



Universidad Michoacana de San Nicolás de
Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

Propagación de ondas en medios disipativos
aleatorios

T E S I S

que para obtener el título de

Maestro en Ciencias en el área de Física

presenta:

Cristian Guillén Almanza

Asesor:

Dr. Luca Tessieri

Morelia, Michoacán.

Septiembre,
2024

Quiero darle las gracias a todos los profesores que tuve la suerte de conocer durante mi periodo en el instituto de física y matemáticas. La maestría resultó ser sumamente estimulante y divertida, y de no haber sido por los maestros que supieron instruirme todo esto no sería posible. En particular quiero agradecer al Dr. Luca Tessieri, del cual recibí la mejor tutela y me apoyó a concluir este trabajo de tesis. Hay tantas cosas que quisiera decir sobre los momentos que pasé conversando con Luca, como maestro, profesor y como persona, pero por ahora solo diré que estoy muy agradecido de que él fué mi asesor.

También quiero agradecer a mi familia que siempre me mostró su apoyo, a mis padres y a mi hermano, ojalá algún día yo pueda darles tanto como ellos me lo han dado a mi.

Por supuesto, no podía faltar mi más sincero agradecimiento a todos mis compañeros que me siguieron en este viaje, empezando por aquellos nuevos amigos que hice en la maestría; Lupita, Karina y Juan José, gracias por recorrer este camino conmigo, estoy seguro que nos volveremos a juntar algún día, y mientras eso no pase siempre pensaré en los momentos que vivimos juntos. Del mismo instituto también agradezco el apoyo que recibí de Ruben y Tania, los cuales he llegado a estimar muchísimo y tienen mi respeto. Agradezco a aquellos amigos que estuvieron conmigo desde la facultad, siempre recordaré nuestros mejores años en la universidad: Gabo, Sofi, Felipe, Meche, Salma, Marichuy, París, Yashar, Iván, Marco y Paola. Gracias chicos!

A aquellos amigos que siempre han mostrado lealtad y buena fe hacía mi, los cuales se han convertido muy cercanos, a mi amigo Adrián, que aunque nos vemos ocasionalmente siempre he disfrutado de su compañía desde la prepa y tengo gran admiración.

A mi pareja favorita: Jauncho y Karla, les agradezco su compañía, su hospitalidad y su presencia en los momentos más divertidos que hemos tenido, les deseo una vida larga y prospera.

Índice general

Resumen	6
Abstract	7
Introducción	8
1. Sistemas cristalinos unidimensionales	10
1.1. Propiedades de los cristales	10
1.2. Teorema de Bloch	14
1.3. Espectro de energía para el modelo de Kronig-Penney	17
2. Sistemas desordenados	21
2.1. Ejemplos de sistemas desordenados	22
2.2. Localización de Anderson	24
2.3. Modelo de enlace fuerte	25
2.3.1. Ausencia de desorden	26
2.3.2. Desorden sin correlaciones espaciales	27
2.3.3. Desorden con correlaciones espaciales	30
3. Sistemas no hermitianos	33
3.1. Definición del modelo	33
3.2. Método de las matrices de transferencia	35
3.3. Barrera activa sin desorden	36
3.3.1. Coeficiente de transmisión para $\gamma \ll 1$	39
3.4. Barrera activa desordenada	41
3.5. Barrera corta sin correlaciones del desorden	47
3.6. Barrera corta con desorden correlacionado	49
3.7. Barrera corta con desordenes auto- e inter-correlacionada	54

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	5
Conclusiones	58
Bibliografía	62

Resumen

En este trabajo se estudia la propagación de ondas a través de una barrera aleatoria activa unidimensional. Se considera una barrera desordenada entre dos conductores perfectos semi-infinitos. En el interior de la barrera, las energías de sitio son variables aleatorias complejas, cuya parte real corresponde al potencial aleatorio en el medio, mientras que la parte imaginaria se asocia a los procesos de absorción o amplificación que sufre una onda al propagarse a través de la barrera. Por medio de la técnica de las matrices de transferencia, se calculan los coeficientes de transmisión y reflexión y se analizan los efectos de la acción combinada del desorden y del carácter activo del medio. Se discuten también los efectos de las correlaciones espaciales del desorden.

Palabras clave: Modelos desordenados no-hermíticos, localización de Anderson, matrices de transferencia.

Abstract

In this work, the propagation of waves through a random active one-dimensional barrier is studied. We consider a random barrier between two semi-infinite perfect leads. Inside the barrier, the site energies are complex random variables, with the real part corresponding to the random potential in the medium, while the imaginary part is associated with the processes of absorption or amplification which take place as the wave propagates through the barrier. Using the transfer matrix technique, the transmission coefficient is calculated, and the effects of the combined action of disorder and the active nature of the medium are analyzed. The effects of the spatial correlations of the disorder are also discussed.

Key words: Random non-Hermitian models, Anderson localization, transfer matrices.

Introducción

La presente tesis tiene por objetivo estudiar las propiedades de transporte en una barrera activa desordenada unidimensional (1-D) finita la cual ha sido puesta entre dos conductores perfectos. Nuestro objetivo principal es averiguar cuál es el comportamiento del coeficiente de transmisión cuando las energías de sitio de los átomos que componen la barrera son variables aleatorias correlacionadas.

En la literatura ya se han encontrado trabajos similares para sistemas de este estilo, por ejemplo ver [1] y [2], en este último se adopta el enfoque de las matrices de transferencia el cual adoptaremos para nuestro problema. Estudiaremos una barrera en donde la intensidad del desorden es débil¹, esto nos permite analizar el problema por medio de un desarrollo perturbativo de la matriz de transferencia total. Veremos que las correlaciones pueden afectar considerablemente las propiedades de transmisión como se demuestra en la parte de resultados al final del capítulo 3.

El contenido del presente trabajo se resume a continuación:

- En el capítulo 1 se da un sumario de los sistemas cristalinos así como algunas de sus propiedades más características y un resultado importante propio de la naturaleza de los mismos, el *Teorema de Bloch*. Para terminar se da una aplicación del precedente teorema a un modelo en particular: *El modelo de Kronig-Penney* [13].
- En el capítulo 2 entramos en el estudio de los sistemas desordenados, dando algunos ejemplos de como pueden ser estudiados y qué es lo que queremos decir con introducir *desorden* al sistema. Posterior a esto introducimos el concepto de localización de Anderson, el cual es un

¹En el capítulo 3 explicamos y definimos lo que queremos decir con *desorden débil*, el cual está relacionado con la varianza de las variables aleatorias.

fenómeno que ocurre en sistemas desordenados, en particular analizaremos un caso ya conocido el cual lleva el nombre de *Modelo de enlace fuerte* (TBM) tridiagonal.²

Veremos para este modelo como podemos caracterizar la localización haciendo uso del exponente de Lyapunov para un sistema de talla infinita y como los efectos de las correlaciones de largo alcance se mantienen también cuando pasamos a un sistema de talla finita.

- El capítulo 3 tiene por objetivo introducir el modelo que es el objeto de estudio de esta tesis, el cual puede ser catalogado como un modelo del tipo no hermitiano, es decir, en el cual no siempre se conserva la energía. Daremos la descripción matemática del mismo así como las propiedades estadísticas de las variables aleatorias que entran en juego. Daremos los resultados para el caso en que los dos tipos de desorden presentes en el modelo no tienen correlaciones espaciales, así como para el caso en que los dos desordenes tienen auto- e inter-correlaciones.
- En las conclusiones daremos un pequeño resumen de lo hecho en el trabajo y lo que se espera para el futuro.

Cabe resaltar que en el capítulo 3 se expone el método que hemos decidido adoptar para la resolución del problema; *el método de las matrices de transferencia*, el cual conlleva una gran cantidad de cálculos analíticos que por cuestiones de espacio no se reprodujeron por completo.

Así mismo los resultados que hemos presentado son del tipo analítico pero también numérico, dando una comparación entre los dos en la parte de resultados se muestran buenas coincidencias para ciertos casos los cuales se analizan también.

²*tight binding model*, por sus siglas en inglés

Capítulo 1

Sistemas cristalinos unidimensionales

Los sistemas cristalinos son, y serán en este trabajo de especial interés, pues son lo que se conoce como *sistemas ordenados*, en la naturaleza se pueden encontrar estas estructuras en metales, diamantes, rocas, etc. Dada la variedad de estos objetos es de particular interés saber como se componen y de que manera se pueden estudiar partiendo de simples modelos que tomen en cuenta su composición microscópica[5]. A priori, sabemos que los cristales¹ están compuestos por un conjunto de átomos bien ordenados los cuales conforman el cristal en sí, a estos los llamaremos redes de Bravais y tienen la propiedad de formar una estructura periódica, es decir, que se repite en toda la estructura. Esta es, geométricamente la forma más simple de pensar en la composición interna de un cristal, y antes de revelar algunas propiedades físicas importantes sobre los mismos vamos a dar algunas propiedades de las redes de Bravais y cómo se describen matemáticamente.

1.1. Propiedades de los cristales

Un concepto fundamental sobre la estructura de un cristal, como ya se dijo son las redes de Bravais, las cuales especifican la forma y/o estructura periódica del material en la cual sus componentes son acomodados, estos componentes pueden ser átomos, moléculas, iones, etc., pero la red de Bravais

¹Nos referiremos así a cualquier estructura cristalina

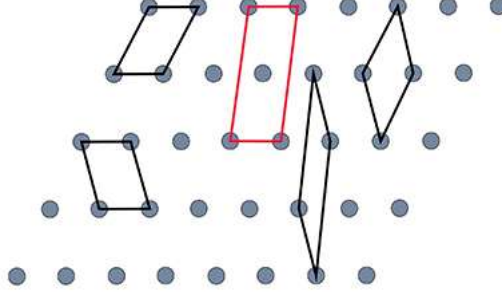


Figura 1.1: Diferentes elecciones de vectores primitivos dan lugar a diferentes celdas primitivas, ver [4] y [5].

solo nos habla de la forma geométrica y de qué tipo son los componentes de la misma. A continuación daremos una definición de una red de Bravais:

Sea $\{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3\}$ una tríada de vectores, a los que llamaremos primitivos, no coplanares; y sea $\vec{t}$ definido por

$$\vec{t} = n_1 \vec{t}_1 + n_2 \vec{t}_2 + n_3 \vec{t}_3 \quad . \quad (1.1)$$

El conjunto de todos los puntos de la forma (1.1) conforma la red de Bravais, con $\{n_1, n_2, n_3\} \in \mathbb{Z}^3$. El paralelepípedo definido por $\{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3\}$ lo llamaremos celda primitiva y su volumen es

$$\Omega = |\vec{t}_1 \cdot (\vec{t}_2 \times \vec{t}_3)| \quad . \quad (1.2)$$

Entonces, si $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ son vectores primitivos el punto de la red $\sum_{i=1}^3 n_i \vec{a}_i$ es alcanzado dando n_i pasos de longitud $|\vec{a}_i|$ en dirección de $\vec{a}_i$ para $i = 1, 2, 3$. Como comentario adicional sobre la definición anterior, hay que mencionar que la elección de la tríada de vectores en cuestión no es única, puede haber otro conjunto de vectores que den lugar a la misma red de Bravais, esto se puede lograr haciendo una transformación del tipo: $\tilde{\mathbf{t}} = M\mathbf{t}$, donde $\tilde{\mathbf{t}}$ ahora define una nueva tríada de vectores que identifican a una celda primitiva distinta y M es una matriz ortogonal (3×3) con entradas enteras.

Otro concepto importante sobre el estudio de estructuras periódicas es el de red recíproca, el cual definiremos a continuación.

Considere el conjunto de vectores (1.1) el cual define una correspondiente red de Bravais, y una onda plana $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, entonces: $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \neq e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{t})}$ para un genérico vector de onda $\vec{k}$. Sin embargo, podemos escoger vectores de onda que satisfacen esta condición, es decir

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{t}} = 1 \implies \vec{k} \cdot \vec{t} = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.3)$$

El conjunto de todos los vectores de onda que satisfacen esta propiedad es lo que se conoce como la *red recíproca*.

Aún falta decir como generar una red recíproca a partir de un conjunto de vectores primitivos $\{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3\}$. Para esto considere $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ vectores primitivos definidos por

$$\vec{b}_1 = 2\pi \frac{\vec{t}_2 \times \vec{t}_3}{\Omega} \quad (1.4)$$

$$\vec{b}_2 = 2\pi \frac{\vec{t}_3 \times \vec{t}_1}{\Omega} \quad (1.5)$$

$$\vec{b}_3 = 2\pi \frac{\vec{t}_1 \times \vec{t}_2}{\Omega} \quad (1.6)$$

donde Ω está definido por (1.2). Es inmediato verificar que

$$\vec{b}_i \cdot \vec{t}_j = 2\pi \delta_{ij} \quad .$$

Entonces afirmamos que cualquier vector de la red recíproca puede ser expresado como combinación lineal de los vectores $\vec{b}$ como

$$\vec{k} = k_1 \vec{b}_1 + k_2 \vec{b}_2 + k_3 \vec{b}_3 \quad (1.7)$$

donde $\{k_1, k_2, k_3\} \in \mathbb{Z}^3$. Entonces en este sentido la red recíproca es una red de Bravais y de las definiciones anteriores sigue que

$$\vec{k} \cdot \vec{t} = 2\pi(k_1 n_1 + k_2 n_2 + k_3 n_3) \quad , \quad (1.8)$$

que es justo la condición que satisfacen los vectores de la red recíproca.

Una red cristalina puede describirse a través de un conjunto de vectores primitivos $\{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3\}$ y posiblemente una base, la cual especifica la posición de los distintos átomos o iones dentro de la red primitiva. Esto lo hacemos dando un conjunto de vectores $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_m\}$. Un cristal que contiene un solo átomo en la celda primitiva se llama *cristal simple*; en este caso la base es superflua y las posiciones de equilibrio de los átomos coinciden con los vectores de la red de Bravais, o sea

$$\vec{R}_n = n_1 \vec{t}_1 + n_2 \vec{t}_2 + n_3 \vec{t}_3 \quad . \quad (1.9)$$

En general, un cristal con más de un átomo se llama *cristal compuesto* y las posiciones en equilibrio de los átomos pueden escribirse usando los vectores de la base y los vectores primitivos

$$\vec{R}_n^{(i)} = \vec{d}_i + n_1 \vec{t}_1 + n_2 \vec{t}_2 + n_3 \vec{t}_3 \quad , \quad (1.10)$$

con $i = 1, 2, \dots, m$.

Algunos ejemplos de cristales de diferentes materiales pueden ser encontrados en la literatura [4] y [5].

1.2. Teorema de Bloch

Anteriormente vimos que una estructura cristalina se puede estudiar especificando una red de Bravais y posiblemente una base[4]. Ahora toca obtener algunos resultados físicos de estos sistemas.

Para lo que sigue vamos a enfocar nuestra atención a sistemas unidimensionales, entonces la ecuación de Schrödinger para un electrón en el cristal toma la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1.11)$$

$$V(x) = V(x + na) \quad (1.12)$$

donde a es el paso de la red y $x \in [0, L]$.

Teorema de Bloch:

Para el problema (1.11) con $V(x)$ que satisface (1.12) existe un conjunto de autofunciones ψ_n tales que

$$\psi_n(x + R) = e^{ikR} \psi_n(x) \quad , \quad (1.13)$$

donde k en este caso es un vector de onda en una dimensión asociado a una onda plana y R es cualquier vector de la red de Bravais.

Antes de proceder con la prueba de dicho teorema, nos gustaría definir el problema en concreto para el cual vamos a dar la demostración. Vamos a considerar un modelo unidimensional finito compuesto por N átomos, entonces cualquier vector R de la red se puede expresar como $R = na$, siendo a el paso de la red. Por último hay que especificar las condiciones de frontera del sistema, para esto vamos a suponer que tenemos condiciones periódicas, es decir

$$\psi(x + L) = \psi(x + Na) = \psi(x) \quad (1.14)$$

donde ψ es una función normalizable definida sobre un intervalo $[0, L]$.

