



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
IFM

T E S I S

“Aspectos Matemáticos De La Cuantización De Lazos Abeliana”

PARA OBTENER EL GRADO DE:
Maestro en Ciencias en el Área de Física

PRESENTA:
Juan José Martinez Valladares

DIRECTORES DE TESIS:
Dr. Ulises Nucamendi Gómez
Dr. Alejandro Corichi Rodríguez Gil

Ciudad de Morelia, Estado de Michoacan, México
septiembre del 2024



Resumen

En este documento, trabajamos en el marco de la cuantización por lazos aplicada a la teoría de Maxwell, centrándonos en ofrecer nuevas interpretaciones de las funciones lineales positivas (PLFs). Las PLFs son ciertos objetos matemáticos utilizados para definir cómo se cuantizan teorías físicas en el método de cuantización canónica (CCR, por sus siglas en inglés). Estos “conectan” las álgebras de holonomías con operadores en el espacio de Hilbert. Nuestro estudio se centra en dos tipos principales de PLFs, también llamados estados algebraicos: una que se aplica sin un espacio-tiempo fijo, es decir, sin asumir una estructura geométrica particular para el espacio-tiempo, que llamaremos $\omega_0(\cdot)$ y da origen a la cuantización de lazos. La otra utiliza un fondo fijo, específicamente el espacio-tiempo de Minkowski, y la llamaremos $\omega_F(\cdot)$. Esta segunda PLF da origen a la cuantización en el espacio Fock. Ambos tipos de PLFs se aplican a álgebras de holonomías, denominadas $\overline{\mathcal{HA}}$ y $\overline{\mathcal{HA}}_r$ [1]. Investigamos cómo la función $\omega_0(\cdot)$ aplicada a la álgebra de holonomías $\overline{\mathcal{HA}}_r$ puede ser reinterpretada de una nueva manera, mientras que $\omega_F(\cdot)$ aplicada a la álgebra $\overline{\mathcal{HA}}_r$ puede ser conectada con $\omega_0(\cdot)$ mediante un análisis en un parámetro r característico de las álgebras $\overline{\mathcal{HA}}_r$ [2], este nuevo enfoque toma como partida el trabajo “Fock representations from $U(1)$ holonomy algebras” [1]. En dicho trabajo se desarrolla un isomorfismo entre las álgebras $\overline{\mathcal{HA}}_r$ y $\overline{\mathcal{HA}}$, y se exploran los caminos mostrados en la figura [3], donde $[\alpha]$ son las curvas que caracterizan la holonomía

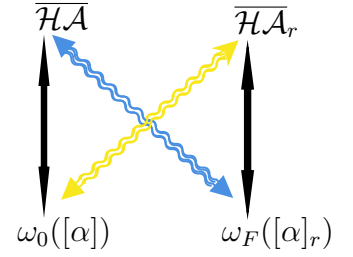


Fig. 1: Relaciones en [1]

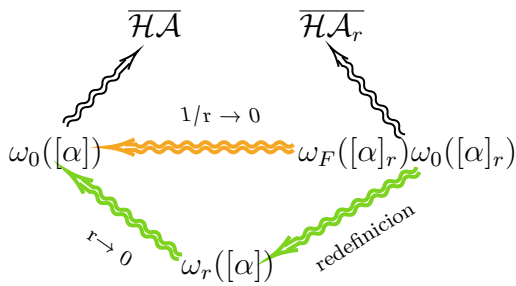


Fig. 2: Relaciones trabajadas (camino verde inferior izquierdo hasta llegar a la parte superior del diagrama). Finalmente, el segundo análisis mostrará una relación entre las PLFs, $\omega_F([\alpha]_r)$ y $\omega_0([\alpha])$, mediante el límite asintótico en el parámetro r (camino naranja en la parte media del diagrama de derecha a izquierda). *Palabras clave:* Holonomía, Estados Algebraicos, Grupos de Norma, Electromagnetismo, Cuantización Canónica.

¹Veremos a detalle qué son estas álgebras en el capítulo 5

²Que también veremos a detalle en el capítulo 5.

Abstract

In this document, we work within the framework of loop quantization applied to Maxwell's theory, focusing on providing new interpretations of Positive Linear Functionals (PLFs). PLFs are certain mathematical objects used to define how physical theories are quantized in the canonical quantization method (CCR). These “connect” holonomy algebras with operators in Hilbert space.

Our study focuses on two main types of PLFs, also called algebraic states: one that applies without a fixed spacetime, meaning without assuming a particular geometric structure for spacetime, which we will call $\omega_0(\cdot)$, leading to loop quantization. The other uses a fixed background, specifically Minkowski spacetime, and we will call it $\omega_F(\cdot)$. This second PLF gives rise to Fock space quantization. Both types of PLFs apply to holonomy algebras, referred to as $\overline{\mathcal{HA}}$ and $\overline{\mathcal{HA}}_r$ ³. We investigate how the function $\omega_0(\cdot)$ applied to the holonomy algebra $\overline{\mathcal{HA}}_r$ can be reinterpreted in a new way, while $\omega_F(\cdot)$ applied to the algebra $\overline{\mathcal{HA}}_r$ can be connected to $\omega_0(\cdot)$ through an analysis involving a characteristic parameter r of the algebras $\overline{\mathcal{HA}}_r$ ⁴.

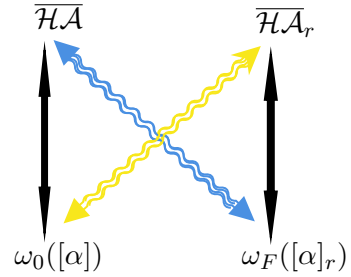


Fig. 3: Relaciones en [1]

This new approach is based on the work “Fock representations from $U(1)$ holonomy algebras” [1], which develops an isomorphism between the algebras $\overline{\mathcal{HA}}_r$ and $\overline{\mathcal{HA}}$, exploring the paths shown in Figure 3, where $[\alpha]$ represent curves characterizing the holonomy.

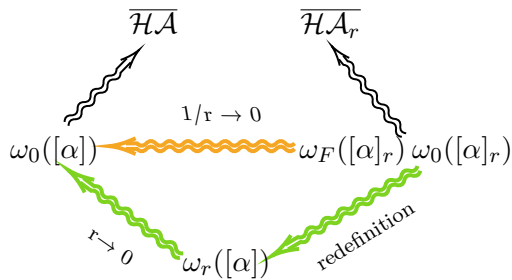


Fig. 4: Worked relationships

In a more technical manner, the path to follow in the reorganization of $\omega_0(\cdot)$ applied to $\overline{\mathcal{HA}}_r$ is shown in Figure 4, focusing on the mappings ω_0 and ω_F applied to $\overline{\mathcal{HA}}_r$ (upper right path). Starting, for example, from $\omega_0([\alpha]_r)$, we will perform an analysis attempting to incorporate the “smoothed” term into the measure (green lower right path), defining a new PLF which we call $\omega_r([\alpha])$. Then, by taking the limit of the parameter r to zero, this will result in the application ω_0 over the algebra $\overline{\mathcal{HA}}$, that is, $\omega_0([\alpha])$ (green lower left path leading to the top of the diagram).

Finally, the second analysis will show a relationship between the PLFs, $\omega_F([\alpha]_r)$ and $\omega_0([\alpha])$, through the asymptotic limit in the parameter r (orange path in the middle of the diagram from right to left).

Keywords: Holonomy, Algebraic States, Gauge Groups, Electromagnetism, Canonical Quantization.

³These algebras will be detailed in Chapter 5

⁴This will also be discussed in detail in Chapter 5

Agradecimientos

“ Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi madre, Blanca Beatriz, por su inquebrantable apoyo. También extendo mi gratitud al Dr. Brayan Larios por su valiosa orientación, especialmente en mi transición hacia la maestría.

Agradezco profundamente a mis asesores de tesis de maestría, Dr. Alejandro Corichi, Dr. Ulisses Nucamendi, Dr. José Antonio, Dr. Olivier Sarbach, Dr. Christian Schubert por su invaluable guía y dedicación.

Además, Agradezco a mis compañeros y buenos amigos, en particular a Tania, Lupita, Edgar y Gustavo, por sus discusiones y animo constante durante la realización de esta tesis.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por el apoyo brindado a través de su programa de becas.”

Contenido

Resumen	iii
Agradecimientos	v
1 Introducción	1
1.1 Problema de Investigación	2
1.2 Objetivos	3
1.2.1 Objetivos Generales	3
1.2.2 Objetivos Específicos	3
1.3 Justificación	3
1.4 Alcance y limitaciones del proyecto	4
1.5 Hipótesis	4
2 Herramientas Matemáticas	5
2.1 Espacios topológicos	5
2.1.1 Mapeo entre espacios topológicos	5
2.2 Estructuras algebraicas	6
2.3 Variedades diferenciales	7
2.3.1 Calculo en variedades	7
2.3.2 Vectores, campos vectoriales y espacios tangentes	8
2.3.3 Vectores y espacios cotangentes	9
2.3.4 Formas diferenciales	9
2.3.5 Integrales de formas diferenciales	11
2.3.6 Tensor en una variedad diferenciable	12
2.3.7 Grupo uniparamétrico de transformaciones y flujos	12
2.3.8 Derivada de Lie	12
2.3.9 Conexiones, transporte paralelo y holonomías	14
2.4 Teoría de la medida	15
2.4.1 Integral de Lebesgue	15
2.4.2 Transformada de Fourier-Stieltjes de la medida	15
2.5 Teoría de grupos	16
2.5.1 Grupos en Física (breve descripción)	16
2.6 Haces fibrados	16
2.6.1 Haz	16
2.6.2 Haz fibrado principal	17
2.6.3 Haz vectorial	17
2.6.4 Conexión	18
2.6.5 Holonomías	18
2.7 Grupo y álgebra de Lie	20
2.7.1 Medida de Haar	21
2.8 Transformada de Legendre	22
2.9 C^* -álgebra	22
2.10 Teoría GNS	23

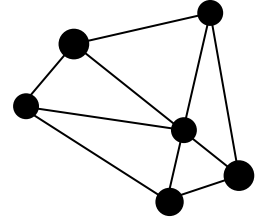
3	Teoría de Campos	25
3.1	Descripción Geométrica de la Teoría Clásica de Campos	25
3.1.1	Mecánica Hamiltoniana	25
3.1.2	Ecuaciones de Hamilton	28
3.1.3	Sistemas no regulares	28
3.1.4	Ligaduras y normas	29
3.1.5	Campo Escalar	29
3.1.6	Campo electromagnético clásico	32
4	Cuantización de campos	37
4.0.1	Observables	38
4.1	Mecánica cuántica Polimérica	38
4.1.1	Cuantización algebraica de Weyl	39
4.1.2	Caso I, límite d a infinito	42
4.1.3	Caso II, límite d a cero	44
4.2	Cuantización del campo electromagnético	46
4.2.1	Descomposición de frecuencia positiva	46
4.2.2	Construcción del mapeo PLF	47
5	Álgebras de holonomías $U(1)$	49
5.1	Álgebra de las holonomías Abelianas $U(1)$	49
5.1.1	$\mathcal{FL}_{x_0}$ álgebra libre generada por $\mathcal{L}_{x_0}$	50
5.1.2	Representación del mapeo ω_0 para elementos de $\mathcal{HA}$	52
5.2	Álgebra de holonomías Abelianas $U(1)$ “suavizadas”	52
5.2.1	$\mathcal{FL}_{x_0}$ álgebra libre generada por $\mathcal{L}_{x_0}$	55
5.2.2	Representación del mapeo ω_F para elementos de $\mathcal{HA}_r$	55
5.2.3	Representación del mapeo ω_0 para elementos de $\mathcal{HA}_r$	56
5.2.4	Representación del mapeo ω_F para elementos de $\mathcal{HA}$	56
6	Reajuste de las PLFs en el álgebra de holonomías	59
6.1	Análisis sobre $\omega_0([\alpha]_r)$	59
6.1.1	Análisis asintótico sobre r de ω_r	60
6.2	Análisis sobre $\omega_F([\alpha]_r)$	62
6.3	Relación entre $\omega_F([\alpha]_r)$ y $\omega_0([\alpha])$	65
6.3.1	Límites Asintóticos	66
6.4	Cambio en el factor de forma	68
6.4.1	Análisis asintótico sobre r de $\tilde{\omega}_F([\alpha]_r)$	70
6.4.2	Nuevo factor de forma Gaussiano	71
6.4.3	Límites Asintóticos	71
6.4.4	Producto interno y espacio de Hilbert	74
7	Conclusiones	77
7.1	Discusión	77
7.2	Futuros trabajos	78
A	Representaciones	79
A.0.1	Representación tipo Schrödinger	79
A.0.2	Representación tipo Fock	80
B	Descomposición 3+1	81

CAPÍTULO 1

Introducción

La teoría de la gravedad cuántica de lazos (LQG) se originó cuando Abhay Ashtekar reescribió la teoría de la relatividad general de Einstein de una manera que se asemeja a las teorías de Yang-Mills.^[2] Esta reformulación (1986), conocida como las variables de Ashtekar, permitió que se aplicaran técnicas de cuantización utilizadas en teorías gauge al ámbito de la relatividad general. La motivación principal detrás de LQG es abordar el problema de unificar la mecánica cuántica con la relatividad general, un desafío fundamental en la física teórica.

En LQG, el espacio-tiempo se describe mediante redes de espín y la geometría se cuantiza en términos de áreas y volúmenes discretos, lo que contrasta con la descripción continua de la relatividad general clásica. Un componente clave en esta descripción es el uso de holonomías, estas proporcionan una representación matemática de cómo las conexiones gauge (y por ende, la geometría) se comportan a lo largo de lazos en una hiper-superficie espacial denominada como Σ .



Redes de espín

A lo largo de los años, LQG ha logrado avances teóricos significativos, como la derivación del espectro discreto del área y del volumen (Rovelli y Smolin, “Discreteness of area and volume in quantum gravity”, 1995). Además, LQG ha propuesto soluciones y predicciones innovadoras, como la cuantización del espacio-tiempo a escalas microscópicas. En el contexto del Big Bang, LQG sugiere que las singularidades infinitas se reemplazan por estados cuánticos bien definidos, eliminando la idea de una singularidad infinita y proponiendo una transición cuántica desde un estado previo (Bojowald, “Absence of a Singularity in Loop Quantum Cosmology”, 2001). En cuanto a los agujeros negros, LQG predice que la singularidad central es sustituida por una región en la que el espacio-tiempo tiene una estructura discretizada, evitando infinitos y proporcionando una descripción más manejable de estas regiones extremas (Ashtekar y otros, “Quantum Nature of the Big Bang: An Analytical and Numerical Investigation”, 2005).

Aunque inicialmente se desarrolló para la gravedad, este enfoque también ha sido explorado en el marco electromagnético en la década de los 90. Esta teoría de Maxwell se construye en una formulación canónica que implica una descomposición $3 + 1$ de nuestra variedad espacio-tiempo, donde etiquetamos nuestra superficie espacial como Σ . El espacio de fases consiste en pares $(A_a, \tilde{E}^a)$ ^[1] que decaen en el infinito. El corchete de Poisson entre estas variables viene dado por:

$$\{A_a(x), \tilde{E}^b(y)\} = 4\pi\delta_a^b\delta^3(x, y)$$

Los observables fundamentales de la teoría de Maxwell en la formulación de lazos son las holonomías h_α del potencial magnético A_a y los flujos del campo eléctrico $E(S)$. La holonomía h_α está definida como:

$$h_\alpha(A) := \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \int_\alpha A\right)$$

¹La tilde sobre el símbolo del campo eléctrico indica que se trata de un campo vectorial densificado.

donde α es una curva cerrada y ϵ es un parámetro introducido en [3] para obtener las unidades apropiadas de un campo de conexión $U(1)$, el flujo del campo eléctrico $E(S)$ a través de una superficie S se expresa como:

$$E(S) = \int_S E$$

Estos satisfacen la relación dada por el corchete de Poisson entre $h_\alpha(a)(A)$ y $E(S)$ que está dada por:

$$\{h_\alpha, E(S)\} = \frac{4\pi i}{\epsilon} h_\alpha I(\alpha, S)$$

Aquí, $I(\alpha, S)$ es el numero de intersección, cuenta cuantas veces se da la intersección entre la curva α y la superficie S , con 1 si es orientada positiva o -1 si es orientada negativa, esta orientación sigue la “regla de la mano derecha”. Definimos el álgebra de observables generada por las holonomías $h_\alpha \in U(1)$ como observables de configuración, y los flujos de campo eléctrico $E(S)$ como momentos. El siguiente paso es definir una PLF, que será un mapeo $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\omega(aa^*) \geq 0$, donde a son elementos de $\mathcal{A}$ y a^* implica el conjugado. Este mapeo ω nos provee el valor de expectación en el vacío del operador de holonmia, definido través del formalismo GNS [2], y es por ello su importancia, así como la razón de nuestro interés en la exploración de esta estructura matemática. En el presente documento mantendremos la siguiente estructura:

En el Capítulo 2 vamos a desarrollar un resumen de las herramientas matemáticas involucradas en la comprensión del tema. En el Capítulo 3 desarrollaremos la teoría clásica de campos desde un punto de vista geométrico, describiendo la acción, sus respectivos Lagrangianos y Hamiltonianos usando la descomposición $3 + 1$, tanto para el campo escalar como para el vectorial. En el Capítulo 4 vamos a desarrollar el proceso de cuantización desde una C^* -álgebra, en particular para el álgebra de Weyl, y veremos el caso de la mecánica cuántica polimérica. En el Capítulo 5 daremos un breve vistazo al álgebra de holonomías, descrita en los artículos [1] y [4], donde se desarrollan las estructuras $\overline{\mathcal{HA}}_r$ y $\overline{\mathcal{HA}}$. En el Capítulo 6 presentaremos como resultados de este trabajo el análisis de las PLF en las estructuras $\overline{\mathcal{HA}}_r$ y $\overline{\mathcal{HA}}$. En el Capítulo 7 concluiremos con una discusión y conclusiones de nuestro proyecto.

1.1 Problema de Investigación

El problema presentado en esta tesis es realizar una reinterpretación de las funciones lineales positivas $\omega(\cdot)$ (PLFs) en la teoría cuántica de lazos, en particular las descritas en el artículo [1]. Este estudio se propone alcanzar dos resultados importantes:

1. Absorber el término de “suavizado” (un parámetro denominado con la letra r) descrito en la estructura de las álgebras $\overline{\mathcal{HA}}_r$ en la medida probabilística descrita por la construcción GNS para definir una nueva PLF que llamaremos $\omega_r([\alpha])$ y luego llevar el parámetro r a cero, para mostrar que volvemos al mapeo $\omega_0([\alpha])$ que llamaremos “Loopy” siendo α curvas cerradas [3].
2. Encontrar una relación entre $\omega_F([\alpha])$ y $\omega_0([\alpha]_r)$ mediante límites en el parámetro r , similar al caso anterior.

Para lograr esto planteamos los siguientes pasos específicos:

- Desarrollar un nuevo mapeo $\omega_r([\alpha])$ a partir de $\omega_0([\alpha]_r)$.
- Realizar una reinterpretación de las PLFs mencionadas en el punto anterior, permitiendo un análisis en el estilo de la mecánica cuántica polimérica [5]. Esto implica llevar a cabo un análisis asintótico en el parámetro r de los mapeos.
- Como mencionamos anteriormente, establecer una relación entre $\omega_F([\alpha]_r)$ y $\omega_0([\alpha])$, denominando esta última PLF como “Loopy” para facilitar su referencia.

²ver capítulo 2

³Ver descripción en el capítulo 5

Este enfoque busca no solo reinterpretar las PLFs dentro del marco de la teoría cuántica de lazos, sino también explorar la posibilidad de eliminar el parámetro r de “suavizado” y entender cómo este proceso afecta a la relación entre diferentes PLFs en el contexto de la construcción GNS. El análisis propuesto permitirá comprender mejor las estructuras algebraicas implicadas y cómo estas pueden simplificarse o modificarse para mejorar su aplicabilidad y comprensión en teorías cuánticas. El estudio de los límites en el parámetro r será crucial para establecer relaciones entre distintas representaciones de las PLFs y su comportamiento asintótico.

1.2 Objetivos

El objetivo general de esta investigación es acercarnos a las técnicas de cuantización de lazos a través del caso más simple, el Abelian; que corresponde a la cuantización de lazos en la teoría electromagnética. Este objetivo proporciona el marco general para explorar y comprender los fundamentos de la cuantización de lazos y su relación con la teoría cuántica.

1.2.1 Objetivos Generales

A través del estudio de la teoría de cuantización de lazos en el caso electromagnético, nos proponemos:

- Acercarnos a las técnicas de cuantización de lazos, entendiendo su aplicación en el contexto de la teoría cuántica.
- Explorar y comprender los fundamentos de la cuantización de lazos, particularmente en el estudio de los mapeos PLFs y las estructuras algebraicas sobre los que se aplican estos.

Estos objetivos generales proporcionan la dirección para explorar la cuantización de lazos y su aplicación en la teoría electromagnética.

1.2.2 Objetivos Específicos

Para lograr el objetivo general mencionado, nos enfocaremos en los aspectos específicos mencionados en el problema de investigación:

- Desarrollar un nuevo mapeo $\omega_r([\alpha])$ a partir de $\omega_0([\alpha]_r)$.
- Realizar una reinterpretación de las PLFs mencionadas en el punto anterior, permitiendo un análisis en el estilo de la mecánica cuántica polimérica [5]. Esto implica llevar a cabo un análisis asintótico en el parámetro r de los mapeos.
- Establecer una relación entre $\omega_F([\alpha]_r)$ y $\omega_0([\alpha])$, denominando esta nueva función lineal positiva como PLF “Loopy” para facilitar su referencia.

1.3 Justificación

La relación entre $\omega_F([\alpha]_r)$ y $\omega_0([\alpha])$ sugiere una conexión potencial entre las representaciones del espacio de Fock y la representación en el espacio de Hilbert de Ashtekar-Lewandowski, a través del límite asintótico en el parámetro r al estilo de [5]. Esto es interesante porque pasamos de una teoría con algún fondo fijo en el espacio de Fock a una teoría sin fondo definido. La elección de distintos valores del parámetro r proveniente de la “suavización” en el álgebra $\overline{\mathcal{HA}}_r$ esta genera diferentes cuantizaciones (posiblemente equivalentes); la absorción del parámetro r para definir un nuevo mapeo PLF nos permitiría pasar de una PLF aplicada a una familia de álgebras $\overline{\mathcal{HA}}_r$, una para cada valor de r , a un mapeo ω_r para una sola álgebra $\overline{\mathcal{HA}}$, y en el caso de $r \rightarrow 0$ tenemos el caso del mapeo “Loopy” escrito como $\omega_0([\alpha])$.

1.4 Alcance y limitaciones del proyecto

El proyecto pretende mostrar un camino alternativo que relacione de manera directa las cuantizaciones (PLF) en las estructuras $\overline{\mathcal{HA}}_r$ y $\overline{\mathcal{HA}}$, está ubicado únicamente en el contexto de la aplicación del método de cuantización utilizada dentro del marco de la gravedad cuántica de lazos a la teoría de Maxwell, mostrando nuevas perspectivas interesantes en estos mapeos PLFs.

1.5 Hipótesis

Basándonos en la revisión de la literatura y tal como hemos presentado en la descripción del problema de investigación, formulamos las siguientes hipótesis:

1. La reinterpretación de las funciones lineales positivas (PLFs) en la teoría de cuántica de lazos, en particular la absorción del término de “suavizado” en las álgebras $\overline{\mathcal{HA}}_r$, mediante la medida probabilística descrita por la construcción GNS, permitirá identificar un nuevo mapeo $\omega_r([\alpha])$ que se derive de $\omega_0([\alpha]_r)$, y llevando el parámetro r a cero obtendremos el mapeo que llamamos “Loopy” $\omega_0([\alpha])$.
2. Existe una relación significativa entre la PLF $\omega_F([\alpha]_r)$ y la PLF $\omega_0([\alpha])$, la cual puede ser caracterizada mediante límites en el parámetro r . Esta relación revelará aspectos importantes sobre el comportamiento asintótico de las PLFs, permitiendo una interpretación que permite pasar de una teoría con fondo fijado a una sin fondo fijo.

Estas hipótesis proporcionan una guía para la investigación propuesta y servirán como base para el diseño y la ejecución de los experimentos y análisis necesarios para validarlas.

CAPÍTULO 2

Herramientas Matemáticas

La geometría diferencial se encuentra comúnmente en la relatividad general, donde el espacio-tiempo se representa como una variedad diferenciable de cuatro dimensiones. Sin embargo, su aplicación se extiende a la mecánica clásica y teoría cuántica de campos, incluyendo la gravedad cuántica, la teoría de cuerdas y la teoría de Yang-Mills. En este capítulo trataremos de desarrollar un resumen de los conceptos matemáticos que nos permitirán tener una base matemática para entender y desarrollar los temas expuestos en los siguientes capítulos, tomando como principal fuente los libros [6], [7], [8] y [9] caso contrario indicaremos la referencia.

2.1 Espacios topológicos

Definición 2.1 : Sea X un conjunto y $\mathcal{T}$ denota cierta colección de subconjuntos de X , el par $\{X, \mathcal{T}\}$ es un espacio topológico si satisface:

- i El conjunto vacío y X están en $\mathcal{T}$.
- ii La intersección finita de conjuntos en $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.
- iii La unión arbitraria de conjuntos en $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

La colección $\mathcal{T}$ se llama la **topología** en X , y los conjuntos en $\mathcal{T}$ son llamados conjuntos abiertos. Algunos ejemplos comunes son:

- (a) Si X es un conjunto y $\mathcal{T}$ es la colección de todos los subconjuntos de X , entonces las condiciones (i) $\sim$ (iii) están automáticamente satisfechas. Esta topología se llama la **topología discreta**.
- (b) Sea X un conjunto y $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Claramente $\mathcal{T}$ satisface (i) $\sim$ (iii). Esta topología se llama la **topología trivial**.
- (c) Sea X la recta real $\mathbb{R}$. Todos los intervalos abiertos (a, b) y sus uniones definen una topología llamada la **topología usual**. a y b pueden ser $-\infty$ y ∞ respectivamente. De manera similar, se puede definir la topología usual en $\mathbb{R}^n$.

2.1.1 Mapeo entre espacios topológicos

Un concepto crucial en la mayoría de las ramas de las matemáticas es el de mapeo, en particular cuando estos preservan la estructura entre dos conjuntos dotados del mismo tipo de estructura matemática.

Definición 2.2 : Sea X y Y dos conjuntos, y sean $\{x\}$, $\{y\}$ etiquetas sobre los elementos de cada conjunto respectivamente, decimos que el mapeo f es una regla de asignación de elementos de X a elementos de Y que escribimos como:

$$f : X \rightarrow Y$$

Los mapeos adquieren nombres especiales según sus características:

- 1 **Inyectivo:** Si para cada $x \neq x' \in X$ implica $f(x) \neq f(x')$
- 2 **Sobreyectivo:** si para cada $y \in Y$ existe al menos un elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$
- 3 **Biyectivo:** cuando satisface los dos anteriores.

Puede haber más de dos elementos en X que correspondan al mismo $y \in Y$. Un subconjunto de X cuyos elementos son mapeados a $y \in Y$ bajo f se llama la **imagen inversa** de y , denotada por $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$.

Definición 2.3 : Si $f : X \rightarrow Y$ definido por $f : x \mapsto f(x)$ es biyectivo, existe un **mapeo inverso** $f^{-1} : Y \rightarrow X$, $f^{-1} : f(x) \mapsto x$ que también es biyectivo.

Podemos decir ahora que un mapeo $f : (X, T) \rightarrow (Y, T')$ entre espacios topológicos es **continuo** si, para todo $O \in T'$, se cumple que $f^{-1}(O) \in T$.

El mapeo inverso es crucial en el contexto de mapeos entre espacios topológicos, ya que permite establecer la equivalencia entre estos espacios mediante homeomorfismos. Un **homeomorfismo** es una función biyectiva continua con un mapeo inverso también continuo, preservando así las propiedades topológicas. Los mapeos que conservan la estructura matemática se denominan morfismos. Dependiendo de la estructura que se desea preservar, estos mapeos reciben nombres específicos. Por ejemplo, un **homomorfismo** es un mapeo entre dos estructuras matemáticas que preserva las operaciones matemáticas. Si este mapeo tiene inversa y la inversa también es un homomorfismo, se llama **isomorfismo**. Además, los **difeomorfismos**, que serán tratados en la sección de cálculo en variedades, también son de interés.

2.2 Estructuras algebraicas

Es un conjunto junto con una o más operaciones que satisfacen ciertas propiedades específicas. Estas propiedades determinan cómo interactúan los elementos del conjunto bajo las operaciones definidas. Algunas de las estructuras algebraicas más comunes:

- **Grupo:** Un grupo es una estructura algebraica $(G, \cdot)$ donde G es un conjunto y “ $\cdot$ ” es una operación binaria que cumple con las siguientes propiedades:
 - Cerradura: Para todo $x, y \in G$, $x \cdot y \in G$.
 - Asociatividad: Para todo $x, y, z \in G$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
 - Elemento neutro: Existe un elemento $e \in G$ tal que para todo $x \in G$, $e \cdot x = x \cdot e = x$.
 - Elemento inverso: Para todo $x \in G$, existe $x^{-1} \in G$ tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

veremos de nuevo la noción de grupo en la sección 2.5

- **Campo:** Un campo es una estructura algebraica $(F, +, \cdot)$ donde F es un conjunto y “ $+$ ” y “ $\cdot$ ”, donde $(F, +)$ y $(F, \cdot)$ tienen estructura de grupo con elementos neutros 0 y 1, respectivamente. ,son operaciones binarias que cumplen con las siguientes propiedades:
 - $(F, +)$ es un grupo conmutativo con el elemento neutro aditivo 0.
 - $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo conmutativo con el elemento neutro multiplicativo 1 (donde 0 denota el elemento neutro aditivo).

- La multiplicación es distributiva con respecto a la suma: para todo $x, y, z \in F$, se cumple $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.
- **Espacio Vectorial:** Un espacio vectorial sobre un campo F es una estructura algebraica $(V, +, \cdot)$ donde V es un conjunto, “+” es una operación binaria $+: V \times V \rightarrow V$ y “ $\cdot$ ” es una operación binaria $\cdot: F \times V \rightarrow V$ que cumplen con las siguientes propiedades:
 - Asociatividad de la suma de vectores: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
 - Conmutatividad de la suma de vectores: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
 - Elemento identidad de la suma de vectores: Existe un elemento $0 \in V$, llamado el vector cero, tal que: $\mathbf{v} + 0 = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in V$.
 - Elementos inversos de la suma de vectores: Para cada $\mathbf{v} \in V$, existe un elemento $-\mathbf{v} \in V$, llamado el inverso aditivo de $\mathbf{v}$, tal que: $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = 0$.
 - Compatibilidad de la multiplicación escalar con la multiplicación de campos: $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$ para todo $a, b \in F$ y $\mathbf{v} \in V$.
 - Elemento identidad de la multiplicación escalar: $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ donde 1 denota la identidad multiplicativa en F .
 - Distributividad de la multiplicación escalar respecto a la suma de vectores: $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$ para todo $a \in F$ y $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
 - Distributividad de la multiplicación escalar respecto a la suma de escalares: $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$ para todo $a, b \in F$ y $\mathbf{v} \in V$.

2.3 Variedades diferenciales

Tal como mencionamos al comienzo de este capítulo la importancia de las variedades diferenciales radica en su aplicación en diversos fenómenos, en relatividad general, por ejemplo, el espacio tiempo se modela como una “variedad diferenciable”.

Definición 2.4 : $\mathbf{M}$ es una variedad m -dimensional diferenciable si:

1. $\mathbf{M}$ es un espacio topológico
2. $\mathbf{M}$ tiene una familia de pares $\{U_i, \phi_i\}$, para cada i , U_i es uno de un conjunto de abiertos que cubren $\mathbf{M}$ y ϕ_i es uno de un conjunto de mapeos entre la estructura topológica $\mathbf{M}$, y la estructura diferencial $\mathbb{R}^m$, tal que los mapeos $\phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ sean difeomorfismos.
3. Dados dos abiertos U_i, U_j tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, el mapeo $\psi_{ij} = \phi_i \phi_j^{-1}$ que va de $\phi_i(U_i \cap U_j)$ a $\phi_j(U_i \cap U_j)$, es infinitamente diferenciable. Donde al par $\{U_i, \phi_i\}$ lo llamamos carta y al conjunto de cartas atlas.

2.3.1 Cálculo en variedades

Definición 2.5 : Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y N una variedad diferenciable de dimensión n . Un mapeo $f: M \rightarrow N$ es diferenciable en $p \in M$ si para cada carta (U, ϕ) alrededor de p en M y cada carta (V, ψ) alrededor de $f(p)$ en N , la composición $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es una función diferenciable de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$. A las funciones diferenciables las llamamos también suaves y la diferenciabilidad de f es independiente de la carta coordenada.

Definición 2.6 : Un mapeo $f: M \rightarrow N$ entre dos variedades diferenciables M y N se llama **difeomorfismo** si cumple las siguientes condiciones:

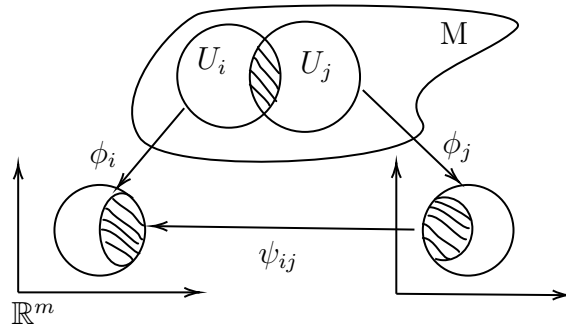


Fig. 2.1: variedad

1. f es biyectiva (inyectiva y sobreyectiva).
2. f es suave (infinitamente diferenciable).
3. La inversa de f , denotada por f^{-1} , también es suave.

Un difeomorfismo establece una correspondencia biunívoca suave entre los puntos de dos variedades, lo que implica que las variedades son esencialmente iguales desde el punto de vista diferenciable. Tenemos una clase de mapeos especiales que nos importa definir :

- **Curvas:** una curva en una variedad $\mathbf{M}$ de dimensión m es un mapeo $C : [a, b] \rightarrow \mathbf{M}$, donde $[a, b]$ es un intervalo cerrado. La curva está parametrizada, es decir, existe un parámetro $t \in [a, b]$ tal que $C(t) \in \mathbf{M}$. En el caso $C(a) = C(b)$, tenemos que la curva es cerrada.
- **Funciones:** Sea $\mathbf{M}$ una variedad topológica de dimensión m y $\mathbf{N}$ una variedad topológica de dimensión n . Una función $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ es una aplicación (mapeo) que asigna cada punto p en $\mathbf{M}$ a un punto $f(p)$ en $\mathbf{N}$. La función f es continua si, para cualquier conjunto abierto U en $\mathbf{N}$, su pre imagen $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en $\mathbf{M}$.

2.3.2 Vectores, campos vectoriales y espacios tangentes

Definición 2.7: Sea $\mathbf{M}$ una variedad diferenciable y $p \in \mathbf{M}$. Un **vector tangente** en el punto p de $\mathbf{M}$ es un operador lineal X_p sobre el conjunto de funciones suaves $C^\infty(M)$ que cumple las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} X_p(f + g) &= X_p(f) + X_p(g) \\ X_p(af) &= aX_p(f) \\ X_p(fg) &= X_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p(g) \end{aligned}$$

donde f y g son funciones suaves en M y a es un escalar.

