecuencia, no es capaz de desarrollar choques genuinos, lo que puede afectar durante la evolución a los métodos numéricos con los que se solucionan las ecuaciones, los cuales están basado en la solución de este tipo de problemas. Por otro lado, cuando no existen choques, existe una equivalencia entre la ecuación de estado politrópica y la ecuación de estado para un gas ideal, como es el caso cuando la evolución del sistema se ha estacionado.

Partimos de condiciones iniciales constantes de las variables primitivas sobre todo nuestro dominio, que se escogen tomando el valor de la solución de Michel en la frontera de r_{max} de nuestro sistema. Estas condiciones iniciales pueden verse en color verde en la Figura 5.1. La solución exacta que se utilizó para tomar los valores de la frontera se encuentra con los parámetros críticos ($\rho_c = 0.1/M^2$, $r_c = 100M$) mostrada en la Figura

(4.1), y nuestro sistema deberá converger a esta misma solución si el código funciona adecuadamente.

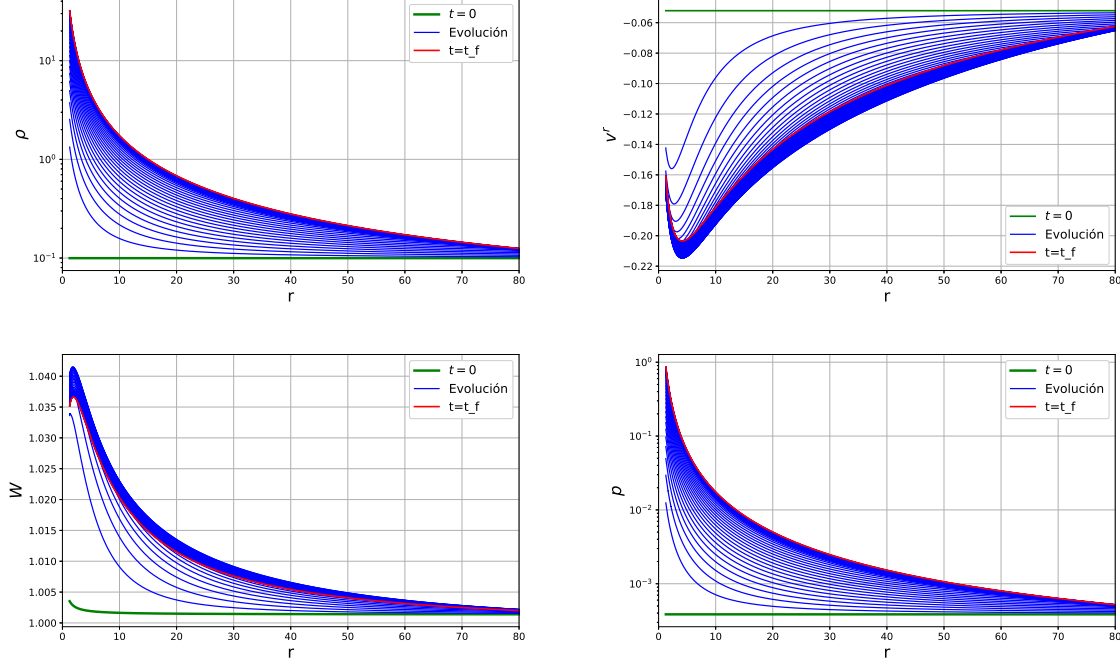


Figura 5.1: Densidad de materia, velocidad radial, factor de Lorentz y presión, donde se recupera la solución de Michel con parámetros ($\rho_c = 0.1/M^2, r_c = 100M$). En verde se muestran las condiciones iniciales, en azul las variables durante la evolución y en rojo el último paso temporal guardado con $t_f = 1000M$.

Se realizaron dos simulaciones que recuperan el mismo perfil. La primera se realizó en un dominio numérico de tamaño $N_r \times N_\theta \times N_\phi = 80 \times 60 \times 31$ y la segunda de $N_r \times N_\theta \times N_\phi = 160 \times 60 \times 31$, ambas con un factor de Courant $C_{CFL} = 0.4$, en un dominio físico definido entre $r_{min} = 1.2M$ y $r_{max} = 90M$. Debido a que las condiciones iniciales son esféricamente simétricas, al igual que el espacio-tiempo en el que se está resolviendo, el único parámetro importante de la malla en este caso es el número de celdas en la dirección radial N_r . Se resuelve en un dominio tridimensional para poder determinar si el sistema permanece con la simetría original del problema.

En la Figura 5.1 se muestra la evolución partiendo de condiciones iniciales constantes para la simulación con el dominio numérico de menor tamaño. Las líneas azules son las variables primitivas cada 100 iteraciones, lo que corresponde a un salto temporal entre instantáneas de $\Delta t = 13.12M$. Podemos observar cómo la evolución se estabiliza en torno a un perfil atractor, especialmente obvio en el caso de la densidad de materia y la presión.

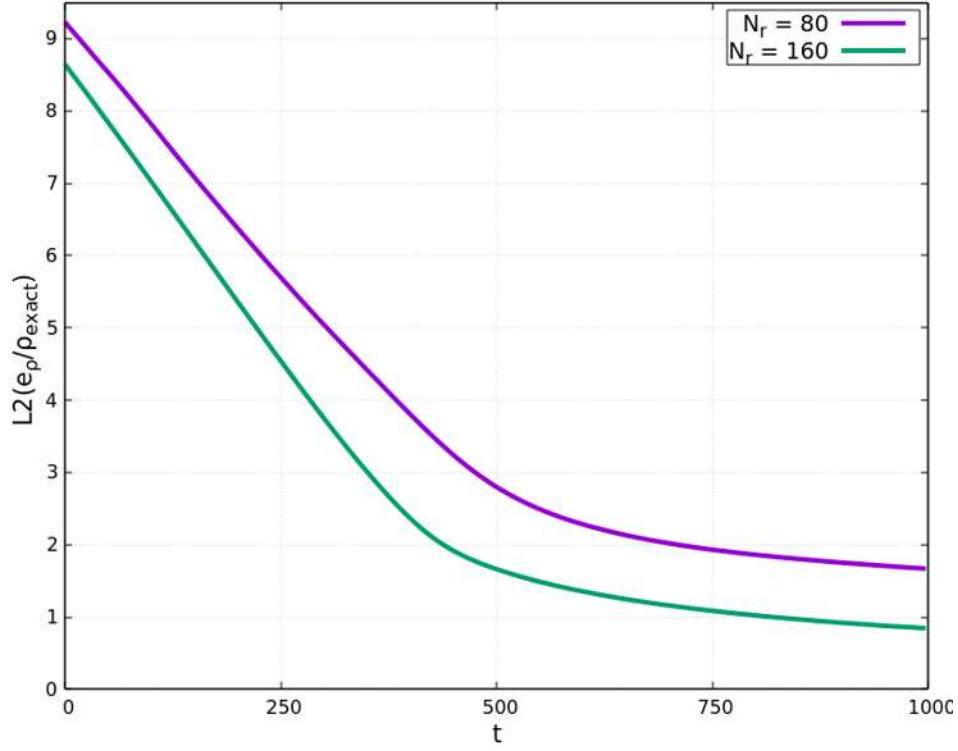


Figura 5.2: Norma del error porcentual medido respecto a ρ para la solución de Michel usando $N_r = 40$ y $N_r = 80$.

Debido a que conocemos la solución exacta, podemos medir el error relativo de la simulación. En la Figura 5.2 se muestra la norma del error porcentual medido respecto a la densidad de materia ρ como función del tiempo para los dos casos con diferente resolución numérica. Notamos que llegamos a un error porcentual menor al 2 % para la primera simulación y un error menor al 1 % para la segunda, por lo que podemos afirmar que se recupera la solución exacta y, además, la solución converge en un factor entre 1-2, lo cual es lo esperado para los métodos numéricos empleados y las condiciones iniciales utilizadas.

5.1.2 Kerr

No se ha encontrado una solución analítica general para la acreción esférica de un fluido ideal en torno a un agujero negro de Kerr. Sin embargo, se han encontrado numéricamente soluciones en equilibrio para este problema, como se mostró en [3]. Estas soluciones, además de ser estacionarias, muestran un comportamiento atractor, definiendo su dinámica únicamente por las condiciones de frontera y las ecuaciones

a resolver. Esto es posible de demostrar realizando dos simulaciones con diferentes condiciones iniciales, pero con el mismo comportamiento en la frontera r_{max} .

En este caso, las dos simulaciones se realizaron en un dominio numérico de tamaño $N_r \times N_\theta \times N_\phi = 160 \times 60 \times 31$ con una constante de Courant $C_{CFL} = 0.4$, en un dominio físico delimitado por $r_{min} = 1.2M$ y $r_{max} = 90M$. Las primeras condiciones iniciales se basan en tomar el perfil completo de la solución de Michel con parámetros críticos ($\rho_c = 0.1/M^2, r_c = 100M$) y las segundas en tomar únicamente el valor de la frontera de la misma solución.

Para verificar que la solución converge a la misma distribución se utiliza la tasa de acreción $\dot{M}$, ya que, aunque esta cantidad se mide en una región específica del dominio, depende de las velocidades v^i y la densidad de materia ρ . Así, esta cantidad es lo suficientemente sensible a cambios en la distribución, resultando en un buen indicador para medir la similitud entre las distribuciones finales. En la Figura 5.3 se muestra $\dot{M}$ para las simulaciones propuestas, donde se observa que la tasa de acreción se estabiliza en ambos casos para un valor de $0.8\dot{M}_m$, donde $\dot{M}_m$ es la tasa de acreción de Michel con la que se configuraron las condiciones iniciales. Además, el tiempo de relajación del sistema resulta mayor en el caso de las condiciones iniciales constantes.

