



Universidad Nacional Autónoma de
México y Universidad Michoacana
de San Nicolás de Hidalgo



Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas



Instituto de Física y Matemáticas y
Centro de Ciencias Matemáticas



Cono de medidas transversas en laminaciones geodésicas de tipo infinito

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

presenta

Néstor Uriel Anguiano Huitrón

Asesor:

Dr. José Ferrán Valdez Lorenzo

Morelia, Michoacán, México
Diciembre 2024

Índice general

Resumen/Abstract	i
Introducción	ii
1 Superficies hiperbólicas y laminaciones geodésicas	1
2 Medidas de Borel en espacios métricos compactos y totalmente disconexos	5
3 El cono de medidas $\mathcal{M}(L)$ como subcono de $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$	8
4 El cono de medidas $\mathcal{M}(L)$ como límite inverso	12
Bibliografía	19

Resumen

Basándonos en el trabajo de Mladen Bestvina y Alexander J. Rasmussen [BR22], estudiamos el cono de medidas transversas $\mathcal{M}(L)$ sobre una laminación geodésica fija L en una superficie hiperbólica de tipo infinito y de primer tipo S . En primer lugar, probamos que tal cono es linealmente homeomorfo a un subcono cerrado de \mathbb{R}^N y damos una condición suficiente sobre la laminación para que $\mathcal{M}(L)$ admita una base. En segundo lugar, dada una saturación $S_1 \subset S_2 \subset \dots$ por superficies de tipo finito con frontera totalmente geodésica y transversal a L , construimos un sistema inverso de conos $C_n \xleftarrow{\pi_n} C_{n+1}$, donde cada C_n es cierta proyección de $\mathcal{M}(L \cap S_n)$, y presentamos un teorema que afirma que $\mathcal{M}(L)$ es linealmente homeomorfo al límite inverso de dicho sistema, el cual denotamos por $\mathcal{W}(L)$. Complementamos la teoría presentada con ejemplos y cálculos explícitos.

Palabras Clave: Superficies de tipo infinito, Laminaciones geodésicas, Medidas transversas en laminaciones geodésicas, Conos de medidas transversas.

Abstract

Based on the work of Mladen Bestvina and Alexander J. Rasmussen [BR22], we study the cone of transverse measures $\mathcal{M}(L)$ to a fixed geodesic lamination L on an infinite-type hyperbolic surface of the first kind S . First, we prove that such a cone is linearly homeomorphic to a closed sub-cone of \mathbb{R}^N , and we give a sufficient condition on the lamination such that $\mathcal{M}(L)$ admits a basis. Second, given an exhaustion $S_1 \subset S_2 \subset \dots$ by finite-type surfaces with totally geodesic boundary and transverse to L , we set up an inverse system of cones $C_n \xleftarrow{\pi_n} C_{n+1}$, where each C_n is a certain projection of $\mathcal{M}(L \cap S_n)$ and we introduce a theorem that states that $\mathcal{M}(L)$ is linearly homeomorphic to that inverse limit, which we denote by $\mathcal{W}(L)$. We complement this theory with examples and explicit calculations.

Keywords: Infinite type surfaces, Geodesic laminations, Transverse measures to geodesic laminations, Cones of transverse measures.

Introducción

En geometría de superficies de tipo finito un área de interés y utilidad ha sido el espacio de laminaciones geodésicas con medida transversa. Se sabe que existe un homeomorfismo entre el espacio de laminaciones geodésicas con medida transversa y el espacio de foliaciones medibles y en 1987 William P. Thurston mostró que la proyectivización del espacio de laminaciones geodésicas con medida transversa constituyen un borde para el espacio de Teichmüller en superficies compactas de género mayor o igual a 2. Sin embargo para superficies de tipo infinito no se sabe mucho acerca de su espacio de laminaciones geodésicas con medida transversa.

En este trabajo estudiaremos el cono de medidas transversas asociadas a una laminación geodésica fija en una superficie de tipo infinito. Más precisamente, en la Sección 1 probamos que una laminación geodésica en una superficie de tipo infinito es densa en ningún lado si ella está contenida en el núcleo convexo de la superficie. Como consecuencia, tenemos que la estructura de la intersección de una laminación geodésica con un arco transversal es la de un espacio métrico compacto y totalmente desconexo. Es por ello que usamos la Sección 2 para estudiar el espacio de medidas de Borel finitas en espacios métricos compactos y totalmente desconexos, pues nuestra definición de medidas transversas en laminaciones geodésicas parte de medidas de Borel finitas en estos espacios.

En la Sección 3 probamos que el cono de medidas transversas a una laminación geodésica en una superficie de tipo infinito y de primer tipo es linealmente homeomorfo a un subcono cerrado de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y damos una condición suficiente para que dicho cono admita una base.

En la Sección 4 vemos que para S una superficie hiperbólica de tipo infinito y de primer tipo y una laminación geodésica $L \subset S$ es posible construir una saturación $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots$ por subsuperficies de tipo finito, completas y con componentes de frontera totalmente geodésicas y transversales a las hojas de L . La estructura de $L_n \doteq L \cap S_n$ se entiende desde los años 80, véase [CEM06]. En particular, L_n tiene una sublaminación compuesta por una cantidad finita de sublaminaciones compactas minimales $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{s(n)}$ junto con una cantidad finita de familias de arcos paralelos, cada familia de la forma $A \times I$, donde A es un espacio métrico compacto y totalmente desconexo e I un intervalo cerrado de \mathbb{R} , y además toda medida transversal $\mu \in \mathcal{M}(L_n)$ está soportada en dicha sublaminación. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se definen proyecciones $\Psi_n : \mathcal{M}(L_n) \rightarrow C_n$ y se construye un sistema inverso $C_n \xleftarrow{\pi_n} C_{n+1}$. Presentamos un resultado fundamental de Mladen Bestvina y Alexander J. Rasmussen, véase [BR22], el cual establece que el límite inverso anteriormente mencionado es linealmente homeomorfo al cono de medidas transversas $\mathcal{M}(L)$. La principal ventaja de este resultado es que permite realizar construcciones detalladas de conos de medidas para una gran variedad de laminaciones geodésicas.

Este trabajo está basado principalmente en el artículo de Mladen Bestvina y Alexander J. Rasmussen, *Transverse measures to infinite type laminations* [BR22], completando

ciertos detalles que se dejan al lector.

1

Superficies hiperbólicas y laminaciones geodésicas

En esta sección presentamos la definición de laminación geodésica en una superficie hiperbólica. Consideramos oportuno dar una breve introducción de superficies hiperbólicas. Cabe mencionar que durante todo el trabajo nuestro espacio base es el plano hiperbólico $\mathbb{H}^2 \doteq \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ con su métrica hiperbólica estándar aunque a veces se usará por conveniencia el modelo del disco de Poincaré. En el modelo del semiplano se tiene que el grupo de isometrías de \mathbb{H}^2 que preservan orientación, $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$, es isomorfo a $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Definición 1.1. Consideramos S una superficie topológica conexa. Diremos que S admite una *estructura hiperbólica* si existe una colección de aplicaciones $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{H}^2\}_{\alpha \in I}$, que satisfaga:

1. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una cubierta abierta para S ;
2. cada ϕ_α es un homeomorfismo sobre su imagen;
3. si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces la restricción del cambio de coordenadas

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

en cada componente conexa es una isometría de \mathbb{H}^2 que preserva orientación.

Nos referiremos de manera indistinta a una superficie con estructura hiperbólica simplemente como *superficie hiperbólica*.

Por el Teorema de Cartan-Hadamard, toda superficie S con estructura hiperbólica completa¹ es isométrica a \mathbb{H}^2/Γ , donde Γ es un subgrupo discreto de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ isomorfo a $\pi_1(S)$ que actúa libremente y de manera propiamente discontinua en \mathbb{H}^2 . Es por ello que cuando S es una superficie hiperbólica, ocurre que su cubriente universal \tilde{S} es isométrico al plano hiperbólico \mathbb{H}^2 y $\pi_1(S)$ actúa por isometrías en \tilde{S} y por homeomorfismos en $\tilde{S} \cup \partial_\infty \tilde{S}$, donde $\partial_\infty \tilde{S}$ es la frontera de Gromov de \tilde{S} .

El *conjunto límite* de $\pi_1(S)$ en $\partial_\infty \tilde{S}$ es $\Lambda(\pi_1(S)) \doteq \overline{\pi_1(S) \cdot x} \cap \partial_\infty \tilde{S}$, donde x es un punto arbitrario de \tilde{S} . La Proposición 3.4.1 de [Hub06] prueba que el conjunto límite no depende del punto elegido. En este trabajo siempre asumiremos que S es de *primer tipo*, lo que significa que $\Lambda(\pi_1(S)) = \partial_\infty \tilde{S}$.

Una superficie S es de *tipo finito* si su grupo fundamental $\pi_1(S)$ es finitamente generado y es de *tipo infinito* en caso contrario. Puede revisar [Hub06] o [Kat92] para una discusión más amplia de superficies hiperbólicas y geometría hiperbólica en general. Para una prueba del Teorema de Cartan-Hadamard puede consultar [Ara12].

¹Es decir, toda sucesión de Cauchy converge.