Definición 2.8 : Sea $\mathbf{M}$ una variedad diferenciable de dimensión n y p un punto en $\mathbf{M}$. Dada una curva diferenciable $C : [a, b] \rightarrow \mathbf{M}$ con $0 \in [a, b]$ y $C(0) = p$, y sea $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces **un vector tangente a una curva** en una variedad diferenciable en el punto p se define como la derivada direccional de la función f evaluada a lo largo de la curva C :

$$v_p = \left. \frac{d}{dt} C(t) \right|_{t=0}.$$

Para cualquier función diferenciable $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$, el vector tangente v_p actúa sobre f , es decir la derivada direccional de f en la dirección del vector tangente, se obtiene de la siguiente manera:

$$v_p(f) = \left. \frac{d}{dt} f(C(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right|_p \left. \frac{dx^\mu}{dt} \right|_{t=0} = X^\mu \left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right|_p \in T_p M,$$

donde $X^\mu = \left. \frac{dx^\mu}{dt} \right|_{t=0}$.

Donde se escoge cierta carta local x^μ y $T_p M$ es el espacio tangente a M en el punto p . Definimos un objeto matemático llamado vector tangente en $\mathbf{M}$ a lo largo de la curva dada C :

$$X = X^\mu \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p$$

donde X^μ son los componentes del vector en esta base y llamamos $e_\mu = \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p$ la base de $T_p M$, los vectores tangentes también son llamados vectores contra-variantes.

Definición 2.9 : Decimos que el **espacio tangente** $T_p M$ a M en un punto p es el conjunto de todos los vectores tangentes en el punto p .

Definición 2.10 : Decimos que un **campo vectorial** X en una variedad diferenciable $C^\infty \mathbf{M}$ es una asignación suave de un vector tangente $X_p \in T_p M$ en cada punto $p \in \mathbf{M}$, donde "suave" implica que para toda $f \in C^\infty(\mathbf{M})$, la función $Xf : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(Xf)(p) := X_p(f)$$

es infinitamente diferenciable, el campo vectorial puede considerarse como un operador diferencial de primer orden sobre las funciones en una variedad, como:

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Donde las $\{X^\mu, \mu = 1, 2, \dots, m\}$ en U son funciones que juegan el papel de componentes del campo vectorial X con respecto al sistema de coordenadas asociado con la carta (U, φ) . Usualmente se denotan como X^μ . Por supuesto, la forma real de estas componentes depende de la carta de coordenadas en uso.

2.3.3 Vectores y espacios cotangentes

Definición 2.11 : Dado un espacio tangente $T_p M$ en un punto p de una variedad diferenciable $\mathbf{M}$, un **vector dual** en $T_p M$ es un funcional lineal $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Es decir el vector dual ω asigna un número real $\omega(X)$ a un vector tangente $X \in T_p M$, los vectores duales también son llamados 1-formas o vectores covariantes.

Definición 2.12 : El **espacio dual** $T_p^* M$ en el punto p es el conjunto de todos los vectores duales en $T_p M$. Es un espacio vectorial de la misma dimensión que $T_p M$. Si $\{e_\mu\}$ es una base de $T_p M$, entonces existe una base dual que podemos escribir como θ^μ de $T_p^* M$ tal que $\theta^\mu(e_\nu) = \delta_\nu^\mu$, donde δ_ν^μ es el delta de Kronecker. Cualquier 1-forma $\omega \in T_p^* M$ puede escribirse como:

$$\omega = \omega_\mu \theta^\mu$$

donde $\omega_\mu(x)$ son los componentes de la 1-forma en esta base.

2.3.4 Formas diferenciales

Una *forma diferencial* de orden r , o una *r-forma*, es un tensor totalmente antisimétrico de tipo $(0, r)$. **Definición 2.13 :** el *producto wedge* $\wedge$ de r 1-formas por el producto tensorial totalmente antisimétrico

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \sum_{P \in S_r} \text{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \otimes dx^{\mu_{P(2)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{P(r)}},$$

donde S_r es el grupo de permutaciones de $\{1, 2, \dots, r\}$. Por ejemplo: $dx^i \wedge dx^j = dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i$. El producto "wedge" satisface lo siguiente:

- (i) $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = 0$ si algún índice μ_i aparece al menos dos veces.
- (ii) $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \text{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{P(r)}}$.
- (iii) $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ es lineal en cada dx^{μ_i} .

Entonces, si denotamos el espacio vectorial de r -formas en $p \in \mathbf{M}$ como $\Omega_p^r(M)$, el conjunto $\Omega_p^r(\mathbf{M})$ tiene una base compuesta por productos wedge ó cuña ($\wedge$) de r factores dx^μ . Un elemento $\omega \in \Omega_p^r(\mathbf{M})$ se expande como:

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}.$$

Donde $\omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}$ es totalmente antisimétrica. finalmente la dimensión de $\Omega_p^r(M)$ puede ser encontrada usando la combinatoria: $\binom{m}{r}$ donde m es la dimensión de la variedad M y r es orden de la forma.

Definición 2.14 : El **producto exterior** de una q -forma y una r -forma, $\wedge : \Omega_p^q(M) \times \Omega_p^r(M) \rightarrow \Omega_p^{q+r}(M)$, por una extensión trivial. Sea ω y $\xi \in \Omega_p^q(M)$. La acción de la $(q+r)$ -forma $\omega \wedge \xi$ sobre $q+r$ vectores se define por:

$$(\omega \wedge \xi)(V_1, \dots, V_{q+r}) = \sum_{\sigma \in S_{q+r}} \text{sgn}(\sigma) \omega(V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(q)}) \xi(V_{\sigma(q+1)}, \dots, V_{\sigma(q+r)}),$$

donde $V_i \in TM$. Si $q+r > m$, $\omega \wedge \xi$ se anula idénticamente.

Definición 2.15 : si denotamos el espacio r -formas "suaves" $\in \mathbf{M}$ como $\Omega^r(M)$. La **derivada exterior** d_r es un mapeo $\Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ cuya acción sobre una r -forma:

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$$

Se define por:

$$d_r \omega = \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}.$$

Es común omitir el subíndice r y escribir simplemente d . El producto cuña automáticamente antisimetriza el coeficiente.

Definición 2.16 : Sea M una variedad diferenciable el **producto interior** $i_X : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r-1}(M)$, donde $X \in T_p M$. Para $\omega \in \Omega^r(M)$, definimos:

$$i_X \omega(X_1, \dots, X_{r-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{r-1})$$

En particular para $X = X^\mu \partial / \partial x^\mu$ y $\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$, tenemos

$$\begin{aligned} i_X \omega &= \frac{1}{(r-1)!} X^\nu \omega_{\nu \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{s=1}^r X^{\mu_s} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} (-1)^{s-1} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{\mu_s}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \end{aligned}$$

Donde la entrada bajo el símbolo $\wedge$ es omitida, podemos ver algunos ejemplos particulares en la siguiente tabla:

r -formas	Base	Dimensión
$\Omega^0(M)$	$\{1\}$	1
$\Omega^1(M) = T_p^*M$	$\{dx^\mu\}$	m
$\Omega^2(M)$	$\{dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2}\}$	$\frac{m(m-1)}{2}$
$\Omega^3(M)$	$\{dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3}\}$	$\frac{m(m-1)(m-2)}{6}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\Omega^m(M)$	$\{dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m\}$	1

Table 2.1: Base y dimensión de las r -formas diferenciales para una variedad M de dimensión m

2.3.5 Integrales de formas diferenciales

1-formas: Dada una 1-forma α en una variedad diferenciable M , cuya expresión local en coordenadas es $\alpha = A_i dx^i$, donde A_i son funciones suaves, la integral de la 1-forma sobre una curva γ en M se define como:

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_a^b A_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i}{dt} dt$$

2-formas: Dada una 2-forma $\omega = B_{ij} dx^i \wedge dx^j$ en una variedad diferenciable M , la integral de ω sobre una superficie orientada S se expresa en términos de la parametrización $\sigma(u, v)$ de la superficie:

$$\int_S \omega = \iint_S B_{ij}(\sigma(u, v)) \frac{\partial(\sigma^i, \sigma^j)}{\partial(u, v)} du dv$$

Aquí, $\frac{\partial(\sigma^i, \sigma^j)}{\partial(u, v)}$ es el Jacobiano de la transformación σ .

3-formas: Dada una 3-forma $\eta = C_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$ en una variedad diferenciable M , la integral de η sobre un volumen orientado V se expresa en términos de la parametrización $\Omega(u, v, w)$ del volumen:

$$\int_V \eta = \iiint_V C_{ijk}(\Omega(u, v, w)) \frac{\partial(\Omega^i, \Omega^j, \Omega^k)}{\partial(u, v, w)} du dv dw$$

Aquí, $\frac{\partial(\Omega^i, \Omega^j, \Omega^k)}{\partial(u, v, w)}$ es el Jacobiano de la transformación Ω .

Jacobiano en variedades diferenciales : Consideremos una variedad diferenciable M y dos sistemas coordenados locales (U, ϕ) y (V, ψ) , donde U y V son conjuntos abiertos en M , y $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ son cartas locales que asignan coordenadas a puntos en U y V , respectivamente. La transformación de coordenadas entre (U, ϕ) y (V, ψ) está dada por la función compuesta $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$. Ahora, el Jacobiano de esta transformación es una matriz Jacobiana que representa la tasa de cambio local entre los sistemas de coordenadas. El Jacobiano $J(\psi \circ \phi^{-1})$ se define de la siguiente manera:

$$J(\psi \circ \phi^{-1}) = \frac{\partial(\psi \circ \phi^{-1})}{\partial(\phi^{-1})}$$

Aquí, $\frac{\partial(\psi \circ \phi^{-1})}{\partial(\phi^{-1})}$ es la matriz Jacobiana ordinaria en el contexto de funciones de $\mathbb{R}^n$. Esta matriz Jacobiana relaciona las derivadas parciales de las funciones de $\psi \circ \phi^{-1}$ con respecto a las componentes de ϕ^{-1} . El determinante de esta matriz Jacobiana, es decir, $|J(\psi \circ \phi^{-1})|$, se conoce como el Jacobiano de la transformación de coordenadas y proporciona una medida de cómo las coordenadas se transforman localmente entre los sistemas de coordenadas.

2.3.6 Tensor en una variedad diferenciable

Definición 2.17 : Sea M es una variedad diferenciable y TM es su fibrado tangente¹. Un tensor T de tipo (r, s) en M es una asignación que toma r vectores cotangentes y s vectores tangentes en cada punto de M y devuelve un número real $T : T_p^*M \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$, un tensor de tipo (r, s) se puede expresar en coordenadas locales como:

$$T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

donde $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ son componentes del tensor en las coordenadas locales y $\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}$ son vectores tangentes duales canónicos, y $dx^{j_1}, \dots, dx^{j_s}$ son formás diferenciales duales canónicas.

2.3.7 Grupo uniparamétrico de transformaciones y flujos

Definición 20.18 : Sea $\mathbf{M}$ una variedad diferencial, un grupo uniparamétrico de transformaciones, ϕ_t , diferenciables tal que $\phi_t : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{M}$, para cada $t \in \mathbb{R}$, que satisface:

1. ϕ_0 es la identidad, es decir, $\phi_0(p) = p$ para todo $p \in M$.
2. Para todos $s, t \in \mathbb{R}$, $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$.
3. La asignación $t \mapsto \phi_t(p)$ es suave para cada $p \in M$.

Cbe notar que existen dos notaciones sobre ϕ , la equivalencia es $\phi_t(p) = \phi(p, t)$, donde $p \in M$ es un punto inicial de ϕ , y para cada “condición inicial” $p \in M$, ϕ determina una curva. El vector tangente en $t = 0$ pertenece a T_pM .

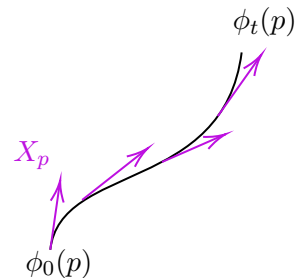
Campos Vectoriales Generadores: A cada flujo, es decir cada grupo uniparamétrico de transformaciones, le corresponde un campo vectorial en la variedad, conocido como el “campo vectorial generador” o “campo infinitesimal” de la transformación. Este campo vectorial, denotado comúnmente como X , se define como la derivada respecto al tiempo del flujo en $t = 0$:

$$X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t$$

En términos de coordenadas locales, si $\phi_t(x) = \phi(t, x)$, entonces el campo vectorial generador se expresa como:

$$X = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=0}$$

El flujo de X en t está dado por $\phi_t(x)$ ó $\phi(t, x)$. Este campo vectorial generador X es un campo vectorial en M que “genera” la acción de flujos.



2.3.8 Derivada de Lie

La idea conceptual detrás de la derivada de Lie se relaciona con cómo una función, campo vectorial o tensorial cambia a lo largo de un campo vectorial en una variedad diferenciable.

Definición 2.19 : Sea ϕ_t un flujo en M , $\phi_t : M \rightarrow M$ definido $\phi_t(P) \equiv \phi(t, P)$ de clase C^∞ donde P es un punto en M .

Se tiene que para toda $f \in C^\infty(M)$, con $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ donde $\phi_t^* f = f \circ \phi_t \in C^\infty(M)$

¹El fibrado tangente TM de M es el conjunto formado por la unión de los espacios tangentes individuales en cada punto de M , veremos más en la sección 2.6

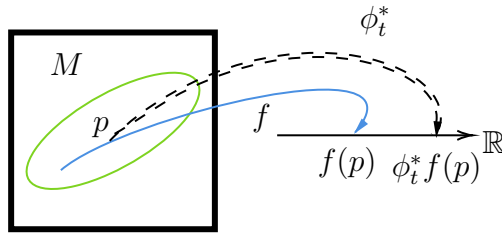


Fig. 2.2: flujo y su pullback

La derivada de Lie de una función f con respecto al mapeo ϕ_t se define como:

$$\mathcal{L}_X[f] := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^*(f) - f}{t}$$

Representa la razón de cambio de f bajo la familia de transformaciones ϕ_t , de manera practica:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ \phi_t - f}{t}(P) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f[\phi_t(P)] - f(P)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f[\phi_P(t)] - f(\phi_P(0))}{t} = \frac{d}{dt}(f \circ \phi_P)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\phi_P^*(f))|_{t=0} = X_P[f] \end{aligned}$$

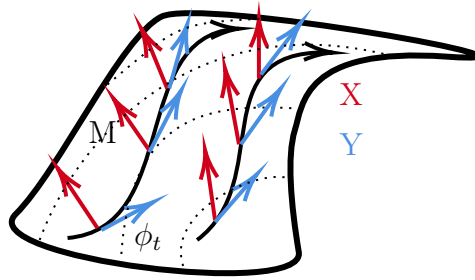
Entonces:

$$\mathcal{L}_X[f] = X^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \quad (2.1)$$

Definición 2.20 : Sea ϕ_t un grupo uniparamétrico de transformaciones en M y X_ϕ su generador infinitesimal, entonces para cualquier campo vectorial $Y \in M$ **la derivada de Lie de un Campo Vectorial** se define como:

$$\mathcal{L}_X[Y] := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^*(Y) - \phi_0^*(Y)}{t} \quad (2.2)$$

Siempre que exista dicha derivada, donde $\phi_t^*Y = [\phi_t^{-1}]_*[Y]$ y la acción de ϕ_t^* es mover el campo Y sobre el flujo.

Fig. 2.3: derivada del campo Y sobre del flujo producido por el campo X

Sea $f \in c^\infty(M)$ entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_X[Y[f]] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^*(Y[f]) - \phi_0^*(Y[f])}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^*(Y)\phi_t^*(f) - \phi_0^*(Y)\phi_0^*(f)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^*(Y)\phi_t^*(f) + \phi_t^*(Y)\phi_0^*(f) - \phi_t^*(Y)\phi_0^*(f) - \phi_0^*(Y)\phi_0^*(f)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^*(Y)(\phi_t^*(f) - \phi_0^*(f)) + (\phi_t^*(Y) - \phi_0^*(Y))\phi_0^*(f)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^*(Y)(\phi_t^*(f) - \phi_0^*(f))}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_t^*(Y) - \phi_0^*(Y))\phi_0^*(f)}{t} \\
 &= Y\left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_t^*(f) - \phi_0^*(f))}{t}\right] + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_t^*(Y) - \phi_0^*(Y))}{t}[f] \\
 &= Y[\mathcal{L}_X[f]] + \mathcal{L}_X[Y][f] = Y[X[f]] + \mathcal{L}_X[Y][f]
 \end{aligned}$$

Tenemos entonces que : $\mathcal{L}_X[Y[f]] = Y[X[f]] + \mathcal{L}_X[Y][f]$, y si usamos que $\mathcal{L}_X[Y[f]] = X[[Y[f]]]$ y después despejamos $\mathcal{L}_X[Y][f]$, tendríamos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_X[Y[f]] &= Y[X[f]] + \mathcal{L}_X[Y][f] \\
 X[[Y[f]]] &= Y[X[f]] + \mathcal{L}_X[Y][f] \\
 \mathcal{L}_X[Y][f] &= X[[Y[f]]] - Y[X[f]]
 \end{aligned}$$

Finalmente la derivada de Lie para un campo vectorial es:

$$\mathcal{L}_X[Y] = X[Y] - Y[X] \equiv [X, Y] \quad (2.3)$$

2.3.9 Conexiones, transporte paralelo y holonomías

Definición 2.21 : Una **conexión** en una variedad diferenciable M es un concepto que generaliza la noción de derivada a lo largo de curvas a vectores tangentes en la variedad. Dada una variedad diferenciable M con un fibrado tangente TM , una conexión en el fibrado tangente es un mapeo

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que toma un par de campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ donde $\mathfrak{X}(M)$ es el conjunto de todos los campos vectoriales suaves en M y asigna otro campo vectorial $\nabla_X Y$, que satisface las propiedades :

- $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
- $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
- $\nabla_X(fY) = X[f]Y + f \nabla_X Y$

Definición 2.22 : Sea M una variedad diferenciable, p un punto en M , v un vector tangente en $T_p M$, y $C : [a, b] \rightarrow M$ una curva diferenciable que conecta p con otro punto $q = C(b)$. El **transporte paralelo de v a lo largo de C** es una asignación de un vector tangente $v(t)$ a lo largo de cada punto $C(t)$ en la curva, donde $t \in [a, b]$, de manera que:

- $v(t)$ es un vector tangente en $T_{C(t)} M$.
- La derivada covariante de $v(t)$ con respecto al parámetro t es cero a lo largo de la curva:

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

donde $\frac{d}{dt}$ se define mediante la conexión ∇ . Esto significa que el vector $v(t)$ se transporta de manera paralela a lo largo de C según la conexión ∇ .

Por otro lado **La holonomía** describe cómo un vector cambia al transportarse a lo largo de una curva cerrada. Dada una conexión ∇ , **la holonomía alrededor** de una curva cerrada γ se denota como $\mathcal{P}e^{\int_\gamma \omega}$, donde ω es la 1-forma de conexión asociada a ∇ , veremos más detalles en la sección 2.6.5, donde se definen para estructuras más generales.

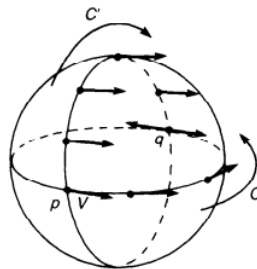


Fig. 2.4: Donde c y c' son diferentes curvas por donde se transporta el vector V , figura tomada de [6]

2.4 Teoría de la medida

Tomamos esta parte principalmente de [10], comenzamos con la siguiente definición necesaria: Una σ -álgebra sobre un conjunto X es una colección Σ de subconjuntos de X que satisface las siguientes propiedades:

1. Cerrada bajo complemento: Si $A \in \Sigma$, entonces $A^c \in \Sigma$.
2. Cerrada bajo uniones contables: Si $A_1, A_2, A_3, \dots \in \Sigma$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.
3. Cerrada bajo intersecciones contables: Si $A_1, A_2, A_3, \dots \in \Sigma$, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

Espacio de Medida : Es una tripleta (X, Σ, μ) , donde X es un conjunto, Σ es una sigma-álgebra de subconjuntos de X , y μ es una medida, es decir, una función $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ que satisface las propiedades de no-negatividad, aditividad y $\mu(\emptyset) = 0$.

2.4.1 Integral de Lebesgue

Dada una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, donde X es un conjunto medible cuyos elementos llamaremos de manera genérica como x , y dada una medida μ en X , la integral de Lebesgue de f con respecto a μ se define como:

$$\int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x)$$

Esta integral se construye sumando los productos $f(x) \cdot \mu(E)$ sobre todos los conjuntos medibles E en X . Aquí, $\mu(E)$ representa la medida de E .

Un ejemplo sencillo podría ser la integral de Lebesgue de la función indicadora χ_A , donde A es un conjunto medible. La función indicadora χ_A es 1 si x está en A y 0 si no lo está. La integral de Lebesgue de χ_A con respecto a la medida de Lebesgue sería simplemente la medida del conjunto A :

$$\int_X \chi_A d\mu = \mu(A)$$

2.4.2 Transformada de Fourier-Stieltjes de la medida

La transformada de Fourier-Stieltjes [11] de una medida de Stieltjes μ se denota comúnmente por $\hat{\mu}$ y se define como:

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} d\mu(x),$$

donde $d\mu(x)$ representa la medida de μ y la integral se interpreta en el sentido de Stieltjes.

2.5 Teoría de grupos

En la sección 2.2, proporcionamos una definición general de grupo como una estructura algebraica fundamental. Esta definición establece una base para entender la teoría de grupos en un contexto amplio. En esta sección, nuestro objetivo es explorar algunos grupos específicos que desempeñan un papel crucial en la física teórica. Estos grupos no solo ejemplifican la aplicación concreta de la teoría de grupos, sino que, en particular, el grupo $U(1)$ es de especial interés para nuestro trabajo.

2.5.1 Grupos en Física (breve descripción)

- **Grupo de Rotación:** $SO(n) = \{R \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid R^T R = \mathbb{I}, \det(R) = 1\}$. *Ejemplo Físico:* En mecánica clásica, $SO(3)$ describe las rotaciones tridimensionales de partículas.
- **Grupo Especial de Lorentz:** $SO(1,3) = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \det(\Lambda) = 1\}$. *Ejemplo físico:* En teoría de la relatividad especial, $SO(1,3)$ describe las transformaciones de Lorentz que preservan la estructura del espacio-tiempo. Aquí, η es la métrica de Minkowski.
- **Grupo Unitario Especial:** $SU(n) = \{U \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid U^\dagger U = \mathbb{I}, \det(U) = 1\}$. *Ejemplo Físico:* En teoría cuántica de campos, $SU(2)$ describe transformaciones de "iso-spin" en la interacción débil.
- **Grupo de Poincaré:** $ISO(1,3) = \mathbb{R}^{1,3} \rtimes SO(1,3)$. *Ejemplo Físico:* En física de partículas, $ISO(1,3)$ describe simetrías espacio-temporales y traslaciones.
- **Grupo $U(1)$:** $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. *Ejemplo Físico:* En electromagnetismo, $U(1)$ describe las transformaciones de fase de la forma $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$. Estas transformaciones afectan la función de onda de las partículas cargadas al introducir una fase compleja. Para mantener la invariancia bajo estas transformaciones locales, el campo electromagnético A_μ se ajusta mediante derivadas covariantes, lo que asegura la conservación de la carga eléctrica.

2.6 Haces fibrados

Si deseamos generalizar el concepto de campo en el espacio-tiempo, debemos considerar los objetos llamados **haces vectoriales**, donde para cada punto en la variedad $\mathbf{M}$, hay un espacio vectorial asociado. Esto permite manejar de manera coherente campos que asignan vectores a puntos específicos en $\mathbf{M}$, como es necesario en la teoría electromagnética y en teorías más generales como las ecuaciones de Yang-Mills. Para formalizar esto, se requiere el uso de conexiones que permitan comparar vectores en diferentes espacios vectoriales asociados a puntos diferentes de $\mathbf{M}$.

2.6.1 Haz

Definición 2.23 : Un **haz** es una estructura que consiste en una variedad $\mathbf{N}$, una variedad $\mathbf{M}$ y una aplicación sobreyectiva $\pi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{M}$. En general, la variedad $\mathbf{N}$ se llama el espacio total, la variedad $\mathbf{M}$ se llama el espacio base, y π se llama la aplicación de proyección. Para cada punto $p \in \mathbf{M}$, el espacio:

$$\mathbf{N}_p = \{q \in \mathbf{N} : \pi(q) = p\}$$

Notemos que el espacio total $\mathbf{N}$ es la unión de todas las fibras :

$$\mathbf{N} = \bigcup_{p \in \mathbf{M}} \mathbf{N}_p$$

Donde llamaremos fibrado en el punto p a N_p , los casos que nos interesan, M es el espacio físico o el espacio-tiempo, y cada fibra N_p puede ser visto como un espacio vectorial, cabe notar que hay haces cuya fibra es un grupo de Lie (definidos en la sección 2.7), como veremos en la sección 2.6.2. El haz tangente de una variedad M es un buen ejemplo. Aquí, el espacio total, denotado por TM , es simplemente la unión de todos los espacios tangentes de M :

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

La proyección $\pi : TM \rightarrow M$ mapea cada vector tangente $v \in T_p M$ al punto $p \in M$. La fibra sobre cualquier punto $p \in M$ es así el espacio tangente $T_p M$. Sin embargo, debemos darle a TM la estructura de una variedad de manera que π sea una aplicación suave. Especificar un punto en TM es lo mismo que especificar un punto p en M junto con un vector $v \in T_p M$. Así, localmente TM se ve como $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, debemos hacer que TM sea una variedad de dimensión $2n$.

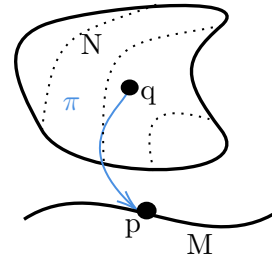


Fig. 2.5: Representación diagramática de un haz general.

2.6.2 Haz fibrado principal

Una idea crucial para clasificar los haces de fibras, es la de un *haz principal de fibras*, que es un haz cuya fibra es un grupo de Lie de una manera especial. Estos tienen la propiedad importante de que todos los haces no principales están asociados con un haz principal subyacente. Las definiciones cruciales son las siguientes:

Un haz (N, π, M) es un G -haz si N es un espacio topológico X con una acción del grupo G que es compatible con la topología de X , y si (N, π, M) es isomorfo al haz $(N, \rho, N/G)$ donde N/G es el espacio de órbitas de la acción de G en N , es decir el conjunto de todas las posiciones que ese punto puede ocupar cuando es transformado por los elementos del grupo, podemos ver un esquema en la siguiente figura donde u es un mapeo entre fibras y ρ es el mapeo de proyección :

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{u} & N \\ \downarrow \pi & & \downarrow \rho \\ M & \xrightarrow{\simeq} & N/G \end{array}$$

Las fibras del haz son las órbitas de la acción de G en E , y por lo tanto, en general, no serán homeomorfas entre sí. Si G actúa libremente y de forma transitiva en N , entonces (E, π, M) se dice que es un haz principal G , y G se llama el grupo de estructura del haz. La libertad de la acción de G implica que cada órbita es homeomorfa a G , por lo tanto, tenemos un haz con fibra G .

Uno de los ejemplos más importantes de un fibrado principal ocurre cuando N es un subgrupo de Lie cerrado de un grupo de Lie G . Entonces, N actúa a la derecha sobre G mediante multiplicación de grupos con una acción que es claramente libre y cuyo espacio de órbitas es simplemente el espacio de clases laterales G/N . Así, obtenemos un fibrado principal N -haz $(G, \pi, G/N)$ cuya fibra es el grupo N .

2.6.3 Haz vectorial

Los fibrados vectoriales son fundamentales en la física teórica porque el espacio de secciones proporciona una estructura natural de espacio vectorial, donde definimos el espacio de secciones de la siguiente forma:

Definición 2.24: Dado un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$, el espacio de secciones de E , denotado por $\Gamma(E)$, es el conjunto de todas las funciones $\sigma : M \rightarrow E$ tales que $\pi(\sigma(x)) = x$ para todo $x \in M$. En otras palabras, cada sección $\sigma \in \Gamma(E)$ asigna a cada punto $x \in M$ un vector $\sigma(x) \in E$ en la fibra sobre x , garantizando que la proyección de $\sigma(x)$ a través de π regrese al punto x .

Este espacio de secciones, puede desempeñar un papel análogo al del espacio lineal de funciones en una variedad, facilitando la modelización de propiedades físicas en el contexto del fibrado.

Definición 2.25 : Un **haz vectorial** real de dimensión n es un haz localmente trivial $\pi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{M}$ tal que cada fibra $\mathbf{N}_p$ es un espacio vectorial de dimensión n . Además, requerimos que para cada punto $p \in \mathbf{M}$, exista un entorno U de p y una trivialización local:

$$\phi : \mathbf{N}|_{\pi^{-1}U} \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

que mapea cada fibra $\mathbf{N}_p$ al espacio $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ de manera lineal. En resumen, exigimos que la trivialización sea lineal respecto a las fibras. De manera similar, podemos definir un haz vectorial complejo, con $\mathbb{C}^n$ tomando el rol de $\mathbb{R}^n$ arriba. Los casos real y complejo son muy similares.

2.6.4 Conexión

No hay una manera única de sumar o restar vectores en fibras diferentes. Como consecuencia, generalmente no hay una única manera de diferenciar secciones de un haz vectorial. Una manera de diferenciar secciones se llama “conexión”.

Definición 2.26 : Sea $\mathbf{N}$ un haz vectorial sobre la variedad $\mathbf{M}$. Donde $\Gamma(\mathbf{N})$ denota el espacio de secciones de $\mathbf{N}$. Una conexión D en $\mathbf{M}$ asigna a cada campo vectorial v en $\mathbf{M}$ una función D_v de $\Gamma(\mathbf{N})$ a $\Gamma(\mathbf{N})$ que satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} D_v(\alpha s) &= \alpha D_v(s) \\ D_v(s + t) &= D_v(s) + D_v(t) \\ D_v(fs) &= v(f)s + fD_v(s) \\ D_{v+w}(s) &= D_v s + D_w(s) \\ D_{fv}(s) &= fD_v(s) \end{aligned}$$

para todo $v, w \in \mathbf{M}, s, t \in \Gamma(\mathbf{N}), f \in C^\infty(\mathbf{M})$ y todos los escalares α ^[2]. Nótese que esta definición es muy similar a la definición de un campo vectorial. En particular, la tercera propiedad, la ley de Leibniz, es lo que hace que D_v actúe como una diferenciación. Dada cualquier sección s y campo vectorial v , llamamos a $D_v s$ la derivada covariante de s en la dirección v que es la definición 2.18 vista anteriormente.

2.6.5 Holonomías

Una conexión en un fibrado vectorial permite realizar el *transporte paralelo*. Dada una conexión y una trayectoria α del punto p al punto q , existe una forma canónica de trasladar un vector en la fibra sobre p a través de α , asociándolo con un vector en la fibra sobre q . El transporte en paralelo alrededor de un lazo define una aplicación lineal de una fibra dada en un fibrado vectorial a sí mismo, llamada la **holonomía** de la conexión alrededor del lazo.

²Aquí, “escalares” son números reales o complejos dependiendo de si $\mathbf{N}$ es un haz vectorial real o complejo

Sea $\mathbf{N}$ un fibrado vectorial sobre $\mathbf{M}$ equipado con una conexión D . Sea $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbf{M}$ una trayectoria diferenciable del punto p al punto q , y supongamos que para $t \in [0, T]$, $u(t)$ es un vector en la fibra de $\mathbf{N}$ sobre $\alpha(t)$. Decimos que $u(t)$ es transportado en paralelo a través de α si la derivada covariante de $u(t)$ en la dirección $\alpha'(t)$ es igual a cero:

$$D_{\alpha'(t)}u(t) = 0$$

Usando una correspondencia local donde $\mathbf{N}$ sobre alguna vecindad U de $\alpha(t)$ se puede describir como $U \times V$, podemos ver a las secciones s de $\mathbf{N}$ como funciones con valores en V . Entonces, definimos la *derivada covariante*:

$$D_{\alpha'(t)}u(t) = \frac{d}{dt}u(t) + A(\alpha'(t))u(t)$$

Decimos que $u(t)$ es *transportado en paralelo* a través de α si $D_{\alpha'(t)}u(t) = 0$ para todo t . Dado un vector $u \in N_p$, podemos trasladarlo en paralelo a través de α , encontrando $u(t) \in N_{\alpha(t)}$ tal que $u(0) = u$ y $D_{\alpha'(t)}u(t) = 0$. Para hacerlo, debemos trabajar localmente y resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}u(t) + A(\alpha'(t))u(t) = 0$$

La solución para esta ecuación, si existe, debe satisfacer

$$u(t) = u - \int_0^t A(\alpha'(t_1))u(t_1) dt_1$$

Iterando esta ecuación integral de la siguiente forma: Sustituimos: $u(t_1) = u - \int_0^{t_1} A(\alpha'(t_2))u(t_2) dt_2$, en la ecuación integral original:

$$u(t) = u - \int_0^t A(\alpha'(t_1)) \left(u - \int_0^{t_1} A(\alpha'(t_2))u(t_2) dt_2 \right) dt_1$$

Al expandir esta integral, obtenemos:

$$u(t) = u - \int_0^t A(\alpha'(t_1))u dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} A(\alpha'(t_1))A(\alpha'(t_2))u(t_2) dt_2 dt_1$$

Si repetimos este proceso obtenemos una expansión para $u(t)$ en potencias de A

$$\begin{aligned} u(t) = u - \int_0^t A(\alpha'(t_1))u dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} A(\alpha'(t_1))A(\alpha'(t_2))u dt_2 dt_1 \\ - \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} A(\alpha'(t_1))A(\alpha'(t_2))A(\alpha'(t_3))u dt_3 dt_2 dt_1 + \dots \end{aligned}$$

Esta suma infinita converge a la solución correcta, y podemos reescribirla de la forma

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t \geq t_n \geq \dots \geq t_1 \geq 0} (-1)^n A(\alpha'(t_1)) \dots A(\alpha'(t_n)) dt_n \dots dt_1 u$$

Definamos el *producto ordenado por trayectorias*: $PA(\gamma(t_1)) \dots A(\gamma(t_n))$, para ser el producto con los factores permutados $A(\gamma(t_{\sigma(1)})) \dots A(\gamma(t_{\sigma(n)}))$, el subíndice sigma (σ) se refiere a una permutación de los índices: $t_{\sigma(1)} \geq t_{\sigma(2)} \geq \dots \geq t_{\sigma(n)}$. Esto significa que los índices de los tiempos t_i están ordenados de mayor a menor mediante la permutación σ . La permutación σ es una función que reordena los índices $1, 2, \dots, n$ para que los tiempos t_i estén en orden decreciente. Es una forma de garantizar que se consideren todas las posibles maneras de

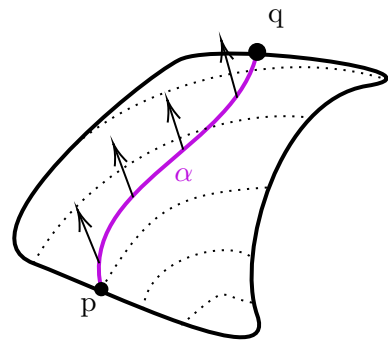


Fig. 2.6: Transporte de vector en la fibra a través de α

ordenar los tiempos de forma que el producto ordenado en el camino esté bien definido y los factores $A(\gamma(t_i))$ se multipliquen en el orden correcto.