Estas condiciones de frontera se llaman *condiciones de frontera de Born-Von Karman*.

Demostración(*Teorema de Bloch*):

Sea $\hat{T}_R$ el operador de traslación tal que $\hat{T}_R f(x) = f(x + R)$ donde $f(R)$ es alguna función definida en el intervalo $[0, L]$, este operador entonces efectúa traslaciones por R . Pensemos en $\hat{H}$ un hamiltoniano periódico como el de (1.11), entonces:

$$\hat{T}_R \hat{H} \psi(x) = \hat{H}(x + R) \psi(x + R) = \hat{H}(x) \psi(x + R) = \hat{H} \hat{T}_R \psi(x) \quad , \quad (1.15)$$

esto para cualquier ψ , por lo que concluimos que $\hat{T}_R \hat{H} = \hat{H} \hat{T}_R$, entonces existe una base de autofunciones común entre $\hat{H}$ y $\hat{T}_R$, esto es

$$\begin{aligned} \hat{H} \psi &= E \psi \\ \hat{T}_R \psi &= c(R) \psi \end{aligned}$$

Es importante notar que las traslaciones forman un grupo abeliano, ya que

$$\hat{T}_R \hat{T}_{R'} \psi(R) = \hat{T}_{R'} \hat{T}_R \psi(R) = \psi(x + R + R') \quad (1.16)$$

entonces: $\hat{T}_R \hat{T}_{R'} = \hat{T}_{R+R'}$.

Reescribamos esta última expresión de manera equivalente para una autofunción del operador de traslación

$$\hat{T}_R \hat{T}_{R'} \psi = c(R) \hat{T}_{R'} \psi = c(R) c(R') \psi \quad (1.17)$$

pero por (1.16) notamos que

$$c(R + R') = c(R) c(R') \quad . \quad (1.18)$$

Ahora sea R un vector de la red de Bravais definido por $R = nt$ con $n \in \mathbb{N}$. Aplicando (1.18) a R obtenemos

$$c(R) = c(t)^n \quad , \quad (1.19)$$

entonces el problema de hallar los eigenvalores de $\hat{T}$ se reduce a hallar los valores de $c(t)$, los cuales se pueden hallar por medio de la condición de normalización de la función ψ , esto implica que $|c(t)| = 1$, entonces escogemos: $c(t) = e^{2\pi i x t}$. Después veremos qué valores puede tomar x , por el momento sabemos que se trata de un número real. Entonces escribimos (1.19) como

$$c(R) = e^{ikR} \quad , \quad (1.20)$$

donde $k = xb$ es el llamado vector de onda de Bloch, siendo b el vector de la red recíproca que satisface por definición $bt = 2\pi$. En resumen, hemos

probado que podemos escoger autofunciones de $\hat{H}$ tales que para cualquier vector R de la red de Bravais se cumple

$$\hat{T}_R \psi(x) = \psi(x + R) = c(R) \psi(x) = e^{ikR} \psi(x) \quad . \quad (1.21)$$

En la demostración anterior usamos $k = xb$, y dijimos que se trataba de un vector de onda de Bloch, sin embargo, no sabemos nada sobre los posibles valores que pueda tener. Para resolver esto debemos imponer apropiadas condiciones de frontera a la función de onda.

Vamos a calcular los posibles valores que puede tomar k en la ecuación (1.21). Para esto, hay que usar la condición de frontera (1.14)

$$\psi_n(x + Nt) = e^{iNkt} \psi_n(x) \implies e^{iNkt} = 1 \quad , \quad (1.22)$$

donde $k = xb$, entonces $\exp\{2\pi iNx\} \stackrel{!}{=} 1$, como consecuencia encontramos $x = m/N$, con m entero. De esta forma los valores que toma el vector de onda de Bloch son²: $k = (m/N)b$ con $m = 1, 2, 3, \dots, N$.

²Para el caso tridimensional: $\vec{k} = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{N_i} \vec{b}_i$.

1.3. Espectro de energía para el modelo de Kronig-Penney

Un aspecto importante del estudio de sistemas cristalinos en general es el espectro de energías. Veremos en esta sección como dicho espectro está agrupado en bandas; sin embargo, aunque esto es un resultado válido siempre, es difícil de demostrar de manera general para cualquier modelo unidimensional cuya ecuación de Schrödinger está dada por (1.11). Entonces, a fin de probar el resultado lo haremos para un caso particular: **El modelo de Kronig-Penney**(K-P). Ver en [13]

Considere una sucesión de barreras de potencial constante V_0 de anchura

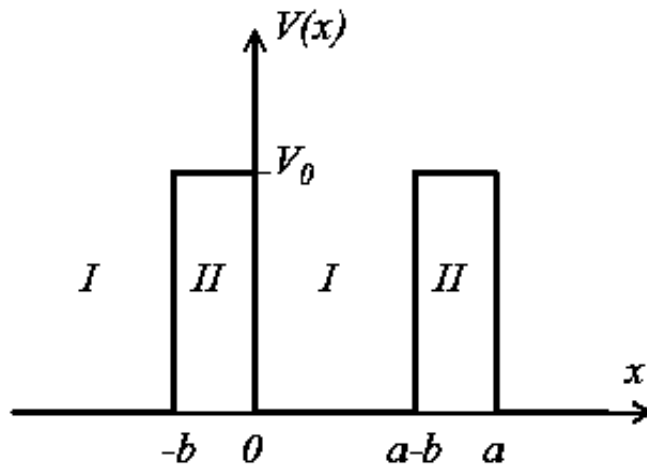


Figura 1.2: Modelo de Kronig-Penney. Una sucesión de barreras de potencial. [Créditos: <https://www.researchgate.net>]

b , separadas por una distancia $w = a - b$ siendo a el paso de la red, como en la figura 1.2

La solución a la ecuación de Schrödinger para las regiones (I) y (II) se puede

escribir como:

$$\psi_I(x) = Ae^{iqx} + Be^{-iqx} \quad , \quad 0 < x < w \quad , \quad q(E) = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad , \quad (1.23)$$

$$\psi_{II}(x) = Ce^{\beta x} + De^{-\beta x} \quad , \quad -b < x < 0 \quad , \quad \beta(E) = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \quad , \quad (1.24)$$

Supondremos que $E < V_0$, el otro caso puede ser tratado de forma análoga. Las constantes A, B, C y D pueden ser encontradas usando las correspondientes condiciones de frontera para la función de onda y sus derivadas, además estas deben satisfacer la condición de periodicidad, es decir:

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad , \quad \psi'_I(0) = \psi'_{II}(0) \quad (1.25)$$

$$\psi_{II}(-b) = e^{ika}\psi_I(w) \quad , \quad \psi'_{II}(-b) = e^{ika}\psi'_I(w) \quad . \quad (1.26)$$

Las condiciones (1.25) demandan que la función de onda y su primera derivada sean continuas en la interfaz de ambas regiones. Las condiciones (1.26) conectan la función de onda y la primera derivada, en $x = -b$ y $x = w$ en acuerdo con el teorema de Bloch.

Las condiciones de frontera anteriores producen el sistema:

$$A + B - C - D = 0 \quad (1.27)$$

$$iqA - iqB - \beta C - \beta D = 0 \quad (1.28)$$

$$e^{ika+iqw}A + e^{ika-iqw}B - e^{-\beta b}C - e^{\beta b}D = 0 \quad (1.29)$$

$$iqe^{ika+iqw}A - iqe^{ika-iqw}B - \beta e^{-\beta b}C + \beta e^{\beta b}D = 0 \quad (1.30)$$

Si buscamos soluciones no triviales a este sistema tenemos que resolver:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ iq & -iq & -\beta & \beta \\ e^{ika+iqw} & e^{ika-iqw} & -e^{-\beta b} & -e^{\beta b} \\ iqe^{ika+iqw} & -iqe^{ika-iqw} & -\beta e^{-\beta b} & \beta e^{\beta b} \end{pmatrix} = 0 \quad .$$

Podemos evaluar este determinante haciendo una eliminación de renglón para obtener un determinante de una matriz menor 3×3 , haciendo esto llegamos a:

$$\left(\frac{\beta^2 - q^2}{2q\beta} \right) \sinh \beta b \sin qw + \cosh \beta b \cos qw = \cos ka \quad . \quad (1.31)$$

Simplificaremos el problema considerando $b \rightarrow 0$ y $V_0 \rightarrow \infty$ con $bV_0 = cte.$, la precedente ecuación se escribe como

$$P \frac{\sin qa}{qa} + \cos qa = \cos ka \quad ; \quad P = \frac{mV_0 b a}{\hbar^2} \quad . \quad (1.32)$$

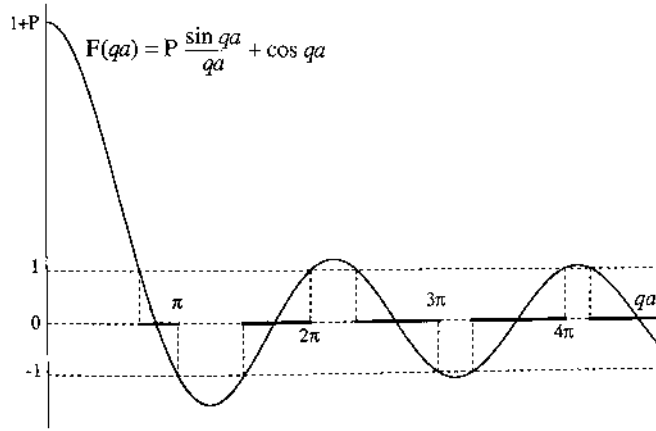


Figura 1.3: Solución gráfica de (1.32). Donde P es proporcional al área de la barrera $V_0 b$. Hemos escogido $P = 3\pi/2$, por razones de conveniencia, ver [13] [Créditos: Solid state physics. G.Grosso, G. Pastori].

Podemos observar en la figura 1.3 que las regiones donde $|F(qa)| = |\cos ka| \leq 1$ corresponden a valores de q tales que $E = \hbar^2 q^2 / 2m$, es decir, los posibles valores para la energía se distribuyen en bandas.

Como casos particulares de esta solución vemos que el espectro de energías para $P = 0$ corresponde a $q = k \implies E = \hbar^2 k^2 / 2m$ que podemos identificar como la energía de la partícula libre como se espera cuando no tenemos perturbaciones.

Para $P \longrightarrow \infty$ las bandas de energía en la figura 1.3 se vuelven cada vez más estrechas, de tal forma que las líneas de energías permitidas se localizan en múltiplos de π , entonces, para que se cumpla la condición (1.32) para este caso se debe tener $q(E)a = n\pi \implies \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$, lo que corresponde a los niveles de energía de una partícula atrapada en una barrera de longitud a .

Capítulo 2

Sistemas desordenados

En el capítulo anterior vimos como en un sistema ordenado encontrar el conjunto de funciones en una red cristalina conduce a ondas de Bloch, es decir, ondas planas moduladas con la periodicidad de la red y el espectro de energía agrupado en bandas. En contraste, los sistemas desordenados no poseen esta simetría de invarianza respecto a traslaciones, sino que suelen presentar anomalías en su constitución como impurezas ó dislocaciones[11]¹, lo que hace que el tratamiento sea distinto.

Este tipo de materiales serán el principal objeto de estudio en el presente trabajo. Principalmente el interés surge del hecho que ningún material real puede ser idealizado como un cristal perfecto, ya que siempre hay anomalías que deben tomarse en cuenta, tales como impurezas, dislocaciones, etc.

Las propiedades de un sistema desordenado pueden ser divididas en dos grupos: Uno es el análisis de los autovalores y el segundo es el estudio de los autoestados. El estudio de los autoestados es de vital importancia para estudiar los fenómenos de transporte. Como se verá después, podemos usar los autoestados para determinar las propiedades de localización.

En el presente trabajo vamos a considerar solo sistemas unidimensionales (1-D). Estos representan un papel relevante por distintas razones:

- Es posible obtener resultados analíticos con más detalle para sistemas 1-D, lo que no siempre ocurre en sistemas de dimensión más alta.
- Aunque puedan parecer abstractos y sin aplicación aparente estos sistemas son usados en aplicaciones tales como estudio de super-redes,

¹Por ejemplo algún metal en el que todos los átomos son del mismo tipo pero no se pueden hallar en los puntos de una red de Bravais.

guías de onda, etc.

- Las técnicas usadas en el estudio de los sistemas 1-D suelen ser generalizadas para problemas en dimensiones superiores.

2.1. Ejemplos de sistemas desordenados

A continuación, para dar una idea más clara sobre modelos desordenados se presentan algunos de ellos de uso común en la literatura [6].

Modelo 1: *Cadena armónica con desorden isotópico.*

Este modelo está representado por la ecuación dinámica

$$m_n \frac{d^2 u_n}{dt^2} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} \quad , \quad (2.1)$$

donde u_n y m_n representan los desplazamientos de la posición de equilibrio y la masa del n -ésimo átomo respectivamente y se ha tomado la constante elástica igual a uno.

Aquí, el carácter desordenado del modelo lo dan las masas, las cuales son variables aleatorias con una cierta distribución. Toman un número finito de valores para cada átomo, i.e $\{m < m(q) < M < \infty : q = 1, 2, \dots, r-1\}$ con probabilidad $\{0 < P(q) < 1; q = 1, 2, \dots, r-1\}$, donde r es el número de átomos, m y M son el valor mínimo y máximo de masa respectivamente que puede tener $m(q)$. Físicamente se puede decir que el valor de $m(q)$ está acotado por el isótopo mas ligero y el más pesado si hablamos de un elemento en concreto.

Podemos imponer condiciones de frontera tales que la cadena quede fija a los extremos, esto es:

$$u_0 = u_{N+1} = 0 \quad .$$

Por último si pensamos en que las soluciones admiten comportamiento de ondas monocromáticas se tiene $u_n \sim \exp\{-i\omega t\}$ con frecuencia ω , por lo que la ecuación de movimiento estacionaria es:

$$-m_n \omega^2 u_n = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} \quad (2.2)$$

Modelo 2: *Modelo de enlace fuerte electrónico (TBM: Tight-binding model)*

En este modelo consideramos el movimiento de un electrón en una red discreta, la ecuación de Schrödinger en unidades naturales² se escribe como

$$i\frac{d\psi_n}{dt} = \varepsilon_n\psi_n + \psi_{n+1} + \psi_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (2.3)$$

donde ψ_n y ε_n representan las amplitudes de la función de onda y las energías por sitio respectivamente. Para este caso las variables aleatorias son ε_n con una cierta distribución de probabilidad. Nuevamente imponemos condiciones de frontera

$$\psi_0 = \psi_{N+1} = 0$$

y en lugar de considerar la ecuación dependiente del tiempo consideramos la ecuación estacionaria

$$E\psi_n = \varepsilon_n\psi_n + \psi_{n+1} + \psi_{n-1} \quad , \quad (2.4)$$

donde E es la energía.

Modelo 4: *Modelo de Kronig-Penny desordenado*

Este modelo es una variante de la ecuación (1.11), en la que se introduce el desorden por medio de variables aleatorias $\{b_n, v_n\}$. La ecuación de Schrödinger (1.11) toma la forma

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (V_0 + v_n)\delta(x - an - b_n)\psi(x) = E\psi(x) \quad , \quad (2.5)$$

tomando como referencia la figura (1.2) podemos pensar que el modelo con desorden consta de una sucesión de potenciales deltiformes que han sido desplazados de los sitios de la red y cuya intensidad fluctúa.

² $\hbar = m = 1$

2.2. Localización de Anderson

Actualmente se conoce que los sistemas desordenados (como los mostrados antes) presentan un fenómeno conocido como **localización de Anderson**[1, 11, 6], en honor a su descubridor, Philip Anderson. Dicho fenómeno puede ser explicado a través del análisis de los autoestados de un sistema, y está relacionado con las propiedades de transporte, en nuestro caso, vamos a considerar un electrón atrapado en un material unidimensional desordenado, entonces si Ψ es la función de onda del electrón, decimos que se encuentra localizado siempre que $|\Psi|^2$ decae exponencialmente a ambos extremos del sistema. El decaimiento se da sobre una escala l_∞ a la que nos referimos como longitud de localización.