Definición 1.2. Una *laminación* L en una superficie hiperbólica S es un subconjunto cerrado de S que se descompone en subconjuntos conexos ajenos entre sí llamados *hojas*, de modo que localmente:

1. para cada punto $p \in L$ existe una vecindad U homeomorfa al producto de dos intervalos abiertos, digamos $(a, b) \times (c, d)$, de tal manera que $U \cap L$ corresponde a $K \times (c, d)$, donde $K \subset (a, b)$ es compacto;
2. para cada hoja l de L , $U \cap l$ corresponde a $A_l \times (c, d)$, con $A_l \subset (a, b)$ compacto.

Nos interesa estudiar *laminaciones geodésicas* en superficies hiperbólicas de tipo infinito, que son laminaciones cuyas hojas son geodésicas. De la definición se sigue que en una laminación geodésica las hojas deben de ser geodésicas *completas*, es decir, cada hoja debe de ser una geodésica cerrada o se debe extender de manera infinita en ambas direcciones.

Definición 1.3. Consideramos $\Lambda(\pi_1(S))$ el conjunto límite de $\pi_1(S)$ en la frontera $\partial_\infty \tilde{S}$ y sea $\mathcal{C}(\Lambda(\pi_1(S)))$ la envolvente convexa de $\Lambda(\pi_1(S))$ en $\tilde{S} \cup \partial_\infty \tilde{S}$, *i.e.* es el subconjunto hiperbólico convexo de $\tilde{S} \cup \partial_\infty(\tilde{S})$ más pequeño que contiene a $\Lambda(\pi_1(S))$. El *núcleo convexo* de S se define como

$$\mathcal{C}(S) \doteq \frac{\mathcal{C}(\Lambda(\pi_1(S))) \cap \tilde{S}}{\pi_1(S)}.$$

Ver Sección 3.4 de [Hub06]. De las definiciones se sigue que en una superficie S de primer tipo se tiene $\mathcal{C}(S) = S$. El teorema siguiente nos permite entender la topología de las laminaciones.

Teorema 1.4. (Teorema 1.1 de [Šar21]). *Consideramos S una superficie hiperbólica de tipo infinito. Toda laminación geodésica L del núcleo convexo $\mathcal{C}(S)$ es densa en ningún lugar.*

Demostración. Consideramos \tilde{L} el levantamiento de L en el cubriente universal \tilde{S} . Por hipótesis \tilde{L} es un subconjunto de la envolvente convexa $\mathcal{C}(\Lambda(\pi_1(S)))$ del conjunto límite $\Lambda(\pi_1(S)) \subset \partial_\infty \tilde{S}$. Como L es un subconjunto cerrado de S , entonces \tilde{L} es cerrado en \tilde{S} , por lo que para verificar que L es denso en ningún lugar basta probar que es de interior vacío. Procederemos por contradicción, asumiendo que existe un disco hiperbólico cerrado $U \subset \mathcal{C}(S)$ que es cubierto por geodésicas de L . Consideramos \tilde{U} una componente conexas del levantamiento de U en \tilde{S} . Tenemos que \tilde{U} es un disco hiperbólico cerrado en \tilde{S} que es cubierto por \tilde{L} .

Diremos que un disco hiperbólico cerrado en el plano hiperbólico es *regular* si para cualesquiera tres geodésicas biinfinitas disjuntas que lo intersectan, una de estas geodésicas divide al disco en dos componentes de modo que los otros dos segmentos geodésicos quedan en componentes distintas. Usando propiedades básicas de la geometría del plano hiperbólico es posible probar que todo disco hiperbólico cerrado de radio menor a $r = \ln(\sqrt{3})$ es regular, por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que \tilde{U} es regular. Tal r está dada por el radio del incírculo de los triángulos hiperbólicos ideales.

En $\partial_\infty \tilde{S}$ tenemos una orientación natural, inducida por la orientación de \tilde{S} . Por definición $(a, b) \subset \partial_\infty \tilde{S}$ es el conjunto de todas las $x \in \partial_\infty \tilde{S}$ tales que a , x y b se encuentren en este orden con tal orientación, y $[a, b] \doteq (a, b) \cup \{a, b\}$. Dados $a, b \in \partial_\infty \tilde{S}$, con $a \neq b$, denotaremos por $[a, b]$ a la geodésica biinfinita en \tilde{S} con puntos extremos a y b .

Consideramos $g = [a, b]$ y $g_1 = [a_1, b_1]$ dos hojas distintas de \tilde{L} que intersectan a \tilde{U} . Vamos a probar que todo punto en $[a, a_1]$ y $[b_1, b]$ es un punto extremo de alguna geodésica de \tilde{L} que intersecta a \tilde{U} . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que tales geodésicas están como en la Figura 1.1. Como \tilde{U} es regular, cualquier geodésica de \tilde{L} entre g y g_1 que intersecta a \tilde{U} las separa². En otras palabras, esta tiene un punto extremo en $[a, a_1]$ y el otro punto extremo en $[b_1, b]$. Definimos K como la unión de todos los puntos extremos de geodésicas de \tilde{L} que intersectan a \tilde{U} . Como \tilde{L} es cerrado y \tilde{U} es compacto se tiene que K es cerrado en $\partial_\infty \tilde{S}$, de donde se sigue que cada componente de $[a, a_1] \setminus K$ o $[b_1, b] \setminus K$ es un arco abierto (en el caso de que tal diferencia no sea vacía). Asumimos que $]a_2, a_3[$ es una componente de $[a, a_1] \setminus K$, y g_2, g_3 geodésicas de \tilde{L} con puntos finales en a_2 y a_3 respectivamente, de manera que sus otros puntos extremos en $[b_1, b]$ sean lo más cercanos entre sí posibles, o incluso un único punto. Requerimos esto pues a_2 o a_3 pueden ser puntos extremos de más de una geodésica de \tilde{L} . Entonces la región de \tilde{S} entre g_2 y g_3 no contiene geodésicas de \tilde{L} que tengan un punto extremo en $[a, a_1]$ y el otro en $[b_1, b]$ y sin embargo \tilde{L} cubre a \tilde{U} . Esto es una contradicción de que \tilde{U} es regular. Concluimos que K cubre a $[a, a_1]$ y de manera análoga podemos argumentar que K cubre a $[b_1, b]$.

Para completar la demostración, probaremos que siguiendo estas suposiciones es posible conseguir una hoja de \tilde{L} que necesariamente intersecte a otras hojas de \tilde{L} . Como $\tilde{L} \subset \mathcal{C}(\Lambda(\pi_1(S)))$, se tiene que $[a, a_1] \subset \Lambda(\pi_1(S))$ y $[b_1, b] \subset \Lambda(\pi_1(S))$. En efecto, dado $x \in [a, a_1]$, tenemos que existe una geodésica $l \in \tilde{L}$ tal que uno de sus puntos extremos es x . Como $l \in \mathcal{C}(\Lambda(\pi_1(S)))$ podemos tomar una sucesión de puntos de l que converga a x , consecuentemente x es punto de acumulación del núcleo convexo $\mathcal{C}(\Lambda(\pi_1(S)))$. Como el núcleo convexo es cerrado se tiene que $x \in \Lambda(\pi_1(S))$.

Es posible que $[a, a_1]$ o $[b_1, b]$ consten de un solo punto, pero no pueden ser ambos un punto simultáneamente pues \tilde{U} es cubierto por \tilde{L} . Asumimos primero que $[a, a_1]$ no es un punto. Como $\pi_1(S) < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ es no elemental, el conjunto de puntos fijos de elementos hiperbólicos de $\pi_1(S)$ es denso en $\Lambda(\pi_1(S))$, véase Corolario 3.4.5 de [Hub06]. Así, existe $\kappa \in \pi_1(S)$ elemento hiperbólico tal que su punto fijo atractor sea $x \in (a, a_1)$ y el punto fijo repelente sea $y \notin [b_1, b]$. Un elemento hiperbólico con estas características existe pues al ser $\pi_1(S)$ no elemental existen dos elementos hiperbólicos de $\pi_1(S)$ con ambos puntos fijos distintos.

Sea g_0 una geodésica de \tilde{L} cuyos puntos extremos en $(a, a_1) \times [b_1, b]$ tal que ambos puntos extremos sean diferentes de x y y . Entonces existe $i \in \mathbb{N}$ de modo que $\kappa^i(g_0)$ sea una geodésica con ambos puntos extremos en (a, a_1) . Entonces $\kappa^i(g_0)$ intersecta transversalmente a una geodésica g_4 de \tilde{L} que está en $[a, a_1] \times [b_1, b]$, ver Figura 1.1. Sin embargo, como \tilde{L} es una laminación geodésica que es invariante por $\pi_1(S)$ (pues es levantamiento de una laminación geodésica L en S), se tiene que $\kappa^i(g_0) \in \tilde{L}$ pero esto

²Es decir, tal geodésica debe de dividir a \tilde{U} en dos componentes de tal manera que los segmentos de $[a, b]$ y $[a_1, b_1]$ contenidos en \tilde{U} queden en componentes distintas

es una contradicción pues $\kappa^i(g_0)$ intersecta elementos de \tilde{L} .
 Concluimos que \tilde{L} es densa en ningún lado de $\mathcal{C}(\Lambda(\pi_1(S)))$ y consecuentemente L es densa en ningún lugar en el núcleo convexo $\mathcal{C}(S)$.