Ahora entonces la integral :

$$\int_{t_2 \geq t_3 \geq \dots \geq t_n \geq 0} A(\gamma(t_1)) \cdots A(\gamma(t_n)) dt_n \cdots dt_1$$

es equivalente a:

$$\frac{1}{n!} \int_{t_i \in [0, t]} P A(\gamma(t_1)) \cdots A(\gamma(t_n)) dt_n \cdots dt_1,$$

o, en resumen,

$$\frac{1}{n!} P \left(\int_0^t A(\gamma(s)) ds \right)^n.$$

Así, si definimos la exponencial ordenada en el camino por

$$P e^{-\int_0^t A(\gamma(s)) ds} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} P \left(\int_0^t A(\gamma(s)) ds \right)^n$$

tenemos

$$u(t) = P e^{-\int_0^t A(\gamma(s)) ds} u.$$

Cabe destacar que la referencia [8] nos menciona que cuando el grupo de “gauge” es Abeliano, se puede observar una expresión particular que describe la fase adquirida por una partícula cargada en movimiento a través de un campo magnético. Esta expresión está dada por $e^{-i \frac{q}{\hbar} \int_{\alpha} A}$. En esta, la conexión A de $U(1)$ incluye automáticamente el factor de i . Además, el factor $\frac{q}{\hbar}$ se establece igual a 1 mediante una elección adecuada de unidades, específicamente si $\frac{q}{\hbar} = 1$ para q igual a la unidad fundamental de carga en la naturaleza. De este modo, la función de onda de una partícula con esta carga será una sección de un $U(1)$ -haz con fibra estándar dada por la representación fundamental de $U(1)$.

2.7 Grupo y álgebra de Lie

La idea clave de un grupo de Lie es que es un grupo en el sentido usual, pero con la propiedad adicional de ser también una variedad diferenciable. Los grupos de Lie son de gran importancia en la física teórica moderna, y el tema puede abordarse desde varias perspectivas.

Definición 2.27 : Un **grupo de Lie real** G es un conjunto que cumple con las siguientes propiedades:

1. Es un grupo en el sentido algebraico usual.
2. Es una variedad diferenciable con la propiedad de que las operaciones de multiplicación de dos elementos del grupo y la inversión de un elemento del grupo son operaciones suaves. Específicamente, los mapeos

$$(g, h) \mapsto gh \quad \text{y} \quad g \mapsto g^{-1}$$

son ambos C^∞ .

Una de las características más importantes de un grupo de Lie G es la existencia de una álgebra de Lie asociada que codifica muchas de las propiedades del grupo.

Definición 2.28 : Un campo vectorial X en un grupo de Lie G se dice que es invariante por la izquierda si existe un mapeo lineal entre espacios tangentes que llamaremos l_g para todo $g \in G$, es decir, si se cumple que:

$$l_g^*(X) = X \quad \text{para todo } g \in G$$

o, equivalentemente:

$$l_{gg'}^*(X) = X_{gg'} \quad \text{para todo } g, g' \in G.$$

De manera similar, X es invariante por la derecha, es decir existe un mapeo lineal entre espacios tangentes que llamaremos r_g consigo mismo para todo $g \in G$, es decir:

$$r_g^*(X) = X \quad \text{para todo } g \in G,$$

o equivalentemente:

$$r_{gg'}^*(X_{g'}) = X_{g'} \quad \text{para todo } g, g' \in G.$$

El conjunto de todos los campos vectoriales invariantes por la izquierda en un grupo de Lie G , se denota como $\mathcal{L}(G)$ al que llamaremos álgebra de Lie asociada al grupo G . Es claramente un espacio vectorial real.

La observación crucial se basa en el hecho general de que si los campos vectoriales X_1 y X_2 en una variedad M están relacionados mediante un mapeo lineal entre espacios tangentes con los campos vectoriales Y_1 y Y_2 , respectivamente, en una variedad N , entonces el conmutador $[X_1, X_2]$ está relacionado mediante un mapeo lineal entre espacios tangentes con el conmutador $[Y_1, Y_2]$. En particular, esto significa que si X_1 y X_2 son campos vectoriales invariantes por la izquierda en G , entonces el conmutador $[X_1, X_2]$ también es invariante por la izquierda, es decir:

$$[X_1, X_2] \in \mathcal{L}(G).$$

y así el conjunto $\mathcal{L}(G)$ de todos los campos vectoriales invariantes por la izquierda en G es una subálgebra de Lie del álgebra de Lie infinito-dimensional de todos los campos vectoriales en la variedad G . Se llama el álgebra de Lie de G .

2.7.1 Medida de Haar

La medida de Haar en el grupo unitario $U(d)$, definido como el conjunto de operadores U lineales que actúan sobre el espacio vectorial complejo de dimensión d , tales que $U^\dagger U = I$, es la única medida de probabilidad μ_H que es invariante tanto a la izquierda como a la derecha sobre el grupo $U(d)$, es decir, para todas las funciones integrables f y para todo $V \in U(d)$, tenemos:

$$\int_{U(d)} f(U) d\mu_H(U) = \int_{U(d)} f(UV) d\mu_H(U) = \int_{U(d)} f(VU) d\mu_H(U)$$

De hecho, para grupos compactos como el grupo unitario, existe una única medida de probabilidad que es invariante tanto a la izquierda como a la derecha bajo la multiplicación del grupo.

La medida de Haar es una medida de probabilidad, que satisface las propiedades $\int_S 1 d\mu_H(U) \geq 0$ para todos los conjuntos $S \subseteq U(d)$ y $\int_{U(d)} 1 d\mu_H(U) = 1$. En consecuencia, podemos denotar la integral de cualquier función $f(U)$ sobre la medida de Haar como el valor esperado de $f(U)$ con respecto a la medida de probabilidad μ_H , denotado como $\mathbb{E}_{U \sim \mu_H}[f(U)]$, definido como

$$\mathbb{E}_{U \sim \mu_H}[f(U)] := \int_{U(d)} f(U) d\mu_H(U)$$

Cuando $f(U)$ es una función matricial, se entiende que el valor esperado es el valor esperado de cada una de sus entradas.

2.8 Transformada de Legendre

Nos permite almacenar la información contenida en una función de una forma diferente, provee un cambio de variable que permite expresar ecuaciones de movimiento, en términos de cantidades dinámicas que pueden ser más convenientes.

Definición 2.29: Dada una función $f(u)$, es posible aplicar la transformada de Legendre si f es suave (tiene derivadas continuas y si f es estrictamente convexo en el intervalo considerado. **Construcción:** consideremos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuya gráfica es:

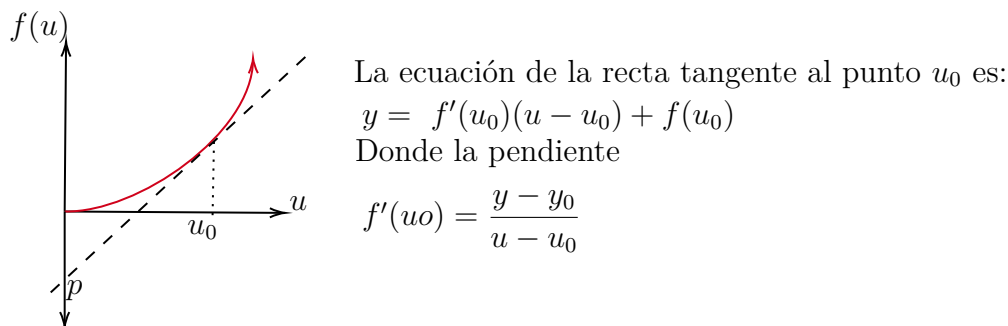


Fig. 2.7: Recta tangente a f (transf. de Legendre)

Entonces podemos escribir el punto h como $h = -f'(u_0)u_0 + f(u_0)$, entonces en general para cualquier pendiente p :

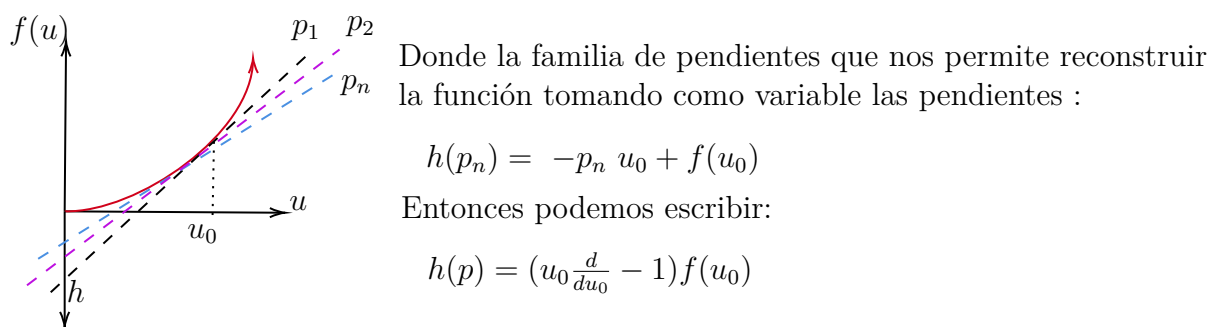


Fig. 2.8: Transformada de Legendre

Entonces en general la transformada de Legendre se define :

$$\mathbb{L}(f) = \left[x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - 1 \right] f(x^\mu) \quad (2.4)$$

Esta transformación es útil en el capítulo 3 donde permite relacionar los objetos matemáticos llamados Lagrangiano y Hamiltoniano.

2.9 C^* — álgebra

Definición 2.30 : Una C^* -álgebra es un álgebra [12] $\mathcal{A}$ sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$, junto con una operación de involución $*$ y una norma $\| \cdot \|$, que satisface las siguientes propiedades:

1. Es una involución, para todo x en $\mathcal{A}$: $x^{**} = (x^*)^* = x$
2. Para todos x, y en $\mathcal{A}$:

$$(x + y)^* = x^* + y^*$$

$$(xy)^* = y^* x^*$$

3. Para cada número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$ y cada x en A : $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$
4. Para todo x en A : $\|x^* x\| = \|x\| \|x^*\|$

Las primeras cuatro identidades indican que $\mathcal{A}$ es una $*$ -álgebra. La última identidad se llama identidad C^* y es equivalente a:

$$\|xx^*\| = \|x\|^2$$

La identidad C^* es un requisito muy fuerte. Por ejemplo, junto con la fórmula del radio espectral, implica que la norma C^* está determinada de manera única por la estructura algebraica:

$$\|x\|^2 = \|x^* x\| = \sup\{|\lambda| : x^* x - \lambda 1 \text{ no es invertible}\}$$

Un mapeo lineal acotado, $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, entre álgebras C^* $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se llama $*$ -homomorfismo si

1. Para x y y en A :

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$$

2. Para x en A :

$$\pi(x^*) = \pi(x)^*$$

En el caso de álgebras C^* , cualquier $*$ -homomorfismo π entre álgebras C^* es contractivo, es decir, acotado con norma ≤ 1 . Además, un $*$ -homomorfismo inyectivo entre álgebras C^* es isométrico. Estas son consecuencias de la identidad C^* .

Un $*$ -homomorfismo biyectivo π se llama un C^* -isomorfismo, en cuyo caso $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se dicen que son isomorfos.

2.10 Teoría GNS

Tomando como referencia [9], **Teorema** : Sea $\mathcal{A}$ una C^* -álgebra con elemento identidad y sea $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ un estado lineal y continuo tal que $\omega(I) = 1$, donde I es la identidad de $\mathcal{A}$. Entonces, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y una representación $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ representa el conjunto de todos los operadores lineales en $\mathcal{H}$, junto con un vector $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, tal que

$$\omega(a) = \langle \psi | \pi(a) | \psi \rangle, \quad (2.5)$$

satisfaciendo la propiedad adicional de que $|\psi\rangle$ es cíclico, es decir, los vectores $\{\pi(a)|\psi\rangle\}$ para todo $a \in \mathcal{A}$ forman un subespacio denso de $\mathcal{H}$. Este triplete $(\mathcal{H}, \pi, |\psi\rangle)$ está determinado de manera única salvo equivalencia unitaria.

Esquema de la Construcción de $(\mathcal{H}, \pi, |\psi\rangle)$: Utilizamos el estado ω para definir el producto interno en $\mathcal{A}$ mediante el mapa bilineal,

$$\langle a, b \rangle_{\mathcal{A}} = \omega(a^* b), \quad (2.6)$$

para $a, b \in \mathcal{A}$. Este mapa es no negativo, y define un producto interno en $\mathcal{A}$ salvo si $\omega(a^* a) = 0$ para algún $a \neq 0$, en cuyo caso factorizamos a . Luego completamos $\mathcal{A}$ con la norma inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ para obtener el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. La representación π se define haciendo que $\mathcal{A}$ actúe sobre sí mismo por multiplicación y se extiende a $\mathcal{H}$ por continuidad. **Finalmente, el vector cíclico $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ representa el vacío y corresponde al elemento identidad de $\mathcal{A}$.** Además, existen otras construcciones unitariamente equivalentes, como la representación de Fock y la de Schrödinger, que aunque no son idénticas, se utilizan en diferentes contextos según la conveniencia y que también satisfacen la construcción GNS expuesta anteriormente, respecto a este tema podemos ver más detalles en [13].

CAPÍTULO 3

Teoría de Campos

3.1 Descripción Geométrica de la Teoría Clásica de Campos

La teoría clásica de campos es una rama fundamental de la física teórica que describe cómo los campos físicos, como el campo electromagnético, interactúan y evolucionan en el espacio-tiempo. A través de un enfoque geométrico, esta teoría se formula en el lenguaje de las variedades diferenciables, proporcionando una representación elegante y poderosa de las leyes de la física. En esta sección, exploraremos los conceptos geométricos clave y su aplicación en la formulación de la teoría clásica de campos.

3.1.1 Mecánica Hamiltoniana

Sea Γ una variedad diferenciable que llamaremos espacio fase, de dimensión $\text{Dim}(\Gamma) = 2n$, donde por ejemplo particularmente podríamos escoger las familias de coordenadas: $\{q^i, p_i\}$ con $i = 1, 2, \dots, n$, usadas habitualmente, además Γ estará equipada con una 2-forma simpléctica Ω_{ab} cerrada y no degenerada [14], es decir, satisface:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & d\Omega \equiv \nabla_{[c}\Omega_{ab]} = 0 \\ \text{b)} \quad & \Omega_{ab}v^aw^b = 0, \quad \forall w^b \implies v^a = 0 \end{aligned}$$

Donde $v^a, w^b \in \Gamma$ son vectores y los corchetes en los índices significan antisimetrización, debido a su propiedad de no degeneración existe una inversa Ω^{ab} y define un isomorfismo entre el espacio cotangente y el espacio tangente en cada punto de Γ .

El espacio Γ con la dos-forma simpléctica Ω se llama un espacio Simpléctico y se denota por (Γ, Ω) . Un campo vectorial V^a genera transformaciones canónicas infinitesimales si cumple con :

$$\mathcal{L}_V\Omega = 0$$

Esta condición es equivalente a decir que localmente la forma simpléctica satisface:

$$V^b = \Omega^{ba}\nabla_a f =: X_f^b$$

para alguna función f , el vector X_f^a se llama el campo vectorial Hamiltoniano de f (con respecto a Ω). Usando la identidad de Cartan $\mathcal{L} = i_X d + di_X$, obtenemos:

$$\mathcal{L}_X\Omega = i_X(d\Omega) + d(i_X\Omega) = 0 \Rightarrow d(\Omega(X, \cdot)) = 0$$

De esta última ecuación se sigue que localmente existe una función f tal que:

$$dF = \Omega(\cdot, X_F)$$

donde X_F es el campo vectorial Hamiltoniano asociado a la función F [15]. En términos matemáticos, esto establece una correspondencia uno a uno entre campos vectoriales Hamiltonianos y funciones diferenciables en Γ . Así, las funciones en el espacio de fases (es decir, los observables) son generadores de transformaciones canónicas infinitesimales. El álgebra de Lie de los campos vectoriales induce una estructura de álgebra de Lie en el espacio de funciones:

$$\{f, g\} := \Omega_{ab} X_f^a X_g^b = \Omega_{ab} \nabla^a f \nabla^b g$$

tal que

$$X_{\{f, g\}}^a = -[X^f, X^g]_a$$

El ‘producto’ $\{\cdot, \cdot\}$ se llama corchete de Poisson. Nótese que el corchete de Poisson $\{f, g\}$ da el cambio de f dado por el movimiento generado por campo vectorial Hamiltoniano de g , es decir:

$$\{f, g\} = \mathcal{L}_{X_g} f$$

El corchete de Poisson es antisimétrico, por lo que también es menos el cambio de g generado por f . En la geometría simpléctica, siempre se pueden encontrar coordenadas (q_i, p_j) en un vecindario finito tal que la forma simpléctica Ω toma la forma canónica [1]:

$$\Omega_{ab} = 2\nabla_{[a} p_i \nabla_{b]} q_i$$

Con esta forma, el corchete de Poisson entre las funciones coordenadas es:

$$\begin{aligned} \{p_i, p_j\} &= \Omega^{ab} \nabla_a(p_i) \nabla_b(p_j) = 0. & \{q_i, p_j\} &= \Omega^{ab} \nabla_a(q_i) \nabla_b(p_j) = \delta_j^i \\ \{q_i, q_j\} &= \Omega^{ab} \nabla_a(q_i) \nabla_b(q_j) = 0 \end{aligned}$$

En esta carta, las coordenadas q_i actúan como “posiciones” y p_i como “momentos”. La evolución temporal de un sistema está dada por un campo vectorial h^a , cuyas curvas integrales son las trayectorias dinámicas del sistema.

En el espacio de fases, existe una función preferida, el Hamiltoniano $\mathbf{H}$, cuyo campo vectorial Hamiltoniano h^a está definido por:

$$h^a = \Omega^{ab} \nabla_b \mathbf{H}$$

Adoptando la perspectiva de que todos los observables generan transformaciones canónicas, el movimiento generado por el Hamiltoniano corresponde a la “evolución temporal”.

El cambio en el tiempo de los observables se expresa mediante el corchete de Poisson del observable con $\mathbf{H}$:

$$\dot{f} := h^a \nabla_a f = \Omega^{ac} \nabla_c \mathbf{H} \nabla_a f = \{f, \mathbf{H}\}.$$

Podemos intentar ver esto en el recuadro de la siguiente pagina :

¹Esto siempre es posible por el teorema de Darboux

Demostración:

Sea:

$$\Omega_{ab} := dp_k \wedge dq^k \quad ; \quad X_{\mathbf{H}}^a = \mathbf{x}^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \mathbf{x}_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \quad ; \quad X_f^a = \mathbf{y}^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \mathbf{y}_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \{f, \mathbf{H}\} &= dp_k \wedge dq^k \left[\left(\mathbf{y}^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \mathbf{y}_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right) \left(\mathbf{x}^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \mathbf{x}_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right) \right] \\ &= dp_k \wedge dq^k \left[\mathbf{y}^\mu \mathbf{x}^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \mathbf{y}_\nu \mathbf{x}^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial p_\nu} + \mathbf{y}^\mu \mathbf{x}_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \mathbf{y}_\nu \mathbf{x}_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right] \\ &= (dp_k dq^k - dq^k dp_k) \left[\mathbf{y}_\nu \mathbf{x}^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial p_\nu} + \mathbf{y}^\mu \mathbf{x}_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \right] \\ &= \mathbf{y}_\nu \mathbf{x}^\mu dp_k \delta_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} - \mathbf{y}^\mu \mathbf{x}_\nu dq^k \delta_k^\nu \frac{\partial}{\partial q^\mu} = \mathbf{y}_\nu \mathbf{x}^\mu dp_\mu \frac{\partial}{\partial p_\nu} - \mathbf{y}^\mu \mathbf{x}_\nu dq^\nu \frac{\partial}{\partial q^\mu} \\ &= \mathbf{y}_\nu \mathbf{x}^\mu \delta_\mu^\nu - \mathbf{y}^\mu \mathbf{x}_\nu \delta_\mu^\nu = \mathbf{y}_\nu \mathbf{x}^\nu - \mathbf{y}^\nu \mathbf{x}_\nu \end{aligned}$$

Es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial q^\nu} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_\nu} - \frac{\partial f}{\partial p_\nu} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^\nu} = \{f, \mathbf{H}\} \quad (3.1)$$

Donde se usó: $dq^k \frac{\partial}{\partial q^j} = \delta_j^k$ y $dp_k \frac{\partial}{\partial p_j} = \delta_k^j$. Otro producto en bases será nulo. Cabe notar que usando la notación abstracta de índices de Penrose se escribiría como: $(dq^k)_a \left(\frac{\partial}{\partial q^j} \right)^a = \delta_j^k$ y $(dp_k)_a \left(\frac{\partial}{\partial p_j} \right)^a = \delta_k^j$, que usaremos en algunas ocasiones también.

En particular, si $\{f, \mathbf{H}\} = 0$, entonces f es una constante de movimiento, es decir, no varía con el tiempo. Esto implica que f está asociado a una simetría del sistema, en concordancia con el teorema de Noether, que establece que cada simetría continua del sistema corresponde a una cantidad conservada.

Ejemplo: Consideremos una partícula puntual con cordenadas, (p_ν, q^μ) que no experimenta ninguna fuerza externa. Entonces su Hamiltoniano es:

$$\mathbf{H} = \frac{p^2}{2m}$$

$$\text{Vemos que : } \{p, \mathbf{H}\} = \frac{\partial p}{\partial q^k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \frac{\partial p}{\partial p_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} = 0$$

Entonces busquemos el campo generador de p usando que $\nabla_a p = \Omega_{ab} X_p^b$, supongamos que: $X_{p_\nu}^b = y^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} + y_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu}$, entonces:

$$\begin{aligned} \nabla_a p &= \Omega_{ab} X_p^b \\ \frac{\partial p_\nu}{\partial q^k} \bar{d}q^k + \frac{\partial p_\nu}{\partial p_k} \bar{d}p_k &= \bar{d}p_k \wedge \bar{d}q^k \left[y^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} + y_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right] \\ \frac{\partial p_\nu}{\partial q^k} \bar{d}q^k + \delta_\nu^k \bar{d}p_k &= y^k \bar{d}p_k - y_k \bar{d}q^k \longrightarrow y^k = \delta_\nu^k, y_k = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Tenemos que : } X_{p_\nu}^b = \delta_\nu^\mu \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} \right)^b$$

Vemos que el generador de transformaciones canónicas representa cambios en q ; es decir, nuestro sistema es invariante ante traslaciones.

3.1.2 Ecuaciones de Hamilton

Sea $\mathbf{H}$ y $X_{\mathbf{H}}^a \in \Gamma$ un flujo y su campo generador de difeomorfismos (transformaciones canónicas) respectivamente. En geometría simpléctica, siempre se pueden encontrar coordenadas (q^i, p_j) en una vecindad finita tal que la forma simpléctica toma la forma canónica (conocido como Teorema de Darboux). Entonces, $\nabla_a \mathbf{H} = \Omega_{ab} X_{\mathbf{H}}^a$. Desarrollando:

Lado izquierdo:

$$\Omega_{ab} X_{\mathbf{H}}^a = dp_k \wedge dq^k \left[x^i \frac{\partial}{\partial q^i} + x_j \frac{\partial}{\partial p_j} \right] = x^i dp_i - x_j dq^j$$

Lado derecho:

$$\nabla_a \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^j} dq^j + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} dp_i$$

Comparando:

$$x_j = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^j} \qquad x^i = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i}$$

De la escritura de los campos tangentes $T_p \Gamma$ sabemos que: $x_j \equiv \dot{p}_j$ y $x^i \equiv \dot{q}^i$, entonces vemos que obtuvimos las ecuaciones de Hamilton.

3.1.3 Sistemas no regulares

En algunas ocasiones tenemos sistemas en los cuales el cambio entre coordenadas generalizadas y coordenadas canónicas no es invertible, a estos sistemas los llamamos sistemas no regulares. El tratamiento de estos sistemas es mediante el llamado **Análisis de Dirac**. Como consecuencia de la no invertibilidad, tenemos la existencia de ligaduras $\phi_m(q^i, p_i) = 0$, donde $m = 1, 2, \dots, n$, llamadas constricciones primarias.

Análisis de Dirac

- Se define el Hamiltoniano canónico con aquellas ecuaciones que sí sean invertibles (en el sentido de la transformación de coordenadas) y se procede de forma habitual para la escritura del Hamiltoniano, como en el caso regular.
- Se agrega al Hamiltoniano canónico una combinación lineal de las constricciones $\mathbf{H}_t = \mathbf{H}_c + u^k \phi_k$, que sería nuestro generador tentativo de evolución temporal.
- Establecemos que las ligaduras se preservan en el tiempo, es decir, buscamos que el corchete de Poisson entre las ligaduras y el Hamiltoniano total sea nulo:

$$\{\phi_m, \mathbf{H}_t\} = \{\phi_m, \mathbf{H}_c\} + u^k \{\phi_m, \phi_k\} = 0$$

Debido a esto pueden aparecer: Nuevas ligaduras llamadas secundarias, o no hay más ligaduras nuevas.

Si tenemos nuevas ligaduras, extendemos de nuevo el Hamiltoniano con una combinación lineal de las nuevas ligaduras y volvemos a repetir el algoritmo.

3.1.4 Ligaduras y normas

Proporción (Conjetura de Dirac): Todas las teorías de norma (Gauge) son sistemas con ligaduras [2](#) en su formulación Hamiltoniana. Cuando tenemos un sistema no regular, usamos el método de Dirac. Como consecuencia de la no invertibilidad, tenemos $\phi_m(q^i, p(i)) = 0$ ligaduras de un sistema que podemos clasificar:

Ligaduras de primera clase: si satisfacen $\{\phi_n, \phi_m\} = \lambda_{nm}^i \phi_i$ donde λ_{nm}^i es una serie de elementos constantes. Esto sucede cuando tenemos una Ω degenerada o pre-simpléctica, es decir, tiene muchos vectores que satisfacen la condición:

- **Definición:** Sea v^a y w^b vectores $\in T_P\tilde{\Gamma}$, donde $\tilde{\Gamma}$ es una subvariedad de Γ que contiene los puntos permitidos por las restricciones. Decimos que Ω es degenerada si para cada vector w^b distinto de cero en un punto del espacio tangente, hay un vector v^a tal que $\Omega_{ab}v^aw^b = 0$.

Ligaduras de segunda clase: no satisfacen la condición $\{\phi_n, \phi_m\} = \lambda_{nm}^i \phi_i$. En este caso, no tenemos direcciones degeneradas, entonces simplemente nos reducimos a una subvariedad de Γ que será de una dimensión reducida relacionada con las ligaduras.

Para el caso de ligaduras de primera clase, tenemos tantas direcciones degeneradas como ligaduras. Estas direcciones generan flujos que llamaremos direcciones Gauges. Para trabajar sistemas físicos de este tipo, tenemos un método mayormente utilizado:

- **Gauge Fixing:** Consiste en escoger de manera suave un punto de cada trayectoria, esto impone nuevas restricciones $\tilde{\phi}_i$ para todo ϕ_i tal que $\{\phi_n, \phi_m\} = 0$, volviendo nuestro sistema físico un sistema con constricciones de segunda clase, que se trabaja reduciendo nuestra variedad a una que esté de acuerdo a nuestras nuevas restricciones.

Ejemplo: Sea $\mathcal{H}_c = (q_2)^2 e^{q_1}$ con las ligaduras: $\phi_1 = p_1 = 0$ y $\phi_2 = p_2 = 0$
Entonces usamos que la ligadura ϕ_2 se preserva en el tiempo:

$$\begin{aligned} \{\phi_2, \mathcal{H}_c\} &= 0 \\ \{p_2, (q_2)^2 e^{q_1}\} &= \frac{\partial p_2}{\partial q^i} \frac{\partial [(q_2)^2 e^{q_1}]}{\partial p_i} - \frac{\partial p_2}{\partial p_i} \frac{\partial [(q_2)^2 e^{q_1}]}{\partial q^i} = \frac{\partial p_2}{\partial q^i} \frac{\partial [(q_2)^2 e^{q_1}]}{\partial p_i} - \frac{\partial p_2}{\partial p_i} \frac{\partial [(q_2)^2 e^{q_1}]}{\partial q^i} \\ &= -\delta_2^i \frac{\partial [(q_2)^2 e^{q_1}]}{\partial q^i} = -\frac{\partial [(q_2)^2 e^{q_1}]}{\partial q^2} = -2q_2 e^{q_1} = 0 \implies q_2 = 0 \end{aligned}$$

Procedemos igual para ϕ_1

$$\{p_1, \mathcal{H}_c\} = -e^{q_1} 2q_2 = 0 \implies q_2 = 0$$

Ahora aplicamos la condición de consistencia de la nueva ligadura

$$\{q_2, (q_2)^2 e^{q_1} + \lambda^1 p_1 + \lambda^2 p_2 + \lambda^3 q_2\} = \lambda^2 = 0$$

Clasificamos:

$$\{\phi_2, \phi_3\} = \{p_2, q^2\} = -1 \implies 2 \text{ clase}$$

$$\{\phi_1, \phi_3\} = \{\phi_1, \phi_2\} = 0 \implies 1 \text{ clase}$$

3.1.5 Campo Escalar

Formulación habitual del campo escalar

Sea $\phi(x) : M \rightarrow \mathbb{R}$ con M una variedad con dimensión 4 globalmente hiperbólica, es decir que admite una descomposición $M = \Sigma \times \mathbb{R}$ [16](#) con Σ una superficie de Cauhy, encajada en M :

²Los sistemas físicos con ligaduras son restricciones mecánicas o estructurales que limitan el movimiento.

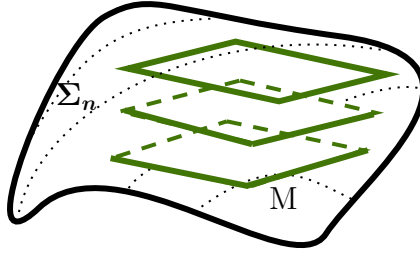


Fig. 3.1: Variedad globalmente hiperbólica

Acción del campo escalar

La acción del campo escalar tiene la forma:

$$S[\phi] = -\frac{1}{2} \int_M [g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi + m^2 \phi^2] \sqrt{|g|} dx^4 \quad (3.2)$$

Siendo $\nabla_a g_{bc} = 0$ la derivada covariante compatible con g_{bc} , si aplicamos el principio de mínima acción:

$$\delta S[\phi] = -\frac{1}{2} \int_M [2g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \delta\phi + 2m^2 \phi \delta\phi] \sqrt{|g|} dx^4 = 0 \quad (3.3)$$

usando derivación por partes:

$$\begin{aligned} \delta S[\phi] &= -\frac{1}{2} \int_M [2\nabla_b (g^{ab} \nabla_a \phi \delta\phi) - 2g^{ab} (\nabla_a \nabla_b \phi) \delta\phi + 2m^2 \phi \delta\phi] \sqrt{|g|} dx^4 \\ &= -\int_M \nabla_b (g^{ab} \nabla_a \phi \delta\phi) \sqrt{|g|} dx^4 + \int_M [g^{ab} (\nabla_a \nabla_b \phi) - m^2 \phi] \delta\phi \sqrt{|g|} dx^4 \end{aligned}$$

Del lado izquierdo usamos el teorema de la divergencia:

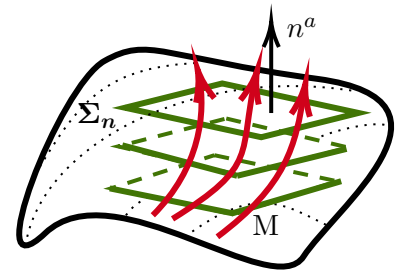
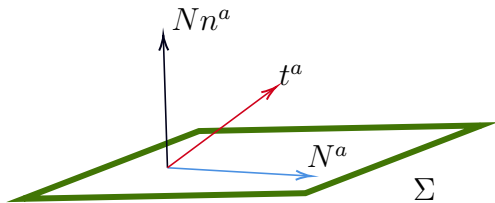
$$= -\int_{\partial M} g^{ab} \nabla_a \phi \delta\phi (d\Sigma)_b + \int_M [g^{ab} (\nabla_a \nabla_b \phi) - m^2 \phi] \delta\phi \sqrt{|g|} dx^4$$

Suponemos cero el término de frontera $\delta\phi|_{\partial M} = 0$, entonces:

$$\delta S[\phi] = \int_M [g^{ab} (\nabla_a \nabla_b \phi) - m^2 \phi] \delta\phi \sqrt{|g|} dx^4 = 0 \quad (3.4)$$

La métrica se puede descomponer (ver [B](#)) tomando en cuenta la foliación Σ : $g^{ab} = h^{ab} - n^a n^b$, donde h^{ab} es la inversa de la métrica inducida en Σ , es decir, el pullback a Σ , y n es un vector unitario normal a la superficie Σ tal que $n^a n_a = -1$. Además, $h_{ab} V^a = 0$, siendo V^a transversal en Σ . Introducimos el campo vectorial temporalloide que define la noción de evolución temporal (no única) t^a , tal que $t^a \nabla_a t = 1$, donde $t: M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función constante que define la hipersuperficie Σ_t . Una descripción gráfica la podemos ver en la figura [3.2](#).

Nuestro vector t^a puede ser descompuesto en una parte transversal y otra paralela a Σ de la forma $t^a = N n^a + N^a$, donde llamamos N la función lapse y N^a el vector shift.