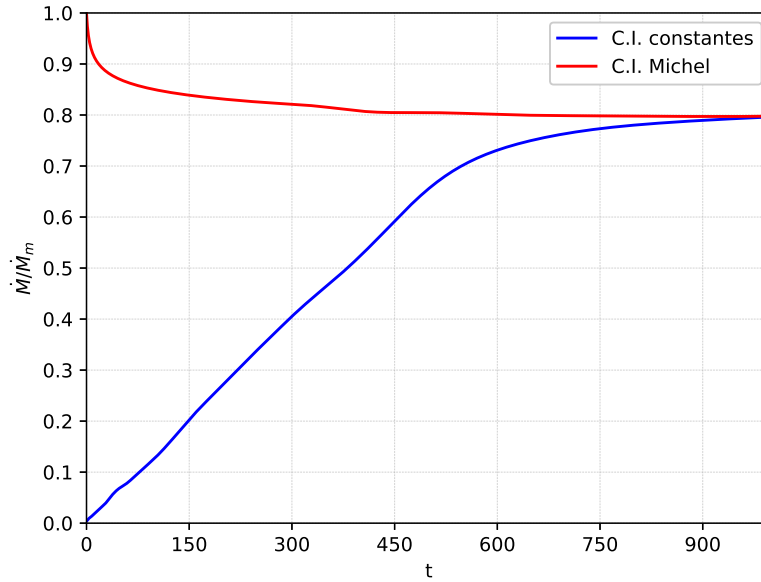


Figura 5.3: Tasa de acreción para el caso hidrodinámico con parámetro de rotación $a = 0.9999$ normalizada con la tasa de acreción de la solución de Michel que se usó como condiciones iniciales $\dot{M}_m = -888.577/M$ medida en el detector de radio $r_d = 2M$, en color rojo cuando utilizamos la solución completa y en color azul cuando copiamos las variables en la frontera de la solución completa sobre todo el dominio.

Para poder analizar los efectos de evolución de la acreción esférica sobre un espacio-tiempo axialmente simétrico se realizó una tercera simulación con idénticas especificaciones numéricas a las ya descritas, usando condiciones iniciales constantes pero con un parámetro de espín de $a = 0.5$, así será posible comparar los efectos de aumentar dicho parámetro. Una de las primeras diferencias que podemos notar en contraste con el caso en un espacio-tiempo de Schwarzschild es que existe una componente de la velocidad en la dirección de ϕ en el sentido de rotación del agujero negro, debido al efecto de Frame Dragging. Esto se puede observar en la Figura 5.13, donde se calcula $\bar{v}^r$ y $\bar{v}^\phi$ en una esfera de radio $r_d = 2M$. Como muestra (2.42), este efecto es proporcional al parámetro de espín, confirmándose esta relación en la gráfica para $\bar{v}^\phi$. En la misma figura 5.13 podemos observar que existe un aumento en el promedio de la velocidad radial $\bar{v}^r$ respecto al promedio para la solución de Michel en este mismo punto, que es de $\hat{v}^r = -0.1846$.

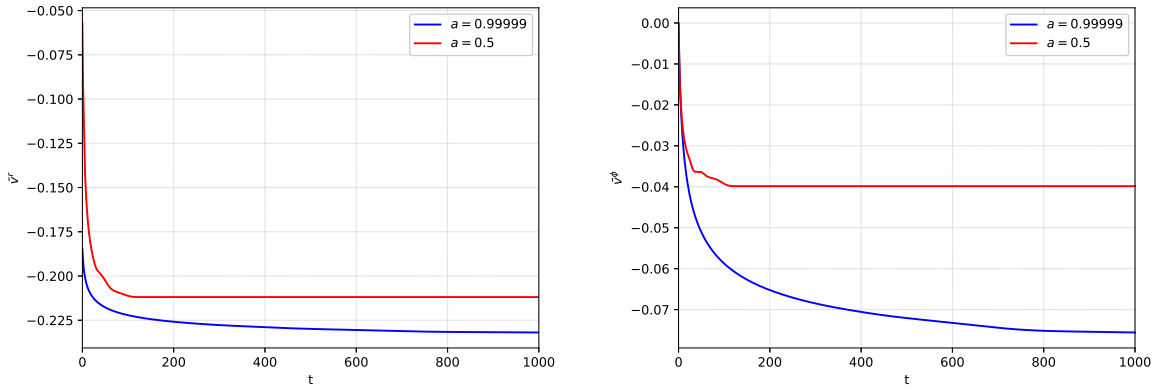


Figura 5.4: Promedio de v^r y v^ϕ medido en el detector $r_d = 2M$ para los casos hidrodinámicos en el espacio-tiempo de Kerr con parámetros de espín $a = 0.9999$ y $a = 0.5$ usando condiciones iniciales constantes.

En las Figuras 5.3 y 5.5, se muestra que la tasa de acreción se diferencia de la tasa de acreción de Michel, siendo estas menores cuando se evolucionan en el espacio-tiempo de Kerr. Específicamente, para $a = 0.9999$ se estabiliza en torno a $\dot{M} = 0.8\dot{M}_m$ y para $a = 0.5$ en $\dot{M} = 0.85\dot{M}_m$. La razón de este decrecimiento es la aparición de la componente v^ϕ . Esto hace que el fluido que originalmente se encuentra entrando en el dominio esféricamente comience a rotar, lo que genera una distorsión en las líneas de corriente, como se observa en las Figuras 5.6 y 5.7. Cabe aclarar que la velocidad angular que se induce no es lo suficientemente alta para generar órbitas, pero sí lo suficiente para ocasionar un retraso en la entrada de materia al agujero negro.

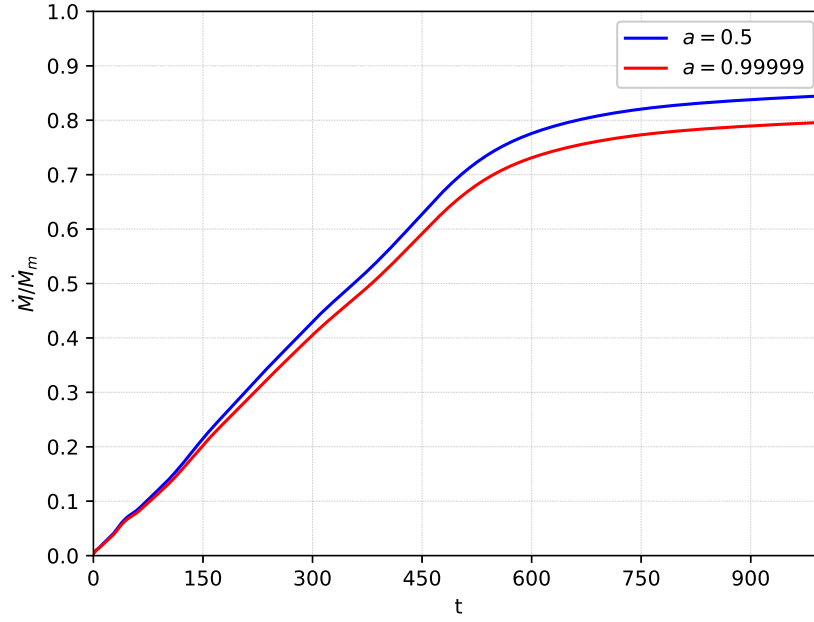


Figura 5.5: Tasa de acreción para los casos hidrodinámicos en el espacio-tiempo de Kerr con parámetros de espín $a = 0.9999$ y $a = 0.5$.

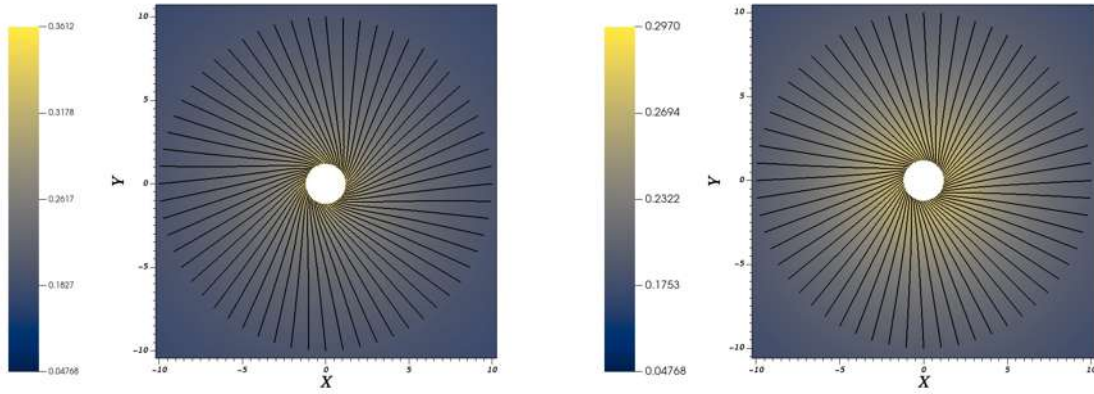


Figura 5.6: Corte ecuatorial de $|v|$ en los casos hidrodinámicos en el espacio-tiempo de Kerr a la izquierda con parámetro de espín $a = 0.9999$ y a la derecha $a = 0.5$. En negro se muestran las líneas de corriente que pasan por una circunferencia de radio $10M$.

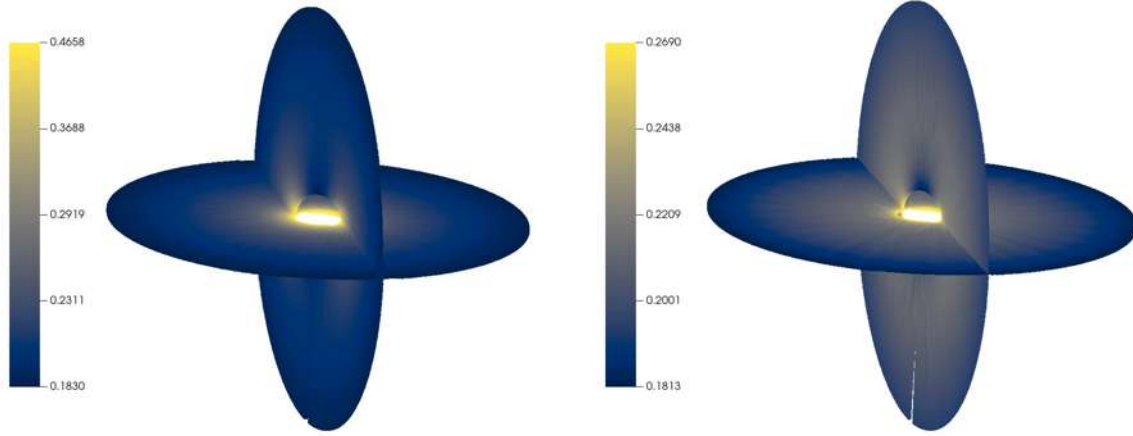


Figura 5.7: Líneas de corriente para los casos hidrodinámicos en el espacio-tiempo de Kerr a la izquierda con parámetro de espín $a = 0.9999$ y a la derecha $a = 0.5$. En ambos casos las líneas de corriente pasan por las circunferencias de radio $10M$ en $\theta = \pi/2$ y $\phi = 0$.