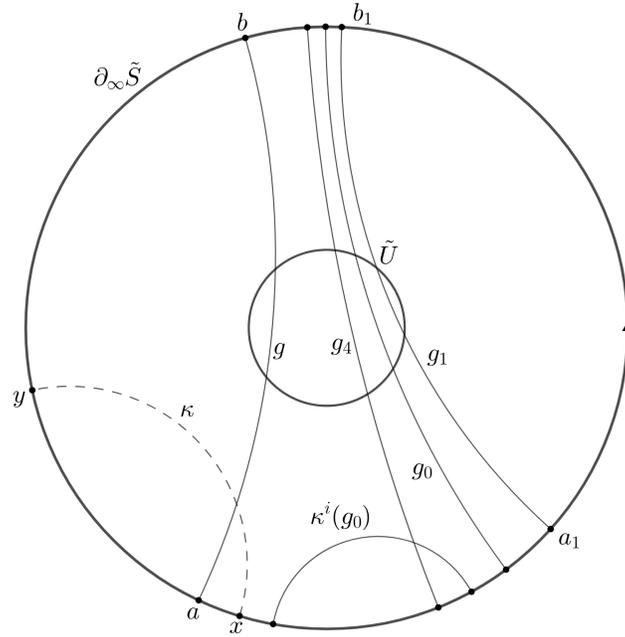


Figura 1.1: Las geodésicas en línea continua representan elementos de la laminación \tilde{L} . La geodésica punteada es el eje de un elemento hiperbólico $\kappa \in \pi_1(S)$ y en general no pertenece a \tilde{L} .

■

Notamos que si un arco suave $\tau : [0, 1] \rightarrow S$ intersecta transversalmente a una laminación geodésica L , del Teorema 1.4 se sigue que $L \cap \tau$ es un espacio métrico compacto y totalmente desconexo. Es por ello que en la sección siguiente estudiaremos el cono de medidas de Borel finitas de espacios métricos compactos y totalmente metrizable.

Medidas de Borel en espacios métricos compactos y totalmente desconexos

A grandes rasgos, una medida transversa a una laminación geodésica es una función que asocia a cada arco τ transverso a la laminación L una medida de Borel finita soportada en $\tau \cap L$ donde además tal medida es invariante bajo homotopías que preservan la intersección transversa con las hojas de L y se comportan de manera apropiada con la restricción a subarcs. Como anticipamos en la sección anterior, cuando $\tau : [0, 1] \rightarrow S$ es un arco suave que interseca transversalmente a una laminación geodésica L en S una superficie hiperbólica de tipo infinito y de primer tipo, se tiene que $\tau \cap L$ es un espacio métrico compacto y totalmente desconexo, por lo que una manera usual de definir las medidas transversas a una laminación geodésica es a partir de la teoría de medidas de Borel finitas en espacios de este tipo. Es por ello que en esta sección nos dedicamos a estudiar el cono de medidas de Borel de un espacio métrico compacto y totalmente desconexo.

Definición 2.1. Un *cono* C es un conjunto dotado con operaciones de suma y multiplicación por escalares en $\mathbb{R}_+ \doteq [0, \infty)$, de tal manera que la suma sea asociativa, conmutativa y para cualquier $c \in \mathbb{R}_+$, $v, w \in C$ se cumpla que $c \cdot (v + w) = c \cdot v + c \cdot w$.

Un tipo particular son los *conos convexos*, los cuales son subconjuntos de un espacio vectorial real que son cerrados bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalares en \mathbb{R}_+ . Una aplicación entre conjuntos convexos $f : C \rightarrow D$ es *afín* si para cualesquiera $r, s \in \mathbb{R}_+$ con $r + s = 1$ y $v, w \in C$ se tiene que $f(rv + sw) = rf(v) + sf(w)$. Si además C y D son conos convexos entonces $f : C \rightarrow D$ es lineal si es afín y adicionalmente $f(0) = 0$.

Los conos que aparecerán en este trabajo serán conos convexos, las funciones entre conos serán lineales y las funciones entre subconjuntos convexos de conos serán afines.

Consideramos X espacio métrico compacto totalmente desconexo. Ejemplo de un espacio como este es el conjunto de Cantor. Denotaremos por $\mathcal{M}(X)$ al espacio de medidas de Borel finitas en X dotado de la topología débil*. Esta es la topología más gruesa en la que para toda función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene que la función

$$\begin{aligned} \psi_f : \mathcal{M}(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mu &\longmapsto \int_X f d\mu \end{aligned}$$

es continua. Denotamos por $\mathcal{K}(X)$ a la familia de subconjuntos clopen de X .

Observación 2.2. Para X un espacio métrico compacto totalmente desconexo se tiene que $\mathcal{K}(X)$ es a lo más numerable. En efecto, dado que X es compacto y métrico, admite una base numerable, digamos \mathcal{B} . Consideramos $U \in \mathcal{K}(X)$. Para cada $x \in U$

consideramos $U_x \subset U$ de modo que $U_x \in \mathcal{B}$. Como U es compacto existe $\{x_1, \dots, x_n\} \subset U$ de tal manera que

$$U = \cup_{k=1}^n U_{x_k}.$$

Concluimos que la cardinalidad de $\mathcal{K}(X)$ es menor o igual a la cardinalidad de la familia de todos los subconjuntos finitos de \mathcal{B} , la cual es numerable.

Notamos que para cada $K \in \mathcal{K}(X)$ la función característica χ_K es continua, es por ello que las funciones

$$\begin{aligned} \psi_K : \mathcal{M}(X) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \mu &\longmapsto \int_X \chi_K d\mu = \mu(K) \end{aligned}$$

son continuas para cada $K \in \mathcal{K}(X)$. De donde se sigue que:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}(X) &\longrightarrow \prod_{K \in \mathcal{K}(X)} \mathbb{R}_+ \\ \mu &\longmapsto \{\mu(K)\}_{K \in \mathcal{K}(X)}, \end{aligned}$$

es una función lineal y continua con respecto a la topología producto. De la Observación 2.2 se sigue que $\prod_{K \in \mathcal{K}(X)} \mathbb{R}_+$ es homeomorfo a \mathbb{R}_+^n , para cierta $n \geq 0$, o a $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, dependiendo de si $\mathcal{K}(X)$ es finito o no. Sin embargo, la aplicación Φ en general no es sobreyectiva. Para $K \in \mathcal{K}(X)$ y un punto $\mathbf{x} \in \prod_{K \in \mathcal{K}(X)} \mathbb{R}_+$, denotamos por x_K a la coordenada de \mathbf{x} correspondiente al subconjunto clopen K . Si K es la unión disjunta de K_1, \dots, K_r , entonces toda $\mathbf{x} \in \Phi(\mathcal{M}(X))$ debe satisfacer la ecuación lineal $x_{K_1} + \dots + x_{K_r} = x_K$. Más precisamente tenemos el teorema siguiente:

Teorema 2.3. *La aplicación Φ es un homeomorfismo lineal sobre el subcono cerrado $C_X \subset \prod_{K \in \mathcal{K}(X)} \mathbb{R}_+$ determinado por las ecuaciones lineales $x_K = x_{K_1} + \dots + x_{K_r}$ siempre que $K = \sqcup_{j=1}^r K_j$.*

Para probar el teorema anterior necesitaremos del Teorema de portmanteau, una buena referencia de él es Teorema 2.1 de [Bil99].

Teorema 2.4 (de portmanteau). *Consideramos X un espacio métrico compacto y totalmente desconexo. Sean $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ y μ medidas de Borel finitas en X . Entonces $\mu_n \xrightarrow{\text{debil}^*} \mu$ si y solo si $\mu_n(K) \rightarrow \mu(K)$ para cada subconjunto clopen K de X .*

Demostración del Teorema 2.3. La imagen de Φ está claramente contenida en el cono C_X . El hecho de que Φ sea una biyección sobre C_X se sigue del Teorema de extensión de Carathéodory, el cual establece que cualquier medida finita aditiva en el álgebra de conjuntos $\mathcal{K}(X)$ se extiende de manera única a una medida de Borel en X . Véase la Sección 7.4.2 de [EW07] para más sobre el espacio de medidas de Borel finitas en espacios métricos compactos y totalmente desconexos. Finalmente, la continuidad de $\Phi^{-1} : C_X \rightarrow \mathcal{M}(X)$ es consecuencia inmediata del Teorema de portmanteau. ■

En la práctica, se pueden utilizar familias mucho más pequeñas de conjuntos clopen de X para calcular el cono C_X . Fijamos una sucesión de familias finitas de conjuntos clopen de X , digamos \mathcal{A}_i con $i \in \mathbb{N}$, de modo que

1. $\mathcal{A}_1 = \{X\}$;

2. para cada $i > 1$, \mathcal{A}_i es una partición de X y es un refinamiento de \mathcal{A}_{i-1} ;
3. $\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{A_k \in \mathcal{A}_i} \{\text{diám}(A_k)\} = 0$.

Definimos $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i$.