Fig. 3.2: Vectores t^a y n^a .Fig. 3.3: Descomposición de t^a

Notemos que : $\sqrt{|g|}dx^4 \equiv N\sqrt{|h|}dx^3dt$. Ahora podemos hacer la descomposición de la acción del campo escalar :

$$\tilde{S}[\phi] = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} \left[(h^{ab} - n^a n^b) \nabla_a \phi \nabla_b \phi + m^2 \phi^2 \right] N \sqrt{|h|} dx^3 \quad (3.5)$$

Donde ∇_a con h^{ab} es una derivada sobre la superficie Σ , el intervalo de $t = [t_0, t]$, además dado que $t^a = Nn^a - N^a$ podemos reescribir :

$$n^a \nabla_a \phi = \frac{1}{N} (t^a - N^a) \nabla_a \phi = \frac{1}{N} t^a \nabla_a \phi - \frac{N^a}{N} \nabla_a \phi = \frac{1}{N} \dot{\phi} - \frac{N^a}{N} \nabla_a \phi \quad (3.6)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \tilde{S}[\phi] &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} \left[h^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - n^a n^b \nabla_a \phi \nabla_b \phi + m^2 \phi^2 \right] N \sqrt{|h|} dx^3 \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} \left[h^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - (n^a \nabla_a \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right] N \sqrt{|h|} dx^3 \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} \left[h^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{N^2} (\dot{\phi} - N^a \nabla_a \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right] N \sqrt{|h|} dx^3 \end{aligned}$$

Ahora usando la descomposición 3+1 [17] mediante [3.6] tenemos que el momento conjugado es:

$$\pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}} = \frac{1}{N} (\dot{\phi} - N^a \nabla_a \phi) \sqrt{|h|} \quad (3.7)$$

El espacio de fase Γ de la teoría puede escribirse en la base $=(\phi, \pi)$, donde la variable de configuración ϕ es la restricción de ϕ en Σ y π es $\sqrt{h}N^a \nabla_a \phi$ restringida a Σ . En Σ la estructura simpléctica Ω toma la siguiente forma, cuando actúa sobre los vectores (ϕ_1, π_1) y (ϕ_2, π_2)

$$\Omega((\phi_1, \pi_1), (\phi_2, \pi_2)) = \int_{\Sigma} (\pi_1 \phi_2 - \pi_2 \phi_1) dx^3$$

Los observables para el espacio Γ pueden construirse directamente dando funciones suaves sobre Σ . Podemos definir funciones lineales en Γ como sigue:

Dado un vector Y^a en Γ de la forma $Y^a = (\phi, \pi)^a$, y un par $\lambda_a = (-f, -g)_a$, donde f es una densidad escalar y g un escalar, definimos la acción de λ_a sobre Y^a como:

$$F_{\lambda}(Y^a) = -\lambda_a Y^a := \int_{\Sigma} d^3x (f\phi - g\pi) \quad (3.8)$$

ahora podemos escribir nuestra función: $F_{\lambda}(Y) = \Omega_{ab} \lambda^a Y^b = \Omega(\lambda^a, Y^b)$

Observables

Sabemos que las observables deben satisfacer:

$$a) \quad \bar{d}f = \Omega(X_f, \cdot) \quad b) \quad \mathcal{L}_y f = \bar{d}f(y) \equiv X_y(f) \equiv \Omega(X_y, X_f) \quad (3.9)$$

$$c) \quad \{f, g\} = \Omega(X_f, X_g) \quad d) \quad \dot{f} = \mathcal{L}_{X_{\mathcal{H}}} f = \Omega(X_{\mathcal{H}}, X_f) \quad (3.10)$$

Donde $X_f, X_g, X_{\mathcal{H}}$ son los campos generadores de las funciones f, g y el Hamiltoniano respectivamente. Las observables más simples en Σ pueden verse usando el vector $\lambda_a = (o, f)_a$ y $\tilde{\lambda}_a = (-g, 0)_a$ para construir de la misma forma que [3.8]:

$$1) \quad \phi(\tilde{f}) = \int_{\Sigma} d^3x f(x) \phi(x) \quad 2) \quad \pi(g) = \int_{\Sigma} d^3x \pi(x) g(x) \quad (3.11)$$

lo que llamamos observable tipo configuración y tipo momento respectivamente, como se desarrolla en [13].

Hamiltoniano del campo escalar usando la descomposición 3+1

Podemos escribir el Hamiltoniano del campo escalar mediante la transformada de Legendre ya que el momento generalizado tiene inversa, usando 3.7 tenemos entonces $\dot{\phi} = \frac{N}{\sqrt{|h|}}\tilde{\Pi} + N^a \nabla_a \phi$, el Hamiltoniano es:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} &= \int_{\Sigma} dx^3 (\tilde{\Pi} \dot{\phi} - \mathbf{L}) \\
 &= \int_{\Sigma} dx^3 \left(\tilde{\Pi} \left(\frac{N}{\sqrt{|h|}} \tilde{\Pi} + N^a \nabla_a \phi \right) + \frac{N\sqrt{|h|}}{2} \left(h^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{N^2} (\dot{\phi} - N^a \nabla_a \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right) \right) \\
 &= \int_{\Sigma} dx^3 \left(\frac{N}{\sqrt{|h|}} \tilde{\Pi}^2 + N^a \nabla_a \phi \tilde{\Pi} + \frac{N\sqrt{|h|}}{2} h^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{\sqrt{|h|}}{2N} (\dot{\phi} - N^a \nabla_a \phi)^2 + \frac{N\sqrt{|h|}}{2} m^2 \phi^2 \right) \\
 &= \int_{\Sigma} dx^3 \left(\frac{N}{\sqrt{|h|}} \tilde{\Pi}^2 + N^a \nabla_a \phi \tilde{\Pi} + \frac{N\sqrt{|h|}}{2} h^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{N}{2\sqrt{|h|}} \tilde{\Pi}^2 + \frac{N\sqrt{|h|}}{2} m^2 \phi^2 \right) \\
 \mathbf{H} &= \int_{\Sigma} dx^3 \left(\frac{N}{2\sqrt{|h|}} \tilde{\Pi}^2 + N^a \nabla_a \phi \tilde{\Pi} + \frac{N\sqrt{|h|}}{2} (h^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi + m^2 \phi^2) \right) \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Si tenemos el caso $N = 1$, $N^a = 0$, $h = 1$ recuperamos el Hamiltoniano habitual para el campo escalar.

3.1.6 Campo electromagnético clásico

Acción del campo magnético, formulación Canónica

El punto de partida habitual para la construcción de la teoría libre de Maxwell es el uso del espacio de fase covariante. Para ello, identificamos el espacio vectorial simpléctico Σ , llamado espacio de fase. Empecemos escribiendo la acción para la teoría libre de Maxwell:

$$S(A_a) = -\frac{1}{4} \int_M \sqrt{|g|} dx^4 F^{ab} F_{ab} = -\frac{1}{4} \int_M \sqrt{|g|} dx^4 F^{ab} \nabla_{[a} A_{b]} \quad (3.13)$$

Siendo el tensor de Faraday $F^{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a \equiv \nabla_{[a} A_{b]}$, su variación es:

$$\delta S(A_a) = -\frac{1}{4} \int_M \sqrt{|g|} dx^4 \delta(\nabla^{[a} A^{b]} \nabla_{[a} A_{b]}) = -\frac{1}{4} \int_M \sqrt{|g|} dx^4 2(\nabla^{[a} A^{b]} \nabla_{[a} \delta A_{b]})$$

Usando derivación por partes $\nabla_a(\nabla^{[a} A^{b]} \delta A_b) = \nabla_a(\nabla^{[a} A^{b]}) \delta A_b + \nabla^{[a} A^{b]} \nabla_{[a} \delta A_{b]}$:

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \int_M \sqrt{|g|} dx^4 \left(\nabla_a(\nabla^{[a} A^{b]} \delta A_b) - \nabla_a(\nabla^{[a} A^{b]}) \delta A_b \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \int_M \sqrt{|g|} dx^4 \left(\nabla_a(F^{ab} \delta A_b) - \nabla_a F^{ab} \delta A_b \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \int_M \cancel{d\Sigma_a F^{ab} \delta A_b} + \frac{1}{2} \int_M \sqrt{|g|} dx^4 \nabla_a F^{ab} \delta A_b \implies \delta A|_{\partial M} = 0 \\
 \delta S(A_a) &= \frac{1}{2} \int_M \sqrt{|g|} dx^4 \nabla_a F^{ab} \delta A_b \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Usando el principio variacional entonces :

$$\delta S(A_a) = 0 \implies \nabla_a F^{ab} = 0 \quad (3.15)$$

Deseamos centrarnos en la descripción **canónica del espacio de fases** del campo de Maxwell, libre de coordenadas; es decir, no asumimos ningún sistema de coordenadas en $\mathbf{M}$. La acción [3.13](#) puede escribirse usando la descomposición $3 + 1$. Escribimos la expresión de la acción como sigue:

$$\begin{aligned} S(A_a) &= -\frac{1}{4} \int_M \sqrt{|g|} dx^4 g^{ac} F_{cd} g^{db} F_{ab} = -\frac{1}{4} \int dt \int_\Sigma dx^3 N \sqrt{|h|} (h^{ac} - n^a n^c) F_{cd} (h^{db} - n^d n^b) F_{ab} \\ &= -\frac{1}{4} \int dt \int_\Sigma dx^3 N \sqrt{|h|} (h^{ac} F_{cd} h^{db} F_{ab} - n^a n^c F_{cd} h^{db} F_{ab} - h^{ac} F_{cd} n^d n^b F_{ab} + n^a n^c F_{cd} n^d n^b F_{ab}) \end{aligned}$$

Por simetría de índices vemos que $n^a n^c F_{cd} n^d n^b F_{ab} = 0$, y dado que $n^a = \frac{1}{N}(t^a - N^A)$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4} \int dt \int_\Sigma dx^3 N \sqrt{|h|} (h^{ac} F_{cd} h^{db} F_{ab} - n^a n^c F_{cd} h^{db} F_{ab} - h^{ac} F_{cd} n^d n^b F_{ab}) \\ &= -\frac{1}{4} \int dt \int_\Sigma dx^3 N \sqrt{|h|} (h^{ac} F_{cd} h^{db} F_{ab} - 2h^{ac} F_{cd} n^d n^b F_{ab}) \\ &= -\frac{1}{4} \int dt \int_\Sigma dx^3 N \sqrt{|h|} (h^{ac} F_{cd} h^{db} F_{ab} - \frac{2h^{ac}}{N^2} F_{cd} (t^d - N^d) (t^b - N^b) F_{ab}) \\ &= -\frac{1}{4} \int dt \int_\Sigma dx^3 N \sqrt{|h|} (h^{ac} F_{cd} h^{db} F_{ab} - \frac{2h^{ac}}{N^2} (F_{cd} t^d - F_{cd} N^d) (t^b F_{ab} - N^b F_{ab})) \\ &= -\frac{1}{4} \int dt \int_\Sigma dx^3 N \sqrt{|h|} (h^{ac} F_{cd} h^{db} F_{ab} - \frac{2h^{ac}}{N^2} (\nabla_{[c} A_{d]} t^d - F_{cd} N^d) (t^b \nabla_{[a} A_{b]} - N^b F_{ab})) \end{aligned}$$

Usando que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{t^a} A_b &\equiv (i_{t^a} \bar{d} + \bar{d} i_{t^a}) A_b = i_{t^a} \bar{d} A_b + \bar{d} (i_{t^a} A_b) \\ &= i_{t^a} \nabla_{[a} A_{b]} + \nabla_a (t^b A_b) = t^b \nabla_{[a} A_{b]} + \nabla_a (t^b A_b) \\ &\implies t^b \nabla_{[a} A_{b]} = \mathcal{L}_{t^a} A_b - \nabla_a (t^b A_b) \end{aligned}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} S(A) &= -\frac{1}{4} \int dt \int_\Sigma dx^3 N \sqrt{|h|} \{ h^{ac} F_{cd} h^{db} F_{ab} - \\ &\quad \frac{2h^{ac}}{N^2} (\mathcal{L}_{t^c} A_d - \nabla_c (t^d A_d) - F_{cd} N^d) (\mathcal{L}_{t^a} A_b - \nabla_a (t^b A_b) - N^b F_{ab}) \} \quad (3.16) \end{aligned}$$

Hamiltoniano

Para escribir el Hamiltoniano comenzamos con la transformada de Legendre, entonces el momento conjugado es:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^a &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\mathcal{L}_{t^a} A)} = \frac{\sqrt{h}}{N} h^{ac} (\mathcal{L}_{t^a} A_d - \nabla_c (t^d A_d) - F_{cd} N^d) \\ &= \frac{\sqrt{h}}{N} h^{ac} (t^b - N^b) F_{bc} = \frac{h^{ac} \sqrt{h}}{\mathcal{N}} \mathcal{N} n^b F_{bc} = \sqrt{h} h^{ac} n^b F_{bc} = \sqrt{h} E^a \quad (3.17) \end{aligned}$$

Lo que llamamos densidad de campo eléctrico [3](#). Por otro lado, el cambio del campo A_a sobre del flujo generado por el vector t^a , despejando del momento conjugado, podemos definir $\dot{A} \equiv \mathcal{L}_{t^a} A_d = \frac{N}{\sqrt{|h|}} h_{ac} \tilde{\Pi}^a + \nabla_c (t^b A_b) + F_{cd} N^d$. Entonces escribimos el Hamiltoniano.

³Notemos que $n^b \perp \Sigma$, es decir, temporal; entonces $n^b F_{bc} = \vec{E}_c$, después simplemente la métrica h^{ac} sube el índice.

$$\mathbf{H} = \int_{\Sigma} dx^3 \left(\tilde{\Pi}^a \mathcal{L}_{t^a}(A) - \mathcal{L} \right)$$

Tenemos que:

$$\tilde{\Pi}^a \mathcal{L}_{t^a}(A) = \frac{N}{\sqrt{|h|}} h_{ac} \tilde{\Pi}^a \tilde{\Pi}^c + \tilde{\Pi}^c \nabla_c (t^b A_b) + \tilde{\Pi}^c F_{cd} N^d$$

Sustituyendo $\mathcal{L}_{t^a}(A)$ en $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} N \sqrt{|h|} \{ h^{ac} F_{cd} h^{db} F_{ab} - \frac{2h^{ac}}{N^2} \left(\frac{N}{\sqrt{|h|}} h_{ac} \tilde{\Pi}^a \right) \left(\frac{N}{\sqrt{|h|}} h_{ac} \tilde{\Pi}^c \right) \} \\ &= -\frac{1}{4} N \sqrt{|h|} \{ h^{ac} F_{cd} h^{db} F_{ab} \} + \frac{1}{2\sqrt{h}} h_{ac} \tilde{\Pi}^a \tilde{\Pi}^c \end{aligned}$$

Ahora la resta:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^a \mathcal{L}_{t^a}(A) - \mathcal{L} &= \frac{N}{\sqrt{|h|}} h_{ac} \tilde{\Pi}^a \tilde{\Pi}^c + \tilde{\Pi}^c \nabla_c (t^b A_b) + \tilde{\Pi}^c F_{cd} N^d + \frac{1}{4} N \sqrt{|h|} \{ h^{ac} F_{cd} h^{db} F_{ab} \} - \frac{1}{2\sqrt{h}} h_{ac} \tilde{\Pi}^a \tilde{\Pi}^c \\ &= \frac{N}{2\sqrt{|h|}} h_{ac} \tilde{\Pi}^a \tilde{\Pi}^c + \tilde{\Pi}^c \nabla_c (t^b A_b) + \tilde{\Pi}^c F_{cd} N^d + \frac{1}{4} N \sqrt{|h|} h^{ac} F_{cd} h^{db} F_{ab} \\ &= \frac{N}{2\sqrt{|h|}} h_{ac} \tilde{\Pi}^a \tilde{\Pi}^c + \nabla_c (\tilde{\Pi}^c t^b A_b) - (t^b A_b) \nabla_c \tilde{\Pi}^c + \tilde{\Pi}^c F_{cd} N^d + \frac{1}{4} N \sqrt{|h|} h^{ac} F_{cd} h^{db} F_{ab} \end{aligned}$$

Usando que $\nabla_c (\tilde{\Pi}^c t^b A_b) = (t^b A_b) \nabla_c \tilde{\Pi}^c + \tilde{\Pi}^c \nabla_c (t^b A_b)$ tenemos entonces:

$$\mathbf{H} = \int_{\Sigma} dx^3 \left(-(t^b A_b) \nabla_c \tilde{\Pi}^c + \tilde{\Pi}^c F_{cd} N^d + \frac{N}{2\sqrt{|h|}} h_{ac} \tilde{\Pi}^a \tilde{\Pi}^c + \frac{1}{4} N \sqrt{|h|} h^{ac} F_{cd} h^{db} F_{ab} \right)$$

Notemos que $F_{cd} N^d = (\nabla_c A_d) N^d - (\nabla_d A_c) N^d$, $N^d \in \Sigma \therefore (\nabla_c A_d) N^d \in \Sigma$ por tanto $F_{cd} N^d \in \Sigma$, entonces si llamamos B_{ab} intensidad del campo tridimensional $\mathcal{A}_a$, relacionado con el campo magnético de la siguiente forma: $B^a = \frac{1}{\sqrt{h}} \tilde{\eta}^{abc} B_{bc}$ podríamos reescribir **H**. Por otro lado, igualmente la expresión $h^{ac} F_{cd} h^{db} F_{ab}$ implica un proyección en Σ , entonces: $h^{ac} F_{cd} h^{db} F_{ab} \equiv h^{ac} B_{cd} h^{db} B_{ab}$ 14 y por lo tanto:

$$\mathbf{H} = \int_{\Sigma} dx^3 \left(-(t^b A_b) \nabla_c \tilde{\Pi}^c + \tilde{\Pi}^c B_{cd} N^d + \frac{N}{2\sqrt{|h|}} h_{ac} \tilde{\Pi}^a \tilde{\Pi}^c + \frac{1}{4} N \sqrt{|h|} h^{ac} B_{cd} h^{db} B_{ab} \right) \quad (3.18)$$

Análisis de Dirac

Comenzamos identificando las Variables del **espacio de configuración**, entonces nuestro par : $((A_a t^a), \mathbf{A}_a) \equiv (\phi, \mathbf{A}_a)$, donde definimos $(A_a t^a) := \phi$ y $\mathbf{A}_a \in \Sigma$ tales que $\{\phi(x), \mathbf{A}_a\} = \delta^3(x, y)$, al revisar la acción notamos una Constricción primaria:

Entonces veamos si ϕ se conserva :

$$\begin{aligned} \{\phi, \mathcal{L}\} &= \int_{\Sigma} dy^3 \left(\cancel{\frac{\delta \phi}{\delta A_k}} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} - \frac{\delta \phi}{\delta \phi} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_k} \right) = - \int_{\Sigma} dy^3 \delta^3(x, y) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_k} \\ &= - \int_{\Sigma} dy^3 \delta^3(x, y) \frac{\delta}{\delta A_k} \left((\nabla^a A^b - \nabla^b A^a) (\nabla_a A_b - \nabla_b A_a) \right) \\ &= - \int_{\Sigma} dy^3 \delta^3(x, y) \left(\cancel{(\nabla^a \frac{\delta A^b}{\delta A_k})} - \cancel{\nabla^b (\frac{\delta A^a}{\delta A_k})} \right) (\nabla_a A_b - \nabla_b A_a) + \dots = 0 \end{aligned}$$

Tenemos una conservación, entonces busquemos el campo generador de ϕ usando que $\nabla_a \phi = \Omega_{ab} X_\phi^b$, suponemos que $X_\phi^b = \int_\Sigma dy^3 y^\mu \frac{\partial}{\partial A^\mu} + x_\mu \frac{\partial}{\partial \phi^\mu}$

$$\Omega_{ab} X_\phi^b = \int_\Sigma dx^3 d\phi \wedge dA \left(\int_\Sigma dy^3 y^\mu \frac{\partial}{\partial A^\mu} + x_\mu \frac{\partial}{\partial \phi^\mu} \right) = \int_\Sigma dx^3 \{y d\phi - x_\mu dA\}$$

Como ϕ no depende de A tenemos que el campo generador de transformaciones canónicas es:

$$X_\phi^b = \int_\Sigma dy^3 y^\mu \frac{\partial}{\partial A^\mu} \quad (3.19)$$

Tenemos una conservación ante transformaciones en el campo $\tilde{A}_a = A_a + \Lambda_a$, donde veremos en breve qué forma tiene Λ_a . Identificamos las variables del **espacio fase** en la teoría covariante. Entonces, nuestro par de coordenadas es $(A_a, \tilde{\Pi}^a)$, donde el corchete de Poisson sería $\{A_a(x), \tilde{\Pi}^b(y)\} = \delta_a^b \delta^3(x, y)$. Al revisar la condición de evolución temporal, notamos una constricción primaria, al ver si $\tilde{\Pi}$ se conserva:

$$\begin{aligned} \{\tilde{\Pi}^a, \tilde{\mathcal{H}}\} &= \int_\Sigma dy^3 \left(\frac{\delta \tilde{\Pi}^a}{\delta A_b} \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}}{\delta \tilde{\Pi}^b} - \frac{\delta \tilde{\Pi}^a}{\delta \tilde{\Pi}^b} \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}}{\delta A_b} \right) = - \int_\Sigma dy^3 \delta_b^a \delta^3(x, y) \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}}{\delta A_b} \\ &= \int_\Sigma dy^3 \delta_b^a \delta^3(x, y) t^b \nabla_c \tilde{\Pi}^c = \int_\Sigma dy^3 \delta^3(x, y) t^a \nabla_c \tilde{\Pi}^c \\ &\int_\Sigma dy^3 \delta^3(x, y) t^a \nabla_c (\sqrt{h}) h^{cd} n^a F_{ab} = \int_\Sigma dy^3 \delta^3(x, y) t^a \nabla_c \sqrt{h} h^{cd} n^a \nabla_c (\overline{F_{ab}}) = 0 \end{aligned}$$

Donde usamos la ecuación 3.15 para la parte llevar a cero la parte izquierda de la igualdad

$$\therefore \int_\Sigma dy^3 \delta^3(x, y) t^a \nabla_c \tilde{\Pi}^c = 0 \implies \nabla_c \tilde{\Pi}^c = 0$$

Tenemos la constricción :

$$\nabla_c \tilde{\Pi}^c = 0 \quad (3.20)$$

Entonces si retomamos que $\tilde{\Pi}^a = \sqrt{|h|} E^a$, entonces tenemos : $\nabla_c \sqrt{|h|} E^a \equiv \nabla_c E^a = 0$, es decir, la **ley de Gauss**.

Para lo anterior usamos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta A_k} &= \int_\Sigma dx^3 \frac{\delta}{\delta A_k} \left(-(t^b A_b) \nabla_c \tilde{\Pi}^c + \tilde{\Pi}^c B_{cd} N^d + \frac{N}{2\sqrt{|h|}} h_{ac} \tilde{\Pi}^a \tilde{\Pi}^c + \frac{1}{4} N \sqrt{|h|} h^{ac} B_{cd} h^{db} B_{ab} \right) \\ &= \int_\Sigma dx^3 - (t^b \frac{\delta A_b}{\delta A_k}) \nabla_c \tilde{\Pi}^c + \frac{1}{4} N \sqrt{|h|} \frac{\delta}{\delta A_k} (h^{ac} B_{cd} h^{db} B_{ab}) \\ &= \int_\Sigma dx^3 - (t^b \delta_b^k \delta^3(x, y)) \nabla_c \tilde{\Pi}^c + \frac{1}{4} N \sqrt{|h|} \left(2 h^{ac} h^{db} B_{cd} \frac{\delta B_{ab}}{\delta A_k} \right) \\ &= \int_\Sigma dx^3 - (t^k \delta^3(x, y)) \nabla_c \tilde{\Pi}^c + \frac{1}{2} N \sqrt{|h|} \left(h^{ac} h^{db} B_{cd} \frac{\delta \nabla_{[a} \mathcal{A}_{b]}}{\delta A_k} \right) \\ &= \int_\Sigma dx^3 - (t^k \delta^3(x, y)) \nabla_c \tilde{\Pi}^c + \frac{1}{2} N \sqrt{|h|} \left(h^{ac} h^{db} B_{cd} (\nabla_a \frac{\delta \mathcal{A}_b}{\delta A_k} - \nabla_b \frac{\delta \mathcal{A}_a}{\delta A_k}) \right) \\ &= \int_\Sigma dx^3 - (t^k \delta^3(x, y)) \nabla_c \tilde{\Pi}^c + \frac{1}{2} N \sqrt{|h|} \left(h^{ac} h^{db} B_{cd} (\nabla_a \delta_b^k \delta^3(x, y) - \nabla_b \delta_a^k \delta^3(x, y)) \right) \\ &= - \int_\Sigma dx^3 (t^k \delta^3(x, y)) \nabla_c \tilde{\Pi}^c = -t^k \nabla_c \tilde{\Pi}^c \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4

Cuantización de campos

Siguiendo lo expuesto en [9, 14], se presenta un algoritmo que permite “mapear” una teoría clásica a una teoría cuántica. Este procedimiento, conocido como cuantización, no es único, lo que introduce un grado de libertad y ambigüedad en la transición entre las dos teorías.

Teoría Clásica	Teoría Cuántica
Espacio fase y una 2-forma simpléctica	Espacio de Hilbert
Observables son funciones	Observables son operadores Hermíticos
Evolución dinámica por el Hamiltoniano	Evolución dinámica por el operador $\hat{U}(t)$
Determinista	Mayor carácter probabilístico

Pasos para Cuantizar

Cuantizar es un proceso en el cual se toma una teoría en términos de conceptos y variables clásicas y se transforma en un marco que tenga en cuenta:

- **Observables:** Identificar un subconjunto de observables $\mathbf{S}$ clásicos elementales en los cuales no hay ambigüedades en el proceso de cuantización, con las propiedades:
 - $\mathbf{S}$ debe tener el tamaño suficiente para que cada función regular en Γ se pueda obtener a través o en el límite de sumas de productos de los elementos de $\mathbf{S}$.
 - $\mathbf{S}$ debe ser cerrado bajo el corchete de Poisson.
- **Definir un Álgebra abstracta $\mathcal{A}$:** En lugar de variables clásicas, se promueven ciertos conjuntos de variables $\mathbf{S}$ a operadores que se llaman “álgebra libre asociativa generada por $\mathbf{S}$ ”, a la cual se le impone la condición de Dirac: Dados A, B y $\{A, B\}$ en $\mathbf{S}$, imponemos el mapeo a elementos de $\mathcal{A} : \hat{A}, \hat{B}, \{\hat{A}, \hat{B}\}$ donde:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\{\hat{A}, \hat{B}\}$$

- **Definir una PLF ¹:** Sea $\mathcal{A}$ la $C^\star$ -álgebra y sea $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ una PLF: $\omega(aa^*) \geq 0$, donde a son elementos de $\mathcal{A}$ y a^* implica el conjugado. Entonces, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y una representación $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se refiere al conjunto de operadores lineales en $\mathcal{H}$, y un vector $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$ tal que:

$$\omega(a) = \langle \psi_0 | \pi(a) | \psi_0 \rangle_{\mathcal{H}}$$

La representación π se define haciendo que $\mathcal{A}$ actúe sobre sí mismo por multiplicación y se extiende a $\mathcal{H}$ por continuidad, recordemos que el vector cíclico que aquí llamamos $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$ representa el vacío y corresponde al elemento identidad de $\mathcal{A}$.

¹La libertad en la cuantización GNS está en la elección de ω

4.0.1 Observables

En el caso especial cuando el espacio-fase Γ es lineal, podemos definir una familia especial de observables, es decir, lineales en Γ . Un espacio lineal es conocido como espacio vectorial, es decir, una estructura matemática que satisface propiedades descritas en la sección 2.2 (estructuras algebraicas). Sea $Y^a \in \Gamma$ es un vector en $T_p\Gamma$, y dada una 1-forma $\lambda_a \in \Gamma$, entonces podemos definir una función lineal $F_\lambda(Y) := \lambda_a Y^a$. Podemos definir un vector asociado a λ_b como $\lambda^a = \Omega^{ab} \lambda_b$, tal que podemos escribir nuestra función:

$$F_\lambda(Y) = \Omega_{ab} \lambda^a Y^b = \Omega(\lambda^a, Y^b)$$

Notamos esto porque :

$$\Omega_{ab} \lambda^b = \frac{\partial}{\partial p_k} \wedge \frac{\partial}{\partial q^k} [l_c dq^c] = \frac{\partial}{\partial p_k} \delta_k^c l_c = l_k \frac{\partial}{\partial p_k} = \lambda_a$$

Si tenemos otro observable $G_\nu(Y) = V_a Y^a$, entonces el corchete entre ambos observables:

$$\{F_\lambda, G_\nu\} = \Omega(X_G, X_F)$$

Donde los campos se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} X_G &= \Omega^{ab} \nabla_a G = \Omega^{ab} V_b = V^a \\ X_F &= \Omega^{ab} \nabla_a F = \Omega^{ab} \lambda_b = \lambda^a \\ \therefore \{F_\lambda, \varphi_\nu\} &= \Omega(V^a, \lambda_a) = \Omega_{ab} V^a \lambda^b \end{aligned}$$

Por tanto: $\{\Omega(\lambda, Y), \Omega(V, Y)\} = \Omega(\lambda, V)$. Son cerrados bajo el corchete de Poisson que es un requisito importante a la hora de cuantizar, esta estructura nos servirá mucho para tratar los observables.

Ejemplo:

1) Observables: Sea Γ el espacio fase, con una carta $\{q^i, p_i\}$ con $i = 1, 2, 3$ $\mathcal{S} = \{1, q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3\}$. Donde incluimos 1 para mantener la cerradura sobre el corchete de Poisson $\{q^i, p_j\} = \delta_j^i$

2) Definimos un álgebra: promovemos los observables a operadores que satisfacen la relación de cuantización canónica CCR $[\hat{q}^j, \hat{p}_i] = i\hbar \delta_i^j$

3) Espacio de Hilbert: $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, d^3\mu)$ y los operadores:

$$\begin{aligned} a) (\hat{1} \cdot \bar{\psi})(q) &= \bar{\psi}(q) & b) (\hat{q}^i \cdot \bar{\psi})(q) &= q^i \bar{\psi}(q) \\ c) (\hat{p}_i \cdot \hat{\psi})(q) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i} \psi(q) \end{aligned}$$

^apor sus siglas en ingles

4.1 Mecánica cuántica Polimérica

En esta sección trataremos de mostrar un resumen de [5] que nos servirá como guía para nuestro trabajo en el capítulo 6. Una representación cuántica no estándar de las relaciones de conmutación es conocida como representación polimérica, la cual ha ganado cierta atención en los últimos años debido a su posible relación con la física a escala de Planck [5], y muestra un ejemplo del estilo de cuantización a la Weyl.

Consideraremos la cuantización que conduce a la teoría cuántica estándar en la descripción de Schrödinger. Una ruta conveniente consiste en introducir la estructura necesaria para

definir la representación de Fock de dicho sistema. Desde esta perspectiva, el paso al caso polimérico resulta más claro. Nuestro punto de partida será el más simple en la descripción de Schrödinger, sea $\Gamma = \mathbb{R}^2$, donde nuestro conjunto $\mathbf{S} = (1, q, p)$. Por cuantización se entiende el paso del corchete algebraico clásico al corchete de Poisson entonces: $\{q, p\} = 1 \implies \{\hat{q}, \hat{p}\} = i\hbar\hat{I}$.

La elección estándar consiste en seleccionar el espacio de Hilbert como $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dq)$, el espacio de funciones cuadradas integrables con respecto a la medida de Lebesgue dq (invariante bajo translaciones constantes) en $\mathbb{R}$. La construcción estándar del tipo Schrödinger, es donde los estados son funciones de onda $\psi(q)$ del espacio de configuración.

Hay dos ingredientes en la construcción de la representación Schrödinger (ver [A](#)), a saber, la especificación de cómo actuarán los operadores básicos $(\hat{q}, \hat{p})$, y la naturaleza del espacio de funciones al que pertenece ψ , que normalmente se fija mediante la elección del producto interno sobre $\mathcal{H}$, o la medida μ sobre $\mathbb{R}$. Conocemos la acción de los operadores:

$$(\hat{q}^i \cdot \bar{\psi})(q) = q^i \psi(q) \quad y \quad (\hat{p}_i \cdot \hat{\psi})(q) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i} \psi(q) \quad (4.1)$$

4.1.1 Cuantización algebraica de Weyl

Consideramos el álgebra generada por las versiones exponenciadas de $\hat{q}, \hat{p}$, vamos a definir los generadores del álgebra de Weyl partiendo de λ_a un vector de Γ y $df = \Omega(\lambda, \cdot)$ son observables lineales en Γ [5](#), [9](#), [13](#).

Definimos los generadores del álgebra:

$$W(\lambda) = \exp\{i\Omega(\lambda, \cdot)\}$$

El estado ω es decir la PLF, actuando sobre $W(\lambda)$ estará dado:

$$\omega(W(\lambda)) = e^{-\frac{1}{4}g(\lambda, \lambda)} \quad (4.2)$$

Centrándonos en solo encontrar una representación de espacio de Hilbert de los observables, generamos el conjunto $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \{1, \hat{V}(\beta), \hat{U}(\alpha)\}$$

Donde definimos como se verían los operadores :

$$\hat{U}(\alpha) := e^{\frac{i\alpha}{\hbar}\hat{q}} \quad \hat{V}(\beta) := e^{\frac{i\beta}{\hbar}\hat{p}} \quad (4.3)$$

Que satisfacen las relaciones canónicas de conmutación CCR:

$$\hat{V}(\beta)\hat{U}(\alpha) = \exp i\Omega(\alpha, \beta)\hat{U}(\alpha)\hat{V}(\beta)$$

$$[\hat{U}(\alpha_1)\hat{U}(\alpha_2)] = \hat{U}(\alpha_1 + \alpha_2)$$

Esto es llamada álgebra de Weyl $\mathcal{W}$ y es generada al tomar combinaciones lineales finitas de los generadores $\hat{V}(\beta_i), \hat{U}(\alpha_i)$:

$$\sum_i [A_i \hat{V}(\beta_i) + B_i \hat{U}(\alpha_i)]$$

Con $A_i, B_i \in \mathbb{C}$.

La cuantización significa encontrar una representación unitaria de $\mathcal{W}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (que podría ser diferente de la representación ordinaria de Schrödinger). La importancia de este tipo de cuantización se ve en la teoría de campos, pero también es útil para

introducir la cuantización polimérica y compararla con la cuantización estándar. Esta es la estrategia que sigue [5].

La pregunta que se plantea en [5] es: ¿existe alguna libertad en la cuantización del sistema para obtener la representación ordinaria de Schrödinger? Podría parecer que no, dado el teorema de unicidad de Stone-von Neumann, que establece que cualquier representación irreducible de las relaciones canónicas de conmutación (CCR) es unitariamente equivalente a la representación de Schrödinger.

La representación del álgebra de Weyl que puede llamarse del “tipo Fock” implica la definición de una estructura extra en el espacio de fases lineales Γ . Este es un concepto geométrico de cuantización. Partimos de una variedad (Γ, Ω) simpléctica donde cuantizar implica introducir una estructura compleja [13] llamada J_b^a que satisface: $J^2 = J_b^a J_c^b = -\delta_c^a$.

Nuestro tensor métrico de rango $(0, 2)$ lo definimos como: $g(\cdot, \cdot) = \Omega(\cdot, J\cdot)$. Con esto ahora tenemos una variedad (Γ, Ω, g) . Pensemos en una partícula en una dimensión, entonces sea $\{q, p\}$ una carta y sea $\lambda_a = (q, p/\hbar)$. El producto interno en Γ está dado por $g[\lambda'_a, \lambda_a] = \Omega(\lambda'_a, J\lambda_a)$.

$$J_b^a \lambda_a = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p/\hbar \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aq + Cp \\ Bq + Dp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d^2}{\hbar} p \\ \frac{q}{d^2} \end{bmatrix}$$

Suponiendo el caso que $A \equiv D = 0$ y la acción de $Cp/\hbar = -\frac{d^2}{\hbar} p$ con d es un parámetro y $Bq = \frac{q}{d^2}$, entonces:

$$\begin{aligned} g[\lambda'_a, \lambda_a] &= \Omega[\lambda'_a, J_b^a \lambda_a] = \Omega[(q' \frac{\partial}{\partial q^a} + p' \frac{\partial}{\partial p_a}), (-\frac{1}{\hbar} d^2 p \frac{\partial}{\partial q^a} + \frac{q}{d^2} \frac{\partial}{\partial p_a})] \\ &= \frac{1}{d^2} q' q + \frac{d^2}{\hbar^2} p' p \end{aligned}$$

Con estas cantidades se pueden definir coordenadas complejas $(\zeta, \tilde{\zeta})$ como :

$$\zeta = \frac{1}{d} q + i \frac{d}{\hbar} p \quad \tilde{\zeta} = \frac{1}{d} q - i \frac{d}{\hbar} p$$

A partir de la cual se puede construir la representación de Fock (ver [A]) estándar. La introducción del parámetro de longitud d se puede ver como la cantidad necesaria para definir coordenadas complejas (adimensionales) en el espacio de fase.