A continuación daremos algunas formas más precisas de caracterizar la localización, puede consultar más en [6].

Comportamiento asintótico de la función de onda:

El comportamiento asintótico de una función de onda localizada está descrito por su decaimiento exponencial a través de la identidad

$$\psi(r) = f(r)e^{-r/\lambda} \quad , \quad (2.6)$$

Donde $f(r)$ es una función tal que $|f(r)| < \infty$ cuando $|r| \gg 1$. Definimos la *longitud de localización*: $l_\infty = \lambda^{-1}$. Entonces decimos que un estado es localizado si $|\psi(r)|^2$ tiende a cero exponencialmente cuando $r \rightarrow \infty$.

Transmisión a través de potenciales aleatorios: Si definimos la función de Green de la ecuación de Schrödinger $(\hat{H} - E\mathbb{I})G(E) = \mathbb{I}$, donde $\mathbb{I}$ es el operador identidad, entonces definimos la amplitud de transición de un electrón de un sitio r a r' como:

$$t(r, r'; E) = \langle | \langle r | G(E) | r' \rangle |^2 \rangle \quad . \quad (2.7)$$

A t también se le suele llamar probabilidad de transmisión y $\langle \rangle$ representa un promedio sobre las realizaciones del desorden. Cuando t decae exponencialmente para grandes distancias entre r y r' significa que el transporte de magnitudes como energía térmica, carga eléctrica, etc. tiende a hacerse exponencialmente pequeño. Con esto podemos definir λ como

$$-\frac{2}{\lambda} = \lim_{|r-r'| \rightarrow \infty} \frac{\log[t(r, r'; E)]}{|r - r'|} \quad . \quad (2.8)$$

λ se conoce como el exponente de Lyapunov[25].

Cálculo de la razón de participación inversa: Es especialmente útil cuando se trabaja con sistemas finitos aunque de cadenas grandes de átomos. Está definido como la suma sobre los sitios de los cuadrados de probabilidades, o sea

$$\mathcal{P}^{-1} = \sum_r |\psi(r)|^4, \quad (2.9)$$

a $\mathcal{P}^{-1}$ se le llama relación de participación inversa ó número de participación inversa. Es una medida de la porción del espacio donde la amplitud de la función de onda es significativamente distinta de cero, o dicho de otro modo cuando la función de onda está localizada, $\mathcal{P}$ es proporcional al volumen en el cual el estado posee una amplitud significativamente distinta de cero[6].

2.3. Modelo de enlace fuerte

En esta sección analizaremos el modelo (2.4), el cual fue propuesto por Anderson[1] como uno de los primeros sistemas para estudiar la localización en materiales desordenados 1-D.

Analicemos un sistema de talla *finita* compuesto por N átomos y sean ε_n las energías de sitio correspondientes a cada átomo con $n \in [0, N + 1]$. Podemos escribir la ecuación (2.4) para diferentes valores de n recordando que $\psi_0 = \psi_{N+1} = 0$

$$\begin{aligned} (n = 1), \quad \psi_2 + \varepsilon_1 \psi_1 &= E \psi_1 \\ (n = 2), \quad \psi_3 + \psi_1 + \varepsilon_2 \psi_2 &= E \psi_2 \\ &\vdots \\ (n = N), \quad \psi_{N-1} + \varepsilon_N \psi_N &= E \psi_N \end{aligned}$$

lo que en notación matricial se expresa como

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & \varepsilon_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon_3 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 & \varepsilon_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

En otras palabras, tenemos que resolver un problema de diagonalización para encontrar las autofunciones y los autovalores; por supuesto, para un sistema de talla finita de unos cientos de sitios ya se vuelve un problema complicado de tratar analíticamente, por lo que podemos proceder usando un método numérico para resolver el problema (2.10).

Procederemos en dos partes; primero la solución sin desorden, o sea $\varepsilon_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, luego para desorden débil con y sin correlaciones.

2.3.1. Ausencia de desorden

Para el caso en que $\varepsilon_n = 0$ para toda $n = 1, 2, \dots, N$ se tiene que la matriz tridiagonal en (2.10) pierde sus elementos en la diagonal, pasando a ser todos cero, pero como ya se habló antes en este trabajo, en ausencia de algún tipo de desorden las soluciones son en esencia ondas de Bloch moduladas con el paso de la red y de la ecuación de Schrödinger resultante

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = E\psi_n \quad (2.11)$$

podemos proponer $\psi_n = A_0 e^{ikn}$, al sustituir en la ecuación (2.11) nos queda que

$$\begin{aligned} e^{ik} + e^{-ik} &= E \\ \implies E &= 2 \cos k \end{aligned}$$

donde k se cuantiza de manera adecuada según las condiciones de frontera, que para el caso que consideramos aquí dan

$$\begin{aligned} \psi_0 = \psi_{N+1} &\implies 1 = e^{ik(N+1)} \implies k(n) = \frac{\pi n}{N+1} \\ \therefore E_n &= 2 \cos \left(\frac{\pi n}{N+1} \right) \end{aligned}$$

con esto podemos encontrar el conjunto de eigenvalores y autofunciones lo cual es consistente con el teorema de Bloch.³

³Hemos supuesto para este problema que el paso de la red es igual a 1.

2.3.2. Desorden sin correlaciones espaciales

Para esta sección vamos a introducir variables aleatorias ε_n en la ecuación de Schrödinger

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} + \varepsilon_n \psi_n = E \psi_n \quad . \quad (2.12)$$

Para la resolución del problema en general hay que dar las propiedades estadísticas del mismo, en este caso y de aquí en adelante supondremos que las variables aleatorias tienen una distribución uniforme $P(\varepsilon) = 1/W$ si $\varepsilon \in [-W/2, W/2]$ y $P(\varepsilon) = 0$ si $\varepsilon \notin [-W/2, W/2]$.

Esto implica que

$$\langle \varepsilon \rangle = \int_{-W/2}^{W/2} \varepsilon P(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{W} \int_{-W/2}^{W/2} \varepsilon d\varepsilon = 0 \quad (2.13)$$

y

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \frac{1}{W} \int_{-W/2}^{W/2} \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{W^2}{12} = \sigma^2 \quad . \quad (2.14)$$

En ausencia de correlaciones entre las variables aleatorias ε_n decimos que tenemos ruido "blanco".

Para este sistema vamos a calcular la razón de participación inversa para determinar las propiedades de localización. En la práctica partimos del problema (2.10) y calculamos numéricamente las autofunciones, con lo cual podemos calcular la razón de participación inversa

$$\mathcal{P}^{-1} = \sum_n |\psi_n|^4 \quad . \quad (2.15)$$

Los resultados obtenidos para $\mathcal{P}$ se muestran en la figura 2.1, para un sistema con $N = 3000$ sitios y desorden con intensidad $\sigma^2 = 0.01$.

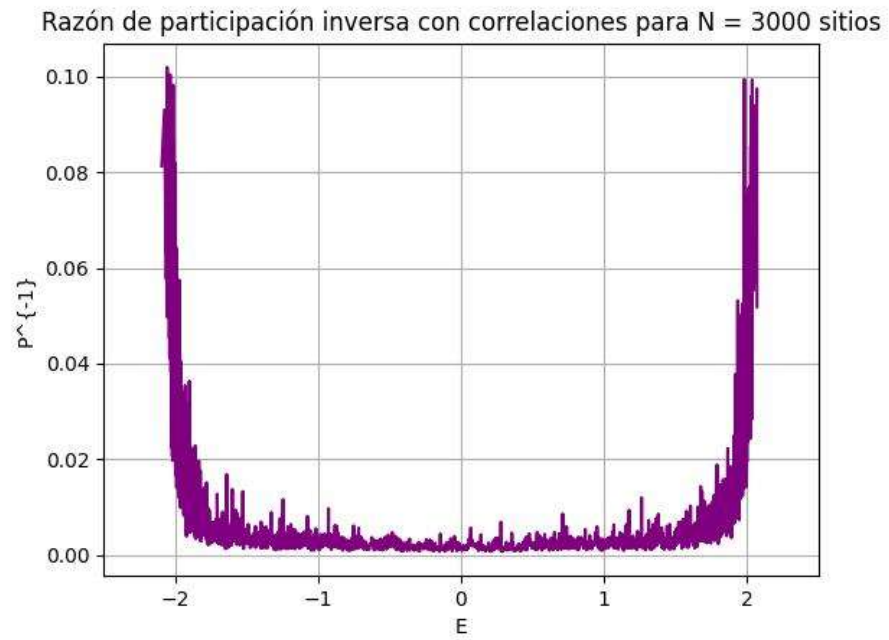


Figura 2.1: Razón de participación inversa vs la energía. $N = 3000$ sitios.

Por otro lado el caso $N \rightarrow \infty$ corresponde a un modelo de Anderson de talla infinita. Podemos determinar la longitud de localización a través del exponente de Lyapunov. Consideraremos la ecuación

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} + \varepsilon_n \psi_n = E \psi_n \quad ,$$

luego, multiplicamos ambos lados por $1/\psi_n$ y, si definimos $\rho_n = \frac{\psi_n}{\psi_{n+1}}$, podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\rho_{n+1} = E - \varepsilon_n - \frac{1}{\rho_n} \quad , \quad (2.16)$$

con esto el exponente de Lyapunov λ puede ser escrito como:

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \log \left| \frac{\psi_k}{\psi_{k-1}} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \log |\rho_k| \quad . \quad (2.17)$$

Dado que λ está escrito en términos de ψ_n , se trata de una magnitud determinista. Los resultados se muestran en la figura 2.2.

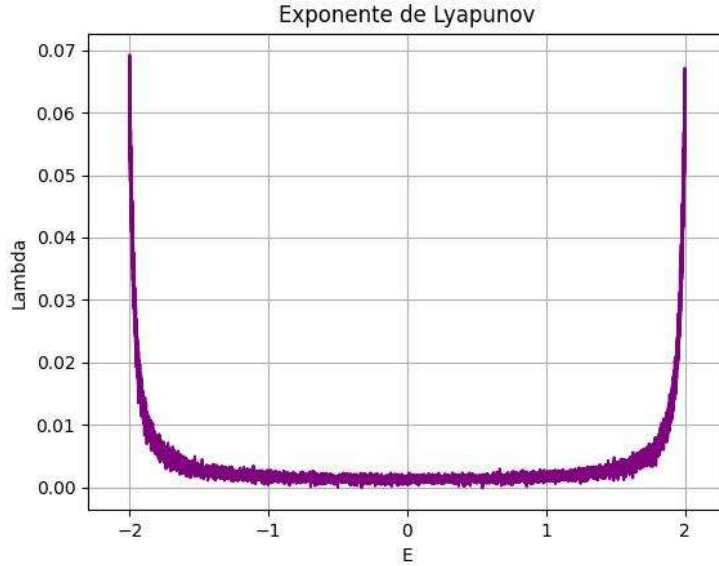


Figura 2.2: Cálculo de λ vs la energía, para el sistema de talla infinita con $\sigma^2 = 0.01$.

2.3.3. Desorden con correlaciones espaciales

En esta sección retomamos el problema de Anderson (2.12) para un sistema de talla infinita. Vamos a considerar distintas propiedades estadísticas de las variables aleatorias ε_n , en particular consideraremos que están correlacionadas. Esto lo hacemos definiendo una función $\chi(k)$ de la forma:

$$\langle \varepsilon_n \varepsilon_{n-k} \rangle = \sigma_\varepsilon^2 \chi(k) \quad , \quad (2.18)$$

donde σ_ε^2 es la varianza, la cual supondremos pequeña en este caso y $\chi(k)$ es a lo que se le conoce como la función de correlación binaria, la cual está relacionada con una función $W(\mu)$ como

$$W(\mu) = 1 + 2 \sum_{k=1}^N \chi(k) \cos 2k\mu \quad . \quad (2.19)$$

$W(\mu)$ se llama densidad espectral, la cual es una función par en μ y supondremos que es conocida, ver [3]. Esta relación se puede invertir para hallar $\chi(k)$ en función de la densidad espectral, es decir

$$\chi(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi W(\mu) \cos(2k\mu) d\mu \quad . \quad (2.20)$$

Nos proponemos a calcular la razón de participación inversa y el exponente de Lyapunov para el caso con correlaciones espaciales. Para ambos casos podemos sustituir en (2.10) los valores de las variables correlacionadas ε_n con $n = 1, 2, \dots, N$ para encontrar numéricamente los autovalores y los autovectores. Vamos a usar que

$$W(\mu) = \begin{cases} \frac{\pi}{2(\mu_2 - \mu_1)}, & \mu \in [\mu_1, \mu_2] \\ 0 & , \quad \mu \notin [\mu_1, \mu_2] \end{cases}$$

donde μ_1 y μ_2 son parámetros que producen *bordes de movilidad*, los cuales son, regiones de la energía que separan estados extendidos y estado localizados. La figura 2.3 muestra el exponente de Lyapunov con bordes de movilidad ubicados en $E = 2 \cos \mu_1 = 1.3$ y $E = 2 \cos \mu_2 = 0.7$. En este caso se obtuvieron los resultados para una sola realización del desorden.

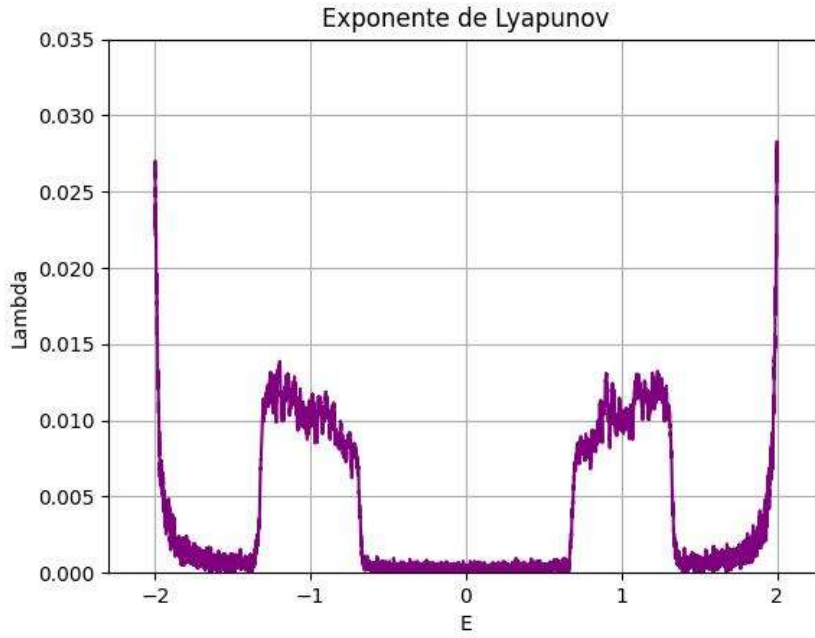


Figura 2.3: Exponente de Lyapunov VS Energía para $\sigma^2 = 10^{-2}$

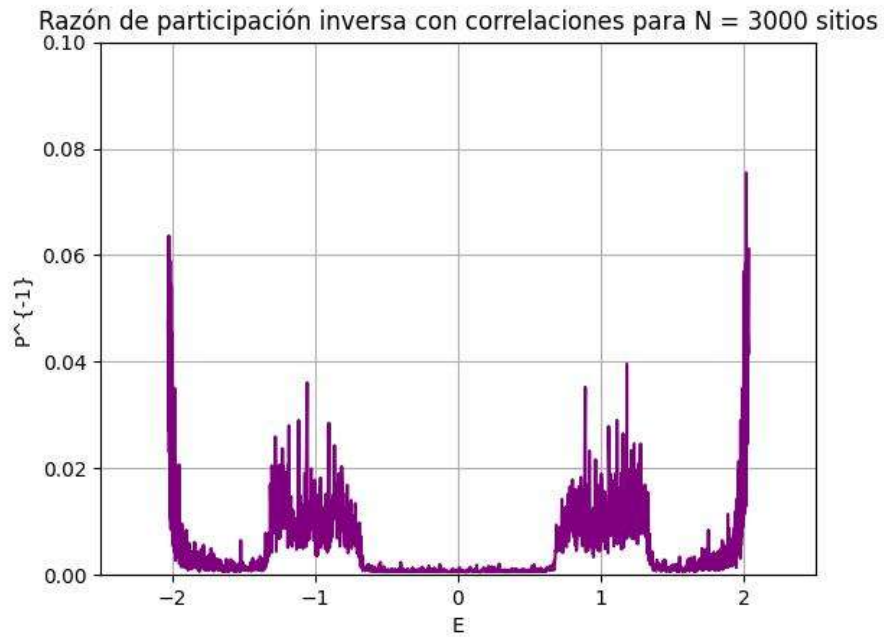


Figura 2.4: Razón de participación inversa VS Energía para una barrera de $N = 3000$ sitios y $\sigma^2 = 10^{-2}$

Si analizamos el modelo de Anderson (2.12) para un sistema de talla finita con las mismas condiciones de frontera $\psi_0 = \psi_{N+1} = 0$, podemos observar como la presencia de desorden con correlaciones espaciales produce de igual forma bordes de movilidad en donde tenemos estados extendidos y localizados en el cálculo de la razón de participación inversa como muestra la figura 2.4 para un sistema de $N = 3000$ sitios y una varianza del desorden $\sigma^2 = 10^{-2}$. Los bordes de movilidad se mantienen en los valores $E = 2 \cos \mu_1 = 1.3$ y $E = 2 \cos \mu_2 = 0.7$.