Usando esta familia se obtiene una función lineal y continua $\mathcal{M}(X) \rightarrow \prod_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{R}_+$, que nuevamente es un homeomorfismo sobre el cono determinado por las ecuaciones lineales $x_A = x_{A_1} + \dots + x_{A_r}$ cuando $A \in \mathcal{A}_i$, $A_j \in \mathcal{A}_{i+1}$ y $A = \bigsqcup_{j=1}^r A_j$. La prueba de esto es análoga a la prueba del Teorema 2.3, pues tanto el Teorema de portmanteau como el Teorema de extensión de Carathéodory son válidos para esta familia.

Ejemplo 2.5. Si X es el conjunto de Cantor (con la construcción que se obtiene de ir removiendo el tercio de intervalo central) podemos tomar \mathcal{A}_i como la familia de 2^{i-1} conjuntos clopen que se obtienen al intersectar X con los intervalos de la construcción del conjunto de Cantor en el i -ésimo paso, *i.e.*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{X \cap [0, 1]\} = \{X\}, \\ \mathcal{A}_2 &= \left\{ X \cap \left[0, \frac{1}{3}\right], X \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right] \right\}, \\ \mathcal{A}_3 &= \left\{ X \cap \left[0, \frac{1}{9}\right], X \cap \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], X \cap \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], X \cap \left[\frac{8}{9}, 1\right] \right\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ejemplo 2.6. Si $Y = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, para cada $i \in \mathbb{N}$ consideramos \mathcal{A}_i como sigue

$$\mathcal{A}_i = \left\{ \{1\}, \left\{\frac{1}{2}\right\}, \dots, \left\{\frac{1}{i-1}\right\}, \left\{\frac{1}{n} \mid n \geq i\right\} \cup \{0\} \right\}.$$

Dada una medida $\mu \in \mathcal{M}(Y)$ ella debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \mu(\{1\}) &= \mu(Y) - \mu\left(\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} \cup \{0\}\right), \\ \mu\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) &= \mu\left(\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} \cup \{0\}\right) - \mu\left(\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \cup \{0\}\right), \\ \mu\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}\right) &= \mu\left(\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \cup \{0\}\right) - \mu\left(\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\} \cup \{0\}\right). \end{aligned}$$

De donde se sigue que la medida de cada $A \in \mathcal{A}$ (y por lo tanto la medida de cada conjunto de Borel) está completamente determinada por las medidas de los clopen de estilo $A_i = \{1/n \mid n \geq i\} \cup \{0\}$. Es entonces claro que el cono de medidas $\mathcal{M}(Y)$ es linealmente homeomorfo al subcono de $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ determinado por las desigualdades $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots$, explícitamente

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}(Y) &\longrightarrow \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \\ \mu &\longmapsto \{\mu(\{1/n \mid n \geq i\} \cup \{0\})\}_{i \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

3

El cono de medidas $\mathcal{M}(L)$ como subcono de $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$

Usando la teoría que introdujimos en la sección anterior podemos dar una definición formal de medida transversa a una laminación geodésica y probar que podemos ver al espacio de medidas transversas a una laminación geodésica como un subcono cerrado de $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$.

Consideramos L una laminación geodésica en una superficie hiperbólica completa S de tipo infinito y de primer tipo. Entenderemos por *transversal* o *arco transverso* a un arco suave encajado $\tau \subset S$ con puntos extremos en $S \setminus L$ de modo que τ sea transverso a cada hoja de L que intersecte. Dos arcos transversos σ, τ son *homotópicos* si existe una aplicación suave $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$ de modo que las restricciones a $\{0\} \times [0, 1]$ y $\{1\} \times [0, 1]$ son difeomorfismos sobre las imágenes de σ y τ respectivamente, y la preimagen $F^{-1}(L)$ consiste de segmentos horizontales $[0, 1] \times t_0$. Tal aplicación F es una *homotopía* entre σ y τ . Denotamos por $f_\sigma : [0, 1] \rightarrow \sigma$ a la aplicación $f_\sigma(\cdot) \doteq F(0, \cdot)$ y $f_\tau(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \tau$ a la aplicación $f_\tau(\cdot) \doteq F(1, \cdot)$. Tenemos un difeomorfismo inducido $f \doteq f_\tau \circ f_\sigma^{-1} : \sigma \rightarrow \tau$ que preserva las intersecciones con la laminación L .

Definición 3.1. Una *medida transversa* a L es una función μ que asigna a cada arco transverso τ una medida de Borel finita μ_τ en τ con las propiedades siguientes:

- Si $\tau' \subset \tau$ es un subarco que también es transversal, entonces $\mu_{\tau'}$ es la restricción de μ_τ ;
- si F es una homotopía de σ a τ y f es el difeomorfismo inducido $f = f_\tau \circ f_\sigma^{-1}$, entonces μ_τ es la medida *empujada* $f_*(\mu_\sigma)$.

De la definición se sigue que el soporte de μ_τ está contenido en $L \cap \tau$.

Consideramos a $\mathcal{M}(L)$ el conjunto de todas las medidas transversas a L . El conjunto $\mathcal{M}(L)$ es un cono, ya que las medidas transversas pueden sumarse y multiplicarse por escalares en \mathbb{R}_+ . Dotamos a $\mathcal{M}(L)$ con la topología débil*, que es la topología más gruesa que para cada arco transverso τ hace a la función

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(L) &\longrightarrow \mathcal{M}(L \cap \tau) \\ \mu &\longmapsto \mu_\tau \end{aligned}$$

continua. La suma y multiplicación escalar son continuas con esta topología.

Es inmediato notar que las definiciones anteriores no dependen de si S es una superficie de tipo finito o tipo infinito. Para nuestros fines, es útil permitir que las superficies sean de tipo finito con frontera totalmente geodésica, de modo que las hojas de L intersecten

las componentes de frontera transversalmente, esto pues es posible estudiar el cono de medidas transversas a una laminación geodésica en una superficie de tipo infinito S mediante los conos de medidas transversas de superficies de este tipo que forman una saturación de S . Esto se verá con más detalle en la sección siguiente.

Ejemplo 3.2. Consideramos S una superficie hiperbólica completa con área finita y frontera totalmente geodésica no vacía. Consideramos L una laminación densa en ningún lado que consista de una familia de arcos propios que sean homotópicos entre sí preservando a ∂S como conjunto. Por ejemplo, L puede consistir de arcos homotópicos compactos de la frontera ∂S en sí misma. Podemos ver a L como un encaje de $A \times I$, donde A es compacto y totalmente desconexo e I es un intervalo cerrado en \mathbb{R} (posiblemente infinito) de modo que $A \times \partial I$ se encaje en ∂S . Usando el encaje $A \times I \rightarrow L$, es posible construir una transversal τ_0 que intersecte a cada hoja de L exactamente una vez. Tenemos que $\tau_0 \cap L \cong A$ y entonces $\mu \mapsto \mu_{\tau_0}$ define una aplicación lineal $\mathcal{M}(L) \rightarrow \mathcal{M}(A)$. Esta aplicación es homeomorfismo pues cualquier otro arco transverso a L puede partitionarse en subarcos transversales que sean homotópicos a subarcos transversales de τ_0 , por lo que toda medida μ_σ está determinada completamente por la medida $\mu_{\tau_0} \in \mathcal{M}(A)$.

Teorema 3.3. (Teorema A de [BR22]). *El cono $\mathcal{M}(L)$ es linealmente homeomorfo a un subcono cerrado de $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ determinado por una cantidad numerable de ecuaciones lineales.*

Demostración. Como primer paso, construimos una familia numerable de transversales τ_1, τ_2, \dots tal que toda hoja de la laminación L sea intersectada por al menos una transversal de esta familia. En efecto, como L es una laminación, para cada $p \in L$ existe una vecindad $U_p \subset S$ de p que es difeomorfa a $I \times I$ con $L \cap U_p \cong A \times I$, con A compacto. Como L es subconjunto cerrado de S se tiene que existe una cantidad numerable de vecindades como estas que cubren a L . Podemos tomarnos las imágenes inversas de líneas horizontales (una por cada vecindad de nuestra cubierta), obteniendo así nuestra familia numerable de transversales.

Recordemos que para un espacio métrico compacto y totalmente desconexo X , $\mathcal{K}(X)$ es la familia de subconjuntos clopen de X . Para cada τ_j , definimos $\mathcal{K}_j \doteq \mathcal{K}(L \cap \tau_j)$. Por el Teorema 1.4, cada $L \cap \tau_j$ es un espacio métrico compacto y totalmente desconexo. Mandando cada medida transversa μ a las restricciones μ_{τ_j} definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}(L) &\longrightarrow \prod_j \mathcal{M}(L \cap \tau_j) \subseteq \prod_j \prod_{K \in \mathcal{K}_j} \mathbb{R}_+ \cong \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \\ \mu &\longmapsto \{\mu_{\tau_j}\}_{j=1}^{\infty}, \end{aligned}$$

la cual es lineal y es naturalmente continua con la topología que tenemos en $\mathcal{M}(L)$ y usando la topología producto en $\prod_j \mathcal{M}(L \cap \tau_j)$. La imagen de Φ está contenida en el subcono C_L de $\prod_j \mathcal{M}(L \cap \tau_j)$ definido por las ecuaciones lineales $x_K = x_C$ siempre que existan $K \in \mathcal{K}_i$ y $C \in \mathcal{K}_j$ y transversales $\sigma \subset \tau_i$, $\tau \subset \tau_j$ con $K = L \cap \sigma$, $C = L \cap \tau$, tales que σ sea homotópico a τ .