Pero, ¿cuál es la relevancia de este objeto (J o d)? La definición de coordenadas complejas es útil para la construcción del espacio de Fock, ya que a partir de ellas se pueden definir, de forma natural, los operadores de creación y aniquilación. Pero para la representación de Schrödinger que nos interesa aquí, es un poco más sutil. La sutileza es que en este enfoque se utilizan las propiedades algebraicas de $\mathcal{W}$ para construir el espacio de Hilbert mediante lo que se conoce como la construcción Gelfand-Naimark-Segal (GNS). Esto implica que la medida en la representación de Schrödinger se convierte en no trivial y, por tanto, el operador momentum adquiere un término extra para hacer que el operador sea autoadjunto. La representación del $\mathcal{W}$ es entonces al actuar sobre funciones $\phi(q)$.

Acción de los operadores $\hat{U}$ y $\hat{V}$ sobre ϕ

$$\hat{U}(\alpha)\phi(q) = e^{\frac{i\alpha}{\hbar}q}\phi(q) \quad \hat{V}(\beta)\phi(q) = e^{\frac{\beta}{d^2}(q-\frac{\beta}{2})}\phi(q-\beta) \quad (4.4)$$

Podemos ver la acción de los operadores $\hat{q}$ y $\hat{p}$

Para el operador $\hat{U}$ derivamos con respecto a las variables α .

$$\begin{aligned}
 -i\hbar\partial_\alpha[\hat{U}(\alpha)\phi(q)] &= -i\hbar\partial_\alpha[e^{\frac{i\alpha}{\hbar}q}\phi(q)] \\
 -i\hbar\partial_\alpha[e^{\frac{i\alpha}{\hbar}\hat{q}}\phi(q)] &= -i\hbar\partial_\alpha[e^{\frac{i\alpha}{\hbar}q}\phi(q)] \\
 -i\hbar[\frac{i\hat{q}}{\hbar}e^{\frac{i\alpha}{\hbar}\hat{q}}\phi(q)] &= -i\hbar[\frac{iq}{\hbar}e^{\frac{i\alpha}{\hbar}q}\phi(q)] \\
 \hat{q}[e^{\frac{i\alpha}{\hbar}\hat{q}}\phi(q)] &= qe^{\frac{i\alpha}{\hbar}q}\phi(q) \\
 \hat{q}e^{\frac{i\alpha}{\hbar}q}\phi(q) &= qe^{\frac{i\alpha}{\hbar}q}\phi(q) \\
 \hat{q}e^{\frac{i\alpha}{\hbar}q}\phi(q) &= qe^{\frac{i\alpha}{\hbar}q}\phi(q) \\
 \therefore \hat{q}\phi(q) &= q\phi(q)
 \end{aligned}$$

Para el operador $\hat{V}$ derivamos con respecto a las variables β :

$$\begin{aligned}
 -i\hbar\partial_\beta[\hat{V}(\beta)\phi(q)] &= -i\hbar\partial_\beta[e^{\frac{\beta}{d^2}(q-\frac{\beta}{2})}\phi(q-\beta)] \\
 -i\hbar\partial_\beta[e^{\frac{i\beta}{\hbar}\hat{p}}\phi(q)] &= -i\hbar[\frac{1}{d^2}(q-\beta)e^{\frac{\beta}{d^2}(q-\frac{\beta}{2})}\phi(q-\beta) + e^{\frac{\beta}{d^2}(q-\frac{\beta}{2})}\partial_\beta\phi(q-\beta)] \\
 \hat{p}[e^{\frac{i\beta}{\hbar}\hat{p}}\phi(q)] &= -i\hbar\left[\frac{1}{d^2}(q-\beta)e^{\frac{i\beta}{\hbar}\hat{p}}\phi(q) + \frac{e^{\frac{i\beta}{\hbar}\hat{p}}\phi(q)}{\phi(q-\beta)}\partial_\beta\phi(q-\beta)\right] \\
 \hat{p}e^{\frac{i\beta}{\hbar}\hat{p}}\phi(q) &= -i\hbar\left[\frac{1}{d^2}(q-\beta) + \frac{1}{\phi(q-\beta)}\partial_\beta\phi(q-\beta)\right]e^{\frac{i\beta}{\hbar}\hat{p}}\phi(q) \\
 \hat{p}e^{\frac{\beta}{d^2}(q-\frac{\beta}{2})}\phi(q-\beta) &= -i\hbar\left[\frac{1}{d^2}(q-\beta) + \frac{1}{\phi(q-\beta)}\partial_\beta\phi(q-\beta)\right]e^{\frac{\beta}{d^2}(q-\frac{\beta}{2})}\phi(q-\beta) \\
 \hat{p}\phi(q-\beta) &= -i\hbar\left[\frac{1}{d^2}(q-\beta) + \frac{1}{\phi(q-\beta)}\partial_\beta\phi(q-\beta)\right]\phi(q-\beta) \\
 \hat{p}\phi(q-\beta) &= -i\hbar\left[\frac{1}{d^2}(q-\beta)\phi(q-\beta) + \partial_\beta\phi(q-\beta)\right] \\
 \hat{p}\phi(q-\beta) &= -i\hbar\left[\frac{1}{d^2}(q-\beta) + \partial_\beta\right]\phi(q-\beta) \\
 \therefore \hat{p} &= -i\hbar\left[\partial_\beta + \frac{1}{d^2}(q-\beta)\right]
 \end{aligned}$$

La estructura del espacio de Hilbert se introduce definiendo el estado algebraico PLF, que llamamos $\omega_d : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}$, el cual debe coincidir con el valor de expectación en el espacio de Hilbert tomado sobre un estado especial que llamamos el vacío: $\omega_d(a) = \langle \hat{a} \rangle_{vac} \forall a \in \mathcal{W}$. En nuestro caso, esta especificación de J induce tal estado único ω_d que produce:

$$\langle \hat{U}(\alpha) \rangle_0 = e^{\frac{-d^2}{4\hbar^2}\alpha^2} \quad \langle \hat{V}(\beta) \rangle_0 = e^{-\frac{\beta^2}{4d^2}} \quad (4.5)$$

Las funciones de onda pertenecen al espacio $L^2(\mathbb{R}, d\mu_d)$, donde la medida que dicta el producto interior en esta representación viene dada por:

$$d\mu_d = \frac{1}{d\sqrt{\pi}}e^{-\frac{q^2}{d^2}}dq \quad (4.6)$$

Para $\hat{U}(\alpha)$:

$$\langle \hat{U}(\alpha) \rangle_0 = \int d\mu_d \phi_0^* \hat{U}(\alpha) \phi_0 = \int d\mu_d e^{\frac{i\alpha}{\hbar} q} = \int \frac{1}{d\sqrt{\pi}} e^{(\frac{q}{d})^2} dq e^{\frac{i\alpha}{\hbar} q} = \frac{1}{d\sqrt{\pi}} \int e^{\{\frac{1}{d^2} q^2 + \frac{i\alpha}{\hbar} q\}} dq = e^{\frac{-d^2}{4\hbar^2} \alpha^2}$$

Para $\hat{V}(\beta)$:

$$\langle \hat{V}(\beta) \rangle_0 = \int d\mu_d \phi_0^* \hat{V}(\alpha) \phi_0 = \int \frac{1}{d\sqrt{\pi}} e^{(\frac{q}{d})^2} dq e^{\frac{\beta}{d^2} (q - \frac{\beta}{2})} = \frac{1}{d\sqrt{\pi}} \int e^{\{\frac{1}{d^2} q^2 + \frac{\beta}{d^2} (q - \frac{\beta}{2})\}} dq = e^{-\frac{\beta^2}{4d^2}}$$

Con $\phi_0 = 1$

Obsérvese que para cada valor de $d > 0$, la representación está bien definida y es continua en α y β . Podemos recuperar la representación estándar en la que la medida viene dada por la medida de Lebesgue y los operadores se representan como en [4.1](#). Podemos ver que existe un isomorfismo isométrico K que traslada la representación $\mathcal{H}_d$ a la representación estándar de Schrödinger en $\mathcal{H}_{schr}$ mediante la incorporación de una parte de la medida en la función:

$$\begin{aligned} \langle \hat{U}(\beta) \rangle_0 &= \int dq \frac{1}{d\sqrt{\pi}} e^{\frac{q^2}{d^2}} \phi_0^* \hat{U}(\alpha) \phi_0 = \int dq \frac{1}{d^{1/2}\pi^{1/4}} e^{\frac{q^2}{2d^2}} \phi_0^* \hat{U}(\alpha) \frac{1}{d^{1/2}\pi^{1/4}} e^{\frac{q^2}{2d^2}} \phi_0 \\ &\equiv \int dq \psi_0^* \hat{U}(\alpha) \psi_0 \end{aligned}$$

Entonces aquí definimos:

$$\psi(q) = K\phi(q) = \frac{1}{d^{1/2}\pi^{1/4}} e^{\frac{q^2}{2d^2}} \phi(q) \quad ; \quad \psi_0(q) = K\phi_0(q) = \frac{1}{d^{1/2}\pi^{1/4}} e^{\frac{q^2}{2d^2}}$$

Notemos que para el oscilador armónico de masa m y frecuencia ω la opción para d es $d = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

Ahora en [5](#) pasan a centrarse en las entidades fundamentales en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_d$, los estados generados actuando con $\hat{U}(\alpha)$ sobre el vacío $\phi_0(q) = 1$. Denotemos esos estados por: $\phi_\alpha(q) = \hat{U}(\alpha) \cdot \phi_0(q) = e^{\frac{i}{\hbar} \alpha q}$. El producto interior:

$$\langle \phi_\alpha, \phi_\lambda \rangle = \int d\mu_d e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha q} e^{\frac{i}{\hbar} \lambda q} = e^{\frac{(\alpha - \lambda)^2}{4\hbar^2} d^2}$$

Consideremos ahora la representación polimérica. Para ello, es importante observar que hay dos posibles casos límite para el parámetro d : i) El límite $1/d \rightarrow 0$ y ii) El caso $d \rightarrow 0$. En ambos casos, tenemos expresiones que se vuelven mal definidas en la representación o medida.

4.1.2 Caso I, límite d a infinito

$$\begin{aligned} \langle \hat{V}(\beta) \rangle_0 &= e^{-\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{d^2}} \xrightarrow{1/d \rightarrow 0} e^0 = 1 \\ \langle \hat{U}(\alpha) \rangle_0 &= e^{-\frac{1}{4} \frac{d^2 \alpha^2}{\hbar}} \xrightarrow{1/d \rightarrow 0} e^{-\infty} = 0, \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

Vemos que $\langle \hat{U}(\alpha = 0) \rangle = 1 \Rightarrow \langle \hat{U}(\alpha) \rangle_0 \xrightarrow{1/d \rightarrow 0} \delta_{\alpha 0} \equiv \omega_A(\hat{U}(\alpha))$.

$$\omega(\hat{V}(\beta))_0 = 1 \quad \omega(\hat{U}(\alpha))_0 = \delta_{\alpha 0}$$

A partir de aquí, podemos construir la representación mediante la construcción GNS. La medida sobre la representación se comporta como:

$$d\mu = \frac{1}{d\sqrt{\pi}} e^{-q^2/d^2} dq \xrightarrow{1/d \rightarrow 0} \frac{1}{d\sqrt{\pi}} dq$$

por lo que las medidas tienden a una medida homogénea cuya “constante de normalización” se vuelve cero, haciendo el límite algo sutil. Veamos ahora qué ocurre con el producto interior entre las entidades fundamentales en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_d$ dado por el producto interno. Es inmediato ver que en el límite $1/d \rightarrow 0$ el producto interno se convierte en:

$$\langle \phi_\alpha, \phi_\lambda \rangle = e^{\frac{(\lambda-\alpha)^2}{4h^2} d^2} \xrightarrow{1/d \rightarrow 0} e^{-\infty} = 0 \quad \forall \quad \alpha \neq \lambda$$

Es decir:

$$\langle \phi_\alpha, \phi_\lambda \rangle \xrightarrow{1/d \rightarrow 0} \delta_{\alpha\lambda}$$

Vemos entonces que las ondas planas $\phi_\alpha(q)$ se convierten en una base ortonormal para el nuevo espacio de Hilbert. Por tanto, existe una delicada interacción entre los dos términos que contribuyen a la medida para mantener la normalizabilidad de estas funciones; la medida, que para cualquier valor finito de d es una Gaussiana, se hace cada vez más dispersa.

En este límite, los operadores $\hat{U}(\alpha)$ se vuelven discontinuos con respecto a α , dado que para cualquier α_1 y α_2 diferentes, su acción sobre un vector base dado $\psi_\lambda(q)$ arroja vectores ortogonales. Dado que la continuidad de estos operadores es una de las hipótesis del teorema de Stone-Von Neumann, el resultado de unicidad no se aplica aquí. La representación no es equivalente a la estándar.

Ahora veamos la acción de los operadores :

$$\begin{aligned} \hat{U}(\alpha)\phi_\lambda(q) &= e^{\frac{i\alpha}{h}\hat{q}} e^{\frac{i\lambda}{h}q} = e^{\frac{i\alpha}{h}q} e^{\frac{i\lambda}{h}q} \\ &= e^{\frac{i(\alpha+\lambda)}{h}q} = \phi_{\alpha+\lambda}(q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -i\hbar\partial_\alpha[\hat{U}(\alpha)\phi_\lambda(q)] &= -i\hbar\partial_\alpha[e^{\frac{i(\alpha+\lambda)}{h}q}] \\ -i\hbar\partial_\alpha[e^{\frac{i\alpha}{h}\hat{q}}\phi_\lambda(q)] &= -i\hbar\partial_\alpha[e^{\frac{i(\alpha+\lambda)}{h}q}] \\ \hat{q}e^{\frac{i\alpha}{h}\hat{q}}\phi_\lambda(q) &= qe^{\frac{i(\alpha+\lambda)}{h}q} \\ \hat{q}e^{\frac{i(\alpha+\lambda)}{h}q} &= qe^{\frac{i(\alpha+\lambda)}{h}q} \\ \therefore \hat{q}\phi_\lambda(q) &= q\phi_\lambda(q) \end{aligned}$$

Obtenemos un vector ortogonal para todo $\alpha \neq 0$, esta es una propiedad que define este límite de cuantización.

$$\begin{aligned} \hat{V}(\beta)\phi_\alpha(q) &= e^{\frac{i\beta}{h}\hat{p}}\phi_\alpha(q) = e^{\frac{i\beta}{h}\hat{p}}e^{\frac{i\alpha}{h}q} \\ &= e^{\frac{\beta}{d^2}(q-\frac{\beta}{2})}e^{\frac{i\alpha}{h}(q-\beta)} = e^{\left[\frac{\beta}{d^2}q + \frac{i\alpha}{h}q - \frac{\beta^2}{2d^2} - \frac{i\alpha}{h}\beta\right]} \\ &= e^{\left[\left(\frac{\beta}{d^2} + \frac{i\alpha}{h}\right)q - \frac{\beta^2}{2d^2} - \frac{i\alpha}{h}\beta\right]} \xrightarrow{1/d \rightarrow 0} e^{\left[\frac{i\alpha}{h}q - \frac{i\alpha}{h}\beta\right]} = e^{-\frac{i\alpha}{h}\beta} e^{\frac{i\alpha}{h}q} \\ &= e^{-\frac{i\alpha}{h}\beta}\phi_\alpha(q) \end{aligned}$$

Vemos que $\hat{p}\phi_\alpha(q) = -\alpha\phi_\alpha(q)$

$$\begin{aligned}
 -i\hbar\partial_\beta[\hat{V}(\beta)\phi_\alpha(q)] &= -i\hbar\partial_\beta[e^{-\frac{i\alpha}{\hbar}\beta}\phi_\alpha(q)] \\
 -i\hbar\partial_\beta[e^{\frac{i\beta}{\hbar}\hat{p}}\phi_\alpha(q)] &= -i\hbar\partial_\beta[e^{-\frac{i\alpha}{\hbar}\beta}\phi_\alpha(q)] \\
 -i\hbar[\frac{i}{\hbar}\hat{p}e^{\frac{i\beta}{\hbar}\hat{p}}\phi_\alpha(q)] &= -i\hbar[-\frac{i\alpha}{\hbar}e^{-\frac{i\alpha}{\hbar}\beta}\phi_\alpha(q)] \\
 \hat{p}e^{\frac{i\beta}{\hbar}\hat{p}}\phi_\alpha(q) &= -\alpha e^{-\frac{i\alpha}{\hbar}\beta}\phi_\alpha(q) \\
 \hat{p}e^{-\frac{i\alpha}{\hbar}\beta}\phi_\alpha(q) &= -\alpha e^{-\frac{i\alpha}{\hbar}\beta}\phi_\alpha(q) \\
 \hat{p}\phi_\alpha(q) &= -\alpha\phi_\alpha(q) \\
 \therefore \hat{p} &= -i\hbar\partial_q
 \end{aligned}$$

En resumen, la teoría resultante obtenida tomando el límite $1/d \rightarrow 0$ de la descripción ordinaria de Schrödinger, que llaman en [5] “representación polimérica de tipo A”, presenta que:

- Los operadores $\hat{U}(\alpha)$ están bien definidos pero no son continuos en α , por lo que no hay operador asociado a q .
- Los vectores base ϕ_α son orto-normales (para α tomando valores en un conjunto continuo) y son vectores propios del operador $\hat{p}$ que está bien definido.
- El espacio de Hilbert resultante $\mathcal{H}_A$ será la versión A de la representación polimérica.

4.1.3 Caso II, limite d a cero

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{V}(\beta) \rangle_0 &= e^{-\frac{1}{4}\frac{\beta^2}{d^2}} \xrightarrow{d \rightarrow 0} e^{-\infty} = 0, \beta \neq 0 \\
 \langle \hat{U}(\alpha) \rangle_0 &= e^{-\frac{1}{4}\frac{d^2\alpha}{\hbar}} \xrightarrow{d \rightarrow 0} e^0 = 1
 \end{aligned}$$

Vemos que $\langle \hat{V}(\beta = 0) \rangle = 1 \Rightarrow \langle \hat{V}(\beta) \rangle_0 \xrightarrow{d \rightarrow 0} \delta_{\beta 0}$

$$\omega(\hat{V}(\beta))_0 = \delta_{\beta 0} \quad \omega(\hat{U}(\alpha))_0 = 1$$

A partir de esta PLF, se puede estructurar la representación utilizando la construcción GNS. En primer lugar, la medida, incluso cuando el límite debe tomarse con cuidado, se comporta como: $d\mu = \frac{1}{d\sqrt{\pi}} e^{-\frac{q^2}{d^2}} dq \xrightarrow{d \rightarrow 0} \delta(q) dq$

El producto interno entre los estados fundamentales $\phi_\alpha(q)$ se convierte en:

$$\langle \phi_\alpha, \phi_\lambda \rangle = e^{\frac{(\lambda - \alpha)^2}{4\hbar^2} d^2} \xrightarrow{d \rightarrow 0} e^0 = 1 \quad \forall \alpha \neq \lambda$$

Cuando $\alpha \neq \lambda$, el producto interno no es necesariamente cero, pero cuando $\alpha = \lambda$, el vector $\xi = \phi_\alpha - \phi_\lambda$ se vuelve trivialmente cero y pertenece al núcleo del producto interno. Para evitar estados de norma cero y obtener un espacio de Hilbert bien definido, es necesario modificar estos estados.

Analicemos ahora la acción del operador $\hat{V}(\beta)$ sobre el vacío $\phi_0(q) = 1$. Para un d arbitrario, tiene la forma: $\tilde{\phi}_\beta := \hat{V}(\beta)\phi_0(q) = e^{\frac{\beta}{d^2}(q - \frac{\beta}{2})}$. Con el producto interno: $\langle \tilde{\phi}_\alpha, \tilde{\phi}_\beta \rangle =$

$e^{-\frac{1}{4d^2}(\alpha-\beta)^2}$. Ahora, al llevar al límite: $\langle \tilde{\phi}_\alpha, \tilde{\phi}_\beta \rangle \xrightarrow{d \rightarrow 0} \delta_{\alpha,\beta}$.

Podemos ver entonces que son estas funciones las que se convierten en la “base discreta” ortonormal en la teoría. Sin embargo, la función $\tilde{\phi}_\beta(q)$ en este límite se vuelve mal definida. Por ejemplo, para $\beta > 0$, crece ilimitadamente para $q > \frac{\beta}{2}$, es igual a uno si $q = \frac{\beta}{2}$ y cero en caso contrario. Para hacer más clara la teoría, consideraremos la otra forma de la representación en la que la medida se incorpora a los estados y el espacio de Hilbert resultante es $L^2(\mathbb{R}, dq)$. El nuevo estado sería:

$$\psi_\beta(q) := k \cdot \hat{V}(\beta) \phi_0(q) = \frac{1}{(d\sqrt{\pi})^{1/2}} e^{-\frac{1}{2d^2}(q-\beta)^2}$$

Cuyo límite es $\psi_\beta(q) \xrightarrow{d \rightarrow 0} \delta^{1/2}(q, \beta)$, donde $\delta^{1/2}(q, \beta)$ quiere decir es un objeto que satisface la siguiente propiedad: $\delta^{1/2}(q, \beta) \delta^{1/2}(q, \alpha) = \delta_{\alpha,\beta} \delta(q, \beta)$, si $\alpha = \beta$ entonces es solo el delta ordinario, de lo contrario es cero. En cierto sentido, estos objetos pueden considerarse como semi densidades que no pueden integrarse por sí mismas, pero cuyo producto sí. Concluimos entonces que el producto interno es:

$$\langle \psi_\beta, \psi_\alpha \rangle = \int_{\mathbb{R}} dq \bar{\phi}_\beta(q) \phi_\alpha = \int_{\mathbb{R}} \delta(q, \alpha) \delta_{\beta,\alpha} = \delta_{\beta,\alpha} \quad (4.7)$$

que es lo que esperábamos para una base ortogonal. Nótese que en esta representación, el estado de vacío es $\psi_0(q) := \delta^{1/2}(q, 0)$, es decir, la “semi delta” con soporte en el origen.

Es importante señalar que estamos llegando de forma natural a los estados como semi densidades, cuyos cuadrados pueden integrarse sin necesidad de una medida no trivial sobre el espacio de configuración. La invarianza de difeomorfismo surge entonces de una manera natural pero sutil.

Como resultado final, recuperamos el producto interno delta de Kronecker para los nuevos estados fundamentales:

$$\chi_\beta(q) := \delta^{1/2}(q, \beta)$$

En esta representación B, el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_B$ es la terminación con respecto al producto interior [4.7](#) de los estados generados tomando combinaciones lineales (finitas) de elementos base de la forma χ_β :

$$\psi(q) := \sum_i b_i \chi_{\beta_i}(q)$$

En esta representación B, tanto $\hat{U}$ como $\hat{V}$ tienen sus papeles intercambiados con respecto a la representación A: mientras que $\hat{U}(\alpha)$ es discontinuo y, por tanto, $\hat{q}$ no está definido en la representación A, tenemos que es $\hat{V}(\beta)$ en la representación B el que tiene esta propiedad. En este caso, es el operador $\hat{p}$ el que no puede definirse.

Vemos entonces que, dado un sistema físico para el que el espacio de configuración tiene un significado físico bien definido, dentro de la posible representación en la que las funciones de onda son funciones de la variable de configuración q , las representaciones poliméricas A y B son radicalmente diferentes y no equivalentes. También es cierto que las representaciones A y B son equivalentes mediante la dualidad entre las representaciones q y p y la dualidad $d \longleftrightarrow 1/d$: la representación polimérica A en la “representación q ” es equivalente a la representación polimérica B en la “representación p ”, y viceversa.

Cuando se estudia un problema, es importante decidir desde el principio qué representación polimérica (si la hay) se debe utilizar (por ejemplo, en la polarización q). Esto tiene como consecuencia una implicación sobre qué variable está naturalmente “cuantizada” (incluso si es

continua): p para A y q para B. Podría haber, por ejemplo, un criterio físico para esta elección.

Por ejemplo, una simetría fundamental podría sugerir que una representación es más natural que otra. En la otra polarización, es decir, para las funciones de onda de p , la situación se invierte: q es discreta para la representación A, mientras que p lo es para el caso B. [5] Termina este análisis señalando que el procedimiento de obtener la cuantización polimérica mediante un límite apropiado de las representaciones de Fock-Schrödinger podría resultar útil en entornos más generales de la teoría de campos o la gravedad cuántica.

En la siguiente sección se muestra el resumen de la sección IV de [14] en la cual se construye la teoría cuántica electromagnética. Esta sección se divide en cuatro partes. Las que nos interesan por ahora son la primera, en la cual se construye el espacio de Hilbert de una partícula $\mathcal{H}$ a partir del espacio de fase Γ de la teoría clásica, y la última parte, donde se muestran algunos ejemplos.

4.2 Cuantización del campo electromagnético

Tomando como referencia [14]. Comenzamos con (Γ, Ω) , un espacio vectorial simpléctico, y definimos $J : \Gamma \rightarrow \Gamma$, un operador lineal tal que $J^2 = -1$. La estructura compleja J debe ser compatible con la estructura simpléctica. Esto significa que el mapeo bilineal definido por $\mu(,) := \Omega(, J)$ es una métrica definida positiva en Γ . El producto interno Hermitiano viene dado entonces por:

$$\langle ; \rangle = \frac{1}{2\hbar} [\Omega(; J) + i\Omega(;)] \quad (4.8)$$

4.2.1 Descomposición de frecuencia positiva

La estructura compleja J define la complejificación de Γ , de la siguiente manera: Definiendo una "frecuencia positiva" que consista en vectores de la forma: $\Phi^+ := \frac{1}{2}(\Phi - iJ\Phi)$ y la parte de "frecuencia negativa" como $\Phi^- := \frac{1}{2}(\Phi + iJ\Phi)$. Obsérvese que $\Phi^- = \bar{\Phi}^+$ y $\Phi = \Phi^+ + \Phi^-$. Como $J^2 = -1$, los valores propios de J son $\pm i$, por lo que se está descomponiendo el espacio vectorial Γ en espacios propios de $J : J(\Phi^\pm) = \pm i\Phi^\pm$.

Utilizan el término "frecuencia positiva" ya que en el caso del espacio-tiempo Minkowski esa es la descomposición estándar. El espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es la completitud de Γ con respecto al producto interior (4.1). Existen dos descripciones alternativas pero completamente equivalentes del espacio $\mathcal{H}$:

1. $\mathcal{H}$ consiste en funciones de valor real (solución de la ecuación de Maxwell, por ejemplo), dotadas de la estructura compleja J . El producto interior viene dado por [4.8]

2. $\mathcal{H}$ se construye complejizando el espacio vectorial Γ y descomponiéndolo mediante J como se ha descrito anteriormente. En esta construcción el producto interior viene dado por:

$$\langle \Phi, \tilde{\Phi} \rangle = \frac{i}{\hbar} \Omega(\Phi^-, \tilde{\Phi}^+) \quad (4.9)$$

En este caso, el espacio de Hilbert de una partícula está formado por soluciones de "frecuencia positiva". La única entrada necesaria para construir $\mathcal{H}$ es la estructura compleja J . En un espacio-tiempo general, no hay una estructura preferida, lo que conduce a una ambigüedad infinita en la representación del RCC. Sin embargo, en los espacio-tiempos estacionarios, donde existe un campo vectorial de Killing t^a , hay una estructura compleja canónica proporcionada por este campo.

Para el espacio-tiempo de Minkowski, hay varias maneras de caracterizar la cuantización habitual. El tratamiento estándar de los libros de texto utiliza una coordenada temporal t (globalmente inercial) para realizar la descomposición de frecuencia positiva. Otra forma de seleccionar esta descomposición es pedir que el vacío en la teoría resultante sea invariante bajo el grupo de Poincaré.

Esta elección está motivada porque confiere a los estados coherentes que alcanzan su punto máximo en una solución particular una energía igual a la energía clásica asociada a dicha solución. La estructura compleja viene dada por:

$$J := -(\mathcal{L}_T \cdot \mathcal{L}_T)^{-1/2} \mathcal{L}_T \quad (4.10)$$

Un ejemplo importante de espacio-tiempo con un campo de Killing definido globalmente es el espacio-tiempo de Minkowski (de hecho, tiene un número infinito de tales campos vectoriales, uno para cada marco de referencia inercial).

A partir de ahora, limitemos nuestra atención al espacio-tiempo de Minkowski y a las hipersuperficies espaciales Σ . Por lo tanto, la métrica inducida h_{ab} es la métrica plana euclidiana. Realizaremos dos descomposiciones diferentes de Γ para dos estructuras complejas diferentes. Nos centraremos en considerar la descomposición ordinaria de “frecuencia positiva”. Esta conduce a la teoría cuántica estándar del campo libre de Maxwell que se encuentra en los libros de texto. Se pueden ver ambos desarrollos en [14].

4.2.2 Construcción del mapeo PLF

Dado que es equivalente utilizar la notación covariante o canónica, como en [18], denotaremos los elementos de Γ como pares $(A_a^T; E_a^T)$, de campos vectoriales transversales (es decir, sin divergencia). El primer paso en la cuantización es la introducción de la estructura compleja $J : \Gamma \rightarrow \Gamma$. Está dada por:

$$J(A_a, E^a) = (-\Delta^{1/2} E^a, \Delta^{1/2} A_a)$$

Donde en $\Delta^{1/2}$, Δ es el negativo del operador Laplaciano $(-\Delta)$, es decir, tiene valores propios positivos [19], definido en el espacio, y el exponente $-1/2$ implica que Δ actúa aplicando la raíz cuadrada del Laplaciano, es decir, para una función propia f del Laplaciano con valor propio λ , $\Delta^{1/2} f = \sqrt{\lambda} f$.

Esta ultima expresión podemos obtenerla de la siguiente forma:

$$J \cdot \lambda = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{C} \\ \hat{B} & \hat{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_a \\ E^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} A_a + \hat{C} E^a \\ \hat{B} A_a + \hat{D} E^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta^{1/2} E^a \\ \Delta^{1/2} A_a \end{bmatrix}$$

Suponiendo el caso que $\hat{A} \equiv \hat{D} = 0$ y La acción de los demás operadores es:

$$\hat{C} E^a = -\Delta^{1/2} E^a \quad \text{y} \quad \hat{B} A_a = \Delta^{1/2} A_a$$

Definamos un tensor métrico como describimos anteriormente.

$$g(.,.) := \Omega(., J.) \quad (4.11)$$

Ahora sea $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ una “positive lineal function”:

$$\langle 0 | W(g_b, f^a) | 0 \rangle = \omega(W(\lambda)) = e^{-\frac{1}{4} g(g_b, f^a)}$$

Donde el par de campos de prueba $(g_b, f^a) \in \Gamma$, definen los observables lineales, en este caso particular tenemos el producto o norma entre g_a y f^a :

$$\omega(W) = \exp\left\{-\frac{\hbar}{4} \int dx^3 (g^a \Delta^{1/2} g_a + f_a \Delta^{1/2} f^a)\right\} \quad (4.12)$$

Esta ultima expresión podemos obtenerla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle (g_a, f^a); (g_a, f^a) \rangle &= \frac{\hbar}{2} \int dx^3 \Omega [(g_a, f^a); J(g_a, f^a)] \\ &= \frac{\hbar}{2} \int dx^3 \Omega [(g_a, f^a)(-\Delta^{1/2} f^a, \Delta^{1/2} g_a)] \\ &= \frac{\hbar}{2} \int dx^3 [g^a \Delta^{1/2} g_a + f_a \Delta^{1/2} f^a] \end{aligned}$$

Hay que tener en cuenta que todos los objetos (g_a, f^a) son transversales. La razón de este requisito es que la estructura compleja adopta una forma muy sencilla en términos de campos vectoriales transversales.

Ahora estamos en posición de preguntar si un observable generado por el par (g_a, f^a) induce un operador bien definido en $\mathcal{F}_s(H)$. Claramente, si el par (g_a, f^a) pertenece al espacio de Hilbert de 1 partícula, la respuesta es afirmativa. Tomaremos este criterio también como condición necesaria.

La cuestión ahora es si el par (g_a, f^a) define un elemento de Γ , es decir, si son datos iniciales de “buen comportamiento” para una solución de las ecuaciones de Maxwell con norma finita. Este será el caso si la norma de (g_a, f^a) , [4.12](#), es finita. Esta cuestión es relevante a la hora de definir observables dados por los flujos de campo eléctrico y magnético a través de superficies delimitadas por bucles cerrados. El principio de incertidumbre de Heisenberg adopta una forma particularmente simple cuando se consideran estos observables.

CAPÍTULO 5

Álgebras de holonomías $U(1)$

Este capítulo muestra un resumen de los artículos [1, 4] que servirán para el trabajo realizado como producto final de este documento. El objetivo de [1] es examinar la cuantización de las álgebras de holonomía $U(1)$ utilizando las técnicas basadas en el álgebra Abeliana C^* , que constituyen los fundamentos matemáticos de los esfuerzos para construir la gravedad cuántica de lazos (al menos para el momento de la escritura de [1]).

El punto de partida de nuestro análisis es el álgebra de holonomías, donde nos limitaremos a conexiones $U(1)$ alrededor de lazos en una rebanada espacial $\mathcal{HA}$. Para completar esta álgebra y generar una C^* -álgebra Abeliana que llamamos $\overline{\mathcal{HA}}$, se define la operación de adjunción $*$ y una norma adecuada [1]. Este proceso es esencial porque las C^* -álgebras tienen una teoría de representaciones bien desarrollada en términos de operadores en espacios de Hilbert, lo cual es fundamental para la formulación de la mecánica cuántica. Las representaciones del álgebra $\overline{\mathcal{HA}}$ en el espacio de Hilbert están determinadas por funciones lineales continuas positivas (PLF), las cuales mapean elementos del álgebra $\overline{\mathcal{HA}}$ a operadores en el espacio de Hilbert. Repasamos la construcción de $\overline{\mathcal{HA}}$ y la construcción de otra C^* -álgebra abeliana llamada $\overline{\mathcal{HA}}_r$, basada en el álgebra holonomías $U(1)$ alrededor de lazos “Gaussianamente suavizados” ó $\mathcal{HA}_r$. En [1], de donde basamos esta construcción, se trabaja en una variedad espacio-tiempo utilizando una carta de coordenadas cartesianas (t, x^i) , con $i = 1, 2, 3$, y se emplean unidades naturales.

5.1 Álgebra de las holonomías Abelianas $U(1)$

El álgebra de holonomías tiene la propiedad clave de contener información de la conexión. Estas conexiones complejas A_a forman una mitad de un conjunto completo de variables canónicas, siendo la otra mitad los campos E^a . En particular, tenemos las relaciones clásicas de corchetes de Poisson:

$$\{A_a(x), A_b(y)\} = 0, \quad \{E^a(x), E^b(y)\} = 0, \quad \{A_a(x), E^b(y)\} = 4\pi\delta_a^b\delta^3(x, y)$$

Pero nos centraremos solamente en el espacio de configuración, es decir en las conexiones A_a .

Definición 5.1: Sea $\mathcal{A}$ el espacio de conexiones suaves de $U(1)$, donde nos restringimos a las conexiones $A_a(x)$ donde sus componentes decrecen rápido en el infinito.