La razón de participación inversa nos da una medida de la porción del espacio en donde la función de onda es distinta de cero para sistemas de talla finita. Por otro lado, la figura 2.4 muestra el exponente de Lyapunov para un sistema de talla infinita el cual es distinto de cero en un intervalo acotado de E , y dado que $l_\infty = \lambda^{-1}$ representa la escala del sistema sobre la cual la función de onda decae exponencialmente según (2.6) para este caso $l_\infty \sim 300$.

Como comentario adicional sobre las gráficas (2.3) y (2.4), vemos que la coincidencia entre ambas no es del todo buena, esto se debe a que λ es un valor que se calcula en el límite $N \rightarrow \infty$ y $\sigma^2 < 1$, mientras que $\mathcal{P}^{-1}$ es una cantidad que se calcula cuando el sistema es de talla finita, en el caso de la figura 2.4 se usaron 3000 sitios.

Capítulo 3

Sistemas no hermitianos

3.1. Definición del modelo

Entramos ahora en la parte medular de este trabajo, empezando por definir el sistema en cuestión que analizamos en esta tesis.

Consideraremos una barrera desordenada 1-D compuesta de N átomos, la cual está puesta entre dos conductores perfectos semi-infinitos. En el interior de la barrera las energías de sitio son variables aleatorias complejas, cuya parte real corresponde al potencial aleatorio, mientras que la parte imaginaria está relacionada con procesos de amplificación o absorción que sufre una onda que se propaga a través de la barrera.

Similar al estudio del TBM, este sistema está definido a través de la ecuación de Schrödinger estacionaria:

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} + [\varepsilon_n + i(\gamma + \gamma_n)]\psi_n = E\psi_n \quad , \quad (3.1)$$

para $n = 1, 2, \dots, N$. Mientras que para $n < 1$ y $n > N$ estamos en los conductores perfectos donde $\varepsilon_n = \gamma_n = \gamma = 0$, de esta manera recuperamos la ecuación para una partícula libre. El término no hermitiano $i\gamma$ es un parámetro que describe absorción para $\gamma > 0$ y amplificación para $\gamma < 0$.

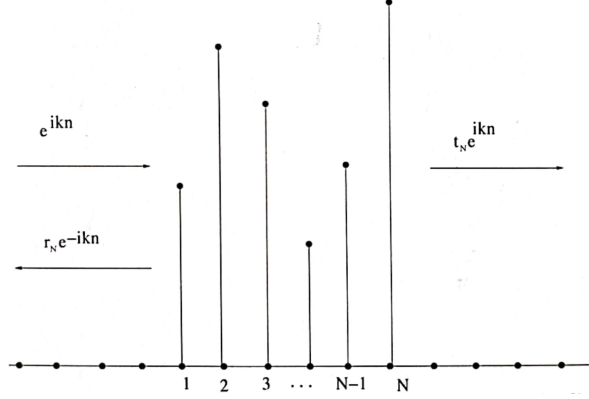


Figura 3.1: Barrera unidimensional activa

Estamos interesados en hallar propiedades de transmisión de ondas a través de una barrera aleatoria activa como la que se representa en la figura 3.1.

Vamos a considerar que el desorden es débil, es decir

$$N\sigma_\varepsilon^2 \ll 1 \quad (3.2)$$

$$N\sigma_\gamma^2 \ll 1 \quad , \quad (3.3)$$

y que las variables aleatorias ε_n y γ_n están auto e inter correlacionadas, es decir:

$$\langle \varepsilon_n \varepsilon_{n+k} \rangle = \langle \varepsilon_n^2 \rangle \chi_1(k) = \sigma_\varepsilon^2 \chi_1(k) \quad (3.4)$$

$$\langle \gamma_n \gamma_{n+k} \rangle = \langle \gamma_n^2 \rangle \chi_2(k) = \sigma_\gamma^2 \chi_2(k) \quad (3.5)$$

$$\langle \varepsilon_n \gamma_{n+k} \rangle = \sigma_{\varepsilon\gamma}^2 \chi_3(k) \quad , \quad (3.6)$$

los símbolos $\langle \rangle$ representan un promedio sobre las realizaciones del desorden, χ_1 , χ_2 y χ_3 son funciones de correlación binarias que supondremos conocidas. Las funciones de correlación se relacionan con las respectivas densidades espectrales por medio de la identidad:

$$W_i(\mu) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_i(k) \cos 2\mu k \quad , \quad (3.7)$$

para $i = 1, 2, 3$.

3.2. Método de las matrices de transferencia

Vamos a comenzar con el análisis del problema reescribiendo 3.1 en términos de las matrices de transferencia, esto lo logramos expresando la ecuación de Schrödinger (3.1) en la forma recursiva

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = \hat{P}_n \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix}; \quad \hat{P}_n = \begin{pmatrix} E - \varepsilon_n - i[\gamma + \gamma_n] & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

a las matrices $\hat{P}_n$ les llamamos matrices de transferencia en la representación de los sitios.

Cuando estamos en el caso de los conductores perfectos semi-infinitos recuperamos el caso para una partícula libre.

Si deseamos estudiar las propiedades de transmisión en la barrera es conveniente pasar a la representación de las ondas planas.

En esta representación se introducen las amplitudes A_n y B_n por medio de la identidad

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik(n+1)} & e^{-ik(n+1)} \\ e^{ikn} & e^{-ikn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = \hat{Q}_n \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

esta última relación es análoga a (3.8). De esta manera quedan definidas las matrices $\hat{Q}_n$, las cuales se pueden escribir en términos de $\hat{P}_n$ como

$$\hat{Q}_n = \hat{U}^{-1} \hat{P}_n \hat{U} \quad , \quad \hat{U} = \begin{pmatrix} e^{ik} & e^{-ik} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Escribiremos la matriz de transferencia $\hat{Q}_n$ de modo que quede expresada como la suma de un término asociado a la parte determinista de la ec. de Schrödinger (3.1) y otro término asociado al desorden, es decir

$$\hat{Q}_n = \hat{Q}^0 + \hat{Q}_n^1, \quad (3.12)$$

$$\hat{Q}^0 = \begin{pmatrix} (1-v)e^{ik} & -ve^{-ik} \\ ve^{ik} & (1+v)e^{-ik} \end{pmatrix}; \quad \hat{Q}_n^1 = iu_n \begin{pmatrix} e^{ik} & e^{-ik} \\ -e^{ik} & -e^{-ik} \end{pmatrix}$$

donde

$$v = \frac{\gamma}{2 \sin k} \quad , \quad u_n = \frac{\varepsilon_n + i\gamma_n}{2 \sin k}. \quad (3.13)$$

Definimos la matriz de transferencia total de la barrera de longitud N como el producto de las matrices $\hat{Q}_n$, es decir

$$\hat{Q} = \prod_{n=1}^N \hat{Q}_n = \prod_{n=1}^N (\hat{Q}^0 + \hat{Q}_n^1) \quad . \quad (3.14)$$

Consideramos una onda plana con número de onda k y módulo unitario, esta se propaga por el conductor perfecto é incide por la izquierda sobre la barrera como en la figura 3.1. Se produce una onda reflejada y una onda transmitida cuyas amplitudes son respectivamente la amplitud de reflexión y la de transmisión, las cuales se relacionan por medio de la matriz de transferencia $\hat{Q}$ por medio de la identidad

$$\begin{pmatrix} t_N e^{ikN} \\ 0 \end{pmatrix} = \prod_{n=1}^N \hat{Q}_n \begin{pmatrix} e^{ik} \\ r_n e^{-ik} \end{pmatrix} = \hat{Q} \begin{pmatrix} e^{ik} \\ r_n e^{-ik} \end{pmatrix} \quad . \quad (3.15)$$

La ec. (3.15) permite escribir el coeficiente de transmisión para cada realización del desorden en términos del elemento $(2, 2)$ de la matriz (3.14) de la siguiente manera

$$T_N = |t_N|^2 = \frac{1}{[\hat{Q}_{22}]^2} \quad . \quad (3.16)$$

3.3. Barrera activa sin desorden

Como caso particular vamos a calcular el coeficiente de transmisión para el caso sin desorden, es decir, $u_n = 0$. La ec. (3.14) se transforma en

$$\hat{Q} = \prod_{n=1}^N (\hat{Q}^0 + \hat{Q}_n^1) = \prod_{n=1}^N \hat{Q}^0 = (\hat{Q}^0)^N \quad . \quad (3.17)$$

Para obtener en forma explicita la matriz (3.17) el primer paso es diagonalizar $\hat{Q}^0$, y escribir $\hat{Q}^0 = \hat{U} \hat{D} \hat{U}^{-1}$ donde

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} e^{iq} & 0 \\ 0 & e^{-iq} \end{pmatrix} \quad , \quad (3.18)$$

(e^{iq}, e^{-iq}) son los autovalores de $\hat{Q}^0$ y q es un parámetro complejo definido por medio de la identidad

$$\cos q = \cos k - iv \sin k \quad . \quad (3.19)$$

La matriz $\hat{U}$ tiene la forma

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \frac{ve^{-ik}}{(1-v)e^{ik}-e^{iq}} & \frac{ve^{-ik}}{(1-v)e^{ik}-e^{-iq}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \quad (3.20)$$

La diagonalización de $\hat{Q}^0$ permite escribir (3.17) como:

$$\left(\hat{Q}^0\right)^N = \hat{U} \hat{D}^N \hat{U}^{-1} = \hat{U} \begin{pmatrix} e^{iNq} & 0 \\ 0 & e^{-iNq} \end{pmatrix} \hat{U}^{-1} , \quad (3.21)$$

así encontramos los elementos de la matriz de transferencia total en ausencia de desorden

$$(\hat{Q}^0)_{11}^N = \frac{1}{\sin q} \left\{ \left(1 - \frac{\gamma}{2 \sin k}\right) e^{ik} \sin(qN) - \sin(q(N-1)) \right\} \quad (3.22)$$

$$(\hat{Q}^0)_{12}^N = -\frac{\gamma e^{-ik} \sin(qN)}{2 \sin(k) \sin(q)} \quad (3.23)$$

$$(\hat{Q}^0)_{21}^N = \frac{\gamma e^{ik} \sin(qN)}{2 \sin(k) \sin(q)} \quad (3.24)$$

$$(\hat{Q}^0)_{22}^N = -\frac{1}{\sin q} \left\{ \left(1 - \frac{\gamma}{2 \sin k}\right) e^{ik} \sin(qN) - \sin(q(N+1)) \right\}. \quad (3.25)$$

Para calcular el coeficiente de transmisión numéricamente lo hacemos en el centro de la banda de energía¹. Procedemos evaluando la matriz $(\hat{Q}^0)^N$ para cada valor de N en $E = 0$. Después tomamos el elemento (22) de acuerdo a la ecuación (3.16).

Para el cálculo analítico hacemos uso del elemento (3.25), que al ser manipulado dentro de la expresión (3.16) se vuelve

$$T_N^{(0)} = \frac{\sin^2(q)}{[\sin(q) \cos(Nq) - i \sin(Nq)]^2} \quad (3.26)$$

Las gráficas (3.2) y (3.3) muestran el $\log T_N^0$ vs N para el caso amplificado($\gamma < 0$) y absorbente($\gamma > 0$) en el centro de la banda $E = 0$ respectivamente.

¹Este solo es un caso particular para evaluar $\ln T$, ya que el mismo comportamiento se obtiene para cualquier valor de $E \neq \pm 2$.

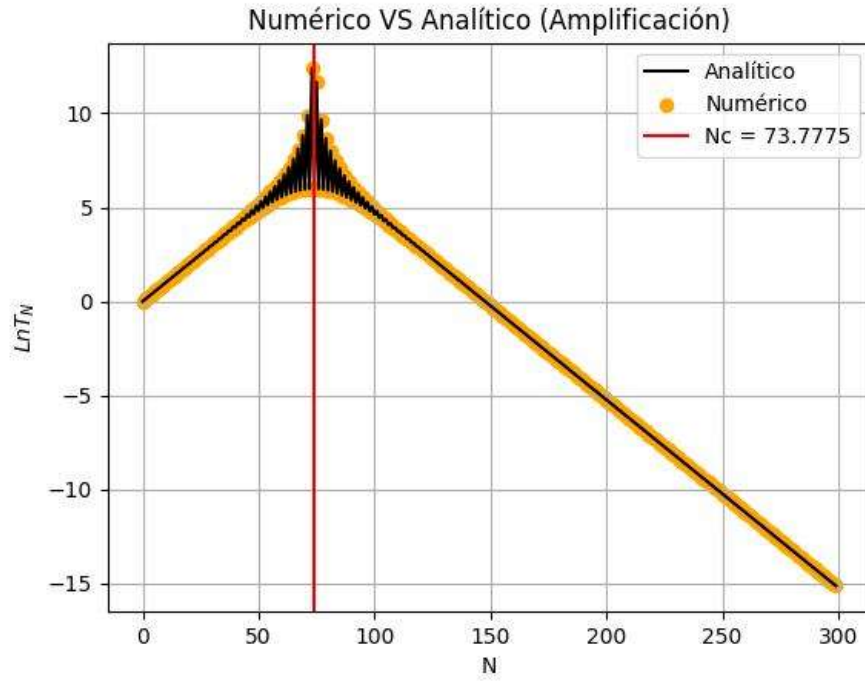


Figura 3.2: Coeficiente de transmisión Analítico/Numérico(sin desorden) Vs N . Con $\gamma = -0.1$ y $E = 0$

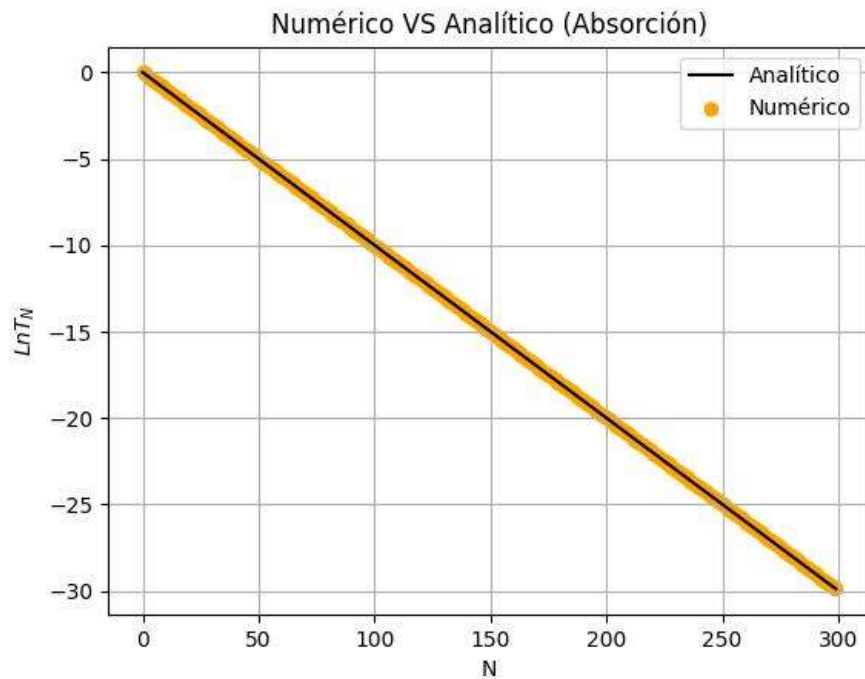


Figura 3.3: Coeficiente de transmisión analítico/numérico(sin desorden) Vs N . Con $\gamma = 0.1$ y $E = 0$

3.3.1. Coeficiente de transmisión para $\gamma \ll 1$

Para (3.26) notamos que está escrita en términos de q y N , vamos a calcular una expresión aproximada cuando $|\gamma| \ll 1$ y obtener como resultado una expresión que dependa explícitamente de k , N y γ .