Afirmamos que Φ es un homeomorfismo sobre C_L . Para probar este hecho necesitaremos del siguiente resultado básico sobre homotopías.

Lema 3.4. *Dada L una laminación geodésica en una superficie hiperbólica S de primer tipo y $p_1, p_2 \in S$ puntos que comparten una misma hoja de L . Si σ_i son arcos transversales a L que pasan por los puntos p_i . Entonces existen subarcos transversos $\sigma'_i \subset \sigma_i$ que contienen a p_i , con $i = 1, 2$, tal que σ'_1 es homotópico a σ'_2 .*

Este hecho puede probarse usando los mismos argumentos que en la Sección 4.2 de [Cal07] se usan para probar lo mismo en hojas de foliaciones.

Afirmamos que la aplicación lineal Φ es inyectiva. En efecto, consideramos μ y μ' medidas transversas con $\mu \neq \mu'$, entonces existe τ arco transverso tal que $\mu_\tau \neq \mu'_\tau$. Por la unicidad del Teorema de extensión Carathéodory, luego de reemplazar τ con un subarco transverso, podemos asumir que las medidas totales $\mu(\tau)$ y $\mu'(\tau)$ son diferentes. Como cada hoja de L intersecta a alguna τ_j , para cada $p \in L \cap \tau$ existen $p_j \in \tau_j$ tales que p y p_j comparten la misma hoja de L y aplicando el Lema 3.4 podemos encontrar un subarco transverso $\sigma \subset \tau$ con $p \in \sigma$ que es homotópico a un subarco de τ_j . Por compacidad de $\tau \cap L$, podemos subdividir a τ en una cantidad finita de subarcos transversos, cada uno homotópico a algún subarco de algún τ_j . Se sigue que para alguna j las medidas en $L \cap \tau_j$ inducidas por μ y μ' deben ser diferentes.

Afirmamos que la imagen Φ es el cono C_L definido anteriormente. En efecto, consideramos un punto en C_L , como se vio en la sección anterior, esto produce una medida de Borel finita en cada $L \cap \tau_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$ que además satisface las ecuaciones lineales que determinan a C_L , por lo que respeta la invarianza homotópica. Si τ es un arco transverso arbitrario, podemos subdividirlo como antes en subarcos transversos tal que cada uno sea homotópico a un subarco transverso de algún τ_j , luego podemos *jalar* las medidas en los τ_i para determinar una medida en $L \cap \tau$. Si $\tau = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_r$ y $\tau = \sigma'_1 \cup \dots \cup \sigma'_s$ son dos particiones diferentes de τ por subarcos transversos, entonces podemos considerar $\tau = \bigcup_{i,j} (\sigma_i \cap \sigma'_j)$, obteniendo así una nueva partición por subarcos transversos. Usando las ecuaciones que definen al cono C_L , observamos que la medida en $\sigma_i \cap \sigma'_j$, y por consiguiente en τ , es independiente de la partición. La independencia de la partición produce invarianza de la medida construida bajo homotopías y al pasar a subarcos transversos. Esto muestra que la imagen de Φ es todo el cono C_L .

Finalmente, argumentaremos que $\Phi^{-1} : C_L \rightarrow \mathcal{M}(L)$ es continua. Por la definición de la topología en $\mathcal{M}(L)$ es suficiente probar que la composición de Φ^{-1} con la restricción a $\mathcal{M}(L \cap \tau)$ es continua, para cada arco transverso τ . Cuando $\tau = \tau_j$ para alguna $j \in \mathbb{N}$ tal composición es únicamente una proyección a alguna coordenada, por lo que es continua. Para arcos transversos arbitrarios, basta con que consideramos una partición por subarcos transversos como antes, dando como resultado una proyección en ciertas coordenadas j_1, \dots, j_r . ■

En un cono convexo tenemos las nociones siguientes. Decimos que un subconjunto B de un cono C es *convexo* si para cualesquiera $x, y \in B$ se tiene que la imagen de $l : [0, 1] \rightarrow C$, $t \mapsto t \cdot x + (1 - t) \cdot y$ está contenida en B . El *rayo basado en el origen* en el cono C que pasa por el punto x es la imagen de $R_x : [0, \infty) \rightarrow C$, $t \mapsto t \cdot x$. Un punto $x \in B$ es un *punto extremo* si para toda función afín $f : [0, 1] \rightarrow B$ con $x \in \text{Imagen}(f)$ se tiene que $f^{-1}(x) = \{0\}$ ó $f^{-1}(x) = \{1\}$. El conjunto de puntos extremos de B se

denota como $\text{Ext}(B)$. Una *base* de un cono C es un conjunto compacto y convexo que no contiene al 0 y que intersecciona a cada rayo en C basado en el origen en exactamente un punto.

Resulta que si X es un espacio métrico, compacto y totalmente desconexo, entonces una base para el cono de medidas de Borel finitas $\mathcal{M}(X)$ es el conjunto de medidas de probabilidad $\mathcal{P}(X)$, que es el conjunto de todas las medidas de Borel donde la medida total es 1. La dificultad de este hecho recae en probar que $\mathcal{P}(X)$ es compacto, véase el Teorema 2.1.5 de [OV16] para la prueba de este hecho. Además, $\text{Ext}(\mathcal{P}(X))$ es el conjunto de medidas de probabilidad soportadas en exactamente un punto (consecuentemente $\text{Ext}(\mathcal{P}(X)) \cong X$). Más aún, $\mathcal{P}(X)$ tiene la estructura de lo que se conoce como *simplejo de Choquet* que es una generalización a dimensión infinita de los simplejos estándar. Más formalmente, se tiene que para cada $\mu \in \mathcal{P}(X)$ existe una única medida de probabilidad de Borel ν soportada en $\text{Ext}(\mathcal{P}(X)) \cong X$ tal que para toda función afín $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene que

$$f(\mu) = \int_{\text{Ext}(\mathcal{P}(X))} f d\nu.$$

Véanse Secciones 3 y 4 de [Phe01] para todo lo relacionado a simplejos de Choquet y Lema 5.13 de [Pei20] para una prueba de que $\mathcal{P}(X)$ es simplejo de Choquet.

Corolario 3.5. *Sea L una laminación geodésica en una superficie hiperbólica completa S de primer tipo. Si existe una subsuperficie compacta de S que intersecciona a cada hoja de L , entonces $\mathcal{M}(L)$ admite una base.*

Demostración. En este caso existe una cantidad finita de arcos transversos que interseccionen a cada hoja. Entonces tenemos el producto finito $\prod_j \mathcal{M}(L \cap \tau_j)$, y en cada factor tenemos una base dada por las medidas de probabilidad. Para conos convexos la propiedad de tener una base se hereda a productos finitos y subconos cerrados. ■

El cono de medidas $\mathcal{M}(L)$ como límite inverso

En esta sección presentaremos un teorema que establece que el cono de medidas transversas a una laminación geodésica en una superficie de tipo infinito y de primer tipo es linealmente homeomorfo a cierto límite inverso. Veremos que gracias a este resultado es posible construir, para ciertos ejemplos, una descripción detallada del cono de medidas. Nuevamente S es una superficie hiperbólica de tipo infinito y de primer tipo y $L \subset S$ una laminación geodésica.

Comenzamos introduciendo un par de definiciones sobre las que partiremos.

Definición 4.1. Consideramos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de espacios topológicos y suponemos que tenemos una familia $\{f_{i,j}\}_{i \leq j \in \mathbb{N}}$ de funciones continuas tales que:

1. Para todo $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $f_{i,i}$ es la identidad en A_i ;
2. Si $i \leq j \leq k$, entonces $f_{i,k} = f_{i,j} \circ f_{j,k}$.

Decimos que el par $(\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_{i,j}\}_{i \leq j \in \mathbb{N}})$ es un *sistema inverso* de espacios topológicos, a las $f_{i,j}$ se les conoce como *funciones de transición*.

El *límite inverso* se define como

$$A \doteq \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} A_i = \left\{ \overleftarrow{a}_i = (a_1, a_2, \dots) \mid \text{para cualesquiera } i \leq j \in \mathbb{N}, a_i = f_{i,j}(a_j) \right\} \subset \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i,$$

dotado de la topología de subespacio de $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$ con la topología producto, que resulta ser la topología más gruesa que hace que para toda $i \in \mathbb{N}$ la proyección canónica $f_i : A \rightarrow A_i$ sea continua. Véase la Sección 4.4 de [Bou98] para una discusión más general y amplia de sistemas inversos.

Definición 4.2. Consideramos $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subsuperficies con frontera de S . Decimos que $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una *saturación* de S si $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ y para todo $i \in \mathbb{N}$ se satisfacen las condiciones siguientes:

1. $\text{int}(S_i)$ es una subsuperficie de tipo finito;
2. $\text{int}(S_i)$ está contenido en $\text{int}(S_{i+1})$;
3. ∂S_i es una unión disjunta finita de curvas cerradas simples, esenciales y separadoras en S .