La velocidad angular no se induce uniformemente en todo el espacio. En el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$ es la zona del espacio donde es mayor, mientras que en el eje polar dicha velocidad se anula. En consecuencia, cerca de los polos la materia entra "directamente", teniendo una menor densidad de materia en esta zona, mientras que cerca del ecuador la materia rota con mayor intensidad, teniendo una mayor densidad de materia. En la Figura 5.8 se muestra un corte en el plano XZ para ρ , las isosuperficies muestran este efecto de achatamiento generando elipses, teniendo una mayor excentricidad cuando $a = 0.9999$.

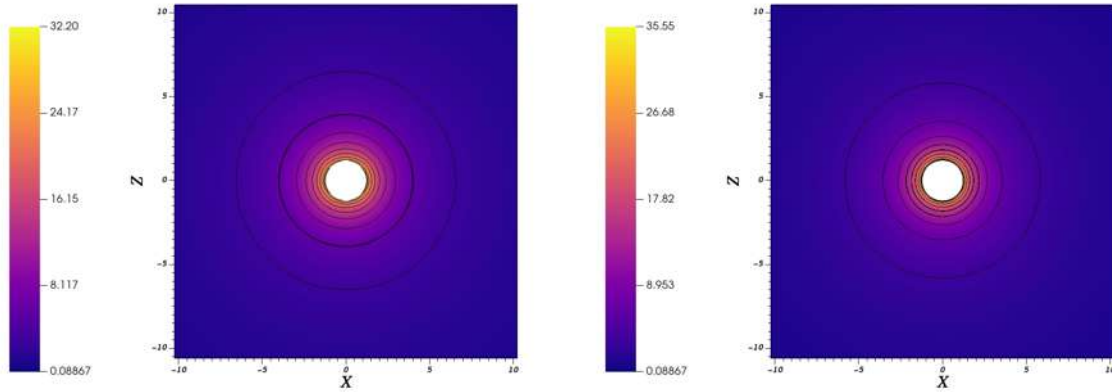


Figura 5.8: Corte sagital de ρ en los casos hidrodinámicos en el espacio tiempo de Kerr a la izquierda con parámetro de espín $a = 0.9999$ y a la derecha $a = 0.5$. En negro se muestra las isosuperficies de esta misma cantidad.

Para asegurar que los métodos numéricos están funcionando correctamente, se realizó una prueba de autoconvergencia para $a = 0.9999$ en $\dot{M}$. Debido a que el problema es axialmente simétrico, calculamos la solución con resolución $N_r \times N_\theta = 80 \times 60$, así $\dot{M}_1 = M_\infty + \varepsilon (\Delta r_i, \Delta \theta)^n$ donde M_∞ es la solución en el límite del continuo y ε es el error absoluto de la solución y n es el factor de autoconvergencia. Después se calculan las soluciones con $N_r \times N_\theta = 120 \times 90$ y $N_r \times N_\theta = 180 \times 135$, entonces para estas resoluciones tendremos que $\dot{M}_2 = M_\infty + 1/1.5^n \varepsilon (\Delta r_i, \Delta \theta)^n$ y $\dot{M}_3 = M_\infty + 1/1.5^{2n} \varepsilon (\Delta r_i, \Delta \theta)^n$. Entonces, podemos calcular el factor de autoconvergencia como:

$$1.5^n = \frac{\dot{M}_1 - \dot{M}_2}{\dot{M}_2 - \dot{M}_3}, \quad (5.8)$$

En la Figura 5.9 se muestra el factor de autoconvergencia en el caso descrito. Aquí podemos determinar que los métodos utilizados para resolver el sistema de EDP's convergen durante la evolución y permanecen dentro del rango indicado por el orden del método.

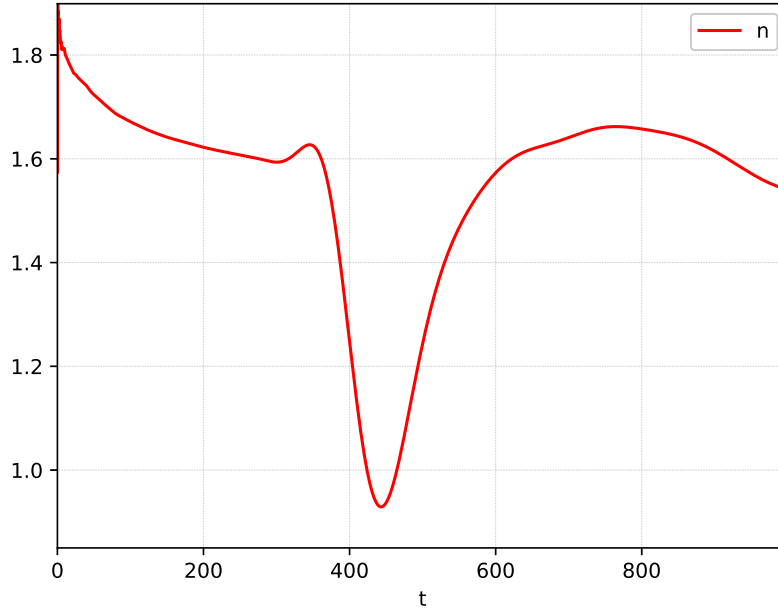


Figura 5.9: Factor de autoconvergencia para la solución hidrodinámica en el espacio-tiempo de Kerr con $a = 0.9999$.

SECCIÓN 5.2

Acrección esférica magnetizada

Se presentan dos escenarios de evolución para la acreción esférica en el espacio-tiempo de Kerr con un campo magnético inicial paralelo al eje de rotación de intensidad $B_0 = 0.001/M$, una con rotación progrado y parámetro de espín $a = 0.5$, la otra con rotación retrograda y parámetro de espín $a = -0.5$. Debido a que no existen diferencias sustanciales en las variables escalares ni en el campo magnético resultante, las figuras presentadas para estas son válidas para ambos casos a menos de que se indique lo contrario.

Se escogió un dominio numérico de $N_r \times N_\theta \times N_\phi = 160 \times 80 \times 41$, en un dominio físico delimitado por $r_{min} = 1.5M$ y $r_{max} = 1000M$. El dominio es notablemente mayor cuando añadimos un campo magnético, la razón es que se busca que en la frontera dicho campo siga constante y paralelo al eje de rotación, en un dominio numérico relativamente pequeño como era el caso de las simulaciones hidrodinámicas no es posible cumplir con esta imposición, ocasionando errores en el cálculo de los flujos numéricos en la frontera externa (de flujo entrante). Otra diferencia importante en la configuración numérica es que el factor de Courant se fija en $C_{CFL} = 0.25$, debido a que los eigenvalores de las ondas magnetosónicas en la ergosfera aumenta en relación a la magnitud de las ondas sónicas en esta misma zona, así para asegurar la estabilidad del método se reduce este factor. Debido al aumento del tamaño del dominio las condiciones iniciales para las variables hidrodinámicas se fijan con los parámetros críticos de la solución de Michel ($\rho_c = 0.1/M$, $r_c = 100M$), así nos aseguramos de que la frontera r_{max} siga dentro del radio de acreción.

Estos escenarios permanecen en el régimen denominado SANE (*Standard and Normal Evolution*) por sus siglas en inglés, debido a que el flujo magnético en el horizonte de eventos Φ , es menor a 50 en cualquier punto de la evolución, como se muestra en la figura 5.10. En este régimen no existe una influencia significativa del campo magnético, los flujos son más estables y la dinámica está dominada principalmente por la distorsión del espacio-tiempo y la presión térmica del plasma. Otra forma de saber que nos encontramos en este régimen es a través del factor β del plasma, definido como: $\beta = p/p_{mag} = 2p/b^2$, se muestra en la tercer gráfica de la Figura 5.19 que $\beta \gg 1$ en la mayor parte del dominio, como esperamos en este tipo de simulaciones.

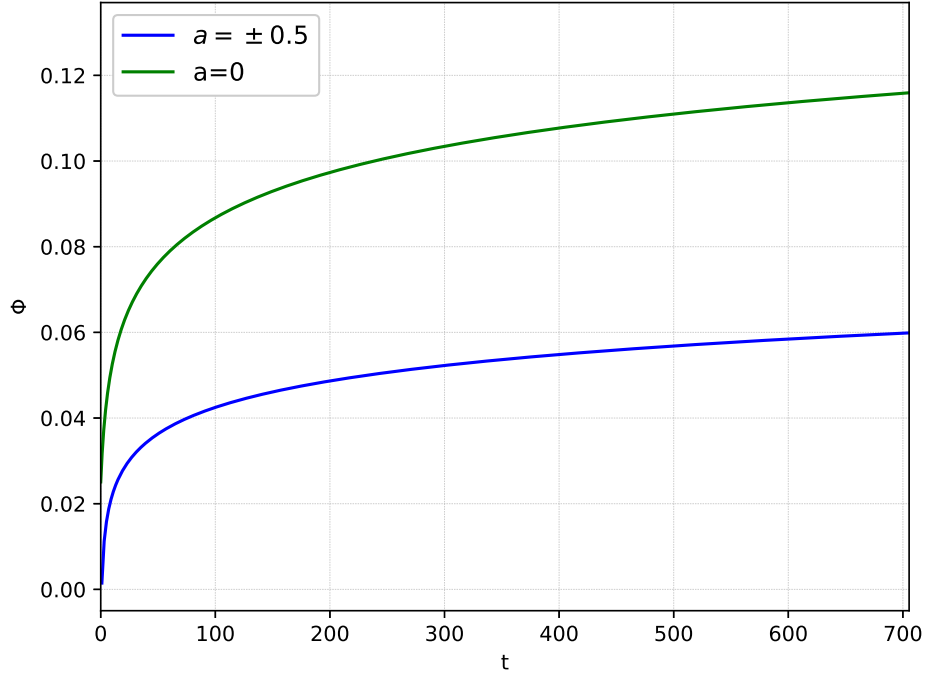


Figura 5.10: Flujo magnético Φ medido en el detector de radio $r_d = 2M$ como función del tiempo, para los casos con parámetro de espín $a = \pm 0.5$ y $a = 0$.