Primero notamos que podemos hacer la aproximación

$$\begin{aligned} \sin q &= \sqrt{1 - \left(\cos k - \frac{i\gamma}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \cos^2 k + i\gamma \cos k + \frac{\gamma^2}{4}} \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 k} \sqrt{1 + \frac{i\gamma \cos k + \frac{\gamma^2}{4}}{1 - \cos^2 k}} \simeq \sin k \left(1 + \frac{i\gamma \cos k + \frac{\gamma^2}{4}}{2 \sin^2 k}\right) \\ &\simeq \sin k + i \frac{\gamma \cos k}{2 \sin k} \quad (3.27) \end{aligned}$$

De esta forma podemos expresar e^{iq} como

$$e^{iq} = \cos q + i \sin q \simeq \cos k - \frac{i\gamma}{2} + i \left(\sin k + i \frac{\gamma \cos k}{2 \sin k} \right) = e^{ik} - \frac{\gamma}{2} \left(i + \frac{\cos k}{\sin k} \right)$$

$$\implies e^{iq} \simeq e^{ik} \left(1 - \frac{\gamma}{2 \sin k} \right) \quad (3.28)$$

$$\implies e^{-iq} \simeq e^{-ik} \left(1 + \frac{\gamma}{2 \sin k} \right) \quad , \quad (3.29)$$

usando (3.27), (3.28) y (3.29) podemos calcular $\cos(Nq)$ y $\sin(Nq)$ de la forma

$$\sin Nq = \frac{e^{iNq} - e^{-iNq}}{2i} = \sin Nk + iN\gamma \frac{\cos Nk}{2 \sin k} + \mathcal{O}(\gamma^2) \quad (3.30)$$

$$\cos Nq = \frac{e^{iNq} + e^{-iNq}}{2} = \cos Nk - iN\gamma \frac{\sin Nk}{2 \sin k} + \mathcal{O}(\gamma^2) \quad . \quad (3.31)$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.26) llegamos a que

$$T_N^{(0)} = \frac{1}{e^{\frac{N\gamma}{\sin k}} + \frac{\gamma^2}{8 \sin^4 k} \cos 2kN + \frac{\gamma^4}{256 \sin^8 k} e^{\frac{-N\gamma}{\sin k}}} \quad . \quad (3.32)$$

Este resultado puede simplificarse en los siguientes casos, los cuales corresponden a los límites de barrera corta y larga con respecto a la longitud de absorción/amplificación(l_a), es decir: $N \ll 1/|\gamma| \sim l_a$ para barrera corta y $N \gg 1/|\gamma| \sim l_a$ para barrera larga.

Límite de barrera corta: $N/l_a \ll 1$

$$\Rightarrow T_N^0 \simeq 1 - \frac{N\gamma}{\sin k} + \dots \quad (\text{B.C})$$

Límite de barrera larga: $N/l_a \gg 1$

$$T_N^0 \simeq e^{-\frac{\gamma N}{\sin k}} \quad , \quad \gamma > 0$$

$$T_N^0 \simeq \left(\frac{4 \sin^2 k}{\gamma} \right)^4 e^{-\frac{|\gamma| N}{\sin k}} \quad , \quad \gamma < 0 \quad . \quad (\text{B.L})$$

Las gráficas 3.2 y 3.3 muestran $\ln T_N^0$ vs N para los casos de $\gamma < 0$ y $\gamma > 0$ respectivamente. Como indica la ecuación para barrera corta (B.C) se tendría

$$\ln T_N^0 = \ln \left(1 - \frac{N\gamma}{\sin k} \right) \simeq -\frac{N\gamma}{2 \sin k} + \mathcal{O}((N\gamma)^2) \quad , \quad (3.33)$$

de aquí se explica que $\ln T_N^0$ crezca linealmente con N cuando $\gamma < 0$, mostrando un efecto de amplificación, para luego decaer exponencialmente según (B.L), ver figura 3.2.

De igual forma la figura 3.3 muestra que para el caso de $\gamma > 0$ tenemos una absorción, lo cual muestra que $\ln T_N^0$ decae tanto para el caso de barrera corta y larga, lo cual concuerda con lo predicho en las ecuaciones (B.C) y (B.L).

Como última observación tenemos un máximo para (B.C), mostrado en la figura 3.2, este valor de N es tal que: $d \ln T_N^0 / dN \stackrel{!}{=} 0$, entonces, si consideramos $\gamma < 0$ tenemos

$$\frac{d \ln T_N^0}{dN} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \left(-\frac{|\gamma|}{\sin k} e^{-\frac{N|\gamma|}{\sin k}} + \frac{k\gamma^2 \sin 2kN}{4 \sin^4 k} + \frac{|\gamma|^5}{256 \sin^9 k} e^{\frac{N|\gamma|}{\sin k}} \right) \stackrel{!}{=} 0,$$

al estar en el centro de la banda $k = \pi/2 \Rightarrow \sin k = 1$, entonces obtenemos

$$-|\gamma| e^{-N_c |\gamma|} + \frac{|\gamma|^5}{256} e^{N_c |\gamma|} = 0 \Rightarrow N_c = -\frac{2}{|\gamma|} \ln \left(\frac{|\gamma|}{4} \right) \quad , \quad (3.34)$$

si sustituimos $\gamma = -0.1$ obtenemos que $N_c \approx 73.7775$ como se muestra en la figura 3.2, lo que concuerda con lo obtenido en [7].

3.4. Barrera activa desordenada

Hasta ahora no hemos introducido desorden en el análisis de las propiedades de transmisión en nuestro problema, para hacerlo hay que tomar en cuenta el caso en que $u_n \neq 0$ en (3.14). Si consideramos el caso de desorden débil definido por las condiciones (3.2) y (3.3). podemos escribir $\hat{Q}$ como

$$\begin{aligned} \hat{Q} = & \left(\hat{Q}^0\right)^N + \sum_{m=1}^N \left(\hat{Q}^0\right)^{m-1} \hat{Q}_m^1 \left(\hat{Q}^0\right)^{N-m} \\ & + \sum_{l_1=1}^{N-1} \sum_{l_2=l_1+1}^N \left(\hat{Q}^0\right)^{N-l_2} \hat{Q}_{l_2}^1 \left(\hat{Q}^0\right)^{l_2-l_1-1} \hat{Q}_{l_1}^1 \left(\hat{Q}^0\right)^{l_1-1} + \mathcal{O}(u_n^3) \quad . \end{aligned} \quad (3.35)$$

El desarrollo en (3.35) puede escribirse

$$\hat{Q} = \hat{Q}^{(0)} + \hat{Q}^{(1)} + \hat{Q}^{(2)}$$

con

$$\hat{Q}^{(1)} = \sum_{m=1}^N \left(\hat{Q}^0\right)^{m-1} \hat{Q}_m^1 \left(\hat{Q}^0\right)^{N-m} \quad , \quad (3.36)$$

$$\hat{Q}^{(2)} = \sum_{l_1=1}^{N-1} \sum_{l_2=l_1+1}^N \left(\hat{Q}^0\right)^{N-l_2} \hat{Q}_{l_2}^1 \left(\hat{Q}^0\right)^{l_2-l_1-1} \hat{Q}_{l_1}^1 \left(\hat{Q}^0\right)^{l_1-1} \quad . \quad (3.37)$$

Sustituyendo (3.21) tenemos

$$\hat{Q}^{(1)} = \sum_{m=1}^N \left(\hat{U} \hat{D}^{(m-1)} \hat{U}^{-1}\right) \hat{Q}_m^1 \left(\hat{U} \hat{D}^{(N-m)} \hat{U}^{-1}\right) \quad ,$$

$$\hat{Q}^{(2)} = \sum_{l_2 > l_1} \left(\hat{U} \hat{D}^{(N-l_2)} \hat{U}^{-1}\right) \hat{Q}_{l_2}^1 \left(\hat{U} \hat{D}^{(l_2-l_1-1)} \hat{U}^{-1}\right) \hat{Q}_{l_1}^1 \left(\hat{U} \hat{D}^{(l_1-1)} \hat{U}^{-1}\right) .$$

Los resultados obtenidos para los términos a primer orden son:

$$(\hat{Q}^{(1)})_{11} = \frac{i}{\sin^2(q)} \sum_{m=1}^N (e^{ik} \sin[q(N-m+1)] - \sin[q(N-m)]) \quad (3.38)$$

$$\times (\sin[qm] - e^{-ik} \sin[q(m-1)]) u_m,$$

$$(\hat{Q}^{(1)})_{12} = \frac{i}{\sin^2(q)} \sum_{m=1}^N (\sin[q(N-m+1)] - e^{-ik} \sin[q(N-m)]) \quad (3.39)$$

$$\times (e^{-ik} \sin[qm] - \sin[q(m-1)]) u_m,$$

$$(\hat{Q}^{(1)})_{21} = \frac{-i}{\sin^2(q)} \sum_{m=1}^N (\sin[q(N-m+1)] - e^{ik} \sin[q(N-m)]) \quad (3.40)$$

$$\times (e^{ik} \sin[qm] - \sin[q(m-1)]) u_m,$$

$$(\hat{Q}^{(1)})_{22} = \frac{-i}{\sin^2(q)} \sum_{m=1}^N (\sin[q(N-m+1)] - e^{ik} \sin[q(N-m)]) \quad (3.41)$$

$$\times (e^{-ik} \sin[qm] - \sin[q(m-1)]) u_m \quad ,$$

mientras que los resultados para los términos a orden dos son:

$$(\hat{Q}^{(2)})_{11} = \frac{-2i \sin k}{\sin^3(q)} \sum_{l_2 > l_1} (\sin[q(N - l_2 + 1)] - e^{-ik} \sin[q(N - l_2)]) \quad (3.42)$$

$$\times (e^{ik} \sin[ql_1] - \sin[q(l_1 - 1)]) \sin[q(l_2 - l_1)] u_{l_1} u_{l_2},$$

$$(\hat{Q}^{(2)})_{12} = \frac{-2i \sin k}{\sin^3(q)} \sum_{l_2 > l_1} (\sin[q(N - l_2 + 1)] - e^{-ik} \sin[q(N - l_2)]) \quad (3.43)$$

$$\times (e^{-ik} \sin[ql_1] - \sin[q(l_1 - 1)]) \sin[q(l_2 - l_1)] u_{l_1} u_{l_2},$$

$$(\hat{Q}^{(2)})_{21} = \frac{-2i \sin k}{\sin^3(q)} \sum_{l_2 > l_1} (e^{ik} \sin[q(N - l_2)] - \sin[q(N - l_2 + 1)]) \quad (3.44)$$

$$\times (e^{ik} \sin[ql_1] - \sin[q(l_1 - 1)]) \sin[q(l_2 - l_1)] u_{l_1} u_{l_2},$$

$$(\hat{Q}^{(2)})_{22} = \frac{-2i \sin k}{\sin^3(q)} \sum_{l_2 > l_1} (e^{ik} \sin[q(N - l_2)] - \sin[q(N - l_2 + 1)]) \quad (3.45)$$

$$\times (e^{-ik} \sin[ql_1] - \sin[q(l_1 - 1)]) \sin[q(l_2 - l_1)] u_{l_1} u_{l_2},$$

donde $l_1 \in [1, N]$ y $l_2 \in [l_1 + 1, N]$.

Con estos resultados podemos empezar a calcular el coeficiente de transmisión con desorden. Tomemos la expresión (3.16), vemos que la podemos escribir como

$$T_N = |t_N|^2 = t_N t_N^* \quad ,$$

$$\implies \ln T_N = \ln t_N + \ln t_N^* = 2 \operatorname{Re}\{\ln t_N\} \quad . \quad (3.46)$$

Por definición: $t_N^{-1} = (\hat{Q})_{22}$, donde el subíndice (22) indica que estamos trabajando con el elemento (2, 2) de la matriz de transferencia.

Si consideramos que el desorden es débil escribimos $\ln t_N$ haciendo un desarrollo perturbativo tenemos

$$\begin{aligned}
\ln t_N &= -\ln \hat{Q}_{22} = -\ln \left(\hat{Q}_{22}^{(0)} + \hat{Q}_{22}^{(1)} + \hat{Q}_{22}^{(2)} \right) = -\ln \hat{Q}_{22}^{(0)} - \ln \left(1 + \frac{\hat{Q}_{22}^{(1)} + \hat{Q}_{22}^{(2)}}{\hat{Q}_{22}^{(0)}} \right) \\
&\simeq -\ln \hat{Q}_{22}^{(0)} - \frac{(\hat{Q}_{22}^{(1)} + \hat{Q}_{22}^{(2)})}{\hat{Q}_{22}^{(0)}} + \frac{1}{2} \frac{[\hat{Q}_{22}^{(1)}]^2}{[\hat{Q}_{22}^{(0)}]^2} \\
&= -\ln \hat{Q}_{22}^{(0)} + \frac{1}{2[\hat{Q}_{22}^{(0)}]^2} \left([\hat{Q}_{22}^{(1)} - \hat{Q}_{22}^{(0)}]^2 - [\hat{Q}_{22}^{(2)} + \hat{Q}_{22}^{(0)}]^2 \right) + \mathcal{O}(u^3) \\
\Rightarrow \ln T_N &\simeq -2 \operatorname{Re} \left\{ \ln \hat{Q}_{22}^{(0)} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{[\hat{Q}_{22}^{(0)}]^2} \left([\hat{Q}_{22}^{(1)} - \hat{Q}_{22}^{(0)}]^2 - [\hat{Q}_{22}^{(2)} + \hat{Q}_{22}^{(0)}]^2 \right) \right\},
\end{aligned} \tag{3.47}$$

donde de la tercera a la cuarta línea se usó (3.46). Recordamos de la hipótesis de desorden débil (3.2) y (3.3) las cuales se puede reescribir como

$$N\sigma_\epsilon^2 \sim \frac{N}{l_\infty} \ll 1 \tag{3.48}$$

$$N\sigma_\gamma^2 \sim \frac{N}{l'_a} \ll 1 \quad , \tag{3.49}$$

es decir, consideramos que la barrera es corta con respecto a la longitud de localización asociadas a las energías de sitio aleatorias así como la correspondiente longitud asociada a las fluctuaciones del coeficiente de amplificación/absorción. Consideramos además que la barrera es corta con respecto a la longitud de absorción/amplificación: $N|\gamma| \sim N/l_a \ll 1$.