Puesto que las superficies son espacios σ -compactos se tiene que toda superficie de tipo infinito admite saturaciones. Además, de la Proposición 3.1 de [BŠ17] se sigue que toda saturación se puede enderezar en una saturación $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ donde cada S_i tiene frontera totalmente geodésica y es de área finita. Notamos que cada S_i es una superficie compacta con frontera con un número finito de cúspides, por lo que nos referiremos a ellas como *subsuperficies compactas con cúspides*.

Podemos asumir también que las componentes de frontera de cada S_i son transversas a las hojas de la laminación L . Esto puede justificarse de la siguiente manera. Supongamos que existen $S'_1 \subset S'_2 \subset \dots \subset S'_n$ subsuperficies compactas con cúspides de tal manera que S'_i contiene a S_i y las componentes de $\partial S'_i$ son transversas a las hojas de L para cada $i \leq n$. Escogemos m lo suficientemente grande de modo que S_m contenga tanto a S_{n+1} como a S'_n . Escogemos $p > m$ lo suficientemente grande tal que S_p contenga a ∂S_m en su interior y $q > p$ lo suficientemente grande de modo que ∂S_p esté contenido en el interior de S_q . Entonces las componentes de ∂S_p están contenidas en el interior de $\Sigma_{m,q} \doteq S_q \setminus \text{int}(S_m)$. Si ∂S_p interseca transversalmente a las hojas de L , entonces establecemos $S'_{n+1} \doteq S_p$. En caso contrario, dado que dos geodésicas solo se intersectan de manera no transversal cuando son la misma, se debe tener que al menos una componente de ∂S_p es una hoja de la laminación L . Escogemos un representante de un elemento no trivial $f \in \text{MCG}^+(S)^1$ soportado en $\text{int}(\Sigma_{m,q})$, de tal manera que para cada componente c de ∂S_p , se tenga que $f(c)$ interseca transversalmente a las hojas de L . Entonces definimos S'_{n+1} como la subsuperficie compacta con cúspides cuyas componentes de frontera son los representantes geodésicos de $f(\partial S_p)$, obteniendo así que $S'_n \subset S'_{n+1}$, $S_{n+1} \subset S'_{n+1}$ y $\partial S'_{n+1}$ transversa a L .

Dada L una laminación en una superficie hiperbólica S , decimos que ella es *minimal* si para toda hoja l de L se tiene que $L \setminus l$ no es laminación. La proposición siguiente clarifica la estructura que tienen las laminaciones $L \cap S_i$. Recordemos que el soporte de una medida transversa consiste en los puntos p para los cuales todo arco transverso τ que contenga a p tiene medida positiva.

Proposición 4.3. *Consideramos la laminación $L_n \doteq L \cap S_n$. Ella tiene una sublaminación que consiste de: una cantidad finita de sublaminaciones compactas minimales $\{\Gamma_1^n, \dots, \Gamma_{s(n)}^n\}$ contenidas en el interior de S_n ; una cantidad finita de familias de arcos propios paralelos de la forma $A \times I$, donde A es un espacio métrico compacto y totalmente desconexo e I es un intervalo cerrado de \mathbb{R} (posiblemente infinito), las cuales denotamos por $\{A_1^n \times I_1^n, \dots, A_{r(n)}^n \times I_{r(n)}^n\}$. Además, toda hoja de L_n que no pertenece a esta sublaminación se acumula en al menos una de las sublaminaciones minimales compactas de L_n y el soporte de toda medida transversa en L_n está contenido en esta sublaminación.*

La prueba la proposición anterior se encuentra en la Sección 4 de [BR22], ella está basada principalmente en el Teorema de clasificación de laminaciones en superficies de tipo finito, véase Teorema I.4.2.9 de [CEM06].

Denotamos por $\mathcal{M}(L_n)$ al cono de medidas transversas a L_n . Por la proposición anterior y el Ejemplo 3.2 tenemos que $\mathcal{M}(L_n) = \prod_{i=1}^{r(n)} \mathcal{M}(A_i^n) \times \prod_{i=1}^{s(n)} \mathcal{M}(\Gamma_i^n)$.

¹ $\text{MCG}^+(S)$ es el grupo de clases de isotopía de homomorfismos de S que preservan orientación.

En cada $\mathcal{M}(L_n)$ identificamos todas las medidas en cada $\mathcal{M}(A_i^n)$ con la misma medida total, de manera más precisa tenemos la aplicación cociente siguiente

$$\begin{aligned} \Psi_n : \prod_{i=1}^{r(n)} \mathcal{M}(A_i^n) \times \prod_{i=1}^{s(n)} \mathcal{M}(\Gamma_i^n) &\longrightarrow \prod_{i=1}^{r(n)} \mathbb{R}_+ \times \prod_{i=1}^{s(n)} \mathcal{M}(\Gamma_i^n) \doteq C_n \\ (\mu_1, \dots, \mu_{r(n)}, \nu_1, \dots, \nu_{s(n)}) &\longmapsto (\mu_1(A_1^n), \dots, \mu_{r(n)}(A_{r(n)}^n), \nu_1, \dots, \nu_{s(n)}). \end{aligned}$$

Cada cono $\mathcal{M}(\Gamma_i)$ es finito dimensional, véase la Sección 1.9.1 de [Cal07], por lo tanto el cono C_n es un cono simplicial finito dimensional.

La situación puede resumirse en el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{M}(L_1) & \xleftarrow{\rho_1} & \mathcal{M}(L_2) & \xleftarrow{\rho_2} & \mathcal{M}(L_3) & \xleftarrow{\rho_3} & \dots & \mathcal{M}(L) \\ \downarrow \Psi_1 & & \downarrow \Psi_2 & & \downarrow \Psi_3 & & & \downarrow \Psi \\ C_1 & \xleftarrow{\pi_1} & C_2 & \xleftarrow{\pi_2} & C_3 & \xleftarrow{\pi_3} & \dots & \mathcal{W}(L), \end{array}$$

las aplicaciones ρ_n en el renglón de arriba son simplemente la restricción de cada medida transversa en L_{n+1} sobre la laminación L_n e inducen naturalmente un sistema inverso de conos. Las funciones $\Psi_n : \mathcal{M}(L_n) \rightarrow C_n$ son las aplicaciones cociente previamente definidas. Las funciones π_n en el renglón inferior son las aplicaciones inducidas en los conos cocientes que hacen conmutar los diagramas y de igual manera inducen un sistema inverso. Denotamos por $\mathcal{W}(L)$ en el renglón inferior al límite inverso del sistema $C_n \xleftarrow{\pi_n} C_{n+1}$. Puede verificarse que las aplicaciones π_n son lineales, pues Ψ_{n+1} , ρ_n y Ψ_n son todas lineales. La aplicación Ψ es (Ψ_1, Ψ_2, \dots) .

El teorema principal es:

Teorema 4.4. (Teorema 4.2 de [BR22]). *La aplicación $\Psi : \mathcal{M}(L) \rightarrow \mathcal{W}(L)$ es un homeomorfismo lineal.*

Por limitantes de espacio solo presentamos las ideas principales de la demostración:

1. $\mathcal{M}(L)$ es el límite inverso del sistema inverso $\mathcal{M}(L_n) \xleftarrow{\rho_n} \mathcal{M}(L_{n+1})$. Se sigue de las definiciones.
2. Las aplicaciones cocientes Ψ_n son propias y sobreyectivas. Basta probar que las aplicaciones $\mathcal{M}(A_i^n) \rightarrow \mathbb{R}_+$ son propias y sobreyectivas. Para ver la sobreyectividad, dada $c \in \mathbb{R}_+$, consideramos $c\delta$, con $\delta \in \text{Ext}(\mathcal{P}(A_i^n))$. Para verificar que $\mathcal{M}(A_i^n) \rightarrow \mathbb{R}_+$ es propia, basta ver que cada subconjunto de $\mathcal{M}(A_i^n)$ con medida total menor o igual a $c \in \mathbb{R}_+$ es compacto en la topología débil*, pero esto se sigue de que el espacio de medidas de probabilidad $\mathcal{P}(A_i^n)$ es compacto en la topología débil*.
3. Ψ es lineal, continua, propia y sobreyectiva. Esto es consecuencia de que cada Ψ_n lo es, junto con algunas propiedades de sistemas inversos.

4. Finalmente, Ψ es inyectiva. Esta es la principal dificultad de la prueba y resulta ser consecuencia de que S es de primer tipo. Puede consultarse una prueba detallada de este punto (y también de los puntos anteriores) en la Sección 4.3 de [BR22].

Observe que los puntos anteriores bastan para probar que Ψ es homeomorfismo lineal, pues una aplicación propia entre espacios métricos es cerrada y tanto $\mathcal{M}(L)$ como $\mathcal{W}(L)$ son metrizablees.

En efecto, $\mathcal{M}(L)$ es subespacio del producto de los conos $\prod_{i=1}^{r(n)} \mathcal{M}(A_i^n) \times \prod_{i=1}^{s(n)} \mathcal{M}(\Gamma_i^n)$, donde cada $\mathcal{M}(A_i^n)$ admite la métrica de Levi-Prohorov, véase Lema 2.1.3 de [OV16] y cada $\mathcal{M}(\Gamma_i^n)$ es metrizable pues es finito dimensional.