Como ya se mencionó la hidrodinámica rige este sistema, en consecuencia la densidad de materia, velocidades y tasa de acreción no difiere de forma cualitativa de lo descrito en 5.1.2. Como primer punto podemos ver como existe una disminución en la tasa de acreción proporcionalmente al aumento del parámetro de espín a , como se muestra en la Figura 5.11. Cuando estamos no existe el campo magnético se determina si se ha llegado a un estado estacionario con $\dot{M}$ y $\bar{v}^i$, en este nuevo escenario tenemos que verificar además que el campo magnético no está cambiando, esto lo podemos determinar visualmente calculando las líneas de campo y cuantitativamente con el flujo magnético Φ y la tasa de acreción de carga $\dot{Q}$. En los casos presentados, se puede diagnosticar que la simulación se ha estacionado como lo muestran las Figuras 5.10, 5.11, 5.13 y 5.16.

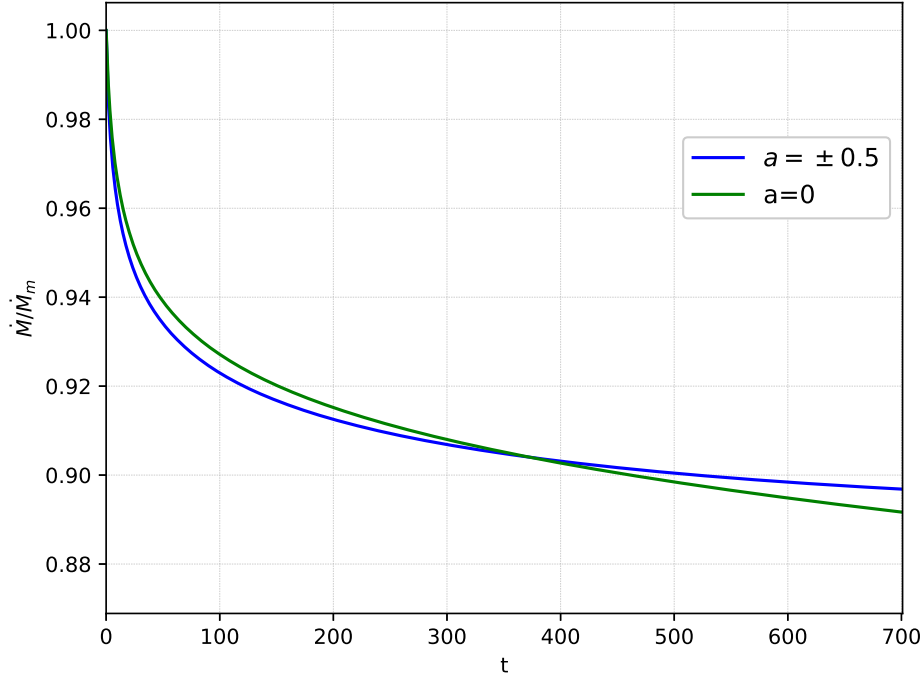


Figura 5.11: Taza de acreción de materia $\dot{M}$ medido en el detector de radio $r_d = 2M$ normalizada con la tasa de acreción de Michel $\dot{M}_m = -888.577/M$ en azul para los casos con $a = 0.5$ y en rojo para el caso con $a = 0$, los tres casos con un campo magnético inicial paralelo al eje polar y constante, con intensidad inicial de $B_0 = 0.001/M$.

Cuando comparamos sin campo magnético y con campo magnético, podemos encontrar algunas diferencias en la distribución final, existe una mayor densidad de materia dentro de la ergosfera como puede verse comparando la segunda gráfica de 5.12 y la Figura 5.8. Este aumento puede ser explicado por la reducción en la velocidad radial, medido con el promedio $\hat{v}^r$, producto de la redirección del plasma por las fuerzas de Lorentz generadas por el campo magnético.

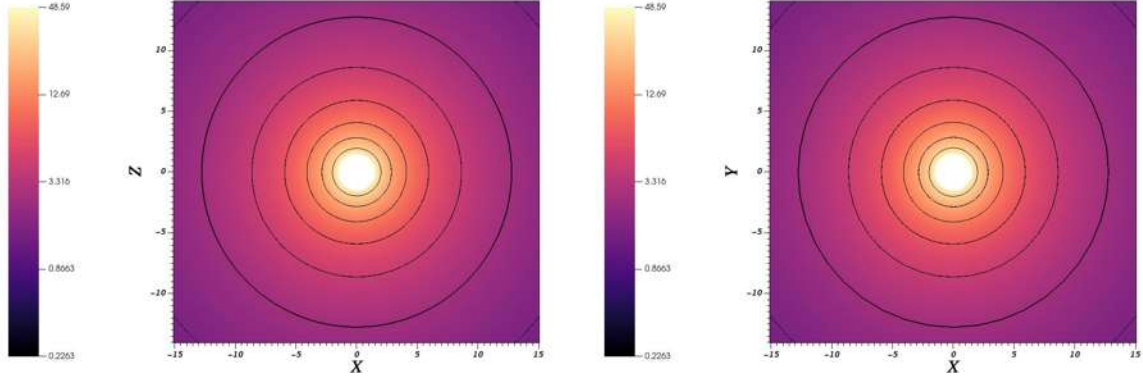


Figura 5.12: Corte sagital y ecuatorial de la densidad de materia ρ cuando la simulación con parámetros $a = 0.5$ y $B_0 = 0.001/M$ se ha estacionado al tiempo $t = 700M$, en negro isosuperficies de ρ .

La velocidad angular cambia de dirección al invertir al cambiar el signo del parámetro de espín, sin embargo la fuerza de Lorentz no es lo suficientemente intensa para inducir una velocidad significativa en la dirección ϕ cuando $a = 0$ ni para modificar el comportamiento de $\hat{v}^r$ cuando $a = \pm 0.5$, en la Figura 5.13 se muestra este comportamiento. En realidad el campo magnético parece disminuir la velocidad del plasma en todas direcciones pero manteniendo la misma distribución de velocidades, como puede notarse en la Figura 5.14.

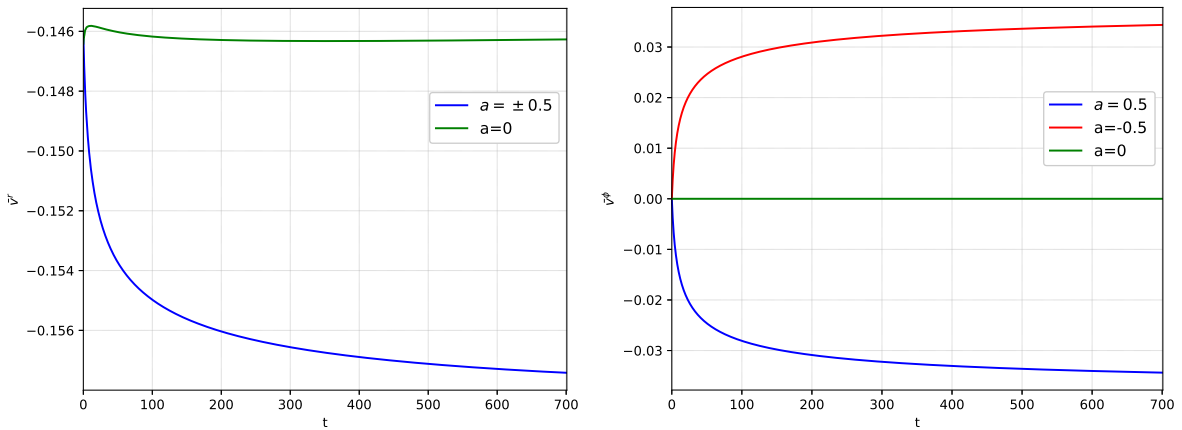


Figura 5.13: Promedio de v^r y v^ϕ medido en el detector $r_d = 2M$ para la evolución de la acreción esférica con un campo magnético constante paralelo al eje polar en el espacio tiempo de Kerr con parámetro de espín $a = \pm 0.5$ y 0.

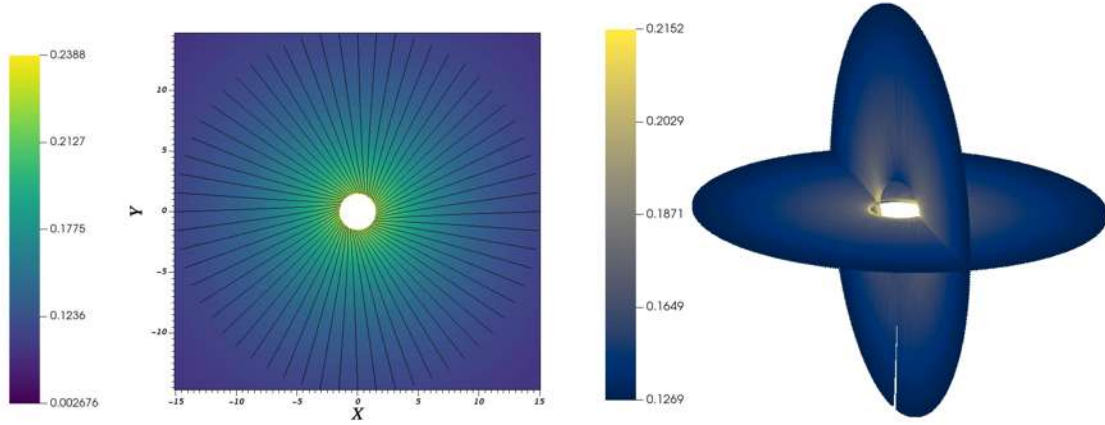


Figura 5.14: A la izquierda las líneas de corriente en el plano ecuatorial, a la derecha las líneas de corriente que parten de dos circunferencias de radio $10M$ en $\phi = 0$ y $\theta = \pi/2$, en ambos casos el mapa de color muestra la norma de la velocidad $|v|$. Estas representaciones están en el tiempo $t = 700M$ cuando la simulaciones se han estacionado.