Definición 5.2: Sea $\mathcal{L}_{x_0}$ el espacio de lazos analíticos a trozos, uniparamétricos en $\mathbb{R}^3$ y con base en el punto x_0 . La composición de un lazo α con otro lazo β es denotada como $\alpha \circ \beta$. Dado un lazo $\alpha \in \mathcal{L}_{x_0}$, la holonomía de $A_a(x)$ alrededor de α es:

$$H_\alpha(A) := \text{Exp} \left[i \oint_\alpha A_a dx^a \right]$$

¹Como veremos mejor en la sección 5.1.1

La propiedad Abeliana de las holonomías $U(1)$ implica dos cosas, que estas holonomías como elementos conmutan entre sí, y por otro lado esta conmutatividad también es inherente a la estructura $U(1)$, que es un grupo Abeliano. Además, la relación entre las holonomías y los corchetes de Poisson en el contexto de las conexiones A_a puede ser expresada considerando que las holonomías forman una subálgebra del álgebra de Weyl. Las holonomías Abelianas cumplen con las relaciones de corchetes de Poisson:

$$\{H_\alpha(A), H_\beta(A)\} = 0$$

Por otro lado llamaremos “holonomy class hoop” a la clase de equivalencia de lazos que denotamos como $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ si satisfacen la condición $H_\alpha(A) = H_\beta(A) \quad \forall A_a \in \mathcal{A}$. El grupo generado por todos estos “hoops” lo denotamos por $\mathcal{HG}$, el producto en este grupo es la composición de los “hoops”, es decir $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta} := \widetilde{\alpha \circ \beta}$. El álgebra $\mathcal{HA}$ esta formada por las holonomías $H_\alpha(\cdot)$ de conexión A_a , alrededor de lazos que pertenecen a la clase “hoop”.

5.1.1 $\mathcal{FL}_{x_0}$ álgebra libre generada por $\mathcal{L}_{x_0}$

El álgebra libre ² que denotamos como $\mathcal{FL}_{x_0}$ es generada por los elementos de $\mathcal{L}_{x_0}$ con el producto definido por $\alpha\beta := \alpha \circ \beta$. Todos los elementos de $\mathcal{FL}_{x_0}$ se pueden expresar como combinaciones lineales de estos lazos.

Ahora, denotamos por $\mathcal{K}$ un ideal bilateral de $\mathcal{FL}_{x_0}$ ³ tal que:

$$\sum_{i=1}^N a_i \alpha_i \in \mathcal{K} \text{ si y sólo si } \sum_{i=1}^N a_i H_{\alpha_i}(A) = 0 \text{ para todo } A_a \in \mathcal{A},$$

donde a_i son números complejos. El $\mathcal{FL}_{x_0}$ es dividida por $\mathcal{K}$ generando el álgebra que llamaremos $\mathcal{FL}_{x_0}/\mathcal{K}$, la $\mathcal{K}$ equivalencia de los lazos α es denotado por $[\alpha]$, las álgebras abstractas $\mathcal{HA}$ y $\mathcal{FL}_{x_0}/\mathcal{K}$ son isomorfas.

Isomorfismo entre las álgebras $\mathcal{HA}$ y $\mathcal{FL}_{x_0}/\mathcal{K}$:

Sea ζ un mapeo tal que $\zeta : \mathcal{FL}_{x_0}/\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{HA}$ definido como:

$$\zeta([\alpha]) := H_{\alpha'} \quad \forall \alpha \in \mathcal{FL}_{x_0}/\mathcal{K}; \alpha' \in [\alpha]$$

Donde $[\alpha]$ denota cada clase de equivalencia en $\mathcal{FL}_{x_0}/\mathcal{K}$ y $H_\alpha \in \mathcal{HA}$ tal que $H_{\alpha'} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$. Queremos ver que ζ respete la regla operativa definida para el álgebra libre, es decir sea un homomorfismo, sean $\alpha, \beta \in \mathcal{FL}_{x_0}/\mathcal{K}$.

Entonces:

$$\zeta([\alpha][\beta]) = \zeta([\alpha] \circ [\beta]) = H_{\alpha\circ\beta}$$

Pero dado que $H_{\alpha\circ\beta} \in \mathcal{HA}$ entonces:

$$H_{\alpha\circ\beta}(A) = H_{\alpha\beta}$$

La operación de producto se conserva en ambas estructuras. Ahora veamos si tenemos un mapeo Biyectivo:

²El adjetivo “libre” indica que esta álgebra es generada por los lazos de manera que no se imponen restricciones adicionales más allá de la operación de producto definida.

³Esto significa que $\mathcal{K}$ es cerrado bajo la multiplicación tanto por la izquierda como por la derecha con cualquier elemento de $\mathcal{FL}_{x_0}$.

- **Inyectividad :** Supongamos que $[\alpha] \neq [\beta]$ en $\mathcal{FL}_{x_0}/\mathcal{K}$. Esto significa que α y β no pertenecen a la misma clase de equivalencia bajo el ideal $\mathcal{K}$. Entonces dada la definición del ideal $\mathcal{K}$, recordemos que el ideal $\mathcal{K}$ se define como:

$$\mathcal{K} = \left\{ \sum_{i=1}^N a_i \alpha_i \mid \sum_{i=1}^N a_i H_{\alpha_i}(A) = 0 \text{ para todo } A_a \in \mathcal{A} \right\}$$

donde a_i son números complejos. Esto implica que:

$$H_\alpha(A) \neq H_\beta(A) \forall A_a \in \mathcal{A}$$

Dado que definimos el mapeo ζ como: $\zeta([\alpha]) = H_\alpha$. Entonces también tenemos que:

$$\zeta([\alpha]) \neq \zeta([\beta])$$

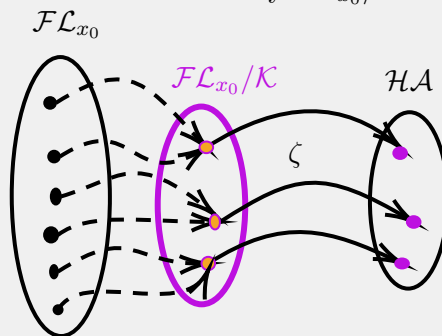
Concluimos que si $[\alpha] \neq [\beta]$ en $\mathcal{FL}_{x_0}/\mathcal{K}$, entonces $\zeta([\alpha]) \neq \zeta([\beta])$, lo cual establece la inyectividad de ζ .

- **Sobreyectividad :** Debemos mostrar que cualquier elemento de $\mathcal{HA}$ es alcanzado por el mapeo $\zeta(\cdot)$. Dado $H \in \mathcal{HA}$, podemos escribir todo elemento H como $H_\alpha(A)$ para algún α . Por definición de ζ , tenemos:

$$\zeta([\alpha]) = H_\alpha$$

Esto significa que la imagen de $[\alpha]$ bajo ζ es H_α . Así, para cualquier H , simplemente elegimos un $[\alpha]$, entonces dado que ζ es un mapeo desde $\mathcal{FL}_{x_0}/\mathcal{K}$ a $\mathcal{HA}$, cada H_α proviene de una clase de equivalencia $[\alpha]$ en $\mathcal{FL}_{x_0}/\mathcal{K}$.

Por tanto $\zeta(\cdot)$ es un isomorfismo entre $\mathcal{HA}$ y $\mathcal{FL}_{x_0}/\mathcal{K}$. de manera bosquejada seria:



Ahora necesitamos completar $\mathcal{HA}$ para que sea una C^* -álgebra, entonces definimos una operación de adjunción $*$ en $\mathcal{HA}$ como:

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i [\alpha_i] \right)^* := \sum_{i=1}^N a_i^* [\alpha_i^{-1}]$$

Y una norma en $\mathcal{HA}$ como:

$$\left\| \sum_{i=1}^N a_i [\alpha_i] \right\| := \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \sum_{i=1}^N a_i H_{\alpha_i}(A) \right|$$

Finalmente, $\mathcal{HA}$ es la completada por $\overline{\mathcal{HA}}$ respecto a esta norma y equipada con la operación $*$, convirtiéndola en una C^* -álgebra Abelianas. Este proceso es crucial para proporcionar una estructura algebraica adecuada para la formulación de la mecánica cuántica.

5.1.2 Representación del mapeo ω_0 para elementos de $\overline{\mathcal{HA}}$

Sea Δ el espacio de homomorfismos $h : \overline{\mathcal{HA}} \rightarrow \mathbb{C}$ que son continuos, lineales, multiplicativos y compactos de Hausdorff. Aquí, “compactos de Hausdorff” se refiere a la propiedad de que el espacio en el que h toma valores es compacto. Las funciones $h([\alpha])$, $\alpha \in \mathcal{L}_{x_0}$ generan una C^* -álgebra $C(\Delta)$ isomorfa a $\overline{\mathcal{HA}}$ donde cada representación continua y cíclica de $\overline{\mathcal{HA}}$ tiene una correspondencia 1 – 1 con una PLF en $\overline{\mathcal{HA}}$, cada PLF define una $C(\Delta)$ esta corresponde con una medida $d\mu$ mediante el lema de Riez.

Sea $\hat{H}_\alpha$ un operador unitario que actúa sobre $\psi \in \mathcal{L}(\Delta, d\mu)$ de la forma: $(\hat{H}_\alpha \circ \psi)(h) = h([\alpha])\psi(h)$. En particular la PLF ω_0 para un solo lazo es:

$$\omega_0([\alpha]) = \begin{cases} 1, & \text{si } [\alpha] = \mathbf{0} \\ 0, & \text{si } [\alpha] \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.1)$$

Donde $\mathbf{0}$ es el lazo trivial que no encierra ninguna área, es decir es equivalente a no moverse. Matemáticamente esta holonomía se reduce a la identidad.

5.2 Álgebra de holonomías Abelianas $U(1)$ “suavizadas”

La construcción de esta álgebra repite la construcción del álgebra de holonomías no suavizada, con ciertos cambios relacionados a la idea de suavizamiento, entonces usando **Def 5.1 y 5.2** podemos definir la holonomía de la siguiente forma:

$$H_\alpha(A) = \text{Exp} \left[i \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 X_\alpha^a(x) A_a(x) \right] \quad (5.2)$$

$$X_\alpha^a(x) := \oint_\alpha ds \delta^3(\alpha(s), x) \dot{\alpha}^a \quad (5.3)$$

donde $s \in [0, 2\pi]$ es la parametrización del lazo α , y $X_\alpha^a(x)$ es llamado el factor de forma y su transformada de Fourier es:

$$X_\alpha^a(K) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 X_\alpha^a(x) e^{-ik \cdot x} \quad (5.4)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \oint_\alpha ds \dot{\alpha}^a(s) e^{-ik \cdot \alpha} \quad (5.5)$$

Podemos verlo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X_\alpha^a(K) &:= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 X_\alpha^a(x) e^{-ik \cdot x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 \oint_\alpha ds \delta^3(\alpha(s), x) \dot{\alpha}^a e^{-ik \cdot x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \oint_\alpha ds \dot{\alpha}^a \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 \delta^3(\alpha(s), x) e^{-ik \cdot x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \oint_\alpha ds \dot{\alpha}^a e^{-ik \cdot \alpha} \end{aligned}$$

Definimos el factor de forma “Gaussian smeared” remplazando la delta en el factor de forma de la ecuación (5.3) por la función Gaussiana, de la forma:

$$X_{\alpha_r}^a(x) := \int_{\mathbb{R}^3} dy^3 f_r(y-x) X_{\alpha}^a(y) \quad (5.6)$$

$$= \oint_{\alpha} ds f_r(\alpha(s)-x) \dot{\alpha}^a(s) \quad (5.7)$$

Donde :

$$f_r(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} r^3} e^{-\frac{|x|^2}{2r^2}}$$

Podemos verlo:

$$\begin{aligned} X_{\alpha_r}^a(x) &:= \int_{\mathbb{R}^3} dy^3 f_r(y-x) X_{\alpha}^a(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} dy^3 f_r(y-x) \oint_{\alpha} ds \delta^3(\alpha(s), y) \dot{\alpha}^a \\ &= \oint_{\alpha} ds \dot{\alpha}^a \int_{\mathbb{R}^3} dy^3 f_r(y-x) \delta^3(\alpha(s), y) \\ &= \oint_{\alpha} ds f_r(\alpha-x) \dot{\alpha}^a \end{aligned}$$

Ahora definimos la transformada de Fourier del factor de forma “Gaussian smeared” como:

$$X_{\alpha_r}^a(k) = e^{-\frac{k^2 r^2}{2}} X_{\alpha}^a(k) \quad (5.8)$$

Veamos:

$$\begin{aligned}
X_{\alpha_r}^a(K) &:= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 X_{\alpha_r}^a(x) e^{-ik \cdot x} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 \oint_{\alpha} ds f_r(\alpha - x) \dot{\alpha}^a e^{-ik \cdot x} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \oint_{\alpha} ds \dot{\alpha}^a \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 f_r(\alpha - x) e^{-ik \cdot x} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \oint_{\alpha} ds \dot{\alpha}^a \frac{1}{(2\pi)^{3/2} r^3} \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 e^{\frac{-|\alpha-x|^2}{2r^2}} e^{-ik \cdot x} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \oint_{\alpha} ds \dot{\alpha}^a \frac{1}{(2\pi)^{3/2} r^3} \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 e^{\frac{-\alpha^2 - x^2 + 2\alpha \cdot x}{2r^2}} e^{-ik \cdot x}
\end{aligned}$$

Completando el cuadrado del argumento de la exponencial:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \oint_{\alpha} ds \dot{\alpha}^a \frac{1}{(2\pi)^{3/2} r^3} \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 e^{\frac{-(x+ir^2k)^2 - \alpha^2 + 2\alpha \cdot x - r^4k^2}{2r^2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \oint_{\alpha} ds \dot{\alpha}^a \frac{1}{(2\pi)^{3/2} r^3} e^{-\frac{r^4k^2}{2r^2}} \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 e^{\frac{-(x+ir^2k)^2 - \alpha^2 + 2\alpha \cdot x}{2r^2}}
\end{aligned}$$

Sea :

$$\begin{cases} z = x + ir^2k, \rightarrow dz^3 = dx^3 \\ x = z - ir^2k, \end{cases}$$

Solo la segunda integral:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} dz^3 e^{\frac{-z^2 - \alpha^2 + 2\alpha \cdot z - 2ir^2\alpha \cdot k}{2r^2}} &= e^{\frac{-2ir^2\alpha \cdot k}{2r^2}} \int_{\mathbb{R}^3} dz^3 e^{-\frac{(z+\alpha)^2}{2r^2}} \\
&= e^{-i\alpha \cdot k} (2\pi)^{3/2} r^3
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \oint_{\alpha} ds \dot{\alpha}^a \frac{1}{(2\pi)^{3/2} r^3} e^{-\frac{r^2k^2}{2}} e^{-i\alpha \cdot k} (2\pi)^{3/2} r^3 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \oint_{\alpha} ds \dot{\alpha}^a e^{-\frac{r^2k^2}{2}} e^{-i\alpha \cdot k} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{r^2k^2}{2}} \oint_{\alpha} ds \dot{\alpha}^a e^{-i\alpha \cdot k} = e^{-\frac{r^2k^2}{2}} X_{\alpha}^a(k)
\end{aligned}$$

Entonces la holonomía “suavizada” se define:

$$H_{\alpha_r}(A) = \text{Exp} \left[i \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 X_{\alpha_r}^a(x) A_a(x) \right] \quad (5.9)$$

$$= \text{Exp} \left[i \int_{\mathbb{R}^3} dk^3 X_{\alpha_r}^a(-k) A_a(k) \right] \quad (5.10)$$

5.2.1 $\mathcal{FL}_{x_0}$ álgebra libre generada por $\mathcal{L}_{x_0}$

Es generado por los elementos de $\mathcal{L}_{x_0}$ con el producto definido por $\alpha_r \beta_r := (\alpha \circ \beta)_r$, donde α_r es la clase r -hoop de α , es decir, α y β definen el mismo r -hoop si $H_{\alpha_r}(A) = H_{\beta_r}(A)$ para todo $A_a(x) \in \mathcal{A}$, todos los elementos de $\mathcal{FL}_{x_0}$ se pueden expresar como la combinación lineal. De igual forma que en la sección 5.1.1 definimos un ideal $\mathcal{K}_r$ pero sera un “ r -hoop class” de los lazos denominados como α_r^i y se denota por $[\alpha_i]_r$, tal que:

$$\sum_{i=1}^N a_i \alpha_r^i \in \mathcal{K}_r \implies \sum_{i=1}^N a_i H_{\alpha_r^i}(A) \quad \forall A_a \in \mathcal{A}; \quad a_i \in \mathbb{C}$$

Ahora la operación $*$ define la relación en $\mathcal{HA}_r$:

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i [\alpha_i]_r \right)^* := \sum_{i=1}^N a_i^* [\alpha_i^{-1}]_r$$

Por ultimo definimos una norma en $\mathcal{HA}_r$:

$$\left\| \sum_{i=1}^N a_i [\alpha_i]_r \right\| := \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \sum_{i=1}^N a_i H_{\alpha_r}(A) \right|$$

Finalmente tenemos que $\overline{\mathcal{HA}_r}$ es el C^* -álgebra Abeliana obtenida al definir $*$ en $\mathcal{HA}_r$ y completar el álgebra resultante con respecto a la norma $\|\cdot\|$.

Ahora caracterizamos el espectro Δ_r de $\overline{\mathcal{HA}_r}$ como todo el espacio de homomorfismos $\overline{\mathcal{HA}_r}$ a $U(1)$, sea $h \in \Delta_r$ lineal multiplicativo y continuo de $\overline{\mathcal{HA}_r} \rightarrow \mathbb{C}$ si:

$$\begin{aligned} (h[\alpha]_r)(h[\alpha_r^{-1}]) &= h[o]_r \\ h[o]_r^2 &= h[o]_r = 1 \\ \frac{1}{h[\alpha]_r} &= h[\alpha^{-1}]_r = h[\alpha]_r^* \end{aligned}$$

Esta ultima expresión implica que $|h[\alpha]_r| = 1$ mostrando que cada elemento $h[\alpha]_r$ es conmutativo y $\overline{\mathcal{HA}_r}$ a $U(1)$, la continuidad de $h[\alpha]_r$ se ve a detalle en [\[1\]](#)

5.2.2 Representación del mapeo ω_F para elementos de $\overline{\mathcal{HA}_r}$

La representación estándar del valor de expectación del vacío de Fock restringido a $\overline{\mathcal{HA}_r}$ define la PLF de Fock en $\overline{\mathcal{HA}_r}$. definido como:

$$\omega_F \left(\sum_{i=1}^N a_i [\alpha]_r \right) := \sum_{i=1}^N a_i \text{Exp} \left[\int \frac{dk^3}{k} |X_\alpha^a(k)|^2 \right] \quad (5.11)$$

Tenemos que $\overline{\mathcal{HA}_r}$ es una sub álgebra propia de álgebra estándar de Weyl para $U(1)$. En [\[1\]](#) comentan que puede no estar claro que su cuantización (a través de la construcción de GNS basada en la PLF de Fock) reproduzca el espacio de Fock completo. Pero demuestran que, de hecho, si se obtiene el espacio de Fock completo. Sea el espacio de Hilbert GNS (basado en ω_F) denotado por $\mathcal{H}$, Sea $\mathcal{D}$ el subespacio lineal de $\mathcal{H}$ generado por elementos de la forma

$\hat{H}_{\alpha_r}\Omega$, donde ω es el vacío GNS. Se puede ver que $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ está naturalmente incrustado en el espacio de Fock ($\mathcal{F}$), a través del mapeo $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$ definido por:

$$U(\Omega) = U \left(\sum_{i=1}^N a_i \hat{H}_{\alpha_{ir}} \Omega \right) |0\rangle \quad (5.12)$$

$$= \sum_{i=1}^N a_i \text{Exp} \left[i \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 X_{\alpha_{ir}}^a(x) \hat{A}_a(x) |0\rangle \right] \quad (5.13)$$

Donde $\hat{A}_a$ es el operador estándar perteneciente al espacio de Fock a $t = 0$

$$\hat{A}_a(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk^3}{\sqrt{k}} [e^{ik \cdot x} \hat{a}_a(k) + e^{-ik \cdot x} \hat{a}_a^\dagger(k)]$$

donde:

$$\hat{a}_a(k)k^a = 0, \quad [\hat{a}_a(k), \hat{a}_b^\dagger(l)] = \delta_{ab}\delta(k, l)$$

La construcción matemática presentada anteriormente continúa en el artículo [1]; sin embargo, para nuestros propósitos, lo desarrollado hasta este punto es suficiente. Ahora lo importante para nuestro trabajo implica analizar la construcción de las PLF cruzadas, es decir la representación de la medida Ashtekar-Lewandoski sobre el álgebra de $\overline{\mathcal{HA}_r}$ y la de Fock sobre el álgebra de $\overline{\mathcal{HA}}$ como se muestra en [1].

5.2.3 Representación del mapeo ω_0 para elementos de $\overline{\mathcal{HA}_r}$

Definimos la medida de Ashtekar-Lewandowski sobre Δ_r , donde Δ_r es el espacio de homeomorfismos $h : \overline{\mathcal{HA}_r} \rightarrow \mathbb{C}$ el equivalente de Δ [4] mediante $d\mu_h$, con una PLF correspondiente a $\overline{\mathcal{HA}_r}$ definida por:

$$\omega_0([\alpha]_r) = \begin{cases} 1, & \text{si } [\alpha]_r = \mathbf{0}_r \\ 0, & \text{si } [\alpha]_r \neq \mathbf{0}_r \end{cases} \quad (5.14)$$

Los operador $\hat{H}_{\alpha_r}$ están representados por operadores unitarios sobre $\psi \in \mathcal{L}^2(\Delta_r, d\mu_H)$ de la forma:

$$(\hat{H}_{\alpha_r}\psi)(h) = h[\alpha_r]\psi(h) \quad , h \in \Delta_r \quad (5.15)$$

5.2.4 Representación del mapeo ω_F para elementos de $\overline{\mathcal{HA}}$

Vamos a denotar la PLF de Fock sobre $\overline{\mathcal{HA}_r}$ como una equivalencia de $\overline{\mathcal{HA}}$ mediante ω_F , entonces la PLF inducida sobre $\overline{\mathcal{HA}}$ es:

$$\omega_F \left(\sum_{i=1}^N a_i [\alpha_i] \right) := \sum_{i=1}^N a_i \text{Exp} \left[- \int \frac{dk^3}{k} |X_{\alpha_{ir}}^a(k)|^2 \right] \quad (5.16)$$

Y los operadores $\hat{H}_{\alpha_r}$ son representados por operadores unitarios en $\mathcal{H}$ de la siguiente manera:

$$\hat{H}_\alpha := U_r^{-1} \hat{H}_{\alpha_r} U_r \quad (5.17)$$

Donde en [1] se muestra que los objetos U_r son mapeos unitarios de $\Delta \rightarrow \Delta_r$ es decir va de $\mathcal{L}^2(\Delta, d\mu) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Delta_r, d\mu_r)$. La construcción también continua en [1] incluyendo la definición de los campos eléctricos, pero para nuestro propósito es suficiente lo expuesto anteriormente.

⁴Definido en la sección 5.1.2

En resumen: **estudiamos ciertos mapeos llamados “positive linear functions” (PLFs) o también llamados “estados” [9] que determinan la forma de cuantizar.** Se pueden escribir versiones de estas PLFs que actúan sobre elementos del álgebra de holonomías distintas, llamadas $\overline{\mathcal{HA}}$ y $\overline{\mathcal{HA}}_r$. se consideraron dos posibles cuantizaciones que se aplican sobre estas álgebras. Una se le conoce como $\omega_0(\cdot)$ y da lugar a la cuantización de lazos, cuya característica a notar es que no esta escrita con un fondo geométrico fijo. Similarmente, el otro mapeo sí considera una estructura geométrica fija es llamado $\omega_F(\cdot)$, y es el generador de la cuantización de Fock. estos estados pueden aplicarse tanto a $\overline{\mathcal{HA}}$ como $\overline{\mathcal{HA}}_r$, el trabajo presentado en [1] muestra una isomorfia entre los espacios Δ y Δ_r .

Ahora definidas nuestros objetos de estudio, queda considerar la exploración que hemos planteado desde el inicio de este documento, la reorganización de las PLFs y su relación, tal como veremos en el siguiente capitulo.

CAPÍTULO 6

Reajuste de las PLFs en el álgebra de holonomías

En este capítulo, pretendemos mostrar una reorganización de las PLFs presentadas en [5.14] y [5.16], es decir: ω_0 y ω_F sobre elementos del álgebra de holonomías $\overline{\mathcal{HA}}_r$ [18]. Nuestro objetivo es absorber el término “suavizado” en la medida y llevar a cero el parámetro r , esto para $\omega_0([\alpha]_r)$. Finalmente, el segundo análisis es mostrar si es posible tratar $\omega_F([\alpha]_r)$ utilizando la transformada de Fourier de la medida de la forma mostrada en [1], y generar una relación con $\omega_0([\alpha]_r)$ mediante un tratamiento asintótico en el parámetro r .

6.1 Análisis sobre $\omega_0([\alpha]_r)$

Partimos de la representación ω_0 sobre el álgebra de holonomías $\overline{\mathcal{HA}}_r$ tal como lo hicimos en el capítulo 5. Definimos la medida de ω_0 sobre Δ_r como una imagen de Δ mediante $d\mu_0$, induciendo una PLF correspondiente a $\overline{\mathcal{HA}}_r$ definida por:

$$\omega_0([\alpha]_r) = \begin{cases} 1, & \text{si } [\alpha]_r = \mathbf{0}_r \\ 0, & \text{si } [\alpha]_r \neq \mathbf{0}_r \end{cases} \quad (6.1)$$

A partir de este podemos reorganizar nuestra PLF siguiendo [18], sabemos que la construcción GNS de la PLF es:

$$\begin{aligned} \omega_0([\alpha]_r) &= \langle \psi_0 | \Pi([\alpha]_r) | \psi_0 \rangle \\ &= \int d\mu_0 \psi_0^* \Pi([\alpha]_r) \psi_0 = \int d\mu_0 \Pi([\alpha]_r) \end{aligned}$$

Donde $\psi_0 = 1$ representa el vacío (1 del álgebra). Comparando esta última con [6.1]:

$$\int d\mu_0 \Pi([\alpha]_r) = \begin{cases} 1, & \text{si } [\alpha]_r = \mathbf{0}_r \\ 0, & \text{si } [\alpha]_r \neq \mathbf{0}_r \end{cases} \quad (6.2)$$

Lo anterior nos recuerda la transformada de Fourier-Stieltjes [11], entonces sea $\Pi([\alpha]_r) = e^{i \int dk^3 X_{\alpha_r}^a(k) A_a(k)}$. Retomando nuestra PLF:

$$\omega_0([\alpha]_r) = \int d\mu_0 \text{Exp} \left[i \int dk^3 X_{\alpha_r}^a(k) A_a(k) \right] = \int d\mu_0 \text{Exp} \left[i \int dk^3 e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} X_{\alpha}^a(k) A_a(k) \right]$$

Donde hemos usado [5.8], ahora dado que *deseamos absorber el termino “suavizado” dentro de la medida*, podemos intentar separar términos de la siguiente forma:

Proponemos que el termino $e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} X_\alpha^a(k) A_a(k)$, que tenemos en la ecuación anterior, puede ser obtenido mediante la suma de dos expresiones , es decir :

$$e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} X_\alpha^a(k) A_a(k) = \eta_\alpha(k, r) + X_\alpha^a(k) A_a(k) \quad (6.3)$$

Donde $\eta_\alpha(k, r)$ es una expresión que nos permite descomponer el factor de forma, y podemos obtenerla despejando:

$$\eta_\alpha(k, r) = e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} X_\alpha^a(k) A_a(k) - X_\alpha^a(k) A_a(k) = (e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} - 1) X_\alpha^a(k) A_a(k) \quad (6.4)$$

Tal que al sustituir el lado derecho de [6.3](#) en nuestra PLF, tendríamos :

$$\begin{aligned} \omega_0([\alpha]_r) &= \int d\mu_0 \text{Exp} \left[i \int dk^3 (\eta_\alpha(k, r) + X_\alpha^a(k) A_a(k)) \right] \\ &= \int d\mu_0 \text{Exp} \left[i \int dk^3 \eta_\alpha(k, r) \right] \text{Exp} \left[i \int dk^3 X_\alpha^a(k) A_a(k) \right] \end{aligned}$$

Ahora podríamos proponer la definición sobre la medida y la $\Pi(\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}})$ de la teoría GNS como:

$$d\mu_r := d\mu_0 \text{Exp} \left[i \int dk^3 \eta_\alpha(k, r) \right] \quad \text{y} \quad \Pi([\alpha]) = \text{Exp} \left[i \int dk^3 X_\alpha^a(k) A_a(k) \right]$$

Finalmente podemos definir una PLF que absorbe el termino “suavizado” :

$$\omega_0([\alpha]_r) = \int d\mu_r \Pi([\alpha]) =: \omega_r([\alpha]) \quad (6.5)$$

Este es nuestro primer resultado. Tal como habíamos propuesto al comienzo, tenemos una familia de PLFs ω_r aplicadas a una sola álgebra de holonomías $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}}$, en vez de una PLF aplicada a una familia de álgebras $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}}_r$.

6.1.1 Análisis asintótico sobre r de ω_r

Ahora intentaremos llevar el factor $r \rightarrow 0$ y luego $1/r \rightarrow 0$ para obtener una PLF sin las funciones “suavizadas” para $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}}$. Nuestro trabajo es calcular por ejemplo para $r \rightarrow 0$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \omega_r([\alpha]) = \lim_{r \rightarrow 0} \int d\mu_r \Pi([\alpha])$$

Pero dicho limite solo afecta el termino $d\mu_r$ deseamos entonces poder introducir el limite bajo la integral, para eso necesitamos aplicar el criterio de convergencia dominada. Veamos como lo podemos hacer:

Límite $r \rightarrow 0$ sobre ω_r

Consideramos el límite de $\omega_r([\alpha])$ cuando $r \rightarrow 0$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \omega_r([\alpha]) = \lim_{r \rightarrow 0} \int d\mu_r \Pi([\alpha])$$

Queremos intercambiar el límite y la integral. Para hacerlo, verificamos si la expresión $d\mu_r \Pi([\alpha])$ satisface el criterio de convergencia dominada. Esto significa que necesitamos encontrar una función mayorante integrable F tal que:

$$|d\mu_r\Pi([\alpha])| \leq F$$

Dado que $d\mu_r\Pi([\alpha]) \equiv d\mu_0 \text{Exp} \left[i \int d^3k e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} X_\alpha^a(k) A_a(k) \right]$, podemos escribir:

$$|d\mu_r\Pi([\alpha])| = |d\mu_0 \text{Exp} \left[i \int d^3k e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} X_\alpha^a(k) A_a(k) \right]|$$

El valor absoluto de la exponencial compleja es 1, por lo que:

$$|d\mu_r\Pi([\alpha])| = |d\mu_0|$$

Si $d\mu_0$ es una medida finita, esto implica que $F = d\mu_0$ es una función mayorante integrable. Así, podemos aplicar el teorema de convergencia dominada para pasar el límite dentro de la integral:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int d\mu_r\Pi([\alpha]) = \int \lim_{r \rightarrow 0} d\mu_r\Pi([\alpha])$$

Ahora, consideremos la expresión dentro del límite:

$$\lim_{r \rightarrow 0} d\mu_r\Pi([\alpha]) = d\mu_0 \text{Exp} \left[i \lim_{r \rightarrow 0} \int d^3k e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} X_\alpha^a(k) A_a(k) \right]$$

Nuevamente, queremos intercambiar el límite y la integral. Usamos el mismo razonamiento que antes para verificar si la expresión dentro de la exponencial satisface el criterio de convergencia dominada :

$$i \int d^3k e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} X_\alpha^a(k) A_a(k) = i \int d^3k e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} \left(\oint ds \dot{\alpha} e^{-ik \cdot \alpha} \right) A_a(k)$$

- La integral $\oint ds \dot{\alpha} e^{-ik \cdot \alpha}$ tiene como resultado una función que depende únicamente del parámetro k y suponemos que es acotada ya que se integra sobre una línea cerrada y es continua o al menos continua a trozos
- La 1-forma $A_a(k)$ por construcción sabemos que decrece a cero rápido en el infinito.
- Finalmente el término $e^{-\frac{r^2 k^2}{2}}$ es una Gaussiana con un corrimiento en el rango, es decir esta acotada y es negativa .

Podemos decir que la expresión a integrar esta sobre algún conjunto medible E que converge c.s. en E , y supongamos que existe una función F integrable sobre E tal que:

$$e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} \left(\oint ds \dot{\alpha} e^{-ik \cdot \alpha} \right) A_a(k) \leq F$$

Podemos intentar establecer quien es la cuota superior de nuestra expresión, entonces sea $f := e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} g(k)$ con $g(k) = \left(\oint ds \dot{\alpha}(s) e^{-ik \cdot \alpha} \right) A_a(k)$, sabemos que $g(k)$ es acotada y al menos continua a trozos. Entonces podemos utilizar el hecho de que $g(k)$ es acotada, es decir, existe una constante M tal que $|g(k)| \leq M$ para todo k . Entonces, podemos escribir:

$$|f(k)| = |e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} g(k)| \leq e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} |g(k)|$$

Dado que $|g(k)| \leq M$, tenemos:

$$|f(k)| \leq M e^{-\frac{r^2 k^2}{2}}$$

Ahora, observemos que la función $e^{-\frac{r^2 k^2}{2}}$ es acotada por 1 para todo $r \geq 0$ y $k \in \mathbb{R}^3$. Por lo tanto, podemos tomar $F(k) = M$ como la función mayorante integrable sobre cualquier conjunto medible $E \subseteq \mathbb{R}^3$. Según el teorema de convergencia dominada, podemos intercambiar el límite y la integral si $|f(k)| \leq F(k)$ para casi todo k y F es integrable. En nuestro caso, como $F(k) = M$ es una constante, es integrable sobre cualquier conjunto finito en $\mathbb{R}^3$. Entonces, aplicando el teorema de convergencia dominada:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int d^3 k e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} X_\alpha^a(k) A_a(k) = \int d^3 k \lim_{r \rightarrow 0} e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} X_\alpha^a(k) A_a(k) = \int d^3 k X_\alpha^a(k) A_a(k)$$

Finalmente, obtenemos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \omega_r([\alpha]) = \int d\mu_0 \text{Exp} \left[i \int d^3 k X_\alpha^a(k) A_a(k) \right]$$

Entonces que la PLF inducida sobre $\overline{\mathcal{HA}}$ es:

$$\begin{aligned} \int d\mu_0 \text{Exp} \left[i \int d^3 k X_\alpha^a(k) A_a(k) \right] &= \int d\mu_0 \Pi([\alpha]) \\ &= \int d\mu_0 \psi_0^* \Pi([\alpha]) \psi_0 = \langle \psi_0 | \Pi([\alpha]) | \psi_0 \rangle = \omega_0([\alpha]) \end{aligned}$$

Finalmente vemos que obtenemos una PLF de la forma:

$$\boxed{\omega_r([\alpha]) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \omega_0([\alpha])} \quad (6.6)$$

En este tratamiento, obtenemos nuestro segundo resultado. Tal como se propuso al comienzo, mediante el límite sobre el parámetro r , obtuvimos una PLF ω_0 aplicada sobre el álgebra no suavizada $\overline{\mathcal{HA}}$, esto es un cambio de perspectiva sobre la PLF, originalmente teníamos un “estado” ω_0 aplicado a una familia de álgebras de holonomía $\overline{\mathcal{HA}}_r$ un álgebra dependiendo del valor elegido para el parámetro r , ahora tenemos una familia de “estados” ω_r uno para cada valor de r aplicada a la holonomía no suavizada $\overline{\mathcal{HA}}$, recordemos que la holonomía $\overline{\mathcal{HA}}$ es la utilizada en la cuantización por lazos.