De esta forma el elemento de matriz (3.25) puede ser escrito usando (3.30) a primer orden en $N\gamma$ como

$$\begin{aligned}
-\left(\hat{Q}_{22}^0\right)^N (\sin q) &= \left(1 - \frac{\gamma}{2\sin k}\right) e^{ik} \sin(qN) - \sin[q(N+1)] \simeq \\
\frac{iN\gamma}{2\sin k} &\left(e^{ik} \cos Nk - \cos k(N+1)\right) + e^{ik} \sin Nk - \sin k(N+1) - i\gamma \frac{\cos k(N+1)}{2\sin k} \\
&\quad - \gamma \frac{e^{ik} \sin Nk}{2\sin k},
\end{aligned}$$

simplificando los términos nos queda

$$\left(\hat{Q}_{22}^0\right)^N \simeq \frac{e^{-ikN}}{\sin q} \left(\frac{N\gamma}{2} + \sin k + \frac{i\gamma \cos k}{2 \sin k} \right) = \frac{e^{-ikN}}{\sin q} \left(\frac{N\gamma}{2} + \sin q \right) \quad .$$

Por último vamos a hacer el desarrollo a primer orden en γ del término $(\sin q)^{-1}$, con lo que nos queda

$$\left(\hat{Q}_{22}^0\right)^N \simeq e^{-ikN} \left(1 + \frac{N\gamma}{2 \sin k} \right) \quad . \quad (3.50)$$

De igual forma vamos a desarrollar los elementos de matriz (3.41) y (3.45), lo que resulta en

$$\hat{Q}_{22}^{(1)} \simeq -i \sum_{m=1}^N u_m e^{-ikN} \left\{ 1 + \frac{\gamma N}{2 \sin k} - \frac{i\gamma \cos k}{2 \sin^2 k} + \frac{i\gamma e^{ikN}}{2 \sin^2 k} \cos k(N+1-2m) \right\}, \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{22}^{(2)} \simeq 2i \sin k \sum_{l_1, l_2} \left\{ \frac{i\gamma}{2 \sin^3 k} \left[\left(\cos k(N-l_1-l_2+1) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - e^{-ik(N+l_1-l_2)} (2 \cos k + iN \sin k) \right) \sin k(l_2-l_1) + (l_2-l_1) \sin(k) e^{-ik(N-2l_2+2l_1)} \right] \right. \\ \left. + \frac{e^{-ik(N+l_1-l_2)}}{\sin k} \sin k(l_2-l_1) \right\} u_{l_1} u_{l_2} \quad . \quad (3.52) \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.50), (3.51) y (3.52) en (3.47) obtenemos $\ln T_N$ para barrera corta

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \ln T_N = \frac{N\gamma}{2 \sin k} + \frac{1}{8 \sin^2 k} \sum_{l_1=1}^N \sum_{l_2=l_1+1}^N (\varepsilon_{l_1} \varepsilon_{l_2} - \gamma_{l_1} \gamma_{l_2}) \cos[2k(l_2-l_1)] \\ - \frac{1}{2 \sin^2 k} \sum_{l_1=1}^N \sum_{l_2=l_1+1}^N (\varepsilon_{l_1} \gamma_{l_2}) \sin[2k(l_2-l_1)] \\ + \mathcal{O}(3), \quad (3.53) \end{aligned}$$

donde $\mathcal{O}(3)$ representa los términos a tercer orden que despreciamos, los cuales son términos proporcionales a: $\gamma \varepsilon_n \gamma_m$, ε_n^3 , γ_n^3 , $\gamma \varepsilon_n^2$ y $\gamma \gamma_n^2$.

Estamos interesados en el valor medio de $\ln T_N$, que se obtiene con un promedio sobre las realizaciones del desorden para (3.53). Usando las propiedades estadísticas de las variables aleatorias (3.4) y (3.5) podemos usar la fórmula

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{l_1, l_2} \alpha_{l_1} \alpha_{l_2} G(l_2 - l_1) \right\rangle &= \sum_{l_1, l_2} \langle \alpha_{l_1} \alpha_{l_2} \rangle G(l_2 - l_1) \\ &= \sum_{l_1, l_2} \sigma_\alpha^2 \chi(l_2 - l_1) G(l_2 - l_1) = N \sigma_\alpha^2 \left(\chi(0) G(0) + 2 \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N}\right) G(n) \right), \end{aligned} \quad (3.54)$$

con $l_1 \in [1, N]$, $l_2 \in [l_1 + 1, N]$ y donde $\chi(n)$ y σ_α^2 son la función de correlación binaria y la varianza de α como variable aleatoria (correlacionada) respectivamente. G es una función que solo depende de la diferencia $(l_2 - l_1)$.

Si aplicamos (3.54) a la ecuación (3.53), usando (3.4), (3.5) y (3.6), obtenemos

$$\begin{aligned} \left\langle -\frac{1}{2N} \ln T_N \right\rangle &= \frac{\gamma}{2 \sin k} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{8 \sin^2 k} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^N \chi_1(n) \left(1 - \frac{n}{N}\right) \cos 2kn \right] \\ &\quad - \frac{\sigma_\gamma^2}{8 \sin^2 k} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^N \chi_2(n) \left(1 - \frac{n}{N}\right) \cos 2kn \right] \\ &\quad - \frac{\sigma_{\varepsilon\gamma}^2}{2 \sin^2 k} \left[\sum_{n=1}^N \chi_3(n) \left(1 - \frac{n}{N}\right) \sin 2kn \right] + \mathcal{O}(3), \end{aligned} \quad (3.55)$$

también se usó que: $\chi_1(0) = \chi_2(0) = 1$ y donde $\mathcal{O}(3)$ tiene el mismo significado que en (3.53).

3.5. Barrera corta sin correlaciones del desorden

Comenzaremos analizando los resultados para el caso sin correlaciones, es decir, $\chi_i(n) = \delta_{n0}$.

La fórmula para el coeficiente de transmisión (3.55) promedio es

$$\langle \ln T_N \rangle = -\frac{N\gamma}{\sin k} - \frac{(\sigma_\varepsilon^2 - \sigma_\gamma^2)N}{4 \sin^2 k} . \quad (3.56)$$

Se muestran algunos resultados para (3.56) tanto numérico² como analítico para un total de 500 realizaciones del desorden. Se usó una barrera de $N = 300$ sitios para todos los casos.

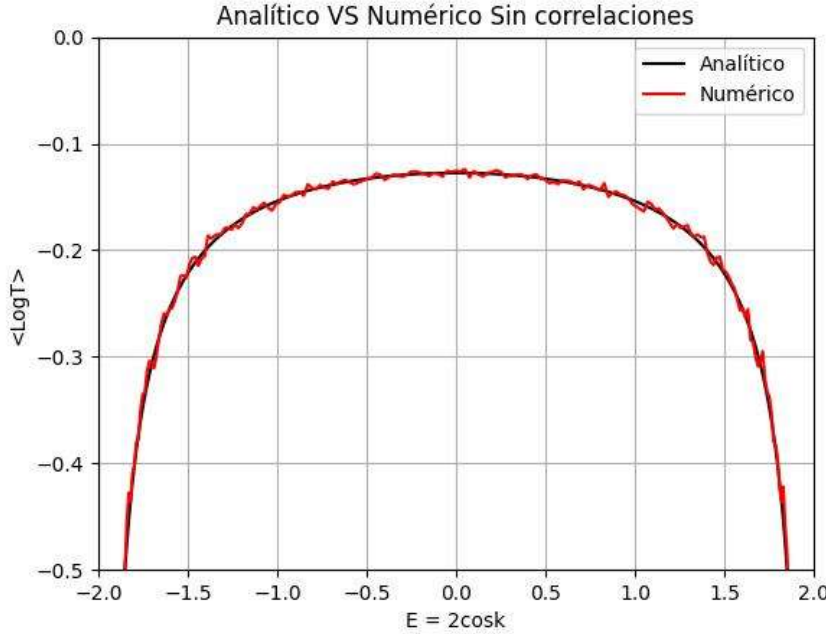


Figura 3.4: Coeficiente de transmisión Analítico/Numérico Vs E. Con $\sigma_\varepsilon^2 = 5 \times 10^{-4}$, $\sigma_\gamma^2 = 0$ y $\gamma = 3 \times 10^{-4}$

²Hay que recordar que para el cálculo numérico se toma el elemento (2, 2) de la matriz $\hat{Q}$.

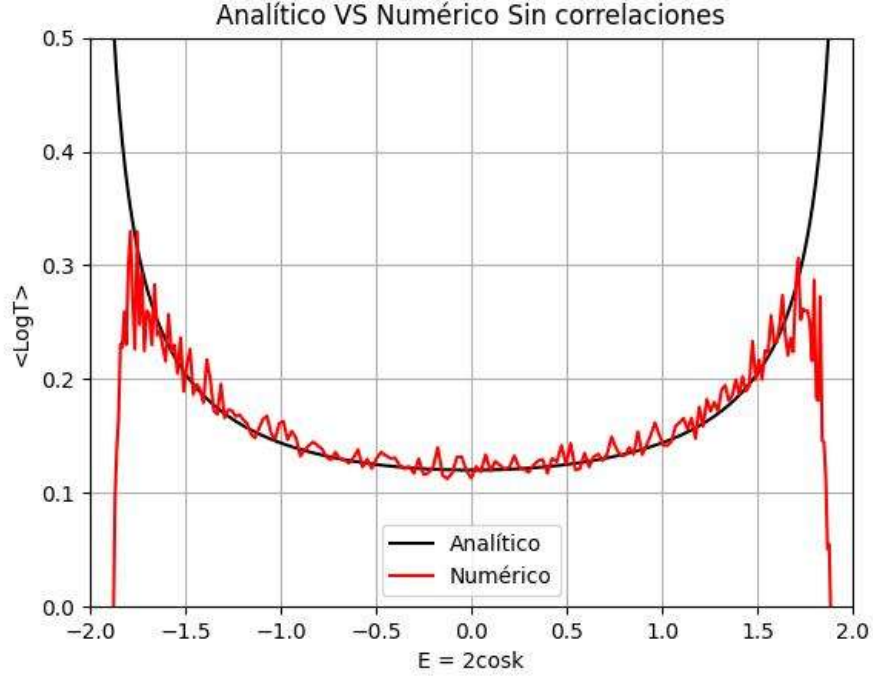


Figura 3.5: Coeficiente de transmisión Analítico/Numérico Vs E. Con $\sigma_\varepsilon^2 = 5 \times 10^{-4}$, $\sigma_\gamma^2 = 9 \times 10^{-4}$ y $\gamma = -3 \times 10^{-4}$

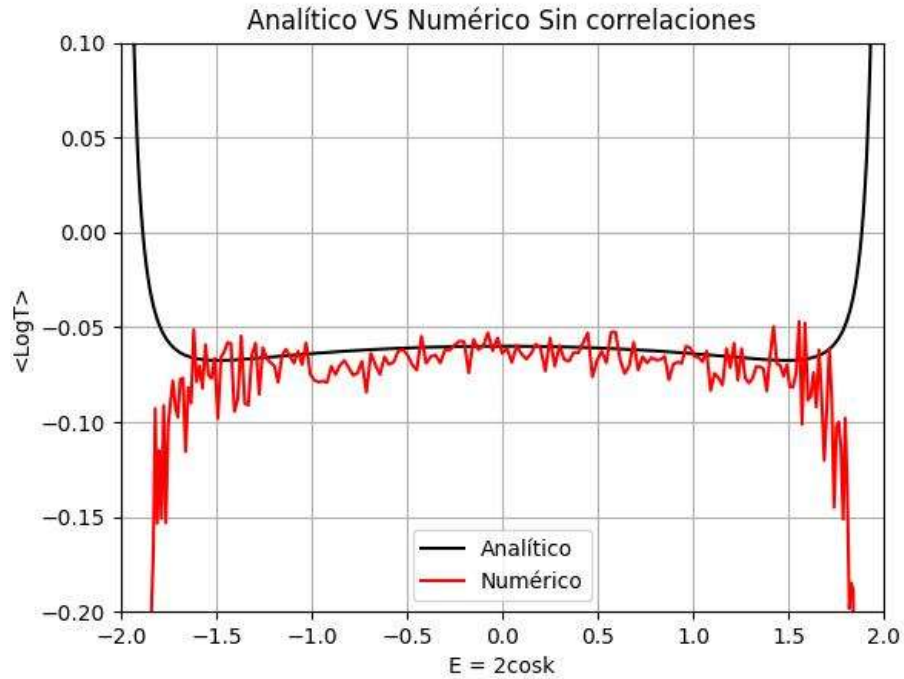


Figura 3.6: Coeficiente de transmisión Analítico/Numérico Vs E. Con $\sigma_\varepsilon^2 = 5 \times 10^{-4}$, $\sigma_\gamma^2 = 9 \times 10^{-4}$ y $\gamma = 3 \times 10^{-4}$

La gráfica (3.4) muestra el coeficiente de transmisión para el caso donde tenemos $\sigma_\gamma^2 = 0$ y $\gamma > 0$, esto último indica que estamos en el régimen absorbente y dadas las fluctuaciones de las energías de sitio ε_n el efecto global en un intervalo al rededor del centro de la banda resulta en una absorción de ondas.

Para la figura 3.5 dado que $(\sigma_\varepsilon^2 - \sigma_\gamma^2) < 0$ y $\gamma < 0$ el resultado es un efecto de amplificación, i.e $\langle \ln T_N \rangle > 0$.

En la gráfica 3.6 se muestra una absorción, y esto sucede pese a que el segundo término de (3.56) es positivo.

3.6. Barrera corta con desorden correlacionado

Continuamos considerando el caso en el que las variables ε_n y γ_n presentan autocorrelaciones pero no intercorrelaciones, lo que implica que $\langle \varepsilon_n \gamma_n \rangle = \sigma_{\varepsilon\gamma} = 0$.

La ecuación (3.55) con $\chi_1 = \chi_2 = \chi(n)$ se vuelve

$$\langle \ln T_N \rangle = -\frac{N\gamma}{\sin k} - \frac{(\sigma_\varepsilon^2 - \sigma_\gamma^2)}{4 \sin^2 k} \left[N + 2 \sum_{n=1}^N \chi(n)(N-n) \cos 2kn \right] . \quad (3.57)$$

Para este caso usamos la misma función de correlación binaria, $\chi_1 = \chi_2$.

A continuación se muestran los resultados de (3.55) para una barrera de $N = 300$ sitios y 500 realizaciones del desorden.

En estos resultados se usó la densidad espectral

$$W(\mu) = \begin{cases} \frac{\pi}{2(\mu_2 - \mu_1)}, & \mu \in [\mu_1, \mu_2] \\ 0, & \mu \notin [\mu_1, \mu_2] \end{cases}, \quad (3.58)$$

para ambos ε_n y γ_n como en la figura 3.7. Donde para todos los casos tenemos que $\mu_1 \sim 1.0471$, $\mu_2 \sim 1.5709$ con energías asociadas $E_1 = 1$ y $E_2 = 0$ respectivamente.

La función $\chi(n)$ está dada por

$$\chi(n) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi W(\mu) \cos(2n\mu) d\mu = \frac{[\sin(2n\mu_2) - \sin(2n\mu_1)]}{2n(\mu_2 - \mu_1)}, \quad (3.59)$$

esta función produce bordes de movilidad los cuales son valores de la energía que separan las regiones de estados extendidos de aquellas donde los estados son localizados.

Hay que recordar también que estamos considerando el caso de barrera corta, en el sentido que se satisfacen las condiciones (3.4) y (3.5), además de que $N|\gamma| \ll 1$. En la gráfica (3.8) observamos como al mantener $\sigma_\gamma \neq 0$

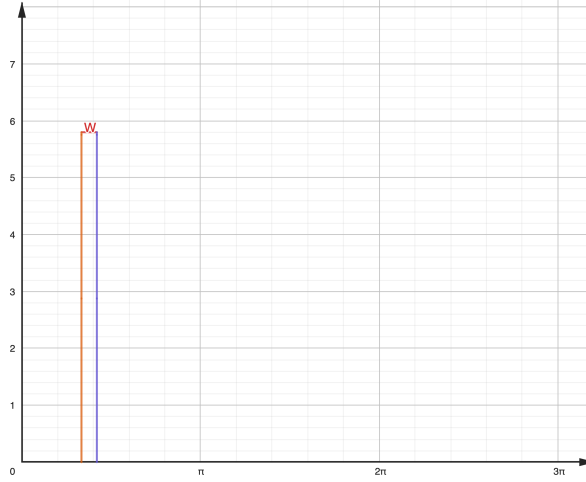


Figura 3.7: Densidad espectral descrita por la ecuación (3.58)

mientras que suprimimos los efectos de las fluctuaciones de las energías de sitio y el coeficiente de amplificación/absorción, el efecto global en los bordes de movilidad da como resultado una amplificación de ondas.