En la MHD asume que el plasma es eléctricamente neutro de forma global, es decir están presentes aproximadamente la misma cantidad de iones y electrones, sin embargo no se desprecian las variaciones locales de carga dentro del plasma, como expresa claramente la ley de Ohm utilizada para derivar las ecuaciones de evolución (2.12). Por otro lado la condición de la MHD ideal desaparece los campos eléctricos medidos por un observador comóvil, esto elimina la necesidad de considerar campos eléctricos que no sean los inducidos por el movimiento del plasma a través del campo magnético, entonces no deberían existir zonas en la escala del dominio donde se acumule carga.

Se dedujo una formula para poder calcular la tasa de acreción de carga en una superficie esférica (5.3), el radio de dicha superficie sobre la que se ha integrado de $r_d = 2M$, que corresponde al radio del horizonte de eventos de un hoyo negro de Schwarzschild y a una superficie que rodea la ergosuperficie en el caso de un hoyo negro de Kerr, dado que la velocidad angular no es lo suficientemente grande como para generar órbitas podemos estar seguros que el plasma que pase por dicha superficie no saldrá, como lo muestran las líneas de corriente en 5.14.

De la misma forma en que se mostró en la sección anterior que la solución es atractora, se muestra que las soluciones para la nueva configuración con campo magnético muestran un comportamiento atractor. Con la misma configuración numérica descrita al comienzo de la sección, se llevaron acabo dos simulaciones con diferentes condiciones iniciales pero las mismas condiciones de frontera, en la Figura 5.15 se muestra la tasa de acreción para ambas simulaciones como función del tiempo y como ambas tienden al mismo

valor. Como puede notarse cuando tenemos condiciones iniciales constantes, el tiempo de relajación es mucho mayor que si utilizamos la distribución de la solución de Michel, por lo que se ha optado por esta segunda opción para el desarrollo de este trabajo.

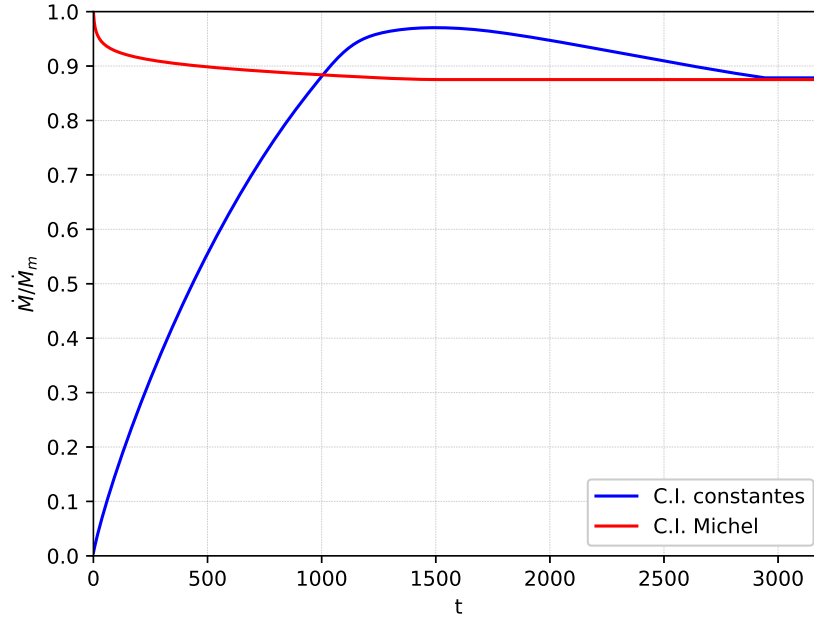


Figura 5.15: Tasa de acreción para el caso MHD en el espacio-tiempo de Kerr con parámetro de espín $a = 0.5$ y magnitud del campo magnético inicial $B_0 = 0.001/M$ normalizada con la tasa de acreción de la solución de Michel que se usó como condiciones iniciales $\dot{M}_m = -888.577/M$ medida en el detector de radio $r_d = 2M$ medida en el detector de radio $r_d = 2M$, en color rojo cuando utilizamos la solución completa y en color azul cuando copiamos las variables en la frontera de la solución completa sobre todo el dominio.

Cuando evolucionamos el problema de la acreción esférica de un plasma en el espacio-tiempo de Schwarzschild no se detecta una acreción preferencial de carga, aunque existen pequeñas oscilaciones en la tasa de acreción de carga la magnitud de dichas oscilaciones son pequeñas en relación de la magnitud del campo magnético y al ser integrada para obtener una carga neta recae dentro del error numérico. Por otro lado en el espacio-tiempo de Kerr la velocidad angular genera una fuerza de Lorentz que repele las cargas negativas cuando el hoyo negro gira en sentido horario y viceversa en el sentido anti-horario, como puede verse en la Figura 5.16.

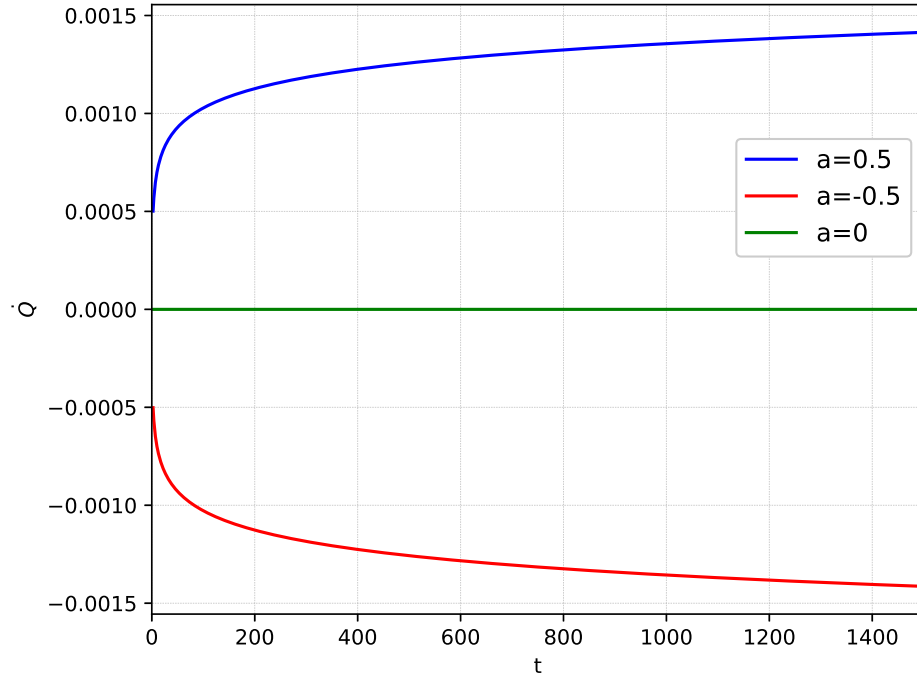


Figura 5.16: Taza de acreción de carga $\dot{Q}$ para las simulaciones con parámetro de espín $a = 0.5$, -0.5 y 0 .

Una buena aproximación para el campo magnético a tiempos cortos de la simulación puede realizarse con el campo magnético de Wald, descrito en la sección 4.2. Los campos resultantes de la simulación del plasma tienden las mismas características que el campo magnético de Wald, son asintóticamente constantes y paralelos al eje de rotación, no singulares en el horizonte de eventos o su exterior y en cada momento de la evolución el campo es axialmente simétrico. Podemos integrar la tasa de acreción de carga $\dot{Q}$ hasta un tiempo dado para obtener una carga neta acretada y así calcular el campo magnético con las ecuaciones (4.36)-(4.38) para poder comparar con la evolución del plasma.

Una de las predicciones de [35] es que un hoyo negro de Kerr se cargará hasta alcanzar una carga neta de $q_0 = 2aB_0$ por la inyección de energía de un plasma alrededor de este hoyo negro. Sin embargo en las simulaciones desarrolladas en este trabajo la tasa de acreción de carga no decrece, de hecho se estaciona en un valor diferente de cero en conjunto con los demás parámetros de monitoreo. El hoyo negro ya ha acretado la carga crítica q_0 a un tiempo de $t = 2.34M$, en la Figura 5.17 podemos observar que existen similitudes para el campo magnético de Wald con $a = 0.5$, $q = 2aB_0$ y $B_0 = 0.001/M$ y el campo magnético de la simulación con $a = 0.5$ y magnitud del campo magnético inicial de $B_0 = 0.001/M$.