Límite $1/r \rightarrow 0$ sobre ω_r

Siguiendo el mismo tratamiento anterior solo nos queda cambiar el límite a $1/r \rightarrow 0$ en la última parte del cálculo es decir en:

$$\int d^3 k \lim_{1/r \rightarrow 0} e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} X_\alpha^a(k) A_a(k) = 0$$

Tenemos entonces que en este caso:

$$\lim_{1/r \rightarrow 0} \omega_r([\alpha]) = \int d\mu_0 = 1$$

En este tratamiento no obtenemos información relevante. Es más interesante el análisis cuando $1/r \rightarrow 0$, ya que obtenemos la PLF $\omega_0([\alpha])$, tal como se detalló anteriormente.

6.2 Análisis sobre $\omega_F([\alpha]_r)$

Partimos de la representación de Fock sobre $\overline{\mathcal{HA}}_r$ tal como lo hicimos en el capítulo 5. Entonces la PLF inducida sobre $\overline{\mathcal{HA}}_r$ es:

$$\omega_F \left(\sum_{i=1}^N a_i [\alpha_i]_r \right) := \sum_{i=1}^N a_i \text{Exp} \left[- \int \frac{dk^3}{k} |X_{\alpha_{ir}(k)}^a|^2 \right] \quad (6.7)$$

A partir de este podemos reorganizar nuestra PLF siguiendo [18], sabemos que la construcción GNS de la PLF para un solo elemento $[\alpha]$ es:

$$\omega_F([\alpha]_r) = \langle \psi_0 | \Pi_F([\alpha]_r) | \psi_0 \rangle_F = \int d\mu_F \psi_0^* \Pi_F([\alpha]_r) \psi_0 = \int d\mu_F \Pi_F([\alpha]_r)$$

donde $\psi_0 = 1$ representa el vacío y es el 1 del álgebra. Comparando esta última con [6.7] para el primer coeficiente y como ejemplo podemos tomar $\alpha_1 = 1$,

$$\int d\mu_F \Pi_F([\alpha]_r) \equiv \text{Exp} \left[- \int \frac{dk^3}{k} |X_{\alpha_r}^a(k)|^2 \right] \quad (6.8)$$

concordando con la construcción PLF “estilo Fock” vista en [4.2] es decir : $\omega(W(\lambda)) = e^{-\frac{1}{4}g(\lambda, \lambda)}$

Ahora usaremos una parte importante de [13] la transformada de Fourier de la medida $d\mu$, o, como vimos en el capítulo 3 la transformada de Fourier-Stieltjes, en [13] se define :

$$\chi_\mu(f) := \int_V d\mu e^{if(\phi)} \quad (6.9)$$

Donde $f(\phi)$ es un funcional arbitrario continuo sobre nuestro espacio, entonces si tuviéramos un espacio de Hilbert ($\mathcal{H}$) la transformada de Fourier de la medida tendría la forma:

$$\chi_\mu(f) = \text{Exp} \left\{ -\frac{1}{2} \langle f | \hat{B} | f \rangle \right\} \quad (6.10)$$

Donde $\hat{B}$ es un operador Hermitiano en $\mathcal{H}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno en $\mathcal{H}$, la forma en como se ve la medida es:

$$d\mu = \mathcal{D}\phi \text{Exp} \left\{ -\frac{1}{2} \langle \phi | \hat{B}^{-1} | \phi \rangle \right\} \quad (6.11)$$

Donde $\mathcal{D}\phi$ representa una medida ficticia tipo Lebesgue, como se menciona en [13] esta no es una buena definición y debe ser tomada con precaución. Vamos a utilizar esto en nuestro caso donde nuestro funcional sería $f(A)$, siguiendo la construcción de la representación estándar de Fock [18], resulta al escoger $\hat{B} = -\Delta^{-1/2}$. Para nuestro caso, donde trabajamos en el dominio de las k , la transformada de Fourier del Laplaciano se puede expresar como: $\mathcal{F}[\Delta f(x)] = (i\mathbf{k})^2 f(k)$. Podemos verlo de la siguiente manera:

Sea una función $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$. El Laplaciano de f , denotado como Δf , está dado por: $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Ahora, apliquemos la transformada de Fourier a ambos lados de esta ecuación. La transformada de Fourier tridimensional de una función $f(\mathbf{x})$ se denota como $F(\mathbf{k})$ y se define como:

$$F(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dx dy dz$$

Donde $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ es el vector de onda. Aplicando la transformada de Fourier a Δf , obtenemos:

$$\mathcal{F}\{\Delta f\} = \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right\} \quad (6.12)$$

La transformada de la primera suma, se puede calcular de la siguiente manera:
Aplicamos la transformada de Fourier a la segunda derivada de $f(\mathbf{x})$:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^2} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dx$$

Para calcular esta integral, utilizamos la integración por partes dos veces. Primero, consideramos $u = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $dv = -ike^{-ikx} dx$, lo que implica $du = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx$ y $v = -e^{-ik \cdot \mathbf{x}}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dx = \left[\frac{\partial f}{\partial x} (-e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}) \right]_{-\infty}^{\infty} + ik \int_{-\infty}^{\infty} (-e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}) \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

Resolvemos la integral por partes nuevamente utilizando $u = f$ y $dv = -ike^{-ik \cdot \mathbf{x}}$, lo que implica $du = \frac{\partial f}{\partial x} dx$ y $v = e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dx &= \left[\frac{\partial f}{\partial x} (-e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}) \right]_{-\infty}^{\infty} + ik \left[f (-e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad + (ik_x)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dx \end{aligned}$$

Dado que los dos primeros términos se cancelan, obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dx = (ik_x)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dx$$

Finalmente, usando la definición de la transformada de Fourier $f(k)$, reescribimos esta expresión como:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^2} \right\} = (ik_x)^2 f(\mathbf{k})$$

Ahora, utilizando la misma lógica cada elemento de la suma en [6.12](#):
Entonces:

$$\mathcal{F} \{ \Delta^{-1/2} f(\mathbf{x}) \} = -\frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} f(\mathbf{k})$$

Donde Δ es el negativo del operador Laplaciano, es decir sus valores propios serán positivos.

Vemos entonces que para nuestro caso $\hat{B} = \frac{1}{k}$ entonces $\hat{B}^{-1} = k$, usamos [6.11](#):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \langle A | \hat{B}^{-1} A \rangle &= -\frac{1}{2} \int dk^3 A_a^* \hat{B}^{-1} A_a = -\frac{1}{2} \int dk^3 A_a^* k A_a \\ &= -\frac{1}{2} \int dk^3 k A_a^* A_a = -\frac{1}{2} \int dk^3 k |A_a(k)|^2 \end{aligned}$$

La medida $d\mu_F$ siguiendo [6.11](#) estaría dada por:

$$d\mu_F = \mathcal{D}A e^{-\frac{1}{2} \int dk^3 k |A_a(k)|^2} \quad (6.13)$$

Donde $\mathcal{D}A$ es la medida ficticia tipo Lebesgue.

Entonces tenemos que [6.9](#) toma la forma :

$$\omega_F([\alpha]_r) = \int \mathcal{D}A \text{Exp} \left[-\frac{1}{2} \int dk^3 k |A_a(k)|^2 \right] \text{Exp} \left[i \int dk^3 X_{\alpha_r}^a(k) A_a(k) \right] \quad (6.14)$$

Esta expresión nos muestra la estructura de nuestra PLF $\omega_F([\alpha]_r)$, donde se ve explícitamente la medida.

6.3 Relación entre $\omega_F([\alpha]_r)$ y $\omega_0([\alpha])$

Podemos intentar llevar $\omega_F([\alpha]_r)$ al comportamiento de $\omega_0([\alpha])$, intentando analizar asintóticamente el parámetro r . Partimos del mapeo PLF expuesto en [6.8](#):

$$\omega_F([\alpha]_r) = \text{Exp} \left[- \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{k} e^{-r^2 k^2} |X_\alpha^a(k)|^2 \right] \quad (6.15)$$

Notemos que si α es el lazo trivial entonces tenemos que : $\omega_F([\mathbf{0}]_r) = \text{Exp}[0] = 1$.

Si nos concentramos solo la integral en coordenadas esféricas sobre $\mathbf{k}$ recordando que $\mathbf{k}$ es un vector, es decir: $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ tal que $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$ la integral queda :

$$\begin{aligned} - \int k^{-1} e^{-r^2 k^2} |X_\alpha^a(k)|^2 dk^3 &= - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty k^{-1} e^{-r^2 k^2} |X_\alpha^a(k)|^2 k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi \\ &= -2\pi \int_0^\pi \int_0^\infty k e^{-r^2 k^2} |X_\alpha^a(k)|^2 \sin \theta dk d\theta \\ &= -2\pi \int_0^\pi \int_0^\infty k e^{-r^2 k^2} \oint \oint \dot{\alpha}(s) \dot{\alpha}(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\alpha(t) - \alpha(s))} ds dt \sin \theta dk d\theta \end{aligned}$$

Donde, por simplicidad, hemos supuesto un lazo orientado perpendicularmente al eje z , sin pérdida de generalidad, ya que siempre tenemos la libertad de escoger un marco de referencia. Esto nos quita la dependencia del ángulo ϕ en la integración. Sea $\alpha(s) - \alpha(t) = \gamma$, entonces $\mathbf{k} \cdot (\alpha(t) - \alpha(s)) \equiv \mathbf{k} \cdot \gamma = k \gamma \cos \theta$ y organizando la expresión según su dependencia de la integración:

$$\begin{aligned} &= -2\pi \oint \oint \dot{\alpha}(s) \dot{\alpha}(t) \int_0^\infty k e^{-r^2 k^2} \int_0^\pi e^{ik\gamma \cos[\theta]} \sin[\theta] d\theta dk ds dt \\ &= -2\pi \oint \oint \dot{\alpha}(s) \dot{\alpha}(t) \int_0^\infty k e^{-r^2 k^2} \left[\frac{1}{i\gamma k} e^{-ik\gamma \cos \theta} \Big|_0^\pi \right] dk ds dt \\ &= -4\pi \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s) \dot{\alpha}(t)}{\gamma} \int_0^\infty e^{-r^2 k^2} \sin(\gamma k) dk ds dt \end{aligned}$$

La integral en k tiene la forma de la integral especial de Dawson [\[20\]](#), y está definida como:

$$F[x] = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4}} \sin(xt) dt$$

En nuestro caso la variable $x = \frac{\gamma}{2r}$ y $t = 2rk$, si escribimos nuestra integral en estos términos nos queda:

$$- \int k^{-1} e^{-r^2 k^2} |X_\alpha^a(k)|^2 dk^3 = -2\pi \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s) \dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s) - \alpha(t)|} \frac{F\left[\frac{\gamma}{2r}\right]}{r} ds dt$$

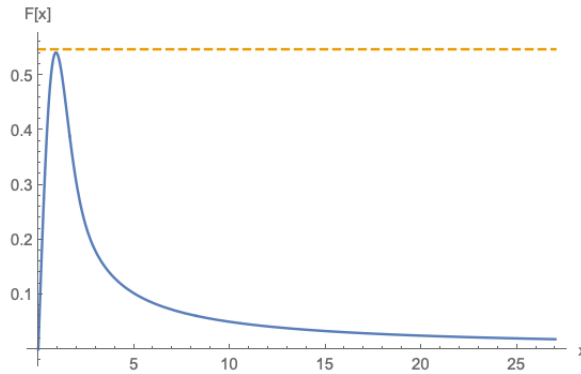
Tenemos entonces que :

$$\omega_F([\alpha]_r) = \text{Exp} \left[-\frac{2\pi}{r} \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s) \dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s) - \alpha(t)|} F\left[\frac{\gamma}{2r}\right] ds dt \right] \quad (6.16)$$

Siendo $x = \frac{|\alpha(s) - \alpha(t)|}{2r}$. Esto nos servirá para poder aplicar los límites sobre el parámetro r como veremos a continuación.

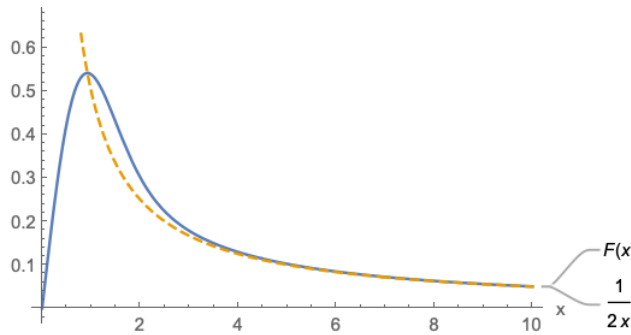
6.3.1 Límites Asintóticos

Ahora intentemos analizar los límites al llevar el factor $r \rightarrow 0$ y luego $1/r \rightarrow 0$. Partimos del comportamiento de $F[x]$, esta integral de Dawson es acotada y dado que r y γ toman valores positivos, es decir $0 \leq x$, tiene la forma gráfica :



Límite $r \rightarrow 0$ sobre ω_F

Entonces para valores pequeños de r con $r < |\alpha(s) - \alpha(t)|$ tal que $t \neq s$, la variable x tiende a valores grandes ya que $x = \frac{\gamma}{2r}$, la integral de Dawson se comporta $F[x] \approx \frac{1}{2x}$, vemos este comportamiento en la gráfica:



Tal que nuestra PLF sería :

$$\begin{aligned}\omega_F([\alpha]_r) &\approx \text{Exp} \left[-\frac{2\pi}{r} \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s)\dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s) - \alpha(t)|} \left[\frac{r}{\gamma} \right] ds dt \right] \\ &= \text{Exp} \left[-2\pi \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s)\dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s) - \alpha(t)|^2} ds dt \right]\end{aligned}$$

Antes de continuar creemos conveniente analizar esta última expresión:

Si nos centramos en la integral solamente:

$$-2\pi \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s)\dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s) - \alpha(t)|^2} ds dt$$

Ahora, tal como en [19], podemos usar una serie $\alpha(t) = \alpha(s) + (t - s)\dot{\alpha}(s) + \dots$ y podemos escoger una parametrización donde $|\dot{\alpha}| = 1$, por lo tanto, $\dot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha} = 0$. Entonces, el denominador se puede obtener haciendo el producto $\dot{\alpha}(s) \cdot \alpha(t)$ y despejando:

$$\dot{\alpha}(s) \cdot \alpha(t) = \dot{\alpha}(s)\alpha(s) + (t-s)\dot{\alpha}(s)\dot{\alpha}(s) + \frac{1}{2!}(t-s)^2\dot{\alpha}(s)\ddot{\alpha}(s) + O^3(t-s) + \dots$$

$$\dot{\alpha}(s) \cdot \alpha(t) = \dot{\alpha}(s)\alpha(s) + (t-s) + O^3(t-s) + \dots$$

$$\dot{\alpha}(s) \cdot \alpha(t) - \dot{\alpha}(s)\alpha(s) = (t-s) + O^3(t-s) + \dots$$

$$\dot{\alpha}(s) [\alpha(t) - \alpha(s)] = (t-s) + O^3(t-s) + \dots$$

$$[\alpha(s) - \alpha(t)]^{-1} = -\frac{\dot{\alpha}(s)}{(t-s) + O^3(t-s) + \dots}$$

Para valores $t-s$ muy cercanos pero no iguales, tenemos :

$$\frac{1}{|\alpha(s) - \alpha(t)|} \approx \frac{1}{(t-s)^2}$$

Ahora el numerador se puede obtener también haciendo una serie pero sobre $\dot{\alpha}(t)$ y luego haciendo el producto $\dot{\alpha}(s) \cdot \dot{\alpha}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(s) \cdot \dot{\alpha}(t) &= \dot{\alpha}(s) \left(\dot{\alpha}(s) + (t-s)\ddot{\alpha}(s) + \frac{(t-s)^2}{2!}\ddot{\alpha}(s) + O^3(t-s) + \dots \right) \\ &= \dot{\alpha}(s)\dot{\alpha}(s) + (t-s)\dot{\alpha}(s)\ddot{\alpha}(s) + \frac{(t-s)^2}{2!}\dot{\alpha}(s)\ddot{\alpha}(s) + O^3(t-s) + \dots \\ &= 1 + \frac{(t-s)^2}{2!}\dot{\alpha}(s)\ddot{\alpha}(s) + O^3(t-s) + \dots \end{aligned}$$

Uniendo las partes:

$$\frac{\dot{\alpha}(s) \cdot \dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s) - \alpha(t)|^2} = \frac{1}{(t-s)^2} + \frac{\dot{\alpha}(s)\ddot{\alpha}(s)}{2!} + O^1(t-s) + \dots$$

Nuestra integral se convierte:

$$-2\pi \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s) \cdot \dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s) - \alpha(t)|^2} ds dt = -2\pi \oint \oint \left[\frac{1}{(t-s)^2} + \frac{\dot{\alpha}(s)\ddot{\alpha}(s)}{2!} + O^1(t-s) + \dots \right] ds dt$$

Vemos que la divergencia principal es independiente del lazo como menciona [19], esta se da en el primer término de la integral, veamos:

$$-2\pi \oint_0^l \oint_0^l \frac{1}{(t-s)^2} ds dt = \log \left[\frac{t-l}{t} \right] \Big|_{t=0}^{t=l} \rightarrow \infty \quad (6.17)$$

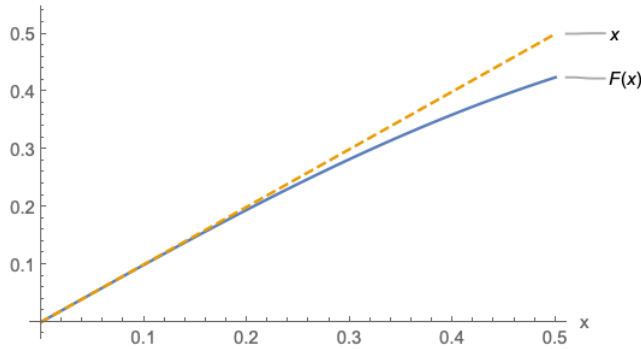
Tenemos que la divergencia principal es independiente del lazo, tal como en [19]. En este caso :

$$\omega_F([\alpha]_r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty \quad \text{para } s-t \text{ cercanos pero no iguales.}$$

En esta integral pueden existir divergencias dependientes y no dependientes del lazo, según [19] diverge a infinito, el cálculo no aporta mayor información, ya que tenemos divergencias para este resultado . Por tanto, no podemos extraer una conclusión definitiva.

Límite $1/r \rightarrow 0$ sobre $\omega_F([\alpha]_r)$

De igual forma partimos del comportamiento de $F[x]$, esta integral de Dawson para valores grandes de r con $|\alpha(s) - \alpha(t)| < r$, la variable x tiende a valores pequeños ya que $x = \frac{\gamma}{2r}$, la integral de Dawson se comporta como $F[x] \approx x$, vemos este comportamiento en la gráfica:



Tal que nuestra PLF sería :

$$\begin{aligned}\omega_F([\alpha]_r) &\approx \text{Exp} \left[-\frac{2\pi}{r} \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s)\dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s) - \alpha(t)|} \left[\frac{\gamma}{2r} \right] ds dt \right] \\ &= \text{Exp} \left[-\frac{\pi}{r^2} \oint \oint \dot{\alpha}(s)\dot{\alpha}(t) ds dt \right] \equiv \text{Exp} \left[-\frac{\pi}{r^2} |X_\alpha^a(0)|^2 \right]\end{aligned}$$

Entonces si aplicamos el límite:

$$\lim_{1/r \rightarrow 0} \text{Exp} \left[-\frac{\pi}{r^2} |X_\alpha^a(0)|^2 \right] = \begin{cases} 1, & \text{si } [\alpha] = \mathbf{0} \\ 0, & \text{si } [\alpha] \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad (6.18)$$

Es decir, tenemos que:

$$\omega_F([\alpha]_r) \xrightarrow{1/r \rightarrow 0} \delta_{\alpha,0} \quad (6.19)$$

Notemos que en el caso $s = t$, no causa ningún problema, ya que se regulariza con el término de $F[x]$. Por tanto, tenemos nuestro tercer resultado: la relación entre las PLFs. Es decir, tenemos que $\omega_F([\alpha]_r)$ tiende a $\omega_0([\alpha])$ mediante el límite a infinito del parámetro r . Esto nos interesa, ya que nos proporciona una relación entre una teoría con un fondo fijo en el espacio de Fock, $\omega_F([\alpha]_r)$, y una sin fondo fijo, $\omega_0([\alpha])$.

En la siguiente sección, nos adentramos en la exploración y análisis de diversas propuestas para la formulación matemática del factor de forma. Si bien es cierto que nuestros resultados actuales son prometedores, reconocemos que existe un potencial aún no explotado en la formulación del factor de forma, el cual podría abrir nuevas perspectivas y ofrecer una mayor robustez a nuestro marco teórico.

6.4 Cambio en el factor de forma

Podemos intentar llevar $\omega_F([\alpha])$ al comportamiento de $\omega_0([\alpha])$, intentando analizar asintóticamente el parámetro r , podemos intentar proponer que nuestra función “suavizada” tiene la forma $\tilde{f}_r(x) = \frac{1}{r} f_r(x)$. La consecuencia de esto se vera en el factor de forma :

$$\tilde{X}_{\alpha_r}^a(k) = \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} X_\alpha^a(k) \quad (6.20)$$

Podemos notar esto de la siguiente forma:

Veamos:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{\alpha_r}^a(K) &:= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 X_{\alpha_r}^a(x) e^{-ik \cdot x} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 \oint_{\alpha} ds \tilde{f}_r(\alpha - y) \dot{\alpha}^a e^{-ik \cdot x} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \oint_{\alpha} ds \dot{\alpha}^a \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 \tilde{f}_r(\alpha - y) e^{-ik \cdot x} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \oint_{\alpha} ds \dot{\alpha}^a \frac{1}{(2\pi)^{3/2} r^4} \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 e^{\frac{-|\alpha-y|^2}{2r^2}} e^{-ik \cdot x} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \oint_{\alpha} ds \dot{\alpha}^a \frac{1}{(2\pi)^{3/2} r^4} \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 e^{\frac{-\alpha^2 - y^2 + 2\alpha \cdot y}{2r^2}} e^{-ik \cdot x}
\end{aligned}$$

Completando el cuadrado del argumento de la exponencial:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \oint_{\alpha} ds \dot{\alpha}^a \frac{1}{(2\pi)^{3/2} r^4} \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 e^{\frac{-(x+ir^2k)^2 - \alpha^2 + 2\alpha \cdot x - r^4k^2}{2r^2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \oint_{\alpha} ds \dot{\alpha}^a \frac{1}{(2\pi)^{3/2} r^4} e^{-\frac{r^4k^2}{2r^2}} \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 e^{\frac{-(x+ir^2k)^2 - \alpha^2 + 2\alpha \cdot x}{2r^2}}
\end{aligned}$$

Sea :

$$\begin{cases} z = x + ir^2k, \rightarrow dz^3 = dx^3 \\ x = z - ir^2k, \end{cases}$$

Solo la segunda integral:

$$\int_{\mathbb{R}^3} dz^3 e^{\frac{-z^2 - \alpha^2 + 2\alpha \cdot z - 2ir^2\alpha \cdot k}{2r^2}} = e^{\frac{-2ir^2\alpha \cdot k}{2r^2}} \int_{\mathbb{R}^3} dz^3 e^{-\frac{(z+\alpha)^2}{2r^2}} = e^{-i\alpha \cdot k} (2\pi)^{3/2} r^3$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{\alpha_r}^a(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \oint_{\alpha} ds \dot{\alpha}^a \frac{1}{(2\pi)^{3/2} r^3} e^{-\frac{r^2k^2}{2}} e^{-i\alpha \cdot k} \cancel{(2\pi)^{3/2} r^3} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \oint_{\alpha} ds \frac{1}{r} \dot{\alpha}^a e^{-\frac{r^2k^2}{2}} e^{-i\alpha \cdot k} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{r^2k^2}{2}} \oint_{\alpha} ds \dot{\alpha}^a \frac{1}{r} e^{-i\alpha \cdot k} = \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2k^2}{2}} X_{\alpha}^a(k)
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\tilde{X}_{\alpha_r}^a(k) = \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2k^2}{2}} X_{\alpha}^a(k) \tag{6.21}$$

Ahora de igual forma que en la sección anterior con el análisis asintótico del parámetro r dentro de nuestro mapeo PLF $\omega_F([\alpha]_r)$, con el factor de forma modificado.

6.4.1 Análisis asintótico sobre r de $\tilde{\omega}_F([\alpha]_r)$

Ahora intentaremos llevar el factor $r \rightarrow 0$ y luego $1/r \rightarrow 0$ para obtener una PLF sin las funciones “suavizadas” para $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}}$. Si intentamos usar el mismo procedimiento que la sección anterior donde se analiza el factor de forma habitual, sobre la integral de nuestra PLF [6.8](#) modificada, que ahora llamamos $\tilde{\omega}_F([\alpha]_r)$ por el cambio en el factor de forma, esta se vería como:

$$\tilde{\omega}_F([\alpha]_r) = \text{Exp} \left[- \int \frac{dk^3}{k} \frac{1}{r^2} e^{-k^2 r^2} |X_\alpha^a(k)|^2 \right] \quad (6.22)$$

Recordemos que si α es el lazo trivial entonces tenemos que : $\tilde{\omega}_F([\mathbf{0}]_r) = \text{Exp}[0] = 1$. Queremos calcular el límite:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{\omega}_F([\alpha]_r) = \lim_{r \rightarrow 0} \text{Exp} \left[- \frac{1}{r^2} \int \frac{dk^3}{k} e^{-k^2 r^2} |X_\alpha^a(k)|^2 \right]$$

Si procedemos igual que en el caso normal descrito en la sección 6.3, nuestra PLF se vería:

$$\tilde{\omega}_F([\alpha]_r) = \text{Exp} \left[- \frac{2\pi}{r^3} \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s) \dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s) - \alpha(t)|} F[x] ds dt \right] \quad (6.23)$$

Siendo $x = \frac{|\alpha(s) - \alpha(t)|}{2r}$.

Límite $r \rightarrow 0$ sobre $\tilde{\omega}$

Entonces para valores pequeños de r con $r < |\alpha(s) - \alpha(t)|$ tal que $t \neq s$, la variable x tiende a valores grandes ya que $x = \frac{\gamma}{2r}$, la integral de Dawson se comporta $F[x] \approx \frac{1}{2x}$. Tal que nuestra PLF sería :

$$\tilde{\omega}_F([\alpha]_r) \approx \text{Exp} \left[- \frac{2\pi}{r^3} \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s) \dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s) - \alpha(t)|} \left[\frac{r}{\gamma} \right] ds dt \right] = \text{Exp} \left[- \frac{2\pi}{r^2} \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s) \dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s) - \alpha(t)|^2} ds dt \right]$$

Aplicando el limite:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{\omega}_F([\alpha]_r) = \lim_{r \rightarrow 0} \text{Exp} \left[- \frac{2\pi}{r^2} \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s) \dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s) - \alpha(t)|^2} ds dt \right] = 0 \quad \text{para} \quad \alpha(s) - \alpha(t) \neq 0$$

Vemos que genera el comportamiento de $\omega_0([\alpha])$, ya que si α es el lazo trivial entonces tenemos que : $\tilde{\omega}_F([\mathbf{0}]_r) = \text{Exp}[0] = 1$, y caso contrario es cero, pero solo para puntos diferentes $s \neq t$. Así que no genera una limite del todo satisfactorio, si nuestra meta es conectar con el “estado” $\omega_0([\alpha])$ en todo punto al aplicar el limite.

Límite $1/r \rightarrow 0$ sobre $\tilde{\omega}_F$

De igual forma partimos del comportamiento de $F[x]$, esta integral de Dawson para valores grandes de r con $|\alpha(s) - \alpha(t)| < r$, la variable x tiende a valores pequeños ya que $x = \frac{\gamma}{2r}$, la integral de Dawson se comporta como $F[x] \approx x$. Nuestra PLF sería :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_F([\alpha]_r) &\approx \text{Exp} \left[- \frac{2\pi}{r^3} \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s) \dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s) - \alpha(t)|} \left[\frac{\gamma}{2r} \right] ds dt \right] \\ &= \text{Exp} \left[- \frac{\pi}{r^4} \oint \oint \dot{\alpha}(s) \dot{\alpha}(t) ds dt \right] \equiv \text{Exp} \left[- \frac{\pi}{r^4} |X_\alpha^a(0)|^2 \right] \end{aligned}$$

Entonces si aplicamos el límite:

$$\lim_{1/r \rightarrow 0} \text{Exp} \left[-\frac{\pi}{r^4} |X_\alpha^a(0)|^2 \right] = \begin{cases} 1, & \text{si } [\alpha] = \mathbf{0} \\ 0, & \text{si } [\alpha] \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad (6.24)$$

Este es el caso que nos puede ser útil, ya que genera sin problemas, el comportamiento de $\omega_o([\alpha])$, es decir, que nuestra PLF tendría el comportamiento:

$$\tilde{\omega}_F([\alpha]_r) \xrightarrow{1/r \rightarrow 0} \delta_{\alpha,0} \quad (6.25)$$

Podemos ver que obtenemos un comportamiento igual al 6.19 $\omega_F([\alpha]_r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \delta_{\alpha,0}$, donde encontramos esta relación para el factor de forma normal, *pero perdemos la forma bien comportada de la Gaussiana*, ya que ahora debido al parámetro $1/r$ tenemos una divergencia en el origen.

6.4.2 Nuevo factor de forma Gaussiano

Dado que nos gustaría mantener la forma con un comportamiento Gaussiano intentaremos mantenerlo, y añadir un nuevo parámetro R que nos servirá para llegar a $\omega_o([\alpha])$, entonces proponemos que sea $\bar{f}_R(x) = \frac{1}{R} f_r(x)$. La consecuencia de esto se vera en el factor de forma :

$$\bar{X}_{\alpha_r}^a(k) = \frac{1}{R} e^{-\frac{r^2 k^2}{2}} X_\alpha^a(k) \quad (6.26)$$

Esto se puede ver de la misma forma que en el recuadro de la ecuación 6.21, entonces nuestra PLF 6.8 que ahora llamamos $\bar{\omega}_F$ por el cambio en el factor de forma, este se vería como:

$$\bar{\omega}_F([\alpha]_{r,R}) = \text{Exp} \left[-\int \frac{dk^3}{k} \frac{1}{R^2} e^{-k^2 r^2} |X_\alpha^a(k)|^2 \right] \quad (6.27)$$

Donde si α es el lazo trivial, tenemos que : $\bar{\omega}_F([\mathbf{0}]_{r,R}) = \text{Exp}[0] = 1$.

6.4.3 Límites Asintóticos

Usando el procedimiento de la sección 6.3.1 mediante la ecuación de Dawson. Tenemos entonces que :

$$\bar{\omega}_F([\alpha]_{r,R}) = \text{Exp} \left[-\frac{2\pi}{R^2 r} \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s) \dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s) - \alpha(t)|} F[x] ds dt \right] \quad (6.28)$$

Siendo $x = \frac{|\alpha(s) - \alpha(t)|}{2r}$.

Límite $R \rightarrow 0$ sobre $\bar{\omega}_F([\alpha]_{r,R})$

Recordemos que para valores pequeños de r con $r < |\alpha(s) - \alpha(t)|$ tal que $t \neq s$, la variable x tiende a valores grandes ya que $x = \frac{\gamma}{2r}$, la integral de Dawson se comporta $F[x] \approx \frac{1}{2x}$. Tal que nuestra PLF sería :

$$\bar{\omega}_F([\alpha]_{r,R}) \approx \text{Exp} \left[-\frac{2\pi}{R^2 r} \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s) \dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s) - \alpha(t)|} \left[\frac{r}{\gamma} \right] ds dt \right] = \text{Exp} \left[-\frac{2\pi}{R^2} \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s) \dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s) - \alpha(t)|^2} ds dt \right]$$

Aplicando el limite:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \bar{\omega}_F([\alpha]_{r,R}) = \lim_{R \rightarrow 0} \text{Exp} \left[-\frac{2\pi}{R^2} \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s)\dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s) - \alpha(t)|^2} ds dt \right] = 0 \quad \text{para} \quad \alpha(s) - \alpha(t) \neq 0$$

:

Al igual que en la sección 6.4.1, donde analizamos el limite del parámetro $R \rightarrow 0$, este caso solo genera el comportamiento de $\omega_o([\alpha])$, para puntos tales que $s \neq t$. Así que no genera una limite del todo satisfactorio, si nuestra meta es conectar con el “estado” $\omega_0([\alpha])$, en cualquier punto s, t .

Límite $1/R \rightarrow 0$ sobre $\bar{\omega}_F([\alpha])$

De igual forma partimos del comportamiento de $F[x]$, esta integral de Dawson para valores grandes de r con $|\alpha(s) - \alpha(t)| < r$, la variable x tiende a valores pequeños ya que $x = \frac{\gamma}{2r}$. Tal que nuestra PLF es :

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_F([\alpha]_{r,R}) &\approx \text{Exp} \left[-\frac{2\pi}{R^2 r} \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s)\dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s) - \alpha(t)|} \left[\frac{\gamma}{2r} \right] ds dt \right] \\ &= \text{Exp} \left[-\frac{\pi}{R^2 r^2} \oint \oint \dot{\alpha}(s)\dot{\alpha}(t) ds dt \right] \equiv \text{Exp} \left[-\frac{\pi}{R^2 r^2} |X_\alpha^a(0)|^2 \right] \end{aligned}$$

Entonces si aplicamos el límite:

$$\lim_{1/R \rightarrow 0} \text{Exp} \left[-\frac{\pi}{R^2 r^2} |X_\alpha^a(0)|^2 \right] = \begin{cases} 1, & \text{si } [\alpha] = \mathbf{0} \\ 0, & \text{si } [\alpha] \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{para } r \neq 0 \quad (6.29)$$

Este es el caso, de nuevo puede ser útil, ya que genera sin problemas, el comportamiento de $\omega_o([\alpha])$, es decir, que nuestra PLF tendría el comportamiento:

$$\boxed{\bar{\omega}_F([\alpha]_{r,R}) \xrightarrow{1/R \rightarrow 0} \delta_{\alpha,0}} \quad (6.30)$$

Pondremos cada uno en un resumen para una mejor visualización. Con estos resultados hemos terminado la parte más importante de nuestro trabajo. Cabe hacer unas aclaraciones: la diferencia entre $\overline{\mathcal{HA}}$ y $\overline{\mathcal{HA}}_r$ radica en la forma en que se definen y utilizan en el contexto de la teoría.

$\overline{\mathcal{HA}}$: Es la forma básica del álgebra de holonomías que surge en la teoría de lazos. Esta álgebra describe cómo se comportan las holonomías (que son cantidades asociadas con caminos cerrados en nuestras superficies espaciales) bajo el corchete de Poisson.

$\overline{\mathcal{HA}}_r$: Aquí, el subíndice r indica que se están considerando holonomías alrededor de lazos “Gaussianamente suavizados”, lo que significa que las trayectorias están difuminadas a través de una función de peso Gaussiana.