Por otro lado, $\mathcal{W}(L)$ es metrizable pues es subespacio del producto de conos C_n y cada uno de estos conos es metrizable porque es finito dimensional.

Emplearemos las últimas páginas en explicar con detalle las aplicaciones π_n y entender algún ejemplo de un cono de medidas transversas a una laminación usando límites inversos.

Denotamos por $l_1^n, \dots, l_{r(n)}^n$ las clases de homotopía de arcos propios en L_n y por $\Gamma_1^n, \dots, \Gamma_{s(n)}^n$ a las sublaminaciones minimales compactas contenidas en el interior de S_n . Entonces, los arcos en la clase de homotopía l_i^n forman una familia de arcos paralelos $A_i^n \times I_i^n$ donde A_i^n es un espacio métrico, compacto, y totalmente desconexo e I_i^n es un intervalo cerrado (posiblemente infinito) de \mathbb{R} . Existe $s_0 \geq 0$ de modo que $\Gamma_1^{n+1}, \dots, \Gamma_{s_0}^{n+1}$ intersectan a S_n en un conjunto (posiblemente vacío) de arcos, mientras que $\Gamma_{s_0+1}^{n+1}, \dots, \Gamma_{s(n+1)}^{n+1}$ están todas contenidas en S_n .

Tenemos que $\mathcal{M}(L_n) = \prod_{i=1}^{r(n)} \mathcal{M}(A_i^n) \times \prod_{i=1}^{s(n)} \mathcal{M}(\Gamma_i^n)$ y $C_n = \prod_{i=1}^{r(n)} \mathbb{R}_+ \times \prod_{i=1}^{s(n)} \mathcal{M}(\Gamma_i^n)$. Consideramos a e_j^n como el elemento básico que es 1 en el j -ésimo factor \mathbb{R}_+ de $\prod_{i=1}^{r(n)} \mathbb{R}_+$. De esta manera podemos escribir a todo elemento $w \in C_n$ como

$$w = \sum_{i=1}^{r(n)} b_i^n e_i^n + \sum_{i=1}^{s(n)} \nu_i^n,$$

donde cada $b_i^n \geq 0$ y $\nu_i^n \in \mathcal{M}(\Gamma_i^n)$ para cada i . Si $\nu \in \mathcal{M}(L_n)$ entonces $\Psi_n(\nu) = \sum_{i=1}^{r(n)} b_i^n e_i^n + \sum_{i=1}^{s(n)} \nu_i^n$, donde b_i^n es la medida $\nu(\tau_i^n)$ de una transversal τ_i^n que intersecta a cada arco de l_i^n exactamente una vez y es disjunto de $L_n \setminus l_i^n$; y ν_i^n es simplemente la restricción de ν a Γ_i^n , $\nu_i^n \doteq \nu|_{\Gamma_i^n}$. Nos referiremos a los elementos de C_n como *pesos*, que asignan un número real positivo a cada clase de homotopía de arcos l_i^n y una medida transversa a cada sublaminación minimal compacta Γ_i^n . A C_n lo llamaremos el *cono de pesos* de L_n .

Para $1 \leq j \leq r(n+1)$, escogemos un arco h de l_j^{n+1} . Para $1 \leq i \leq r(n)$ denotamos $a_{i,j}^n$ el número de arcos de $h \cap S_n$ que pertenecen a la clase de homotopía l_i^n . Entonces, $A_j^{n+1} \times I_j^{n+1}$ pasa por $A_i^n \times I_i^n$ exactamente $a_{i,j}^n$ veces. Informalmente podemos decir que l_j^{n+1} atraviesa a l_i^n $a_{i,j}^n$ veces. De lo anterior, observamos que podemos particionar el arco τ_j^n en subarcos transversos de los cuales $a_{i,j}^n$ de ellos son homotópicos a τ_j^{n+1} para cada $1 \leq j \leq r(n+1)$, y el resto de ellos son disjuntos de $l_1^{n+1} \cup \dots \cup l_{r(n+1)}^{n+1}$. Los subarcos de τ_j^n que son disjuntos de $l_1^{n+1} \cup \dots \cup l_{r(n+1)}^{n+1}$ intersectan las distintas sublaminaciones minimales compactas Γ_j^{n+1} para $1 \leq j \leq s_0$ y a las hojas que se enredan en tales Γ_j^{n+1} ,

pero son disjuntas del resto de hojas de L_{n+1} . Por lo tanto, si $\nu \in \mathcal{M}(L_{n+1})$ se tiene que

$$\nu(\tau_n^i) = \sum_{j=1}^{r(n+1)} a_{i,j}^n \nu(\tau_j^{n+1}) + \sum_{j=1}^{s_0} (\nu|_{\Gamma_j^{n+1}})(\tau_i^n).$$

De donde se sigue que si $w = \sum_{j=1}^{r(n+1)} b_j^{n+1} e_j^{n+1} + \sum_{j=1}^{s(n+1)} \nu_j^{n+1}$ entonces

$$\pi_n(w) = \sum_{i=1}^{r(n)} \sum_{j=1}^{r(n+1)} a_{i,j}^n b_j^{n+1} e_i^n + \sum_{i=1}^{r(n)} \sum_{j=1}^{s_0} \nu_j^{n+1}(\tau_i^n) e_i^n + \sum_{j=s_0+1}^{s(n+1)} \nu_j^{n+1}.$$

Observe que para $s_0 + 1 \leq j \leq s(n+1)$, ν_j^{n+1} se encuentra en C_n , pues Γ_j^{n+1} está contenida en el interior de S_n en estos casos.

Un caso sencillo de entender es cuando L_n y L_{n+1} no contienen sublaminaciones minimales compactas Γ_*^* . Entonces $C_n = \mathbb{R}_+^{r(n)}$, $C_{n+1} = \mathbb{R}_+^{r(n+1)}$, y por lo tanto $\pi_n(w) = \sum_{i=1}^{r(n)} \sum_{j=1}^{r(n+1)} a_{i,j}^n b_j^{n+1} e_i^n$. De modo que π_n puede representarse con la matriz $r(n) \times r(n+1)$ -dimensional $(a_{i,j}^n)$.

En el ejemplo siguiente clarificamos lo anterior.

Ejemplo 4.5. Consideramos S la superficie conocida como *monstruo del lago Ness*. Es la única superficie orientable de tipo infinito con género infinito y cuyo espacio de fines consta de un solo punto, consideramos en ella una métrica hiperbólica que la haga de primer tipo. Consideramos la laminación L , cuyo bosquejo está en la Figura 4.1, que consiste de una cantidad numerable de arcos aislados propios no homotópicos entre sí, denotados por l_i , que se acumulan en un único arco propio l .

Podemos construir a partir de γ en la Figura 4.1, un arco transversal τ que intersecte a cada hoja de L exactamente una vez, de donde se sigue que $\mathcal{M}(L)$ es linealmente homeomorfo a $\mathcal{M}(L \cap \tau)$. La intersección $L \cap \tau$ tiene la estructura de una sucesión convergente, digamos $L \cap \tau \cong \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, cuyo cono de medidas estudiamos en el Ejemplo 2.6, donde vimos que $\mathcal{M}(L \cap \tau)$ es linealmente homeomorfo al subcono de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ determinado por las desigualdades $x_1 \geq x_2 \geq \dots$. Ahora procederemos utilizando límites inversos.

Consideramos la saturación cuyas componentes de frontera son las curvas rojas en la Figura 4.1. Podemos observar que cada S_n es una superficie compacta de género n con una única componente de frontera. Cada $L \cap S_n$ consta de n clases de homotopía de arcos $l_1^n, l_2^n, \dots, l_n^n$, cuyo etiquetado se bosqueja en la Figura 4.1. Siguiendo el etiquetado mencionado se tiene que para $1 \leq i \leq n$, $l_i^{n+1} \cap S_n$ es un único arco que pertenece a la clase l_i^n , mientras que $l_{n+1}^{n+1} \cap S_n$ es un único arco que pertenece a la clase l_n^n . Es por ello que:

$$a_{i,j}^n = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 1, & \text{si } j = i + 1 = n + 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo anterior dicho, cada $C_n = \mathbb{R}_+^n$, y el límite inverso $\mathcal{W}(L)$ es:

$$\mathbb{R}_+ \xleftarrow{\pi_1} \mathbb{R}_+^2 \xleftarrow{\pi_2} \mathbb{R}_+^3 \xleftarrow{\pi_3} \dots \mathcal{W}(L),$$

donde cada π_n se representa por una matriz de $n \times (n + 1)$, como sigue

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

Afirmamos que $\mathcal{M}(L) \cong \mathcal{W}(L)$ es linealmente homeomorfo al cono $C \subset \ell^1$, definido por

$$C = \left\{ (x, y_1, y_2, \dots) \mid y_i \geq 0 \text{ para toda } i \in \mathbb{N} \text{ y } x \geq \sum_{i=1}^{\infty} y_i \right\},$$

donde ℓ^1 es el espacio de series convergentes dotado de la topología débil* como espacio dual del espacio c_0 de sucesiones convergentes a 0, y C está dotado de la topología de subespacio de ℓ^1 . La prueba es como sigue.