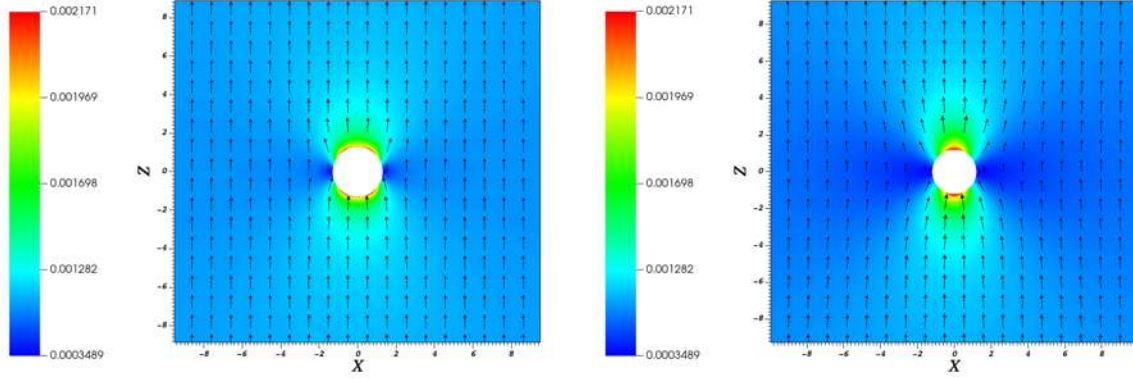


Figura 5.17: A la izquierda el campo magnético de Wald para un hoyo negro de Kerr-Newman con parámetro de espín $a = 0.5$ y carga $q = 2aB_0$ donde $B_0 = 0.001/M$ es la intensidad del campo magnético. A la derecha el campo magnético de la acreción esférica para el caso con $a = 0.5$ y $B_0 = 0.001/M$ al tiempo $t = 2.34M$ donde se ha acretado una carga de $2aB_0$.

No podemos esperar que el campo magnético de Wald sea idéntico a nuestro campo magnético debido a que el primero es una solución de las ecuaciones de Maxwell en el vacío para un espacio-tiempo axialmente simétrico, mientras que en nuestras simulaciones el campo magnético se ve influenciado por el movimiento del plasma de acuerdo a la ecuación de inducción y no a los efectos de una carga intrínseca del espacio-tiempo. Por otro lado, antes de que se haya alcanzado la carga crítica ambos campos parecen mantener una estrecha relación, como puede verse en la Figura 5.18 que corresponde al campo magnético de Wald con $a = 0.5$, $q = aB_0$ y $B_0 = 0.001/M$ y la simulación con $a = 0.5$ y $B_0 = 0.001/M$ al tiempo $t = 1.317M$ cuando se ha acretado esa misma carga.

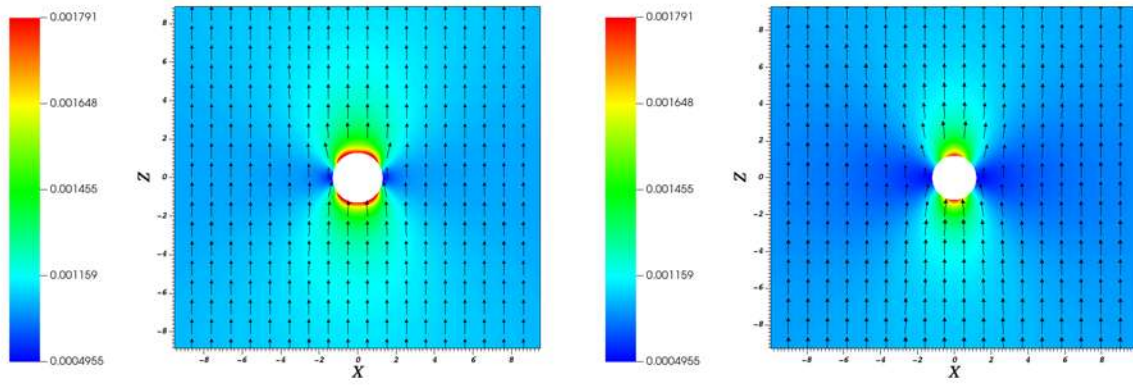


Figura 5.18: A la izquierda el campo magnético de Wald para un hoyo negro de Kerr-Newman con parámetro de espín $a = 0.5$ y carga $q = aB_0$ donde $B_0 = 0.001/M$ es la intensidad del campo magnético. A la derecha el campo magnético de la acreción esférica para el caso con $a = 0.5$ y $B_0 = 0.001/M$ al tiempo $t = 1.3171M$ donde se ha acretado una carga de aB_0 .

En la Figura 5.19 se encuentra el campo magnético, la presión magnética p_{mag} , β del plasma y la magnetización σ , una vez que la simulación se ha estacionado en aproximadamente $t = 700M$. El campo magnético final se ha diferenciado notablemente del campo magnético de Wald, en el plano ecuatorial se genera una zona de baja presión magnética teniendo así maximos $\beta \approx 5 \times 10^{10}$, por lo que la influencia del campo magnético en esta zona es esencialmente nula, a excepción de la ergosfera y el interior del horizonte de eventos, donde se incluso existe una región donde $\beta < 1$, marcado en verde en la tercer gráfica de 5.19. La magnetización de un plasma se define como $\sigma = b^2/\rho$ nos permite determinar que el campo magnético es pasivo en la mayor parte del dominio, sin embargo alrededor del eje polar podemos encontrar una zona de alta magnetización.

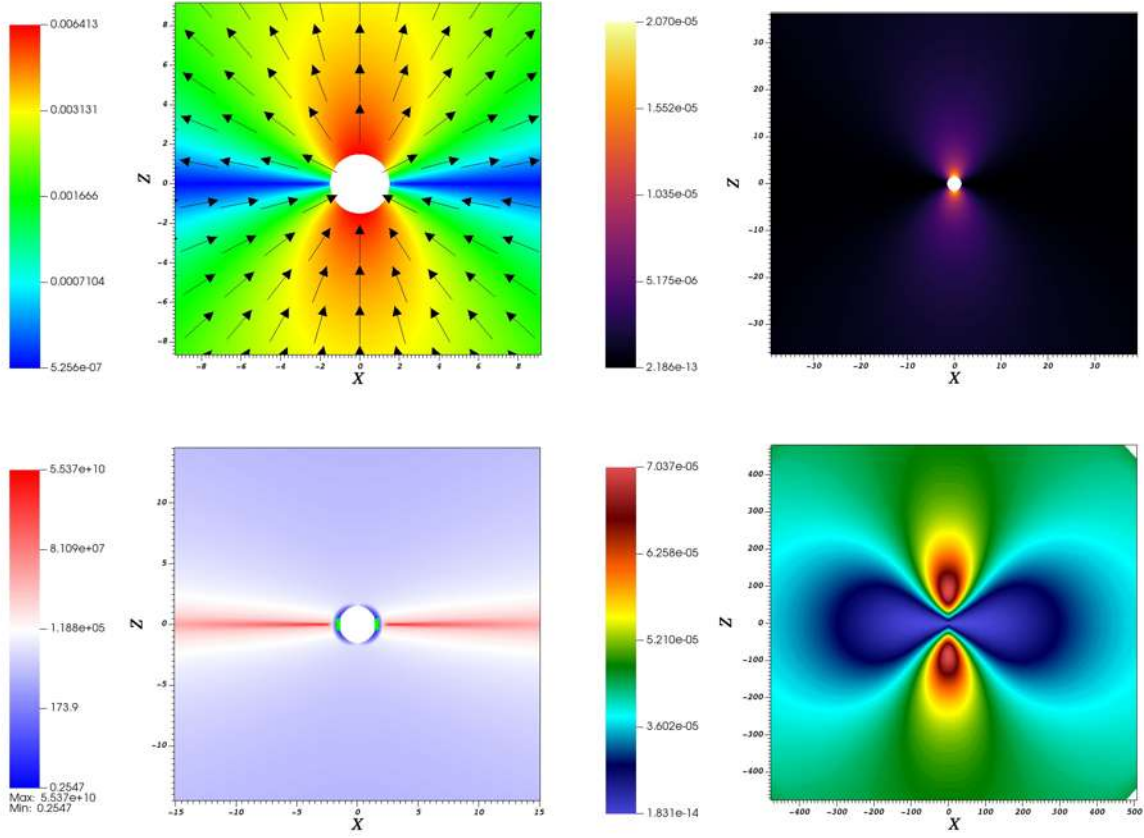


Figura 5.19: En un corte sagital cuando la simulación con parámetros $a = 0.5$ y $B_0 = 0.001/M$ se ha estacionado al tiempo $t = 700M$, de izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestra el campo magnético con el mapa de color indicando la magnitud del campo; presión magnética p_{mag} ; β del plasma; y magnetización σ .

Una forma para determinar si las ecuaciones se están resolviendo de forma adecuada es si cumplen con la ecuación de constricción (2.18), para verificar que la ecuación se cumple de forma aproximada es calcular la divergencia del campo magnético y posteriormente calcular el promedio de dicho calculo sobre todo el espacio a cada paso temporal, como:

$$\overline{\nabla \cdot \vec{B}} = \frac{\int_{r_{min}}^{r_{max}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \nabla \cdot \vec{B} \alpha \sqrt{\gamma} dr d\theta d\phi}{\int_{r_{min}}^{r_{max}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \alpha \sqrt{\gamma} dr d\theta d\phi}, \quad (5.9)$$

en la Figura 5.20 se encuentra $\overline{\nabla \cdot \vec{B}}$ como función del tiempo para los tres casos de acreción esférica magnetizada, el promedio de la divergencia permanece dentro del error numérico para los tres casos siendo menor de 10^{-10} en todo momento de la evolución.