En la gráfica (3.9) observamos que si $\gamma = 0$ y $\sigma_\epsilon^2 > \sigma_\gamma^2$ el efecto resultante del coeficiente de transmisión es una absorción de ondas, lo que se traduce en un efecto de localización.

En la gráfica (3.10) podemos apreciar que tenemos un coeficiente de transmisión negativo en los bordes de movilidad, es decir, el efecto es una absorción. Sin embargo, esto sucede para cuando estamos en el régimen $\gamma < 0$, pero al ser $\sigma_\epsilon^2 > |\gamma|$ el segundo término de (3.57) resulta dominante, y esto es lo que explica el fenómeno de la absorción.

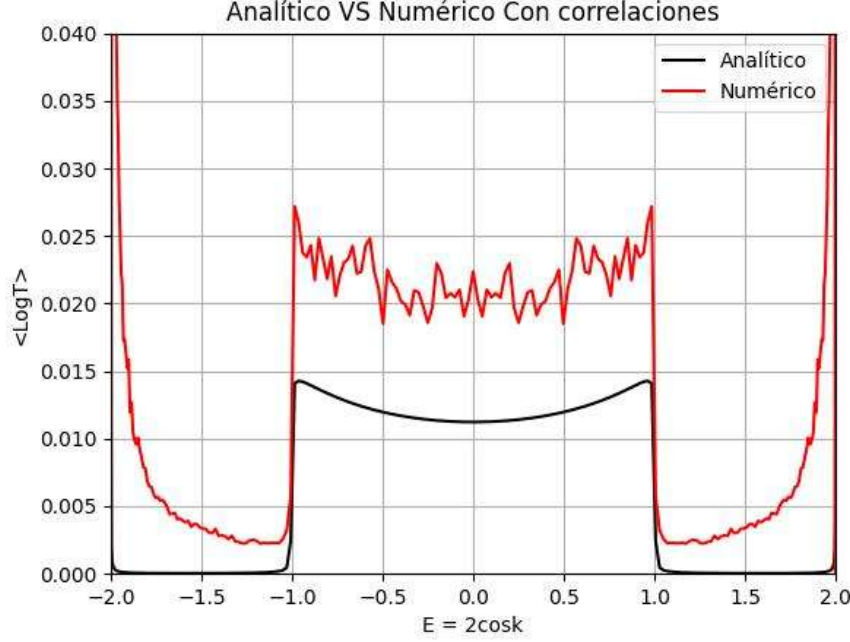


Figura 3.8: Coeficiente de transmisión Analítico/Numérico Vs E. Con $\gamma = 0$, $\sigma_\varepsilon^2 = 0$, $\sigma_\gamma^2 = 5 \times 10^{-5}$.

El mismo razonamiento se puede aplicar al fenómeno representado por la gráfica (3.11), solo que en este caso son las fluctuaciones de γ_n las que producen un efecto de amplificación total.

Por último, en la figura 3.12 muestra como los resultados numéricos y analíticos coinciden cuando $\sigma_\varepsilon = \sigma_\gamma$, lo que concuerda con la ecuación (3.57) para el caso de $\gamma > 0$, que en este caso produce una absorción.

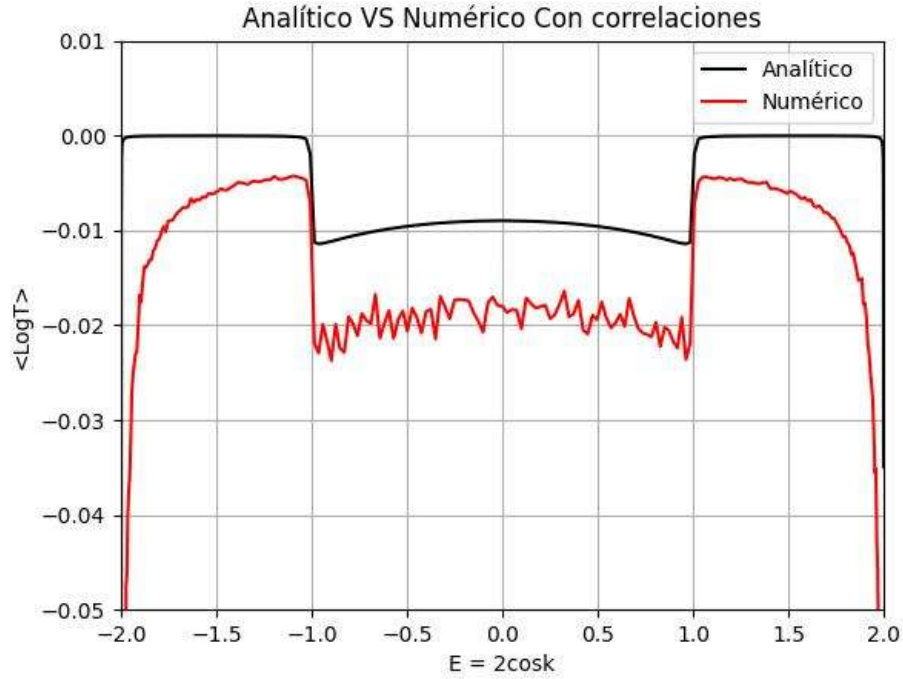


Figura 3.9: Coeficiente de transmisión Analítico/Numérico Vs E. Con $\sigma_\varepsilon^2 = 5 \times 10^{-5}$, $\sigma_\gamma^2 = 10^{-5}$ y $\gamma = 0$

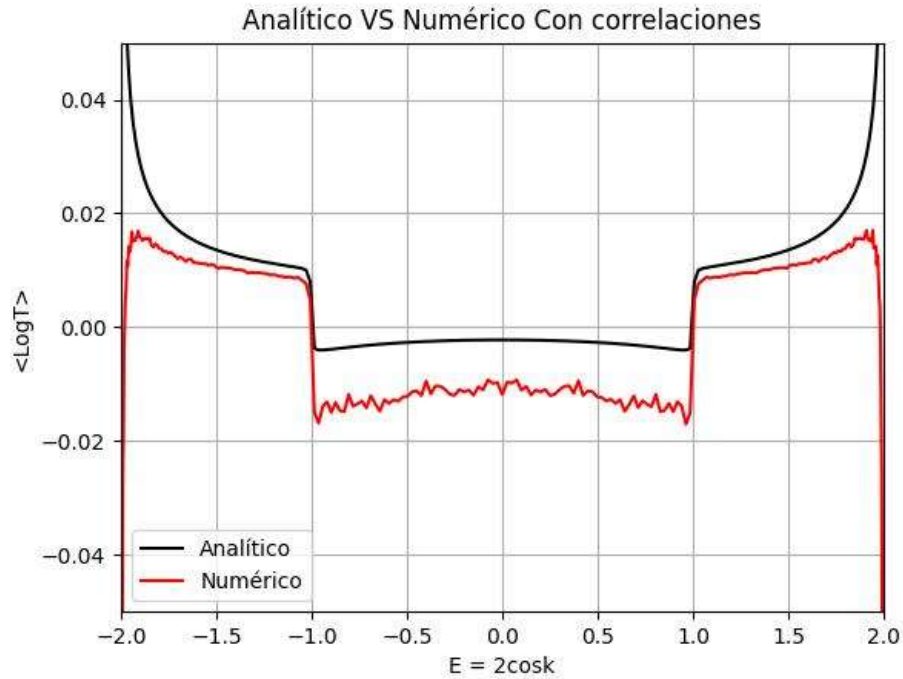


Figura 3.10: Coeficiente de transmisión Analítico/Numérico Vs E. Con $\sigma_\varepsilon^2 = 10^{-5}$, $\sigma_\gamma^2 = 0$ y $\gamma = -3 \times 10^{-5}$

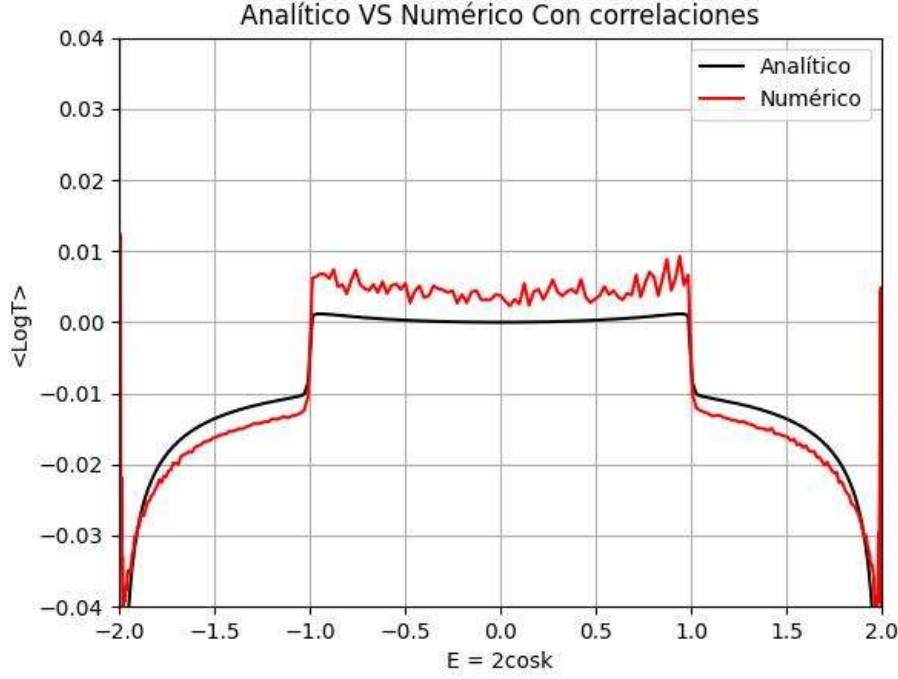


Figura 3.11: Coeficiente de transmisión Analítico/Numérico Vs E. Con $\sigma_\varepsilon^2 = 10^{-5}$, $\sigma_\gamma^2 = 5 \times 10^{-5}$ y $\gamma = 3 \times 10^{-5}$

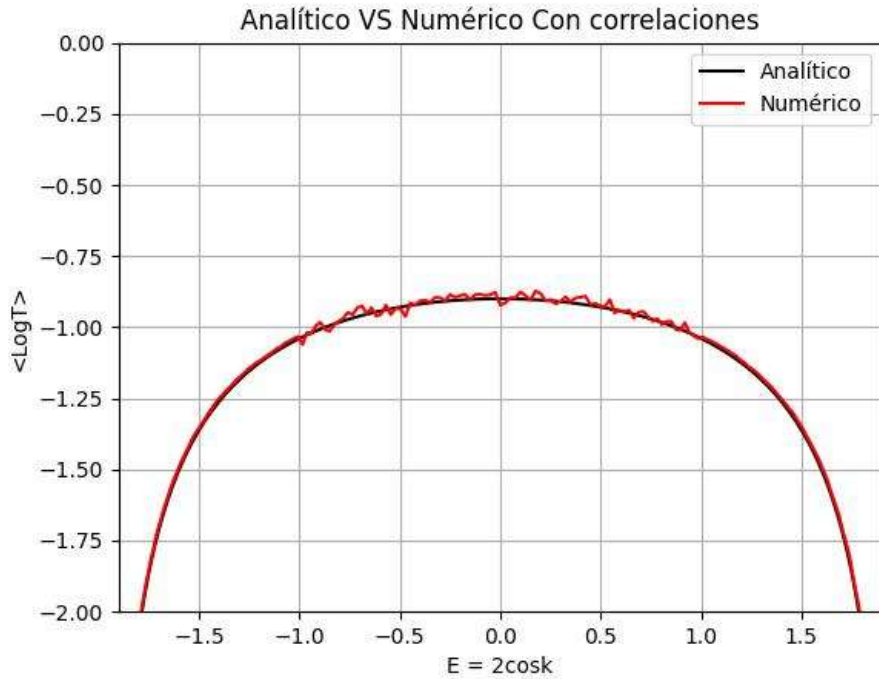


Figura 3.12: Coeficiente de transmisión Analítico/Numérico Vs E. Con $\sigma_\varepsilon^2 = 10^{-4}$, $\sigma_\gamma^2 = 5 \times 10^{-4}$ y $\gamma = 3 \times 10^{-4}$

3.7. Barrera corta con desordenes auto- e inter-correlacionada

Volvemos ahora a las ecuaciones que definen las propiedades estadísticas de las variables aleatorias que estamos usando, las cuales son

$$\langle \varepsilon_n \varepsilon_{n-k} \rangle = \sigma_\varepsilon^2 \chi_1(k) \quad (3.60)$$

$$\langle \gamma_n \gamma_{n-k} \rangle = \sigma_\gamma^2 \chi_2(k) \quad (3.61)$$

$$\langle \varepsilon_n \gamma_{n-k} \rangle = \sigma_{\varepsilon\gamma}^2 \chi_3(k) \quad , \quad (3.62)$$

donde las funciones χ_i están definidas a partir de una densidad espectral $W_i(\mu)$ conocida. Vemos que la ec. (3.62) define una inter correlación entre ε_n y γ_n , donde estas últimas están auto correlacionadas según (3.60) y (3.61).

En la fórmula (3.55) tenemos un término proporcional a $\langle \varepsilon_n \gamma_n \rangle = \sigma_{\varepsilon\gamma}^2$, el propósito de esta sección es analizar los efectos que producen estas inter correlaciones en los resultados para $\langle \ln T_N \rangle$.

Una expresión analítica para $\sigma_{\varepsilon\gamma}^2$ puede ser encontrada, ya que esta se puede escribir en términos de σ_ε^2 y σ_γ^2 .

Comencemos considerando dos conjuntos de variables aleatorias $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}$ con $n = 1, 2, \dots, N$ que no están correlacionadas, es decir

$$\langle x_n^i x_m^j \rangle = \delta_{nm} \delta_{ij} \quad . \quad (3.63)$$

Luego, vamos a definir

$$y_n^{(1)} = x_n^{(1)} \cos \eta + x_n^{(2)} \sin \eta \quad (3.64)$$

$$y_m^{(2)} = x_m^{(2)} \cos \eta + x_m^{(1)} \sin \eta \quad , \quad (3.65)$$

usando (3.63) podemos encontrar que

$$\langle y_n^{(1)} y_m^{(2)} \rangle = \delta_{nm} \sin 2\eta \quad . \quad (3.66)$$

Vamos a definir las auto correlaciones de ε_n y γ_n a través de una densidad espectral W_ε y W_γ de la siguiente forma

$$\varepsilon_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{n-k}^{(1)} y_k^{(1)} \quad (3.67)$$

$$\gamma_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{n-k}^{(2)} y_k^{(2)} \quad , \quad (3.68)$$

donde las constantes $C_n^{(1,2)}$ están definidas como

$$C_n^{(1)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 W_\varepsilon(\mu)} \cos(2n\mu) d\mu \quad (3.69)$$

$$C_n^{(2)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\sigma_\gamma^2 W_\gamma(\mu)} \cos(2n\mu) d\mu \quad . \quad (3.70)$$

Lo que sigue es calcular $\langle \varepsilon_n \gamma_n \rangle$ usando (3.67), (3.68), (3.69) y (3.70), tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_n \gamma_n \rangle &= \sum_{k,k'} C_{n-k}^{(1)} C_{n-k'}^{(2)} \langle y_k^{(1)} y_{k'}^{(2)} \rangle = \sin 2\eta \sum_{k,k'} \delta_{kk'} C_{n-k}^{(1)} C_{n-k'}^{(2)} \\ &= \sin 2\eta \sum_k \frac{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 \sigma_\gamma^2}}{\pi^2} \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \sqrt{W_\varepsilon(\mu_1) W_\gamma(\mu_2)} e^{2i(n-k)\mu_1} e^{2i(n-k)\mu_2} d\mu_1 d\mu_2 \\ &= \sin 2\eta \frac{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 \sigma_\gamma^2}}{\pi^2} \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \sqrt{W_\varepsilon(\mu_1) W_\gamma(\mu_2)} e^{2i(\mu_1+\mu_2)} \sum_k e^{-2i(\mu_1+\mu_2)k} d\mu_1 d\mu_2 \\ &= \sin 2\eta \frac{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 \sigma_\gamma^2}}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \sqrt{W_\varepsilon(\mu) W_\gamma(-\mu)} d\mu = \sin 2\eta \frac{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 \sigma_\gamma^2}}{\pi} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{\pi}{2(\mu_2 - \mu_1)} d\mu \\ &= \frac{\sin 2\eta}{2} \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 \sigma_\gamma^2} \quad , \quad (3.71) \end{aligned}$$

donde de la tercera a la cuarta línea se usó que

$$L\delta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2i\pi n}{L}x} \quad ,$$

donde en nuestro caso $L = \pi$ y que ambas densidades espectrales son de la forma (3.58), siendo estas funciones pares en el intervalo de $[-\pi, \pi]$.