Un elemento del límite inverso $\mathcal{W}(L)$ lo representamos de la manera siguiente

$$\overleftarrow{x} = \left((x_0^0), \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix}, \dots \right),$$

donde además se deben satisfacer las condiciones

$$\pi_1 \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = (x_0^0), \pi_2 \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}, \pi_3 \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \\ x_4^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Realizando los cálculos obtenemos que

$$x_0^0 = x_1^1 + x_2^1 = x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 = x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 + x_4^1 = \dots,$$

y para cada $n \geq 1$ se tiene que

$$x_n^n = x_n^{n+1} = x_n^{n+2} = \dots$$

Entonces, cada elemento \overleftarrow{x} está completamente determinado por $(x_0^0, x_1^1, x_2^2, \dots)$. Más aún, para cada $k \in \mathbb{N}$ se satisface que $\sum_{i=1}^k x_i^i \leq x_0^0$. De donde se sigue que, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^i \leq x_0^0 < \infty$.

Definimos la función

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{W}(L) &\longrightarrow C \\ \overleftarrow{x} &\longmapsto (x_0^0, x_1^1, x_2^2, \dots), \end{aligned}$$

la cual está bien definida por los argumentos anteriores y es lineal. La función inversa Φ^{-1} está dada por

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : C &\longrightarrow \mathcal{W}(L) \\ (x, y_1, y_2, \dots) &\longmapsto \left((x), \begin{pmatrix} y_1 \\ x - y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ x - y_1 - y_2 \end{pmatrix}, \dots \right). \end{aligned}$$

Es posible probar que ambas funciones son continuas. Φ^{-1} es continua pues las funciones coordenadas x y y_n son continuas. Es posible verificar que Φ es continua usando el hecho que ℓ^1 está dotado con la topología débil* como espacio dual de c_0 .

El homeomorfismo lineal entre C y el cono $C_\tau \doteq \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \mid x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots\}$ del Ejemplo 2.6 es:

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow C_\tau \\ (x, y_1, y_2, \dots) &\longmapsto (x, x - y_1, x - y_1 - y_2, \dots). \end{aligned}$$

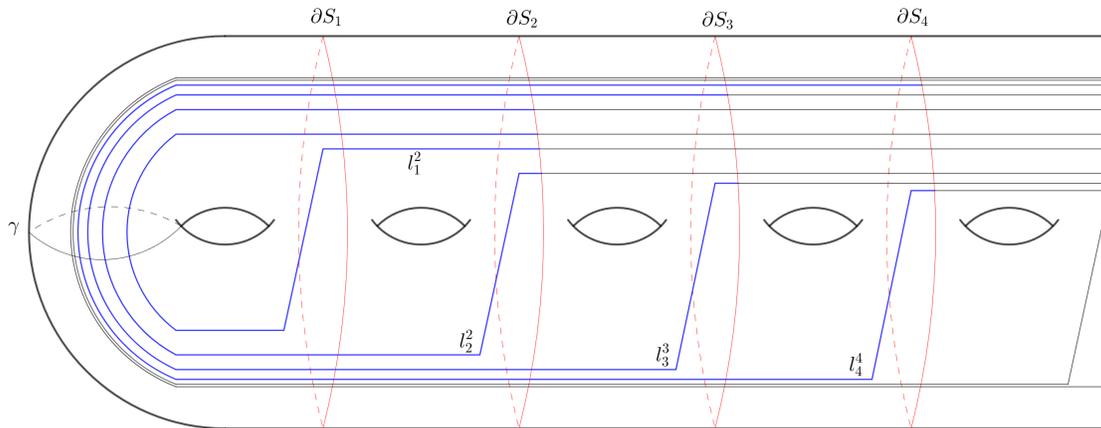


Figura 4.1: Laminación en la superficie *monstruo del lago Ness* que consiste en una cantidad numerable de arcos propios aislados que se acumulan a un único arco propio. En rojo, las componentes de frontera de las subsuperficies que forman la saturación. En azul, se resaltan algunos arcos para clarificar el etiquetado tomado de las familias de homotopía en las intersecciones de la laminación L con las subsuperficies de la saturación S_n .

Bibliografía

- [Ara12] Aramayona, Javier. Hyperbolic structures on surfaces. In: *Geometry, Topology and Dynamics of Character Varieties*. World Scientific, 2012, pp. 65-94. Disponible en: https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789814401364_0002 (vid. pág. 1).
- [BŠ17] Basmajian, Ara y Šarić, Dragomir. Geodesically complete hyperbolic structures. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 2017, vol. 166, n.º 2, pp. 219-242. ISSN 1469-8064. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1017/S0305004117000792> (vid. pág. 13).
- [BR22] Bestvina, Mladen y Rasmussen, Alexander J. *Transverse measures to infinite type laminations*. 2022. Disponible en: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.00164>. Preprint. Por aparecer en *Comment. Math. Helv.* (vid. págs. i, ii, 9, 13-15).
- [Bil99] Billingsley, Patrick. *Convergence of Probability Measures*. 2.^a ed. Estados Unidos de América: Wiley Interscience, 1999. ISBN 978-0-470-31696-2. Disponible en: <https://doi.org/10.1002/9780470316962> (vid. pág. 6).
- [Bou98] Bourbaki, Nicolas. *General Topology: Chapters 1 - 4*. Alemania: Springer-Verlag, 1998. ISBN 978-3-642-61701-0. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61701-0> (vid. pág. 12).
- [Cal07] Calegari, Danny. *Foliations and the geometry of 3-manifolds*. Inglaterra: Oxford University Press, 2007. ISBN 978-0-198-57008-0 (vid. págs. 10, 14).
- [CEM06] Canary, Richard; Epstein, David y Marden, Albert. *Foundamentals of Hyperbolic Manifolds: Selected Expositions*. Inglaterra: Cambridge University Press, 2006. ISBN 978-1-139-10698-6. Disponible en: <https://doi.org/10.1017/CB09781139106986> (vid. págs. ii, 13).
- [EW07] Einsiedler, Manfred y Ward, Thomas. *Functional analysis, spectral theory and applications*. Estados Unidos de América: Springer Cham, 2007. ISBN 978-3-319-58540-6. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-58540-6> (vid. pág. 6).
- [Hub06] Hubbard, John H. *Teichmüller Theory and applications to Geometry Topology and Dynamics*. Estados Unidos de América: Matrix Editions, 2006. ISBN 978-0-971-57662-9 (vid. págs. 1-3).
- [Kat92] Katok, Svetlana. *Fuchsian Groups*. Estados Unidos de América: The University of Chicago Press, 1992. ISBN 0-226-42582-7 (vid. pág. 1).

- [OV16] Oliveira, Kjerfve y Viana, Marcelo. *Foundations of Ergodic Theory*. Inglaterra: Cambridge University Press, 2016. ISBN 978-1-316-42260-1. Disponible en: <https://doi.org/10.1017/CB09781316422601> (vid. págs. 11, 15).
- [Pei20] Peifer, Christian Jonas. *Choquet theory: Representation of compact convex sets*. Dinamarca, 2020. Disponible en: https://web.math.ku.dk/~musat/Christian_Peifer_Bachelor.pdf. Bachelor's Thesis. Department of Mathematical Sciences of University of Copenhagen (vid. pág. 11).
- [Phe01] Phelps, Robert R. *Lectures on Choquet's theorem*. Alemania: Springer-Verlag, 2001. ISBN 978-3-540-41834-4. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/b76887> (vid. pág. 11).
- [Šar21] Šarić, Dragomir. Train tracks and measured laminations on infinite surfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*. 2021, vol. 374, p. 1. Disponible en: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1902.03437> (vid. pág. 2).

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Maestría en Ciencias Matemáticas	
Título del trabajo	Cono de medidas transversas en laminaciones geodésicas de tipo infinito	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Néstor Uriel Angiano Huitvón	1224735j@umich.mx
Director	Dr. José Fermán Valdez Lorenzo	fernán@matmor.umich.mx
Codirector		
Coordinador del programa	Dr. Reynaldo Rojas Hernández	reynaldo.hernandez@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	No	

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	No	
Traducción a otra lengua	No	
Revisión y corrección de estilo	No	
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	No	
Generación de contenido multimedia	No	
Otro	No	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	Néstor Uribe
Lugar y fecha	Moralia, Michoacán. 30 de octubre del 2024.

Néstor Uriel Anguiano Huitrón

Cono de medidas transversas en laminaciones geodésicas de tipo infinito.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:400558119

Fecha de entrega

31 oct 2024, 12:40 p.m. GMT-6

Fecha de descarga

31 oct 2024, 12:42 p.m. GMT-6

Nombre de archivo

Cono de medidas transversas en laminaciones geodésicas de tipo infinito.pdf

Tamaño de archivo

1019.0 KB

25 Páginas

9,141 Palabras

41,953 Caracteres

5% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Fuentes principales

- 5%  Fuentes de Internet
- 1%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión



Caracteres reemplazados

130 caracteres sospechosos en N.º de páginas

Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.