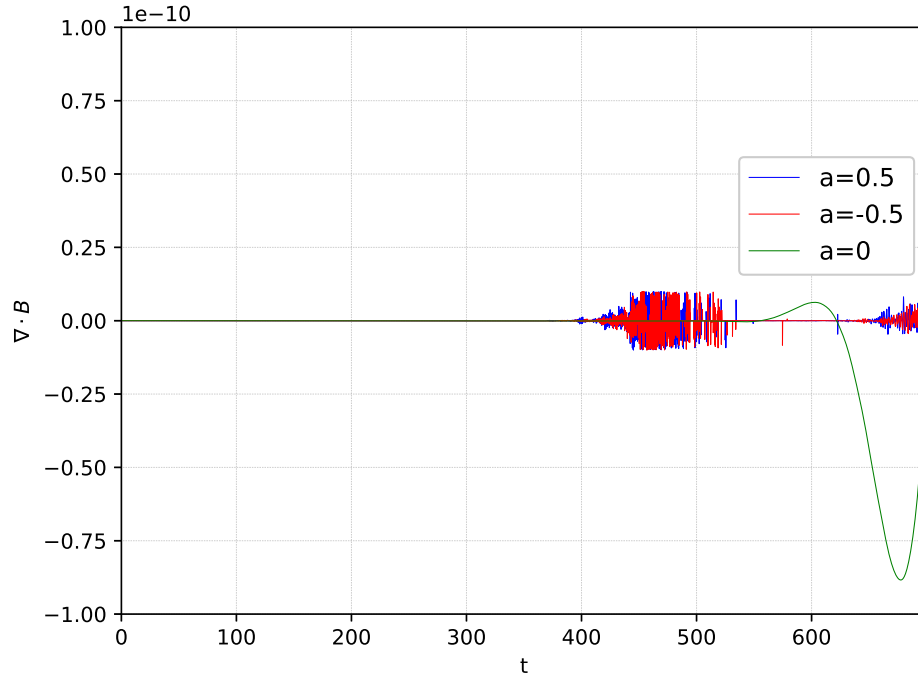


Figura 5.20: $\nabla \cdot \vec{B}$ promediada en el espacio como función del tiempo para las simulaciones con parámetro de espín $a = 0.5$, -0.5 y 0 .

Es necesario recalcar que las ecuaciones que se han resuelto son las de la GRMHD ideal y no se resuelven simultáneamente las ecuaciones de Einstein, por lo que la carga acretada no está modificando el espacio-tiempo y la condición de que el plasma es ideal impide generar campos eléctricos que atraigan cargas de signos opuestos dentro del horizonte de eventos. Por lo que las soluciones presentadas aquí, aunque consistentes y con errores dentro de las fluctuaciones numéricas, el problema físico presentado no es un escenario realista

$\dot{Q}$ depende primordialmente de la componente de u^ϕ medida en un marco de referencia Eulerino y dicha velocidad es inducida por el efecto de “*frame dragging*” en el espacio-tiempo de Kerr, por lo que $\dot{Q}$ no se limita a la región más cercana al horizonte de eventos, en realidad el plasma tendría un gradiente de carga tendiendo a ser eléctricamente neutro cuando r tiende a infinito. La fuerza eléctrica generada por el desbalance de carga podría ser tratado de forma adecuada saliendo del paradigma de las simulaciones astrofísicas de plasmas al incluir la presencia de campos eléctricos medidos desde el marco de referencia del plasma.

Capítulo 6

Conclusiones

Se desarrolló un código que resuelve las ecuaciones de la GRMHD para estudiar la dinámica de un plasma alrededor de un hoyo negro. Las estrategias de discretización del dominio y la paralelización con la librería MPI permiten que cada simulación requiera una cantidad moderada de recursos computacionales, con un promedio de 2000 horas CPU para los casos de mayor resolución. Este tiempo de ejecución representa una mejora significativa en comparación con el uso de programas que emplean coordenadas de Kerr-Schild cartesianas. Bajo circunstancias similares, el código Cactus requiere al menos 10000 horas CPU, como se demostró en [36].

El objetivo principal del desarrollo del código ha sido analizar la evolución de un plasma que entra radialmente en el dominio, con densidad y velocidad constantes, siendo acretado por un agujero negro de Kerr y afectado por un campo magnético constante y paralelo al eje de rotación. Los resultados muestran que el código desarrollado puede reproducir la solución de Michel con un error menor al 1 %. Además, encuentra una solución para la acreción de un fluido ideal en un agujero negro de Kerr que autoconverge, y proporciona una solución para el caso general con campo magnético pasivo que es consistente con el caso hidrodinámico en el agujero negro de Kerr, cumpliendo con la restricción de la divergencia del campo magnético.

Se identificaron soluciones estacionarias para la acreción esférica con un campo magnético en el régimen SANE. En este régimen, el campo magnético no afecta significativamente la dinámica del plasma, mostrando pequeñas desviaciones de la solución estacionaria sin campo magnético. Además, la comparación de soluciones obtenidas con diferentes

condiciones iniciales revela que la distribución final es la misma, indicando un comportamiento de atractor. En tiempos cortos de evolución, el campo magnético puede aproximarse al campo de Wald para un agujero negro de Kerr-Newman.

Se verifica la hipótesis presentada en [35] de que un plasma circundante a un agujero negro de Kerr acreta selectivamente cargas positivas si la rotación es prograda y cargas negativas si la rotación es retrógrada. Sin embargo, bajo las condiciones de idealidad del plasma y considerando al plasma como un fluido de prueba, la carga acretada excede la carga crítica predicha en el mismo artículo. Para ilustrar los escenarios planteados consideramos un hoyo negro con una masa $M \approx 4.1 \times 10^6 M_\odot$ similar a la del hoyo negro en el centro de nuestra galaxia, utilizando las conversiones presentadas en el apéndice A, la tasa de acreción para el estado estacionario es de $\dot{M} \approx 35.1963 M_\odot/s$, acretando la masa M en aproximadamente 32.35 horas, mientras que la carga crítica $q_0 \approx 1.469 \times 10^{26} C$ es acretada en un tiempo de 47.251s. Por lo que tanto la masa como la carga acretada modificarían de forma importante al espacio-tiempo.

Estos resultados sugieren que el paradigma actual de la GRMHD ideal presenta limitaciones, especialmente en el espacio-tiempo de Kerr. La exclusión de efectos de resistividad y la evolución del espacio-tiempo pueden causar discrepancias significativas debido a la acumulación de carga. Modelos más complejos que resuelvan simultáneamente las ecuaciones de Einstein pueden ofrecer una descripción más precisa del comportamiento del plasma. Este estudio proporciona una valiosa comprensión de la dinámica de la acreción de plasma en el espacio-tiempo de Kerr y sienta las bases para futuras investigaciones y el desarrollo de modelos más precisos que puedan abordar estas limitaciones y mejorar nuestra comprensión de la acreción de plasmas.

Apéndice **A**

Apéndice

En los cálculos realizados se utilizaron unidades geométricas, donde $G = c = 1$, lo que implica que las coordenadas temporal y espacial están escritos en términos de M , que se utiliza para escalar las unidades para un sistema en particular. Para poder comparar los resultados con observaciones es útil escribir explícitamente las conversiones necesarias para pasar de unidades geométricas a unidades cgs-Gaussianas siguiendo [37]. Aquí r es una longitud genérica, t el tiempo, m la masa, v una velocidad genérica, ρ la densidad de materia en reposo, $\dot{M}$ es la tasa de acreción y $\mathbf{G}$ magnitud del campo magnético.

$$r_{cgs} = 1.47651 \times 10^5 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) r_{geo}, \quad (\text{A.1})$$

$$t_{cgs} = 4.92513 \times 10^{-6} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) t_{geo}, \quad (\text{A.2})$$

$$m_{cgs} = 1.9884 \times 10^{33} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) m_{geo}, \quad (\text{A.3})$$

$$v_{cgs} = 2.99792458 \times 10^{10} v_{geo}, \quad (\text{A.4})$$

$$\rho_{cgs} = 6.17714^{17} \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^2 \rho_{geo}, \quad (\text{A.5})$$

$$\dot{M}_{cgs} = 2.030 \times 10^5 \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \dot{M}_{geo}, \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{G}_{cgs} = 4.414 \times 10^{13} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \mathbf{G}_{geo} \quad (\text{A.7})$$

$$q_{cgs} = 5.304 \times 10^{28} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3/2} q_{geo}. \quad (\text{A.8})$$

Los subíndices representan al valor en el sistema de unidades, *cgs* para el sistema de unidades cgs-Gaussianas y *geo* para el sistema de unidades geométricas, aunque el resultado utilizar el factor de conversión para la tasa de acreción no está en el sistema cgs ya que las unidades serían $M_{\odot}/s$ se mantiene este índice por simplicidad. M está dado en masas solares $M_{\odot}$, en los resultados de este trabajo la masa del hoyo negro se fijó en $M = 4.1 \times 10^6 M_{\odot}$.

REFERENCIAS

- [1] H. Bondi. On Spherically Symmetrical Accretion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 112(2):195–204, 04 1952.
- [2] F. Curtis Michel. Accretion of Matter by Condensed Objects. , 15(1):153–160, January 1972.
- [3] Alejandro Aguayo-Ortiz, Emilio Tejeda, Olivier Sarbach, and Diego López-Cámara. Spherical accretion: Bondi, michel, and rotating black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 504(4):5039–5053, April 2021.
- [4] Edward Malec. Fluid accretion onto a spherical black hole: Relativistic description versus the bondi model. *Phys. Rev. D*, 60:104043, Oct 1999.
- [5] Francisco S Guzmán Murillo, Iván Álvarez Ríos, Alejandro Romero Amezcua, and José A González. Spherical accretion of a perfect fluid onto a black hole. *Revista Mexicana de Física E*, 18(2 Jul-Dec):020206 1–24, Jul. 2021.
- [6] S M Ressler, E Quataert, C J White, and O Blaes. Magnetically modified spherical accretion in grmhd: reconnection-driven convection and jet propagation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 504(4):6076–6095, February 2021.
- [7] Oliver Porth, Hector Olivares, Yosuke Mizuno, Ziri Younsi, Luciano Rezzolla, Monika Moscibrodzka, Heino Falcke, and Michael Kramer. The black hole accretion code. *Computational Astrophysics and Cosmology*, 4(1), May 2017.
- [8] Philipp Mösta, Bruno C Mundim, Joshua A Faber, Roland Haas, Scott C Noble, Tanja Bode, Frank Löffler, Christian D Ott, Christian Reisswig, and Erik Schnetter. Grhydro: a new open-source general-relativistic magnetohydrodynamics code for the einstein toolkit. *Classical and Quantum Gravity*, 31(1):015005, November 2013.
- [9] James M. Stone, Kengo Tomida, Christopher J. White, and Kyle G. Felker. The athena++ adaptive mesh refinement framework: Design and magnetohydrodynamic solvers. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 249(1):4, June 2020.