La diferencia principal entre ambas es que sabemos que la teoría de Maxwell clásica se describe en un espacio-tiempo fijo. Al cuantizar canónicamente, la pieza clave es el mapeo llamado PLF, que en los casos a analizar se mantiene **sin fondo fijo para** $\omega_0([\alpha])$ y **con fondo fijo (Minkowski) para el mapeo** $\omega_F([\alpha]_r)$. Veamos un resumen de lo encontrado anteriormente:

RESUMEN:**★ Para $\omega_0([\alpha])$ se obtuvo:**

- Podemos definir una PLF que absorbe el termino “suavizado” :

$$\omega_0([\alpha]_r) = \int d\mu_r \Pi([\alpha]) =: \omega_r([\alpha]) \quad (6.31)$$

Análisis asintótico :

- Obtuvimos que al llevar:

1. $\omega_r([\alpha]) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \omega_0([\alpha])$
2. $\omega_r([\alpha]) \xrightarrow{1/r \rightarrow 0} 1$

★★ Para $\omega_F([\alpha]_r)$ se obtuvo :

- La medida $d\mu_F$ siguiendo [6.11](#) estaría dada por:

$$d\mu_F = \mathcal{D}A e^{-\frac{1}{2} \int dk^3 k |A_a(k)|^2} \quad (6.32)$$

Análisis Asintótico :

- **Factor de forma habitual $X_{\alpha_r}^a(k)$:** obtuvimos que al llevar

1. $\omega_F([\alpha]_r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \text{Exp} \left[-2\pi \oint \oint \frac{\dot{\alpha}(s)\dot{\alpha}(t)}{|\alpha(s)-\alpha(t)|^2} ds dt \right]$
2. $\omega_F([\alpha]_r) \xrightarrow{1/r \rightarrow 0} \delta_{\alpha,0}$

- **Factor de forma no Gaussiano $\tilde{X}_{\alpha_r}^a(k)$:** obtuvimos que al llevar:

1. $\tilde{\omega}_F([\alpha]_r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \delta_{\alpha,0} \quad \text{si} \quad \alpha(s) - \alpha(t) \neq 0$
2. $\tilde{\omega}_F([\alpha]_r) \xrightarrow{1/r \rightarrow 0} \delta_{\alpha,0}$

- **Factor de forma Gaussiano con una variable $\mathbf{R}$, $\bar{X}_{\alpha_r}^a(k)$:** obtuvimos que al llevar:

1. $\bar{\omega}_F([\alpha]_{r,R}) \xrightarrow{R \rightarrow 0} \delta_{\alpha,0} \quad \text{si} \quad \alpha(s) - \alpha(t) \neq 0$
2. $\bar{\omega}_F([\alpha]_{r,R}) \xrightarrow{1/R \rightarrow 0} \delta_{\alpha,0} \quad \text{si} \quad r \neq 0$

Finalmente, por completitud, después de explorar en detalle los mapeos PLF en sus diferentes presentaciones, podemos dar un muy pequeño vistazo a la estructura del producto interno y espacio de Hilbert asociado. Estos conceptos son fundamentales para comprender la naturaleza matemática subyacente de nuestro análisis y proporcionan una base sólida para futuras investigaciones en este campo.

6.4.4 Producto interno y espacio de Hilbert

Dado que tenemos $\omega_F([\alpha]) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \omega_0([\alpha])$, podríamos trabajar sobre el producto interno, para eso nos interesa la forma de entidades fundamentales en el espacio de Hilbert, los estados. Si regresamos a [1] definen Δ como el espacio de Homomorfismos $h : \overline{\mathcal{HA}} \rightarrow \mathbb{C}$ continuas compactas y de Hausdorff.

Las funciones $h([\alpha])$, son tal que: $\alpha \in \mathcal{L}_{x_0}$ genera una C^* -álgebra $C(\Delta)$ isomorfa a $\overline{\mathcal{HA}}$ donde cada representación continua y cíclica de $\overline{\mathcal{HA}}$ tiene una correspondencia uno a uno con una PLF en $\overline{\mathcal{HA}}$. Cada PLF definida en $C(\Delta)$ esta en correspondencia con una medida $d\mu_0$ mediante el lema de Riesz [2].

$\hat{H}_\alpha$ es un operador unitario sobre $\psi \in \mathcal{L}^2(\Delta, d\mu_0)$ tal que: $(\hat{H}_\alpha \psi)(h) = h([\alpha])\psi(h)$ Donde ψ son llamadas funciones cilíndricas en Δ con la forma: $\psi_{[\alpha_i]} = \psi(h([\alpha_1]) \dots \psi(h([\alpha_n]))$. Donde $\alpha_i, i = 1, \dots, n$. son números finitos de lazos independientes.

Si definimos $\phi_\alpha := \hat{H}_\alpha \psi_0 = h([\alpha])$. El producto interno de $\omega_f([\alpha])$ cuando $r \rightarrow 0$ es decir sobre $\omega_0([\alpha])$ se vería:

$$\langle \phi_\alpha | \phi_\beta \rangle = \int d\mu_0 h^*([\alpha]) h([\beta]) = \delta_{\alpha, \beta}$$

Podemos ver esto de la siguiente forma:

Sea $h([\alpha]) : \overline{\mathcal{HA}} \rightarrow \mathbb{C}$. Tal como en [21]:

$$h([\alpha]) = \text{Exp} \left[-i \int d^3 k X_\alpha^a(k) A_a(k) \right]$$

Entonces:

$$\begin{aligned} h^*([\alpha]) h([\beta]) &= \text{Exp} \left[i \int d^3 k X_\alpha^a(k) A_a(k) \right] \text{Exp} \left[-i \int d^3 k X_\beta^a(k) A_a(k) \right] \\ &= \text{Exp} \left[i \int d^3 k [X_\alpha^a(k) - X_\beta^a(k)] A_a(k) \right] \end{aligned}$$

Entonces, si $\alpha = \beta$:

$$\langle \phi_\alpha | \phi_\beta \rangle = \int d\mu_0 \text{Exp} \left[i \int d^3 k [\cancel{X_\alpha^a(k)} - \cancel{X_\alpha^a(k)}] A_a(k) \right] = \int d\mu_0 = 1$$

¹Este lema establece que para cualquier funcional lineal continuo en un espacio de Hilbert, existe un único vector en $\mathcal{H}$ tal que el funcional puede ser expresado como el producto interno entre ese vector y cualquier otro vector en $\mathcal{H}$

Se puede ver como se menciona en [1] que: $h^*([\alpha]) = h([\alpha^{-1}])$ tal que $h^*([\alpha])h([\alpha]) = 1$. Donde α^{-1} representa el recorrido inverso sobre el lazo α . Si $\alpha = \beta$, tenemos que la integral de la exponencial es nula.

Si $\alpha \neq \beta$:

$$\langle \phi_\alpha | \phi_\beta \rangle = \int d\mu_0 \text{Exp} \left[-i \int d^3k \left[X_\alpha^a(k) + X_\beta^a(k) \right] A_a(k) \right] = 0$$

Ya que [6.1] nos dice que para un lazo diferente de cero tendríamos el producto nulo, notemos que escribimos $\alpha + \beta = \gamma$, donde γ es un nuevo lazo generado por α, β tal que $\gamma \neq 0$.

Concluimos nuestro trabajo con una reflexión sobre las implicaciones de nuestros hallazgos y su relevancia en el contexto de la teoría cuántica. En la sección de conclusiones, recopilamos los principales resultados obtenidos, discutimos posibles direcciones futuras de investigación y destacamos la importancia de nuestro estudio en el avance del conocimiento en este campo.

CAPÍTULO 7

Conclusiones

En este proyecto de tesis, se consideraron ciertos objetos matemáticos, conocidos como PLFs (siglas en inglés de “positive linear functions”), que definen la forma de cuantizar, en el contexto de la teoría electromagnética. En [1] se describen versiones de estas PLFs que actúan sobre elementos del álgebra de holonomías, es decir el álgebra generada por los transportes paralelos, definidos por la conexión A_a , a través de un camino cerrado α en el espacio. Sin necesidad de referirse a un fondo geométrico fijo, a esta PLF se le conoce como $\omega_0(a)$ y que da lugar a la cuantización de lazos; similarmente otro mapeo que si considera una estructura geométrica fija, llamado $\omega_F(a)$, es la generadora de la cuantización de Fock.

Las álgebras de holonomías que se consideraron llevan por nombre: $\overline{\mathcal{HA}}$ y $\overline{\mathcal{HA}}_r$, la diferencia principal entre ambas es el tipo de camino por el cual se hace el transporte, el índice r indica trayectorias difuminadas a través de una función Gaussiana. Hasta ahora entonces tenemos dos álgebras de holonomías y dos mapeos ω , generando cuatro posibles PLFs, es decir las ω_0 y ω_F aplicadas a $\overline{\mathcal{HA}}_r$ dando lugar a $\omega_0([\alpha]_r)$ y $\omega_F([\alpha]_r)$ y estos mismos mapeos aplicados a $\overline{\mathcal{HA}}$ dando lugar a $\omega_0([\alpha])$, $\omega_F([\alpha])$, las cuales se estudian en el artículo [1].

Nuestros resultados principales fueron aportar nuevos enfoques en la comprensión y aplicación de estos mapeos. Puntualmente logramos reescribir $\omega_0([\alpha]_r)$ que es el mapeo aplicado al álgebra de holonomías suavizadas, como $\omega_r([\alpha])$, mostrando cómo estos mapeos pueden ser aplicadas desde una nueva perspectiva; por otro lado logramos relacionar $\omega_0([\alpha])$ y $\omega_F([\alpha]_r)$, utilizando consideraciones asintóticas en el parámetro r al estilo de [5], permitiendo clarificar cómo estas transformaciones pueden ser relacionadas a pesar de tener diferentes contextos geométricos. También discutimos varias propuestas para la estructura que contiene información de suavizado llamada factor de forma $X_\alpha^b(A)$, explorando sus beneficios y desventajas, consideramos dos propuestas: la primera que llamamos: $\tilde{\omega}_F([\alpha]_r)$, que relaciona asintóticamente $\omega_0([\alpha])$ y $\omega_F([\alpha]_r)$ pero pierde la forma Gaussiana y presenta divergencias en el origen; y la segunda propuesta que llamamos: $\tilde{\omega}_F([\alpha]_{r,R})$, que introduce el parámetro adicional R , que potencialmente complica la teoría con términos adicionales. Aunque estos resultados representan una interesante perspectiva, futuros estudios serán necesarios para consolidar estas ideas y explorar sus aplicaciones más allá del ámbito teórico inicial.

A continuación discutimos los aspectos importantes de las implicaciones de los principales resultados:

7.1 Discusión

- **Absorción del término “suavizado” a la medida y eliminación del parámetro r en $\omega_0([\alpha]_r)$:** Al absorber el término “suavizado” a la medida y llevar a cero el parámetro r en la representación ω_0 . Este hallazgo sugiere que ciertas complicaciones pueden ser eliminadas sin perder la integridad de la representación, lo que simplifica el marco teórico sin perder precisión. Cada elección del parámetro r nos da una cuantización; la eliminación del parámetro r nos permite pasar de una PLF aplicada a una familia de

álgebras $\overline{\mathcal{HA}}_r$ (una para cada valor de r), a un conjunto de mapeos ω_r (uno para cada valor de r), para una sola álgebra $\overline{\mathcal{HA}}$, y en el caso de $r \rightarrow 0$ tenemos el caso natural $\omega_0([\alpha])$.

- **Relación $\omega_F([\alpha]_r)$ y $\omega_0([\alpha])$:** Sugiere una conexión potencial entre las representaciones del espacio de Fock y la representación en el espacio de Hilbert, a través del límite asintótico en el parámetro r al estilo de [5]. Esto es interesante porque implica una transición de una teoría en el espacio de Fock, donde se utiliza un fondo con una métrica fija, a una teoría en la que no se usa una métrica de fondo definida, reflejando así un enfoque más general en el contexto de la teoría gravitatoria.
- **Exploración de cambios en el factor de forma:** La exploración de cambios en el factor de forma muestra la versatilidad de la elección del factor “suavizado”, ya que este nos permite realizar dicha relación entre las PLFs. Por otro lado, vemos que el factor “suavizado” por sí solo, como se plantea en [1], nos proporciona una conexión natural.

7.2 Futuros trabajos

Se pretende explorar las diversas estructuras matemáticas inherentes a la teoría cuántica de lazos. En particular, se centrará en el análisis detallado de las distintas propuestas para las representaciones del equivalente “loopy” del álgebra de Weyl. Hasta ahora hemos considerado aquellas que dan lugar a la representación de Fock y la representación de lazos, dentro de la teoría Abelian. A continuación, exploraremos otras, como las provenientes de Chern-Simons y el llamado vacío-BF, junto con su extensión no-Abeliana y las representaciones “desplazadas” [22-26], dentro del marco de la LQG. Este enfoque busca contribuir al entendimiento más profundo de la naturaleza cuántica del espacio-tiempo a través de este tipo de teorías cuánticas. Se pretende, por tanto:

1. Explorar las propiedades matemáticas de las Positive Linear Functions (PLF) en el contexto de las representaciones en gravedad cuántica de lazos.
2. Analizar la relación entre las representaciones definidas por las PLF y las estructuras del espacio-tiempo propuestas por la LQG.
3. Investigar las consecuencias de las diferentes representaciones en la resolución de problemas específicos dentro de la LQG, como singularidades en agujeros negros o la descripción de estados cuánticos del universo temprano.

APÉNDICE A

Representaciones

A.0.1 Representación tipo Schrödinger

Como se menciono, la construcción de la representación Schrödinger, implica saber la especificación de como actúan los operadores básicos $(\hat{q}, \hat{p})$, y la naturaleza del espacio de funciones al que pertenece.

- **Espacios de Hilbert:** Un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es una variedad diferenciable que es también un espacio vectorial complejo, completo y equipado con un producto interno. Matemáticamente, es un espacio completo con una métrica inducida por el producto interno, lo que significa que es un espacio normado y completo. Formalmente, un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ consiste en: - Un conjunto de vectores $|\psi\rangle$ llamados “vectores de estado”. - Un producto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$ que satisface las propiedades usuales del producto interno complejo. - Una norma $\| \cdot \|$ definida por el producto interno, que induce una topología en el espacio. - Un espacio completo, lo que significa que cualquier sucesión de Cauchy converge a un límite dentro del espacio.
- **Operadores lineales:** En el contexto de la mecánica cuántica, los observables físicos se representan mediante operadores lineales auto-adjuntos en el espacio de Hilbert. Un operador lineal $\hat{A}$ actúa sobre los vectores de estado y está completamente determinado por su acción sobre ellos. Matemáticamente, un operador lineal $\hat{A}$ se define como una función lineal que asigna un vector de estado $|\psi\rangle$ a otro vector $|\phi\rangle$, denotado por $\hat{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle$.
- **Ecuación de Schrödinger:** La evolución temporal de un sistema cuántico se describe mediante la ecuación de Schrödinger, que puede escribirse en términos de operadores como:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$

Donde $\hat{H}$ es el operador Hamiltoniano del sistema, que representa la energía total, y $\hbar$ es la constante reducida de Planck.

- **Álgebras de operadores:** Los operadores lineales en un espacio de Hilbert forman un álgebra de operadores, que es un conjunto de operadores cerrado bajo la suma y la multiplicación por escalares complejos. En particular, el conmutador de dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ se define como:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

La estructura de álgebra de operadores es fundamental en la mecánica cuántica y juega un papel crucial en la formulación de principios como el principio de incertidumbre de Heisenberg.

A.0.2 Representación tipo Fock

En la representación de Fock [9, 27], el espacio de Hilbert se construye a partir de un espacio de Fock. Primero necesitamos definir los operadores de creación y aniquilación y cómo actúan sobre los estados en el espacio de Fock.

- **Operadores de creación y aniquilación:** Los operadores de creación $a^\dagger$ y destrucción a son operadores lineales que actúan sobre los estados del espacio de Fock y cumplen ciertas relaciones de conmutación o anticonmutación.

Para bosones, los operadores de creación y destrucción cumplen:

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1$$

Mientras que para fermiones, cumplen:

$$\{a, a^\dagger\} = aa^\dagger + a^\dagger a = 1$$

- **Construcción del espacio de Fock:**

1. *Espacios de un solo cuerpo:* Comenzamos con un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_1$ que describe el estado de una sola partícula. Este espacio es generado por una base ortonormal $|n\rangle$ tal que $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \dots\}$.
2. *Espacios de varios cuerpos:* El espacio de Fock $\mathcal{F}$ se construye considerando todas las posibles combinaciones de estados de un solo cuerpo. Para bosones, el espacio de Fock está simetrizado, mientras que para fermiones, está antisimetrizado. Formalmente, el espacio de Fock se define como:

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \left(\mathcal{S}^N(\mathcal{H}_1) \text{ para bosones, o } \mathcal{A}^N(\mathcal{H}_1) \text{ para fermiones} \right)$$

donde $\mathcal{S}^N$ denota la simetrización y $\mathcal{A}^N$ denota la antisimetrización de los estados del espacio tensorial N -ésimo del espacio de un solo cuerpo, y $\oplus$ denota la suma directa de espacios vectoriales.

3. *Estados en el espacio de Fock:* Un estado en el espacio de Fock $\mathcal{F}$ se puede escribir como una superposición de estados con diferentes números de partículas. Por ejemplo, un estado típico podría ser:

$$|\Psi\rangle = c_0|0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n c_{n,i} |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_n\rangle$$

donde $|0\rangle$ representa el vacío (sin partículas) y $|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_n\rangle$ representa un estado con n partículas distribuidas entre los diferentes estados de un solo cuerpo.

- **Acción de los operadores de creación y aniquilación:** Los operadores de creación y aniquilación actúan sobre los estados del espacio de Fock de la siguiente manera:

$$a_i^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_k\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, n_2, \dots, n_i + 1, \dots, n_k\rangle$$

$$a_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_k\rangle = \sqrt{n_i} |n_1, n_2, \dots, n_i - 1, \dots, n_k\rangle$$

donde $a_i^\dagger$ y a_i son los operadores de creación y aniquilación que actúan sobre el estado i -ésimo, y n_i es el número de partículas en el estado i .

Con estas definiciones, podemos construir cualquier estado en el espacio de Fock aplicando los operadores de creación sobre el estado vacío $|0\rangle$.

APÉNDICE B

Descomposición 3+1

Es la descripción de un espacio tiempo cuadridimensional (M, g_{ab}) en términos de una foliación, como se describe en [17], interpretamos el espacio-tiempo 4 dimensional como un objeto que evoluciona de acuerdo con una noción particular de tiempo global.

Al separar un espacio tiempo 4-D tomando el tiempo como parámetro se busca que el objeto que evolucione sea la métrica Riemanniana que define la distancia sobre una sub variedad apropiada 3-D.

Se tratara únicamente con espacios tiempos globalmente hiperbólicos que son aquellos que se pueden foliar por hipersuperficies de Cauchy Σ_t . Una superficie de Cauchy en un espacio-tiempo es una hipersuperficie tal que cada línea temporal intersecta la superficie en exactamente un punto. El espacio-tiempo es globalmente hiperbólico si admite una familia de superficies de Cauchy, asegurando que el futuro y el pasado de cualquier punto en el espacio-tiempo están bien definidos.

Donde estas hipersuperficies están parametrizadas por una función de tiempo global t y cubren toda la Variedad M , esto implica que la topología de la variedad es $\Sigma \times \mathbb{R}$. Un mismo espacio tiempo se puede foliar de múltiples maneras y en particular t no es única. Esta libertad de foliación estará asociada íntimamente con la noción de invarianza de la norma de la teoría.

Para completar el punto de vista dinámico para el espacio tiempo, es necesario definir una noción apropiada de evolución, es decir establecer una manera de identificar no solo puntos en una hipersuperficie con puntos en otra hipersuperficie de la misma foliación, sino una manera de comparar campos tensoriales entre ambos puntos de la variedad.

Procedemos así:

Sea un difeomorfismo $\phi : M \rightarrow M$, es posible transportar tensores de un punto a otro a través de mapeos llamados Push-forward $\phi_* : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M$ y el Pullback $\phi^* : T_{\phi(p)}^* M \rightarrow T_p^* M$

¹foliación : es la partición en sub variedades de otra variedad diferencial en “cortes” de igual dimensión

²difeomorfismo es un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable

Push-forward y Pull back

sea ϕ un mapeo $\phi : M \rightarrow N$ que permite transportar tensores tangentes a M con tensores tangentes a N . Para Vectores $V^a \in T_p M$ el mapeo es el Push-forward $\phi_* : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M$ definido: $\phi_* V^a = V^a(f \circ \phi)$ para $f \in M$. Para covectores el mapeo $\phi^* : T_{\phi(p)}^* M \rightarrow T_p^* M$ llamado Pullback es definido por:

$$(\phi^* \omega_a) v^a = \omega_a(\phi_* v^a) \quad \text{Para } \omega_a \in T^* M$$

A continuación, se define el cambio de estos objetos sobre el flujo ϕ como la derivada de Lie de ese objeto.

Se desea que el flujo de ϕ represente una forma específica de avanzar en el tiempo dado por la función global t . Para ello se considera un campo vectorial suave t^a que no se anula sobre el espacio tiempo y permita definir a través de sus curvas integrales un grupo uniparamétrico de difeomorfismos $\phi_T : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ del siguiente modo:

Para cada valor T del parámetro de las curvas integrales de t^a , se asigna a cada punto $P \in M$, el punto dado por la curva integral del campo t^a que pasa por P , $\gamma_P : \mathbb{R} \rightarrow M$ evaluada en el parámetro T , es decir $\phi_T(P) = \gamma_P(T)$.

Para que el parámetro de las curvas $\gamma_P(T)$ coincida con t (salvo una constante correspondiente a la elección del origen) basta que t^a sea tipo tiempo y que cumpla con:

$$t^a \nabla_a t = 1 \quad \forall P \in M$$

$$t(\gamma(T)) = t(P) + T$$

Por lo tanto el grupo paramétrico Φ_T generado por t^a permite definir mapeos que transportan campos tensoriales sobre una hipersuperficie Σ_t a otra Σ_{t+T} y con esto provee de una evolución a la descripción 3 + 1.

i) t^a no es necesariamente unitario, Por lo que T no puede interpretarse en general como el tiempo propio de un observador.

ii) No se impone ninguna condición de ortogonalidad del campo t^a respecto a las hipersuperficies de t constantes

iii) la condición $t^a \nabla_a t$, no determina al campo t^a , lo cual es un hecho íntimamente relacionado con la libertad de norma en la teoría general de la relatividad.

Vectores y covectores tangentes a la hipersuperficie

Se definen como aquellos vectores cuyas integrales están completamente contenidas en Σ_t , como las hipersuperficies son de Cauchy estos son tipo espacio.

Como el mapeo t es constante sobre la hipersuperficie Σ , la derivada de t en la dirección de cualquier vector tangente a Σ_t se anula:

$$\tilde{V}^a \nabla_a t = 0 \quad \text{con } \tilde{V}^a \in \Sigma_t$$

Dado que $\nabla_a t$ es ortogonal a Σ_t , un vector normal a cada punto $P \in \Sigma_t$ es:

$$n^a|_P = \frac{-g^{ab} \nabla_b t}{\sqrt{-g^{ab} \nabla_a t \nabla_b t}} \Big|_{P \in \Sigma_t}$$

Con el signo negativo para que n^a sea tipo tiempo dirigido hacia el futuro. Por lo tanto todo vector tangente a Σ_t se puede expresar como una descomposición:

$$v^a = \tilde{v}^a + v n^a \text{ con } \tilde{v} \in \Sigma_t \text{ y } v \text{ es una función } \in \Sigma_t$$

La extensión de esta descomposición a campos covectoriales ó 1-formas es directa, un campo de covectores $\tilde{\omega}_a$ es tangente a Σ_t si $\forall p \in \Sigma$ se cumple:

$$\tilde{\omega}_a n^a = 0$$

Con: $\omega_a = \tilde{\omega}_a + w_a$ con $n_a = g_{ab}n^b$

La componente normal de un campo vectorial y covectorial se obtienen:

$$n_a v^a = n_a \tilde{v}^a + n_a n^a v$$

$$\begin{aligned} n_a n^a &= \left[\frac{-g_{ab} \nabla^b t}{\sqrt{g_{ab} \nabla^a t \nabla^b t}} \right] \left[\frac{g^{ac} \nabla_c t}{\sqrt{g^{ac} \nabla_a t \nabla_c t}} \right] = \frac{-g_{ab} g^{ac} \nabla^b t \nabla_c t}{\sqrt{g_{ab} g^{ac} \nabla^a t \nabla^b t \nabla_a t \nabla_c t}} \\ &= \frac{-\delta_b^c \nabla^b t \nabla_c t}{\sqrt{\delta_b^c \nabla^a t \nabla^b t \nabla_a t \nabla_c t}} = \frac{-\nabla^c t \nabla_a t}{\sqrt{\nabla^a t \nabla^c t \nabla_a t \nabla_c t}} = -1 \end{aligned}$$

$$\therefore v = -n_a v^a + n_a \tilde{v}^a$$

Igual para el covector:

$$\omega = -n^a \tilde{\omega}_a$$

las proyecciones tangentes se obtienen

$$v^a = \tilde{v}^a + n^a \left[-n_b v^b \right] = \tilde{v}^a - n^a n_b v^b.$$

Entonces:

$$\rightarrow \bar{v}^a = v^a + n^a n_b v^b \equiv (\delta_b^a + n^a n_b) v^b$$

Donde llamamos $h_a^b := \delta_b^a + n^a n_b$ el proyector. Igualmente tenemos que:

$$\tilde{\omega}_a = \left(\delta_a^b + n_a n^b \right) \omega_b$$

Para el campo t^a

$$t^a = N^a + N n^a$$

Pero $t^a \nabla_a t \equiv \cancel{N^a \nabla_a t} + N n^a \nabla_a t = 1$, tal que podemos definir:

- $N = \frac{1}{n^a \nabla_a t}$ llamada función Lapse.
- $N^a = t^a - N n^a = t^a - \frac{1}{n^a \nabla_a t} n^a = t^a - \frac{1}{\nabla_a t}$ llamada shift.

Vemos que N está determinado por la función t y n_a , mientras que el shift N^a esta determinado también por t^a .

Descomposición de la métrica

Tenemos un vector tangente $v^a = \tilde{v}^a + n^a v$, pero con lo anterior sabemos:

$$\begin{aligned}
 v^a &= (\delta_b^a + n^a n_b) v^b + n^a v \\
 &= (\delta_b^a + n^a n_b) v^b + n^a (-n_b v^b) \\
 &= h_b^a v^b - n^a n_b v^b \\
 &= (h_b^a - n^a n_b) v^b \\
 &= (g_{bc} h^{ac} - g_{bc} n^a n^c) v^b \\
 &= (h^{ac} - n^a n^c) g_{bc} v^b \\
 &= (h^{ac} - n^a n^c) v_c
 \end{aligned}$$

$\therefore$

$$g^{ac} \equiv h^{ac} - n^a n^c$$

(B.1)

Lista de figuras

1	Relaciones en [1]	iii
2	Relaciones trabajadas	iii
3	Relaciones en [1]	iv
4	Worked relationships	iv
2.1	variedad	8
2.2	flujo y su pullback	13
2.3	derivada del campo Y sobre del flujo producido por el campo X	13
2.4	Donde c y c' son diferentes curvas por donde se transporta el vector V , figura	
	tomada de [6]	15
2.5	Representación diagramática de un haz general.	17
2.6	Transporte de vector en la fibra a través de α	19
2.7	Recta tangente a f (transf. de Legendre)	22
2.8	Transformada de Legendre	22
3.1	Variedad globalmente hiperbólica	30
3.2	Vectores t^a y n^a .	30
3.3	Descomposición de t^a	30

Bibliography

- [1] Madhavan Varadarajan. “Fock representations from $U(1)$ holonomy algebras”. In: *Phys. Rev. D* 61 (2000), p. 104001. DOI: [10.1103/PhysRevD.61.104001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.61.104001). arXiv: [gr-qc/0001050](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0001050).
- [2] Carlo Rovelli. “Loop Quantum Gravity”. In: *Living Reviews in Relativity* 1.1 (Jan. 1998). ISSN: 1433-8351. DOI: [10.12942/lrr-1998-1](https://doi.org/10.12942/lrr-1998-1). URL: <http://dx.doi.org/10.12942/lrr-1998-1>.
- [3] Alejandro Corichi and Kirill V. Krasnov. “Ambiguities in loop quantization: Area versus electric charge”. In: *Mod. Phys. Lett. A* 13 (1998), pp. 1339–1346. DOI: [10.1142/S0217732398001406](https://doi.org/10.1142/S0217732398001406). arXiv: [hep-th/9703177](https://arxiv.org/abs/hep-th/9703177).
- [4] Madhavan Varadarajan. “Photons from quantized electric flux representations”. In: *Phys. Rev. D* 64 (2001), p. 104003. DOI: [10.1103/PhysRevD.64.104003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.104003). arXiv: [gr-qc/0104051](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0104051).
- [5] Alejandro Corichi, Tatjana Vukasinac, and Jose A. Zapata. “Polymer Quantum Mechanics and its Continuum Limit”. In: *Phys. Rev. D* 76 (2007), p. 044016. DOI: [10.1103/PhysRevD.76.044016](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.044016). arXiv: [0704.0007 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/0704.0007).
- [6] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. Bristol, UK: Hilger (1990) 505 p. (Graduate student series in physics). 2003.
- [7] C.J. Isham. *Modern Differential Geometry for Physicists*. World Scientific lecture notes in physics. World Scientific, 1999. ISBN: 9789810235628. URL: <https://books.google.com.mx/books?id=W3lsrjUZen8C>.
- [8] J.C. Baez and J.P. Muniain. *Gauge Fields, Knots And Gravity*. Series On Knots And Everything. World Scientific Publishing Company, 1994. ISBN: 9789813103245. URL: <https://books.google.com.mx/books?id=qvw7DQAAQBAJ>.
- [9] Robert M. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Space-Time and Black Hole Thermodynamics*. Chicago Lectures in Physics. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1995. ISBN: 978-0-226-87027-4.
- [10] Malliavin.P. *Integration and Probability*. spirnger, 1995.
- [11] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley, 1999.
- [12] William Averson. *An invitation to c^* -algebras*. Springer, 1998.
- [13] Alejandro Corichi, Jeronimo Cortez, and Hernando Quevedo. “On the relation between Fock and Schrödinger representations for a scalar field”. In: *Annals Phys.* 313 (2004), pp. 446–478. DOI: [10.1016/j.aop.2004.05.004](https://doi.org/10.1016/j.aop.2004.05.004). arXiv: [hep-th/0202070](https://arxiv.org/abs/hep-th/0202070).

- [14] Alejandro Corichi. “Introduction to the Fock quantization of the Maxwell field”. In: *Revista Mexicana de Física* 44.4 (Jan. 1998), pp. 402–412. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.physics/9804018>. URL: <https://rmf.smf.mx/ojs/index.php/rmf/article/view/2787>.
- [15] Alejandro Corichi and Tatjana Vukainac. “Canonical analysis of field theories in the presence of boundaries: Maxwell + Pontryagin”. In: *Classical and Quantum Gravity* 37.8 (Mar. 2020), p. 085018. ISSN: 1361-6382. DOI: [10.1088/1361-6382/ab778f](https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab778f). URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ab778f>.
- [16] Robert M. Wald. *General Relativity*. First Edition. University Of Chicago Press, 1984.
- [17] D. Sudarsky T. Miramontes. “El formalismo 3+1 en relatividad general y la descomposición tensorial completa”. In: *Revista Mexicana de Física E* 64 (2018). URL: <https://www.scielo.org.mx/pdf/rmfe/v64n2/1870-3542-rmfe-64-02-108.pdf>.
- [18] Abhay Ashtekar and C. J. Isham. “Inequivalent observable algebras: Another ambiguity in field quantization”. In: *Phys. Lett. B* 274 (1992), pp. 393–398. DOI: [10.1016/0370-2693\(92\)92004-Z](https://doi.org/10.1016/0370-2693(92)92004-Z).
- [19] Abhay Ashtekar, Carlo Rovelli, and Lee Smolin. “Gravitons and loops”. In: *Phys. Rev. D* 44 (1991), pp. 1740–1755. DOI: [10.1103/PhysRevD.44.1740](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.44.1740). arXiv: [hep-th/9202054](https://arxiv.org/abs/hep-th/9202054).
- [20] D. Zwillinger. *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*. Advances in Applied Mathematics. CRC Press, 2002. ISBN: 9781420035346. URL: https://books.google.com.mx/books?id=gE_MBQAAQBAJ.
- [21] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. “Background independent quantum gravity: A Status report”. In: *Class. Quant. Grav.* 21 (2004), R53. DOI: [10.1088/0264-9381/21/15/R01](https://doi.org/10.1088/0264-9381/21/15/R01). arXiv: [gr-qc/0404018](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0404018).
- [22] Alejandro Corichi and Jeronimo Cortez. “Note on selfduality and the Kodama state”. In: *Phys. Rev. D* 69 (2004), p. 047702. DOI: [10.1103/PhysRevD.69.047702](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.69.047702). arXiv: [hep-th/0311089](https://arxiv.org/abs/hep-th/0311089).
- [23] Patryk Drobiński and Jerzy Lewandowski. “Continuum approach to the BF vacuum: The U(1) case”. In: *Physical Review D* 96.12 (Dec. 2017). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.96.126011](https://doi.org/10.1103/physrevd.96.126011). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.96.126011>.
- [24] Edward Witten. “A Note on the Chern-Simons and Kodama wave functions”. In: (June 2003). arXiv: [gr-qc/0306083](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0306083).
- [25] Laurent Freidel and Lee Smolin. “The linearization of the Kodama state”. In: *Classical and Quantum Gravity* 21.16 (July 2004), pp. 3831–3844. ISSN: 1361-6382. DOI: [10.1088/0264-9381/21/16/001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/21/16/001). URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/21/16/001>.
- [26] Koslowski Tim and Sahlmann Hanno. “Loop Quantum Gravity Vacuum with Nondegenerate Geometry”. In: *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* (May 2012). ISSN: 1815-0659. DOI: [10.3842/sigma.2012.026](https://doi.org/10.3842/sigma.2012.026). URL: <http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2012.026>.
- [27] T. Lancaster and S. Blundell. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. OUP Oxford, 2014. ISBN: 9780199699339. URL: <https://books.google.com.mx/books?id=Y-OkAwAAQBAJ>.

NOMBRE DEL TRABAJO

Aspectos matemáticos de la cuantización de lazos Abeliana

AUTOR

Juan José Martínez Valladares

RECuento DE PALABRAS

32402 Words

RECuento DE CARACTERES

146665 Characters

RECuento DE PÁGINAS

96 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

1.1MB

FECHA DE ENTREGA

Sep 9, 2024 7:56 AM CST

FECHA DEL INFORME

Sep 9, 2024 7:58 AM CST

● 15% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 14% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 0% Base de datos de trabajos entregados
- 4% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Maestría en Ciencias Físicas	
Título del trabajo	Aspectos matemáticos de la cuantización de lazos Abelianos	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Juan Jose Martinez Valladares	2133021g@umich.mx
Director	Ulises Nucamendi Gómez	ulises.nucamendi@umich.mx
Codirector	Alejandro Corichi Rodríguez Gil	corichi@matmor.unam.mx
Coordinador del programa	Umberto Cotti Gollini	mae.ciencias.fisica@umich.mx

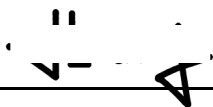
Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	Si	Corrección de ortografía y redacción

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	No	
Traducción a otra lengua	No	
Revisión y corrección de estilo	No	
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	No	
Generación de contenido multimedia	No	
Otro	No	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	Juan Jose Martinez Valladares 
Lugar y fecha	Morelia, Estado de Michoacan, Mexico. 6 de septiembre 2024