Usando el resultado (3.71) en (3.55) podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle \ln T_N \rangle &= -\frac{N\gamma}{\sin k} - \frac{(\sigma_\varepsilon^2 - \sigma_\gamma^2)}{4 \sin^2 k} \left[N + 2 \sum_{n=1}^N \chi(n) (N - n) \cos 2kn \right] \\ &\quad + \frac{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 \sigma_\gamma^2} \sin 2\eta}{2 \sin^2 k} \left[\sum_{n=1}^N \chi(n) (N - n) \sin 2kn \right] + \mathcal{O}(3). \quad (3.72) \end{aligned}$$

Las siguientes pruebas se hicieron para 500 realizaciones del desorden en una barrera de $N = 300$ sitios.

Las siguientes gráficas muestran resultados para (3.55) donde se han escogido una densidad espectral igual a (3.58) con los mismos bordes de movilidad.

Las gráficas (3.13) y (3.14) muestran los resultados para el coeficiente de transmisión en el caso de inter correlaciones positivas y negativas respectivamente, es decir $\eta > 0$ y $\eta < 0$. En estas notamos que en los bordes de movilidad tenemos efectos mixtos de amplificación y absorción.

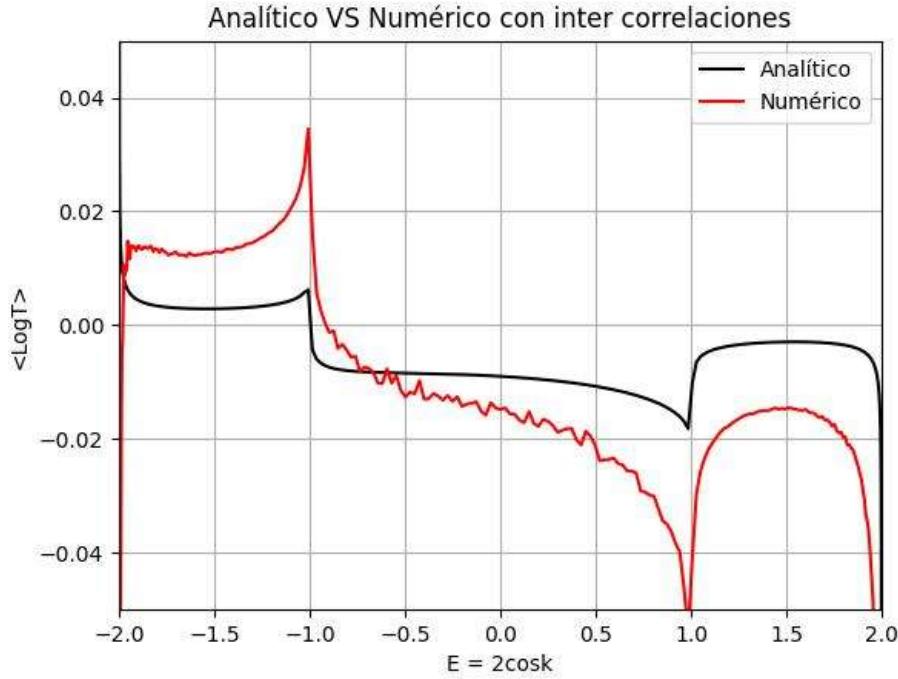


Figura 3.13: Coeficiente de transmisión Analítico/Numérico Vs E. Con $\sigma_\varepsilon^2 = 5 \times 10^{-5}$, $\sigma_\gamma^2 = 10^{-5}$, $\gamma = 0$ y $\eta = \pi/4$

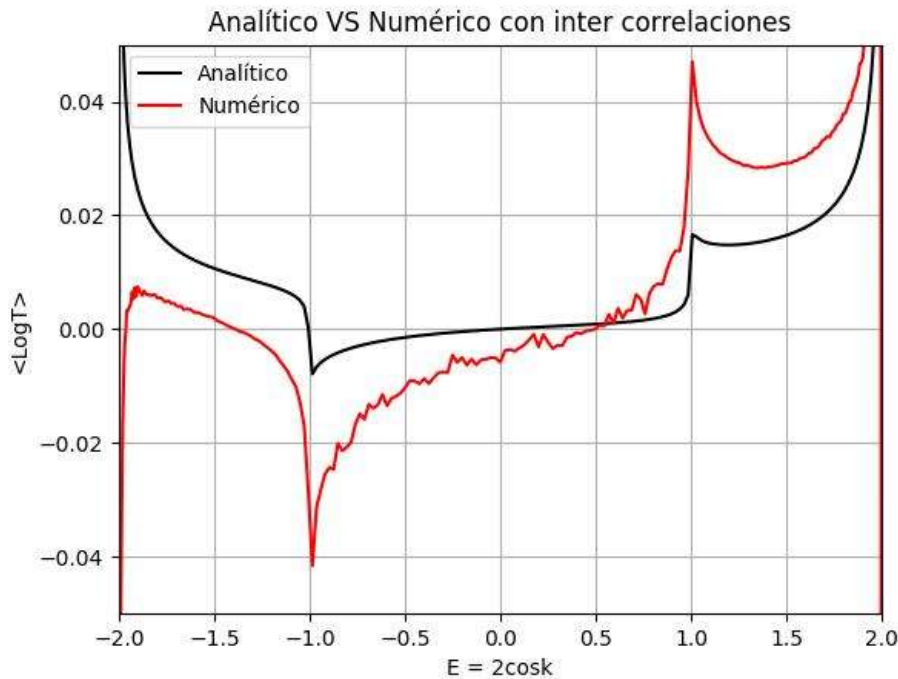


Figura 3.14: Coeficiente de transmisión Analítico/Numérico Vs E. Con $\sigma_\varepsilon^2 = 5 \times 10^{-5}$, $\sigma_\gamma^2 = 10^{-5}$, $\gamma = -3 \times 10^{-5}$ y $\eta = -\pi/4$

Conclusiones

En este trabajo se estudió el modelo descrito por la ecuación (3.1), el cual representa una barrera desordenada activa puesta entre dos conductores perfectos, como en la figura 3.1. En el modelo el desorden se manifiesta por las variables aleatorias ε_n y γ_n , las cuales vamos a asumir que están correlacionadas y que el desorden es débil.

Estamos interesados en las propiedades de transmisión de una barrera finita, específicamente en el cálculo del coeficiente de transmisión, el cual puede calcularse usando el formalismo de las matrices de transferencia, de aquí pudimos deducir que el coeficiente de transmisión tiene la forma dada por la relación (3.16).

El producto dado por la ecuación (3.14) representa la matriz de transferencia total en la representación de las amplitudes, con esto pudimos calcular numéricamente las soluciones para el coeficiente de transmisión: $T = 1/[\hat{Q}]_{22}$. Como primer resultado se revisó el caso de barrera activa sin desorden, el cual correspondía a hacer $\hat{Q}_n^1 = 0$ en (3.14)³, al hacer esto encontramos los elementos de matriz de $[\hat{Q}^0]^N$ los cuales son (3.22) - (3.25). Al comparar entre la formula analítica y los cálculos numéricos para el coeficiente de transmisión en función del número de sitios encontramos coincidencia como se puede apreciar en las figuras 3.2 y 3.3.

³Hay que notar que los términos $\hat{Q}^0$ y $\hat{Q}_n^1$ en la ecuación (3.14) eran tales que el primero no llevaba ninguna información respecto al desorden mientras que el otro si.

Y por último para este caso de barrera sin desorden se hallaron formulas analíticas para el coeficiente de transmisión cuando $N|\gamma| \ll 1$ y $N|\gamma| \gg 1$, esto quiere decir que la longitud de la barrera es mucho menor o mucho mayor de la longitud de amplificación/absorción.

A partir de la sección 4 en el capítulo 3, comenzamos analizando el caso de principal interés para esta tesis: La barrera activa desordenada. La ecuación (3.35) representa un desarrollo a segundo orden en $u_n = (\varepsilon_n + i\gamma_n)/2 \sin k$, pues hay que recordar que trabajamos bajo el régimen de desorden débil. Se escribió este desarrollo como

$$\hat{Q} = \hat{Q}^{(0)} + \hat{Q}^{(1)} + \hat{Q}^{(2)} + \dots \quad (3.73)$$

Así, para los tres primeros términos del lado derecho de la precedente ecuación tuvimos resultados analíticos para sus cuatro elementos de matriz los cuales eran: (3.22) - (3.25), (3.38) - (3.41) y (3.42) - (3.45).

Con estos resultados pudimos calcular $\ln T_N$ solo para el caso de desorden débil, es decir

$$N\sigma_\varepsilon^2 \ll 1 \quad (3.74)$$

$$N\sigma_\gamma^2 \ll 1 \quad , \quad (3.75)$$

como hipótesis adicional supusimos que $N|\gamma| \ll 1$. Estas condiciones significan que la longitud de la barrera es mucho menos de la longitud de localización y de la longitud de amplificación/absorción. A partir de estas hipótesis se llegó al desarrollo (3.47), en donde había que sustituir los elementos (2,2) de las matrices antes mencionadas y usando las propiedades estadísticas de las variables aleatorias calculamos el promedio sobre las realizaciones del desorden, entonces obtuvimos el resultado final (3.55).

De este resultado vimos que, para el caso que $\sigma_{\varepsilon\gamma} = 0$, las fluctuaciones de las variables aleatorias ε_n y γ_n producían efectos de localización y amplificación respectivamente como lo muestran las gráficas (3.8), (3.9), (3.10) y (3.11).

Notamos que, al usar la misma función binaria de distribución para ε_n y γ_n dada por (3.59), recuperábamos el caso sin desorden como se mostró en la gráfica (3.12) y concuerda con lo esperado por la formula (3.57).

Si considerábamos el caso en el que las energías de sitio y las fluctuaciones del coeficiente de amplificación/absorción están auto- e inter-correlacionadas, lo que correspondía a las ecuaciones (3.67) y (3.68) los resultados que obteníamos se mostraban en las gráficas (3.13) y (3.14). Lo que se observó es

un efecto mixto entre amplificación y absorción dependiendo del signo de η . En todos los resultados se variaron los valores de las varianzas de ε_n y γ_n así como los valores y el signo de γ para una barrera de $N = 300$ sitios. En los cálculos numéricos del coeficiente de transmisión para la barrera con desorden se evaluó un promedio sobre 500 realizaciones del desorden.

En este trabajo de tesis se ha usado una combinación de métodos analíticos y numéricos, se hizo énfasis en las hipótesis que usamos para llegar al resultado para el coeficiente de transmisión y como este nos da una forma de caracterizar los efectos de localización o amplificación en la barrera, lo cual fue uno de los principales objetivos de la tesis.

En trabajos futuros se espera estudiar y dar resultados analíticos, de ser posible, para el caso en el que la barrera no es corta necesariamente, es decir, sin hacer uso de (3.74) y (3.75).

Bibliografía

- [1] P.W. Anderson, *Phys. Rev.* **109** 1492 (1958)
- [2] Jean Heinrichs. *J. Phys.: Condens. Matter* **18** 4781 (2006)
- [3] F. M. Izrailev and A. A. Krokhin *Phys. Rev. Lett.* **82** 4062, (1998)
- [4] G. Grosso, G. Pastori. *Solid state physics*. ACADEMIC PRESS (2014)
- [5] N. Ashcroft, N. Mermin. *Solid state physics*. HARCOURT COLLEGE PUBLISHERS (1976)
- [6] K. Ishii. *Prog.Theo. Phys. Suppl.* **53** 77 (1973)
- [7] O. Vázquez-Candanedo, F.M. Izrailev, et al. *Phys. Rev.* **89**, 013832 (2014).
- [8] F.M. Izrailev, T. Kottos, G. P. Tsironis *Phys. Rev. B* **52** (1995)
- [9] H. Furstenberg, *Trans. Amer. Math. Soc.* **108** 337 (1963)
- [10] P. Markoś, C. M. Soukoulis, *Wave propagation*, PRINCETON UNIVERSITY PRESS
- [11] B. Kramer, A. MacKinnon, *Rep.Prog.Phys.* **56** 1469 (1993)
- [12] A. Crisanti, G. Paladin, A. Vulpiani. *Products of random matrices in Statistical Physics*, SPRINGER VERLAG
- [13] R de L. Kronig, W. G. Penney. *Proc. Roy. Soc. A* **130** 499 (1931).

- [14] R. E. Borland. *Proc. Roy. Soc. A* **274** 529 (1963).
- [15] F.M. Izrailev, S. Ruffo, L. Tessieri. *J. Phys.* **31** 5263 (1998)
- [16] P.W. Brouwer, P.G. Silverstrov, C. W. Beenakker. *Phys. Rev. B.* **56** 8 (1997)
- [17] A. Leventis, K. G. Makris, E. N. Economou. *Phys. Rev. B.* **106** 064205 (2022)
- [18] Naomichi Hatao, David. R. Nelson. *Phys. Rev. Lett.* **77** 3 (1996)
- [19] H. Feshbach. *Ann. Phys.* **5** 357 (1958)
- [20] Stefano Lepri. *Phys. Rev. Lett.* **110** 230603 (2013)
- [21] Alois Regensburger, et al. *Nature.* **488** 167 (2012)
- [22] A. F. Tzortzakakis, K. G. Makris, et al. *Phys. Rev. Res.* **3** 013208 (2021)
- [23] R. Heilmann, et al. *Nature. Comm.* **4** 2533 (2013)
- [24] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. *Quantum mechanics*. PERGAMON PRESS (1958)
- [25] Alain Comtet, et al. *J. Phys. A: Math. theor.* **46** 254003 (2013)
- [26] A.J.F. Siegert. *Phys. Rev.* **56** 750 (1939)
- [27] H. Feshbach. *Ann. Phys.* **19** 287 (1962)
- [28] Y.Ashida, et al. *Advances in Physics.* **69** 249 (2020)

NOMBRE DEL TRABAJO

Propagación de ondas en medios disipativos aleatorios

AUTOR

Cristian Guillén Almanza

RECuento DE PALABRAS

12014 Words

RECuento DE CARACTERES

53509 Characters

RECuento DE PÁGINAS

63 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

4.0MB

FECHA DE ENTREGA

Sep 12, 2024 8:56 AM CST

FECHA DEL INFORME

Sep 12, 2024 8:57 AM CST

● 6% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 5% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 0% Base de datos de trabajos entregados
- 2% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

● Excluir del Reporte de Similitud

- Fuentes excluidas manualmente

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Maestría en Ciencias en el área de Física - Instituto de Física y Matemáticas	
Título del trabajo	Propagación de ondas en medios disipativos aleatorios	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Cristian Guillén Almanza	1209269b@umich.mx
Director	Luca Tessieri	luca.tessieri@umich.mx
Codirector	No aplica	No aplica
Coordinador del programa	Umberto Cotti Gollini	mae.ciencias.fisica@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	No	

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	No	
Traducción a otra lengua	No	
Revisión y corrección de estilo	No	
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	No	
Generación de contenido multimedia	No	
Otro	No aplica	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	Cristian Guillén Almaza <i>CGA</i> <i>301</i>
Lugar y fecha	Morelia, Michoacán. 09/09/2024