-
- [10] Aleksander Sadowski, Ramesh Narayan, Jonathan C. McKinney, and Alexander Tchekhovskoy. Numerical simulations of super-critical black hole accretion flows in general relativity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 439(1):503–520, January 2014.
 - [11] Charles F. Gammie, Jonathan C. McKinney, and Gabor Toth. Harm: A numerical scheme for general relativistic magnetohydrodynamics. *The Astrophysical Journal*, 589(1):444–457, May 2003.
 - [12] Oliver Porth, Koushik Chatterjee, Ramesh Narayan, Charles F. Gammie, Yosuke Mizuno, Peter Anninos, John G. Baker, Matteo Bugli, Chi kwan Chan, Jordy Davelaar, Luca Del Zanna, Zachariah B. Etienne, P. Chris Fragile, Bernard J. Kelly, Matthew Liska, Sera Markoff, Jonathan C. McKinney, Bhupendra Mishra, Scott C. Noble, Héctor Olivares, Ben Prather, Luciano Rezzolla, Benjamin R. Ryan, James M. Stone, Niccolò Tomei, Christopher J. White, Ziri Younsi, Kazunori Akiyama, Antxon Alberdi, Walter Alef, Keiichi Asada, Rebecca Azulay, Anne-Kathrin Baczko, David Ball, Mislav Baloković, John Barrett, Dan Bintley, Lindy Blackburn, Wilfred Boland, Katherine L. Bouman, Geoffrey C. Bower, Michael Bremer, Christiaan D. Brinkerink, Roger Brissenden, Silke Britzen, Avery E. Broderick, Dominique Brogiere, Thomas Bronzwaer, Do-Young Byun, John E. Carlstrom, Andrew Chael, Shami Chatterjee, Ming-Tang Chen, Yongjun Chen, Ilje Cho, Pierre Christian, John E. Conway, James M. Cordes, B. Crew Geoffrey, Yuzhu Cui, Mariafelicia De Laurentis, Roger Deane, Jessica Dempsey, Gregory Desvignes, Sheperd S. Doleman, Ralph P. Eatough, Heino Falcke, Vincent L. Fish, Ed Formanont, Raquel Fraga-Encinas, Bill Freeman, Per Friberg, Christian M. Fromm, José L. Gómez, Peter Galison, Roberto García, Olivier Gentaz, Boris Georgiev, Ciriaco Goddi, Roman Gold, Minfeng Gu, Mark Gurwell, Kazuhiro Hada, Michael H. Hecht, Ronald Hesper, Luis C. Ho, Paul Ho, Mareki Honma, Chih-Wei L. Huang, Lei Huang, David H. Hughes, Shiro Ikeda, Makoto Inoue, Sara Issaoun, David J. James, Buell T. Jannuzi, Michael Janssen, Britton Jeter, Wu Jiang, Michael D. Johnson, Svetlana Jorstad, Taehyun Jung, Mansour Karami, Ramesh Karuppusamy, Tomohisa Kawashima, Garrett K. Keating, Mark Kettenis, Jae-Young Kim, Junhan Kim, Jongsoo Kim, Motoki Kino, Jun Yi Koay, M. Koch Patrick, Shoko Koyama, Michael Kramer, Carsten Kramer, Thomas P. Krichbaum, Cheng-Yu Kuo, Tod R. Lauer, Sang-Sung Lee, Yan-Rong Li, Zhiyuan Li, Michael Lindqvist, Kuo Liu, Elisabetta Liuzzo, Wen-Ping Lo, Andrei P. Lobanov, Laurent Loinard, Colin Lonsdale, Ru-Sen Lu, Nicholas R. MacDonald, Jirong Mao, Daniel P. Marrone, Alan P. Marscher, Iván Martí-Vidal, Satoki Matsushita, Lynn D. Matthews, Lia Medeiros, Karl M. Menten, Izumi Mizuno, James M. Moran, Kotaro Moriyama, Monika Moscibrodzka, Cornelia Müller, Hiroshi Nagai, Neil M. Nagar, Masanori Nakamura, Gopal Narayanan, Iniyan Natarajan, Roberto Neri, Chunchong Ni, Aristeidis Noutsos, Hiroki Okino, Tomoaki Oyama, Feryal Özel, Daniel C. M. Palumbo, Nimesh Patel, Ue-Li Pen, Dominic W. Pesce, Vincent Piétu, Richard Plambeck, Aleksandar PopStefanija, Jorge A. Preciado-López, Dimitrios Psaltis,

-
- Hung-Yi Pu, Venkatesh Ramakrishnan, Ramprasad Rao, Mark G. Rawlings, Alexander W. Raymond, Bart Ripperda, Freek Roelofs, Alan Rogers, Eduardo Ros, Mel Rose, Arash Roshanineshat, Helge Rottmann, Alan L. Roy, Chet Ruszczyk, Kazi L. J. Rygl, Salvador Sánchez, David Sánchez-Arguelles, Mahito Sasada, Tuomas Savolainen, F. Peter Schloerb, Karl-Friedrich Schuster, Lijing Shao, Zhiqiang Shen, Des Small, Bong Won Sohn, Jason SooHoo, Fumie Tazaki, Paul Tiede, Remo P. J. Tilanus, Michael Titus, Kenji Toma, Pablo Torne, Tyler Trent, Sascha Tripp, Shuichiro Tsuda, Ilse van Bemmelen, Huib Jan van Langevelde, Daniel R. van Rossum, Jan Wagner, John Wardle, Jonathan Weintraub, Norbert Wex, Robert Wharton, Maciek Wielgus, George N. Wong, Qingwen Wu, Ken Young, André Young, Feng Yuan, Ye-Fei Yuan, J. Anton Zensus, Guangyao Zhao, Shan-Shan Zhao, Ziyang Zhu, and (The Event Horizon Telescope Collaboration). The event horizon general relativistic magnetohydrodynamic code comparison project. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 243(2):26, aug 2019.
- [13] Thomas W. Baumgarte and Stuart L. Shapiro. *Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer*. Cambridge University Press, 2010.
 - [14] Miguel Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford University Press, 04 2008.
 - [15] Luis Anton, Olindo Zanotti, Juan A. Miralles, Jose M. Martí, Jose M. Ibanez, Jose A. Font, and Jose A. Pons. Numerical 3+1 general relativistic magnetohydrodynamics: A local characteristic approach. *The Astrophysical Journal*, 637(1):296–312, January 2006.
 - [16] Thomas W. Baumgarte and Stuart L. Shapiro. General relativistic magnetohydrodynamics for the numerical construction of dynamical spacetimes. *The Astrophysical Journal*, 585(2):921, mar 2003.
 - [17] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
 - [18] Bernard Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 3 edition, 2022.
 - [19] A. Cruz-Orsio, F. D. Lora-Clavijo, and F. S. Guzman. Is the flip-flop behaviour of accretion shock cones on to black holes an effect of coordinates? *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 426:732–738, 2012.
 - [20] Bram van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. v. a second-order sequel to godunov's method. *Journal of Computational Physics*, 32(1):101–136, 1979.
 - [21] Bram Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. iv. a new approach to numerical convection. *Journal of Computational Physics*, 23(3):276–299, 1977.

-
- [22] P. L. Roe. Characteristic-based schemes for the euler equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 11:195–230, 1981.
 - [23] A. M. Anile. *Relativistic Fluids and Magneto-fluids: With Applications in Astrophysics and Plasma Physics*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1990.
 - [24] José A. Font. Numerical hydrodynamics and magnetohydrodynamics in general relativity. *Living Reviews in Relativity*, 11(1):7, 2008.
 - [25] Charles R. Evans and John F. Hawley. Simulation of Magnetohydrodynamic Flows: A Constrained Transport Model. , 332:659, September 1988.
 - [26] Gábor Tóth. The $\nabla \cdot \mathcal{B} = 0$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes. *Journal of Computational Physics*, 161(2):605–652, 2000.
 - [27] Chi-Wang Shu and Stanley Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, ii. *Journal of Computational Physics*, 83(1):32–78, 1989.
 - [28] Fabio Duvan Lora Clavijo. *Implementación numérica de la acreción de un gas ideal en hoyos negros*. PhD thesis, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia Mich., México, 2013.
 - [29] Vassilios Mewes, Yosef Zlochower, Manuela Campanelli, Thomas W. Baumgarte, Zachariah B. Etienne, Federico G. Lopez Armengol, and Federico Cipolletta. Numerical relativity in spherical coordinates: A new dynamical spacetime and general relativistic mhd evolution framework for the einstein toolkit. *Physical Review D*, 101(10), May 2020.
 - [30] F. D. Lora-Clavijo, A. Cruz-Osorio, and F. S. Guzmán. Cafe: A new relativistic mhd code. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 218(2):24, June 2015.
 - [31] Daniel M. Siegel, Philipp Mösta, Dhruv Desai, and Samantha Wu. Recovery schemes for primitive variables in general-relativistic magnetohydrodynamics. *The Astrophysical Journal*, 859(1):71, May 2018.
 - [32] Scott C. Noble, Charles F. Gammie, Jonathan C. McKinney, and Luca Del Zanna. Primitive variable solvers for conservative general relativistic magnetohydrodynamics. *The Astrophysical Journal*, 641(1):626, apr 2006.
 - [33] William I. Newman and Nathaniel D. Hamlin. Primitive variable determination in conservative relativistic magnetohydrodynamic simulations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 36(4):B661–B683, 2014.
 - [34] Philippos Papadopoulos and José A. Font. Relativistic hydrodynamics around black holes and horizon adapted coordinate systems. *Physical Review D*, 58(2), June 1998.

- [35] Robert M. Wald. Black hole in a uniform magnetic field. *Phys. Rev. D*, 10:1680–1685, Sep 1974.
- [36] Flavio Rosales Infante. Formación de distribuciones estacionarias de plasma alrededor de hoyos negros de kerr. Licenciatura, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Mich., México, julio 2022. Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas "Luis Manuel Rivera Gutierrez".
- [37] Luciano Rezzolla and Olindo Zanotti. *Relativistic Hydrodynamics*. Oxford University Press, 09 2013.